

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Génie Industriel**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Laura PICHERAL**

Thèse dirigée par **Jean BIGEON** et  
codirigée par **Khaled HADJ-HAMOU**

préparée au sein du **Laboratoire G-SCOP**  
dans l'**École Doctorale I-MEP2**

# Contribution à la conception préliminaire robuste en ingénierie de produit

Thèse soutenue publiquement le **27 septembre 2013**,  
devant le jury composé de :

**M. Claude MARCHAND**

Professeur à l'Université Paris-Sud, Président

**M. Jean-Yves DANTAN**

Professeur à l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Rapporteur

**M. Lionel ROUCOULES**

Professeur à l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Rapporteur

**M. Patrice JOYEUX**

Docteur-Ingénieur à Hager, Examineur

**M. Khaled HADJ-HAMOU**

Maître de Conférences à Grenoble-INP, Co-encadrant

**M. Jean BIGEON**

Directeur de Recherche au CNRS, Directeur





---

## **Contribution à la conception préliminaire robuste en ingénierie de produit**

---

Les travaux présentés dans cette thèse portent sur la conception robuste de produit et plus particulièrement sur la phase de pré-dimensionnement dans le cas où un modèle de dimensionnement et un cahier des charges sont déjà définis. Une approche pour réaliser de l'optimisation robuste est proposée pour réduire la dispersion de la fonction objectif du cahier des charges du produit lorsque les paramètres de conception sont sujets aux incertitudes, conserver une bonne performance du produit et assurer une faisabilité des contraintes.

Nous proposons ainsi la formulation d'un cahier des charges dit « robuste » transformant la fonction objectif et les contraintes du cahier des charges initial afin d'intégrer une notion de robustesse préalablement définie. La seconde contribution est une analyse des méthodes trouvées dans la littérature pour la propagation d'incertitudes à travers des modèles de dimensionnement. Les variations des paramètres sont alors modélisées par des dispersions probabilistes. L'analyse théorique du fonctionnement de chaque méthode est complétée par des tests permettant d'étudier la précision des résultats obtenus et de sélectionner la méthode utilisée par la suite. L'approche pour l'optimisation robuste de produit proposée dans ce travail est finalement mise en œuvre et testée sur deux études de cas. Elle intègre la méthode de propagation d'incertitudes dans une boucle de l'algorithme d'optimisation de manière à automatiser la recherche d'une solution optimale robuste pour le dimensionnement du produit.

### **Mots-clefs**

Conception robuste, Pré-dimensionnement, Robustesse, Propagation d'incertitudes, Optimisation.

---

## **Contribution to the robust preliminary design in product engineering**

---

The work presented in this thesis deals with the robust design of products. Particularly, it focuses on the design process preliminary phase where design models and specifications are already defined. A robust optimization approach is proposed. It aims to: reduce the scattering of the objective function included in the product specifications when the uncertainties reach the design parameters, maintain good performance of the product and ensure the constraints feasibility.

We propose a new “robust” product specification that changes the objective function and the constraints of the initial specification in order to integrate the concept of robustness previously defined. The second contribution is an analysis of methods found in literature to propagate uncertainties across design models. Design parameter variations are modeled by probability distributions. The theoretical analysis of these methods is completed by numerous tests to investigate the accuracy of the results and to select the method used thereafter. The robust product optimization approach proposed in this work is finally implemented and tested on two case studies. It incorporates the propagation of uncertainties within the optimization loop to automate the search of a robust optimal solution for the design product.

### **Keywords**

Robust design, Preliminary design, Robustness, Uncertainties propagation, Optimization.



# Table des matières

1.	Introduction générale.....	1
2.	Le pré-dimensionnement.....	5
2.1.	Introduction.....	5
2.2.	Le principe du pré-dimensionnement.....	6
2.2.1.	Les paramètres.....	7
2.2.2.	Le modèle de dimensionnement.....	7
2.2.3.	Le cahier des charges.....	11
2.2.4.	Exemple : pré-dimensionnement d'un moteur électrique.....	12
2.3.	Les incertitudes en conception de produit.....	15
2.3.1.	Deux types d'incertitudes dans les modèles de pré-dimensionnement.....	15
2.3.2.	Conséquences des incertitudes sur les paramètres de conception.....	16
2.3.3.	Gains dans la maîtrise des incertitudes en pré-dimensionnement.....	16
2.4.	Conclusion.....	18
3.	La conception robuste.....	21
3.1.	Introduction.....	21
3.2.	Modélisation des incertitudes.....	22
3.2.1.	Modélisation par intervalles.....	22
3.2.2.	Modélisation par ensembles flous.....	23
3.2.3.	Modélisation probabiliste.....	24
3.2.4.	Bilan et positionnement.....	24
3.3.	Discussion autour de la robustesse dans un cahier des charges.....	26
3.3.1.	Cahier des charges composé uniquement de contraintes.....	26
3.3.2.	Cahier des charges composé de contraintes et d'objectifs.....	29
3.4.	Expression du cahier des charges robuste.....	32
3.4.1.	Expression basée sur l'évaluation des coûts.....	32
3.4.2.	Expression basée sur des paramètres physiques.....	33
3.4.3.	Choix des formulations adoptées pour l'optimisation robuste.....	41
3.5.	Conclusion.....	43
4.	Propagation d'incertitudes.....	45
4.1.	Introduction.....	45
4.2.	Généralités sur l'approche probabiliste.....	45
4.2.1.	Variables aléatoires continues.....	45

4.2.2.	Les lois de probabilités continues.....	46
4.2.3.	Notions de Moments statistiques.....	47
4.2.4.	Covariance et indépendance des paramètres .....	49
4.2.5.	Transformations probabilistes .....	49
4.3.	Principe de la propagation d'incertitudes .....	52
4.4.	Applications possibles en dimensionnement de produit.....	52
4.5.	Méthodes pour la propagation d'incertitudes .....	54
4.5.1.	Simulations de Monte-Carlo.....	54
4.5.2.	Simulations de Monte-Carlo améliorées .....	56
4.5.3.	Méthode « Propagation of Variance ».....	59
4.5.4.	Méthode « Dimension-reduction method » .....	68
4.5.5.	Méthode des Polynômes de Chaos .....	72
4.6.	Comparaison des méthodes de propagation d'incertitudes .....	78
4.6.1.	Caractéristiques des méthodes étudiées et outils pour l'implémentation .....	79
4.6.2.	Comparaison par des critères relatifs à la théorie.....	79
4.6.3.	Comparaison par des critères relatifs à l'implémentation .....	83
4.6.4.	Bilan des comparaisons et positionnement.....	93
4.7.	Conclusion.....	94
5.	Une approche pour l'optimisation robuste .....	97
5.1.	Introduction .....	97
5.2.	Méthodologie pour l'optimisation robuste .....	99
5.2.1.	Surfaces de réponse .....	101
5.2.2.	Algorithmes d'optimisation.....	103
5.3.	Etudes de cas .....	107
5.3.1.	Dimensionnement d'un moteur électrique .....	108
5.3.2.	Dimensionnement d'un déclencheur électromécanique .....	115
5.4.	Conclusion.....	127
6.	Conclusion générale et perspectives.....	129
	Références .....	133

# Liste des figures

Figure 2.1 - Cycle de vie du produit.....	5
Figure 2.2 - Processus de conception (extrait de (Scaravetti, 2004)).....	6
Figure 2.3 - Principe du dimensionnement de produit .....	6
Figure 2.4 - Illustration d'un modèle analytique .....	9
Figure 2.5 - Illustration d'un modèle numérique .....	10
Figure 2.6 - Représentation de la structure du moteur électrique .....	13
Figure 2.7 - Evolution des coûts engagés sur le projet et des coûts de développement (Scaravetti, 2004) .....	17
Figure 3.1 - Cahier des charges non-robuste pour un paramètre de sortie $Y$ .....	27
Figure 3.2 - Propagation d'incertitude à travers la contrainte du paramètre $Y$ .....	28
Figure 3.3 - Espace des solutions robustes pour le paramètre $Y$ .....	29
Figure 3.4 - Représentation de la fonction objectif .....	30
Figure 3.5 - Représentation d'une contrainte d'un paramètre de sortie.....	30
Figure 3.6 - Robustesse sur la fonction objectif du cahier des charges.....	31
Figure 3.7 - Robustesse sur les contraintes du cahier des charges .....	31
Figure 3.8 - Principe du Six-Sigma .....	40
Figure 3.9 - Illustration de la contrainte de type intervalle sur $Y$ .....	43
Figure 4.1 - Densité de probabilité de la variable aléatoire $X$ .....	46
Figure 4.2 - Principe de propagation d'incertitudes .....	52
Figure 4.3 - Division de l'espace des probabilités .....	59
Figure 4.4 - Calcul de la moyenne $\hat{\mu}_{Vu}$ pour différentes méthodes et différents ordres de grandeur des écart-types des paramètres d'entrée.....	88
Figure 4.5 - Calcul de l'écart-type de $\hat{\sigma}_{Vu}$ pour différentes méthodes et différents ordres de grandeur des écart-types des paramètres d'entrée.....	91
Figure 4.6 - Interprétation de l'intervalle de tolérance par le principe Six Sigma .....	93
Figure 5.1 - Démarche par essai-erreur .....	98
Figure 5.2 - Démarche automatisée par optimisation robuste.....	98
Figure 5.3 - Scénarios pour l'optimisation robuste .....	100
Figure 5.4 - Recherche d'un optimum par un algorithme IBBA (extrait de (Mazhoud, 2010)) .....	105
Figure 5.5 - Essaim particulière en mouvement vers l'optimum (extrait de (Tsai and Kao, 2011)).....	106
Figure 5.6 - Front de Pareto pour l'optimisation robuste du dimensionnement d'un moteur électrique.....	112
Figure 5.7- Evolution de $\mu_{Perte}(\alpha)$ , $\sigma_{Gain}(\alpha)$ et de l'Index proposé .....	114
Figure 5.8 - Schéma du dispositif de déclenchement.....	116

# Liste des tableaux

Tableau 2.1 - Valeur des paramètres de conception fixes.....	15
Tableau 3.1 - Pourcentage de valeurs comprises dans $\mu_Y - k\sigma_Y; \mu_Y + k\sigma_Y$ en fonction de la valeur de $k$ .....	43
Tableau 4.1 - Transformations probabilistes $U \rightarrow X$ pour différentes distributions de probabilité.....	51
Tableau 4.2 - Sélection aléatoire des combinaisons des valeurs pour les paramètres d'entrée (les croix indiquent les combinaisons de valeurs) .....	59
Tableau 4.3 - Caractéristiques des méthodes sur des critères relatifs à la théorie .....	81
Tableau 4.4 - Valeurs des paramètres de conception fixes .....	85
Tableau 4.5 - Moyenne des distributions de probabilité normales des paramètres de conception variables .....	85
Tableau 4.6 - Valeurs de $\hat{\mu}_{Vu}$ pour différentes méthodes et différents écart-types des paramètres d'entrée ( $* 10^{-4}$ ).....	87
Tableau 4.7 - Pourcentage d'erreur $\%_{erreur}$ des résultats obtenus par les différentes méthodes de calcul de $\hat{\mu}_{Vu}$ comparé à la méthode de référence Monte-Carlo $10^6$ simulations.....	87
Tableau 4.8 - Valeurs de $\hat{\sigma}_{Vu}$ pour différentes méthodes et différents écart-types des paramètres d'entrée ( $* 10^{-6}$ ).....	90
Tableau 4.9 - Pourcentage d'erreur $\%_{erreur}$ des résultats obtenus par les différentes méthodes pour $\hat{\sigma}_{Vu}$ comparé à la méthode de référence Monte-Carlo $10^6$ simulations...	90
Tableau 5.1 - Résultats de l'optimisation robuste du volume des parties utiles du moteur électrique.....	111
Tableau 5.2 - Indicateurs pour le choix d'un compromis .....	114
Tableau 5.3 - Paramètres de conception du modèle de dimensionnement du contacteur .....	116
Tableau 5.4 - Valeur des paramètres de conception fixes.....	121
Tableau 5.5 - Résultats de l'optimisation robuste d'un dispositif de déclenchement par PSO avec 20 particules, 50 itérations et 20 exécutions.....	125
Tableau 5.6 - Résultats de l'optimisation robuste d'un dispositif de déclenchement par PSO avec 30 particules, 200 itérations et 20 exécutions.....	126

# 1. Introduction générale

Notre monde en constante évolution impose aux entreprises de rester compétitives. Elles doivent avoir la capacité de répondre rapidement aux demandes diverses et variées des clients. Ainsi les entreprises doivent innover, produire en plus grande quantité, réduire les coûts afin de réaliser des bénéfices... La maîtrise du temps, du marché, et des coûts, malgré les aléas que peuvent rencontrer les entreprises peut contribuer à la prospérité économique d'une entreprise. Pour atteindre ces objectifs, l'entreprise doit concevoir des produits de qualité à moindres coûts.

L'activité de conception de produit joue un rôle majeur dans la réussite financière de l'entreprise. Des études ont montré qu'il est nécessaire qu'une entreprise concentre ses efforts en amont du processus de développement d'un produit. En effet, « alors que les études de conception représentent en moyenne 5% du coût total d'un produit, ces activités de conception déterminent 75% du coût total du même produit » (Leclair et al., 1997). Nous nous intéressons particulièrement aux phases préliminaires de la conception, communément appelées pré-dimensionnement. Le pré-dimensionnement est un processus permettant d'obtenir un dossier de définition du produit satisfaisant un modèle de dimensionnement et un cahier des charges. Ce dossier de définition regroupe alors tous les éléments nécessaires à la réalisation du produit tels que les plans de définition du produit, les nomenclatures désignant les matériaux... Le cahier des charges, quant à lui, exprime les besoins du client par des exigences et des contraintes à respecter lors du dimensionnement du produit. C'est à cette étape de conception de produit que beaucoup de décisions sont prises concernant le produit, ses phases de fabrication, d'assemblage, de conditionnement, voire d'utilisation. Mais ces décisions sont souvent remises en cause du fait que les éléments nécessaires pris en compte en conception ne sont pas toujours connus de manière précise ou certaine. En effet, une petite erreur d'estimation ou une variation constatée sur un élément de conception peut aboutir à des décisions radicalement différentes. C'est donc dans cette phase de dimensionnement de produit qu'il est indispensable d'envisager les aléas que peut subir le produit durant la phase de fabrication, d'assemblage ou lors de son utilisation. C'est le rôle de la conception robuste.

Les aléas peuvent avoir différentes origines. Par exemple, les dimensions d'un produit peuvent varier de manière plus ou moins importante autour de dimensions nominales en fonction du moyen de fabrication utilisé pour les générer. Une propriété de matériau peut aussi varier en fonction du lot de matériau utilisé pour réaliser le produit ou en fonction de l'environnement dans lequel le produit est utilisé (température, pression...). Ces variations peuvent se répercuter sur les performances du produit de manière à ce qu'il ne satisfasse pas le modèle de dimensionnement et/ou le cahier des charges. En effet, ignorer ces variations conduit inévitablement à fabriquer des produits non-conformes considérés comme rebuts au cours de la fabrication ou de l'assemblage. Rectifier ou mettre aux déchets ces produits génère un coût considérable pour l'entreprise. D'autre part, un risque peut apparaître lorsque les produits présentent des défauts ou des défaillances au cours de leur utilisation (fatigue, vieillissement...), auquel cas l'image de l'entreprise peut être affectée et des coûts de service après-vente peuvent être envisagés.

La conception robuste a pour objectif de développer des produits dont les performances sont peu sensibles aux variations des paramètres de conception permettant de le dimensionner. Elle ne vise pas à supprimer les sources d'incertitudes influençant les performances du produit, mais permet au contraire de les maîtriser en les intégrant dans la démarche de conception. En effet, la conception robuste consiste à trouver des valeurs « optimales » pour les paramètres de conception du produit permettant de réduire les variations des performances tout en les optimisant.

Une étude bibliographique des différentes pratiques proposées dans la littérature pour la conception robuste nous permet de constater que les approches présentées donnent des résultats intéressants dans des situations particulières. Ces approches ne sont pas toujours optimisées, ni automatisées, ne permettant pas de garantir des résultats précis dans des faibles délais. La méthodologie pour la conception robuste proposée et testée dans ce travail de thèse est une approche globale pour prendre en compte tous types de problème de dimensionnement robuste de produit. Grâce à son automatisation, l'approche propose l'avantage de fournir un résultat optimisé dans des délais raisonnables dans un contexte industriel.

Plusieurs études ont été menées afin de construire cette démarche pour la conception robuste. Ces études sont décrites dans les trois premiers chapitres de ce travail de thèse. Le chapitre final présente de manière globale la méthodologie proposée et les tests effectués pour la valider :

- Le premier chapitre introduit le contexte de pré-dimensionnement auquel est dédiée l'étude. Le pré-dimensionnement, étant aussi appelé conception préliminaire, peut être interprété de différentes façons selon les domaines scientifiques (mécanique, électrotechnique, magnétique, thermique,...). Dans ce chapitre, nous clarifions les différents termes nécessaires à la compréhension de la suite du manuscrit que nous illustrons à l'aide d'un exemple de pré-dimensionnement de moteur électrique. Enfin, nous introduisons les incertitudes qu'il est possible de rencontrer en conception de produit, les conséquences et les gains dans la maîtrise des incertitudes dès le pré-dimensionnement de produit.
- Le second chapitre est consacré à une analyse bibliographique des approches pour prendre en compte la robustesse sur les performances d'un produit lorsque les paramètres de conception sont soumis à des incertitudes. Nous observons très vite que la robustesse d'un produit peut s'introduire dans un cahier des charges par la réécriture des contraintes du modèle de dimensionnement et/ou d'une fonction objectif si elle est reformulée. La stabilité de la fonction objectif et la faisabilité des contraintes du modèle sont donc largement discutées dans ce chapitre dans le but de proposer une nouvelle formulation de ce que nous appelons « cahier des charges robuste ».
- Le troisième chapitre porte sur les méthodes mathématiques permettant de propager l'incertitude à travers des modèles de dimensionnement de produit. Elles ont pour objectif de calculer les variations des performances du produit en fonction des variations des paramètres de conception. Tout d'abord, nous introduisons la notion de propagation d'incertitude dans les modèles de dimensionnement. Ensuite nous effectuons une étude bibliographique des méthodes existantes. Nous avons particulièrement recensé les méthodes suivantes : deux méthodes « Monte-Carlo », deux méthodes « Propagation of

Variance », la méthode « Latin Hypercube », la méthode « Univariate Dimension-Reduction » et la méthode des « Polynômes de Chaos ». Les méthodes sont ensuite implémentées sur l'exemple d'un modèle de pré-dimensionnement d'un moteur électrique afin d'être comparées sur des critères relatifs à la théorie et également à leur mise en œuvre.

- Enfin le dernier chapitre présente la méthodologie globale proposée pour la conception robuste de produit et particulièrement pour l'optimisation robuste. L'originalité de notre approche est dans l'intégration de trois étapes : modélisation et choix d'approximation de modèle de dimensionnement, choix de méthode de reformulation de modèle pour la propagation d'incertitudes et enfin choix d'algorithmes pour l'optimisation robuste. Cette approche est ensuite testée sur des modèles de dimensionnement présentant des caractéristiques différentes. Ce travail met en évidence la difficulté pour le concepteur à choisir un compromis entre minimiser la variation de la performance ou optimiser la performance elle-même. Des outils d'aide à la décision sont proposés afin de choisir le meilleur compromis.



## 2. Le pré-dimensionnement

### 2.1. Introduction

Dans cette étude, nous nous intéressons à l'activité de conception de produits et plus particulièrement à la conception préliminaire. La conception ou processus de développement de produit se situe en amont du cycle de vie d'un produit (Figure 2.1). Le cycle de vie du produit proposé dans ce travail démarre avec l'étude du marché, au cours de laquelle un travail d'exploration est réalisé à partir d'analyses et de mesures de terrain afin de comprendre les besoins et attentes des potentiels clients. Nous définissons ensuite l'activité de conception de produit comme étant un processus permettant d'obtenir un dossier de définition nécessaire à la fabrication d'un dispositif. Un dossier de définition de produit est l'ensemble des documents permettant la caractérisation précise des pièces du produit à fabriquer. Le dossier de définition contient ainsi toutes les informations nécessaires à la fabrication du produit. La phase de fabrication du produit consiste à manufacturer les matières premières de manière à obtenir le produit fini. Le produit est ensuite distribué au client pour utilisation. En cas de panne du produit lors de la phase d'utilisation, le client peut faire appel au service de maintenance généralement assuré par l'entreprise distribuant le produit. Finalement, en fin de vie le produit peut-être recyclé, c'est-à-dire que l'on réutilise par exemple les matériaux pour fabriquer un autre produit, incinéré ou enfoui le cas échéant (Remery, 2011).

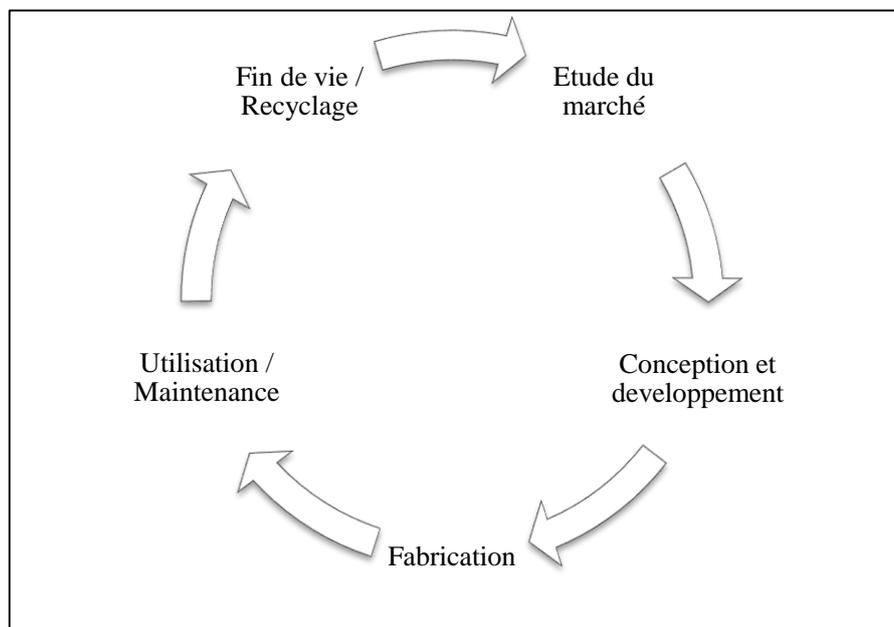


Figure 2.1 - Cycle de vie du produit

L'activité de conception de produit à laquelle nous nous intéressons est réalisée à partir d'un cahier des charges fonctionnelles (CdCF) qui exprime le besoin du client. Ainsi la conception d'un produit est composée de plusieurs phases illustrées par la Figure 2.2.

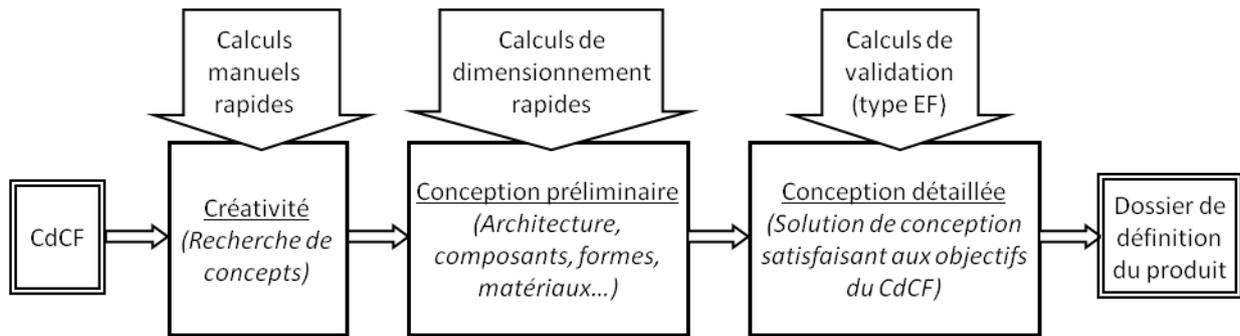


Figure 2.2 - Processus de conception (extrait de (Scaravetti, 2004))

La première étape de la conception de produit est la phase de recherche de concept. Elle fait appel à la créativité des concepteurs et les calculs réalisés sont souvent manuels, approximatifs et rapides. La phase de conception préliminaire, appelée aussi pré-dimensionnement, permet « de trouver des valeurs aux grandeurs qui caractérisent un dispositif, de sorte que toutes ces grandeurs satisfassent les contraintes du cahier des charges » (Atienza, 2003). Les grandeurs géométriques étant quantifiées, il est possible de réaliser une modélisation plus détaillée pour éventuellement réaliser des calculs de validation. Finalement, la phase de conception détaillée permet de fournir un dossier de définition du produit.

Le processus de conception est une phase cruciale puisqu'elle est située au début du cycle de vie du produit. Le droit à l'erreur dans la prise de décision est nul car chaque décision a une répercussion pour l'entreprise, positive ou néfaste. Dans ce chapitre, nous nous attelons à détailler la phase de conception préliminaire, contexte de notre étude. Nous décrivons ainsi les différents éléments intervenant dans le processus de pré-dimensionnement ainsi que les difficultés auxquelles le concepteur peut faire face.

## 2.2. Le principe du pré-dimensionnement

Le processus de pré-dimensionnement est schématisé sur la Figure 2.3. Un modèle de dimensionnement permet de calculer les paramètres de sortie (performances) en fonction des paramètres d'entrée (paramètres de conception) et du cahier des charges. Nous détaillerons dans les sections suivantes les différents éléments participant au pré-dimensionnement, à savoir, les paramètres d'entrée et de sortie, le modèle de dimensionnement, et le cahier des charges.

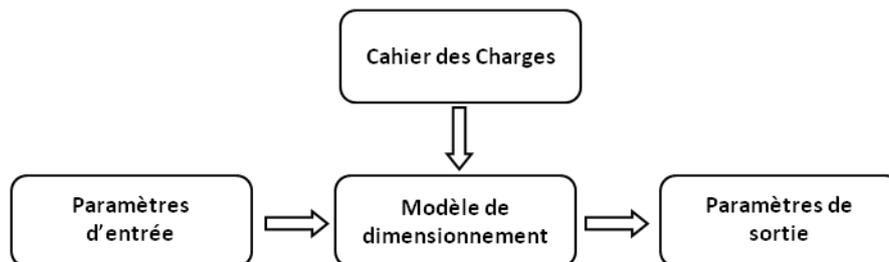


Figure 2.3 - Principe du dimensionnement de produit

## 2.2.1. Les paramètres

Selon (Caro, 2004), les paramètres peuvent être classés selon trois ensembles :

- L'ensemble des *variables de conception*, dans lequel se trouvent les paramètres du système sur lesquelles le concepteur a une influence (dimensions géométriques ou choix des matériaux en fonction de leurs propriétés,...).
- Les *paramètres de conception environnementaux* sont les paramètres concernant l'environnement du système (température, pression, niveau d'humidité, prix d'une matière première...) sur lesquels le concepteur n'a aucune maîtrise.
- Les *fonctions performances* sont les paramètres de sortie du système et dépendent des variables de conception et des paramètres de conception environnementaux.

Contrairement à (Caro, 2004), nous identifions seulement deux types de paramètres en pré-dimensionnement: les paramètres de conception (paramètres d'entrée) et les performances (paramètres de sortie). Les paramètres de conception notés  $X = (x_1, \dots, x_n)$  regroupent donc les paramètres sur lesquels le concepteur a une influence ainsi que ceux sur lesquels il n'a pas d'influence. Nous ne faisons pas de distinction entre les paramètres d'entrée car nous les traiterons de la même manière. Ils concernent donc aussi bien les propriétés des matériaux, les paramètres géométriques que les paramètres intervenant dans l'utilisation du produit tels que la température, la pression, etc. Les paramètres de sortie  $Y = (y_1, \dots, y_m)$  sont aussi appelés performances puisqu'ils peuvent concerner un volume, un couple, un coût, etc.

Les paramètres d'entrée et de sortie peuvent être majoritairement continus mais aussi discrets. Un paramètre continu est défini sur un intervalle tel que le temps sur  $[0; +\infty[$ . Les paramètres discrets ne peuvent prendre des valeurs que dans un ensemble dénombrable de possibilités. Le nombre de paires de pôles d'un moteur particulier par exemple peut prendre les valeurs suivantes  $\{1,2,3,5,10\}$ .

## 2.2.2. Le modèle de dimensionnement

Un modèle de dimensionnement caractérise le comportement du produit et peut être représenté par l'équation (2.1).

$$Y = G(X) \tag{2.1}$$

où  $Y$  est l'ensemble des paramètres de sortie,  $G$  est le modèle de dimensionnement,  $X$  est l'ensemble des paramètres d'entrée.

Le comportement du produit est modélisé de manière analytique ou bien numérique selon les connaissances et les moyens à disposition du modélisateur. Nous présentons dans la section suivante les deux types de modélisations possibles, leurs caractéristiques, les avantages et les inconvénients.

### 2.2.2.1. Modèle analytique

Le modèle  $G$  peut être analytique, c'est-à-dire constitué d'un ensemble d'équations et d'inéquations algébriques et fonctionnelles qui relient les paramètres d'entrée  $X$  entre eux et aux paramètres de sortie  $Y$ . Les équations sont souvent présentées dans un ordre prédéfini. Elles sont obtenues à partir de lois mettant en équation des phénomènes physiques. Ces lois fournissent des équations connues telles que, par exemple, les équations de Laplace intervenant dans de nombreux domaines physiques, les équations de Maxwell en électromagnétisme, les équations de Bernoulli en mécanique des fluides... Elles peuvent aussi être déterminées par le modélisateur à partir de données expérimentales. Par exemple, grâce à des tests organisés sur des prototypes de son produit, le modélisateur peut réaliser des régressions afin d'obtenir analytiquement le comportement de son produit.

Les caractéristiques que peuvent comporter les modèles analytiques pour le dimensionnement de produits sont les suivantes :

- *Des expressions linéaires ou non-linéaires* ayant des formes de non-linéarités différentes en fonction des domaines d'applications. Les équations peuvent faire intervenir des fonctions exponentielles, logarithmiques (exemple (2.2)), sinusoïdales...

$$B_e = \frac{2 \cdot l_a \cdot M}{D \cdot \log \left[ \frac{D + 2 \cdot E}{D - 2 \cdot (l_a + e)} \right]} \quad (2.2)$$

- *Des systèmes d'équations implicites et/ou explicites.* Les équations peuvent être explicites auquel cas elles peuvent être placées dans un ordre prédéfini de manière à pouvoir calculer les paramètres de sortie les uns après les autres (2.3). L'avantage des équations explicites réside dans la facilité et la rapidité à calculer les sorties. Dans les équations implicites (2.4), les paramètres de sortie sont liés les uns aux autres de sorte qu'il peut être judicieux ou nécessaire de reformuler le modèle afin d'exprimer chaque sorties en fonction des autres paramètres (d'entrée et de sortie).

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 = g_2(x_1, \dots, x_n, y_1) \\ \vdots \\ y_m = g_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} g_1'(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ g_m'(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $(x_1, \dots, x_n)$  est l'ensemble des paramètres d'entrée du modèle,  $(y_1, \dots, y_n)$  est l'ensemble des paramètres de sortie du modèle, et  $g_1, \dots, g_n$  sont les formulations des différentes équations du modèle de dimensionnement.

- *Des fonctionnelles* (équations différentielles, intégrales,...) pour modéliser les aspects dynamiques des phénomènes physiques. Les équations différentielles fournissent une relation entre les fonctions et leurs dérivées d'ordre un ou supérieur par rapport à un ou

plusieurs paramètres. L'équation de la chaleur (2.5) à une dimension en est un exemple. Elle décrit le phénomène de conduction thermique en fournissant en guise de solution la température  $T$  à travers une section au point  $x$  et au temps  $t$ . Les équations peuvent aussi contenir des intégrales simple ou d'ordre supérieur selon la dimension du problème, tel que l'équation de conservation de la charge électrique (2.6). Le résultat d'un système d'équation comportant des fonctionnelles est donc une ou plusieurs fonctions dépendant d'un ou plusieurs paramètres de sortie.

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) \quad , x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (2.5)$$

où  $T$  est la température dans un conducteur à une dimension,  $t$  est le temps,  $x$  est la position et  $c > 0$  est une constante donnée.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = - \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (2.6)$$

où  $t$  est le temps,  $\rho$  est la densité volumique de charge,  $V$  est le volume délimité par la surface  $S$ ,  $\vec{j}$  est le vecteur densité volumique de courant.

- *10 à 100 paramètres d'entrée et de sortie.* Un modèle de dimensionnement peut contenir un nombre de paramètres fixe et/ou variable de l'ordre de 10 à 1000, définissant ainsi la taille du modèle.
- *Un nombre de degrés de liberté de l'ordre de quelques dizaines.* C'est le nombre minimal de paramètres d'entrée qui suffisent à calculer les paramètres de sortie du modèle.
- La convexité du modèle n'étant en général pas connue à l'avance et difficilement déterminable une fois pour toute puisqu'elle peut varier à chaque utilisation du modèle. En effet, les contraintes du cahier des charges ajoutées au modèle lors de son exploitation peuvent remettre en cause ou modifier profondément cette convexité. A chaque cas de dimensionnement, c'est-à-dire à chaque nouveau cahier des charges, la convexité doit être réévaluée.

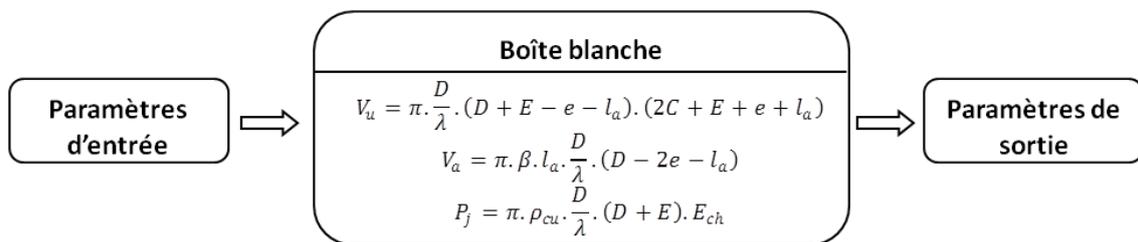


Figure 2.4 - Illustration d'un modèle analytique

L'exécution des modèles analytiques est plus ou moins rapide selon ses caractéristiques. Ils peuvent cependant se révéler peu précis ou inadaptés dans certaines conditions. Les lois de la résistance des matériaux, par exemple, ne sont plus valables en présence d'un changement brutale de section d'une poutre. L'hypothèse fondée sur une variation légère et continue du diamètre d'une poutre est donc réalisée mais ne correspond pas à la réalité puisque de nombreux

arbres possèdent des variations brutales et importantes de section. L'avantage de l'utilisation de tels modèles réside dans le large choix d'algorithme d'optimisation. En effet, les modèles analytiques peuvent être optimisés par tous les types d'algorithmes car ils donnent accès aux dérivées formelles nécessaires pour réaliser certaines optimisations de type déterministe. Les modèles analytiques sont appelés « boîtes blanches » (Figure 2.4) car les équations sont accessibles. Ils peuvent aussi bien être considérés comme une boîte noire afin d'utiliser des algorithmes de type stochastique.

#### 2.2.2.2. Modèle numérique

Le modèle numérique  $G$  est basé sur une simulation numérique du produit. Une simulation numérique regroupe plusieurs étapes telles que la modélisation 2D ou 3D de la pièce, le maillage (surficiel ou volumique), la définition du chargement (dans le cas d'une simulation mécanique) et des conditions limites, puis le calcul numérique. Les modèles numériques ont été développés pour palier les limites imposées par les modèles analytiques. Ce type de modèle s'est développé au XXème siècle et son utilisation s'est rapidement étendue grâce aux ordinateurs et à leur puissance de calcul grandissante. Le calcul numérique repose aussi sur des lois physiques mais emploie des méthodes de types éléments finis, différences finies, ou volumes finis qui ont pour but d'évaluer des dérivées ou intégrales. Ces méthodes permettent donc le calcul pas à pas du comportement du produit et il est, par exemple, possible d'évaluer avec précision les contraintes mécaniques au niveau des variations de section d'une poutre en résistance des matériaux. Des simulations thermiques, de mécanique des fluides, ou de déformations plastiques sont réalisables de la même manière. Nous appelons ces modèles « boîtes noires » (Figure 2.5) car nous n'avons aucune visibilité sur le code de calcul liant les paramètres d'entrée et les paramètres de sortie du calcul numérique. En effet, toute la simulation doit être réalisée à nouveau si l'on modifie un ou plusieurs paramètres d'entrée du calcul tel qu'un paramètre géométrique, une propriété des matériaux, une condition limite ou de chargement.

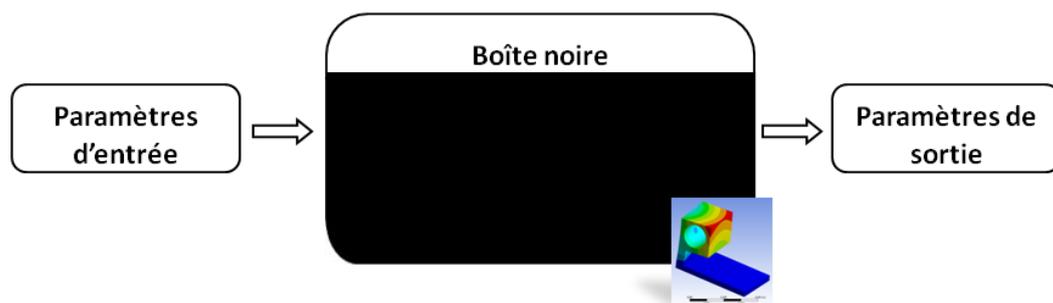


Figure 2.5 - Illustration d'un modèle numérique

La qualité des modèles numériques dépend de plusieurs caractéristiques liées à chaque étape de la modélisation :

1. La modélisation géométrique
2. Le maillage
3. La définition des conditions limites et du chargement

Nous ne développons pas ces caractéristiques car elles peuvent dépendre du modélisateur ou bien du logiciel informatique utilisé pour réaliser des simulations à partir du modèle numérique en question. Les modèles numériques sont cependant reconnus pour être très précis mais demandent un effort de calcul considérable. En effet, le temps pour une exécution de ce type de modèle peut aller de quelques secondes à des heures ou même plus pour des problèmes automobiles ou aéronautiques. Plusieurs exécutions sont nécessaires pour réaliser des traitements tels que la recherche d'une solution, l'analyse de sensibilité ou bien une optimisation. D'autre part, les algorithmes d'optimisation dédiés aux modèles numériques sont moins nombreux que pour les modèles analytiques car il n'y a pas d'accès possible au code de calcul. Les algorithmes de type stochastique et ceux n'ayant pas besoin du code de calcul ni du calcul exact des dérivées pour s'orienter sont les seuls disponibles.

### **2.2.2.3. Quelques méthodes pour diminuer le temps de traitement des modèles**

Des techniques de Space Mapping (Bakr et al., 2001) (Pierquin et al., 2013) (Hage-Hassan et al., 2012) sont employées pour rechercher plus rapidement une solution optimale au problème de dimensionnement en faisant le lien entre les modèles analytique et numérique. Le principe de ces techniques est de réaliser une optimisation en combinant un modèle « grossier » rapide à exécuter et un modèle « fin » plus précis mais plus long à calculer. L'algorithme optimise en premier lieu le modèle grossier afin de déterminer rapidement la zone de l'optimum. Une fois arrivé autour du présumé optimum, il fait des allers-retours entre les deux modèles dans le but d'affiner sa recherche. Le modèle dit « fin » est en général un modèle numérique dont le calcul est long. Le modèle dit « grossier » est généralement un modèle approché dont l'exécution est rapide. Ce modèle approché peut être obtenu à partir du modèle initial (ici, le modèle fin) par des méthodes de Surface de Réponse (Jin et al., 2000) (Ghanmi et al., 2005) détaillées dans la section 5.2.1. Certaines méthodes fournissent des modèles de type analytique tels que la régression polynomiale (Forrester and Keane, 2009) ou numérique tel que le Krigeage (Matta et al., 2012) par exemple.

## **2.2.3. Le cahier des charges**

Le cahier des charges d'un produit est un document contenant des contraintes ou exigences du client que le concepteur doit satisfaire lors du dimensionnement du produit. Ce cahier des charges se traduit par des équations et inéquations et peut inclure ou non un ou plusieurs paramètres à minimiser ou maximiser, et en particulier des paramètres de type coût. Un cahier des charges de type « contraintes » dans lequel il s'agit uniquement de trouver une solution au problème de dimensionnement respectant les contraintes du cahier des charges est détaillé dans la section suivante. Un cahier des charges de type « contraintes et objectifs » dont le but est de trouver une solution optimale est finalement décrit.

### **2.2.3.1. Cahier des charges : contraintes**

Le cahier des charges peut contenir uniquement des contraintes sur les paramètres d'entrée et de sortie du modèle (2.7). Ainsi, les paramètres de sortie  $Y$  calculés à partir du modèle  $Y =$

$G(X)$  et des valeurs des paramètres d'entrées  $X$  telles qu'ils appartiennent à leurs domaines de définition  $L_X \leq X \leq U_X$  doivent satisfaire l'inéquation  $L_Y \leq Y \leq U_Y$ .

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } X \\ & \text{Sous contraintes } \begin{cases} Y = G(X) \\ L_X \leq X \leq U_X \\ L_Y \leq Y \leq U_Y \end{cases} \end{aligned} \quad (2.7)$$

où  $Y$  est l'ensemble des paramètres de sortie,  $G$  est le modèle de dimensionnement,  $X$  est l'ensemble des paramètres d'entrée,  $L_X$  et  $U_X$  sont respectivement les bornes minimum et maximum pour les paramètres d'entrée et  $L_Y$  et  $U_Y$  sont respectivement les bornes minimum et maximum pour les paramètres de sortie.

Le concepteur doit donc trouver une ou plusieurs solutions si elles existent, c'est-à-dire les valeurs des paramètres d'entrée  $X$  satisfaisant le cahier des charges (2.7). Remarquons que la notion de « meilleure solution possible » n'a pas de sens ici puisque l'objectif n'est pas de maximiser ou minimiser une performance du produit mais seulement de satisfaire les contraintes.

### 2.2.3.2. Cahier des charges : contraintes et objectifs

Le cahier des charges peut contenir des contraintes (2.2.3.1) mais aussi un ou plusieurs objectifs à minimiser ou maximiser (2.8).

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } X \\ & \text{Minimiser : } f(X, Y) \\ & \text{Sous contraintes } \begin{cases} Y = G(X) \\ L_X \leq X \leq U_X \\ L_Y \leq Y \leq U_Y \end{cases} \end{aligned} \quad (2.8)$$

où  $f$  est la ou les fonctions objectif du cahier des charges.

Dans ce cas, le concepteur doit trouver la meilleure solution possible vis-à-vis du ou des objectifs en satisfaisant les contraintes. La fonction objectif peut être une fonction coût, c'est-à-dire que l'on cherche par exemple à minimiser les coûts de production. Elle peut sinon concerner une ou plusieurs performances du système telles que par exemple maximiser un rendement ou bien minimiser un volume...

## 2.2.4. Exemple : pré-dimensionnement d'un moteur électrique

Nous proposons dans cette section l'exemple du pré-dimensionnement d'un moteur électrique afin d'illustrer les différents éléments participants à la phase de pré-dimensionnement d'un dispositif : les paramètres, le modèle de dimensionnement et le cahier des charges. Ce problème a pour but de dimensionner une machine à aimants permanents sans encoche représenté sur la Figure 2.6. Le modèle de dimensionnement initialement introduit par (Kone et al., 1993) permet de calculer ses dimensions et autres caractéristiques afin d'obtenir en sortie un couple électromagnétique de  $10 \text{ N.m}$ .

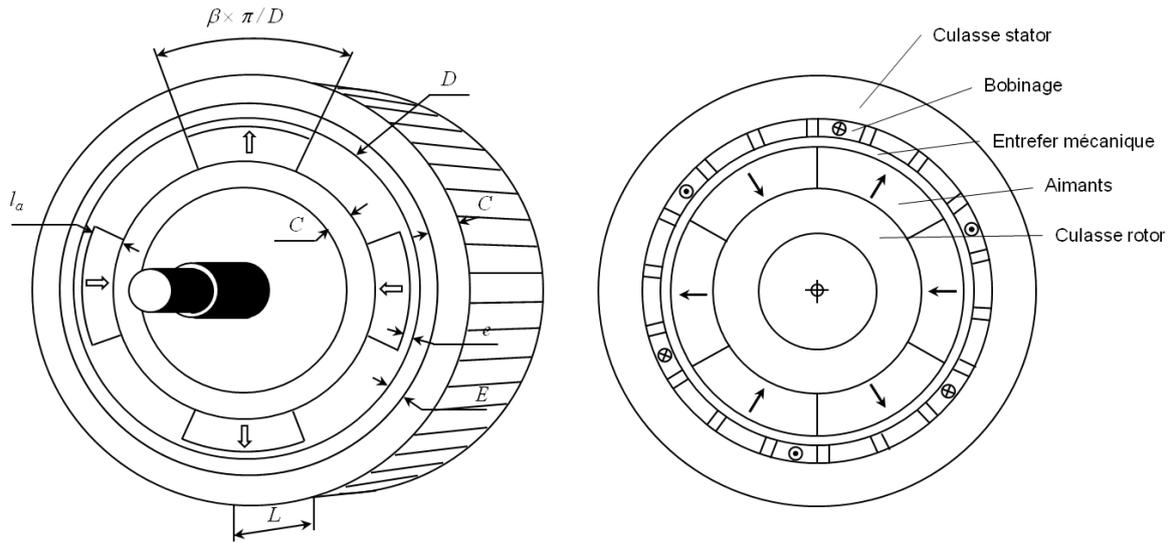


Figure 2.6 - Représentation de la structure du moteur électrique

Le modèle de dimensionnement est constitué des équations suivantes :

$$D = \frac{\Delta p \cdot p}{\pi} \quad (2.9)$$

où  $D$  est le diamètre de l'alésage en  $m$ ,  $\Delta p$  est le double pas polaire fixé à  $0.100 m$  et  $p$  est le nombre de paires de pôles fixé à 5.

$$J_{cu} = \sqrt{\frac{E_{ch}}{k_r E}} \quad (2.10)$$

où  $J_{cu}$  est la densité de courant dans le cuivre,  $E_{ch}$  est l'échauffement dans la machine en  $A/m$ ,  $k_r$  est le coefficient de remplissage du bobinage et  $E$  est l'épaisseur du bobinage en  $m$ .

$$K_f = 1.5 \cdot p \cdot \beta \cdot \frac{e + E}{D} \quad (2.11)$$

où  $K_f$  est le coefficient des fuites,  $\beta$  est le coefficient d'arc polaire et  $e$  est l'entrefer mécanique en  $m$ .

$$B_e = \frac{2 \cdot l_a \cdot M}{D \cdot \log \left[ \frac{D + 2 \cdot E}{D - 2 \cdot (l_a + e)} \right]} \quad (2.12)$$

où  $B_e$  est l'induction à vide dans l'entrefer en  $T$  (Tesla),  $l_a$  est l'épaisseur de l'aimant en  $m$  et  $M$  est l'aimantation des aimants en  $T$ .

$$C = \frac{\pi \cdot \beta \cdot B_e}{4 \cdot p \cdot B_{fer}} \cdot D \quad (2.13)$$

où  $C$  est l'épaisseur des culasses en  $m$  et  $B_{fer}$  est l'induction dans le fer.

$$\lambda = \frac{\pi}{2\Gamma_{em}} \cdot (1 - K_f) \cdot \sqrt{k_r \cdot \beta \cdot E_{ch} \cdot E} \cdot D^2 \cdot (D + E) \cdot B_e \quad (2.14)$$

où  $\lambda$  est le facteur de forme (rapport du diamètre d'alésage sur la longueur) et  $\Gamma_{em}$  est le couple électromagnétique.

$$L = \frac{D}{\lambda} \quad (2.15)$$

où  $L$  est la longueur du moteur.

$$V_u = \pi \cdot \frac{D}{\lambda} \cdot (D + E - e - l_a) \cdot (2C + E + e + l_a) \quad (2.16)$$

où  $V_u$  est le volume des parties utiles en  $m^3$ .

Nous avons reformulé la plupart des équations du modèle de dimensionnement fournies par (Kone et al., 1993). En effet, le cahier des charges du produit imposait une valeur fixe pour certaines sorties telles que le couple électromagnétique  $\Gamma_{em}$  ou une valeur discrète pour le nombre de paires de pôles  $p$ . Les équations ont donc été transformées afin d'éviter lors de l'optimisation des contraintes de type égalité ou table de valeurs.

Le modèle de dimensionnement du moteur électrique comporte donc 8 équations non-linéaires permettant d'évaluer 8 performances du produit. Les équations sont explicites et ne contiennent pas de fonctionnelle (un modèle contenant des équations différentielles sera abordé dans le chapitre 5). Les paramètres de conception sont au nombre de 12. Ils concernent aussi bien des propriétés géométriques ( $\Delta p$ ,  $E$ ,  $l_a$ ,  $e$ ) que des propriétés électromagnétiques liées aux matériaux utilisés ( $J_{cu}$ ,  $M$ ,  $B_{fer}$ ). Certains paramètres de conception sont fixes et connus tandis que d'autres sont à déterminer pour satisfaire le cahier des charges.

Le cahier des charges initial du produit consiste à minimiser le volume des parties utiles  $V_u$  en respectant les contraintes de type borne sur les performances et les paramètres de conception variables. Les valeurs des paramètres de conception fixes sont regroupées dans le Tableau 2.1.

$$\begin{array}{l} \text{Min} \\ \text{Sous contrainte} \end{array} \quad \begin{array}{l} V_u \\ \left\{ \begin{array}{l} D \in [0.001; 0.5] \\ J_{cu} \in [1.0 * 10^5; 1.0 * 10^7] \\ K_f \in [0.001; 0.3] \\ B_e \in [0.1; 1.0] \\ C \in [0.001; 0.05] \\ \lambda \in [1; 2.5] \\ L \in [0.004; 0.5] \\ E \in [0.001; 0.05] \\ e \in [0.0001; 0.005] \\ \beta \in [0.8; 1.0] \\ l_a \in [0.001; 0.05] \end{array} \right. \end{array} \quad (2.17)$$

Tableau 2.1 - Valeur des paramètres de conception fixes

Paramètre	Valeur fixe
$\Delta p$	0.100
$k_r$	0.70
$M$	0.9
$B_{fer}$	1.5
$\rho_{cu}$	$0,018 \cdot 10^{-6}$
$E_{ch}$	$10^{11}$
$\Gamma_{em}$	10
$p$	5

Ce modèle de dimensionnement académique permet une bonne illustration des différents points que nous allons aborder dans ce manuscrit. En effet, les équations sont connues et accessibles et leur nombre peu élevé rend un traitement manuel possible.

## 2.3. Les incertitudes en conception de produit

### 2.3.1. Deux types d'incertitudes dans les modèles de pré-dimensionnement

Jusqu'à présent, nous travaillons sous deux hypothèses. La première concerne l'exactitude des modèles de dimensionnement, c'est-à-dire que nous ne remettons pas en doute la validité des modèles. La seconde concerne les paramètres de conception et les performances. En effet, on considère une valeur fixe et sélectionnée dans un domaine de valeurs possibles pour chacun d'entre eux. Or ces deux hypothèses peuvent être remises en cause car l'utilisation de modèles de dimensionnement conduit à travailler sous deux types d'incertitudes (Soize, 2009) :

- La première incertitude est intrinsèque au modèle et consiste à considérer incertaines les égalités et inégalités des équations d'un modèle. En effet, un modèle est une représentation du comportement réel d'un système plus ou moins fidèle à la réalité. La qualité du modèle mathématique dépend de la connaissance du phénomène étudié et des moyens disponibles pour le construire (Jacques, 2005), mais aussi du degré d'approximation réalisé. Un modèle est donc valide ou non avec un certain niveau de confiance évalué par des méthodes statistiques (Hills and Trucano, 1999).
- Les incertitudes peuvent aussi intervenir sur les paramètres du modèle de dimensionnement. Le manque d'information sur l'environnement de vie du produit en est une cause, notamment la méconnaissance des conditions limites et de chargement du système (Irisarri, 2009), de la température d'utilisation, des variations des propriétés des matériaux au cours du temps (Edwards et al., 2010). La fabrication en série d'un produit

peut aussi être source d'incertitude dans le sens où il est presque impossible de garantir une valeur exacte pour un paramètre.

Nous considérons dans ce travail que les modèles sur lesquels nous travaillons sont fiables et possèdent un très haut niveau de confiance. L'impact des incertitudes sur les modèles de dimensionnement est donc négligeable devant l'impact des incertitudes sur les paramètres de conception. Nous choisissons de prendre en compte uniquement les incertitudes portant sur les paramètres de conception.

### **2.3.2. Conséquences des incertitudes sur les paramètres de conception**

Les variations sur les paramètres de conception peuvent se répercuter sur les performances du produit conçu. Ces répercussions se manifestent à différentes phases de la vie du produit (Figure 2.1).

En fabrication, une variation des performances peut amener le produit à être mis au rebut pour non-faisabilité, c'est-à-dire qu'il est impossible à réaliser, ou pour non-conformité lorsque les performances ne vérifient pas le cahier des charges du produit. Des variations sur les propriétés géométriques peuvent empêcher l'assemblage du produit par exemple. Ces produits considérés comme des rebuts peuvent être recyclés, c'est-à-dire réutilisés pour leurs matières premières par exemple, soit rectifiés afin de reprendre le cycle de fabrication ou encore finalement incinérés ou enfouis (Maudet-Charbuillet, 2009). Les coûts pour l'entreprise peuvent être plus ou moins importants selon la proportion et les différents traitements de rebuts.

Une variation des performances du produit peut aussi se manifester lors de son utilisation par le client. Des fluctuations de température non prises en compte dans le processus de conception peuvent provoquer une variation des propriétés des matériaux et ainsi une diminution prématurée des performances du produit. Deux effets pour l'entreprise sont ici mis en exergue : une baisse d'achat liée au non remplacement du produit par un client non satisfait ou bien à la mauvaise image de l'entreprise ou un retour du produit en garantie et des frais supplémentaires pour l'entreprise.

Finalement, les conséquences des variations sur les paramètres de conception se mesurent en terme de coûts pour l'entreprise. Nous voyons dans le chapitre suivant les avantages à prendre en compte les incertitudes sur les paramètres de conception le plus tôt possible dans le processus de conception.

### **2.3.3. Gains dans la maîtrise des incertitudes en pré-dimensionnement**

Les décisions prises dans les phases amont du processus de conception du produit sont cruciales et déterminantes. La capacité d'action sur le projet ou la capacité d'influencer les coûts sur le cycle de vie du produit diminue tandis que les coûts engagés augmentent au cours du développement de projet (Figure 2.7). Une mauvaise décision prise en amont du cycle de

développement du produit et révélée tardivement provoque des coûts de modification supplémentaires et d'autant plus élevés que le projet est avancé (Scaravetti, 2004).

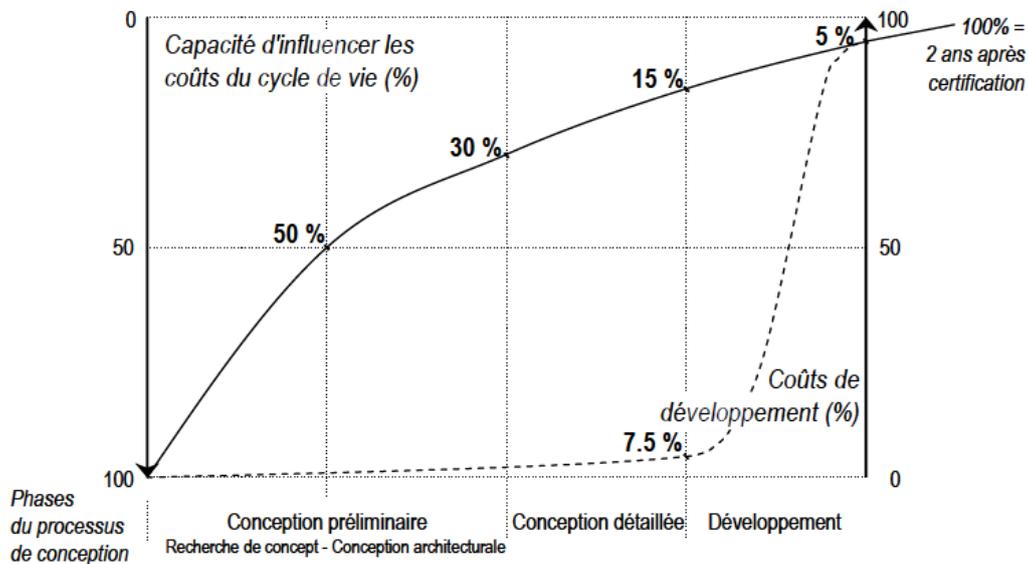


Figure 2.7 - Evolution des coûts engagés sur le projet et des coûts de développement (Scaravetti, 2004)

Ainsi, caractériser les incertitudes, les maîtriser et connaître leurs impacts aide le concepteur dans la prise de décision pour notamment :

- Réduire le nombre de rebuts

En phase de fabrication, une légère variation des paramètres de conception peut provoquer la non-faisabilité ou la non-conformité du produit. Maîtriser les variations des performances en cours de fabrication permet de réduire le nombre de rebuts et ainsi les coûts associés.

- Anticiper l'évolution des performances

La maîtrise des incertitudes a aussi pour objectif d'anticiper l'évolution des performances du produit au cours de l'utilisation en fonction des différentes conditions d'utilisation. Cela permet de réduire les coûts liés aux retours des produits par exemple tels que le coût de transport, les coûts liés au service après vente, les coûts de changement ou de réparation du produit... Anticiper l'évolution des performances, c'est parfois forcer le client à renouveler le produit en cas de panne. On appelle ce phénomène l'obsolescence programmée.

- Contrôler et choisir l'image de l'entreprise

La maîtrise d'incertitude a finalement un impact sur l'image du produit auprès des utilisateurs. Une image « haut de gamme » d'un produit se traduit par une qualité élevée des fonctions techniques assurées par le produit, et par la sécurité de l'utilisateur. La stabilité et la connaissance de l'évolution des performances techniques au cours du temps, quelles que soient les conditions d'utilisation assurent la « robustesse » du produit. Cette qualité a un coût de développement et de fabrication élevé répercuté sur le prix d'achat du produit. Au contraire, une image « d'entrée de gamme » d'un produit se traduit généralement par une qualité moyenne

mais à prix réduit. Dans ce cas, il est moins nécessaire de maîtriser les performances techniques du produit que le coût de fabrication de ces produits manufacturés généralement en grande série.

## 2.4. Conclusion

Le pré-dimensionnement est une phase déterminante dans le cycle de vie du produit. Toutes les décisions prises ont des répercussions, qu'elles soient profitables ou néfastes pour le produit, son utilisateur et le fabricant.

Les modèles sur lesquels nous travaillons en pré-dimensionnement peuvent être analytiques et sont alors complexes par la non-linéarité, la formulation implicite des équations et inéquations ainsi que par l'existence de fonctionnelles et d'autres caractéristiques détaillées plus haut. Les modèles numériques possèdent aussi de nombreuses caractéristiques rendant leur traitement délicat et contraignant. Les algorithmes existants pour optimiser les modèles numériques sont plus compliqués à mettre en œuvre du fait que les dérivées ne sont pas évaluées de manière exacte. En pré-dimensionnement, le concepteur peut se contenter de trouver une ou plusieurs solutions au modèle de conception satisfaisant les contraintes du cahier des charges (section 2.2.3.1) ou bien réaliser une optimisation des performances du modèle sous contraintes (section 2.2.3.2). Les modèles de dimensionnement analytiques ou numériques font intervenir un grand nombre de paramètres de conception sur lesquels le concepteur peut avoir une influence (géométrie, propriétés des matériaux) mais aussi des paramètres de conception liés à l'environnement (température, pression, ...). Quel que soit le modèle disponible pour dimensionner le produit, on travaille généralement avec les valeurs nominales des paramètres d'entrée et de sortie. D'autre part, les différentes caractéristiques des modèles de dimensionnement rendent la phase de pré-dimensionnement délicate et par conséquent difficile à la fois à résoudre et à optimiser.

Deux hypothèses sont généralement réalisées dans ce processus de pré-dimensionnement. D'une part le modèle utilisé pour dimensionner le système est considéré comme exact alors qu'il est une modélisation qui peut être plus ou moins fidèle au comportement réel du système. D'autre part, les paramètres de conception du modèle représentent des propriétés des matériaux, des dimensions du produit et sont considérés comme des valeurs fixes prises dans un domaine de valeurs possibles  $L_X \leq X \leq U_X$ . Ces paramètres peuvent cependant être sujet à des variations car ils dépendent des moyens de fabrication pour les paramètres géométriques, ou bien du lot de matières premières pour les propriétés des matériaux. Or, ces variations se répercutent sur les performances du produit de sorte qu'elles sont à l'origine de la non-faisabilité du produit tel que par exemple l'impossibilité d'assembler ou alors la diminution prématurée des performances... Dans la suite de ce travail, nous conservons l'hypothèse première sur l'exactitude des modèles de dimensionnement. Cependant, nous ne prendrons plus en compte les paramètres par des valeurs fixes mais par des variations afin de tenir compte de l'incertitude présente sur certains paramètres de conception.

La prise en compte de ces variations dans le dimensionnement de produit est finalement un support pour la prise de décision. La maîtrise des incertitudes permet notamment de contrôler

les taux de rebuts, l'évolution des performances du produit au cours du temps et enfin son image auprès des clients. Les gains générés pour l'entreprise se calculent donc en terme de coût.



# 3. La conception robuste

## 3.1. Introduction

La notion de robustesse en conception de produit a été introduite par G. Taguchi dans le but d'améliorer la qualité des produits en présence de bruit. La conception robuste est alors devenue un puissant outil de prise de décision sous incertitudes (Huang and Du, 2006). Ce bruit, comme nous l'avons discuté dans le chapitre précédent, provient du manque de connaissance sur les paramètres relatifs au cycle de vie du produit (fabrication, utilisation...). De plus, ces incertitudes se propagent sur les performances du produit de sorte qu'il devienne non-faisable ou non-conforme en phase de fabrication ou bien inutilisable par l'utilisateur. Des techniques sont donc développées pour prendre en compte l'effet des incertitudes sur les performances (paramètres de sortie) du produit le plus tôt possible dans le processus de conception.

Lorsque le problème de conception consiste à dimensionner un produit, l'approche de conception robuste est connue sous le terme de tolérancement (Caro et al., 2005). Le calcul statistique en tolérancement, largement traité dans la littérature, consiste à propager les tolérances sur des dimensions géométriques afin de déterminer le meilleur tolérancement possible (Caro, 2004). L'objectif est de résoudre par exemple des problèmes d'assemblage ou d'interchangeabilité des pièces. Le tolérancement manipule uniquement des paramètres géométriques des pièces constituant le produit. Or nous avons vu dans le chapitre précédent que les incertitudes peuvent également toucher les propriétés des matériaux. Nous choisissons donc d'étendre ce travail à tous types de paramètres de conception.

L'idée portée par la conception robuste est de concevoir un produit moins sensible aux incertitudes plutôt que de supprimer les causes de ces variations (Huang and Du, 2006). C'est-à-dire que les incertitudes sont acceptées tant que leurs effets sont maîtrisés. Plusieurs définitions de la conception robuste ont été proposées dans la littérature. Dans une revue bibliographique sur la conception robuste, (Park et al., 2006) définit la conception robuste comme une conception insensible aux variations des paramètres intervenant dans le cycle de vie du produit (fabrication, utilisation ...). (Doltsinis and Kang, 2004) et (Beyer and Sendhoff, 2007) qualifient comme objectif de la conception robuste le fait que les performances doivent être les moins sensibles possible aux variabilités aléatoires des paramètres de conception ou encore que les performances qui demeurent relativement inchangées quand elles sont exposées à des conditions incertaines.

D'après ces définitions, la robustesse en conception porte sur les performances, c'est-à-dire sur les paramètres de sortie du modèle de dimensionnement lorsque les paramètres de conception (paramètres d'entrée) sont sujets aux incertitudes. Deux types de conception robuste sont alors identifiés ici :

- Un produit faisable sous incertitudes. C'est-à-dire un produit qui satisfait les contraintes imposées par le cahier des charges concernant la variabilité des performances mais aussi des paramètres de conception.

- Un produit faisable sous incertitudes dont les performances peuvent être optimisées et stables. Ce produit satisfait également les contraintes imposées par le cahier des charges concernant la variabilité des performances et les paramètres de conception. Il est cependant conçu pour avoir des performances optimales et stables sous incertitudes.

Finalement, la conception robuste a pour objectif d'obtenir une solution à un problème de conception qui maintient les valeurs de la fonction objectif et/ou des contraintes dans des domaines de variation acceptables lorsque les paramètres de conception sont soumis à des incertitudes. Les seuils d'acceptabilité sont définis dans le cahier des charges du produit par le concepteur.

Définir le niveau de robustesse dans un cahier des charges est un problème non trivial pour le concepteur. Dans ce chapitre, nous proposons donc une discussion autour de l'intégration de la robustesse dans un cahier des charges lorsque celui-ci est composé uniquement de contraintes ou bien contient des contraintes et un ou plusieurs objectifs. De nombreuses propositions de cahiers des charges dits « robustes » sont fournies dans la littérature. Nous réalisons une étude bibliographique afin de déterminer quelle formulation du cahier des charges intégrant la robustesse nous semble la plus pertinente. Nous étudions au préalable les différentes modélisations de l'incertitude possibles en fonction des conditions de notre étude.

## 3.2. Modélisation des incertitudes

Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes pour représenter et évaluer l'incertitude sur les paramètres de conception. La variabilité d'un paramètre peut alors être représentée par un intervalle, un ensemble flou ou une distribution de probabilités. D'autres modélisations sont possibles et généralement développées à base de ces trois précédents types de modélisation. La théorie des méconnaissances en est un exemple (Enjalbert, 2009) mais nous ne l'abordons pas dans ce travail.

### 3.2.1. Modélisation par intervalles

La modélisation par intervalle peut être utilisée en conception robuste de produit (Qureshi et al., 2010). Les paramètres sont alors représentés par des variables réelles définies sur des intervalles fixés par le concepteur. Ainsi, le paramètre  $x$  évolue dans un intervalle formé d'une borne inférieure  $x_{inf}$  et d'une borne supérieure  $x_{sup}$  :

$$x \rightarrow [x_{inf}; x_{sup}] \quad (3.1)$$

Cette modélisation ne fournit que les valeurs extrêmes d'un paramètre : valeur minimale et valeur maximale. C'est une représentation qui nécessite très peu d'informations sur la variabilité d'un paramètre puisqu'il n'est pas nécessaire de savoir comment un paramètre  $x$  se répartit entre ses deux bornes. Le choix des valeurs pour chaque borne peut se faire arbitrairement, expérimentalement, ou par le calcul.

En effet, le calcul d'un intervalle image à travers un modèle dont les paramètres sont modélisés par des intervalles peut être assuré par l'utilisation du calcul d'intervalle basé sur l'arithmétique d'intervalle (Moore, 1966). Cependant l'estimation de l'intervalle image fournit peu d'informations c'est-à-dire seulement les bornes supérieures et inférieures de l'intervalle du paramètre de sortie. De plus, le calcul par intervalle a la propriété d'être pessimiste : l'intervalle image est surestimé lorsqu'un paramètre possède plusieurs occurrences dans son évaluation (Chabert, 2007).

### 3.2.2. Modélisation par ensembles flous

De même que la modélisation par intervalle, la modélisation par ensembles flous est aussi exploitée dans le domaine de la conception robuste (Linda and Manic, 2011) (Du et al., 2007). La modélisation par ensemble flou (fuzzy set en anglais) repose sur la théorie des ensembles flous (Zadeh, 1965). Un ensemble classique où les objets satisfont des critères d'appartenance précis (propriétés mathématiques précises) est défini de la manière suivante : soit  $X$  un ensemble de référence dont les éléments sont  $x$ , et  $A$  un sous-ensemble classique de  $X$  défini par une fonction caractéristique déterminant l'appartenance à  $A$ . Cette fonction attribue de façon certaine 0 si  $x$  n'appartient pas à  $A$  et 1 si  $x$  appartient à  $A$ .

Un ensemble flou repose sur des propriétés d'appartenance non précises : soit  $X$  un ensemble de référence dont les éléments sont  $x$  et  $A$  un sous-ensemble flou de  $X$ . A  $A$  est associée une fonction caractéristique définissant un degré d'appartenance de  $x$  à  $A$ . Cette fonction attribue :

- 0 si on exprime de façon certaine que  $x$  n'appartient pas à  $A$ .
- 1 si on exprime de façon certaine que  $x$  appartient à  $A$ .
- une valeur comprise entre 0 et 1 suivant le degré d'appartenance estimé (d'autant plus élevé que l'on souhaite exprimer avec certitude le fait que  $x$  est un élément de  $A$ ). On définit alors une fonction d'appartenance de  $A$  dans l'intervalle  $[0; 1]$ .

Cette modélisation nécessite donc de connaître les fonctions d'appartenance à un sous-ensemble pour chaque paramètre de conception. Le concepteur peut aussi les définir à partir des informations en sa possession. La fonction d'appartenance d'un paramètre de conception peut prendre la forme par exemple d'une courbe trapézoïdale, triangulaire, à côté parabolique ou arbitraire.

Les opérations sur les ensembles classiques ont été étendues aux ensembles flous. Les ensembles flous disposent ainsi des opérateurs égalité, union, inclusion, intersection mais aussi de l'addition, la multiplication, ... L'arithmétique floue permet ainsi le calcul des incertitudes sur les paramètres de sortie. Cependant, les paramètres de conception ont été fuzzifiés pour réaliser ce calcul qui est par ailleurs complexe. La difficulté de cette méthode réside dans la « défuzzification » des résultats obtenus, c'est-à-dire le passage des ensembles flous aux variations des performances en perdant le moins d'information possible (Liu, 2007). Il existe plusieurs méthodes pour défuzzifier telles que la méthode de la moyenne des maxima ou la méthode du centre de gravité. La première méthode permet d'obtenir une valeur correspondant à la moyenne entre les deux maxima de la fonction d'appartenance de la performance. La seconde méthode fournit le centre de gravité de la surface sous la fonction d'appartenance de

la performance. Le résultat obtenu par cette seconde méthode est plus intéressant à exploiter tandis que la méthode est plus coûteuse à mettre en œuvre.

### 3.2.3. Modélisation probabiliste

La modélisation probabiliste est certainement la plus exploitée en conception robuste de produit (Du and Chen, 1999) (Rolander et al., 2006). En effet, les méthodes probabilistes consistent à considérer l'incertitude sur les paramètres de conception comme des distributions aléatoires prédéfinies. On associe au paramètre de conception l'ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire  $X$ . La fonction densité de probabilité associée à la variable aléatoire  $X$  fournit la probabilité que la variable  $X$  soit comprise dans un intervalle tel que  $[a; b]$  :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \quad (3.2)$$

La densité de probabilité d'un paramètre de conception peut être choisie parmi les lois standards (loi normale, uniforme, Weibul...) ou bien définie de manière arbitraire à partir d'essais par exemple.

Cette modélisation requiert plus d'informations sur les paramètres qu'une modélisation par intervalle. Il faut en effet connaître l'allure de la dispersion du paramètre autour de sa valeur nominale. La difficulté de cette modélisation est de disposer du type de distribution pour chaque paramètre. Cet inconvénient se révèle plus important encore dans les premières phases de conception où la quantité d'information est plus faible. Des distributions normales sont souvent utilisées pour pallier à ce manque d'information. Cependant, une distribution normale, comme beaucoup d'autres distributions, a un support infini. Un paramètre de type géométrique modélisé par ces distributions peut donc prendre des valeurs négatives. Un paramètre dont la distribution est uniforme peut aussi être modélisé par un intervalle. D'ailleurs, il est possible de représenter une distribution normale par un intervalle dont les bornes sont  $([\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma])$  sachant que 99.73% des valeurs d'une distribution normale sont comprises entre la moyenne plus ou moins trois écart-types. Finalement, le résultat d'un calcul probabiliste fournit les distributions des paramètres de sortie. Le concepteur obtient ainsi plus d'information sur le comportement des performances que par un calcul par intervalle.

### 3.2.4. Bilan et positionnement

Le choix du type de modélisation des paramètres dépend de plusieurs critères concernant les paramètres de conception, les performances, le modèle de dimensionnement, la qualité des calculs (précision) et les coûts de calculs. Ces critères sont les suivants :

- L'information disponible pour modéliser les paramètres de conception.

Pour modéliser un intervalle, il suffit de connaître la valeur minimum et la valeur maximum du domaine de variation du paramètre. Pour modéliser un ensemble flou, il est nécessaire de connaître la fonction d'appartenance du paramètre. Enfin, pour modéliser un paramètre de

manière probabiliste, il faut connaître la fonction densité de probabilité associée. Or certaines lois probabilistes telles que la loi uniforme ou la loi normale nécessitent la connaissance de deux paramètres (respectivement les bornes de l'intervalle et le couple moyenne/écart-type). La quantité et la qualité de l'information disponible pour modéliser un paramètre de conception dépendent du contexte dans lequel la modélisation est réalisée. La quantité d'information, de même que la qualité, est généralement plus faible en phase amont du processus de conception qu'en phase aval. Cependant, la connaissance métier du concepteur peut lui permettre de modéliser les variations du paramètre à partir d'informations précises dans le cas où le produit à dimensionner est une variante d'un produit déjà conçu et fabriqué. Dans un contexte de pré-dimensionnement, les modélisations par intervalle, par ensemble flou, ou probabiliste ne nécessitant la connaissance de deux paramètres sont équivalentes.

- L'information nécessaire pour exploiter les performances en sortie du modèle.

Les variations sur les performances sont obtenues dans le but d'être exploitées directement par le concepteur ou bien par une méthode de post-traitement telle qu'un algorithme d'optimisation par exemple. La qualité et la quantité de l'information sur les variations des performances qu'il est nécessaire d'obtenir dépendent donc des méthodes de post-traitement. De plus, une bonne connaissance des variations des performances du produit permet au concepteur d'argumenter de manière précise ses décisions en ce qui concerne le dimensionnement. Au contraire, ne disposer que de peu d'information sur les performances peut l'amener à prendre de mauvaises décisions. En conclusion, la modélisation probabiliste, sous réserve que les résultats soient de bonne qualité, propose l'avantage de fournir des informations sur la position de la distribution de probabilité de la performance, sur sa dispersion, sa symétrie... Au contraire, la modélisation par intervalle ne fournit qu'un domaine de variation par l'intermédiaire d'une borne inférieure et une borne supérieure. Enfin, la modélisation par ensembles flous ne propose qu'une valeur telle que la moyenne des maxima ou bien le centre de gravité correspondant à la surface sous la fonction d'appartenance de la performance. La modélisation probabiliste fournit donc plus d'informations sur les variations des performances que les autres modélisations étudiées ici.

- La qualité, les avantages et inconvénients du calcul associé à la modélisation.

Les calculs liés à la propagation d'incertitudes dans un modèle de dimensionnement peuvent être plus ou moins coûteux en fonction du type de modélisation. Le calcul probabiliste est plus coûteux que le calcul par ensemble flou (Drakopoulos, 1995). Cela est dû au fait que la modélisation probabiliste contient des informations plus précises et plus nombreuses que la modélisation par ensembles flous ou par intervalle. D'autre part, les algorithmes de propagation d'incertitudes disponibles selon le type de modélisation fournissent un résultat plus ou moins précis. Le calcul par intervalle a par exemple pour inconvénient de fournir un résultat surestimé. De plus ce calcul est destiné aux modèles analytiques uniquement car il exploite les équations mathématiques. L'arithmétique floue doit fuzzifier les paramètres de conception afin de réaliser le calcul puis défuzzifier les performances afin de les exploiter. Cette fuzzification/défuzzification s'accompagne inévitablement d'une perte d'information. Enfin, même si le calcul probabiliste est plus coûteux que les autres, il s'applique sur tous les types de modèles (numérique ou analytique) et propose un calcul des variations des performances précis selon les méthodes employées.

Suite à cette comparaison, nous choisissons de modéliser les paramètres de conception et les performances de manière probabiliste. Cette modélisation impose un calcul plus coûteux et nécessite parfois plus de données sur les paramètres de conception que les autres modélisations. Cependant, elle fournit des résultats porteurs de plus d'informations qu'un intervalle ou bien que le résultat d'une modélisation par ensemble flou. La qualité de cette information est aussi plus élevée. Les résultats sont d'ailleurs exploitables directement contrairement aux ensemble flous qui nécessitent une défuzzification.

### 3.3. Discussion autour de la robustesse dans un cahier des charges

La robustesse se définit dans la formulation du cahier des charges. Nous nommons cahier des charges « initial » ou « non-robuste » le cahier des charges dans lequel nous n'introduisons pas la robustesse. Dans une approche de dimensionnement classique, deux types de cahiers des charges non robustes peuvent être formulés. Le premier concerne uniquement les contraintes sur les paramètres de conception et les performances du système à dimensionner (cas du cahier des charges décrit à la section 2.2.3.1). Il s'agit dans ce cas de trouver une solution du modèle de dimensionnement qui satisfasse ces contraintes. Le second type de cahier des charges contient des contraintes ainsi qu'une ou plusieurs fonctions objectif à optimiser (cas du cahier des charges décrit à la section 2.2.3.2). Il s'agit ici de trouver la meilleure solution possible au regard des objectifs tout en satisfaisant les contraintes.

Dans une approche robuste de dimensionnement, le cahier des charges est reformulé afin de prendre en compte l'incertitude sur les paramètres de conception et les performances du modèle de dimensionnement. Ce nouveau cahier des charges sera nommé cahier des charges robuste. L'enjeu dans la prise en compte de la robustesse sur les contraintes est la faisabilité du produit. La robustesse sur les contraintes est rarement considérée en conception robuste. En revanche, il est plus courant d'étudier la robustesse sur la fonction objectif au travers de la stabilité des solutions optimales (Laurenceau, 2008). Dans les parties suivantes, nous allons illustrer, détailler et discuter la prise en compte de la robustesse dans un cahier des charges ne contenant que des contraintes puis dans un cahier des charges contenant des contraintes et un ou plusieurs objectifs à optimiser. Nous rappelons que la variabilité des paramètres de conception et des performances sous incertitudes est prise en compte par des distributions de probabilité.

#### 3.3.1. Cahier des charges composé uniquement de contraintes

Le cahier des charges initial ne contenant que des contraintes (cas du cahier des charges introduit à la section 2.2.3.1) est donné par l'équation suivante et illustré à la Figure 3.1:

$$\begin{array}{l}
 \text{Trouver } X \\
 \text{Sous contraintes } \left\{ \begin{array}{l} Y = G(X) \\ L_X \leq X \leq U_X \\ L_Y \leq Y \leq U_Y \end{array} \right. \quad (3.3)
 \end{array}$$

Sur la Figure 3.1 est représenté un exemple d'évolution d'une performance  $Y$  en fonction des paramètres d'entrée  $X$  selon un modèle de dimensionnement  $G$ . Le cahier des charges impose des valeurs minimale et maximale pour  $Y$  :  $L_Y \leq Y \leq U_Y$ . Un problème de dimensionnement consiste à trouver des valeurs aux paramètres de conception  $X$  telle que les contraintes soient satisfaites. Les contraintes regroupent les équations du modèle  $G$  ainsi que celles issues du cahier des charges. Graphiquement, les solutions réalisables de ce problème regroupent les deux intervalles hachurés  $[X_1; X_2] \cup [X_3; X_4]$  (Figure 3.1). En effet, ces intervalles respectent le modèle  $G$  ainsi que les bornes minimale  $L_Y$  et maximale  $U_Y$ .

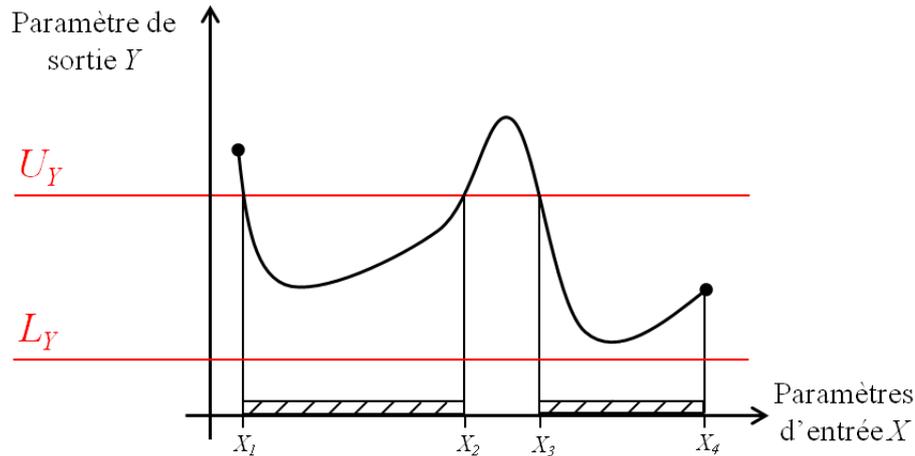


Figure 3.1 - Cahier des charges non-robuste pour un paramètre de sortie  $Y$

Ce cahier des charges initial peut être transformé en cahier des charges robuste afin de prendre en compte d'éventuelles incertitudes sur les paramètres de conception. En effet, ces incertitudes sur les paramètres de conception  $X$  sont propagées à travers le modèle  $G$  pour obtenir la dispersion sur les paramètres de sortie  $Y$ .

Nous illustrons cette propagation à travers l'étude du point  $X_3$  solution du problème de dimensionnement initial. Sur la Figure 3.2, on observe qu'une variation de  $X$  autour de la solution  $X_3$  (représentée par une cloche) provoque une dispersion sur le paramètre de sortie  $Y$ . Une partie de cette dispersion sur  $Y$  ne satisfait pas la contrainte de bornes  $[L_Y; U_Y]$  issue du cahier des charges (partie hachurée de la dispersion sur  $Y$ ). Prenons l'exemple du dimensionnement d'un moteur électrique dont le cahier des charges initial impose une contrainte de type borne ( $[L_Y; U_Y]$ ) sur son couple électromagnétique (performance  $Y$ ). Nous obtenons la probabilité d'obtenir des moteurs ayant un couple acceptable en évaluant la probabilité de la partie non-hachurée de la dispersion sur  $Y$ , le reste pouvant être considéré comme rebut.

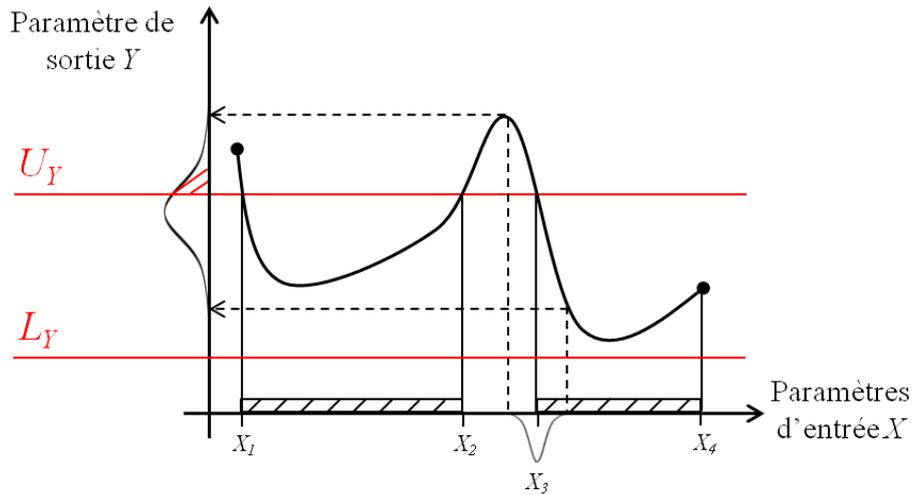


Figure 3.2 - Propagation d'incertitude à travers la contrainte du paramètre  $Y$

Le cahier des charges robuste comporte des contraintes supplémentaires relatives à la dispersion des paramètres d'entrée et de sortie. Ces contraintes robustes peuvent concerner le taux de faisabilité du produit. L'objectif du problème de dimensionnement robuste est alors de trouver une solution satisfaisant ces contraintes robustes. Reprenons l'exemple du dimensionnement du moteur électrique. Le cahier des charges robuste de ce problème indique par exemple que le couple électromagnétique doit satisfaire un taux de faisabilité supérieur à 95%. La solution  $X_3$  n'est graphiquement pas une solution robuste.

Une dispersion, telle que la loi normale par exemple, est définie sur l'infini. Les valeurs situées aux extrémités de la dispersion de la performance  $Y$  ont une très faible probabilité tandis que les valeurs situées au centre de la cloche en ont une forte. L'idée est donc de faire varier le point  $X_3$  de manière à ne laisser que l'extrémité de la dispersion de  $Y$  hors des bornes imposées par le cahier des charges. La dispersion de  $Y$  associée à la solution  $X_{3r}$  (Figure 3.3) a une forte probabilité de faisabilité, disons supérieure à 95%. La solution  $X_{3r}$  peut alors être considérée comme robuste. Les bornes  $X_1, X_2$  et  $X_4$  de l'intervalle des solutions réalisables du problème non robuste  $[X_1; X_2] \cup [X_3; X_4]$  doivent être modifiées de la même manière. Les solutions au cahier des charges robuste du moteur électrique seraient donc l'union des deux intervalles  $[X_{1r}; X_{2r}] \cup [X_{3r}; X_{4r}]$ .

Le niveau de robustesse est donc défini dans le cahier des charges robuste du produit. Les contraintes du cahier des charges initial doivent être transformées afin d'intégrer un seuil de faisabilité du produit désiré par le concepteur. La formulation de ces nouvelles contraintes robustes n'est cependant pas triviale à exprimer lorsque les paramètres de conception et les performances sont modélisés par des distributions de probabilité. Nous proposons une discussion ainsi qu'une étude bibliographique sur ce sujet dans la section 3.4.

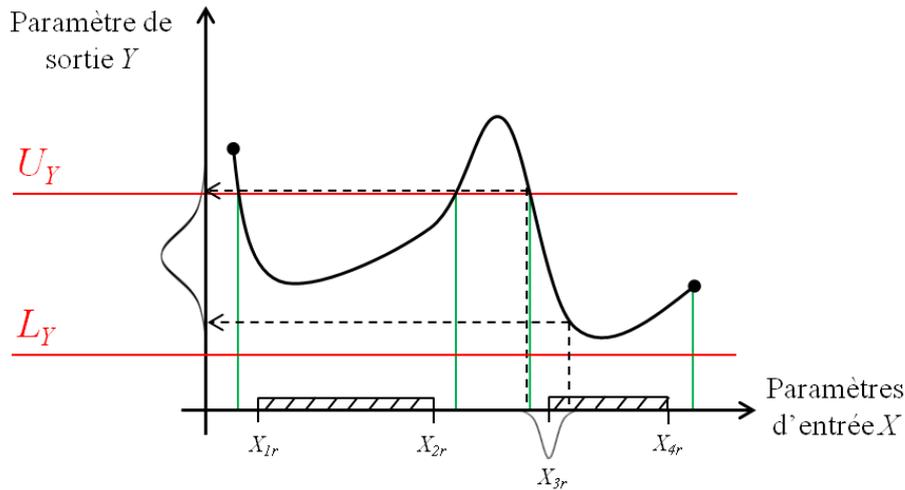


Figure 3.3 - Espace des solutions robustes pour le paramètre  $Y$

### 3.3.2. Cahier des charges composé de contraintes et d'objectifs

Le cahier des charges initial contenant des contraintes (cas du cahier des charges introduit à la section 2.2.3.2) et un ou plusieurs objectifs est donné par l'équation suivante :

*Trouver  $X$*

*Minimiser :  $f(X, Y)$*

$$\text{Sous contraintes } \begin{cases} Y = G(X) \\ L_X \leq X \leq U_X \\ L_Y \leq Y \leq U_Y \end{cases} \quad (3.4)$$

Pour simplifier la présentation, nous considérons le problème avec une seule fonction objectif  $f$  correspondant à une performance à optimiser (ici minimiser). Sur la Figure 3.4 est représenté un exemple d'évolution d'une fonction objectif  $f$  en fonction des paramètres d'entrée  $X$ . Sur la Figure 3.5 est représenté un exemple d'évolution d'une performance  $Y$  en fonction des paramètres d'entrée  $X$  selon un modèle de dimensionnement  $G$ . Le cahier des charges impose des valeurs minimale et maximale pour  $Y$  :  $L_Y \leq Y \leq U_Y$ . Le problème de dimensionnement consiste ici à trouver la valeur de  $X$  minimisant la fonction objectif tel que les contraintes soient satisfaites. Les contraintes regroupent les équations du modèle  $G$  ainsi que celles issues du cahier des charges. Les trois solutions illustrées  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  sont des optima locaux (Figure 3.4) satisfaisant les contraintes du cahier des charges portant sur les paramètres d'entrée  $X$  ainsi que sur le paramètre de sortie étudié  $Y$  (Figure 3.5). La meilleure solution est  $x_1$  au regard de l'objectif à minimiser.

Le cahier des charges initial contenant des contraintes et un ou plusieurs objectifs peut être transformé en cahier des charges robuste dans lequel la robustesse porte à la fois sur les contraintes et sur la ou les fonctions objectif. Ici, les incertitudes sur les paramètres de conception  $X$  sont propagées d'une part à travers le modèle  $G$  pour obtenir la dispersion sur les performances  $Y$ , et d'autre part à travers la fonction objectif  $f$  pour obtenir la dispersion de la performance à optimiser.

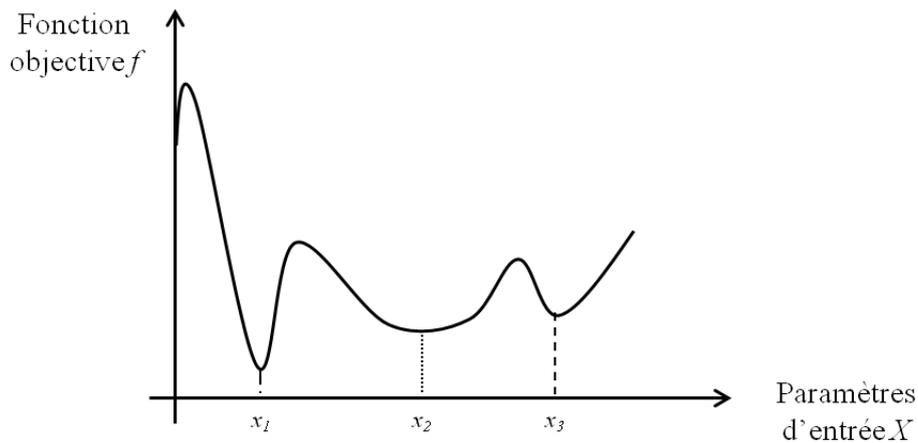


Figure 3.4 - Représentation de la fonction objectif

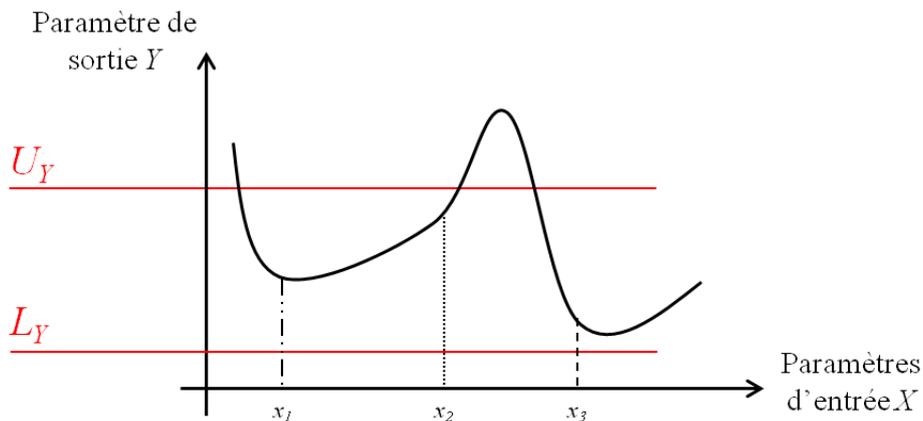


Figure 3.5 - Représentation d'une contrainte d'un paramètre de sortie

Nous illustrons la résolution d'un problème robuste par l'étude des solutions  $x_1, x_2$  et  $x_3$  présentant différentes situations possibles. La Figure 3.6 montre que la solution  $x_1$  est l'optimum global.

Cependant, une variation de  $x$  autour de l'optimum global  $x_1$  (représenté par la cloche) provoque une importante variation de la fonction objectif caractérisée par la dispersion  $f_1$  de la Figure 3.6. La solution  $x_1$  n'est donc pas stable au regard de la fonction objectif et peut conduire à une variation du comportement du produit même si cette solution reste réalisable au regard des contraintes du cahier des charges (dispersion  $Y_1$  sur la Figure 3.7). Prenons l'exemple du dimensionnement d'un moteur électrique dont le cahier des charges exige la minimisation du volume avec une contrainte de type intervalle sur son couple électromagnétique. Une série de moteurs dimensionnés avec la solution  $x_1$  aurait en moyenne un faible volume mais celui-ci peut varier fortement d'un moteur à un autre. Cette variation imposerait une gestion difficile des coûts de fabrication et des stocks.

La fonction objectif en  $x_2$  est plus stable que dans le cas de  $x_1$ , donc plus robuste. En effet, même si la solution  $x_2$  est moins performante que la solution  $x_1$  ( $f(x_2) \geq f(x_1)$ ), la dispersion de  $f$  en  $x_2$  ( $f_2$  sur la Figure 3.6) est moins importante qu'en  $x_1$  ( $f_1$ ). Cependant, on observe qu'une bonne partie de la dispersion du paramètre de sortie  $Y$  en  $x_2$  ( $Y_2$  sur la Figure 3.7) dépasse la borne maximale  $U_Y$  (partie hachurée de  $Y_2$ ), donc viole une contrainte du cahier des charges. Au final, dimensionner le produit avec la solution  $x_2$  assure une stabilité de la performance à optimiser, mais a une forte probabilité d'aboutir à un produit non faisable. Dans l'exemple précédent de dimensionnement de moteur électrique, le taux de rebut lié à sa production peut être considérable et provoquer des coûts supplémentaires même s'il n'est pas nécessaire de trier au regard de la performance  $f$ .

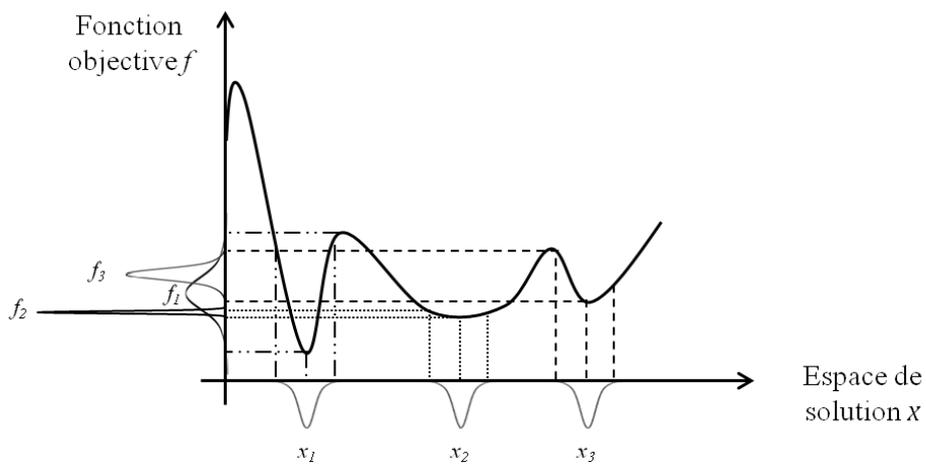


Figure 3.6 - Robustesse sur la fonction objectif du cahier des charges

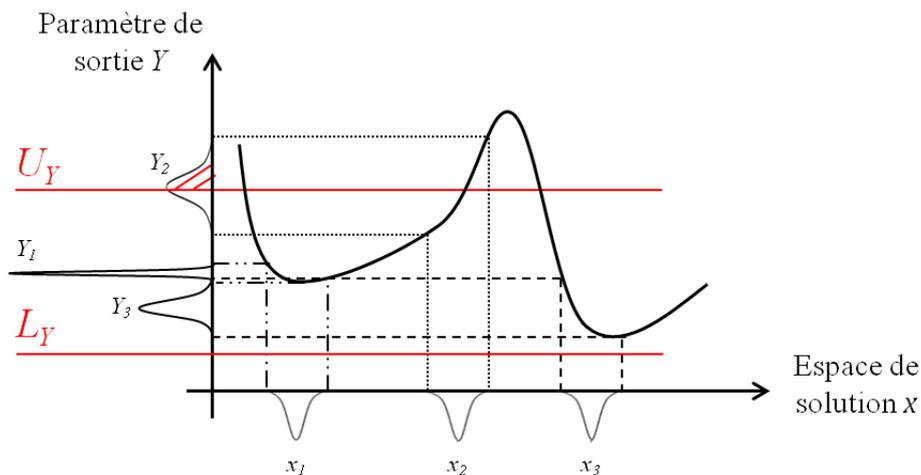


Figure 3.7 - Robustesse sur les contraintes du cahier des charges

La solution  $x_3$  est une solution d'une part plus stable que la solution  $x_1$  au regard de l'objectif  $f$  (dispersion  $f_3$  sur la Figure 3.6) et d'autre part, faisable par rapport aux contraintes du modèle  $G$  et à celles issues du cahier des charges (dispersion  $Y_3$  sur la Figure 3.7). Choisir la solution  $x_3$ , c'est aussi accepter une moins bonne performance en terme de fonction objectif tout en

assurant une dispersion réalisable. Pour l'exemple précédent, le volume sur une série de moteurs sera en moyenne à une valeur plus élevée que le minimum global induisant des coûts de matières premières supérieurs. Cependant, la stabilité de l'objectif indique une meilleure prévision du volume de matière première et ainsi une meilleure gestion des coûts de fabrication et des stocks. L'étude de la dispersion du paramètre  $Y$  sous incertitudes sur la solution  $x_3$  nous montre aussi une forte probabilité de faisabilité du produit. Une économie est donc réalisée puisqu'un faible taux de rebut permet de diminuer les coûts de tri et le volume des déchets.

Chaque solution étudiée présente des avantages et des inconvénients qui ne permettent pas de prendre rapidement une décision. Un compromis doit donc être réalisé pour choisir une solution « satisfaisante » en prenant en compte la robustesse de la fonction objectif et celle des contraintes. Cependant les caractéristiques des solutions, telles que la stabilité de l'objectif et la faisabilité des contraintes, peuvent souvent se traduire en termes de coûts. L'outil idéal pour supporter la décision du concepteur serait d'associer à ce compromis une fonction coût, c'est-à-dire traduire la robustesse en coût. Dans la section suivante, nous proposons en premier lieu une discussion autour de l'écriture d'une fonction coût. Nous proposons ensuite une étude bibliographique sur les différentes formulations du cahier des charges robuste dans le but de trouver la plus pertinente.

## **3.4. Expression du cahier des charges robuste**

La section précédente propose une discussion autour de la notion de robustesse dans un cahier des charges. La robustesse d'une fonction objectif s'exprime en terme de stabilité tandis que la robustesse d'une contrainte se traduit en terme de faisabilité. Le cahier des charges initial doit être transformé en cahier des charges robuste afin d'intégrer ces notions de robustesse. Pour ce faire, il est nécessaire d'ajouter une ou plusieurs nouvelles fonctions objectif à optimiser ainsi que des contraintes portant sur la robustesse du produit.

Dans cette section, nous cherchons à exprimer mathématiquement le cahier des charges robuste du produit. Nous proposons dans la section suivante d'utiliser une fonction objectif basée sur les coûts associés au produit. Les difficultés rencontrées dans l'écriture de cette fonction coût nous contraignent cependant à orienter notre recherche vers l'expression de la robustesse à travers des critères physiques du produit.

### **3.4.1. Expression basée sur l'évaluation des coûts**

Le contexte industriel impose souvent la minimisation des coûts associés au produit tout en gardant une certaine performance du produit fabriqué. Les coûts associés au produit comprennent les coûts variables qui sont les coûts proportionnels au nombre de produits fabriqués ainsi que les coûts fixes. Les coûts variables regroupent par exemple les coûts d'achat de matières premières, les coûts associés à la consommation d'énergie, les coûts liés aux rebuts, au transport et à la livraison... Les coûts fixes sont les coûts restants telles que les loyers, les assurances, les salaires...

Il est possible de traduire la robustesse du produit dans un cahier des charges grâce à l'écriture d'une fonction objectif modélisant les coûts associés au produit. La robustesse consiste alors à évaluer l'écart du coût réel par rapport au coût nominal. En effet, nous avons vu dans la section précédente que la faisabilité des contraintes et la stabilité de la fonction objectif peuvent s'interpréter en termes de coûts. La minimisation de cette fonction coût permettrait donc d'intégrer directement la robustesse dans le cahier des charges du dimensionnement du produit. Cependant, une fonction regroupant tous les coûts associés à un produit est très difficile à exprimer. Par exemple, il est compliqué d'identifier et de modéliser les coûts associés aux rebuts issus de la fabrication du produit.

En effet, un rebut peut être défini comme une pièce qui ne respecte pas les exigences du cahier des charges. Le coût total associé aux rebuts de fabrication est fonction du taux de rebut mais aussi du coût unitaire associé à chaque rebut. En effet, une pièce peut être mise au rebut à une des étapes de contrôle imposées sur la ligne de production en vue d'être rectifiée ou d'être rejetée. De plus, un rebut n'a pas le même coût à toutes les étapes de fabrication qu'il soit rectifié ou non. En effet, il est proportionnel à la valeur ajoutée apportée au produit à chaque étape de fabrication. Un rebut en fin de ligne de production a un coût unitaire largement plus grand à celui d'un rebut identifié en début de ligne. Pour connaître le coût total des rebuts, il faut associer ce coût unitaire au pourcentage de rebuts associé à une étape de contrôle. Le calcul du taux de rebuts à chaque étape de contrôle de la production n'est pas trivial non plus à réaliser. En supposant que chaque contrainte du cahier des charges représente une étape de contrôle, on peut supposer qu'il est possible d'évaluer le taux de rebuts par l'étude de la robustesse d'une solution de dimensionnement à travers les contraintes. En effet, les solutions dont les variations liées aux incertitudes dépassent les contraintes d'un cahier des charges peuvent provoquer un taux de rebuts plus ou moins important.

Cependant, ce calcul est fastidieux et additionné au manque de connaissances sur les coûts associés aux rebuts, c'est un facteur rédhibitoire dans le calcul d'une fonction coût. Il est donc nécessaire de se baser sur d'autres critères pour exprimer un cahier des charges robuste.

### **3.4.2. Expression basée sur des paramètres physiques**

Dans la section précédente, nous avons montré qu'il est très difficile voire impossible d'exprimer un cahier des charges robuste à l'aide d'une fonction coût pertinente. En phase de conception, il est finalement plus accessible de travailler sur les critères techniques liés aux performances du système et intervenant directement dans les modèles de dimensionnement. Différentes formulations de cahier des charges robuste sont proposées dans la littérature. Nous les résumons dans le chapitre suivant pour ensuite proposer notre formulation de cahier des charges robuste.

#### **3.4.2.1. Etat de l'art des formulations pour l'optimisation robuste**

Un cahier des charges robuste fournit en complément du cahier des charges initial le niveau de robustesse exigé ou accepté par le client. Dans ce travail, la variabilité des paramètres de conception et des performances soumis à des incertitudes est modélisée par des distributions de probabilité. Une distribution de probabilité est caractérisée par une fonction densité de

probabilité ou bien par ses Moments statistiques. En effet, les Moments statistiques fournissent des informations sur la forme de la dispersion d'un paramètre mais permettent aussi de reconstruire une distribution précise. Les Moments statistiques remarquables sont la moyenne, l'écart-type, le coefficient de symétrie (skewness en anglais) et le coefficient d'aplatissement (kurtosis en anglais). Des informations complémentaires sur l'approche probabiliste sont fournies à la section 4.2.

Dans une formulation classique d'un cahier des charges, les fonctions objectif et les contraintes font intervenir les valeurs nominales des paramètres de conception et performances. Dans un cahier des charges robuste, les fonctions objectif et les contraintes doivent être reformulées afin de prendre en compte les variations des paramètres de conception et des performances (section 3.3.2). Nous présentons quatre formulations différentes d'un cahier des charges robuste issues de la littérature avec pour objectif de les comparer puis de proposer un positionnement. Nous avons adapté l'écriture des formulations aux notations utilisées dans un cahier des charges initial :

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } X \\
 & \text{Minimiser : } f(X, Y) \\
 & \text{Sous contraintes } \begin{cases} Y = G(X) \\ L_X \leq X \leq U_X \\ L_Y \leq Y \leq U_Y \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

où  $f$  est la ou les fonctions objectif,  $Y$  est l'ensemble des paramètres de sortie (performances),  $G$  est le modèle de dimensionnement,  $X$  est l'ensemble des paramètres d'entrée (paramètres de conception),  $L_X$  et  $U_X$  sont respectivement les bornes minimum et maximum pour les paramètres d'entrée et  $L_Y$  et  $U_Y$  sont respectivement les bornes minimum et maximum pour les paramètres de sortie.

### Formulation 1

La première formulation que nous proposons est représentative de la RBDO (reliability-based design optimization en anglais), c'est-à-dire l'optimisation pour la conception basée sur des critères de fiabilité. Ce type de formulation est d'ailleurs souvent employé dans le domaine du dimensionnement de structure. Nous présentons en parallèle les deux formulations proposées par (Lee et al., 2008). La première est la formulation du cahier des charges initial (3.10). La seconde est la formulation du cahier des charges robuste (3.12).

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimiser } f(X, Y) \\
 & \text{sous contrainte } G(X) \leq 0, \\
 & L_X \leq X \leq U_X
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimiser } f_r(\mu_f, \sigma_f^2) \\
 & \text{sous contrainte } P(G(X) > 0) \leq \phi(-\beta_t), \\
 & L_X \leq X \leq U_X
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

où :

- $f$  est la fonction objectif initiale.
- $X$  est l'ensemble des paramètres d'entrée.
- $Y$  est l'ensemble des paramètres de sortie.
- $G$  est le modèle de dimensionnement appelé ici aussi contrainte car sont intégrées les contraintes de type borne sur les paramètres de sortie  $Y$ .
- $L_X$  et  $U_X$  sont respectivement les bornes minimum et maximum pour les paramètres d'entrée.
- $f_r$  est la fonction objectif du problème robuste reformulée selon l'objectif à atteindre. La reformulation de la fonction objectif fait l'objet du paragraphe suivant.
- $\mu_f$  et  $\sigma_f$  sont respectivement la moyenne et l'écart-type de la fonction objectif  $f$  du cahier des charges initial. Les deux Moments (moyenne et écart-type) peuvent être obtenus par des méthodes de propagation d'incertitudes détaillées dans le chapitre 4.
- $\phi$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
- $\beta_t$  est l'index de fiabilité cible

La formulation de la fonction objectif  $f_r$  porte sur deux variables : la moyenne et l'écart-type de la fonction objectif du cahier des charges initial. Le concepteur peut chercher à atteindre une valeur cible pour la moyenne  $\mu_f$ , à la minimiser ou à la maximiser. En parallèle, il cherche à minimiser la variabilité de la fonction objectif initiale en minimisant son écart-type, pour atteindre une certaine stabilité. Le cahier des charges robuste devrait donc contenir deux objectifs distincts. Afin de pallier la difficulté de gérer une optimisation multi-objectifs, (Lee et al., 2008) proposent des fonctions objectif reformulées contenant une pondération entre moyenne et écart-type de la fonction objectif initiale :

- Atteindre une valeur cible pour la moyenne de  $f$  et minimiser son écart-type

$$f_r(\mu_f, \sigma_f^2) = w_1 \left( \frac{\mu_f - f_t}{\mu_{f_0} - f_{t_0}} \right)^2 + w_2 \left( \frac{\sigma_f}{\sigma_{f_0}} \right)^2 \quad (3.8)$$

où  $f_t$  est la valeur nominale cible de la fonction objectif robuste donnée par le concepteur,  $f_{t_0}$  est la valeur initiale nominale cible de la fonction objectif non-robuste  $f$ ,  $\mu_{f_0}$  et  $\sigma_{f_0}$  sont respectivement les valeurs optimales de la moyenne et de l'écart-type de la fonction objectif lorsque l'un et l'autre sont optimisés séparément,  $w_1$  et  $w_2$  sont des poids à déterminer par le concepteur.

- Minimiser la moyenne de  $f$  et minimiser son écart-type

$$f_r(\mu_f, \sigma_f^2) = w_1 \cdot \text{sgn}(\mu_f) \cdot \left( \frac{\mu_f}{\mu_{f_0}} \right)^2 + w_2 \left( \frac{\sigma_f}{\sigma_{f_0}} \right)^2 \quad (3.9)$$

- Maximiser la moyenne de  $f$  et minimiser son écart-type

$$f_r(\mu_f, \sigma_f^2) = w_1 \cdot \text{sgn}(\mu_f) \cdot \left( \frac{\mu_{f_0}}{\mu_f} \right)^2 + w_2 \left( \frac{\sigma_f}{\sigma_{f_0}} \right)^2 \quad (3.10)$$

La fonction objectif robuste est donc une pondération de la moyenne et de l'écart-type de la fonction objectif non-robuste (poids  $w_1$  et  $w_2$ ). De plus, la moyenne  $\mu_f$  et l'écart-type  $\sigma_f$  de la fonction objectif non-robuste sont normalisés par les valeurs optimales  $\mu_{f_0}$  et  $\sigma_{f_0}$  afin de s'en approcher au mieux.

Les contraintes sont basées sur une approche fiabiliste. La probabilité que la contrainte ne soit pas satisfaite  $P(G(X) > 0)$  doit être inférieure à la probabilité de défaillance maximale tolérée, ici  $\phi(-\beta_t)$ . L'enjeu dans cette formulation de contraintes robustes est la détermination de l'index de fiabilité cible  $\beta_t$ . Pour obtenir cette valeur, il faut dans un premier temps transformer les variables aléatoires  $X$  en variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes  $U$ . Cette transformation peut être réalisée à partir d'une méthode de transformation probabiliste (section 4.2.5). La contrainte  $G(X)$  définie sur l'espace  $X$  subit la transformation pour obtenir  $g(U)$  définie sur l'espace  $U$ . L'équation  $g(U) = 0$  définit la fonction d'état limite. L'index de fiabilité cible est alors la distance minimum entre l'origine du repère de l'espace  $U$  et la fonction limite d'état. Une optimisation est réalisée afin d'estimer cette distance minimum.

Cette formulation est basée sur des critères de fiabilité. En fiabilité, on cherche à limiter la probabilité que le système soit défaillant. En revanche, l'approche dite « robuste » a pour objectif de trouver une solution qui satisfait les contraintes robustes du cahier des charges. Contrairement à l'approche fiabiliste, on considère ici la probabilité que le système fonctionne correctement. Par la suite, nous nous intéresserons uniquement à ce type d'approche.

## Formulation 2

(Lee and Park, 2001) suggèrent aussi une formulation de la fonction objectif robuste basée sur une pondération entre la minimisation de la moyenne de la fonction objectif du cahier des charges initial  $\mu_f$  et son écart-type  $\sigma_f$ . En revanche, les contraintes ne sont pas basées sur des critères de fiabilité. (Lee and Park, 2001) implémentent également cette formulation de cahier des charge robuste sur des problèmes de calcul de structure pour dimensionner des poutres et des treillis mais il est possible de la mettre en œuvre pour des problèmes de dimensionnement de tout type de produit. Nous présentons en parallèle les deux formulations proposées par (Lee and Park, 2001). La première est la formulation du cahier des charges initial (3.11). La seconde est la formulation du cahier des charges robuste (3.12).

$$\begin{aligned} & \text{Minimiser } f(X, Y) \\ & \text{sous contrainte } G(X) \leq 0 \\ & L_X \leq X \leq U_X \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} & \text{Minimiser : } f_r(\mu_f, \sigma_f) = w \cdot \frac{\mu_f}{\mu_{f_0}} + (1 - w) \cdot \frac{\sigma_f}{\sigma_{f_0}} \\ & 0 \leq w \leq 1 \\ & \text{Sous contrainte : } G_{new} = G + k \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial G}{\partial X_i} \right| \Delta X_i \\ & L_X \leq X \pm \Delta X \leq U_X \end{aligned} \quad (3.12)$$

où :

- $f$  est la fonction objectif initiale.
- $X$  est l'ensemble des paramètres d'entrée.
- $Y$  est l'ensemble des paramètres de sortie.
- $G$  est le modèle de dimensionnement appelé ici aussi contrainte car sont intégrées les contraintes de type borne sur les paramètres de sortie  $Y$ .
- $L_X$  et  $U_X$  sont respectivement les bornes minimum et maximum pour les paramètres d'entrée.
- $f_r$  est la fonction objectif robuste reformulée.
- $\mu_f$  et  $\sigma_f$  sont respectivement la moyenne et l'écart-type de la fonction objectif  $f$  du cahier des charges initial.
- $\mu_{f_0}$  et  $\sigma_{f_0}$  sont respectivement les valeurs optimales de la moyenne et de l'écart-type de la fonction objectif initiale  $f$  obtenues par la minimisation d'une part de la moyenne puis de l'écart-type séparément.
- $w$  est un poids fixé entre 0 et 1. Une valeur proche de 0 signifie que l'on privilégie la minimisation de l'écart-type par rapport à la moyenne, et inversement pour une valeur proche de 1.
- $G_{new}$  est la contrainte reformulée.
- $k$  est le facteur de pénalité avec le respect de chaque contrainte déterminé par le concepteur. C'est en réalité le niveau de variation admissible pour la contrainte.

De même que la formulation précédente, cette formulation a priori mono-objectif est en réalité une pondération entre « optimiser la moyenne » ou « optimiser l'écart-type » de la fonction objectif initiale  $f$ , le facteur de pondération étant  $w$ . On remarque aussi que la moyenne et l'écart-type de l'objectif sont centrés autour de la moyenne optimale  $\mu_f^*$  et l'écart-type optimal  $\sigma_f^*$ . Les valeurs des écart-types étant généralement plus faibles que celles des moyennes, cette normalisation permet aussi d'éviter que la valeur de la moyenne masque celle de l'écart-type. Aux contraintes initiales sont additionnées les variations des contraintes pour des petites variations des paramètres de conception, le tout pondéré par le facteur de pénalité.

### Formulation 3

(Du et al., 2009) proposent une formulation pour l'optimisation robuste pour des problèmes contenant des variables de type aléatoire mais aussi des variables représentées par des intervalles. Nous présentons en parallèle les deux formulations proposées par (Du et al., 2009). La première est la formulation du cahier des charges initial (3.13). La seconde est la formulation du cahier des charges robuste (3.14).

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimiser } f(X, Y) \\
 & \text{sous contrainte } G(X) \leq 0 \\
 & \quad H(X) = 0 \\
 & \quad L_X \leq X \leq U_X
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Minimiser } w_1\mu_f + w_2\sigma_f \\
& \text{Sous contraintes } \mu_G + k\sigma_G \leq 0 \\
& H(X) = 0 \\
& L_{\mu_X} \leq \mu_X \leq U_{\mu_X}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

où :

- $f$  est la fonction objectif initiale.
- $X$  est l'ensemble des paramètres d'entrée. Les variations de  $X$  peuvent être modélisées pour la forme d'intervalle ou bien de manière probabiliste.
- $Y$  est l'ensemble des paramètres de sortie.
- $G$  est le modèle de dimensionnement appelé ici aussi contrainte car sont intégrées les contraintes de type borne sur les paramètres de sortie  $Y$ .
- $H$  sont les contraintes d'égalité.
- $L_X$  et  $U_X$  sont respectivement les bornes minimum et maximum pour les paramètres d'entrée.
- $\mu_f$  et  $\sigma_f$  sont respectivement la moyenne et l'écart-type de la fonction objectif  $f$  du cahier des charges initial.
- $w_1$  et  $w_2$  sont les poids donnés respectivement à la moyenne  $\mu_f$  et à l'écart-type  $\sigma_f$  de la fonction objectif initiale  $f$
- $\mu_G$  et  $\sigma_G$  sont respectivement la moyenne et l'écart-type de la contrainte initiale  $G$
- $k$  est le niveau de variation toléré pour la contrainte initiale  $G$ . Si  $k = 3$  par exemple, cela signifie que l'on souhaite que 99.73% des contraintes initiales  $G(X) \leq 0$  soient satisfaites.
- $\mu_X$  est la moyenne du paramètre  $X$ .
- $L_{\mu_X}$  et  $U_{\mu_X}$  sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de la moyenne  $\mu_X$  du paramètre  $X$ .

(Du et al., 2009) proposent de pondérer la moyenne et l'écart-type de l'objectif initial pour ramener un problème bi-objectif à un problème mono-objectif de la même manière que (Lee et al., 2008) ou (Lee and Park, 2001). Cependant la moyenne et l'écart-type ne sont pas normalisés par leurs valeurs optimales comme dans les formulations précédentes. Ainsi la valeur de la moyenne, généralement plus importante que celle de l'écart-type, peut masquer cette dernière et créer un déséquilibre au sein de la fonction objectif. Les contraintes inégalités sont basées sur une approche Six Sigma (détaillée à la section 3.4.3.2) tandis que les contraintes égalités ne sont pas modifiées et portent sur les valeurs nominales des paramètres.

#### **Formulation 4**

De même que (Du et al., 2009), plusieurs auteurs se basent sur le principe de Six Sigma (détaillé à la section 3.4.3.2) pour formuler les contraintes du cahier des charges robuste (Koch et al., 2004) (Liu et al., 2008). Nous présentons en parallèle les deux formulations proposées par (Koch et al., 2004). La première est la formulation du cahier des charges initial (3.15). La seconde est la formulation du cahier des charges robuste (3.16).

$$\begin{aligned}
& \text{Minimiser } f(X, Y) \\
& \text{sous contrainte } G(X) \leq 0 \\
& L_X \leq X \leq U_X
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Minimiser : } f_r(\mu_f, \sigma_f) \\
& \text{Sous contraintes : } G_r(\mu_y, \sigma_y) \leq 0 \\
& L_X + k\sigma_X \leq \mu_X \leq U_X - k\sigma_X
\end{aligned} \tag{3.16}$$

où :

- $f$  est la fonction objectif initiale.
- $X$  est l'ensemble des paramètres d'entrée. Les variations de  $X$  peuvent être modélisées pour la forme d'intervalle ou bien de manière probabiliste.
- $Y$  est l'ensemble des paramètres de sortie.
- $G$  est le modèle de dimensionnement appelé ici aussi contrainte car sont intégrées les contraintes de type borne sur les paramètres de sortie  $Y$ .
- $L_X$  et  $U_X$  sont respectivement les bornes minimum et maximum des paramètres entrée.
- $f_r$  est la fonction objectif robuste reformulée.
- $\mu_f$  et  $\sigma_f$  sont respectivement la moyenne et l'écart-type de la fonction objectif  $f$  du cahier des charges initial.
- $G_r$  sont les contraintes robustes reformulées pour porter sur la moyenne et l'écart-type des paramètres de sortie du modèle de dimensionnement ( $\mu_y$  et  $\sigma_y$ ).
- $\mu_X$  et  $\sigma_X$  sont respectivement la moyenne et l'écart-type du paramètre  $X$ .
- $k$  est le niveau de variation toléré pour le paramètre de conception  $X$ . Si  $k = 3$  par exemple, cela signifie que l'on souhaite que 99.73% des valeurs de  $X$  soient comprises entre  $L_X$  et  $U_X$ .

De même que pour (Lee et al., 2008), la fonction objectif  $f_r$  a deux formulations possibles selon (Koch et al., 2004). La première consiste à viser une valeur cible pour la moyenne et à minimiser les variations, tandis que la seconde consiste à minimiser la moyenne en minimisant toujours les variations.

(Liu et al., 2008) proposent la même formulation des contraintes robustes que (Koch et al., 2004) tandis que la fonction objectif robuste est modélisée de la manière suivante :

$$f_r(\mu_f, \sigma_f) = \mu_f + k\sigma_f \tag{3.17}$$

où  $k$  est le niveau de variation toléré.

L'expression  $\mu_f + k\sigma_f$  peut être considérée comme une borne supérieure de la distribution de probabilité de la fonction objectif  $f$ . La probabilité que la valeur de  $f$  soit inférieure à cette borne dépend de la valeur du paramètre  $k$  (Tableau 3.1). Par exemple, au moins 99.73% des valeurs seront inférieures à cette valeur limite si  $k$  est égal à 3 (Figure 3.8). Ainsi minimiser  $\mu_f + k\sigma_f$  revient à minimiser la pire valeur que peut prendre la fonction objectif  $f$ . Le

concepteur sait que le pourcentage associé à  $k$  (Tableau 3.1) des valeurs de  $f$  est inférieur à cette borne.

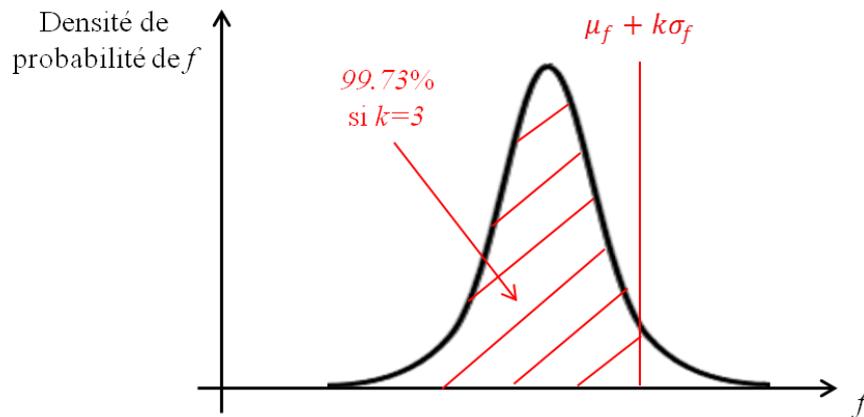


Figure 3.8 - Principe du Six-Sigma

### 3.4.2.2. Bilan des formulations robustes de la littérature

Les objectifs de la plupart des formulations robustes proposées dans la littérature sont d'optimiser la moyenne de la fonction objectif initiale et de minimiser ses variations. Ce problème bi-objectif est généralement ramené à un problème mono-objectif grâce à une pondération entre moyenne et écart-type. Dans certains cas, la moyenne et l'écart-type sont normalisés par leurs valeurs objectif respectives. Cela permet de centrer l'optimisation de la moyenne sur la moyenne optimale que l'on peut atteindre, de même pour l'écart-type. Les valeurs des écarts-types étant généralement plus faibles que celles des moyennes, cette normalisation permet aussi d'éviter que la valeur de la moyenne masque celle de l'écart-type au cours de l'optimisation. La formulation proposée par (Liu et al., 2008) est basée sur le concept de Six Sigma. En fixant  $k = 3$  par exemple, la borne supérieure de la distribution  $\mu_f + 3\sigma_f$  est minimisée. Cette fonction objectif est d'autre part plus facile à mettre en œuvre dans le sens où la moyenne et l'écart-type ne sont pas normalisés. Il n'est donc pas nécessaire de réaliser deux optimisations supplémentaires afin d'obtenir la moyenne optimale puis l'écart-type optimal.

Bien que leur efficacité soit reconnue, nous ne nous intéressons pas de plus près aux contraintes basées sur une approche fiabiliste dans ce travail. Dans un contexte fiabiliste, la probabilité de défaillance est minimisée. En conception robuste, l'objectif porte sur la faisabilité des contraintes. L'objectif de ces deux approches est le même, seules les formulations changent. Nous remarquons d'ailleurs qu'un grand nombre de formulations de contraintes robustes font appel à l'approche Six Sigma que ce soit pour contraindre les paramètres de conception  $X$  ou bien pour les performances  $Y$ .

### 3.4.3. Choix des formulations adoptées pour l'optimisation robuste

L'objectif de ce travail est de proposer une démarche pour l'optimisation robuste en pré-dimensionnement de produit. Dans ce contexte, nous proposons d'adopter la formulation du cahier des charges robuste (3.18). Cette formulation est basée sur les paramètres physiques intervenant dans le modèle de dimensionnement de la même manière que les formulations proposées dans la littérature.

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimiser } f_r(\mu_f, \sigma_f) \\
 & \text{sous contrainte } (\mu_Y, \sigma_Y) = G_r(\mu_X, \sigma_X) \\
 & [\mu_Y - k\sigma_Y; \mu_Y + k\sigma_Y] \subseteq [Y_L; Y_U] \\
 & [\mu_X - k\sigma_X; \mu_X + k\sigma_X] \subseteq [X_L; X_U]
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

où :

- $f_r$  est la fonction objectif robuste reformulée à partir de la fonction objectif initiale  $f$
- $\mu_f$  et  $\sigma_f$  sont respectivement la moyenne et l'écart-type de  $f$
- $\mu_X$  et  $\sigma_X$  sont respectivement les vecteurs des moyennes et des écarts-types des paramètres de conception
- $\mu_Y$  et  $\sigma_Y$  sont respectivement les vecteurs des moyennes et des écarts-types des paramètres de sortie
- $G_r$  est le modèle de contraintes robustes reformulé
- $Y_L$  et  $Y_U$  sont respectivement les bornes inférieures et supérieures des performances
- $X_L$  et  $X_U$  sont respectivement les bornes inférieures et supérieures des paramètres de conception
- $k$  est le niveau de variation toléré.

La formulation du cahier des charges robuste porte uniquement sur la moyenne et l'écart-type des paramètres de conception et des performances du modèle de dimensionnement. La moyenne donne une information sur la position de la distribution tandis que l'écart-type renseigne sur sa dispersion. Les Moments d'ordres supérieurs, que nous définissons à la section 4.2.3, pourraient donner une information complémentaire sur la forme de la dispersion telle que sa symétrie, son aplatissement... Or, ces informations sont d'une part rarement connues pour les paramètres de conception. D'autre part, lorsque le concepteur possède ces informations à propos des performances, elles ne sont généralement pas exploitées.

Dans les sections suivantes nous présenterons les expressions adoptées pour la fonction objectif robuste  $f_r$  puis pour les contraintes robustes  $G_r$ .

#### 3.4.3.1. Expressions de la fonction objectif

L'expression de la fonction objectif robuste de (Lee and Park, 2001) a retenu notre attention parmi celles relevées dans la littérature. Les raisons de ce choix sont détaillées plus bas. Nous rappelons l'expression de la fonction objectif robuste:

$$f_r(\mu_f, \sigma_f) = \alpha \cdot \frac{\mu_f}{\mu_f^*} + (1 - \alpha) \cdot \frac{\sigma_f}{\sigma_f^*} \quad (3.19)$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

où  $\mu_f$  et  $\sigma_f$  sont respectivement la moyenne et l'écart-type de la fonction objectif initiale  $f$ ,  $\mu_f^*$  et  $\sigma_f^*$  sont obtenus en minimisant au préalable uniquement la moyenne de  $f$  puis son écart-type,  $\alpha$  est un poids permettant la pondération entre moyenne et écart-type.

Cette fonction objectif, a priori mono-objectif, permet de minimiser à la fois la moyenne de la fonction objectif initiale et son écart-type. La valeur du poids  $\alpha$  est fixée par le concepteur en fonction de l'importance qu'il donne à minimiser la moyenne ou à minimiser l'écart-type. L'écart-type est minimisé en priorité en choisissant une valeur proche de 0. Dans ce cas, le concepteur favorise la stabilité de la fonction objectif initiale. A l'inverse, on encourage la minimisation de la fonction objectif initiale au détriment de sa stabilité lorsque  $\alpha$  prend une valeur proche de 1. D'autre part, la moyenne et l'écart-type sont normalisés par leurs valeurs optimales respectives. Les valeurs des écarts-types étant généralement plus faibles que celles des moyennes, la normalisation permet d'éviter que la valeur de la moyenne masque celle de l'écart-type au cours de l'optimisation.

### 3.4.3.2. Expressions des contraintes

Les contraintes sont sous deux formes :

- le modèle dit robuste  $G_r$  contenant les équations liant les variations des paramètres de sortie aux variations des paramètres d'entrée (3.20)
- les contraintes de type borne concernant les paramètres de conception et les performances (3.21)

La première contrainte (3.20) concerne le modèle de dimensionnement. En effet, le modèle de dimensionnement  $Y = G(X)$  doit être reformulé afin d'obtenir le modèle de dimensionnement dit « robuste »  $G_r$  dont les équations (analytiques ou numériques) lient les moyennes et les écart-types des paramètres de conception aux performances du modèle. Au cours de l'optimisation, les moyennes et les écarts-types des paramètres de conception et des performances du modèle doivent ainsi satisfaire les équations du modèle de dimensionnement robuste  $G_r$ .

$$(\mu_Y, \sigma_Y) = G_r(\mu_X, \sigma_X) \quad (3.20)$$

Pour établir les contraintes de type borne (3.21), nous avons choisi l'approche Six Sigma. Le principe de cette formulation impose qu'un certain pourcentage de valeurs prises par  $X$  ou  $Y$  soit respectivement comprises dans l'intervalle limite  $[X_L; X_U]$  ou  $[Y_L; Y_U]$  (Figure 3.9). La valeur du pourcentage dépend de la valeur prise par  $k$  (Tableau 3.1). Si le concepteur souhaite avoir 99.73% des valeurs de  $X$  et  $Y$  comprises dans les intervalles limites respectifs  $[X_L; X_U]$  et  $[Y_L; Y_U]$  alors il lui faut choisir  $k = 3$ . Le concepteur peut donc choisir son niveau de robustesse concernant la satisfaction des contraintes initiales grâce au paramètre  $k$ .

$$\begin{aligned} [\mu_Y - k\sigma_Y; \mu_Y + k\sigma_Y] &\subseteq [Y_L; Y_U] \\ [\mu_X - k\sigma_X; \mu_X + k\sigma_X] &\subseteq [X_L; X_U] \end{aligned} \quad (3.21)$$

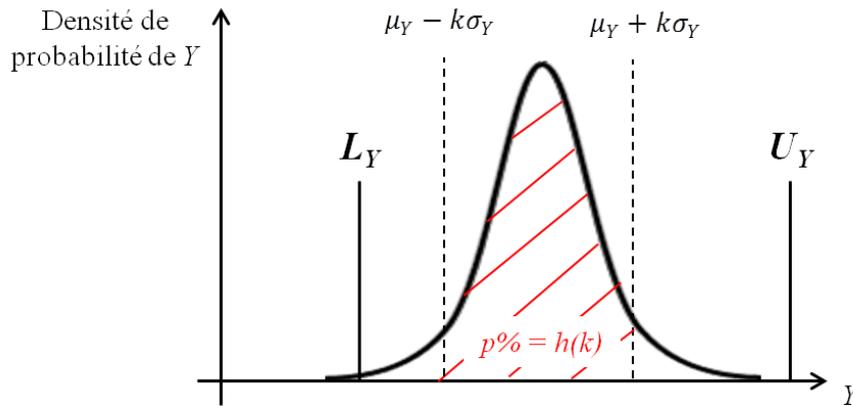


Figure 3.9 - Illustration de la contrainte de type intervalle sur  $Y$

Tableau 3.1 - Pourcentage de valeurs comprises dans  $[\mu_Y - k\sigma_Y; \mu_Y + k\sigma_Y]$  en fonction de la valeur de  $k$

Valeur de $k$	Pourcentage $p$
1	68%
2	95%
3	99.73%

### 3.5. Conclusion

Les paramètres de conception et les performances sont modélisés par des variables aléatoires de fonction densité de probabilité connues ou arbitraires. Bien que le coût lié au calcul probabiliste soit important, l'hypothèse sur l'utilisation des variables aléatoires permet le transport d'informations supplémentaires à travers un modèle de dimensionnement.

Nous avons relevé la nécessité de prendre en compte la robustesse sur la fonction objectif mais aussi sur les contraintes du cahier des charges non-robuste. Une solution robuste au problème de dimensionnement s'obtient par la réalisation d'un bon compromis entre minimisation et stabilité de la fonction objectif initiale. Une solution robuste doit par ailleurs satisfaire la faisabilité des contraintes initiales lorsque les paramètres de conception subissent des incertitudes.

Finalement, le cahier des charges robuste que nous avons mis en place dans le but de réaliser une optimisation sous incertitudes nécessite l'évaluation de la moyenne et de l'écart-type des paramètres de sortie ( $\mu_Y$  et  $\sigma_Y$ ) et de la fonction objectif initiale ( $\mu_f$  et  $\sigma_f$ ). Nous présentons dans le chapitre suivant nos recherches sur les méthodes de propagation d'incertitudes de type probabilistes dans les modèles de dimensionnement de produit permettant cette évaluation.



# 4. Propagation d'incertitudes

## 4.1. Introduction

La propagation d'incertitudes permet d'estimer la variabilité des paramètres de sortie d'un modèle de dimensionnement lorsque les paramètres d'entrée sont sujets à des incertitudes. Nous avons choisi de modéliser les incertitudes sur les paramètres d'entrée du modèle par des distributions de probabilité de type gaussienne (choix détaillé à la section 3.2.4). De plus, nous supposons que tous les paramètres d'entrée du modèle sont indépendants les uns des autres. Les méthodes dédiées à la propagation d'incertitudes suscitent notre intérêt particulièrement pour l'évaluation de la moyenne et de l'écart-type caractérisant la distribution de probabilité des paramètres de sortie du modèle. Ce calcul est nécessaire pour la mise en œuvre du cahier des charges robuste du produit (formulation développée à la section 3.4.3) dans le cadre de la recherche d'un dimensionnement optimal robuste.

Il existe plusieurs méthodes permettant de propager l'incertitude sous forme probabiliste à travers un modèle de dimensionnement. Nous observons dans ce chapitre que propager ce type d'incertitudes à travers un modèle revient à évaluer une intégrale dont la dimension est celle du modèle de dimensionnement. Ainsi, une méthode très connue consiste à réaliser des Simulations de Monte-Carlo sur le modèle de dimensionnement. Des améliorations de cette méthode ont été réalisées afin de pallier le temps de calcul trop important. D'autres méthodes pour la propagation d'incertitudes sous forme probabiliste ont été développées en se basant sur différents mécanismes mathématiques. La méthode Propagation of Variance utilise un développement de Taylor pour réaliser les calculs. La méthode Dimension Reduction consiste à décomposer le modèle à  $n$  dimensions en un modèle composé d'une somme de fonctions à une ou deux dimensions. Les Polynômes de Chaos sont quant à eux basés sur un développement en polynômes orthogonaux.

L'objectif de ce chapitre est de réaliser une étude comparative de ces différentes méthodes permettant la propagation d'incertitudes à travers des modèles dédiés au dimensionnement de produit. Quelques notions sont exposées au préalable afin de rappeler les bases de l'approche probabiliste.

## 4.2. Généralités sur l'approche probabiliste

### 4.2.1. Variables aléatoires continues

Nous ne traitons dans ce travail que les problèmes de dimensionnement continus. Ainsi la variabilité d'un paramètre d'entrée ou de sortie d'un modèle est modélisée par une variable aléatoire  $X$  continue, c'est-à-dire qu'elle peut prendre toutes les valeurs réelles dans un intervalle donné. Les valeurs prises par la variable aléatoire continue ont une probabilité donnée par la fonction densité de probabilité  $f_X(x)$  de la loi de probabilité associée au paramètre  $X$ .

Ainsi la probabilité que la variable  $X$  prenne des valeurs comprises dans un intervalle  $[a, b]$  est donnée par l'équation (4.1) et illustrée Figure 4.1.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (4.1)$$

La probabilité de l'événement univers, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les possibilités de valeurs que peut prendre la variable aléatoire, est égale à un. Pour une variable aléatoire continue, cette propriété s'exprime par l'équation (4.2).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \quad (4.2)$$

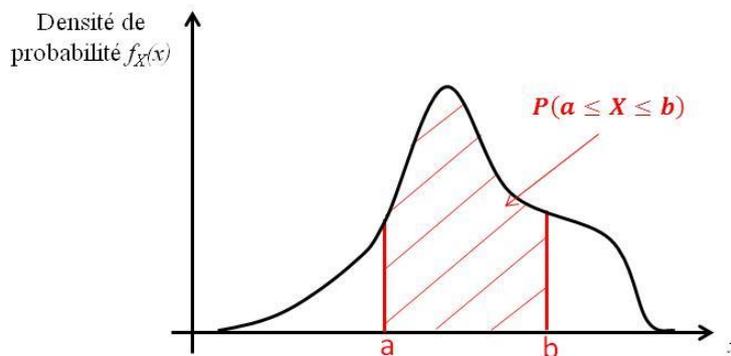


Figure 4.1 - Densité de probabilité de la variable aléatoire  $X$

## 4.2.2. Les lois de probabilités continues

La loi de probabilité associée à un paramètre d'entrée ou de sortie du modèle de dimensionnement décrit son comportement aléatoire lorsque ce dernier est sujet à des incertitudes. Par exemple, certaines machines de fabrication sont connues pour fabriquer un produit à une dimension plus ou moins éloignée de la valeur nominale demandée. La dispersion provoquée par la machine peut suivre une loi de probabilité quelconque ou bien connue. Les lois connues sont la loi uniforme, la loi normale (ou gaussienne), la loi exponentielle, la loi log-normale, la loi de Weibul. Un concepteur peut aussi développer de manière expérimentale des lois de probabilité pour les paramètres de conception dont les lois ne sont pas identifiées comme des lois connues. Il réalise par exemple des tests sur des lots du même matériau pour déterminer la loi de probabilité d'une propriété du matériau. Les résultats obtenus permettent de construire une dispersion pour cette propriété associée au matériau. Cette loi n'a pas forcément une expression formelle comme les lois connues. Elle peut cependant être caractérisée par des éléments tels que des Moments statistiques.

### 4.2.3. Notions de Moments statistiques

Les Moments statistiques sont des caractéristiques propres à chaque loi de probabilité. L'estimation des Moments remarquables (moyenne et écart-type par exemple) d'un paramètre de conception ou d'une performance fournit des indications sur la forme de sa distribution de probabilité telles que sa position dans l'espace de définition du paramètre, sa dispersion, ses éventuelles symétries, son aplatissement, ... Les Moments sont estimés à différents ordres  $k$ , tel que  $k \in \mathbb{N}$ . Il existe trois types de Moments possibles : le moment ordinaire, le moment centré et le moment centré réduit.

- **Le moment ordinaire**

Le moment ordinaire d'ordre  $k$  s'exprime de la manière suivante :

$$mo_k = \int_{x \in I} x^k f_X(x) dx \quad (4.3)$$

où  $I$  est l'ensemble de définition de la variable aléatoire  $X$ , et  $f_X$  est sa loi de probabilité.

D'après l'équation (4.2), le moment d'ordre 0 est  $mo_0 = 1$ . Le moment d'ordre 1 correspond à la moyenne  $\mu$  (4.4) de la variable (aussi appelée espérance  $E[X]$ ). La moyenne fournit une information sur la position de la distribution du paramètre.

$$mo_1 = \mu = E[X] \quad (4.4)$$

- **Le moment centré**

Le moment centré d'ordre  $k$  s'exprime de la manière suivante :

$$mc_k = \int_{x \in I} [x - \mu]^k f_X(x) dx \quad (4.5)$$

où  $I$  est l'ensemble de définition de la variable aléatoire  $X$ ,  $\mu$  est sa moyenne,  $f_X$  est sa loi de probabilité.

D'après l'équation (4.2), le moment centré d'ordre 0 est  $mc_0 = 1$ . Le moment centré d'ordre 1 est  $mc_1 = 0$ , obtenu à partir de l'équation (4.4). Le moment centré d'ordre 2 correspond à la variance  $V(X)$  de la variable aléatoire (4.6).

$$mc_2 = V(X) \quad (4.6)$$

L'écart-type  $\sigma$  de la variable aléatoire s'exprime à partir de la variance (4.7). L'écart-type, de même que la variance, permet de qualifier la dispersion de la distribution d'un paramètre.

$$\sigma = \sqrt{V(X)} \quad (4.7)$$

- **Le moment centré réduit**

Le moment centré réduit d'ordre  $k$  s'exprime de la manière suivante :

$$mcr_k = \int_{x \in I} \left[ \frac{x - \mu}{\sigma} \right]^{k+2} f_X(x) dx \quad (4.8)$$

où  $I$  est l'ensemble de définition de la variable aléatoire  $X$ ,  $\mu$  est sa moyenne,  $\sigma$  est son écart-type,  $f_X$  est sa loi de probabilité.

Le moment centré réduit d'ordre 0 ( $mcr_0 = 1$ ) se calcule à partir de l'équation (4.6).

Le moment centré réduit d'ordre 3 est le coefficient d'asymétrie (skewness en anglais). Il traduit l'asymétrie de la distribution de la variable aléatoire (positif si la queue de distribution est étalée vers la droite, nul si la distribution est symétrique et négatif si la queue de distribution est étalée vers la gauche). La loi normale, par exemple, possède un coefficient d'asymétrie nul puisque sa distribution est totalement symétrique.

Le moment centré réduit d'ordre 4 est le coefficient d'aplatissement (kurtosis) qui traduit l'aplatissement de la distribution de la variable aléatoire. Le kurtosis de la loi normale est égal à 3 quels que soient les paramètres de la loi normale.

L'évaluation des Moments remarquables (moyenne, écart-type, coefficients d'asymétrie et d'aplatissement) permet dans un premier temps de caractériser la distribution de la variable aléatoire. La connaissance des Moments ordinaires à différents ordres permet, par ailleurs de reconstituer la densité de probabilité de la variable aléatoire. En effet, la densité de probabilité  $f_X(x)$  peut s'obtenir à partir des Moments ordinaires de la variable  $X$  par l'équation (4.9).

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \cdot \left[ 1 + itmo_1 + \frac{(it)^2 mo_2}{2!} + \dots \right] d\tau \quad (4.9)$$

où  $mo_i$  sont les Moments d'ordre  $i$  de la variable aléatoire  $X$ .

Cette équation est obtenue par l'intermédiaire de la fonction caractéristique  $\phi_X(\tau)$  qui s'exprime à l'aide de la fonction génératrice des Moments (4.10). La fonction génératrice des Moments  $M_X(t)$  est définie comme étant l'espérance de la fonction variable aléatoire  $e^{tX}$  ( $M_X(t) = E[e^{tX}]$ ). Elle s'exprime à l'aide des Moments ordinaires grâce à un développement en série entière de la fonction exponentielle (4.11).

$$\phi_X(\tau) = M_X(i\tau) \quad (4.10)$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f_X(x) dx = 1 + tmo_1 + \frac{t^2 mo_2}{2!} + \dots \quad (4.11)$$

où  $f_X(x)$  est la fonction densité de probabilité de la variable aléatoire  $X$  et  $mo_i$  est le moment d'ordre  $i$  de  $X$ .

#### 4.2.4. Covariance et indépendance des paramètres

La covariance de deux variables aléatoires permet de quantifier l'indépendance de ces deux variables. La covariance de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est définie par l'équation (4.12). Lorsque les paramètres sont indépendants, leur covariance est nulle.

$$\begin{aligned} Cov[X, Y] &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (X - \mu_X)(Y - \mu_Y) f_{X,Y}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (4.12)$$

où  $\mu_X$  et  $\mu_Y$  sont les moyennes des variables aléatoires  $X$  et  $Y$  et  $f_{X,Y}(x, y)$  est la densité de probabilité conjointe de ces variables.

La notion de covariance intervient directement dans le développement des méthodes de propagation d'incertitudes abordées dans les sections suivantes. En effet, les modèles de dimensionnement permettent le calcul des performances en fonction de plusieurs paramètres d'entrée. Pour évaluer la variabilité des paramètres de sortie il faut combiner les distributions de ces paramètres d'entrée. Il est donc nécessaire de connaître les dépendances entre ces paramètres d'entrée par l'intermédiaire d'une matrice de covariance.

#### 4.2.5. Transformations probabilistes

Le principe d'une transformation probabiliste est de transformer des variables aléatoires suivant des lois quelconques et parfois dépendantes en variables aléatoires suivant des distributions normales centrées réduites et indépendantes (Mohammadkhani-Shali, 2007).

On considère un vecteur  $X = (X_1, \dots, X_n)$  de  $n$  variables aléatoires dépendantes dont la fonction de répartition conjointe est  $F_X(x_1, \dots, x_n)$ . Tandis que  $X = (X_1, \dots, X_n)$  est l'espace des variables aléatoires correspondant aux paramètres du modèle,  $U = (U_1, \dots, U_n)$  est l'espace des variables aléatoires normales centrées réduites et indépendantes associées à  $X = (X_1, \dots, X_n)$ . La transformation de Roseblatt (Roseblatt, 1952) et la transformation de Nataf (Nataf, 1962) (Lebrun and Dutfoy, 2009) (Nguyen, 2007) sont des transformations probabilistes pour passer de l'espace  $X$  à l'espace  $U$ . Nous décrivons à titre d'exemple la transformation de Roseblatt dans cette section. Nous fournissons aussi les équations pour réaliser les transformations inverses, c'est-à-dire de l'espace  $U$  vers l'espace  $X$ .

La transformation de Roseblatt propose l'égalité suivante pour obtenir le vecteur  $U$  (Arroyo-Contreras, 1989) (Rahman and Xu, 2004):

$$\begin{cases} \Phi_{U_1}(u_1) = F_{X_1}(x_1) \\ \Phi_{U_2}(u_2) = F_{X_2|X_1}(x_2|x_1) \\ \vdots \\ \Phi_{U_n}(u_n) = F_{X_n|X_1 \dots X_{i-1}}(x_n|x_1 \dots x_{n-1}) \end{cases} \quad (4.13)$$

où  $F_{X_i|X_1 \dots X_{i-1}}(x_i|x_1 \dots x_{i-1})$  est la fonction de répartition conditionnelle de la variable aléatoire  $X_i$  et  $\Phi_{U_i}(u_i)$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

La probabilité conditionnelle se calcule comme suit :

$$P(X_i = x_i | X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}) = \frac{P(X_1 = x_1, \dots, X_i = x_i)}{P(X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1})} \quad (4.14)$$

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \text{avec } P(X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}) > 0$$

d'où la fonction de densité conditionnelle de  $X_i$  sachant  $X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}$  est :

$$f_{X_i|X_1 \dots X_{i-1}}(x_i|x_1 \dots x_{i-1}) = \frac{f_X(x_1, \dots, x_i)}{f_{X_1 X_2 \dots X_{i-1}}(x_1, \dots, x_{i-1})} \quad (4.15)$$

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \text{avec } f_{X_1 X_2 \dots X_{i-1}}(x_1, \dots, x_{i-1}) > 0$$

où  $f_{X_1 X_2 \dots X_{i-1}}(x_1, \dots, x_{i-1})$  (respectivement  $f_X(x_1, \dots, x_i)$ ) est la fonction de densité de probabilité conjointe du vecteur aléatoire  $(X_1, \dots, X_{i-1})$  (respectivement  $X$ ).

La fonction de répartition conditionnelle  $F_{X_i|X_1 \dots X_{i-1}}$  se calcule directement par intégration de la fonction de densité conditionnelle  $f_{X_i|X_1 \dots X_{i-1}}$  :

$$\begin{aligned} F_{X_i|X_1 \dots X_{i-1}}(x_i|x_1 \dots x_{i-1}) &= \int_{-\infty}^{x_i} f_{X_i|X_1 \dots X_{i-1}}(t|x_1 \dots x_{i-1}) dt \\ &= \int_{-\infty}^{x_i} \frac{f_X(x_1, \dots, x_{i-1}, t)}{f_{X_1 X_2 \dots X_{i-1}}(x_1, \dots, x_{i-1})} dt \\ &= \frac{1}{f_{X_1 X_2 \dots X_{i-1}}(x_1, \dots, x_{i-1})} \int_{-\infty}^{x_i} f_X(x_1, \dots, x_{i-1}, t) dt \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \text{avec } f_{X_1 X_2 \dots X_{i-1}}(x_1, \dots, x_{i-1}) > 0$$

La fonction de densité de la variable aléatoire  $U_i$  de type normale centrée réduite est :

$$f_{U_i}(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u_i^2\right), \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Sa fonction de répartition  $\Phi_{U_i}(u_i)$  est alors :

$$\Phi_{U_i}(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_i} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (4.17)$$

Il est possible de réaliser la transformation probabiliste inverse à partir d'une variable aléatoire centrée réduite  $U$ . En effet, le Tableau 4.1 montre les différentes équations permettant ces transformations pour quelques distributions de probabilité (Boutahar, 2004).

Tableau 4.1 - Transformations probabilistes  $U \rightarrow X$  pour différentes distributions de probabilité

Distribution de probabilité	Paramètres	Transformation
Normale	$\mu, \sigma$	$X = \mu + \sigma U$
Log-normale	$\mu, \sigma$	$X = \exp(\mu + \sigma U)$
Uniforme	$a, b$	$X = a + (b - a) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{U}{\sqrt{2}}\right)\right)$
Gamma	$a, b$	$X = ab \left(U \sqrt{\frac{1}{9a} + 1 - \frac{1}{9a}}\right)^3$
Exponentielle	$\lambda$	$X = -\frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{U}{\sqrt{2}}\right)\right)$
...	...	...

L'intérêt de ces méthodes de transformation probabiliste s'explique par le fait qu'on maîtrise généralement mieux les distributions de probabilité normales et particulièrement la distribution normale centrée réduite. En effet, une distribution de probabilité normale est caractérisée par deux paramètres : sa moyenne et son écart-type. De plus ses Moments statistiques d'ordres supérieurs sont connus ou peuvent s'exprimer à partir de sa moyenne et de son écart-type.

D'autre part, certaines méthodes de propagation d'incertitudes que nous proposons d'utiliser dans la suite de ce chapitre exploitent des paramètres modélisés comme des variables aléatoires indépendantes de distribution normale. En effet, la covariance de deux paramètres est alors nulle et cela permet de simplifier les calculs probabilistes. Une transformation probabiliste est donc nécessaire si les paramètres de conception du modèle de dimensionnement sont modélisés par des variables aléatoires de distributions quelconques et dépendantes les unes des autres. Dans le cas où les paramètres de conception du modèle de dimensionnement sont déjà modélisés par des variables aléatoires normales dépendantes les unes des autres, alors nous faisons l'hypothèse simplificatrice que les paramètres de conception sont indépendants les uns des autres.

### 4.3. Principe de la propagation d'incertitudes

Les méthodes de propagation d'incertitudes dans un modèle ont pour objectif de donner la variabilité des performances (paramètres de sortie) du modèle en présence de variations sur les paramètres de conception (paramètres d'entrée). Nous nous intéressons aux méthodes de propagation d'incertitudes dans le cas où les paramètres d'entrée sujets aux incertitudes sont modélisés par des distributions de probabilités.

Considérons le modèle suivant :

$$Y = G(X) \tag{4.18}$$

où  $G$  est le modèle de dimensionnement,  $Y = (y_1, \dots, y_m)$  est le vecteur des  $m$  performances et  $X = (x_1, \dots, x_n)$  est le vecteur des  $n$  paramètres de conception.

Le processus de propagation d'incertitudes est représenté sur la Figure 4.2. En entrée du processus, nous possédons un modèle de dimensionnement  $G$  et une solution réalisable  $X$  de ce modèle. La solution  $X$  est un ensemble de valeurs des paramètres de conception qui satisfont le modèle  $G$  et le cahier des charges de départ du problème de dimensionnement. Chaque paramètre d'entrée est ensuite modélisé selon une distribution de probabilité caractérisant sa variabilité. Le principe de la propagation d'incertitudes est de calculer les variations des performances (paramètres de sortie) sous la forme de distribution de probabilité ou bien sous la forme d'un ensemble de Moments (ordinaires ou autres) selon la méthode de propagation d'incertitudes utilisée. Rappelons qu'il est possible de reconstruire une fonction densité de probabilité à partir des Moments ordinaires de différents ordres des paramètres de sortie considérés (4.9).

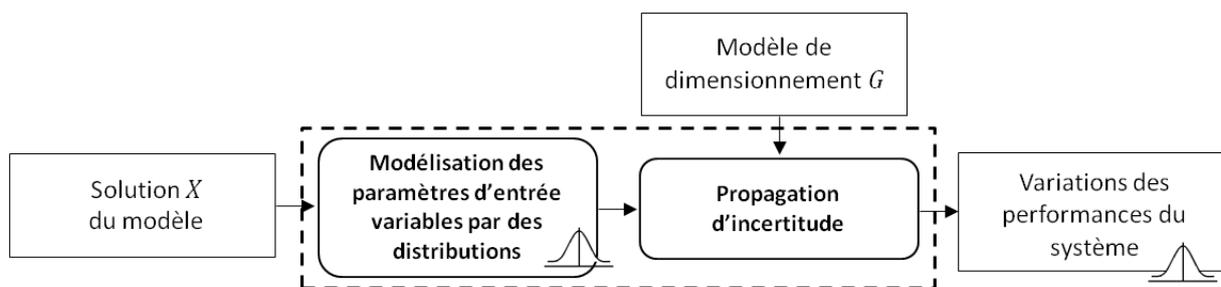


Figure 4.2 - Principe de propagation d'incertitudes

### 4.4. Applications possibles en dimensionnement de produit

L'analyse de sensibilité et l'analyse d'incertitudes sont deux applications possibles de la propagation d'incertitudes. Dans le cadre de problèmes de dimensionnement de produit, ces deux applications peuvent être réalisées à l'aide des mêmes méthodes de propagation d'incertitudes, cependant l'objectif final n'est pas le même. En effet, l'analyse de sensibilité a

pour but de déterminer les paramètres d'entrée du modèle les plus influents tandis que l'analyse d'incertitude a pour but d'évaluer les variations des paramètres de sortie.

- Analyse de sensibilité

L'analyse de sensibilité est basée sur le principe de la propagation d'incertitudes. Elle est utilisée dans le but de réduire la dimension d'un modèle. L'objectif est de déterminer quels sont les paramètres de conception qui influencent le moins les performances. En d'autres termes, l'objectif est de définir les paramètres auxquels le modèle est le moins sensible ou pas sensibles. La notion de sensibilité est une notion relative et dépend du jugement du concepteur. Les paramètres d'entrée qui influencent le moins les performances peuvent ainsi être fixés afin de diminuer le nombre de paramètres variables. L'analyse de sensibilité est réalisée sur des modèles contenant un grand nombre de paramètres variables. En effet, divers traitements de modèles, telle que l'optimisation, peuvent être très coûteux en termes de temps et d'espace calcul, surtout quand le nombre de paramètres variables est élevé. D'autres calculs tels que certaines optimisations ou analyses d'incertitudes se font à l'aide de méthodes qui n'acceptent qu'un certain nombre réduit de paramètres d'où la nécessité de réduire leur nombre. (Jaeger et al., 2011) ont réalisé une analyse de sensibilité dans le cadre de la conception préliminaire d'un avion afin de réduire le nombre de paramètres variables. En effet, la fonction objectif liée au problème de dimensionnement traité comporte plus de 160 paramètres susceptibles de varier sous incertitudes. L'analyse de sensibilité a permis d'identifier les 15 paramètres les plus influents et de fixer les autres afin de réduire le temps de calcul de la fonction objectif.

- Analyse d'incertitude

L'analyse d'incertitude comme application de la propagation d'incertitudes est utilisée pour étudier la robustesse d'un dimensionnement. En effet, l'analyse d'incertitude consiste à propager à travers le modèle les variations des paramètres d'entrée afin d'obtenir les variations correspondantes des performances. Ces variations des performances sont ensuite comparées aux critères de robustesse initialement définis par le concepteur (critères définis section 3.3). (Yu-bing, 2010) a proposé une démarche pour réaliser de l'optimisation robuste permettant d'illustrer l'analyse d'incertitude. En effet, la première étape de cette approche est de réaliser une optimisation classique du modèle de dimensionnement pour obtenir une solution optimale. L'étape suivante où intervient l'analyse d'incertitudes consiste à étudier la robustesse de la solution obtenue. La méthode très connue des simulations de Monte-Carlo proposée par le logiciel ANSYS est alors utilisée.

Finalement, un concepteur peut être amené à réaliser successivement les deux analyses afin de trouver une solution robuste d'un modèle de dimensionnement comprenant de nombreux paramètres. En effet, le concepteur réalise une analyse de sensibilité afin de réduire la dimension de son modèle en identifiant les paramètres les plus influents. Après avoir trouvé une solution, il peut ensuite réaliser des calculs d'analyse de sensibilité pour vérifier la robustesse de la solution. Dans un contexte de conception robuste, nous ne nous intéressons qu'à l'analyse d'incertitudes appelée aussi analyse de robustesse d'une solution. Nous supposons que l'étape d'analyse de sensibilité est déjà réalisée.

## 4.5. Méthodes pour la propagation d'incertitudes

Dans cette section, nous présentons une étude bibliographique des méthodes pour la propagation d'incertitudes dans le cadre d'une modélisation probabiliste des paramètres de conception et des performances. Les méthodes abordées sont les « Simulations de Monte-Carlo », les « Simulations de Monte-Carlo améliorées » par l'utilisation de métamodèles ou bien par un plan d'expérience, la méthode « Propagation of variance », la méthode « Dimension Reduction » et la méthode des « Polynômes de Chaos ». Ces méthodes sont ensuite implémentées sur un exemple de dimensionnement afin d'être comparées. A l'issue de cette comparaison, nous pouvons déterminer quelle méthode est la plus appropriée pour être utilisée dans l'approche d'optimisation robuste proposée au chapitre suivant.

Soit  $Y = G(X)$  le modèle de dimensionnement introduit à la section 2.2.2. Le modèle de dimensionnement du moteur électrique décrit à la section 2.2.4 est représentatif des modèles sur lesquels nous travaillons.  $X$  est un vecteur de  $n$  paramètres d'entrée aléatoires  $(x_1, \dots, x_n)$  dont les distributions sont connues.  $Y$  est un vecteur de  $m$  paramètres de sortie dont les variabilités sont à déterminer. Une équation du modèle de dimensionnement peut donc s'écrire sous la forme:

$$y = g(x_1, \dots, x_n) \quad (4.19)$$

où  $g$  est la fonction permettant d'évaluer le paramètre de sortie  $y$  en fonction des paramètres d'entrée  $x_1, \dots, x_n$ .

### 4.5.1. Simulations de Monte-Carlo

Les simulations de Monte-Carlo permettent d'obtenir la distribution des paramètres de sortie  $Y$  lorsque les paramètres d'entrée  $X$  du modèle subissent des variations incertaines. La démarche pour y parvenir consiste à tirer aléatoirement, pour chaque paramètre d'entrée  $x_i (i = 1, \dots, n)$ ,  $N$  valeurs depuis sa distribution de probabilité (Amelin, 2004). Le modèle est ensuite calculé pour chaque jeu d'entrée, c'est-à-dire  $N$  fois. On obtient donc pour chaque paramètre de sortie du modèle un vecteur de  $N$  valeurs. A partir de ces valeurs, il est possible de construire une distribution de probabilité pour chaque paramètre de sortie du modèle. Ceci donne la possibilité au concepteur de connaître l'évolution du comportement des performances sous incertitudes et éventuellement d'approcher la distribution par une fonction de densité. Il est aussi possible de calculer différents Moments tels que la moyenne (4.20) et l'écart-type (4.21) afin de les réutiliser comme indicateurs sur la forme de la distribution (position, dispersion, symétrie...):

$$\hat{\mu}_Y = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N G(X^{(k)}) \quad (4.20)$$

où  $\hat{\mu}_Y$  est le vecteur des moyennes des paramètres de sortie,  $N$  est le nombre de tirages ou simulations de Monte-Carlo,  $G$  est le modèle de dimensionnement et  $X^{(k)}$  est le vecteur des valeurs des paramètres d'entrée pour un tirage  $k, k = 1, \dots, N$ .

$$\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (G(X^{(k)}) - \hat{\mu}_Y)^2 \quad (4.21)$$

où  $\hat{\sigma}_Y$  est le vecteur des écarts-types des paramètres de sortie,  $N$  est le nombre de tirages ou simulations de Monte-Carlo,  $G(X^{(k)})$  est le vecteur des paramètres  $Y$  pour un tirage de paramètres d'entrée  $X^{(k)}$ .

Cette méthode nécessite la connaissance de la distribution de chaque paramètre d'entrée afin de pouvoir tirer un jeu de  $N$  valeurs. (Lu and Zhang, 2003) ont proposé la formule (4.22) pour calculer le nombre minimum de tirages  $N_\epsilon$  pour obtenir une précision de  $100 * \epsilon \%$ . Ils proposent aussi la formule  $\mp \hat{\sigma}_Y / \sqrt{N}$  pour calculer l'erreur statistique. C'est-à-dire que si l'on souhaite réduire d'un facteur 3 l'erreur statistique, on doit augmenter le nombre de tirages par 9. La méthode des simulations de Monte-Carlo a une vitesse de convergence de  $1/\sqrt{N}$ .

$$N_\epsilon = \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{\hat{\mu}_Y^2 \epsilon^2} \quad (4.22)$$

où  $\hat{\sigma}_Y$  et  $\hat{\mu}_Y$  sont respectivement l'écart-type et la moyenne du paramètre de sortie  $Y$ .

La technique des simulations de Monte-Carlo n'est pas une méthode intrusive car elle considère le modèle comme une boîte noire. En effet, elle ne nécessite pas de modification du modèle de dimensionnement. Ainsi, elle convient autant aux modèles analytiques (section 2.2.2.1) qu'aux modèles numériques (section 2.2.2.2). (Yu-bing, 2010) a proposé un algorithme d'optimisation robuste intégrant une analyse d'incertitudes réalisée par le module DesignXplorer du logiciel ANSYS. Ce module, basé sur les simulations de Monte-Carlo, permet d'analyser la robustesse d'une solution pour des modèles éléments finis, comme réalisé par (Yu-bing, 2010). Cependant, le nombre de tirages nécessaires pour atteindre une bonne précision dépend en réalité des caractéristiques du modèle de dimensionnement telles que les non-linéarités, le nombre de paramètres de conception, etc. Plus les paramètres de conception ont des distributions de probabilité à larges dispersions, plus il est nécessaire d'augmenter le nombre de simulations afin de couvrir l'espace des distributions de probabilité. Selon (Lemaire, 2005),  $10^4$  à  $10^6$  tirages sont nécessaires pour obtenir une précision acceptable sur la distribution des performances de sortie. Cela équivaut à évaluer le modèle  $G$   $10^4$  à  $10^6$  fois dont une seule exécution peut déjà être coûteuse. (Du et al., 2009) ont utilisé, par exemple, cette technique afin d'analyser la robustesse d'un mécanisme dont la modélisation fait intervenir des variables aléatoires et des variables de type intervalles. Les modèles exploités par (Du et al., 2009) contiennent des contraintes analytiques linéaires ce qui permet de l'analyser avec seulement 100 à 2000 simulations. Les simulations de Monte-Carlo sont souvent utilisées comme méthode de référence car elles fournissent un résultat fiable et sont facilement implémentables mais selon la complexité du modèle, elles peuvent s'avérer gourmandes en temps de calcul et ainsi devenir inutilisables (Rollet, 2007) (Lu and Zhang, 2003).

## 4.5.2. Simulations de Monte-Carlo améliorées

La méthode des simulations de Monte-Carlo est souvent trop gourmande en temps de calcul car le temps d'une exécution du modèle peut être long selon ses caractéristiques ou parce qu'un grand nombre d'échantillonnages est nécessaire afin d'obtenir des résultats précis. Ces observations nous amènent à introduire deux pistes afin de réduire le temps de calcul global des simulations de Monte-Carlo. La première consiste à réduire le temps d'une exécution d'un modèle en remplaçant le modèle initial par un métamodèle plus rapide à calculer (section 4.5.2.1) tel qu'un développement de Taylor ou une régression polynomiale par exemple. La seconde piste est de diminuer le nombre de tirages selon une stratégie qui ne remet pas en cause la précision des résultats. Les méthodes d'Échantillonnage Préférentiel (section 4.5.2.2) et de Latin Hypercube (section 4.5.2.3) illustrent cette seconde stratégie.

### 4.5.2.1. Métamodèles

Le principe est d'obtenir une surface de réponse, c'est-à-dire transformer un modèle de dimensionnement (analytique ou numérique), dont une exécution est coûteuse en terme de temps, en un modèle approché plus rapide à calculer. Les simulations de Monte-Carlo sont ensuite réalisées sur le modèle approché pour déterminer les distributions des paramètres de sortie en fonction des distributions des paramètres d'entrée pour une solution donnée.

Les méthodes permettant d'obtenir des surfaces de réponse sont nombreuses. La première, très connue, est la régression polynomiale multiple qui consiste à transformer le modèle initial en polynômes de degré variable en fonction du modèle à approcher (Jin et al., 2000) (Vivier, 2002). Le développement en polynômes de Taylor permet aussi l'obtention d'un métamodèle polynomial à différents ordres d'approximation. La méthode du Krigeage ajoute à la régression polynomiale une fonction d'interpolation permettant de rattraper l'erreur entre le modèle approché par la régression polynomiale et le modèle initial (Laurenceau, 2008) (Jin et al., 2000). D'autres méthodes telles que Radial Basis Function (Forrester and Keane, 2009) fournissent d'autres surfaces de réponse possibles. Plus de détails sur ces méthodes de surfaces de réponse sont fournis dans la section 5.2.1.

### 4.5.2.2. Échantillonnage Préférentiel

La méthode d'Échantillonnage Préférentiel (Importance Sampling en anglais) réutilise les simulations de Monte-Carlo mais avec une méthode d'échantillonnage différente. En effet, cette méthode a pour objectif d'évaluer les Moments statistiques remarquables (moyenne, écart-type,...) aussi précisément que les simulations de Monte-Carlo mais en utilisant moins de tirages  $N_{EP} < N$  (Lu and Zhang, 2003).

Nous illustrons la méthode sur une équation simple du modèle de dimensionnement à une seule variable  $x$  :  $y = g(x)$ . On souhaite évaluer la moyenne et l'écart-type de  $y$  lorsque le paramètre d'entrée  $x$  suit une loi de densité de probabilité  $f(x)$ . Le principe de la méthode d'Échantillonnage Préférentiel est de réaliser des tirages de la variable  $x$ , non pas à partir de sa fonction densité de probabilité  $f(x)$ , mais à partir d'une fonction densité de probabilité biaisée  $f_1(x)$ . Cette nouvelle fonction densité de probabilité est définie de manière à favoriser les

tirages de  $x$  dans des régions où  $g(x)$  prend des valeurs significatives. La fonction  $g(x)$  doit ensuite être pondérée pour corriger le biais introduit par la fonction d'importance :

$$g_1(x) = g(x) \cdot w_1(x) \quad (4.23)$$

où le poids introduit s'exprime tel que  $w_1(x) = f(x)/f_1(x)$ .

Le nouveau modèle devient alors  $\tilde{y} = g_1(x)$  où  $x$  suit la loi de densité de probabilité  $f_1(x)$ . D'après l'équation (4.24), l'évaluation de la moyenne de  $\tilde{y}$  à partir de la fonction  $g_1(x)$  et de la densité de probabilité biaisée  $f_1(x)$  fournit aussi la moyenne de  $y$ .

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{y}} = E[g_1(x)] &= \int_{\Omega} g_1(x) f_1(x) dx = \int_{\Omega} g(x) \frac{f(x)}{f_1(x)} f_1(x) dx \\ &= \int_{\Omega} g(x) f(x) dx = \mu_y \end{aligned} \quad (4.24)$$

La moyenne du paramètre de sortie  $y$  est donc évaluée grâce aux simulations de Monte-Carlo:

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{N_{EP}} \sum_{i=1}^{N_{EP}} g_1(x_i) \quad (4.25)$$

où  $N_{EP}$  est le nombre de tirages aléatoires  $x_i$  du paramètre  $x$  suivant la densité de probabilité  $f_1(x)$ .

L'écart-type du paramètre  $y$  s'exprime à partir de la fonction  $g(x)$  et de la densité de probabilité  $f(x)$  :

$$\hat{\sigma}_y^2 = E[(g(x) - \hat{\mu}_y)^2] = \int_{\Omega} g^2(x) f(x) dx - \hat{\mu}_y^2 \quad (4.26)$$

La difficulté dans l'obtention de l'écart-type du paramètre  $y$  réside dans l'évaluation de l'intégrale contenue dans l'équation (4.26) à l'aide d'un nombre de simulations inférieur à celui utilisé par les simulations de Monte-Carlo.

L'intégrale en question exprime cependant la moyenne de la fonction  $g^2(x)$  lorsque  $x$  suit une densité de probabilité  $f(x)$ . Il s'agit donc de reproduire la méthode appliquée pour l'obtention de la moyenne du paramètre  $y$ . En effet, une nouvelle fonction de densité  $f_2(x)$  est construite en introduisant un biais. Une nouvelle fonction  $g_2(x)$  est définie pour corriger ce biais :

$$g_2(x) = g(x) \cdot w_2(x) \quad (4.27)$$

où le poids introduit s'exprime tel que  $w_2(x) = \sqrt{f(x)/f_2(x)}$ .

Ainsi l'intégrale de l'équation (4.26) devient :

$$E[g^2(x)] = \int_{\Omega} g^2(x)f(x)dx = \int_{\Omega} g_2^2(x)f_2(x)dx \quad (4.28)$$

Les simulations de Monte-Carlo permettent donc d'évaluer l'écart-type du paramètre  $y$  de la manière suivante :

$$\hat{\sigma}_y^2 = \frac{1}{N_{EP}} \sum_{i=1}^{N_{EP}} g_2^2(x) \quad (4.29)$$

où  $N_{EP}$  est le nombre de tirages aléatoires  $x_i$  du paramètre  $x$  suivant la densité de probabilité  $f_2(x)$ .

La difficulté et l'efficacité de cette méthode dépendent donc du choix des fonctions de densité de probabilité biaisées  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  respectivement pour le calcul de la moyenne et de l'écart-type. Ce choix est d'ailleurs discuté par (Lu and Zhang, 2003) et illustré par des exemples.

#### 4.5.2.3. Latin Hypercube

Avec le même objectif que la méthode d'Echantillonnage Préférentiel, la méthode Latin Hypercube (Tang, 1993) (Olsson et al., 2003) consiste à réduire le nombre de simulations de Monte-Carlo en améliorant la répartition des tirages d'un paramètre aléatoire. Nous illustrons la mise en œuvre de cette méthode à l'aide d'une équation du modèle de dimensionnement à deux variables  $x_1$  et  $x_2$  :  $y = g(x_1, x_2)$ . On souhaite évaluer la moyenne et l'écart-type de  $y$  lorsque le paramètre d'entrée  $x_1$  suit une loi de densité de probabilité  $f_1(x)$  et  $x_2$  suit une loi de densité de probabilité  $f_2(x)$ .

La première étape de la méthode consiste à diviser le domaine de chaque paramètre d'entrée aléatoire en  $N_{LH}$  intervalles de probabilité équirépartis et qui ne se chevauchent pas. La valeur de  $N_{LH}$  correspond au nombre de simulations de Monte-Carlo que nous souhaitons réaliser ( $N_{LH} < N$ ). Dans l'exemple nous choisissons  $N_{LH} = 5$ , ce qui nous amène à diviser l'espace des probabilités de chaque paramètre en 5 intervalles équiprobables (Figure 4.3). Une valeur est ensuite tirée aléatoirement dans chaque intervalle en respectant la densité de probabilité sur l'intervalle :  $\{x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_1^4, x_1^5\}$  pour le paramètre  $x_1$  et  $\{x_2^1, x_2^2, x_2^3, x_2^4, x_2^5\}$  pour le paramètre  $x_2$ . Les  $N_{LH}$  valeurs sélectionnées pour chaque paramètre sont couplées avec celles des autres paramètres de manière aléatoire (Tableau 4.2) pour former  $N_{LH}$  combinaisons de  $n$  valeurs, où  $n$  est le nombre de paramètres d'entrée aléatoires du modèle de dimensionnement ( $n = 2$  dans notre exemple).

Les simulations de Monte-Carlo sont finalement réalisées, c'est-à-dire que le paramètre de sortie est évalué pour chaque combinaison permettant le calcul de sa moyenne et de son écart-type.

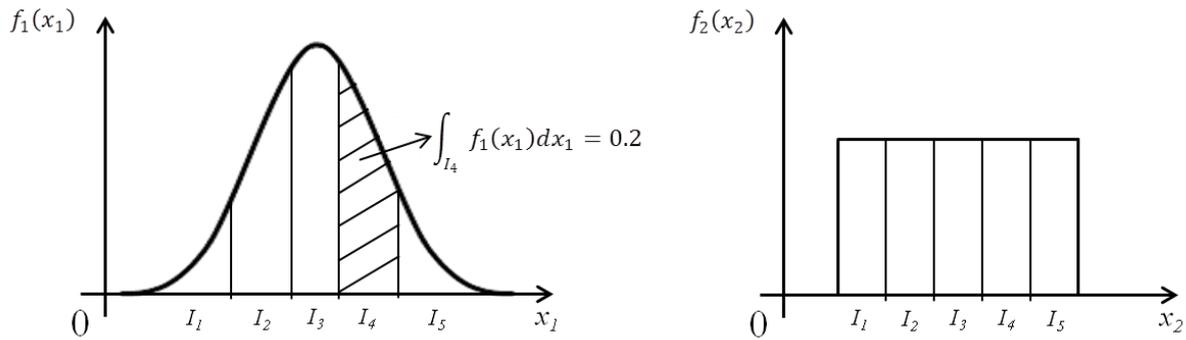


Figure 4.3 - Division de l'espace des probabilités

Tableau 4.2 - Sélection aléatoire des combinaisons des valeurs pour les paramètres d'entrée (les croix indiquent les combinaisons de valeurs)

		Valeurs pour le paramètre $x_1$				
		$x_1^1$	$x_1^2$	$x_1^3$	$x_1^4$	$x_1^5$
Valeurs pour le paramètre $x_2$	$x_2^1$					×
	$x_2^2$			×		
	$x_2^3$		×			
	$x_2^4$	×				
	$x_2^5$				×	

### 4.5.3. Méthode « Propagation of Variance »

La méthode Propagation of Variance (Lei et al., 1998) permet d'exprimer analytiquement les Moments d'un paramètre de sortie en fonction des Moments des paramètres d'entrée. L'obtention des expressions des Moments est basée sur des reformulations des équations du modèle en utilisant des développements polynomiaux de Taylor d'ordre 1 ou supérieur.

Dans ce qui suit, nous avons choisi de développer tous les calculs pour obtenir les expressions de la moyenne et de l'écart-type à partir d'un développement au premier ordre (linéaire) puis au second ordre (quadratique). Ces calculs sont rarement détaillés dans la littérature. Les expressions finales sont résumées dans la section 4.5.3.3. Nous faisons de plus l'hypothèse que les paramètres de conception sont indépendants.

Les expressions des Moments d'ordres supérieurs s'obtiennent par des développements de Taylor à des ordres supérieurs à 2. Ils nécessitent donc l'estimation des dérivées partielles d'ordres supérieurs à 2 du modèle de dimensionnement. La reformulation des expressions et les

dérivées étant difficiles et complexes à générer pour des ordres supérieurs à 2, nous nous limitons à l'étude des deux premiers Moments (moyenne et écart-type).

#### 4.5.3.1. Développement de Taylor au premier ordre : approximation linéaire

Le développement de Taylor au premier ordre pour une fonction  $y = g(x_1, \dots, x_n)$  reliant une variable de sortie  $y$  à plusieurs variables d'entrée  $x_1, \dots, x_n$  autour du point  $\mu_X = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  s'exprime de la manière suivante :

$$\tilde{y} = g(\mu_X) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) (x_i - \mu_i) \quad (4.30)$$

où  $\mu_i$  est la moyenne du paramètre d'entrée  $x_i$  et  $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X)$  est la dérivée partielle de la fonction  $g$  par rapport à la variable  $x_i$  au point  $\mu_X$ .

L'expression de la moyenne du paramètre  $y$  est obtenue de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_y &= E[\tilde{y}] \\ &= E \left[ g(\mu_X) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) (x_i - \mu_i) \right] \\ &= E[g(\mu_X)] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) E[x_i - \mu_i] \\ &= g(\mu_X) \end{aligned} \quad (4.31)$$

car

$$E[x_i - \mu_i] = E[x_i] - E[\mu_i] = \mu_i - \mu_i = 0 \quad (4.32)$$

L'expression de l'écart-type du paramètre  $y$  est obtenue de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_y^2 &= E[(\tilde{y} - \hat{\mu}_y)^2] \\ &= E \left[ \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) (x_i - \mu_i) \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

or

$$\begin{aligned} &\left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) (x_i - \mu_i) \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \right)^2 (x_i - \mu_i)^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\mu_X) (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \end{aligned} \quad (4.34)$$

L'équation (4.33) devient alors:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_y^2 &= E \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \right)^2 (x_i - \mu_i)^2 \right] \\ &\quad + E \left[ 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\mu_X) (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \right)^2 E[(x_i - \mu_i)^2] + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\mu_X) cov\{X_i, X_j\}\end{aligned}\quad (4.35)$$

Sachant l'expression de la variance et que la covariance de deux paramètres est nulle lorsqu'ils sont indépendants, nous avons :

$$E[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)] = cov\{x_i, x_j\} = \begin{cases} \sigma_i^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.36)$$

où  $\sigma_i$  est l'écart-type du paramètre d'entrée  $x_i$  et  $cov\{x_i, x_j\}$  est la covariance entre les paramètres d'entrée  $x_i$  et  $x_j$ .

L'expression finale de l'écart-type du paramètre  $y$  est alors donnée par l'équation (4.37),

$$\hat{\sigma}_y^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \right)^2 \sigma_i^2 \quad (4.37)$$

Finalement, l'expression des deux premiers Moments (moyenne et écart-type) de  $y$  par une approximation de Taylor d'ordre 1 est la suivante :

$$\begin{cases} \hat{\mu}_y = g(\mu_X) \\ \hat{\sigma}_y^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \right)^2 \sigma_i^2 \end{cases} \quad (4.38)$$

#### 4.5.3.2. Développement de Taylor au second ordre : approximation quadratique

Le développement de Taylor au second ordre pour une fonction  $y = g(x_1, \dots, x_n)$  reliant une variable de sortie  $y$  à plusieurs variables d'entrée  $x_1, \dots, x_n$  autour du point  $\mu_X = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  s'exprime de la manière suivante :

$$\tilde{y} = g(\mu_X) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) (x_i - \mu_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mu_X) (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \quad (4.39)$$

où  $\mu_i$  est la moyenne du paramètre d'entrée  $x_i$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X)$  est la dérivée première partielle de la fonction  $g$  par rapport à la variable  $x_i$  au point  $\mu_X$ , et  $\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$  est la dérivée seconde partielle de la fonction  $g$  par rapport aux variables  $x_i$  et  $x_j$  au point  $\mu_X$ .

L'expression de la moyenne du paramètre  $y$  est obtenue de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu}_y &= E[\tilde{y}] \\
 &= E \left[ g(\mu_X) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) (x_i - \mu_i) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mu_X) (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \right] \quad (4.40) \\
 &= E[g(\mu_X)] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) E[x_i - \mu_i] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mu_X) E[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)]
 \end{aligned}$$

Nous avons :

$$E[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)] = \text{cov}\{x_i, x_j\} = \begin{cases} \sigma_i^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.41)$$

Nous obtenons finalement:

$$\hat{\mu}_y = g(\mu_X) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \sigma_i^2 \quad (4.42)$$

L'expression de l'écart-type du paramètre  $y$  est obtenue de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_y^2 &= E[(\tilde{y} - \hat{\mu}_y)^2] \\
 &= E \left[ \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) (x_i - \mu_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mu_X) (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \sigma_i^2 \right)^2 \right] \quad (4.43)
 \end{aligned}$$

Soit A, B et C tels que :

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) (x_i - \mu_i) \quad (4.44)$$

$$B = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mu_X) (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \quad (4.45)$$

$$C = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \sigma_i^2 \quad (4.46)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E[A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC] \\ &= E[A^2] + E[B^2] + E[C^2] + E[2AB] + E[2AC] + E[2BC] \end{aligned} \quad (4.47)$$

Chaque terme est développé séparément :

$$\begin{aligned} A^2 &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \right)^2 (x_i - \mu_i)^2 \\ &\quad + 2 \sum_{i < j}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \right) \left( \frac{\partial g}{\partial x_j}(\mu_X) \right) (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$E[A^2] = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \right)^2 \sigma_i^2 \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} B^2 &= \frac{1}{4} \left( \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mu_X) \right) (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right) (x_i - \mu_i)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i < j}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mu_X) \right) (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \right)^2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left( \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right) (x_i - \mu_i)^2 \right]^2 \right. \\
&\quad + 4 \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right) (x_i - \mu_i)^2 \right) \left( \sum_{i<j}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mu_X) \right) (x_i \right. \\
&\quad \left. \left. - \mu_i)(x_j - \mu_j) \right) \right) \\
&\quad \left. + 4 \left[ \sum_{i<j}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mu_X) \right) (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \right]^2 \right) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right)^2 (x_i - \mu_i)^4 \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i<j}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right) \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(\mu_X) \right) (x_i - \mu_i)^2 (x_j - \mu_j)^2 \\
&\quad + \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right) (x_i - \mu_i)^2 \right) \left( \sum_{i<j}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mu_X) \right) (x_i \right. \\
&\quad \left. - \mu_i)(x_j - \mu_j) \right) + \sum_{i<j}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mu_X) \right)^2 (x_i - \mu_i)^2 (x_j - \mu_j)^2 \\
&\quad + 2 \sum_{\substack{(i,j) \neq (k,l) \\ i<j \\ k<l}}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mu_X) \right) \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_l}(\mu_X) \right) (x_i - \mu_i)(x_j \\
&\quad - \mu_j)(x_k - \mu_k)(x_l - \mu_l) \\
E[B^2] &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right)^2 E[(x_i - \mu_i)^4] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i<j}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right) \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(\mu_X) \right) \sigma_i^2 \sigma_j^2 \\
&\quad + \sum_{i<j}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mu_X) \right)^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2
\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$C^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right)^4 \sigma_i^4 + \frac{1}{2} \sum_{i<j}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right) \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(\mu_X) \right) \sigma_i^2 \sigma_j^2 \tag{4.52}$$

$$E[C^2] = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right)^4 \sigma_i^4 + \frac{1}{2} \sum_{i < j}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right) \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(\mu_X) \right) \sigma_i^2 \sigma_j^2 \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} 2AB &= \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \right) (x_i - \mu_i) \right) \left( \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mu_X) \right) (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \right) (x_i - \mu_i) \right) \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right) (x_i - \mu_i)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i < j}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mu_X) \right) (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$E[2AB] = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \right) \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right) E[(x_i - \mu_i)^3] \quad (4.55)$$

$$2AC = \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \right) (x_i - \mu_i) \right) \left( - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right) \cdot \sigma_i^2 \right) \quad (4.56)$$

$$E[2AC] = 0 \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} 2BC &= \left( \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mu_X) \right) (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \right) \left( - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right) \sigma_i^2 \right) \\ &= \left( - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right) \sigma_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right) (x_i - \mu_i)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i < j}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mu_X) \right) (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \right) \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$E[2BC] = - \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right) \sigma_i^2 \right)^2 \quad (4.59)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right)^2 \sigma_i^4 - \sum_{i<j}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right) \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(\mu_X) \right) \sigma_i^2 \sigma_j^2$$

Enfin, on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_y^2 &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \right)^2 \sigma_i^2 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right)^2 E[(x_i - \mu_i)^4] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i<j}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right) \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(\mu_X) \right) \sigma_i^2 \sigma_j^2 \\ &\quad + \sum_{i<j}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mu_X) \right)^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right)^2 \sigma_i^4 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i<j}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right) \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(\mu_X) \right) \sigma_i^2 \sigma_j^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \right) \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right) E[(x_i - \mu_i)^3] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right)^2 \sigma_i^4 - \sum_{i<j}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right) \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(\mu_X) \right) \sigma_i^2 \sigma_j^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \right)^2 \sigma_i^2 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right)^2 E[(x_i - \mu_i)^4] \\ &\quad + \sum_{i<j}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mu_X) \right)^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right)^2 \sigma_i^4 \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \right) \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right) E[(x_i - \mu_i)^3] \end{aligned} \tag{4.60}$$

La moyenne (4.40) fournit une information sur la position de la distribution du paramètre de sortie. L'écart-type (4.60) nous informe sur la dispersion de la distribution du paramètre de sortie. Ces deux Moments sont donc essentiels à la connaissance de l'évolution du paramètre de sortie  $y$ . Il est cependant possible d'exprimer les Moments d'ordre supérieur du paramètre de sortie  $y$ . D'ailleurs, (Glancy, 1999) propose les expressions des Moments d'ordres trois et quatre du paramètre de sortie  $y$  en fonction des Moments centrés jusqu'à l'ordre 4 des paramètres d'entrée du modèle. Il utilise aussi un développement de Taylor au second ordre pour les obtenir. Or ces Moments sont rarement exploités en conception de produit puisqu'ils sont peu interprétés en termes physiques en comparaison à la moyenne et l'écart-type. Nous proposons donc uniquement les expressions de la moyenne (4.40) et de l'écart-type (4.60) du paramètre de sortie  $y$ .

Par ailleurs, l'écart-type (4.60) du paramètre de sortie  $y$  s'exprime à partir de l'écart-type des paramètres d'entrée, c'est-à-dire leurs Moments centrés d'ordre 2 ( $\sigma_i$ ), ainsi que leurs Moments centrés d'ordre 3 ( $E[(x_i - \mu_i)^3]$ ) et d'ordre 4 ( $E[(x_i - \mu_i)^4]$ ). Alors que la moyenne et l'écart-type des paramètres de conception sont facilement obtenus et interprétés, les Moments centrés d'ordre 3 et 4 sont quant à eux difficiles à obtenir. La loi normale est définie par deux paramètres : la moyenne et l'écart-type. Le coefficient d'aplatissement (Kurtosis) d'une loi normale est égal à 3 quel que soit sa moyenne et son écart-type ce qui permet d'écrire l'équation (4.61). Son coefficient de dissymétrie est nul (4.62) menant à l'équation (4.63).

$$E[(X_i - \mu_i)^4] = 3\sigma_i^4 \quad (4.61)$$

$$E[(X_i - \mu_i)^3] = 0 \quad (4.62)$$

En supposant que les paramètres de conception sont modélisés par des lois normales de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ , l'expression de l'écart-type du paramètre  $y$  est finalement :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_y^2 = & \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \right)^2 \sigma_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right)^2 \sigma_i^4 \\ & + \sum_{i < j}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mu_X) \right)^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2 \end{aligned} \quad (4.63)$$

#### 4.5.3.3. Mise en œuvre de la méthode

L'expression de la moyenne et de l'écart-type d'un paramètre de sortie pour un développement de Taylor au premier ordre de son équation est :

$$\begin{cases} \hat{\mu}_y = g(\mu_X) \\ \hat{\sigma}_y^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \right)^2 \sigma_i^2 \end{cases} \quad (4.64)$$

L'expression de la moyenne et de l'écart-type d'un paramètre de sortie pour un développement de Taylor au second ordre de son équation est :

$$\begin{cases} \hat{\mu}_y = g(\mu_X) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \sigma_i^2 \\ \hat{\sigma}_y^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mu_X) \right)^2 \sigma_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\mu_X) \right)^2 \sigma_i^4 + \sum_{i < j}^n \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mu_X) \right)^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2 \end{cases} \quad (4.65)$$

Ces équations sont à calculer pour chaque paramètre de sortie du modèle. Pour un développement de Taylor au premier ordre, on obtient une approximation linéaire du modèle tandis que pour un développement au second ordre, on obtient une approximation quadratique. Les problèmes d'ingénierie impliquent des modèles souvent non-linéaires et non convexes ce qui mène à penser que l'approximation quadratique sera plus appropriée pour le calcul de la moyenne et de l'écart-type des paramètres de sortie du modèle (Glancy, 1999). (Lee and Park, 2001) proposent d'utiliser l'approximation linéaire mais limitent l'étude à des modèles de calcul de structures ne contenant que très peu de non-linéarités. (Lei et al., 1998) étendent l'analyse des circuits filtres passe-bande à la modélisation quadratique et montrent que cette dernière donne de bien meilleurs résultats par rapport aux simulations de Monte-Carlo. (Lei et al., 1998) n'indiquent cependant pas le nombre de tirages réalisés pour Monte-Carlo. Au contraire, (Glancy, 1999) montrent qu'une approximation linéaire est comparable à des simulations de Monte-Carlo à 30000 tirages tandis que le résultat fourni par une approximation quadratique s'approche de ceux obtenus par  $10^6$  tirages.

La difficulté de la méthode Propagation of Variance réside dans l'évaluation du Gradient et du Hessian (second ordre seulement) du modèle. Les dérivées partielles premières peuvent rapidement être obtenues de manière formelle contrairement aux dérivées partielles secondes. En effet, l'obtention des expressions formelles des dérivées secondes pour des problèmes de taille réelle explose les temps d'exécution. Une alternative est le calcul des dérivées partielles par des méthodes numériques telles que les différences finies (Glancy, 1999). Ce calcul amène cependant à perdre le lien analytique entre la moyenne et l'écart-type des paramètres de sortie et la moyenne et l'écart-type des paramètres d'entrée. De plus,  $2n^2 + 3n$  appels au modèle sont réalisés (où  $n$  est la dimension du modèle, soit le nombre de paramètres d'entrée) lorsque la méthode de la différence finie est utilisée pour l'évaluation des dérivées.

Les simulations de Monte-Carlo et les simulations améliorées fournissent la distribution entière des paramètres de sortie ce qui permet d'évaluer les différents Moments afin de reconstruire une fonction densité de probabilité (section 4.2.3). La moyenne et l'écart-type fournissent respectivement des informations sur la position et la dispersion de la distribution de probabilité d'un paramètre de sortie. Dans les cahiers des charges pour l'optimisation robuste (section 3.4.2), il est assez rare d'utiliser des Moments remarquables d'ordre supérieur tels que le coefficient de dissymétrie ou d'aplatissement. La méthode Propagation of Variance au premier et second ordre fournit la moyenne et l'écart-type des paramètres, c'est-à-dire suffisamment d'informations pour réaliser une optimisation intégrant la robustesse du modèle de dimensionnement.

#### **4.5.4. Méthode « Dimension-reduction method »**

La méthode Dimension-Reduction (DRM) exposée par (Rahman and Xu, 2004) est une autre technique permettant d'obtenir les Moments ordinaires d'un paramètre de sortie à partir des Moments des paramètres d'entrée. Le principe de cette méthode repose sur l'approximation de la fonction  $y = g(x_1, \dots, x_n)$ (4.19) à  $n$  dimensions ( $n$  paramètres d'entrée) en une somme de fonctions à  $D$  dimensions (avec  $D < n$ ) (Rahman and Xu, 2004). La méthode a plusieurs

variantes selon la valeur de  $D$ . Nous détaillons le principe pour le cas où  $D$  est égal à 1 soit pour la méthode intitulée « Univariate Dimension-Reduction ».

La première étape consiste à décomposer la fonction  $g$  en une somme de  $n$  fonctions à une variable :

$$\tilde{y} = \sum_{j=1}^n g(\mu_1, \dots, x_j, \dots, \mu_n) - (n-1)g(\mu_1, \dots, \mu_j, \dots, \mu_n) \quad (4.66)$$

où  $\mu_j$  est la moyenne du paramètre d'entrée  $x_j$  et  $g(\mu_1, \dots, x_j, \dots, \mu_n)$  est la fonction  $g$  réduite à la seule variable  $x_j$ .

Le moment ordinaire d'ordre  $l$  s'exprime de la manière suivante :

$$\widehat{m}_{0l} = E \left[ \left\{ \sum_{j=1}^n g(\mu_1, \dots, x_j, \dots, \mu_n) - (n-1)g(\mu_1, \dots, \mu_j, \dots, \mu_n) \right\}^l \right] \quad (4.67)$$

La formule du binôme de Newton permet de développer la somme de deux termes ( $a$  et  $b$ ) à la puissance  $n$  :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (4.68)$$

En appliquant la formule du binôme de Newton une première fois à l'expression (4.67) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \widehat{m}_{0l} &= E \left[ \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} \left( \sum_{j=1}^n g(\mu_1, \dots, x_j, \dots, \mu_n) \right)^i \left( -(n-1)g(\mu_1, \dots, \mu_j, \dots, \mu_n) \right)^{l-i} \right] \\ &= \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} E \left[ \left( \sum_{j=1}^n g(\mu_1, \dots, x_j, \dots, \mu_n) \right)^i \left( -(n-1)g(\mu_1, \dots, \mu_j, \dots, \mu_n) \right)^{l-i} \right] \end{aligned} \quad (4.69)$$

Nous utilisons la récurrence pour évaluer le terme suivant :

$$S_n^i = E \left[ \left( \sum_{j=1}^n g(\mu_1, \dots, x_j, \dots, \mu_n) \right)^i \right] \quad (4.70)$$

Ainsi, on pose :

$$S_k^i = E \left[ \left( \sum_{j=1}^k g(\mu_1, \dots, x_j, \dots, \mu_n) \right)^i \right] \quad (4.71)$$

Les termes  $S_1^i, \dots, S_k^i, \dots, S_n^i$  sont ensuite exprimés :

$$\begin{aligned} S_1^i &= E[g^i(x_1, \mu_2, \dots, \mu_n)] \\ S_2^i &= \sum_{m=0}^i \binom{i}{m} S_1^m E[g^{i-m}(\mu_1, x_2, \dots, \mu_n)] \\ &\vdots \\ S_j^i &= \sum_{m=0}^i \binom{i}{m} S_{j-1}^m E[g^{i-m}(\mu_1, \dots, x_j, \dots, \mu_n)] \\ &\vdots \\ S_n^i &= \sum_{m=0}^i \binom{i}{m} S_{n-1}^m E[g^{i-m}(\mu_1, \dots, x_n)] \end{aligned} \quad (4.72)$$

L'expression du moment ordinaire d'ordre  $l$  est finalement:

$$\widehat{m}_l = \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} S_n^i [-(n-1)g(\mu_1, \dots, \mu_i, \dots, \mu_n)]^{l-i} \quad (4.73)$$

Pour calculer le moment d'ordre  $l$  et plus particulièrement le terme  $S_n^i$ , il est nécessaire de calculer plusieurs fois ( $n * l$ ) une intégrale à une dimension du type :

$$E[g^m(\mu_1, \dots, x_j, \dots, \mu_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} g^m(\mu_1, \dots, x_j, \dots, \mu_n) f_{X_j}(x_j) dx_j \quad (4.74)$$

où  $f_{X_j}(x_j)$  est la fonction densité de probabilité du paramètre  $x_j, j = 1, \dots, n$  et  $m = 1, \dots, l$ .

Cette dernière intégrale est valable lorsque les paramètres de conception sont indépendants. Dans le cas contraire, il est possible d'appliquer la transformation probabiliste de Roseblatt pour les transformer en variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi normale standard (Rahman and Xu, 2004).

Finalement, la difficulté de cette méthode réside dans l'estimation de l'intégrale contenue dans l'équation (4.74). Cette dernière peut être estimée par une méthode numérique de type Monte-Carlo ou bien par une quadrature telle que proposée dans (Rahman and Xu, 2004) :

- Les quadratures de Gauss-Legendre ou de Gauss-Hermite sont usuellement employées lorsque que les paramètres suivent une loi Uniforme ou Gaussienne.
- La quadrature intitulée « Moment-based quadrature rule » est développée par (Rahman and Xu, 2004) pour le cas où les distributions sont arbitraires.

La méthode Moment-based quadrature rule a pour objectif d'évaluer l'intégrale unidimensionnelle (4.74) permettant d'évaluer le moment d'ordre  $m$  de la fonction  $g$

dépendant du paramètre d'entrée  $x_j$  dont la distribution de probabilité est  $f_{X_j}(x_j)$ . Le principe de la méthode est de déterminer  $N$  points d'interpolation  $x_{j,i}$  et  $N$  poids  $w_{j,i}$  associés à ces points d'interpolation pour ensuite approximer l'intégrale (4.74) de la manière suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^m(\mu_1, \dots, x_j, \dots, \mu_n) f_{X_j}(x_j) dx_j \approx \sum_{i=1}^N w_{j,i} g^m(\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, x_{j,i}, \mu_{j+1}, \dots, \mu_n) \quad (4.75)$$

Les  $N$  points d'interpolation sont les solutions du polynôme suivant :

$$x_j^N - r_{j,1}x_j^{N-1} + r_{j,2}x_j^{N-2} - \dots + (-1)^N r_{j,N} = 0 \quad (4.76)$$

où les coefficients  $r_{j,1}, \dots, r_{j,N}$  du polynôme sont obtenus en résolvant le système matriciel (4.77).

$$\begin{bmatrix} \mu_{j,N-1} & -\mu_{j,N-2} & \mu_{j,N-3} & \dots & (-1)^{N-1} \mu_{j,0} \\ \mu_{j,N} & -\mu_{j,N-1} & \mu_{j,N-2} & \dots & (-1)^{N-1} \mu_{j,1} \\ \mu_{j,N+1} & -\mu_{j,N} & \mu_{j,N-1} & \dots & (-1)^{N-1} \mu_{j,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{j,2N-2} & -\mu_{j,2N-3} & \mu_{j,2N-4} & \dots & (-1)^{N-1} \mu_{j,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{j,1} \\ r_{j,2} \\ r_{j,3} \\ \vdots \\ r_{j,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{j,N} \\ \mu_{j,N+1} \\ \mu_{j,N+2} \\ \vdots \\ \mu_{j,2N-1} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

où  $\mu_{j,i}$  est le Moment ordinaire d'ordre  $i$  du paramètre  $x_j$  obtenu par l'équation (4.78).

$$\mu_{j,i} = \int_{-\infty}^{\infty} (x_j)^i f_{X_j}(x_j) dx_j \quad (4.78)$$

Les poids d'interpolation  $w_{j,i}$  peuvent être calculés une fois que les points d'interpolation sont déterminés. En effet, l'expression pour obtenir les poids d'interpolation est la suivante :

$$w_{j,i} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \mu_{j,N-k-1} q_{j,ik}}{\prod_{k=1, k \neq i}^N (x_{j,i} - x_{j,k})} \quad (4.79)$$

où  $\mu_{j,N-k-1}$  est le Moment ordinaire d'ordre  $N - k - 1$  du paramètre  $x_j$ ,  $x_{j,i}$  et  $x_{j,k}$  sont respectivement le  $i$ -ème point d'interpolation, et  $q_{j,ik}$  se calcul suivant la récurrence (4.80).

$$\begin{cases} q_{j,i0} = 1 \\ q_{j,ik} = r_{j,k} - x_{j,i} q_{j,i(k-1)} \end{cases} \quad (4.80)$$

Pour appliquer cette méthode de quadrature, il est donc nécessaire et suffisant de connaître les  $2N - 1$  premiers Moments ordinaires du paramètre  $x_j$ .

(Lee et al., 2008) ont implémenté et comparé la méthode DRM à d'autres méthodes de propagation d'incertitudes telles que Performance Moment Integration ou Percentile Difference Method sur les critères d'efficacité et de précision de calcul. Les méthodes Performance Moment Integration (PMI) et Percentile Difference Method (PDM) sont détaillées dans (Lee et al., 2008). L'avantage de la méthode DRM réside dans le fait qu'elle ne requiert pas d'information sur les dérivées du modèle contrairement aux deux autres méthodes. (Lee et al., 2008) notent cependant que la méthode DRM peut demander plus d'évaluations du modèle que PMI ou PDM lorsque le nombre de paramètres est grand.

(Huang and Du, 2005) ont proposé de calculer les Moments du modèle grâce à la méthode Bivariate Dimension Reduction. La méthode Bivariate Dimension Reduction est une variante de la méthode Dimension Reduction avec  $D = 2$ . L'idée est de décomposer le modèle de dimensionnement initial pour avoir à calculer des intégrales au maximum à deux dimensions. Pour estimer ces intégrales, (Huang and Du, 2005) ont utilisé la méthode d'intégration de Gauss-Hermite. L'approche proposée par (Huang and Du, 2005) est comparée à la méthode FORM (First Order Reliability Method), SORM (Second Order Reliability Method) et la méthode Monte-Carlo avec  $10^6$  de simulations. Les résultats des tests effectués montrent que la méthode Bivariate Dimension Reduction couplée à la méthode d'intégration de Gauss-Hermite est plus précise que FORM et SORM. Étant donné que cette méthode autant que la méthode Univariate Dimension Reduction ne nécessite pas d'évaluation de dérivée, elle est recommandée pour des problèmes où les dérivées sont difficiles à obtenir, voire s'il n'y a pas de dérivée.

## 4.5.5. Méthode des Polynômes de Chaos

Dans cette section, nous présentons la méthode des Polynômes de Chaos pour propager l'incertitude à travers des modèles de dimensionnement. Le principe général de la méthode est décrit dans la section qui suit. Afin d'estimer les Moments statistiques des performances du modèle, il est nécessaire d'estimer les coefficients du développement en Polynôme de Chaos du modèle. Les méthodes pour obtenir les coefficients sont décrites dans la deuxième section. Enfin, nous présentons les formules permettant d'obtenir les Moments statistiques à partir des coefficients du développement en Polynôme de Chaos.

### 4.5.5.1. Développement en Polynôme de Chaos

La méthode des Polynômes de Chaos introduite par (Wiener, 1938) pour la propagation d'incertitudes est basée sur un développement du modèle de dimensionnement  $y = g(x_1, \dots, x_n)$  en série de polynômes orthogonaux (4.81). Une série de polynômes orthogonaux (4.82) est une suite de polynômes à coefficients réels tels que le produit scalaire de chaque combinaison possible de deux polynômes est égal à zéro. La méthode des Polynômes de Chaos est connue pour son efficacité. En effet, elle est souvent comparée aux traditionnelles Simulations de Monte-Carlo très coûteuse en temps de calcul (Duong and Lee, 2010) (Edwards et al., 2010). A l'origine et comme nous l'exposons ci-dessous, les Polynômes de Chaos étaient formulés pour des paramètres de conception modélisés par des lois normales standards correspondant à des Polynômes d'Hermite. Les Polynômes d'Hermite sont une suite de

polynômes orthogonaux particulière, définie par la fonction (4.83). Plus tard, la méthode fut étendue à d'autres lois de probabilité associées à d'autres polynômes orthogonaux tels que les Polynômes de Legendre pour des lois Uniforme ou Laguerre pour des lois Gamma (Xiu and Karniadakis, 2003). (Blatman, 2009) précise que des méthodes de transformation probabiliste (section 4.2.5) sont utilisées pour ramener des distributions non basées sur des lois de probabilité connues à des distributions connues pour ensuite les associer à des polynômes orthogonaux.

$$\tilde{y} = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \psi_j(\{\xi_i\}_{i=1}^n) \quad (4.81)$$

où  $y_j$  est l'ensemble des coefficients à déterminer,  $\psi_j$  sont les polynômes orthogonaux,  $\xi_i$  est la  $i$ -ème variable aléatoire gaussienne centrée réduite associée à la variable  $x_i$ ,  $n$  est le nombre de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites.

Les polynômes orthogonaux multidimensionnels à  $n$  variables aléatoires gaussiennes centrées réduites  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  à l'ordre  $p$  s'expriment de la manière suivante :

$$\psi_j = \prod_{i=1}^n H_j(\xi_i) \quad (4.82)$$

où  $H_j$  est le  $j$ -ème polynôme d'Hermite dont l'expression est :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \quad (4.83)$$

où  $\frac{d^n}{dx^n}$  est l'opérateur dérivée d'ordre  $n$  par rapport à  $x$ .

En pratique, le développement en Polynômes de Chaos est tronqué à un degré polynomial  $P$  :

$$\tilde{y} = \sum_{j=1}^P y_j \psi_j(\{\xi_i\}_{i=1}^n) \quad (4.84)$$

Ainsi, le nombre de polynôme d'Hermite  $P$  de degré inférieur ou égal à  $p$  à calculer est donné par la somme des combinaisons suivante :

$$P = \sum_{k=0}^p C_{n+k-1}^k \quad (4.85)$$

En guise d'exemple, le développement en Polynômes de Chaos (4.86) à l'ordre 3 ( $p = 3$ ) d'une équation  $y = g(x_1, x_2, x_3)$  du modèle de dimensionnement à 3 variables ( $n = 3$ ) amène donc à exprimer 20 polynômes d'Hermite ( $P = 20$ ) et ainsi à évaluer 20 coefficients :

$$\begin{aligned}
\tilde{y} = y_0 + & \sum_{i=1}^n y_i^1 H_1(\xi_i) + \sum_{i=1}^n y_i^2 H_2(\xi_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n y_{ij}^1 H_1(\xi_i) H_1(\xi_j) \\
& + \sum_{i=1}^n y_i^3 H_3(\xi_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n y_{ij}^2 H_1(\xi_i) H_2(\xi_j) \\
& + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n y_{ijk}^1 H_1(\xi_i) H_1(\xi_j) H_1(\xi_k)
\end{aligned} \tag{4.86}$$

où  $y_i^1$  (respectivement  $y_i^2$  ou  $y_i^3$ ) sont les coefficients associés aux polynômes d'Hermite de degré 1 (respectivement 2 ou 3) dépendant de la variable  $\xi_i$ ,  $y_{ij}^1$  (respectivement  $y_{ij}^2$ ) sont les coefficients associés aux polynômes d'Hermite de degré maximum 1 (respectivement 2) dépendant des variables  $\xi_i$  et  $\xi_j$ , les  $y_{ijk}^1$  sont les coefficients associés aux polynômes d'Hermite de degré maximum 1 dépendant des variables  $\xi_i$ ,  $\xi_j$  et  $\xi_k$ ,

Nous présentons dans la partie suivante les différentes méthodes permettant d'évaluer les coefficients d'un développement en Polynômes de Chaos.

#### 4.5.5.2. Estimation des coefficients du Polynôme de Chaos

Deux types de méthodes peuvent être utilisés afin de déterminer les coefficients  $y_i$  du développement en Polynômes de Chaos : les méthodes intrusives et les méthodes non-intrusives. Les méthodes intrusives, telle que la méthode de Galerkin (Blatman, 2009), nécessitent une modification spécifique du modèle de dimensionnement (analytique ou numérique). Les méthodes auxquelles nous nous intéressons sont les méthodes non-intrusives (Berveiller, 2005) car elles considèrent le modèle de dimensionnement comme une boîte noire, c'est-à-dire qu'il n'est pas nécessaire de modifier le modèle de dimensionnement. Les méthodes non-intrusives sont basées sur l'interpolation (Méthode de collocation) ou non (Méthode de projection et Méthode de régression) lors de la recherche des coefficients.

- **Méthode de projection**

La méthode de projection (Berveiller, 2005) repose sur l'orthogonalité de la base des polynômes utilisés. Les coefficients  $y_j$  de l'équation (4.87) sont obtenus en multipliant dans un premier temps les deux membres de l'équation par  $\psi_j$  (4.88).

$$\tilde{y} = \sum_{j=1}^P y_j \psi_j(\{\xi_i\}_{i=1}^n) = y_1 \psi_1(\{\xi_i\}_{i=1}^n) + \dots + y_P \psi_P(\{\xi_i\}_{i=1}^n) \tag{4.87}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{y} \cdot \psi_j(\{\xi_i\}_{i=1}^n) \\
& = \left( y_1 \psi_1(\{\xi_i\}_{i=1}^n) + \dots + y_j \psi_j(\{\xi_i\}_{i=1}^n) + \dots + y_P \psi_P(\{\xi_i\}_{i=1}^n) \right) \psi_j(\{\xi_i\}_{i=1}^n) \\
& = y_1 \psi_1(\{\xi_i\}_{i=1}^n) \psi_j(\{\xi_i\}_{i=1}^n) + \dots + y_j \psi_j(\{\xi_i\}_{i=1}^n) \psi_j(\{\xi_i\}_{i=1}^n) + \dots \\
& \quad + y_P \psi_P(\{\xi_i\}_{i=1}^n) \psi_j(\{\xi_i\}_{i=1}^n)
\end{aligned} \tag{4.88}$$

La propriété d'orthogonalité des polynômes permet de simplifier l'équation (4.88) de la manière suivante :

$$\tilde{y} \cdot \psi_j(\{\xi_i\}_{i=1}^n) = y_j \psi_j^2(\{\xi_i\}_{i=1}^n) \quad (4.89)$$

En calculant l'espérance de l'équation (4.89) nous obtenons :

$$\begin{aligned} E[\tilde{y} \cdot \psi_j(\{\xi_i\}_{i=1}^n)] &= E[y_j \psi_j^2(\{\xi_i\}_{i=1}^n)] \\ &= y_j E[\psi_j^2(\{\xi_i\}_{i=1}^n)] \end{aligned} \quad (4.90)$$

Ainsi le coefficient  $y_j$  s'exprime de la manière suivante :

$$y_j = \frac{E[\tilde{y} \cdot \psi_j(\{\xi_i\}_{i=1}^n)]}{E[\psi_j^2(\{\xi_i\}_{i=1}^n)]} \quad (4.91)$$

où le numérateur s'exprime de la manière suivante :

$$E[\tilde{y} \cdot \psi_j] = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{y}(x) \psi_j(x) \varphi_n(x) dx \quad (4.92)$$

où  $\varphi_n(x)$  est la densité de probabilité multinormale de dimension  $n$  :

$$\varphi_n(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2} \quad (4.93)$$

L'intégrale (4.92) peut être estimée par les simulations de Monte-Carlo et les simulations de Monte-Carlo améliorées ou des méthodes basées sur des quadratures telles que la quadrature de Gauss (Berveiller, 2005). La précision obtenue par la méthode de projection dépend du choix de la méthode utilisée pour estimer l'intégrale (4.92). De plus, la dimension de l'intégrale augmente avec la dimension  $n$  du modèle ce qui tend à accroître la complexité du calcul d'intégrale.

- **Méthode de régression**

Cette méthode est basée sur la méthode des moindres carrés. Elle consiste à minimiser la somme des carrés des écarts entre la valeur exacte du paramètre de sortie  $y$  et son approximation par les Polynômes de Chaos  $\hat{y}$  en  $P$  points judicieusement choisis (4.94) (Berveiller, 2005). Plus de détails sont fournis à la fin de cette section sur les méthodes de plan d'expérience pour le choix de ces  $P$  points.

$$\begin{aligned}
\text{Minimiser } & \sum_{k=1}^P (y^{(k)} - \tilde{y}^{(k)})^2 \\
& = \sum_{k=1}^P \left( y^{(k)} - \sum_{j=1}^P y_j \psi_j \left( \{\xi_i^{(k)}\}_{i=1}^n \right) \right)^2
\end{aligned} \tag{4.94}$$

où  $y^{(k)}$  est la valeur exacte du paramètre de sortie au point  $i$ ,  $\tilde{y}^{(k)}$  est la valeur de l'approximation du paramètre de sortie au point  $k$  et  $P$  est le nombre de points du plan d'expérience.

Le minimum est obtenu pour des valeurs des coefficients qui annulent la dérivée de cette somme par rapport à chaque coefficient. Ces dérivées peuvent s'écrire sous la forme d'un système à résoudre, comme le présente (Berveiller, 2005). Finalement, ce système peut se mettre sous forme matricielle (4.95). (Berveiller, 2005) propose et détaille aussi l'utilisation de la méthode de décomposition par valeurs singulières (Singular Value Decomposition ou SVD) pour la résolution de ce système.

$$\begin{pmatrix}
\sum_{i=1}^P \psi_1 \left( \{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^n \right) \psi_1 \left( \{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^n \right) & \dots & \sum_{i=1}^P \psi_1 \left( \{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^n \right) \psi_P \left( \{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^n \right) \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\sum_{i=1}^P \psi_P \left( \{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^n \right) \psi_1 \left( \{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^n \right) & \dots & \sum_{i=1}^P \psi_P \left( \{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^n \right) \psi_P \left( \{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^n \right)
\end{pmatrix} \tag{4.95}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^P y^{(i)} \psi_0 \left( \{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^n \right) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^P y^{(i)} \psi_P \left( \{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^n \right) \end{pmatrix}$$

Ce système est donné pour un paramètre de sortie  $y$ . Il y a donc autant de systèmes à résoudre qu'il y a de paramètres de sortie dans le modèle de dimensionnement. Le membre de gauche du système (4.95) ne dépend pas des  $P$  points choisis mais uniquement des informations sur les entrées du modèle. Pour résoudre ce système, il suffit donc d'inverser une fois pour toutes la matrice de gauche. La matrice inversée sera identique pour chaque système associé à un paramètre de sortie du modèle. Le vecteur du membre de droite du système dépend du paramètre de sortie  $y$  et des  $P$  réalisations du plan d'expérience. Il est donc différent et à calculer pour chaque système associé à une sortie du modèle. Finalement, le calcul des coefficients d'un développement en Polynômes de Chaos d'un autre paramètre de sortie  $y$  du modèle s'effectue en modifiant seulement ce vecteur.

L'enjeu de cette méthode réside dans le choix des points du plan d'expériences. Le plan d'expériences peut être réalisé à partir des racines du polynôme d'Hermite (Berveiller, 2005). En effet,  $P$  points, soient  $P$   $n$ -uplets, doivent être sélectionnés afin de résoudre le système (4.95) de taille  $P$ . Pour réaliser cela, les racines du polynôme d'Hermite de degré maximal  $p$  sont évaluées pour donner  $p$  solutions. Chaque paramètre d'entrée du modèle a subi préalablement une transformation probabiliste afin d'être ramené à une variable normale centrée réduite. La transformation iso probabiliste inverse est réalisée. Chaque paramètre d'entrée est évalué aux  $p$  solutions. On obtient alors  $p$  valeurs pour chaque paramètre d'entrée.  $P$  jeux d'entrée sont sélectionnés parmi les  $p$  valeurs pour chaque paramètre d'entrée pour former les  $P$   $n$ -uplets nécessaires au plan d'expériences. Pour finir, le paramètre de sortie est calculé  $P$  fois, c'est-à-dire pour chaque jeu d'entrée.

La méthode de régression pour l'estimation des coefficients permet d'obtenir un meilleur développement par Polynômes de Chaos du modèle de dimensionnement initial que par la méthode de collocation décrite ci-dessous (Berveiller, 2005). En effet, elle a pour but d'approcher au mieux le modèle initial aux points du plan d'expériences tandis que la méthode de collocation impose au développement de passer par ces points.

- **Méthode de collocation**

Tandis que la méthode de régression vise à minimiser la somme des carrés des écarts entre l'approximation et la fonction réelle en quelques points, la méthode de collocation a pour objectif de faire passer l'approximation par ces points appelés « points de collocation » (Berveiller, 2005) (Boutahar, 2004).  $P$  points de collocation sont nécessaires pour estimer les  $P$  coefficients du développement du modèle en Polynômes de Chaos. Cette méthode repose sur l'égalité (4.96) qui peut aussi s'écrire sous forme matricielle (4.97).

$$\tilde{y}^{(k)} = y^k, \forall k \in \{1, \dots, P\} \quad (4.96)$$

où  $y^{(k)}$  est la valeur exacte du paramètre de sortie au point  $i$ ,  $\tilde{y}^{(k)}$  est la valeur de l'approximation du paramètre de sortie au point  $k$  et  $P$  est le nombre de points du plan d'expériences (il faut  $P$  équations pour estimer les  $P$  coefficients).

$$\begin{pmatrix} \psi_1(\{\xi_i^{(1)}\}_{i=1}^n) & \dots & \psi_P(\{\xi_i^{(1)}\}_{i=1}^n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(\{\xi_i^{(P)}\}_{i=1}^n) & \dots & \psi_P(\{\xi_i^{(P)}\}_{i=1}^n) \end{pmatrix} \quad (4.97)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(P)} \end{pmatrix}$$

Le choix des points de collocation, ou points du plan d'expériences, est identique à celui utilisé par la méthode de régression développée à la section précédente.

Le nombre de points de collocation pour cette méthode est imposé par l'ordre du développement en Polynômes de Chaos du modèle de dimensionnement. De plus, cette méthode impose l'égalité entre les valeurs du modèle exact et du modèle approché en ces points. Cette seule condition pour le choix des coefficients est très contraignante et peut fournir un développement par Polynômes de Chaos très différent du modèle initial. Finalement, selon (Berveiller, 2005) la méthode de collocation pour estimer les coefficients du Polynôme de Chaos fournit des résultats peu précis par rapport aux autres méthodes énoncées plus haut.

#### 4.5.5.3. Estimation des Moments statistiques par un développement en Polynôme de Chaos

Le développement en Polynômes de Chaos d'un modèle de dimensionnement permet d'estimer des indices tels que les Moments statistiques d'un paramètre de sortie  $y$  du modèle. Par exemple, il est possible d'obtenir immédiatement la moyenne (4.98) et l'écart-type (4.99) des paramètres de sortie à partir des coefficients  $y_i$  du développement en Polynômes de Chaos (4.84) (Berveiller, 2005).

$$\hat{\mu}_y = y_1 \quad (4.98)$$

$$\hat{\sigma}_y^2 = \sum_{k=1}^P y_k^2 E[\psi_k^2] \quad (4.99)$$

Les expressions pour obtenir les Moments statistiques d'ordres supérieurs tels que les coefficients de symétrie et d'aplatissement sont aussi disponibles dans (Berveiller, 2005). Cependant, on cherche à estimer uniquement la moyenne et l'écart-type d'un paramètre sortie.

## 4.6. Comparaison des méthodes de propagation d'incertitudes

Cinq méthodes pour la propagation d'incertitudes à travers des modèles de dimensionnement ont été présentées dans la section précédente, à savoir les Simulations de Monte-Carlo, les Simulations de Monte-Carlo améliorées, la méthode Propagation of Variance, la méthode Dimension Reduction et les Polynômes de Chaos. Nous rappelons que toutes ces méthodes de propagation d'incertitudes permettent le calcul probabiliste des variations des paramètres de sortie en fonction des variations probabilistes des paramètres d'entrée. Nous avons proposé une première comparaison de la méthode Propagation of Variance au 2<sup>nd</sup> ordre par rapport à la méthode des Simulations de Monte-Carlo (Picheral et al., 2011). Dans cette section, nous comparons cette méthode et les autres sur différents critères afin de sélectionner la méthode la plus appropriée pour résoudre nos problèmes d'optimisation robuste. En effet, la mise en œuvre du cahier des charges robuste nécessite le calcul des moyennes et des écarts-types des paramètres de sortie du modèle.

Nous exposons dans la section suivante le détail des méthodes que nous avons implémentées pour la comparaison ainsi que les outils informatiques utilisés (logiciels, bibliothèques de

calculs,...). Nous présentons ensuite la comparaison des méthodes selon deux catégories de critères : les critères relatifs à la théorie et les critères relatifs à l'implémentation. En effet, les premiers critères sont relatifs aux mécanismes mathématiques théoriques mis en œuvre pour développer et appliquer chaque méthode. L'étude préalable des cinq méthodes nous permet de proposer une première comparaison dans la deuxième section. En revanche, il est nécessaire d'implémenter les méthodes en les testant sur un exemple de modèle de dimensionnement afin d'étudier leur précision et leur difficulté d'implémentation. Les résultats de cette seconde comparaison sont proposés dans la troisième section.

### 4.6.1. Caractéristiques des méthodes étudiées et outils pour l'implémentation

Nous avons implémenté différentes méthodes parmi celles décrites dans les sections précédentes. Des choix sont à réaliser lors de la mise en œuvre de ces méthodes tels que le nombre de tirages ou l'ordre du développement de Taylor par exemple. Différents logiciels ont été utilisés pour implémenter ces méthodes. Nous décrivons point par point les différentes méthodes testées ainsi que les caractéristiques concernant leur mise en œuvre :

- **Les Simulations de Monte-Carlo sur le modèle de dimensionnement initial.**  $10^6$  simulations ont été réalisées par le logiciel Pro@DESIGN.
- **Les Simulations de Monte-Carlo améliorées sur un métamodèle** correspondant au développement de Taylor au second ordre du modèle de dimensionnement initial.  $10^6$  simulations ont été réalisées par le logiciel Pro@DESIGN.
- **Les Simulations de Monte-Carlo améliorées selon un plan d'expériences Latin Hypercube.** 100 et 1000 tirages ont été implémentés sur MATLAB.
- **La méthode « Propagation of Variance » au premier ordre et au second ordre.** Ces deux méthodes sont implémentées à la fois sur MATLAB et sur Pro@DESIGN.
- **La méthode « Univariate Dimension-Reduction »** issue de la méthode Dimension-Reduction avec une décomposition en fonctions à une variable. Cette méthode a été mise en œuvre en MATLAB.
- **La méthode des Polynômes de Chaos** a été testée à l'aide de la bibliothèque de calcul NISP en SCILAB sur des petits exemples de calcul. Des difficultés d'implémentation dans le cas de problèmes complexes, y compris l'exemple de moteur nous empêchent d'obtenir des résultats satisfaisants.

### 4.6.2. Comparaison par des critères relatifs à la théorie

#### 4.6.2.1. Description des critères relatifs à la théorie

Les critères relatifs à la théorie que nous utilisons pour effectuer cette comparaison sont :

- **Modélisation des variations des paramètres d'entrée.** Les variations des paramètres d'entrée sont sous forme probabiliste. Le concepteur peut donc connaître soit la distribution complète par la connaissance de la fonction densité de probabilité du paramètre, ou bien seulement certains Moments de sa distribution. Or, les méthodes de

propagation d'incertitudes peuvent exiger en termes de données en entrée une distribution complète pour les paramètres d'entrée, ou leurs moyennes et l'écart-types ou leurs Moments d'ordres supérieurs. Cette information est cruciale pour le concepteur. Celui-ci doit choisir une méthode de propagation d'incertitude en adéquation avec sa connaissance des paramètres d'entrée.

- **Prétraitement des données en entrée.** Des méthodes de propagation d'incertitudes peuvent n'accepter que certaines lois pour les paramètres d'entrée. Il est parfois nécessaire d'appliquer une transformation probabiliste aux lois initiales des paramètres d'entrée afin d'obtenir une loi permettant la mise en œuvre de la méthode.
- **Type de résultat.** Les méthodes de propagation d'incertitudes fournissent des informations sur la variabilité des paramètres de sortie. Ces informations peuvent être sous la forme d'une distribution complète ou sous la forme de Moments.
- **Calcul des dérivées.** Le calcul des dérivées du premier ordre (Gradient) et/ou du second ordre (Hessian) du modèle de dimensionnement peut être nécessaire pour certaines méthodes de propagation d'incertitudes. Ce calcul peut être réalisé de manière formelle ou bien par une méthode numérique telle que les différences finies par exemple.
- **Type de lien entre les variations des paramètres d'entrées et les variations des paramètres de sortie.** Ce lien peut être soit analytique, soit numérique (par une boîte noire). La connaissance du type de lien entre les variations des paramètres d'entrée et les variations des paramètres de sortie permet de déterminer les méthodes de post-traitement possibles. Par exemple, dans le cadre d'un objectif d'optimisation, les algorithmes de type déterministe peuvent être appliqués lorsque le lien est analytique uniquement. Les algorithmes stochastiques sont quant à eux applicables quel que soit le type de lien.
- **Nombre d'appel au modèle de dimensionnement.** Le nombre d'appel au modèle peut être plus ou moins important selon la méthode employée pour la propagation d'incertitudes.

#### 4.6.2.2. Comparaison des méthodes

Le Tableau 4.3 fournit des informations pour chaque méthode selon chaque critère défini au préalable en vue de les comparer.

Tableau 4.3 - Caractéristiques des méthodes sur des critères relatifs à la théorie

		<b>Modélisation des paramètres d'entrée</b>	<b>Pré-traitement des données en entrée</b>	<b>Type de résultat pour les paramètres de sortie</b>	<b>Calcul des dérivées</b>	<b>Type de lien entre variation des entrée et des sorties</b>	<b>Nombre d'appel au modèle</b>	<b>Type d'optimisation</b>
Simulations de Monte-Carlo	10 <sup>6</sup> sur modèle initial	Distribution complète	Aucun	Distribution complète	Non	Numérique	10 <sup>6</sup>	Stochastique
	10 <sup>6</sup> sur modèle approché	Distribution complète	Aucun	Distribution complète	Oui	Numérique	10 <sup>6</sup> + nombre d'appel au modèle pour obtenir le méta-modèle	Stochastique
	100 à 1000 Latin Hypercube	Distribution complète	Aucun	Distribution complète	Non	Numérique	100 à 1000	Stochastique
Propagation of Variance	1 <sup>er</sup> ordre	Moments (moyenne et écart-type)	Oui pour obtenir une loi normale approchée	Moments (Moyenne et écart-type)	Gradient	Numérique si calcul numérique des dérivées, analytique si calcul formel	2n + 1 (ou n est le nombre de paramètre d'entrée)	Stochastique si calcul numérique des dérivées ou déterministe si calcul formel
	2 <sup>nd</sup> ordre				Gradient et Hessian		2n <sup>3</sup> + 3n (par différence finie)	
Univariate Dimension Reduction		Distribution complète	Aucun	Moments ordinaires d'ordre n	Non	Numérique	3n + 1 avec quadrature	Stochastique
Polynômes de Chaos		Distribution complète	Aucun	Moments ordinaires d'ordre n	Non	Numérique	Dépend de la méthode utilisée pour le calcul des coefficients	Stochastique

Les Simulations de Monte-Carlo avec  $10^6$  tirages est la méthode la plus populaire parce que la plus pratique à utiliser et à mettre en œuvre. En effet, elle accepte en données d'entrée tous les types de distributions parmi des lois de probabilités standards ou arbitraires sans prétraitement (sans transformations probabilistes). Cette méthode ne requiert pas non plus le calcul des dérivées. Cependant, elle demande un effort de calcul considérable et nécessite un nombre important d'appels au modèle ( $10^6$  pour atteindre une bonne précision (Lemaire, 2005)). Enfin, les algorithmes déterministes d'optimisation globale ne sont pas utilisables car le lien entre les variations des paramètres d'entrée et les variations des paramètres de sortie est numérique.

Les Simulations de Monte-Carlo améliorées par un métamodèle polynomial ou bien un plan d'expériences Latin Hypercube possèdent les mêmes caractéristiques que les Simulations de Monte-Carlo, exceptée la durée du calcul. En effet, il est possible d'introduire une fonction coût d'une méthode égale au coût de calcul d'un seul modèle par un nombre d'appels au modèle. L'exécution d'un métamodèle de type polynomial (linéaire par Taylor d'ordre 1 et quadratique par Taylor d'ordre 2) permet par exemple un gain de temps considérable en comparaison à un modèle de dimensionnement fortement non-linéaire. Cependant, un grand nombre d'appels au modèle est nécessaire ( $10^6$ ). Dans le second cas, le plan d'expériences Latin Hypercube permet de réduire le nombre de tirages par un meilleur choix des points d'échantillonnage. Cependant, le modèle exécuté est le modèle de dimensionnement initial et peut être lourd à calculer. Finalement, il est possible de gagner du temps de calcul en diminuant le temps de calcul du modèle de dimensionnement ou en diminuant le nombre de tirages, dans les deux cas au détriment de la précision des résultats.

La méthode Propagation of Variance avec un calcul formel des dérivées du modèle de dimensionnement est la seule méthode permettant l'utilisation d'algorithmes déterministes. En effet, elle est basée sur un calcul analytique des variabilités des paramètres de sortie en fonction des variabilités des paramètres d'entrée. Cependant, le calcul formel du Gradient et du Hessian du modèle est très lourd à mettre en œuvre même s'il est réalisé une fois pour toute. L'avantage majeur de cette méthode utilisée avec des calculs de dérivées numériques est le faible temps de calcul. En effet, au second ordre la méthode requiert  $2n^2 + 3n$  appels au modèle de dimensionnement initial où  $n$  est le nombre de paramètres d'entrée aléatoires tandis que les Simulations de Monte-Carlo en demandent  $10^6$ . On constate rapidement que pour atteindre  $10^6$  appels au modèle par la méthode Propagation of Variance, il faut un modèle à 700 paramètres aléatoires.

La méthode Univariate Dimension Reduction permet quant à elle un calcul plus rapide non seulement de la moyenne et de l'écart-type des paramètres de sortie, mais aussi des Moments d'ordres supérieurs. Le nombre d'appels au modèle de dimensionnement initial est plus faible que pour les autres méthodes. En effet, la méthode de quadrature utilisée permet de calculer une intégrale en un minimum de trois appels au modèle de dimensionnement initial. Cependant, trois points d'intégration et trois poids sont à déterminer pour mettre en œuvre cette méthode de quadrature. L'obtention des trois points et poids d'intégration n'est pas triviale et nécessite la connaissance des cinq premiers Moments ordinaires pour chaque paramètre d'entrée. Si on augmente le nombre de points d'intégration pour avoir une meilleure estimation de l'intégrale

par la méthode de quadrature, on augmente le nombre de Moments à connaître pour les paramètres d'entrée ainsi que le nombre d'appels au modèle.

La méthode des Polynômes de chaos permet le calcul des Moments statistiques tels que la moyenne, l'écart-type mais aussi les Moments d'ordre supérieur sans prétraitement des paramètres de conception ni calcul des dérivées. Cependant, le nombre d'appels au modèle de dimensionnement varie selon l'ordre du polynôme désiré et la méthode choisie pour calculer les coefficients du développement en Polynômes de Chaos du modèle (méthode de régression, de projection ou de collocation). De plus, les liens entre les Moments statistiques des paramètres d'entrée et les Moments des paramètres de sortie sont numériques, de sorte qu'à chaque modification d'une distribution d'entrée, tous les calculs sont à reprendre.

D'un point de vue théorique, chaque méthode présente des avantages et des inconvénients. Il est évident que la méthode des Simulations de Monte-Carlo avec  $10^6$  tirages est très lourde par le nombre d'exécutions du modèle. La méthode Propagation of Variance au 1<sup>er</sup> et 2<sup>nd</sup> ordre est la seule méthode permettant d'obtenir des liens analytiques entre les Moments statistiques des paramètres d'entrée et ceux des paramètres de sortie. L'intérêt de cette méthode réside dans la possibilité d'appliquer des algorithmes d'optimisation déterministes pour des calculs plus rapides.

### **4.6.3. Comparaison par des critères relatifs à l'implémentation**

Les différentes méthodes étudiées dans ce chapitre ont été implémentées pour être comparées sur des critères liés à leur mise en œuvre. Nous présentons et discutons dans la section suivante les critères relatifs à l'implémentation des méthodes. Les données du modèle de dimensionnement (moteur électrique) utilisées pour réaliser les tests sont détaillées dans la section suivante. Enfin, nous détaillons les résultats des tests et la comparaison des méthodes.

#### **4.6.3.1. Description des critères relatifs à l'implémentation**

Les méthodes de propagation d'incertitudes peuvent être comparées en terme d'utilisation mais aussi en terme de mise en œuvre. En effet, l'utilisateur ne va comparer les méthodes que selon le temps de calcul ou de précision des résultats. Cependant le travail de compréhension, de formulation puis de mise en œuvre de la méthode réalisé au préalable pour créer des bibliothèques de calcul, par exemple, est plus ou moins important en fonction de la méthode.

- **Compréhension et mise en œuvre de la méthode**

La compréhension de la méthode est essentielle pour la mettre en œuvre dans un langage informatique ou simplement pour l'utiliser. La mise en œuvre d'une méthode est ici le codage informatique des équations mathématiques régissant le fonctionnement de la méthode. L'utilisateur doit avoir connaissance des difficultés et du temps de mise en œuvre de chaque méthode afin d'en choisir une pour réaliser des tests. En effet, un simple utilisateur d'une bibliothèque de calcul est amené à faire des choix tels que le nombre de tirages pour les méthodes basées sur des simulations, ou un ordre pour un développement polynomial de Taylor

ou en Polynômes de Chaos. L'utilisateur doit maîtriser un minimum les mécanismes mathématiques de chaque méthode afin d'utiliser des critères censés, de pouvoir interpréter les résultats et éventuellement de modifier ses critères pour obtenir de meilleurs résultats.

- **Temps de calcul**

Le temps total de calcul est fonction du nombre d'appels au modèle de dimensionnement et du temps d'une exécution du modèle de dimensionnement (modèle initial ou métamodèle). Cependant, ce temps de calcul est aussi influencé par la configuration des ordinateurs, les logiciels et les codes de calcul utilisés pour implémenter chaque méthode. En conséquence, nous pouvons seulement donner des temps de calcul au vu de l'information disponible telle que le nombre d'appels au calcul du modèle.

- **Précision des résultats**

Les méthodes de propagation sont basées sur différentes méthodes et approximations mathématiques et fournissent en conséquence des résultats plus ou moins précis. C'est ce critère de précision que nous allons analyser dans cette section.

Pour des méthodes basées sur des simulations, un facteur pouvant influencer la précision du calcul est le nombre de tirages. En effet, augmenter le nombre de tirages permet d'étudier de manière plus complète l'espace des solutions et cela fournit généralement des résultats plus précis. Cette augmentation du nombre de tirages est cependant coûteuse en temps de calcul. Enfin, seuls des tests peuvent indiquer le nombre de tirages à réaliser pour avoir une bonne précision des résultats.

Pour toutes les méthodes de propagation d'incertitudes, l'ordre de grandeur de la dispersion des paramètres d'entrée est aussi un facteur pouvant influencer la précision des résultats de calcul. En effet, le domaine de variation d'un paramètre modélisé comme une distribution de probabilité augmente lorsqu'on augmente sa dispersion. L'influence de cette augmentation pour les méthodes basées sur des simulations peut être compensée par une augmentation du nombre de tirages mais cela demande également un temps de calcul important. Là aussi, seuls des tests peuvent indiquer le nombre de tirages à réaliser pour avoir une bonne précision des résultats. Pour les autres méthodes, il n'est pas possible de modifier le nombre de simulations. Des tests sont donc nécessaires afin de déterminer le domaine de validité des résultats, c'est-à-dire de déterminer pour quel ordre de grandeur des dispersions des paramètres de conception la méthode fournit des résultats précis.

#### **4.6.3.2. Caractéristiques du cas de test : moteur électrique**

L'exemple utilisé pour tester les méthodes est le modèle de dimensionnement d'un actionneur électrique. Les équations de ce modèle et les informations sur les paramètres de conception et les performances sont introduites dans la section 2.2.4. Les méthodes que nous implémentons ont pour objectif de propager l'incertitude sur les paramètres d'entrée à travers le modèle pour obtenir les variations probabilistes des paramètres de sortie. Pour ce faire, nous utilisons une solution au problème de dimensionnement satisfaisant les contraintes du cahier des charges initial.

D'une part, nous choisissons de fixer six paramètres :  $p, \Delta p, E_{ch}, k_r, B_{fer}, \Gamma_{em}$ . Les valeurs de ces paramètres fixes sont données dans le Tableau 4.4 et sont celles de la solution au problème de dimensionnement relative au cahier des charges initial. Leur dispersion est alors considérée comme nulle.

Tableau 4.4 - Valeurs des paramètres de conception fixes

Paramètre	Valeur
$p$	5
$\Delta p$	0.100
$E_{ch}$	$10^{11}$
$k_r$	0.70
$B_{fer}$	1.5
$\Gamma_{em}$	10

D'autre part, nous faisons varier cinq paramètres d'entrée selon des distributions de probabilité normales :  $E, e, \beta, l_a, M$ . Une distribution de probabilité normale peut être modélisée à partir de deux paramètres : la moyenne et l'écart-type. La moyenne pour chaque paramètre variable est donnée dans le Tableau 4.5. Ces moyennes correspondent à la solution du problème de dimensionnement relative au cahier des charges initial avec comme fonction objectif la minimisation du volume des parties utiles  $V_u$ .

Tableau 4.5 - Moyenne des distributions de probabilité normales des paramètres de conception variables

Paramètre	Moyenne
$E$	0.0045
$e$	0.001
$\beta$	0.9
$l_a$	0.009
$M$	0.9

Un des facteurs pouvant influencer la précision des résultats est l'ordre de grandeur de la dispersion des paramètres de conception. Nous implémentons les différentes méthodes pour différentes valeurs des écart-types des paramètres d'entrée variables. Les différentes valeurs des écart-types sont considérées comme relatives aux moyennes des paramètres. Elles sont calculées comme un pourcentage (1%, 5%, 10%, 20%, 30%, 40% et 50%) de la moyenne du paramètre de conception. Par exemple, la moyenne du paramètre  $E$  est 0.0045. Ainsi, 1% de la moyenne de  $E$  équivaut à une valeur pour son écart-type de 0.000045.

Le modèle de dimensionnement du moteur électrique consiste à minimiser le volume des parties utiles  $V_u$  du moteur à partir de sept autres performances du produit calculées par le modèle ( $D, J_{cu}, K_f, B_e, C, \lambda, L$ ) et des paramètres de conception fixes et variables introduits

précédemment. Dans cette section, nous donnons uniquement les résultats pour les variations du paramètre de sortie  $V_u$ . En effet, nous estimons sa moyenne  $\hat{\mu}_{V_u}$  et son écart-type  $\hat{\sigma}_{V_u}$  à l'aide des différentes méthodes de propagation présentées dans ce chapitre :

1. Simulations Monte-Carlo  $10^6$  tirages sur le modèle initial
2. Simulations Monte-Carlo  $10^6$  tirages sur le métamodèle de Taylor au 2<sup>ème</sup> ordre
3. Méthode "Propagation of Variance (PoV)" au 1<sup>er</sup> ordre
4. Méthode "Propagation of Variance (PoV)" au 2<sup>nd</sup> ordre
5. Simulations de Monte-Carlo améliorées : Latin Hypercube 100 tirages
6. Simulations de Monte-Carlo améliorées : Latin Hypercube 1000 tirages
7. Méthode Dimension-Reduction : "Univariate Dimension-Reduction method" (UDRM)

Nous répétons ces calculs pour différentes valeurs de l'écart-type des paramètres d'entrée variables, calculées à partir du pourcentage de la moyenne.

#### 4.6.3.3. Résultats et interprétations

- **Calcul de la moyenne de  $V_u$**

Le Tableau 4.6 fournit les résultats pour la moyenne du volume des parties utiles  $\mu_{V_u}$  pour différents ordres de grandeur de dispersion des paramètres d'entrée variables et pour les différentes méthodes. Les données et résultats obtenus par chaque méthode sont comparés aux données et résultats obtenus par les Simulations Monte-Carlo avec  $10^6$  tirages, que nous considérons comme méthode de référence. Le Tableau 4.7 présente les pourcentages d'erreur calculés par rapport à cette méthode de références (Monte-Carlo  $10^6$  tirages) de la manière suivante :

$$\%_{erreur} = \left| \frac{\hat{\mu}_{V_{u,ref}} - \hat{\mu}_{V_{u,méth}}}{\hat{\mu}_{V_{u,ref}}} \right| * 100 \quad (4.100)$$

où  $\hat{\mu}_{V_{u,ref}}$  est la valeur de la moyenne de  $V_u$  obtenue par la méthode de référence (Monte-Carlo  $10^6$  tirages) pour un ordre de grandeur donné de l'écart-type des entrées et  $\hat{\mu}_{V_{u,méth}}$  est la valeur de la moyenne de  $V_u$  obtenue par une autre méthode pour le même ordre de grandeur de l'écart-type des entrées.

La Figure 4.4 permet de visualiser l'évolution des résultats (valeur de  $\hat{\mu}_{V_u}$ ) pour chaque méthode en fonction de l'ordre de grandeur des écart-types. En effet, la moyenne  $\hat{\mu}_{V_u}$  (axe des ordonnées) en fonction de l'ordre de grandeur des écart-types (axe des abscisses) est représentée pour chaque méthode de propagation d'incertitudes.

Tableau 4.6 - Valeurs de  $\hat{\mu}_{V_u}$  pour différentes méthodes et différents écart-types des paramètres d'entrée ( $* 10^{-4}$ )

Pourcentage pour le calcul de l'écart-type	Méthodes						
	Monte-Carlo 10 <sup>6</sup> sur modèle initial	Monte-Carlo 10 <sup>6</sup> sur méta-modèle de Taylor	PoV au 1 <sup>er</sup> ordre	PoV au 2 <sup>nd</sup> ordre	Latin hypercube 100 tirages	Latin hypercube 1000 tirages	Univariate Dimension Reduction method UDRM
1	1,6460	1,6460	1,6463	1,6460	1,6464	1,6463	1,6463
5	1,6480	1,6480	1,6463	1,6480	1,6481	1,6484	1,6483
10	1,6550	1,6540	1,6463	1,6540	1,6553	1,6547	1,6544
20	1,6830	1,6780	1,6463	1,6790	1,6824	1,6831	1,6819
30	1,7600	1,7190	1,6463	1,7190	1,7423	1,7672	1,7427
40	2,3970	1,7760	1,6463	1,7750	1,7761	1,8954	1,8867
50	1,0220	1,8480	1,6463	1,8480	2,7696	1,8812	2,4265

Tableau 4.7 - Pourcentage d'erreur %<sub>erreur</sub> des résultats obtenus par les différentes méthodes de calcul de  $\hat{\mu}_{V_u}$  comparé à la méthode de référence Monte-Carlo 10<sup>6</sup> simulations

Pourcentage pour le calcul de l'écart-type	Méthodes						
	Monte-Carlo 10 <sup>6</sup> sur modèle initial	Monte-Carlo 10 <sup>6</sup> sur méta-modèle de Taylor	PoV au 1 <sup>er</sup> ordre	PoV au 2 <sup>nd</sup> ordre	Latin hypercube 100 tirages	Latin hypercube 1000 tirages	Univariate Dimension Reduction method UDRM
1	0,00 %	0,00 %	0,02 %	0,00 %	0,02 %	0,02 %	0,02 %
5	0,00 %	0,00 %	0,10 %	0,00 %	0,01 %	0,02 %	0,02 %
10	0,00 %	0,06 %	0,53 %	0,06 %	0,02 %	0,02 %	0,04 %
20	0,00 %	0,30 %	2,18 %	0,24 %	0,04 %	0,01 %	0,07 %
30	0,00 %	2,33 %	6,46 %	2,33 %	1,01 %	0,41 %	0,98 %
40	0,00 %	25,91 %	31,32 %	25,95 %	25,90 %	20,93 %	21,29 %
50	0,00 %	80,82 %	61,09 %	80,82 %	171,00 %	84,07 %	137,43 %

Le Tableau 4.6 montre que la valeur de la moyenne  $\hat{\mu}_{V_u}$  pour la méthode Propagation of Variance au 1<sup>er</sup> ordre est constante quel que soit le pourcentage pour le calcul de l'écart-type. Cela s'explique par l'expression de la moyenne d'un paramètre de sortie par cette méthode :  $\hat{\mu}_y = g(\mu_x)$ .

Ce tableau montre aussi que la valeur de la moyenne  $\hat{\mu}_{V_u}$  pour les autres méthodes augmente lorsque le pourcentage pour le calcul de l'écart-type augmente, sauf pour la valeur de Simulation de Monte-Carlo avec 10<sup>6</sup> tirages pour un pourcentage de l'écart-type de 50% ( $2.40 * 10^{-4}$  pour 40% et  $1.02 * 10^{-4}$  pour 50%). Ce comportement est illustré sur la Figure 4.4. Cette valeur peut s'expliquer par le fait que le domaine de tirage des valeurs d'un paramètre de conception s'étend en restant centré autour de sa moyenne avec l'augmentation de l'écart-type

des paramètres. Le nombre de tirages reste constant (égal à  $10^6$ ) alors que l'espace de tirage des paramètres de conception augmente. Le nombre de tirages devient alors insuffisant pour couvrir les larges dispersions des paramètres de conception. Les résultats concernant le calcul de la moyenne  $\hat{\mu}_{V_u}$  (Tableau 4.6 et Tableau 4.7) montrent que toutes les méthodes convergent vers un même résultat avec des écart-types des paramètres d'entrée ne dépassant pas 10% de la moyenne. Pour un ordre de grandeur d'écart-type de 30% de la moyenne, la méthode Propagation of Variance au 1<sup>er</sup> ordre fournit une estimation de la moyenne avec une erreur de 6.5%. Les méthodes qui s'appuient sur un développement de Taylor au 2<sup>nd</sup> ordre (Propagation of Variance au 2<sup>nd</sup> ordre et les Simulations de Monte-Carlo sur un développement de Taylor au 2<sup>nd</sup> ordre) présentent alors une erreur de 2.3%. Enfin les autres méthodes ont un pourcentage d'erreur inférieur à 1%.

Pour un ordre de grandeur d'écart-type de 40% de la moyenne et au-delà, l'erreur des résultats fournis par toutes les méthodes est considérable car elle est au minimum supérieure à 20% et peut atteindre 171%. Nous pouvons expliquer ces valeurs par le fait que les méthodes basées sur les simulations fournissent des résultats de plus en plus divergents avec l'augmentation du pourcentage de l'écart-type. La méthode de référence (Monte Carlo  $10^6$  tirages) par exemple propose un nombre de tirages insuffisant pour couvrir les larges dispersions des paramètres de conception.

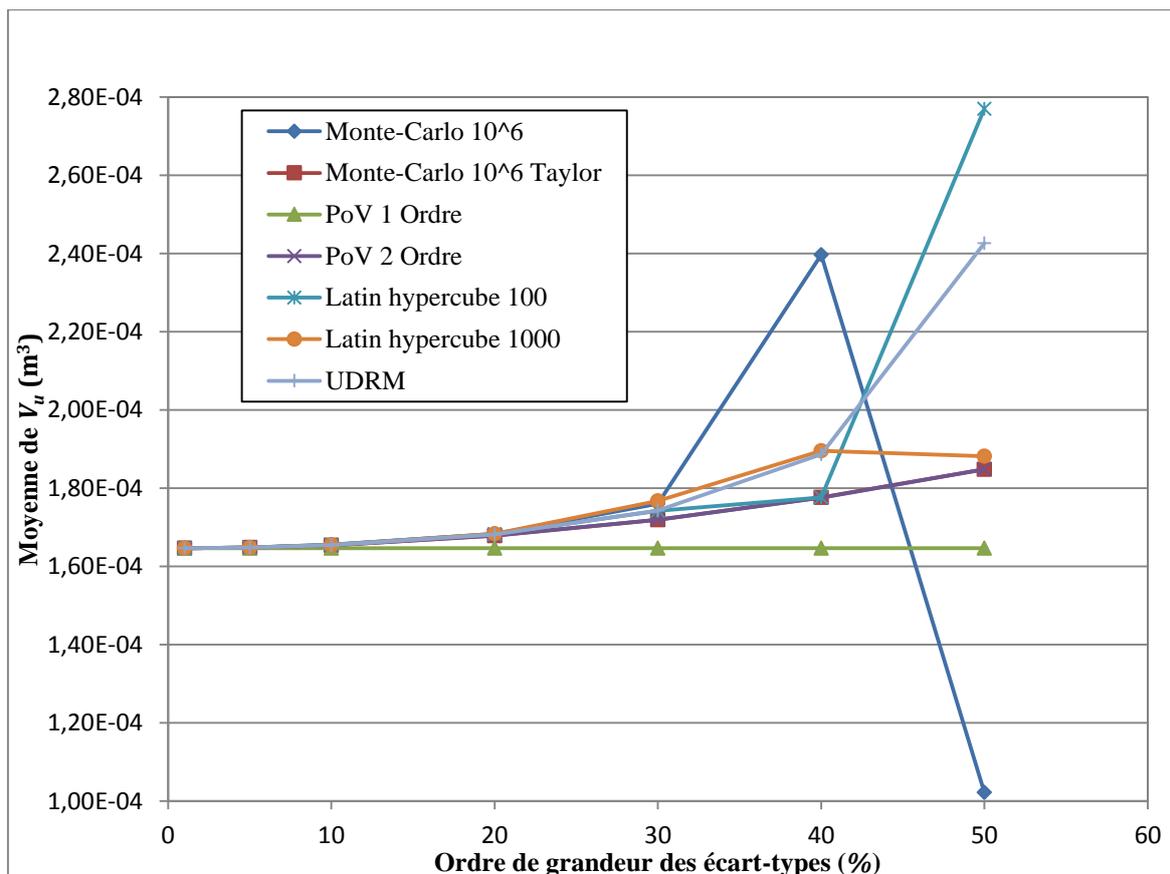


Figure 4.4 - Calcul de la moyenne  $\hat{\mu}_{V_u}$  pour différentes méthodes et différents ordres de grandeur des écart-types des paramètres d'entrée

Le modèle de dimensionnement est non-linéaire. Cela explique que la méthode Propagation of Variance au 1<sup>er</sup> ordre fournit des résultats très éloignés de la référence pour des ordres de grandeur des écart-types de 30% ou plus. Au contraire, les méthodes d'approximations quadratiques de type développements de Taylor au 2<sup>nd</sup> ordre offrent une meilleure approximation du modèle de dimensionnement. Lorsque l'ordre de grandeur de l'écart-type augmente, les approximations ne sont plus assez précises pour fournir des résultats précis. Cependant, on remarque aussi que la méthode de référence des Simulations de Monte-Carlo avec  $10^6$  tirages diverge au-delà d'un ordre de grandeur d'écart-type de 40%. Un ordre de 40% de la moyenne représente une très large dispersion des paramètres de conception tel que le million de tirages devient insuffisant pour balayer toutes les valeurs que peuvent prendre les paramètres de conception.

Enfin, la solution nominale que nous avons choisie pour réaliser la propagation d'incertitudes est une solution optimale répondant au cahier des charges initial du produit. En effet, celui-ci a pour objectif de minimiser la valeur nominale de  $V_u$ . Nous pouvons observer à l'aide de ces tests que la valeur de  $\hat{\mu}_{V_u}$  augmente lorsque l'ordre de grandeur des écart-types des paramètres de conception augmente. Afin d'avoir une valeur minimale pour la moyenne de la performance  $V_u$ , il est important de rester dans des faibles valeurs des écart-types pour les paramètres de conception.

- **Calcul de l'écart-type de  $V_u$**

Le Tableau 4.8 fournit les résultats pour l'écart-type du volume des parties utiles  $\hat{\sigma}_{V_u}$  pour différents ordres de grandeur de dispersion des paramètres d'entrée et pour les différentes méthodes. De même que pour la moyenne  $\hat{\mu}_{V_u}$ , nous présentons dans le Tableau 4.9 le pourcentage d'erreur pour les écarts-types  $\hat{\sigma}_{V_u}$  obtenus par les différentes méthodes par rapport aux valeurs obtenues par la méthode de référence (Simulations Monte-Carlo  $10^6$  tirages) :

$$\%_{erreur} = \left| \frac{\hat{\sigma}_{V_{u,ref}} - \hat{\sigma}_{V_{u,méth}}}{\hat{\sigma}_{V_{u,ref}}} \right| * 100 \quad (4.101)$$

où  $\hat{\sigma}_{V_{u,ref}}$  est la valeur de l'écart-type de  $V_u$  obtenue par la méthode de référence (Monte-Carlo  $10^6$  tirages) pour un ordre de grandeur donné de l'écart-type des entrées, et  $\hat{\sigma}_{V_{u,méth}}$  est la valeur de l'écart-type de  $V_u$  obtenue par une autre méthode pour le même ordre de grandeur de l'écart-type des entrées.

La Figure 4.5 permet de visualiser l'évolution des résultats (valeur de  $\hat{\sigma}_{V_u}$ ) pour chaque méthode en fonction de l'ordre de grandeur des écart-types. En effet, l'écart-type  $\hat{\sigma}_{V_u}$  (axe des ordonnées) en fonction de l'ordre de grandeur des écart-types (axe des abscisses) est représenté pour chaque méthode de propagation d'incertitudes.

Tableau 4.8 - Valeurs de  $\hat{\sigma}_{v_u}$  pour différentes méthodes et différents écart-types des paramètres d'entrée ( $\times 10^{-6}$ )

Pourcentage pour le calcul de l'écart-type	Méthodes						
	Monte-Carlo $10^6$ sur modèle initial	Monte-Carlo $10^6$ sur méta-modèle de Taylor	PoV au 1 <sup>er</sup> ordre	PoV au 2 <sup>nd</sup> ordre	Latin hypercube 100 tirages	Latin hypercube 1000 tirages	Univariate Dimension Reduction method UDRM
1	0,16	0,16	0,16	0,16	0,17	0,16	0,13
5	3,97	3,94	3,93	3,94	3,88	3,96	3,94
10	8,19	7,93	7,86	7,93	8,22	8,13	8,12
20	19,37	16,32	15,71	16,32	18,83	19,02	18,41
30	623,50	25,57	23,57	25,58	35,74	68,45	34,80
40	1010,00	36,09	31,43	36,05	148,50	295,07	68,88
50	2000,00	48,10	39,28	48,02	1003,10	301,50	190,90

Tableau 4.9 - Pourcentage d'erreur  $\%_{\text{erreur}}$  des résultats obtenus par les différentes méthodes pour  $\hat{\sigma}_{v_u}$  comparé à la méthode de référence Monte-Carlo  $10^6$  simulations

Pourcentage pour le calcul de l'écart-type	Méthodes						
	Monte-Carlo $10^6$ sur modèle initial	Monte-Carlo $10^6$ sur méta-modèle de Taylor	PoV au 1 <sup>er</sup> ordre	PoV au 2 <sup>nd</sup> ordre	Latin hypercube 100 tirages	Latin hypercube 1000 tirages	Univariate Dimension Reduction method UDRM
1	0,00	0,00	0,00	0,00	6,25	0,00	18,75
5	0,00	0,76	1,01	0,76	2,27	0,25	0,76
10	0,00	3,17	4,03	3,17	0,37	0,73	0,85
20	0,00	15,75	18,90	15,75	2,79	1,81	4,96
30	0,00	95,90	96,22	95,90	94,27	89,02	94,42
40	0,00	96,43	96,89	96,43	85,30	70,79	93,18
50	0,00	97,60	98,04	97,60	49,85	84,93	90,46

Les résultats concernant le calcul de l'écart-type  $\hat{\sigma}_{v_u}$  (Tableau 4.9) montrent que les méthodes des Simulations de Monte-Carlo sur un développement de Taylor au second ordre, Propagation of Variance au 1<sup>er</sup> et au 2<sup>nd</sup> ordre et la méthode par Latin Hypercube avec 1000 tirages fournissent une bonne approximation de l'écart-type  $\hat{\sigma}_{v_u}$  pour des écart-types ne dépassant pas 10% de la moyenne. Au contraire, les méthodes Latin Hypercube à 100 tirages et Univariate Dimension Reduction fournissent des résultats très mauvais pour un écart-type de 1% de la moyenne (6.25% d'erreur pour la méthode Latin Hypercube avec 100 tirages et 18.75% d'erreur pour la méthode Univariate Dimension Reduction). On observe de plus que la méthode Latin Hypercube avec 100 tirages donne un résultat divergent pour un écart-type avec un faible pourcentage de la moyenne, ce résultat converge lorsque l'ordre de grandeur des écart-types

des entrées augmente puis diverge à nouveau. Au-delà d'un écart-type de 20% de la moyenne, les résultats divergent pour la plupart des méthodes.

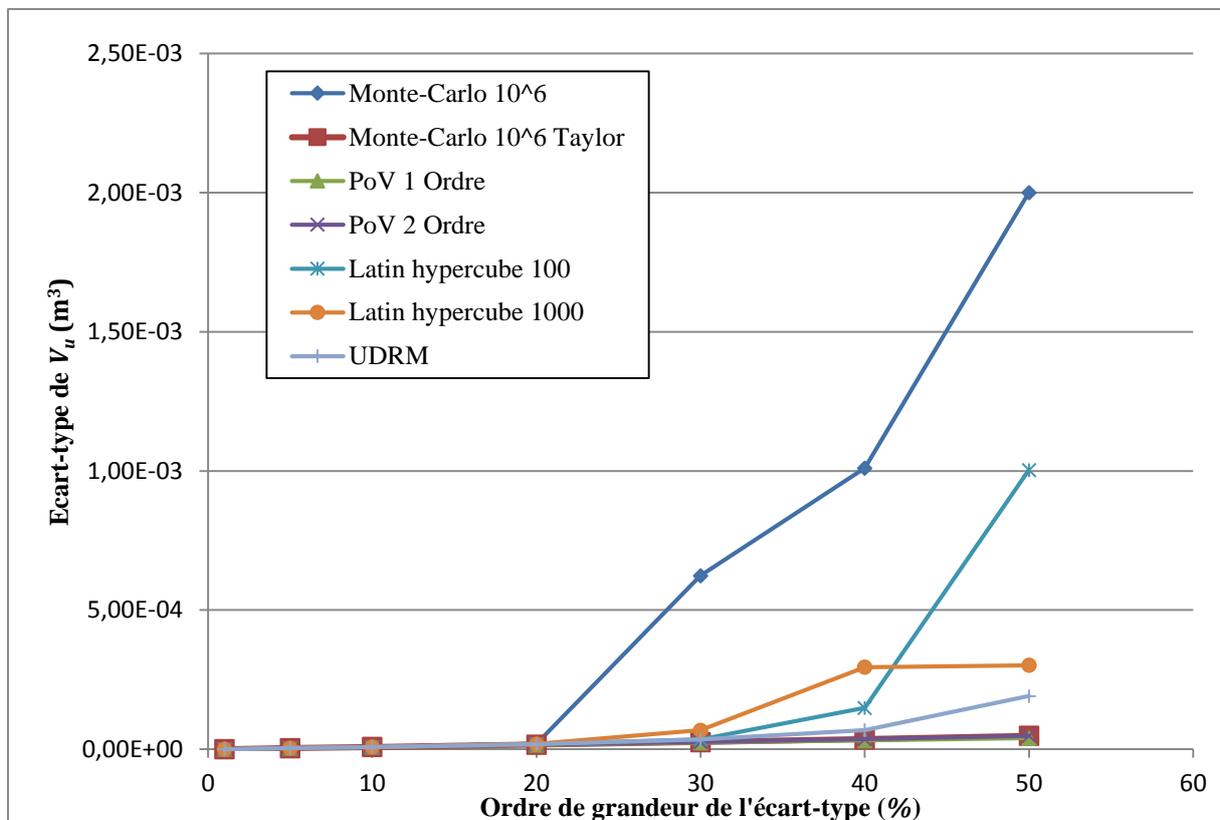


Figure 4.5 - Calcul de l'écart-type de  $\hat{\sigma}_{V_u}$  pour différentes méthodes et différents ordres de grandeur des écart-types des paramètres d'entrée

Les méthodes de simulation utilisant peu de tirages ne sont pas fiables en terme de précision pour le calcul de l'écart-type  $\hat{\sigma}_{V_u}$ . En effet, alors que les méthodes sont censées converger en diminuant l'ordre de grandeur des écart-types des paramètres d'entrée, la méthode Latin Hypercube diverge puis converge pour diverger à nouveau. La méthode Univariate Dimension-Reduction montre le même comportement. Les autres méthodes fournissent un calcul assez précis de l'écart-type  $\hat{\sigma}_{V_u}$  jusqu'à un ordre de grandeur des écart-types des entrées de l'ordre de 10%.

L'écart-type de la performance  $V_u$  augmente avec l'accroissement de l'ordre de grandeur des écart-types des paramètres de conception. Nous rappelons que la solution choisie pour réaliser la propagation d'incertitudes est une solution optimale répondant au cahier des charges initial du produit avec pour objectif de minimiser la valeur nominale de  $V_u$ . Une solution robuste au problème de dimensionnement présente une bonne stabilité de la fonction objectif. Cette stabilité peut se traduire par un faible écart-type de la fonction objectif. Les résultats montrent ainsi que la solution étudiée est plus stable/robuste pour des faibles valeurs des écart-types des paramètres de conception.

#### 4.6.3.4. Comparaison des méthodes

La comparaison des méthodes sur des critères relatifs à l'implémentation peut se faire suivant trois critères : la compréhension et la mise en œuvre, le temps de calcul et la précision.

- **Compréhension et mise en œuvre de la méthode**

La méthode la plus rapide et facile à mettre en œuvre est la méthode des Simulations de Monte-Carlo. En effet, elle ne demande qu'un choix du nombre de tirages et son mécanisme mathématique est simplement basé sur des tirages suivant les distributions des paramètres d'entrée. Les Simulations de Monte-Carlo appliquées à un développement de Taylor nécessitent en plus un choix approprié de l'ordre du développement de Taylor (2<sup>nd</sup> ordre dans notre cas) et un calcul des dérivées dont les ordres dépendent de l'ordre du développement de Taylor utilisé (Gradient et Hessian pour un développement de Taylor au 2<sup>nd</sup> ordre). La méthode Propagation of Variance au 1<sup>er</sup> et 2<sup>nd</sup> ordres nécessite de la même manière le calcul des dérivées partielles du modèle au 1<sup>er</sup> et 2<sup>nd</sup> ordres. Les Simulations de Monte-Carlo par Latin Hypercube présentent la difficulté de réaliser le plan d'expériences mais font appel à moins de tirages. La méthode Univariate Dimension-Reduction utilise une méthode de Quadrature nécessitant de connaître les Moments ordinaires de chaque paramètre de dimensionnement, de résoudre un système matriciel dont la taille dépend du nombre de points d'interpolation choisis et enfin de résoudre une équation dont la dimension est aussi le nombre de points d'interpolation choisis. Finalement, les tests réalisés sur la méthode des Polynômes de Chaos montrent sa complexité de mise en œuvre quelle que soit la méthode utilisée pour le calcul des coefficients du développement. En effet, ces méthodes sont basées sur des résolutions de systèmes matriciels et sur des méthodes d'estimation d'intégrales. De plus le choix des points est aussi basé sur une résolution d'équation.

- **Temps de calcul**

Nous n'avons pas de données exactes concernant le temps de calcul pour chaque méthode. Comme nous l'avons évoqué précédemment, ce temps dépend de la configuration des ordinateurs, des logiciels et des codes de calcul utilisés pour implémenter chaque méthode.

- **Précision des résultats**

Enfin, les tests sur le modèle du moteur électrique nous permettent de tirer des conclusions quant à la précision des résultats obtenus par les différentes méthodes. Les méthodes sont relativement fiables pour le calcul de la moyenne et de l'écart-type des paramètres de sortie pour des ordres de grandeur des écart-types des paramètres d'entrée allant de 1% à 10%. Au-delà, les différentes méthodes fournissent des résultats beaucoup moins précis y compris la méthode de référence Simulations de Monte Carlo avec 10<sup>6</sup> tirages. Dans la réalité, un écart-type de 10% de la moyenne représente une large dispersion du paramètre rarement rencontrée ou acceptée.

Pour illustrer ce point nous préférons parler d'intervalle de tolérance plutôt que d'écart-type car l'intervalle de tolérance est plus visualisable. En se basant sur le principe de Six Sigma, on

considère que l'intervalle de tolérance d'un paramètre de conception est égal à six fois son écart-type ( $IT = 6 * \sigma$ ). En effet, cela indique que 99.73% des valeurs du paramètre sont comprises entre la borne inférieure ( $IT_{inf} = \mu - 3\sigma$ ) et la borne supérieure ( $IT_{sup} = \mu + 3\sigma$ ) de l'intervalle de tolérance.

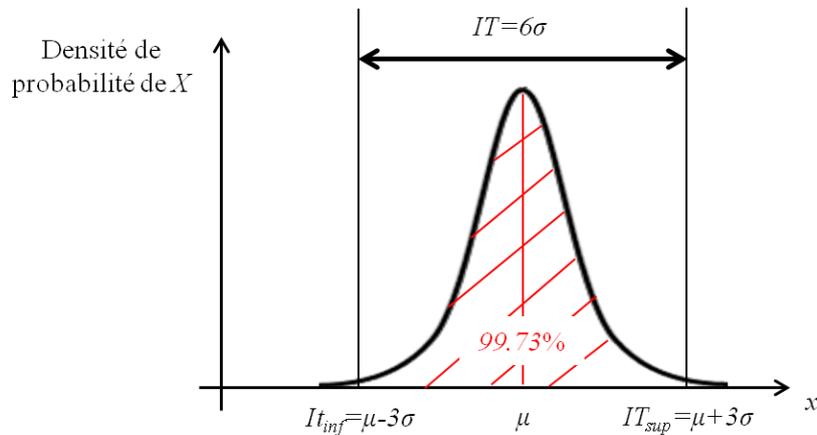


Figure 4.6 - Interprétation de l'intervalle de tolérance par le principe Six Sigma

L'intervalle de tolérance d'un paramètre géométrique dépend du moyen de fabrication utilisé pour obtenir la forme (usinage, emboutissage, découpage laser, moulage...). En regardant les tables d'ajustement glissant dans la pire configuration possible, on voit que pour un diamètre de 400 mm, l'intervalle de tolérance conseillé est de 1030  $\mu m$  soit un écart-type de 171.6  $\mu m$ . Cet écart-type représente un pourcentage de 0.04% de la moyenne (400 mm).

Les variations des propriétés des matériaux peuvent être plus importantes que pour les paramètres géométriques. La diversité des matériaux offre de nombreuses propriétés. Ainsi, les tolérances sur les propriétés des matériaux s'évaluent au cas par cas par les fournisseurs en fonction des lots de matières premières. Il est donc impossible d'assurer de manière générale que les variations des propriétés des matériaux soient inférieures à 10% de la valeur moyenne.

Or les méthodes de propagation d'incertitudes sont précises pour des valeurs des écart-types des paramètres de conception ne dépassant pas 10% de la moyenne. Afin de pouvoir les appliquer sur des modèles de dimensionnement de produit comportant des paramètres de conception variables autres que des dimensions géométriques, il est nécessaire d'imposer des variations maximales égales à 10% de la valeur moyenne du paramètre de conception. Il sera par exemple nécessaire de trier et sélectionner les lots de matières premières satisfaisant cette contrainte dans le cas où les paramètres de conception sont des propriétés de matériaux.

#### 4.6.4. Bilan des comparaisons et positionnement

La méthode des Simulations de Monte-Carlo est précise et simple à mettre en œuvre mais le nombre élevé d'appels au modèle de dimensionnement souvent complexe la rend impossible à utiliser dans un contexte industriel, où les temps de calcul doivent rester raisonnables. Les Simulations de Monte-Carlo améliorées par le plan d'expériences Latin Hypercube ou sur un métamodèle de type Taylor présentent de bons résultats mais leur mise en œuvre est plus

difficile que les Simulations de Monte-Carlo sur le modèle exact. Cependant, ce sont des méthodes numériques qui ne donnent pas la possibilité de conserver les liens entre les Moments statistiques des performances et ceux des paramètres de conception. La méthode Univariate Dimension Reduction donne des résultats précis et peut demander un faible nombre d'appels au modèle si le nombre de points d'interpolation de la méthode de quadrature utilisé est peu élevé. Cependant, la méthode de quadrature utilisée pour déterminer ces points d'interpolation et les poids associés est très contraignante. Elle nécessite de connaître les Moments ordinaires de chaque paramètre à différents ordres (fonction du nombre de points d'interpolation à déterminer). Ensuite, les mécanismes mathématiques de cette méthode de quadrature sont lourds à mettre en œuvre (inversion et résolution de matrices, résolution d'équations,...). La méthode des Polynômes de Chaos n'a pas été testée sur le modèle de dimensionnement du moteur électrique, ce qui ne permet donc pas une comparaison des résultats. Nous avons cependant observé que les mécanismes mathématiques à mettre en œuvre sont nombreux et complexes. En effet, cette méthode a l'avantage de proposer de nombreuses approches pour le calcul des coefficients du développement en Polynômes de Chaos. Cet avantage peut se révéler être un inconvénient pour l'utilisateur lorsque les informations pour choisir les paramètres fonctionnels de la méthode ne sont pas données ni clarifiées. Les résultats obtenus par la méthode Propagation of Variance sont eux aussi précis pour un développement de Taylor au 2<sup>nd</sup> ordre. En effet, l'approche quadratique est plus adaptée que l'approche linéaire pour le dimensionnement de produit où les modèles présentent généralement de nombreuses non-linéarités. Cette méthode permet l'emploi d'algorithmes d'optimisation déterministes dans le cas où les dérivées (Gradient et Hessien) du modèle de dimensionnement sont exprimées de manière formelle. Les dérivées du modèle peuvent être estimées par des méthodes numériques par différences finies par exemple. Les mécanismes mathématiques utilisés par cette méthode sont rapides à comprendre et à mettre en œuvre ce qui la rend facile d'emploi. Enfin, les temps de calculs sont moins importants que pour les Simulations de Monte-Carlo ce qui rend cette méthode utilisable dans un contexte industriel.

Suite à cette étude comparative des méthodes pour la propagation d'incertitude, nous optons pour l'utilisation de la méthode Propagation of Variance pour un développement de Taylor du modèle de dimensionnement au 2<sup>nd</sup> ordre. En effet, cette méthode présente de nombreux avantages qui pourront être exploités dans la suite de ce travail.

## **4.7. Conclusion**

Ce chapitre consacré à la propagation d'incertitudes révèle la diversité des méthodes dans le cas où les incertitudes sont de type probabiliste. Nous avons choisi la modélisation probabiliste pour représenter les variations des paramètres de conception. Dans ce chapitre nous avons fourni des informations sur la modélisation probabiliste, nécessaires à la compréhension des méthodes de propagation d'incertitudes. Nous avons défini les variables aléatoires continues, les lois de probabilités, les notions de Moments statistiques, de covariance et d'indépendance des paramètres. Des méthodes de transformations probabilistes ont aussi été introduites.

La propagation d'incertitudes peut avoir plusieurs applications possibles telles que l'analyse de sensibilité et l'analyse d'incertitude. Alors que les méthodes pour réaliser ces deux applications

sont les mêmes, leurs objectifs diffèrent. En effet, l'analyse de sensibilité peut être réalisée au préalable pour diminuer la dimension d'un problème afin d'alléger les calculs. L'analyse d'incertitude permet d'évaluer la robustesse d'un dimensionnement. C'est cette dernière application que nous avons étudiée à travers ce chapitre.

Cinq familles de méthodes de propagation d'incertitudes ont été présentées dans ce chapitre :

1. Les Simulations de Monte-Carlo sur le modèle de dimensionnement exact
2. Les Simulations de Monte-Carlo améliorées par l'utilisation d'un métamodèle ou d'un plan d'expériences
3. La méthode de Propagation of Variance basée sur un développement de Taylor au 1<sup>er</sup> ordre ou au 2<sup>nd</sup> ordre
4. La méthode Dimension Reduction et plus particulièrement Univariate Dimension Reduction présentant un développement du modèle à  $n$  dimensions en somme de fonctions à une dimension
5. La méthode des Polynômes de Chaos

Nous avons proposé une comparaison de ces méthodes sur différents critères relatifs à la théorie et à l'implémentation. Les critères relatifs à la théorie font référence aux mécanismes mathématiques mis en œuvre pour le calcul des variations des performances en fonction des variations des paramètres de conception du modèle. Les critères relatifs à l'implémentation portent sur la facilité de compréhension de la méthode et de sa mise en œuvre, sur le temps de calcul et la précision de ses résultats. Les différentes comparaisons de ces méthodes nous ont permis de choisir d'utiliser la méthode Propagation of Variance pour un développement de Taylor au 2<sup>nd</sup> ordre du modèle de dimensionnement.



# 5. Une approche pour l'optimisation robuste

## 5.1. Introduction

La recherche d'une solution optimale robuste peut être réalisée de deux manières : à la main par essai-erreur (Figure 5.1) ou bien automatisée par un algorithme d'optimisation (Figure 5.2).

En effet, la première démarche possible (Figure 5.1) consiste à trouver une solution qui soit de préférence un optimum global au problème de dimensionnement (modèle de dimensionnement et cahier des charges). La solution obtenue est ensuite analysée pour évaluer sa robustesse en utilisant l'une ou l'autre des méthodes de propagation d'incertitudes présentées au chapitre 4. Dans le meilleur des cas, l'optimum peut se révéler robuste en satisfaisant des critères de faisabilité des contraintes du cahier des charges initial (ces critères sont discutés à la section 3.3.1). Très souvent, l'optimum global n'est pas robuste et le concepteur doit chercher une autre solution puis analyser sa robustesse et ainsi de suite. Cette nouvelle solution peut être un optimum local, une solution quelconque. Il peut aussi trouver une solution autour d'un optimum afin de garantir une certaine performance en termes de fonction objectif. Cette démarche dépend donc entièrement de l'action du concepteur et de sa capacité à anticiper le comportement du modèle de dimensionnement. Elle peut être coûteuse en temps de recherche de solution et en temps d'analyse (selon la méthode choisie). En effet, (Yu-bing, 2010) emprunte cette démarche pour trouver une solution à son problème de dimensionnement d'un conditionnement pour un module multi-puce (Multi-Chip Module packages). La méthode des Simulations de Monte-Carlo est utilisée ce qui augmente le temps d'analyse de solution. D'autre part, cette méthode ne garantit pas d'obtenir la meilleure solution robuste, c'est-à-dire le meilleur compromis possible entre minimisation de la fonction objectif et minimisation de ses variations.

Afin de pallier les inconvénients de cette première démarche pour la conception robuste, nous proposons ici de coupler l'optimisation à la propagation d'incertitudes en une seule étape afin d'automatiser la recherche d'une solution optimale robuste (Figure 5.2). En effet, l'espace de solution est ainsi mieux parcouru que lors d'une recherche manuelle. De plus, la recherche automatique n'est pas influencée par le concepteur et peut donc être de type stochastique ou bien orientée par les caractéristiques du modèle telles que ses dérivées (recherche déterministe).

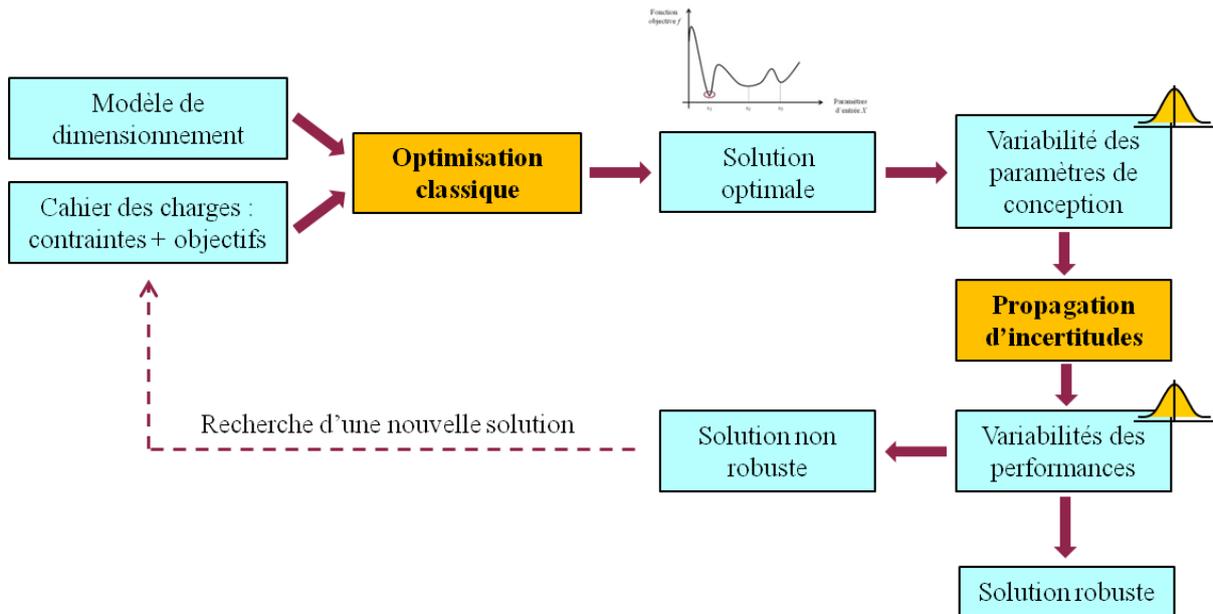


Figure 5.1 - Démarche par essai-erreur

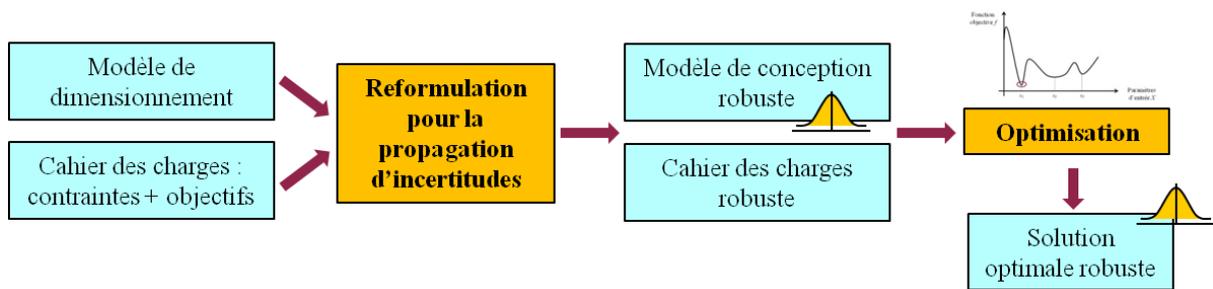


Figure 5.2 - Démarche automatisée par optimisation robuste

Dans la première partie de ce chapitre, nous proposons une méthodologie et des outils pour réaliser cette optimisation robuste (Picheral et al., 2013). Cette démarche est fondée sur trois concepts : la surface de réponse (si nécessaire), la propagation d'incertitudes et l'optimisation. Ayant déjà exposé les méthodes permettant de faire de la propagation d'incertitudes au chapitre précédent, nous développons ici les méthodes permettant d'obtenir une surface de réponse et les différents algorithmes d'optimisation possibles. Deux études de cas sont ensuite proposées afin d'illustrer la mise en œuvre de la démarche d'optimisation robuste adoptée. Le premier exemple porte sur un modèle académique pour le dimensionnement d'un moteur électrique. Le deuxième cas d'étude est le dimensionnement d'un dispositif de déclenchement que l'on trouve dans les disjoncteurs/contacteurs par exemple. Ces exemples de dimensionnement sont multi-physiques (électriques, magnétiques, mécaniques...) et regroupent de nombreuses caractéristiques possibles d'un modèle de dimensionnement industriel (un nombre d'équations et de paramètres de conception réaliste et représentatif de ces problèmes de conception préliminaire, des équations non-linéaires, des équations différentielles,...).

## 5.2. Méthodologie pour l'optimisation robuste

L'approche robuste proposée sur la Figure 5.3 est composée de :

- La modélisation

Le concepteur dispose du modèle de dimensionnement du produit à concevoir en entrée de cette approche ainsi que de son cahier des charges. En effet, l'étape de modélisation ne consiste pas à modéliser le comportement du produit afin de créer son modèle de dimensionnement mais à retravailler le modèle afin de le rendre plus facile d'exploitation. L'approche proposée consiste à coupler une optimisation et une propagation d'incertitudes afin de trouver une solution robuste au problème de dimensionnement. Cependant, l'exécution du modèle initial peut être plus ou moins longue selon ses caractéristiques. Dans le cas où le modèle est rapidement exécuté, il n'est pas nécessaire de le transformer pour accélérer son temps de calcul. Dans le cas contraire, des méthodes de surface de réponse peuvent être appliquées au modèle afin de le transformer en un métamodèle plus rapide à exécuter. Par ailleurs, une étape importante de la modélisation consiste à transformer le cahier des charges initial en cahier des charges robuste de manière à intégrer des contraintes et critères relatifs à la robustesse du produit (transformation détaillée à la section 3.4.).

- La propagation d'incertitudes

Afin de pouvoir mettre en œuvre le cahier des charges robuste, nous avons besoin d'estimer la moyenne et l'écart-type des performances du modèle de dimensionnement ainsi que de la fonction objectif en fonction de la moyenne et de l'écart-type des paramètres de conception. Les méthodes permettant ce calcul sont présentées et comparées au chapitre 4. Grâce à ces méthodes, le modèle initial  $Y = G(X)$  est transformé en modèle dit « robuste »  $(\hat{\mu}_Y, \hat{\sigma}_Y) = G_r(\mu_X, \sigma_X)$ . L'étude des méthodes de propagation d'incertitudes a montré l'efficacité de la méthode Propagation of Variance au 2<sup>nd</sup> ordre pour obtenir ce nouveau modèle. Cette méthode propose l'avantage de calculer de manière analytique les Moments statistiques des performances  $(\hat{\mu}_Y, \hat{\sigma}_Y)$  du modèle de dimensionnement en fonction des Moments des paramètres de conception  $(\mu_X, \sigma_X)$ . Ce calcul peut aussi être réalisé de manière numérique.

- L'optimisation

Plusieurs algorithmes sont disponibles afin de réaliser une optimisation sur la base du cahier des charges robuste. Les algorithmes de type branch and bound basés sur du calcul d'intervalle par exemple peuvent être implémentés uniquement sur un modèle robuste  $G_r$  analytique car ils nécessitent la connaissance des équations du modèle. Le modèle robuste  $G_r$  est analytique si les liens entre les Moments statistiques des performances du modèle de dimensionnement et les Moments des paramètres de conception sont sous la forme d'équations analytiques. Les algorithmes de type stochastiques peuvent être appliqués au modèle robuste  $G_r$  qu'il soit analytique ou numérique.

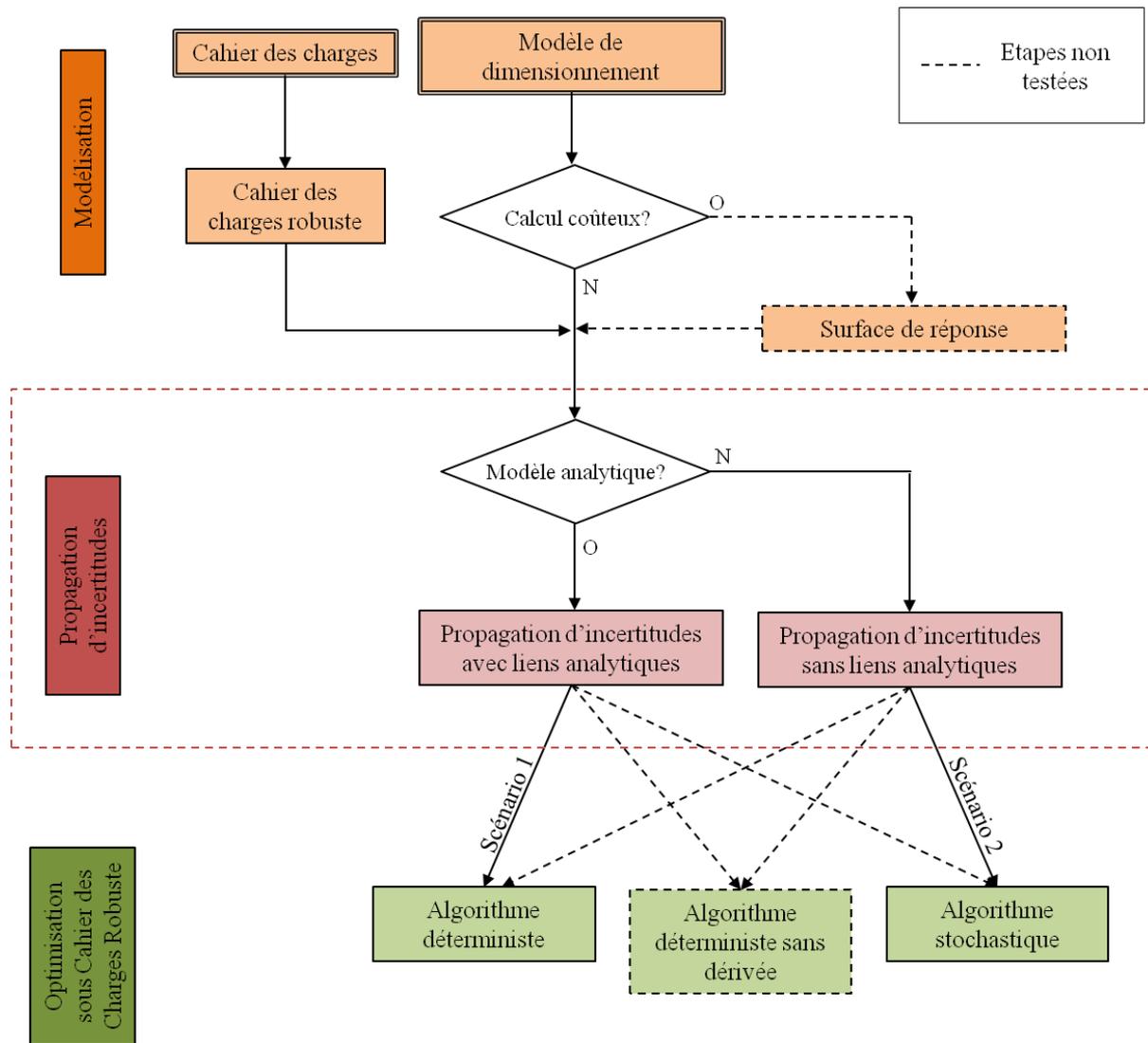


Figure 5.3 - Scénarios pour l'optimisation robuste

Les flèches liant les différentes étapes entre elles représentent les chemins qu'il est possible d'emprunter pour réaliser de l'optimisation robuste selon les conditions imposées par le problème de dimensionnement (modèle de dimensionnement lourd à calculer ou non, analytique ou non). Certaines flèches ou étapes sont en pointillés pour indiquer au lecteur qu'elles n'ont pas été testées à travers les études de cas même si elles ont été étudiées. En effet, nous présentons de manière succincte un état de l'art des différentes méthodes de surface de réponse permettant d'obtenir un métamodèle moins coûteux en termes de temps de calcul. Même si quelques tests ont été réalisés sur des bibliothèques de calcul pour obtenir des surfaces de réponse, ces dernières n'ont pas été implémentées sur les études de cas que nous présentons dans ce travail de thèse. Les algorithmes d'optimisation existants permettant de répondre à notre problème d'optimisation robuste sont présentés, bien que certains d'entre eux ne soient pas non plus utilisés dans les études de cas. Dans ce chapitre, nous n'aborderons pas à nouveau les méthodes de propagation d'incertitudes déjà présentées au chapitre 4.

## 5.2.1. Surfaces de réponse

Les surfaces de réponse sont des métamodèles permettant un calcul plus rapide du modèle de dimensionnement initial (Forrester and Keane, 2009). Le métamodèle est cependant une approximation du modèle initial et donc peut être plus ou moins précis selon la méthode employée. Les surfaces de réponse peuvent être analytiques. C'est le cas d'un développement de Taylor dont les dérivées sont exprimées formellement ou bien avec une régression polynomiale. D'autres méthodes telles que le Krigage ou Radial Basis Function fournissent des métamodèles stochastiques. Nous présentons ces méthodes de surface de réponse dans les sections suivantes.

### 5.2.1.1. Développement polynomial de Taylor

Le développement en polynôme de Taylor du modèle initial peut être réalisé au premier ordre ou aux ordres supérieurs en fonction de la précision requise pour l'approximation. En effet, un modèle de dimensionnement peut être plus ou moins non-linéaire. Augmenter l'ordre du polynôme permet d'améliorer l'approximation des non-linéarités du modèle. Cependant, le développement de Taylor nécessite l'évaluation des dérivées soit, par exemple, le Gradient du modèle pour un développement au premier ordre, le Gradient et le Hessian pour un développement au second ordre et ainsi de suite. Dans certains cas, l'obtention de ces dérivées peut se faire de manière exacte. En revanche, obtenir les dérivées formelles à l'ordre deux ou plus est d'une complexité généralement très grande. L'estimation des dérivées peut alors se faire par différence finie en faisant appel plusieurs fois au modèle.

### 5.2.1.2. Régressions polynomiales

Le modèle approché peut être mis sous une forme polynomiale (Jin et al., 2000) (Vivier, 2002):

$$\tilde{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n b_{ij} x_i x_j + \dots \quad (5.1)$$

où  $(b_0, b_i, b_{ii}, b_{ij} \dots)$  sont les coefficients du polynôme,  $x_i$  sont les paramètres d'entrée et  $n$  est le nombre de paramètres d'entrée.

La première difficulté dans cette méthode est de définir l'ordre du polynôme pour approcher au mieux et à moindre coût le modèle de dimensionnement initial. Un polynôme du premier ordre correspond à une approximation linéaire tandis qu'un polynôme du second ordre correspond à une approximation quadratique. Cette dernière approximation paraît plus judicieuse dans un contexte de pré-dimensionnement de produit où les modèles initiaux sont bien souvent non-linéaires. La seconde difficulté réside dans la détermination des coefficients du modèle. Une méthode connue est celle des moindres carrés (Laurenceau, 2008) (Vivier, 2002). Elle repose cependant sur le choix d'un jeu de points (entrées et sorties) sur l'espace d'étude. Ce jeu de points peut être déterminé par une méthode de plan d'expériences (Vivier, 2002).

### 5.2.1.3. Krigage ou Processus Gaussien

La méthode de Krigage combine une régression polynomiale et une fonction d'interpolation (Laurenceau, 2008) (Jin et al., 2000). Le modèle approché est donc sous la forme suivante :

$$\tilde{Y} = f^t(X)b + Z(X) \quad (5.2)$$

où  $f^t(X)b$  est le polynôme écrit sous forme matricielle obtenu et  $Z(X)$  correspond à l'erreur d'approximation.

Le polynôme est obtenu par régression polynomiale à l'aide de points d'interpolation de la même manière que décrit précédemment. La fonction d'interpolation est introduite dans la méthode de Krigage afin de réduire l'erreur entre le modèle initial et le modèle obtenu par régression polynomiale. Ainsi la fonction  $Z(X)$  est la réalisation d'un processus normalement distribué dont la moyenne est zéro et telle que la variance soit minimale sur l'ensemble des points d'interpolation.

### 5.2.1.4. Radial Basis Function

L'objectif de la méthode Radial Basis Function (Jin et al., 2000) est d'approximer le modèle de dimensionnement initial par une fonction d'interpolation passant par un nombre fini de points d'interpolation par lesquels passe le modèle initial :

$$\tilde{Y} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \phi(\|X - X_i\|) \quad (5.3)$$

où  $\lambda_i$  sont des coefficients fixés par les conditions (5.4),  $m$  est le nombre de points d'interpolation,  $X$  est le vecteur des paramètres d'entrée,  $X_i$  est le vecteur contenant les valeurs de chaque paramètre pour le point d'interpolation d'indice  $i$ ,  $\phi$  est la fonction « radial basis » et peut être choisis parmi plusieurs types de fonction (linéaire, cubique, gaussienne, multi-quadratique...) (Forrester and Keane, 2009).

$$\tilde{Y}(X_i) = Y(X_i), \quad i = 1 \dots m \quad (5.4)$$

### 5.2.1.5. Bilan et positionnement

Les méthodes de surface de réponse permettent l'obtention d'un métamodèle plus rapide à calculer que le modèle initial. Elles sont largement employées dans le cas de modèles de dimensionnement numériques de type éléments finis dont l'exécution consomme du temps (quelques minutes pour les plus petits à des heures ou des jours pour les plus gros modèles). Appliquer une méthode de propagation d'incertitudes sur ces modèles est difficilement faisable au regard du nombre d'appels au modèle nécessaires pour le faire. Une optimisation classique (non robuste) sur ces modèles est aussi impraticable pour la même raison. Des techniques dites

de Space Mapping (Bakr et al., 2001) (Pierquin et al., 2013)(Hage-Hassan et al., 2012) font appel aux surfaces de réponse pour accélérer le temps de réalisation d'une optimisation (principe détaillé dans la section 2.2.2.3).

Les études de cas présentées dans ce travail ne font pas appel à des modèles trop coûteux en termes de temps de calcul. Nous n'avons donc pas utilisé les surfaces de réponse pour diminuer les temps de calcul qui sont presque toujours raisonnables en pré-dimensionnement.

## 5.2.2. Algorithmes d'optimisation

Les algorithmes d'optimisation ont pour objectif de trouver la meilleure solution possible à un problème de dimensionnement selon un cahier des charges. Ils consistent donc à minimiser une ou plusieurs fonctions objectif tout en respectant des contraintes, si elles existent. Les algorithmes minimisant plusieurs fonctions objectif s'appellent algorithmes d'optimisation multicritères ou multi-objectifs, les autres étant monocritères. Dans l'approche pour l'optimisation robuste, nous rappelons que le modèle de dimensionnement à optimiser est ici le modèle transformé portant sur les moyennes et écart-types des paramètres de conception et des performances  $(\hat{\mu}_Y, \hat{\sigma}_Y) = G_r(\mu_X, \sigma_X)$ . Les contraintes et l'objectif suivant lesquels l'optimisation est réalisée sont ceux du cahier des charges robuste décrit à la section 3.4.

### 5.2.2.1. Caractérisation des algorithmes

(Brisset, 2007) propose de classer les algorithmes d'optimisation selon les critères suivants :

- La sensibilité

Le critère de sensibilité concerne « l'influence des conditions initiales ou des paramètres de contrôle de l'algorithme sur l'optimum trouvé » tel que le point de départ fourni à l'algorithme par exemple.

- Les opérateurs de recherche fondamentaux

Les opérateurs de recherche fondamentaux sont au nombre de deux : l'intensification et la diversification. Ils traduisent respectivement la recherche d'un optimum local ou global. On appelle « méthode d'optimisation locale » un algorithme dont la solution trouvée n'est optimale que dans son voisinage. Les algorithmes globaux effectuent une recherche plus étendue en s'intéressant aux zones non explorées.

- Le mode de recherche

Les deux modes de recherche possibles sont les algorithmes déterministes et les algorithmes stochastiques. Les algorithmes déterministes ont l'avantage d'être intelligents puisqu'ils se basent sur des informations issues de la fonction objectif et des contraintes pour s'orienter (dérivées par exemple). Les algorithmes déterministes peuvent être plus rapides, n'utilisant pas le hasard pour la recherche de l'optimum. La particularité des algorithmes déterministes réside dans le fait qu'ils produisent toujours la même solution lorsqu'on les applique plusieurs fois dans les mêmes conditions initiales. On rencontre notamment les algorithmes déterministes suivants : la méthode du gradient, la méthode de Newton, la méthode IBBA (Interval Branch

and Bound Algorithm), la méthode SQP (Sequential Quadratic Programming)... Les algorithmes stochastiques sont basés sur des expériences aléatoires. Ils n'utilisent donc pas des informations du modèle telles que les dérivées pour s'orienter. Le mode de recherche stochastique ne fournit donc pas le même résultat dans les mêmes conditions initiales. Les algorithmes d'optimisation par essais particuliers (Particule Swarm Optimization), recuits simulés (Simulated Annealing) et génétiques font partie des algorithmes d'optimisation stochastiques les plus utilisés.

- L'ordre de la méthode d'optimisation

Enfin l'ordre de la méthode d'optimisation indique si l'algorithme fait appel à la fonction objectif et ses contraintes (ordre zéro), à leur Gradient (ordre un) ou leur Hessien (ordre deux). En conséquence, l'ordre fournit des informations sur la complexité de la mise en œuvre de la méthode.

#### 5.2.2.2. **IBBA, un exemple d'algorithme déterministe global**

La méthode Interval Branch & Bound Algorithm (IBBA) est un exemple d'algorithme d'optimisation déterministe globale (Messine, 2006). La méthode IBBA est basée sur le calcul par intervalles. Elle consiste à décomposer le domaine de recherche de l'optimum en pavés pour y étudier la présence de la solution globale (Figure 5.4). Les pavés ne contenant pas la solution globale sont éliminés au fur et à mesure. Des algorithmes de filtrage sont intégrés dans IBBA pour filtrer l'espace de recherche en éliminant les régions non faisables. Au cours des itérations, le domaine est divisé en pavés de plus en plus petits jusqu'à atteindre une précision fixée par l'utilisateur (critère d'arrêt). Lorsque le critère d'arrêt est atteint, on obtient un encadrement précis de l'optimum global. Cet algorithme a l'avantage de garantir l'encadrement de l'optimum global s'il existe. Il n'est pas non plus sensible au point de départ puisqu'il n'en utilise pas. En revanche, l'algorithme IBBA est d'une complexité exponentielle, c'est-à-dire que le nombre de pavés à explorer augmente considérablement avec le nombre de variables. De plus, la fonction objectif et les contraintes doivent être initialement exprimées de manière analytique afin d'être réécrites en arithmétique d'intervalle. Il est aussi parfois nécessaire de reformuler les équations initiales pour deux raisons (Mazhoud, 2010) : éviter les problèmes de sur-encadrement des intervalles (multi occurrence des paramètres) et faciliter l'optimisation (reformulation de l'équation lorsqu'un paramètre de sortie est fixe).

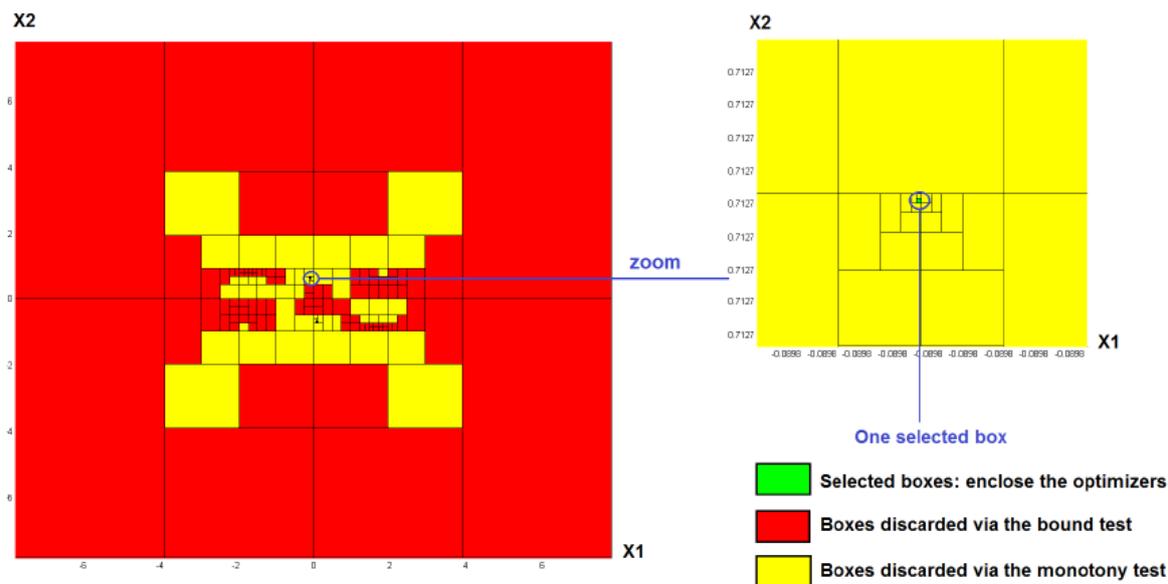


Figure 5.4 - Recherche d'un optimum par un algorithme IBBA (extrait de (Mazhoud, 2010))

### 5.2.2.3. SQP, un exemple d'algorithme déterministe local

La méthode Sequential Quadratic Programming (SQP) est une méthode itérative représentative des algorithmes déterministes d'optimisation locale utilisant les dérivées pour orienter la recherche de solutions (Wilson, 1963) (Han, 1976) (Powell, 1978). Résoudre un problème non-linéaire (NLP) avec l'algorithme SQP consiste à chercher à chaque itération une direction de recherche de solution dans l'espace de recherche en résolvant un sous-problème de type programme quadratique (QP).

La méthode SQP modélise le problème non-linéaire à une itération (c'est-à-dire en un point de l'espace des solutions) par un sous-problème quadratique : fonction objectif quadratique et contraintes linéaires. Ce sous-problème est ensuite résolu. La solution obtenue est alors utilisée comme point pour une nouvelle itération. La suite des points ainsi obtenus converge vers la solution correspondant à un optimum local. Cette méthode nécessite un point de départ faisable et judicieusement choisi pour faciliter la convergence de l'algorithme. La construction du sous-problème quadratique peut être réalisée par un développement de Taylor au 2<sup>nd</sup> ordre. Ce dernier requiert la valeur du Gradient et du Hessian du modèle. Dans la pratique, le Hessian étant très coûteux à évaluer, il est généralement estimé.

La méthode SQP est une méthode déterministe utilisant les informations données par le modèle de dimensionnement pour orienter sa recherche d'optima locaux. L'algorithme SQP est ainsi relativement rapide par rapport à une méthode de type stochastique n'utilisant pas les informations relatives au modèle de dimensionnement. Cette méthode est une méthode locale et la recherche de l'optimum global peut « tomber dans une impasse » et ne pas pouvoir en ressortir. Il faut pour cela trouver un autre point de départ afin d'explorer un nouvel espace de solution.

#### 5.2.2.4. PSO, un exemple d'algorithme stochastique global

La méthode par essaim de particules (PSO) est un algorithme d'optimisation dont le fonctionnement s'inspire du déplacement de vols groupés d'oiseaux (Kennedy and Eberhart, 1995) (Mazhoud et al., 2013). L'algorithme PSO repose sur un ensemble de particules initialisées de façon aléatoire. Cet ensemble de particules va se déplacer dans l'espace de recherche de solution. Chaque particule tend à se diriger vers la meilleure solution rencontrée mais aussi à suivre les autres particules ayant de meilleures performances (Figure 5.5). Au final, l'ensemble des particules converge vers une solution optimale globale. Cette méthode stochastique est basée sur l'aléatoire et ne tire aucune information du modèle telles que les dérivées pour s'orienter. Le modèle à optimiser peut aussi bien être une boîte noire qu'une boîte blanche. Cet algorithme n'a pas non plus besoin de point de départ. Il nécessite cependant le réglage de nombreux paramètres tels que le nombre de particules (choix basé sur l'expérience et des essais), les coefficients cognitif et social, le critère d'arrêt (nombre d'itérations, vitesse minimale...), le facteur d'inertie (diminue en fonction du nombre d'itérations)... Enfin, la méthode PSO nécessite un grand nombre d'itérations, soit un grand nombre d'appels au modèle.

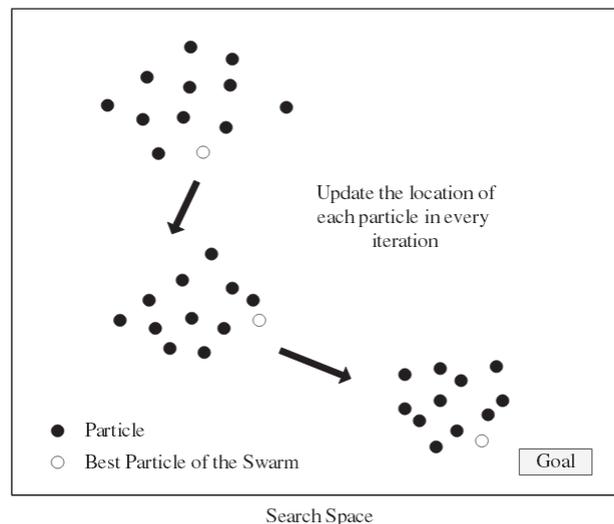


Figure 5.5 - Essaim particulaire en mouvement vers l'optimum (extrait de (Tsai and Kao, 2011))

#### 5.2.2.5. Bilan et positionnement

Les algorithmes d'optimisation sont nombreux et peuvent être classés selon leurs caractéristiques. Les trois algorithmes proposés IBBA, SQP et PSO illustrent différentes caractéristiques possibles. Des outils informatiques sous forme de bibliothèques de calcul sont disponibles et/ou ont été développées au sein de l'équipe afin de réaliser des optimisations utilisant ces trois algorithmes. Nous rappelons que nous cherchons un algorithme adéquat à notre problème d'optimisation robuste. Le modèle de dimensionnement à optimiser (fonction objectif et contraintes) est reformulé par la méthode Propagation of Variance pour obtenir le modèle de dimensionnement robuste dont les paramètres d'entrée sont la moyenne et l'écart-type des paramètres d'entrée du modèle initial, et les paramètres de sortie sont la moyenne et l'écart-type des paramètres de sortie du modèle initial. Le modèle de dimensionnement robuste

(fonction objectif robuste et contraintes robustes) peut être analytique si les dérivées sont exprimées de manière formelle ou exacte. Le lien analytique entre la moyenne et l'écart-type des paramètres d'entrée et la moyenne et l'écart-type des paramètres de sortie peut alors être conservé. Le modèle de dimensionnement robuste peut être numérique si les dérivées sont évaluées par différence finie. Le modèle est alors considéré comme une boîte noire.

L'algorithme IBBA a été implémenté en JAVA (Mazhoud et al., 2012a). Le langage JAVA ne supporte pas la surcharge d'opérateurs sur les intervalles contrairement au langage C++ ou à d'autres langages. Un générateur d'équations en JAVA permettant d'intégrer des opérateurs sur les intervalles est en cours de développement. En attendant, il est nécessaire de reformuler manuellement les équations pour prendre en compte les intervalles. Nous n'avons pas utilisé cet algorithme car cette étape de reformulation s'avère longue et fastidieuse. L'algorithme IBBA actuellement implémenté en JAVA ne prend pas en compte les équations différentielles et comporte des risques de non convergence lorsque la dimension du modèle augmente. Là encore, des travaux d'extension de la méthode au sein de l'équipe sont réalisés pour traiter ces problèmes (Joudrier, 2013). Le modèle de dimensionnement robuste conservant les liens analytiques possède deux fois plus d'équations et de paramètres d'entrée et de sortie que le modèle initial. En conséquence, l'algorithme IBBA n'est pas actuellement utilisable pour réaliser une optimisation robuste.

L'algorithme SQP est disponible dans le logiciel Pro@DESIGN. Il est implémentable uniquement sur le modèle de dimensionnement robuste dont les liens sont analytiques. La première étape consistant à obtenir un modèle de dimensionnement robuste dont les dérivées sont formelles est d'autant plus fastidieuse que le modèle comporte plus d'équations et de paramètres d'entrée. La méthode SQP est donc utilisable pour un modèle de dimensionnement analytique de petite dimension comprenant un nombre d'équations limité.

Enfin, l'algorithme PSO a été implémenté en MATLAB (Mazhoud et al., 2012b)(Mazhoud et al., 2013). Cet algorithme est le plus pratique à mettre en œuvre puisqu'il utilise le modèle comme une boîte noire. Il peut donc s'appliquer sur le modèle de dimensionnement robuste dont les liens sont analytiques ou bien celui dont les liens sont numériques. Les inconvénients étant le nombre élevé d'appels au modèle et le temps de calcul associé.

### **5.3. Etudes de cas**

Nous proposons dans cette section deux études de cas. La première porte sur un modèle académique de dimensionnement d'un moteur électrique. Ce modèle, décrit ci-dessous, est analytique et de petite dimension ce qui permet d'appliquer aussi bien le Scénario 1 que le Scénario 2 (Figure 5.3). La seconde étude de cas porte sur un modèle de dimensionnement d'un contacteur utilisé dans l'industrie. Ce modèle de grande dimension a la particularité de contenir des équations différentielles. Le seul scénario possible étant le Scénario 2, nous l'appliquons pour ensuite discuter les résultats obtenus.

### 5.3.1. Dimensionnement d'un moteur électrique

Nous détaillons dans cette section la première étude de cas concernant le dimensionnement d'un moteur électrique. Le problème initial étant déjà détaillé dans la section 2.2.4, nous introduisons ici le problème de conception robuste (modèle de dimensionnement robuste et cahier des charges robuste). Différents scénarios pour traiter ce problème de conception robuste ont été mis en œuvre. L'approche proposée par le Scénario 1 est présentée dans (Picheral et al., 2011). La première étape du Scénario 1 consiste à obtenir le modèle robuste  $(\hat{\mu}_Y, \hat{\sigma}_Y) = G_r(\mu_X, \sigma_X)$  par la méthode Propagation of Variance au 2<sup>nd</sup> ordre en conservant les liens analytiques entre les Moments statistiques des paramètres de sortie et les Moments des paramètres d'entrée. Pour mettre en œuvre ce scénario, nous exprimons manuellement les dérivées de manière formelle dans les équations pour obtenir la moyenne et l'écart-type de chaque performance. L'étape suivante est l'optimisation par un algorithme déterministe afin d'exploiter au mieux ces liens analytiques pour obtenir rapidement une solution optimale. L'algorithme utilisé est l'algorithme SQP (détaillé section 5.2.2.3) disponible dans le logiciel Pro@DESIGN. Les résultats de l'approche par le Scénario 1 sont détaillés et discutés dans (Picheral et al., 2012). Dans ce qui suit, nous présentons la mise en œuvre et les résultats de l'approche robuste par le Scénario 2. La transformation du problème de conception initial (modèle de dimensionnement et cahier des charges) en problème de conception robuste est expliquée dans la première section. Les différentes caractéristiques des outils mis en œuvre par ce scénario sont ensuite détaillées. Enfin, nous donnons les résultats et les analysons.

#### 5.3.1.1. Du problème initial au problème robuste

Le problème de dimensionnement initial de ce moteur électrique proposé par (Kone et al., 1993) est introduit et détaillé à la section 2.2.4. Ce modèle contient 8 équations non-linéaires et explicites permettant d'évaluer 8 performances du produit. Les paramètres de conception supposés indépendants sont au nombre de 12 dont 8 fixes et 4 libres à optimiser suivant le cahier des charges.

A l'aide de la méthode de propagation d'incertitudes Propagation of Variance au second ordre décrite à la section 4.5.3.2 nous pouvons exprimer la moyenne et l'écart-type des performances en fonction de la moyenne et de l'écart-type des paramètres de conception. En guise d'exemple nous reformulons l'équation du modèle (5.6) à l'aide des équations (4.65) pour exprimer la moyenne de  $J_{cu}$  (5.6) et son écart-type (5.7). Cette transformation est réalisée pour chaque équation du modèle de dimensionnement initial ce qui permet d'obtenir le modèle de dimensionnement robuste. Le modèle robuste contient ainsi deux fois plus de paramètres de conception et de performances que le modèle initial puisque chaque paramètre de conception ou performance est remplacé par sa moyenne et son écart-type. Il contient en conséquence deux fois plus d'équations que le modèle de dimensionnement initial.

$$J_{cu}(E_{ch}, k_r, E) = \sqrt{\frac{E_{ch}}{k_r E}} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \mu_{J_{cu}} \approx & \sqrt{\frac{\mu_{E_{ch}}}{\mu_{k_r} \mu_E}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 J_{cu}}{\partial E_{ch}^2} (\mu_{E_{ch}}, \mu_{k_r}, \mu_E) \right) \sigma_{E_{ch}}^2 \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 J_{cu}}{\partial k_r^2} (\mu_{E_{ch}}, \mu_{k_r}, \mu_E) \right) \sigma_{k_r}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 J_{cu}}{\partial E^2} (\mu_{E_{ch}}, \mu_{k_r}, \mu_E) \right) \sigma_E^2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{J_{cu}}^2 \approx & \left( \frac{\partial J_{cu}}{\partial E_{ch}} (\mu_{E_{ch}}, \mu_{k_r}, \mu_E) \right)^2 \sigma_{E_{ch}}^2 + \left( \frac{\partial J_{cu}}{\partial k_r} (\mu_{E_{ch}}, \mu_{k_r}, \mu_E) \right)^2 \sigma_{k_r}^2 \\ & + \left( \frac{\partial J_{cu}}{\partial E} (\mu_{E_{ch}}, \mu_{k_r}, \mu_E) \right)^2 \sigma_E^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 J_{cu}}{\partial E_{ch}^2} (\mu_{E_{ch}}, \mu_{k_r}, \mu_E) \right)^2 \sigma_{E_{ch}}^4 \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 J_{cu}}{\partial k_r^2} (\mu_{E_{ch}}, \mu_{k_r}, \mu_E) \right)^2 \sigma_{k_r}^4 \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 J_{cu}}{\partial E^2} (\mu_{E_{ch}}, \mu_{k_r}, \mu_E) \right)^2 \sigma_E^4 \\ & + \left( \frac{\partial^2 J_{cu}}{\partial E_{ch} \partial k_r} (\mu_{E_{ch}}, \mu_{k_r}, \mu_E) \right)^2 \sigma_{E_{ch}}^2 \sigma_{k_r}^2 \\ & + \left( \frac{\partial^2 J_{cu}}{\partial E_{ch} \partial E} (\mu_{E_{ch}}, \mu_{k_r}, \mu_E) \right)^2 \sigma_{E_{ch}}^2 \sigma_E^2 \\ & + \left( \frac{\partial^2 J_{cu}}{\partial E \partial k_r} (\mu_{E_{ch}}, \mu_{k_r}, \mu_E) \right)^2 \sigma_E^2 \sigma_{k_r}^2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Le cahier des charges initial est reformulé pour intégrer la robustesse selon l'équation (3.18). Nous avons sélectionné quatre paramètres incertains ( $E$ ,  $e$ ,  $l_a$  et  $\beta$ ), les autres étant fixés. Le cahier des charges robuste est le suivant :

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & f_r = \alpha \cdot \frac{\mu_{V_u}}{\mu_{V_u}^*} + (1 - \alpha) \cdot \frac{\sigma_{V_u}}{\sigma_{V_u}^*} \\
\text{Sous contrainte} \quad & \left\{ \begin{array}{l}
[\mu_D - 3\sigma_D; \mu_D + 3\sigma_D] \subseteq [0.001; 0.5] \\
[\mu_{J_{cu}} - 3\sigma_{J_{cu}}; \mu_{J_{cu}} + 3\sigma_{J_{cu}}] \subseteq [1.0 * 10^5; 1.0 * 10^7] \\
[\mu_{K_f} - 3\sigma_{K_f}; \mu_{K_f} + 3\sigma_{K_f}] \subseteq [0.001; 0.3] \\
[\mu_{B_e} - 3\sigma_{B_e}; \mu_{B_e} + 3\sigma_{B_e}] \subseteq [0.1; 1.0] \\
[\mu_C - 3\sigma_C; \mu_C + 3\sigma_C] \subseteq [0.001; 0.05] \\
[\mu_\lambda - 3\sigma_\lambda; \mu_\lambda + 3\sigma_\lambda] \subseteq [1; 2.5] \\
[\mu_L - 3\sigma_L; \mu_L + 3\sigma_L] \subseteq [0.004; 0.5] \\
[\mu_E - 3\sigma_E; \mu_E + 3\sigma_E] \subseteq [0.001; 0.05] \\
[\mu_e - 3\sigma_e; \mu_e + 3\sigma_e] \subseteq [0.0001; 0.005] \\
[\mu_\beta - 3\sigma_\beta; \mu_\beta + 3\sigma_\beta] \subseteq [0.8; 1.0] \\
[\mu_{l_a} - 3\sigma_{l_a}; \mu_{l_a} + 3\sigma_{l_a}] \subseteq [0.001; 0.05]
\end{array} \right. \quad (5.8) \\
& \left\{ \begin{array}{l}
\sigma_E = 0.0001 \\
\sigma_e = 0.0001 \\
\sigma_\beta = 0.001 \\
\sigma_{l_a} = 0.0001
\end{array} \right.
\end{aligned}$$

### 5.3.1.2. Mise en œuvre du Scénario 2

La fonction objectif  $f_r$  du cahier des charges robuste contient un facteur de pondération  $\alpha$  pouvant varier de 0 à 1. Nous réalisons donc plusieurs optimisations avec différentes valeurs de  $\alpha$  (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9). Ce facteur de pondération permet de choisir à quel élément nous voulons donner de l'importance : minimiser la moyenne du volume  $\mu_{V_u}$  ou minimiser son écart-type  $\sigma_{V_u}$ . Ces deux éléments sont par ailleurs normalisés par leurs valeurs optimales ( $\mu_{V_u}^*$  et  $\sigma_{V_u}^*$ ) afin d'éviter que la moyenne, généralement plus élevée, prenne le dessus sur l'écart-type. Nous réalisons préalablement deux optimisations afin d'obtenir ces valeurs. Dans la première nous minimisons uniquement la moyenne du volume  $\mu_{V_u}$  du contacteur en conservant les contraintes du cahier des charges robuste : le résultat obtenu est  $\mu_{V_u}^*$ . Dans la seconde optimisation, nous minimisons de la même manière l'écart-type du volume  $\sigma_{V_u}$  pour obtenir  $\sigma_{V_u}^*$ .

Dans ce scénario, la propagation d'incertitudes ne conserve pas les liens analytiques entre la moyenne et l'écart-type des performances et la moyenne et l'écart-type des paramètres de conception. Nous estimons alors les dérivées par différence finie dans l'équation de la moyenne (5.6) et dans celle de l'écart-type (5.7) des performances. Le second élément du Scénario 2 est l'optimisation par un algorithme stochastique du modèle robuste obtenu par la propagation d'incertitudes. L'algorithme utilisé est l'algorithme PSO (détaillé section 5.2.2.4) implémenté en MATLAB (Mazhoud et al., 2013).

L'optimisation du modèle robuste sur le cahier des charges robuste (5.8) réalisée par PSO est exécutée avec 4 particules et 50 itérations. Dans ces conditions, 200 exécutions du modèle

robuste sont donc réalisées pour obtenir une solution optimale. Une exécution du modèle robuste nécessite 44 appels au modèle de dimensionnement initial ( $2n^2 + 3n$  avec  $n = 4$  paramètres aléatoires). Enfin, 20 exécutions de l'algorithme PSO sont effectuées à chaque test. Des statistiques sont réalisées à partir de ces 20 résultats (meilleure et pire solution, moyenne et écart-type,...) pour garantir la meilleure solution possible et vérifier la sensibilité de l'algorithme. Le nombre d'appels au modèle de dimensionnement robuste s'élève ainsi à 4000. Nous avons choisi de travailler avec le nombre d'exécutions en termes d'indicateur (indicateur habituellement utilisé pour l'étude des algorithmes stochastiques).

### 5.3.1.3. Résultats et interprétations

Les résultats que nous obtenons pour chaque valeur de  $\alpha$  sont regroupés dans le Tableau 5.1. La valeur de la fonction objectif  $f_r$  est donnée dans la deuxième colonne. La moyenne  $\mu_{V_u}$  et l'écart-type  $\sigma_{V_u}$  du volume des parties utiles (ou fonction objectif initiale) sont fournis dans la deuxième et la troisième colonne. Les valeurs des moyennes des paramètres d'entrée associées sont données dans les colonnes suivantes. Toutes les contraintes sont respectées pour chaque solution optimale.

Tableau 5.1 – Résultats de l'optimisation robuste du volume des parties utiles du moteur électrique

Valeurs de $\alpha$	Fonction objectif robuste			Paramètres de conception			
	$f_r$	$\mu_{V_u}$	$\sigma_{V_u}$	$\mu_\beta$	$\mu_E$	$\mu_{I_a}$	$\mu_e$
0	1.00	6,467E-04	7,080E-06	0.8	0.0038357	0.0056356	0.001
0,1	1.00	6,460E-04	7,081E-06	0.8	0.0043371	0.012162	0.001
0,2	1.01	6,450E-04	7,082E-06	0.8	0.0042435	0.012025	0.001
0,3	1.01	6,440E-04	7,084E-06	0.8	0.0043478	0.011574	0.001
0,4	1.02	6,390E-04	7,123E-06	0.8	0.0043988	0.011248	0.001
0,5	1.06	6,310E-04	7,200E-06	0.86191	0.0040373	0.010258	0.001
0,6	1.02	6,230E-04	7,300E-06	0.8	0.0042439	0.0092089	0.001
0,7	1.02	6,170E-04	7,430E-06	0.8	0.004147	0.0082162	0.001
0,8	1.02	6,120E-04	7,610E-06	0.8	0.0040709	0.0072796	0.001
0,9	1.01	6,090E-04	7,850E-06	0.8	0.0039241	0.0063102	0.001
1	1.00	6,075E-04	8,230E-06	0.8	0.00383307	0.0056394	0.001

La solution pour  $\alpha = 0$  correspond à la minimisation de l'écart-type de  $V_u$  uniquement. Cette solution est considérée comme non-optimale en terme de minimisation de la moyenne, mais robuste. En effet, plus l'écart-type est faible, moins  $V_u$  est sensible aux variations des paramètres d'entrée. Cette solution est non-optimale car la moyenne est la plus élevée  $\mu_{V_u} = 6,467 \cdot 10^{-4}$ . Au contraire, la solution pour  $\alpha = 1$  correspond à la minimisation de la moyenne de  $V_u$  et donne la valeur  $\mu_{V_u} = 6,075 \cdot 10^{-4}$  tandis que l'écart-type est le plus élevé. Une optimisation par le même algorithme d'optimisation PSO sur le modèle de dimensionnement initial (sans robustesse) et sur le cahier des charges initial donne un résultat de  $6,073 \cdot 10^{-4}$  (Mazhoud et al., 2013). Ce résultat permet de vérifier que la solution pour  $\alpha = 1$  est très proche d'une solution optimale pour un problème de conception non-robuste.

D'autre part, les deux paramètres  $\beta$  et  $e$  présentent des moyennes quasiment constantes quelle que soit la valeur de  $\alpha$ . Une analyse de sensibilité du modèle de dimensionnement robuste aurait pu diminuer le nombre de paramètres à 2 ( $E$  et  $l_a$ ) en fixant  $\beta$  à 0.8 et  $e$  à 0.001 et ainsi gagner du temps sur les calculs.

La valeur de la fonction objectif robuste  $f_r$  ne dépend pas de la valeur de  $\alpha$  car elle est constante et égale à 1. Cette valeur s'explique par son expression. En effet, la fonction objectif contient des pondérations de  $\mu_{V_u}$  et  $\sigma_{V_u}$  normalisées l'une et l'autre par leurs valeurs respectives optimales soit  $\mu_{V_u}^* = 6,075 \cdot 10^{-4}$  obtenue pour  $\alpha = 1$  et  $\sigma_{V_u}^* = 7,08010^{-6}$  obtenue pour  $\alpha = 0$ . Cette observation permet de construire le front de Pareto représenté sur la Figure 5.6. Les points représentés sur le front de Pareto sont les meilleures solutions possibles parmi lesquelles il n'est pas possible de décider si une solution est meilleure qu'une autre. En effet, chaque point présente la même valeur pour la fonction objectif.

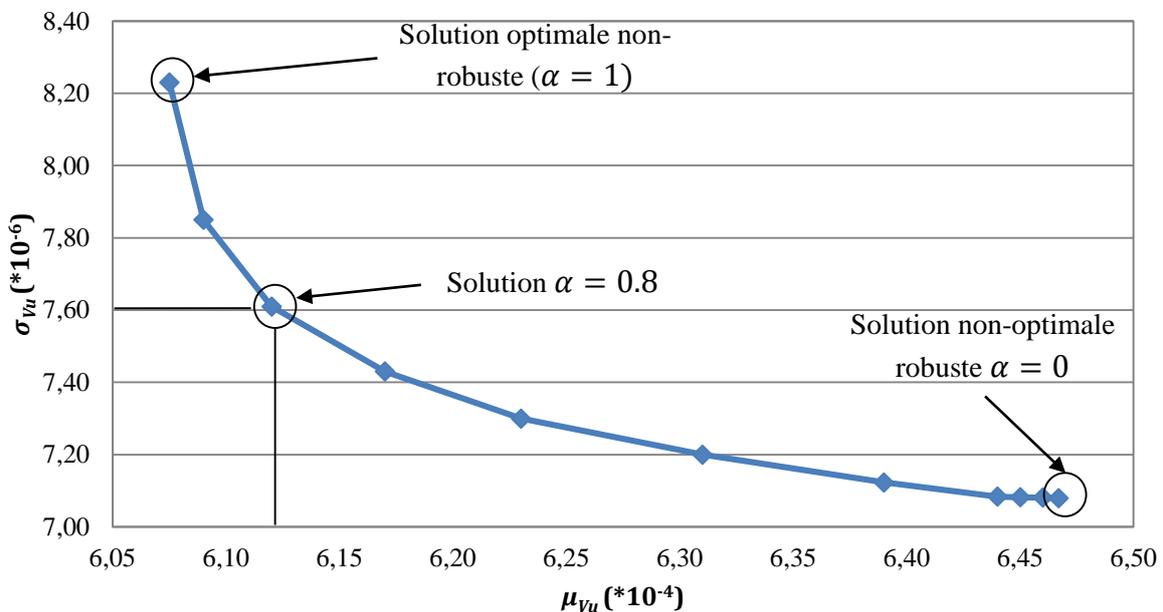


Figure 5.6 - Front de Pareto pour l'optimisation robuste du dimensionnement d'un moteur électrique

Cependant, l'expression de la fonction objectif est une pondération de deux minimisations (minimiser la moyenne de la fonction objectif initiale et minimiser son écart-type). Chaque point est donc un compromis entre la minimisation de volume des parties utiles du moteur et la minimisation de sa dispersion. Plus le volume est minimisé ( $\alpha$  croissant), plus sa dispersion est large. Plus sa dispersion est minimisée ( $\alpha$  décroissant), plus le volume est grand. Plusieurs solutions sont proposées au concepteur qui doit en choisir une en utilisant d'autres critères non introduits dans la fonction objectif.

Une optimisation non-robuste a pour but de minimiser le volume sans prendre en considération sa dispersion. La solution optimale non-robuste à cette optimisation est entourée sur le front de

Pareto (Figure 5.6) avec  $\mu_{V_u opt} = 6,075.10^{-4}$  et  $\sigma_{V_u opt} = 8,230.10^{-6}$ . Prenons l'exemple de la solution correspondant à  $\alpha = 0.8$  avec pour valeurs  $\mu_{V_u} = 6,120.10^{-4}$  et  $\sigma_{V_u} = 7,610.10^{-6}$ . Cette solution conduit à une perte de 0.7% sur la valeur de la moyenne et un gain de 7.5% sur la valeur de l'écart-type par rapport à la solution optimale non-robuste. Elle semble être un bon compromis entre minimiser la moyenne et minimiser l'écart-type de  $V_u$ . Cependant, une exploration et une comparaison de chaque solution doivent être réalisées afin de déterminer le meilleur compromis pour le concepteur en termes de perte sur la moyenne et de gain sur l'écart-type.

Nous proposons dans ce qui suit une piste afin d'aider le concepteur à prendre une décision : le calcul d'un indicateur donnant, pour une solution, l'écart entre la perte sur la moyenne et le gain sur l'écart-type. Nous calculons pour chaque solution la perte normalisée en terme de moyenne  $\mu_{Perte}(\alpha)$  (équation 5.9), et le gain normalisé en terme d'écart-type  $\sigma_{Gain}(\alpha)$  (équation 5.10) par rapport à la solution optimale non-robuste ( $\alpha = 1$ ). Cette solution présente la meilleure moyenne et le pire écart-type, d'où l'utilisation des termes « perte » et « gain ». L'expression de  $\mu_{Perte}(\alpha)$  correspond à la différence entre la valeur optimale de  $\mu_{V_u}$  ( $\mu_{V_u opt}$ ) et la valeur de  $\mu_{V_u}$  pour la solution  $\alpha$  ( $\mu_{V_u}(\alpha)$ ) divisée par la valeur maximale pour cette différence, c'est-à-dire la différence entre la valeur optimale de  $\mu_{V_u}$  et sa pire valeur ( $\mu_{V_u non-opt}$ ). Les valeurs de  $\mu_{Perte}(\alpha)$  et  $\sigma_{Gain}(\alpha)$  sont données dans le Tableau 5.5.

$$\mu_{Perte}(\alpha) = \frac{\mu_{V_u opt} - \mu_{V_u}(\alpha)}{\mu_{V_u opt} - \mu_{V_u non-opt}} \quad (5.9)$$

où  $\mu_{V_u opt}$  est la valeur de  $\mu_{V_u}$  pour  $\alpha = 1$  (solution optimale non-robuste),  $\mu_{V_u non-opt}$  est la valeur de  $\mu_{V_u}$  pour  $\alpha = 0$  (solution non-optimale robuste) et  $\mu_{V_u}(\alpha)$  est la valeur de la moyenne de  $V_u$  pour un  $\alpha$  donné.

$$\sigma_{Gain}(\alpha) = \frac{\sigma_{V_u opt} - \sigma_{V_u}(\alpha)}{\sigma_{V_u opt} - \sigma_{V_u non-opt}} \quad (5.10)$$

où  $\sigma_{V_u opt}$  est la valeur de  $\sigma_{V_u}$  pour  $\alpha = 1$  (solution optimale non-robuste),  $\sigma_{V_u non-opt}$  est la valeur de  $\sigma_{V_u}$  pour  $\alpha = 0$  (solution non-optimale robuste) et  $\sigma_{V_u}(\alpha)$  est la valeur de l'écart-type de  $V_u$  pour un  $\alpha$  donné.

Un index peut être calculé à partir des deux valeurs  $\mu_{Perte}(\alpha)$  et  $\sigma_{Gain}(\alpha)$  tel que  $I = \sigma_{Gain}(\alpha) - \mu_{Perte}(\alpha)$ . Cet index représente pour une solution (une valeur de  $\alpha$ ) la différence entre le gain et la perte réalisés par rapport à la solution optimale. Plus la valeur de cet index est élevée, plus le gain sur l'écart-type de  $V_u$  est important par rapport à la perte sur sa moyenne. L'évolution de ces trois indicateurs est représentée sur la Figure 5.7. Cet indicateur nous amène à choisir la solution  $\alpha = 0.7$  correspondant à l'index maximal.

Tableau 5.2 – Indicateurs pour le choix d'un compromis

Valeurs de $\alpha$	$\mu_{Perte}(\alpha)$	$\sigma_{Gain}(\alpha)$	Index
0	-1,00	1,00	0,00
0,1	-0,98	1,00	0,02
0,2	-0,96	1,00	0,04
0,3	-0,93	1,00	0,07
0,4	-0,80	0,96	0,16
0,5	-0,60	0,90	0,30
0,6	-0,40	0,81	0,41
<b>0,7</b>	<b>-0,24</b>	<b>0,70</b>	<b>0,45</b>
0,8	-0,11	0,54	0,42
0,9	-0,04	0,33	0,29
1	0,00	0,00	0,00

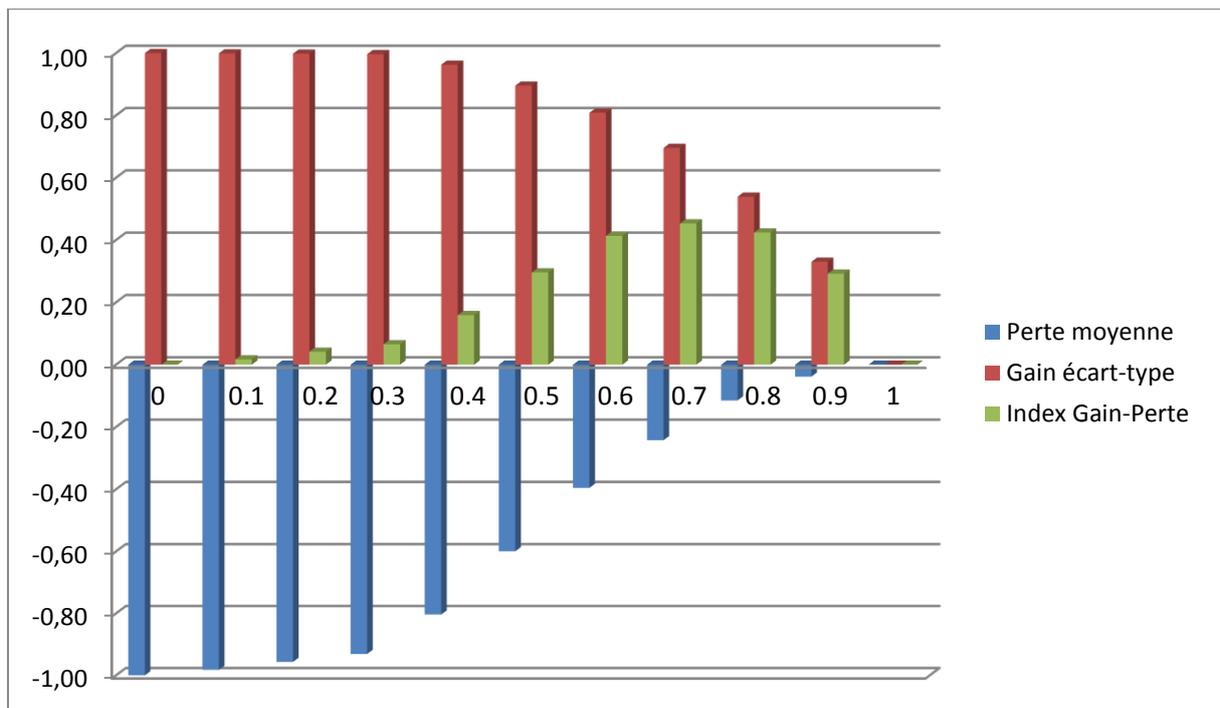


Figure 5.7 – Evolution de  $\mu_{Perte}(\alpha)$ ,  $\sigma_{Gain}(\alpha)$  et de l'Index proposé

#### 5.3.1.4. Bilan de l'étude de cas

Nous avons mis en œuvre le Scénario 2 de l'approche pour la conception robuste proposée sur le dimensionnement d'un moteur électrique. Le modèle de dimensionnement et le cahier des charges de ce problème présentent des caractéristiques permettant d'illustrer et de tester l'approche proposée : peu de paramètres, et un faible nombre d'équations présentant tout de même des non-linéarités.

Le calcul des Moments statistiques des paramètres de sortie en fonction des Moments des paramètres d'entrée ainsi que l'algorithme d'optimisation PSO permettent de mettre en œuvre le cahier des charges robuste afin d'obtenir des solutions au problème de dimensionnement. Ces solutions correspondent à différentes valeurs du facteur de pondération  $\alpha$  de la fonction objectif robuste variant entre 0 et 1 avec un pas de 0.1. Les 11 solutions obtenues sont en réalité des compromis entre la minimisation de la moyenne du volume des parties utiles du moteur et la minimisation de son écart-type. De plus, un index est proposé pour aider le concepteur à choisir le meilleur compromis possible parmi les 11 solutions.

La solution obtenue grâce à cette démarche propose le meilleur compromis entre la minimisation de la moyenne du volume des parties utiles du moteur et la minimisation de sa dispersion. La solution présente donc un volume quasiment minimal et très stable. Enfin, toutes les contraintes robustes ont été respectées au cours de l'optimisation. La solution optimale robuste garantit donc la faisabilité des contraintes initiales lorsque les paramètres de conception sont sujets aux incertitudes.

### **5.3.2. Dimensionnement d'un déclencheur électromécanique**

Le dimensionnement robuste d'un dispositif de déclenchement électromécanique est introduit dans cette section. Ce problème de dimensionnement provient d'une étude antérieure sur un cas industriel. Dans la première partie, nous introduisons le problème de dimensionnement initial, c'est-à-dire sans prendre en compte la robustesse. Le modèle de dimensionnement et le cahier des charges du problème de conception initial sont transformés en modèle robuste et cahier des charges robuste afin d'introduire la variabilité des paramètres incertains. La mise en œuvre du Scénario 2 est décrite puis implémentée. Les résultats issus des tests sont ensuite exposés pour être analysés.

#### **5.3.2.1. Description du problème initial**

Le dispositif étudié est un contacteur permettant d'établir ou d'interrompre la circulation du courant dans un disjoncteur. Le contacteur, représenté sur la Figure 5.8, est composé d'une partie mobile et d'une partie fixe. Ce problème de dimensionnement est multi-physique car il prend en considération des phénomènes électriques, magnétiques et mécaniques. Le problème initial consiste à minimiser l'encombrement en tenant compte des contraintes suivantes :

- Fonctionner sous n'importe quelle tension entre 50 et 400V sans se détruire
- Fermer en moins de 10ms sans se détruire
- Ne pas se détruire en cas de foudre

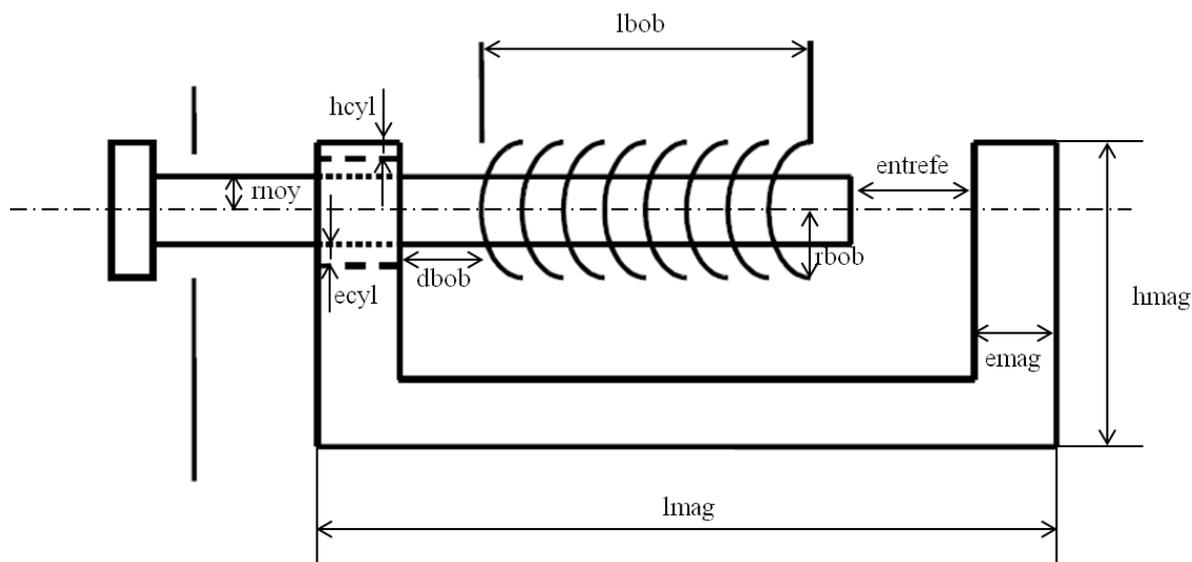


Figure 5.8 - Schéma du dispositif de déclenchement

### Le modèle de dimensionnement

Le modèle de dimensionnement du déclencheur est constitué d'un modèle statique et d'un modèle dynamique. Le modèle est constitué de 37 équations non linéaires, d'un système de 3 équations différentielles et de 25 paramètres d'entrée (Tableau 5.3). Il est fondé sur une modélisation multi-physique de type circuit et une modélisation magnétique de type réseau de perméance.

Tableau 5.3 – Paramètres de conception du modèle de dimensionnement du contacteur

Nom	Définition	Unité
<b>Paramètres géométriques</b>		
<i>entrefe</i>	Valeur de l'entrefer initial côté course	m
<i>hmag</i>	Hauteur globale du circuit magnétique	m
<i>lmag</i>	Longueur du circuit magnétique	m
<i>pmag</i>	Profondeur du circuit magnétique	m
<i>emag</i>	Epaisseur du circuit magnétique	m
<i>rnoy</i>	Rayon du noyau	m
<i>ecyl</i>	Entrefer fixe	m
<i>hcyl</i>	Hauteur de la partie du circuit magnétique située au-dessus du trou de guidage du noyau	m
<i>dbob</i>	Distance entre le début de la bobine et la fin du circuit magnétique du côté fer	m
<i>lbob</i>	Longueur de la bobine	m
<i>rbob</i>	Rayon de la bobine	m
<i>n</i>	Nombre de spires de la bobine	
<i>dcond</i>	Diamètre des conducteurs	m
<b>Paramètres électriques</b>		
<i>eefmax</i>	Tension efficace maximale d'utilisation	V
<i>eefmin</i>	Tension efficace minimale d'utilisation	V

<i>efoudre</i>	Tension de foudre	V
<i>rho</i>	Résistivité du cuivre	$\Omega.m$
<i>frequence</i>	Fréquence	Hz
<b>Paramètres mécaniques</b>		
<i>mfer</i>	Masse volumique du fer	$Kg/m^3$
<i>frac</i>	Force qu'exerce la charge sur le noyau	N
<b>Paramètres magnétiques</b>		
<i>muz</i>	Perméabilité du vide	T.m/A
<i>murel</i>	Perméabilité relative du fer	
<i>Bsat</i>	Induction de saturation	T
<i>taux</i>	Coefficient d'approximation des fuites dans l'entrefer principal	
<i>refui</i>	Reluctance de fuite	A/Wb

Le courant (*i*) n'intervient pas dans les équations du modèle statique. On se place alors au courant maximal dans le cas de tension le plus défavorable. En statique, la position de l'entrefer est considérée égale à sa valeur initiale (*entrefer*). Le modèle statique du dispositif est donc composé des équations (5.11) à (5.39).

- Le courant maximum dans la bobine (*ibobstat*) dans les conditions de tensions les plus défavorables ( $effmin = 50V$ ) :

$$ibobstat = \frac{effmin * \sqrt{2}}{rebob} \quad (5.11)$$

- La perméabilité (*mufer*) :

$$mufer = murel * muz \quad (5.12)$$

- Les reluctances sont obtenues grâce à l'équation générale (5.13). On déduit ainsi la reluctance du noyau avant le trou (*renoy*), la reluctance de l'entrefer cyclique (*recyl*), la reluctance de la première partie verticale de l'armature (*remaga*), la reluctance de la partie horizontale du circuit magnétique (*remagb*), la reluctance de la partie verticale du circuit magnétique (*remagc*), la reluctance de l'entrefer (*reent*), la reluctance du fer (*refer*), la reluctance globale (*reequ*) :

$$Re(\mu, L_0, S) = \frac{L_0}{\mu S} \quad (5.13)$$

où  $\mu$  est la perméabilité,  $L_0$  est la longueur de cheminement, et  $S$  sa section.

$$renoy = \frac{lmag - 2 * emag - z}{mufer * \pi * rnoy^2} \quad (5.14)$$

$$recyl = \frac{ecyl}{muz * \pi * rnoy * emag} \quad (5.15)$$

$$remaga = \frac{hmag - hcyl - 2 * ecyl - 2 * rnoy}{mufer * emag * pmag} \quad (5.16)$$

$$remagb = \frac{lmag - 2 * emag}{mufer * emag * pmag} \quad (5.17)$$

$$remagc = \frac{\left( \sqrt{\frac{((rnoy * taux)^2 + emag^2) * \pi}{2}} + hmag \right)}{-2 * rnoy * taux - 3 * hcyl * \frac{\pi}{4} * \log\left(\frac{pmag}{emag}\right)} \quad (5.18)$$

$$reent = \frac{entrete}{muz * \pi * 4 * rnoy^2 * taux} \quad (5.19)$$

$$refer = renoy + recyl + remaga + remagb + remagc + reent \quad (5.20)$$

$$reequ = \frac{refer * refui}{refer + refui} \quad (5.21)$$

- L'inductance dans la bobine (*inbob*) :

$$inbob = \frac{n^2}{reequ} \quad (5.22)$$

- La résistance de la bobine (*rebob*) :

$$rebob = \frac{8 * rho * n * (rnoy + rbob)}{2 * dcond^2} \quad (5.23)$$

- La force exercée par le noyau (*force*) s'exprime à partir du flux total dans l'entrefer (*phi*) :

$$phi(i, z) = \frac{n * i}{refer} \quad (5.24)$$

$$force = \frac{phi^2}{2 * muz * \pi * rnoy^2} \quad (5.25)$$

- La masse du noyau (*masse*)

$$masse = mfer * \pi * rnoy^2 * lmag \quad (5.26)$$

- Les contraintes géométriques telles que la distance entre la bobine et le circuit magnétique du côté de l'entrefer mobile (*cun*), la distance entre la bobine et le circuit magnétique dans le sens de la hauteur (*cdeux*) et la différence entre la section efficace de cuivre et la section disponible (*ctrois*) doivent être positives et sont calculées à partir de la surface efficace (*seff*) et de la section dont dispose la bobine (*stot*) :

$$seff = \frac{n * \pi * dcond^2}{4} \quad (5.27)$$

$$stot = (rbob - rnoy) * lbob \quad (5.28)$$

$$cun = lmag - lbob \quad (5.29)$$

$$cdeux = hmag - hcyl - ecyl - rnoy - rbob \quad (5.30)$$

$$ctrois = stot - seff \quad (5.31)$$

- Les contraintes électriques sont basées sur le calcul du courant maximum lorsque la tension est maximum (*imax*), la densité de courant correspondant (*dens*), et la tension maximale entre deux spires quand la bobine est soumise à la tension de foudre (*vmax*) :

$$imax = \frac{eeffmax}{rebob} \quad (5.32)$$

$$dens = \frac{4 * imax}{dcond^2 * \pi} \quad (5.33)$$

$$vmax = \frac{lbob * efoudre}{dcond * n} \quad (5.34)$$

- La contrainte magnétique concerne l'induction magnétique (*bnoystat*) pour empêcher d'aller en saturation :

$$bnoystat = \frac{\phi(ibobstat, entrefe)}{\pi * rnoy^2} \quad (5.35)$$

- La fonction objectif portant sur l'encombrement du contacteur (*volume*) est calculée à partir de la longueur (*longue*), de la largeur (*largeur*) et de la hauteur (*hauteur*) du dispositif :

$$longue = lmag \quad (5.36)$$

$$largeur = \max(pmag, 2 * rbob) \quad (5.37)$$

$$hauteur = hmag - hcyl - ecyl - rnoy + rbob \quad (5.38)$$

$$volume = longue * largeur * hauteur \quad (5.39)$$

Contrairement au modèle statique, le courant et l'entrefer sont variables dans le modèle dynamique du dispositif. Les équations physiques intervenant dans la modélisation dynamique de ce dispositif sont basées sur la loi de comportement électrique et la loi de comportement mécanique (5.40). Ces deux équations ne sont pas utilisables en l'état et doivent subir des transformations non détaillées dans ce rapport. Le résultat associé à ces équations différentielles est la valeur de la position de l'entrefer ( $z_{tferm}$ ) à l'instant  $tferm$  auquel nous souhaitons que le dispositif soit fermé (5.41).

$$\begin{cases} U(t) = Ri(t) + \frac{d}{dt}(L(i, z) * i(t)) \\ m \frac{d^2z}{dt^2} = F(i, z) \end{cases} \quad (5.40)$$

où  $i$  est le courant dans la spire,  $z$  est la longueur de l'entrefer,  $R$  est la résistance de la bobine,  $L$  est l'inductance de la bobine,  $m$  est la masse du noyau et  $F$  est la force globale exercée sur le noyau comprenant la force magnétique, la charge, le frottement...

$$z - tferm = z(tferm) \quad (5.41)$$

### **Le cahier des charges**

Le cahier des charges initial du produit (5.42) correspondant à un besoin du client consiste à minimiser le volume  $V$  associé à l'encombrement du dispositif en respectant les contraintes de type borne sur les performances et les paramètres de conception variables. Les valeurs des paramètres de conception fixes sont regroupées dans le Tableau 5.4.

$$\begin{array}{l}
 \text{Min} \\
 \\
 \text{Sous contrainte}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 V \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 cun \in [0.001; 0.01] \\
 ctrois \in [1.10^{-6}; 1.10^{-4}] \\
 z_tferm \in [-0.05; 0.0] \\
 cdeux \in [0.001; 0.01] \\
 dens \in [1.10^8; 2.10^8] \\
 bnoystat \in [0.0; 1.4] \\
 vmax \in [100; 1750] \\
 rbob \in [0.003; 0.01] \\
 lmag \in [0.001; 0.05] \\
 dcond \in [0.0001; 0.0005] \\
 lbob \in [0.001; 0.05] \\
 n \in [1000; 8000] \\
 rnoy \in [0.001; 0.005] \\
 pmag \in [0.005; 0.05] \\
 emag \in [0.0006; 0.001] \\
 hcyl \in [0.001; 0.008] \\
 hmag \in [0.001; 0.05]
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \quad (5.42)$$

Tableau 5.4 – Valeur des paramètres de conception fixes

Paramètre	Valeur fixe
<i>murel</i>	1400
<i>efoudre</i>	6000
<i>refui</i>	$1.0 * 10^9$
<i>eefmax</i>	400
<i>rho</i>	$0.1724 * 10^{-7}$
<i>dbob</i>	0.001
<i>eefmin</i>	50
<i>freac</i>	0.75
<i>precision</i>	$1.0 * 10^{-4}$
<i>tferm</i>	0.01
<i>entreffe</i>	0.002
<i>mfer</i>	12000
<i>t</i>	0
<i>ecyl</i>	$0.6 * 10^{-3}$
<i>taux</i>	1.2
<i>muz</i>	$0.1257 * 10^{-5}$
<i>Bsat</i>	1.4

### 5.3.2.2. Description du problème robuste

Le modèle de dimensionnement initial est reformulé de la même manière que pour le problème de dimensionnement du moteur électrique (reformulation détaillée à la section 5.3.1.1). En effet, la méthode Propagation of Variance au 2<sup>nd</sup> ordre est utilisée pour réaliser la propagation d'incertitudes et obtenir le modèle de dimensionnement robuste. Elle nécessite le calcul du gradient et du Hessien du modèle de dimensionnement initial. Le modèle robuste contient ainsi deux fois plus de paramètres de conception et de performances que le modèle initial puisque chaque paramètre de conception ou performance est remplacé par sa moyenne et son écart-type. Il contient en conséquence deux fois plus d'équations que le modèle de dimensionnement initial.

Le cahier des charges initial est transformé de manière à prendre en compte les incertitudes sur les paramètres de conception. Dix paramètres de conception sont sujets aux incertitudes, qui sont pour la plupart des propriétés géométriques du déclencheur ou des propriétés du matériau (*dcond*, *emag*, *hcyl*, *hmag*, *lbob*, *lmag*, *n*, *pmag*, *rbob*, *rnoy*). Le cahier des charges robuste est le suivant :

Min

$$\alpha \cdot \frac{\mu_V}{\mu_{V^*}} + (1 - \alpha) \cdot \frac{\sigma_V}{\sigma_{V^*}}$$

Sous contrainte

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mu_{cun} - 3\sigma_{cun}; \mu_{cun} + 3\sigma_{cun}] \subseteq [0.001; 0.01] \\ [\mu_{ctrois} - 3\sigma_{ctrois}; \mu_{ctrois} + 3\sigma_{ctrois}] \subseteq [1.10^{-6}; 1.10^{-4}] \\ [\mu_{z_tferm} - 3\sigma_{z_tferm}; \mu_{z_tferm} + 3\sigma_{z_tferm}] \subseteq [-0.05; 0.0] \\ [\mu_{cdeux} - 3\sigma_{cdeux}; \mu_{cdeux} + 3\sigma_{cdeux}] \subseteq [0.001; 0.01] \\ [\mu_{dens} - 3\sigma_{dens}; \mu_{dens} + 3\sigma_{dens}] \subseteq [1.10^8; 2.10^8] \\ [\mu_{bnoystat} - 3\sigma_{bnoystat}; \mu_{bnoystat} + 3\sigma_{bnoystat}] \subseteq [0.0; 1.4] \\ [\mu_{vmax} - 3\sigma_{vmax}; \mu_{vmax} + 3\sigma_{vmax}] \subseteq [100; 1750] \\ [\mu_{rbob} - 3\sigma_{rbob}; \mu_{rbob} + 3\sigma_{rbob}] \subseteq [0.003; 0.01] \\ [\mu_{lmag} - 3\sigma_{lmag}; \mu_{lmag} + 3\sigma_{lmag}] \subseteq [0.001; 0.05] \\ [\mu_{dcond} - 3\sigma_{dcond}; \mu_{dcond} + 3\sigma_{dcond}] \subseteq [0.0001; 0.0005] \\ [\mu_{lbob} - 3\sigma_{lbob}; \mu_{lbob} + 3\sigma_{lbob}] \subseteq [0.001; 0.05] \\ [\mu_n - 3\sigma_n; \mu_n + 3\sigma_n] \subseteq [1000; 8000] \\ [\mu_{rnoy} - 3\sigma_{rnoy}; \mu_{rnoy} + 3\sigma_{rnoy}] \subseteq [0.001; 0.005] \\ [\mu_{pmag} - 3\sigma_{pmag}; \mu_{pmag} + 3\sigma_{pmag}] \subseteq [0.005; 0.05] \\ [\mu_{emag} - 3\sigma_{emag}; \mu_{emag} + 3\sigma_{emag}] \subseteq [0.0006; 0.001] \\ [\mu_{hcyl} - 3\sigma_{hcyl}; \mu_{hcyl} + 3\sigma_{hcyl}] \subseteq [0.001; 0.008] \\ [\mu_{hmag} - 3\sigma_{hmag}; \mu_{hmag} + 3\sigma_{hmag}] \subseteq [0.001; 0.05] \end{array} \right. \quad (5.43)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{dcond} = 1,0.10^{-6} \\ \sigma_{emag} = 1,0.10^{-5} \\ \sigma_{hcyl} = 1,0.10^{-5} \\ \sigma_{hmag} = 1,0.10^{-4} \\ \sigma_{lbob} = 1,0.10^{-5} \\ \sigma_{lmag} = 1,0.10^{-5} \\ \sigma_n = 10 \\ \sigma_{pmag} = 1,0.10^{-5} \\ \sigma_{rbob} = 1,0.10^{-5} \\ \sigma_{rnoy} = 1,0.10^{-5} \end{array} \right.$$

### 5.3.2.3. Mise en œuvre de Scénario 2

Le modèle de dimensionnement initial est de grande dimension (27 paramètres de conception dont 10 paramètres aléatoires) et il contient de nombreuses équations dont des équations différentielles. Le Scénario 2 proposé sur la Figure 5.3 est le scénario le plus approprié puisqu'il considère le modèle comme une boîte noire en estimant les dérivées contenues dans le modèle robuste par différence finie. En effet, les caractéristiques du modèle de dimensionnement initial rendent l'écriture formelle des dérivées impossible. Ainsi, la propagation d'incertitudes ne conservant pas les liens analytiques entre les Moments statistiques des performances et les

Moments des paramètres de conception est réalisée utilisant la méthode Propagation of Variance au 2<sup>nd</sup> ordre. Suite à cela, le modèle robuste est optimisé par l'algorithme stochastique PSO (détaillé section 5.2.2.4) implémenté en MATLAB (Mazhoud et al., 2013).

La fonction objectif du cahier des charges robuste contient un facteur de pondération  $\alpha$  pouvant varier de 0 à 1. Nous réalisons plusieurs optimisations avec différentes valeurs de  $\alpha$ . Comme nous l'avons présenté dans l'étude de cas précédente, ce facteur de pondération permet de choisir à quel élément nous voulons donner de l'importance : minimiser la moyenne du volume  $\mu_V$  ou minimiser son écart-type  $\sigma_V$ . Ces deux éléments sont par ailleurs normalisés par leurs valeurs optimales ( $\mu_V^*$  et  $\sigma_V^*$ ) afin d'éviter que la moyenne, généralement plus élevée, ne prenne le dessus sur l'écart-type. Nous réalisons donc préalablement deux optimisations pour obtenir ces valeurs. Dans la première, nous minimisons uniquement la moyenne du volume  $\mu_V$  du contacteur en conservant les contraintes du cahier des charges robuste : le résultat obtenu est  $\mu_V^*$ . Dans la seconde optimisation, nous minimisons de la même manière l'écart-type du volume  $\sigma_V$  pour obtenir  $\sigma_V^*$ .

Une première optimisation robuste est réalisée. Le détail de cette optimisation et les résultats sont présentés dans la section suivante. Des résultats non-cohérents nous amènent à réaliser une seconde optimisation en modifiant les paramètres de l'algorithme. Nous présentons et discutons les nouveaux résultats et les interprétations possibles dans la section d'après.

#### 5.3.2.4. Résultats pour PSO : 20 particules, 50 itérations et 20 exécutions

Une première optimisation du modèle robuste sur le cahier des charges robuste (5.43) réalisée par PSO est exécutée avec 20 particules et 50 itérations. Dans ces conditions, 1000 exécutions du modèle robuste sont donc réalisées pour obtenir une solution. Une exécution du modèle robuste nécessite 230 appels au modèle de dimensionnement initial ( $2n^2 + 3n$  avec  $n = 10$  paramètres aléatoires). Enfin, 20 exécutions de l'algorithme PSO sont effectuées à chaque test. Des statistiques sont réalisées à partir de ces 20 résultats (meilleure et pire solution, moyenne et écart-type,...) pour garantir la meilleure solution possible et vérifier la sensibilité de l'algorithme. Le nombre d'appels au modèle de dimensionnement robuste s'élève ainsi à 20000. Avec les moyens informatiques mis à notre disposition, environ 1 jour est nécessaire pour réaliser une optimisation pour un facteur de pondération  $\alpha$  fixé. Nous réalisons donc des optimisations pour 6 valeurs de  $\alpha$  (0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1).

Les résultats de l'optimisation sont donnés dans le Tableau 5.5. De même que pour l'étude de cas précédente, la valeur de la fonction objectif robuste est quasiment constante et égale à 1 ce qui permet de dessiner un front de Pareto. Cependant, les valeurs de  $\mu_V$  et  $\sigma_V$  du Tableau 5.5 ne sont pas cohérentes avec l'expression de la fonction objectif. En effet, la valeur de  $\sigma_V$  pour  $\alpha = 0$  devrait être la valeur minimale des valeurs de  $\sigma_V$ . De plus, les valeurs de  $\sigma_V$  devraient augmenter lorsque  $\alpha$  croît. De la même manière, la valeur de  $\mu_V$  pour  $\alpha = 1$  devrait être la valeur minimale des valeurs de  $\mu_V$ . Les valeurs de  $\mu_V$  devraient augmenter lorsque  $\alpha$  décroît. Or aucune des constatations précédentes n'est vérifiée dans ce tableau.

Tableau 5.5 – Résultats de l’optimisation robuste d’un dispositif de déclenchement par PSO avec 20 particules, 50 itérations et 20 exécutions

Valeurs de $\alpha$	Fonction objectif robuste		
	$f_r$	$\mu_V$	$\sigma_V$
0	1.00	1,722E-06	1,491E-08
0,2	1.13	2,147E-06	1,652E-08
0,4	1.12	2,488E-06	1,380E-08
0,6	1.01	1,756E-06	1,532E-08
0,8	1.03	1,765E-06	1,704E-08
1	1.02	1,771E-06	2,136E-08

Les résultats laissent penser que l’algorithme d’optimisation PSO s’est arrêté de chercher avant d’atteindre la valeur optimale pour un  $\alpha$  donné. Pour ce problème de dimensionnement contenant 10 paramètres aléatoires, l’espace des solutions n’est peut-être pas suffisamment balayé de sorte que les valeurs optimales que nous croyons avoir trouvées pour chaque valeur de  $\alpha$  ne sont pas réellement optimales. Ainsi, une explication possible à l’incohérence de ces résultats est le manque de particules et/ou le manque d’itérations en entrée de l’algorithme d’optimisation PSO. Le nombre de particules représente la population de points dont la position est mise à jour à chaque itération. Le déplacement des particules dépend de paramètres tels que la position de la meilleure particule et de la vitesse de la particule. Le nombre d’itérations détermine le critère d’arrêt de l’algorithme. Nous proposons donc de réaliser une nouvelle optimisation en augmentant simultanément le nombre de particules et le nombre d’itérations.

### 5.3.2.5. Résultats pour PSO : 30 particules, 200 itérations et 20 exécutions

Une deuxième optimisation du modèle de dimensionnement robuste sur le cahier des charges robuste réalisée par PSO est exécutée avec cette fois-ci 30 particules et 200 itérations. Dans ces conditions, 6000 exécutions du modèle robuste sont donc réalisées pour obtenir une solution. 20 exécutions de l’algorithme PSO sont effectuées. Le nombre d’appels au modèle de dimensionnement robuste s’élève ainsi à 120 000. Environ 7 jours sont nécessaires pour réaliser une optimisation pour un facteur de pondération  $\alpha$  fixé. En parallélisant les optimisations sur plusieurs machines, nous réalisons des optimisations pour 6 valeurs de  $\alpha$  (0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1).

Les résultats de l’optimisation sont donnés dans le Tableau 5.6. Les valeurs obtenues pour la moyenne  $\mu_V$  et pour l’écart-type  $\sigma_V$  du volume pour  $\alpha = 0.2$  et pour  $\alpha = 0.8$  ne sont pas cohérentes. D’autre part, la valeur de  $\mu_V$  pour  $\alpha = 1$  devrait être la valeur minimale des valeurs obtenues. Or la valeur de  $\mu_V$  pour  $\alpha = 0.6$  est la plus faible. Cependant, la valeur minimale de  $\sigma_V$  est obtenue pour  $\alpha = 0$ . Les valeurs de  $\sigma_V$  sont bien croissantes lorsque  $\alpha$  augmente en faisant abstraction des valeurs incohérentes ( $\alpha = 0.2$  et  $\alpha = 0.8$ ).

Tableau 5.6 - Résultats de l'optimisation robuste d'un dispositif de déclenchement par PSO avec 30 particules, 200 itérations et 20 exécutions

Valeurs de $\alpha$	Fonction objectif robuste		
	$f_r$	$\mu_V$	$\sigma_V$
0	1.00	1,989E-06	1,215E-08
0,2	1.09	2,485E-06	2,829E-08
0,4	1.06	1,692E-06	1,326E-08
0,6	1.04	1,625E-06	1,386E-08
0,8	1.24	1,912E-06	1,941E-08
1	1.02	1,636E-06	1,786E-08

### 5.3.2.6. Comparaison des résultats et bilan de l'étude de cas

Les valeurs obtenues avec 30 particules et 200 itérations présentent une légère évolution par rapport aux valeurs obtenues précédemment avec 20 particules et 50 itérations. En effet, cette augmentation du nombre de particules et d'itérations a permis d'obtenir des valeurs plus faibles en moyenne pour  $\mu_V$ . L'algorithme s'est ainsi rapproché de la solution optimale pour une valeur de  $\alpha$  donnée. En effet, une optimisation du modèle de dimensionnement initial sous un cahier des charges initial par le même algorithme PSO avec 100 particules et 50 itérations donne une valeur pour le volume de  $1,468 \cdot 10^{-6}$  (Mazhoud et al., 2012b).

Réaliser à nouveau ces calculs en augmentant encore une fois le nombre de particules et le nombre d'itérations pourraient confirmer ou infirmer cette tendance à se rapprocher de l'optimum. Cependant, quelques semaines seraient nécessaires à la réalisation de ces calculs.

Le modèle de dimensionnement présente à l'origine un grand nombre de paramètres et d'équations non-linéaires ayant la particularité de contenir des équations différentielles. Lors de sa transformation en modèle de dimensionnement robuste, le nombre de paramètres et le nombre d'équations sont multipliés par deux augmentant ainsi le temps, déjà conséquent, d'une exécution du modèle. Deux transformations peuvent diminuer le temps d'une optimisation robuste, dans le cas où une exécution du modèle est trop coûteuse en temps de calcul : l'analyse de sensibilité et la surface de réponse. L'analyse de sensibilité sur le modèle robuste permet de diminuer sa dimension en fixant les paramètres les moins influents (principe détaillé à la section 4.4). L'utilisation d'un modèle approché du modèle de dimensionnement initial par une méthode de surface de réponse a pour objectif de diminuer le temps pour une exécution de modèle (principe et méthodes détaillés à la section 5.2.1). Ces deux transformations ne sont pas testées dans ce travail de thèse.

## 5.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé et présenté une nouvelle approche pour l'optimisation robuste. Le Scénario 2 mis en œuvre et testée sur deux études de cas consiste à coupler une propagation d'incertitudes à l'algorithme d'optimisation de type stochastique. L'utilisation de la méthode Propagation of Variance au 2<sup>nd</sup> ordre pour la propagation d'incertitudes présente l'avantage de fournir des résultats précis en peu de temps. L'algorithme d'optimisation PSO est un algorithme d'optimisation global et stochastique, ne nécessitant pas la recherche d'un point de départ.

Les contraintes du cahier des charges robuste permettent de garantir une certaine faisabilité des contraintes du cahier des charges initial. Cette faisabilité est basée sur le principe Six Sigma. La fonction objectif du cahier des charges robuste permet de trouver différents compromis, c'est-à-dire différentes solutions optimales, possibles entre minimiser la moyenne de la fonction objectif du cahier des charges initial et minimiser son écart-type.

Le premier exemple sur lequel nous avons mis l'approche robuste en œuvre présente de bons résultats. En effet, les différents compromis obtenus sont cohérents. Nous avons de plus proposé un index permettant de comparer les compromis afin de choisir la solution optimale robuste à utiliser pour dimensionner le moteur électrique. Cependant, ce modèle de dimensionnement reste un modèle académique présentant seulement une dizaine de paramètres et une dizaine d'équations, non-linéaires et sans équation différentielle.

Nous avons mis en œuvre cette même approche sur un modèle de dimensionnement plus complexe afin de tester cette méthode sur un exemple représentatif des cas rencontrés dans l'industrie. Le modèle de dimensionnement du contacteur présente ainsi 37 équations non-linéaires, un système de 3 équations différentielles et 25 paramètres d'entrée. Le modèle de dimensionnement robuste sur lequel est implémenté l'algorithme d'optimisation PSO comporte deux fois plus d'équations (calcul de la moyenne et de l'écart-type des paramètres de sortie) et deux fois plus de paramètres de conception (moyenne et écart-type). Les tests réalisés dans ce chapitre montrent la complexité de la mise en œuvre de l'approche proposée dans le cas d'un modèle de grande taille. En effet, l'algorithme d'optimisation PSO doit utiliser un plus grand nombre de particules et d'itérations lorsque la complexité du modèle augmente (plus grande dimension, non-linéarités, équations différentielles,...). Or, accroître le nombre de particules et le nombre d'itérations a un coût considérable. Une optimisation avec 30 particules, 200 itérations et 20 exécutions nécessite déjà une semaine et ne paraît pas suffisant pour obtenir des résultats fiables et précis. Nous avons proposé deux transformations afin de diminuer le temps d'une optimisation robuste, l'analyse de sensibilité et la surface de réponse. Ces deux transformations n'ont pas été testées dans ce travail de thèse mais constituent de réelles perspectives.



## 6. Conclusion générale et perspectives

### Conclusion

Le travail présenté dans cette thèse a pour objectif de proposer une nouvelle approche pour la conception robuste et optimale de produit dans un contexte de pré-dimensionnement. Cette approche vise à définir une solution robuste au problème de dimensionnement en terme à la fois de stabilité d'une fonction objectif de la faisabilité des contraintes du modèle. Certaines approches pour la conception robuste rencontrées dans la littérature sont développées pour des problèmes de conception spécifiques. D'autres approches, plus générales, sont très coûteuses en temps de calcul. Bien souvent, la recherche d'une solution robuste se fait par une démarche d'analyse de type essai-erreur dépendant du savoir faire du concepteur. Cette démarche ne garantit pas une exploration complète et automatique de l'espace des solutions robustes et encore moins lorsqu'il faut rechercher l'optimum robuste.

Notre proposition de méthodologie s'articule autour de trois apports principaux permettant l'automatisation de la démarche pour une meilleure exploration de l'espace des solutions et un gain de temps considérable.

Le premier apport est la formulation mathématique des contraintes et fonctions objectif du problème intégrant la notion de robustesse dans un cahier des charges d'un produit. En effet, dans le chapitre 3, nous avons proposé une discussion autour de la robustesse d'un produit et les moyens de la prendre en compte dans la phase de pré-dimensionnement. Différentes formulations d'un cahier des charges dit robuste ont été exposées et comparées. Nous avons proposé enfin d'utiliser une fonction bi-objectif robuste permettant à la fois d'optimiser la moyenne et de minimiser l'écart-type de la fonction objectif initiale avec l'introduction d'un coefficient de pondération. Minimiser la moyenne permet d'obtenir un dimensionnement de produit dont la performance est réalisable et optimale vis-à-vis du cahier des charges initial. Minimiser son écart-type quant à lui, offre un dimensionnement avec d'une part le maintien de la faisabilité des solutions et d'autre part un niveau de stabilité de la performance (fonction objectif dans ce cas). Ces deux objectifs sont regroupés et pondérés dans la fonction objectif dite robuste. Nous avons également proposé une formulation robuste pour les contraintes du cahier des charges basée sur le principe de Six Sigma afin de garantir leur faisabilité sous incertitudes. Ce nouveau cahier des charges robuste est testé dans le chapitre 5 et des outils supplémentaires sont fournis pour déterminer le meilleur compromis possible entre optimiser la performance et minimiser sa variation.

Le second apport est le choix d'une méthode pour la propagation d'incertitudes parmi de nombreuses méthodes issues de la littérature. Nous rappelons que le cahier des charges robuste du produit nécessite l'évaluation de la moyenne et de l'écart-type de la fonction objectif initiale et des contraintes du modèle. Il s'agit donc de déterminer une méthode de propagation d'incertitudes permettant de calculer ou d'estimer ces moyennes et ces écarts-types de manière rapide et précise. Une étude comparative et complète a donc été menée sur plusieurs méthodes de propagation d'incertitudes proposées dans la littérature. Cette étude a montré les avantages

et inconvénients de chaque méthode au vu de son intégration dans un algorithme d'optimisation. La méthode "Propagation of Variance" a été sélectionnée pour sa rapidité de calcul et la précision de ses résultats. Elle a aussi l'avantage de conserver les liens analytiques et/ou numériques entre les Moments statistiques des performances et les Moments statistiques des paramètres de conception permettant ainsi l'emploi d'algorithmes d'optimisation déterministes ou stochastiques.

Le troisième apport de ce travail de thèse est le couplage de la méthode de propagation d'incertitude "Propagation of Variance" sélectionnée au préalable avec un algorithme d'optimisation globale de type PSO (Particle Swarm Optimization) ou d'optimisation locale de type SQP (Sequential Quadratic Programming). Cette approche que l'on peut qualifier « d'intégrée » présente de nombreux avantages. En effet, elle permet une automatisation de la recherche d'une solution robuste et optimale au dimensionnement afin d'éviter une démarche d'analyse de type essai-erreur souvent longue et fastidieuse. Cette automatisation contribue aussi à une meilleure exploration de l'espace des solutions robustes possibles.

Bien que la contribution majeure de ce travail de thèse ait été de proposer et tester une démarche pour la conception robuste et optimale, il a aussi contribué à la capitalisation des connaissances au sein du laboratoire G-SCOP. En effet, ce travail contient une revue bibliographique assez complète sur les formulations de cahiers des charges robustes et sur les méthodes de propagation d'incertitude de type probabiliste. Ces méthodes ont non seulement été étudiées en profondeur d'un point de vue théorique mais elles ont été aussi implémentées en MATLAB, SCILAB et Pro@DESIGN et seront réutilisables pour de futurs travaux au sein du laboratoire. Ce travail a aussi permis l'appropriation et l'intégration de plusieurs techniques d'optimisation (PSO, SQP, IBBA,...) en fonction des caractéristiques mathématiques des modèles traités.

## **Perspectives**

L'approche proposée dans ce travail de thèse est testée sur un modèle de dimensionnement de taille importante très coûteux en temps de calcul. Les résultats montrent qu'il pourrait être judicieux d'utiliser des surfaces de réponse afin de diminuer le temps d'une exécution du modèle. Les modèles de dimensionnement sont très souvent numériques (éléments finis par exemple) et leur exécution peut prendre des heures, voire des jours ou plus. Pour valider cette approche sur des modèles de taille importante, il serait intéressant de réaliser une étude bibliographique plus approfondie que celle réalisée dans ce travail sur les méthodes de surface de réponse pour ensuite les tester et les comparer.

La méthode "Propagation of Variance" au 2<sup>nd</sup> ordre employée pour le calcul des Moments statistiques des performances en fonction des Moments des paramètres de conception nécessite l'évaluation des dérivées premières et secondes du modèle de dimensionnement. Dans les cas d'étude abordés au chapitre 5, les dérivées sont calculées numériquement par la méthode des différences finies. Ce calcul numérique perd les liens analytiques entre les Moments statistiques des performances en fonction des Moments des paramètres de conception et rend l'optimisation déterministe avec calcul des dérivées formelles impraticable. En dérivant le modèle de dimensionnement de manière formelle et en intégrant ces dérivées dans les équations de la

méthode "Propagation of Variance", il serait possible de gagner du temps lors de l'optimisation en utilisant un algorithme déterministe. Nous pensons évidemment aux algorithmes d'optimisation globale de type branch and bound à base de calcul d'intervalle permettant de garantir les résultats. Il pourrait donc être intéressant de coder un générateur automatique de reformulation de modèles par la méthode "Propagation of Variance".

Pour terminer, nous proposons une perspective à plus long terme qui est l'intégration de l'approche dans une plateforme dédiée à l'activité de dimensionnement. Le concepteur pourrait alors utiliser une interface graphique lui facilitant l'emploi de cette méthodologie pour concevoir des produits robustes. Cette plateforme comme outil d'aide à la décision doit permettre l'analyse de modèles quelconques de dimensionnement, de les reformuler de manière automatique, de choisir le ou les algorithmes adaptés pour l'optimisation et de réaliser ensuite une analyse des solutions. Cependant, de nombreux tests seraient à réaliser afin de valider cette approche sur un plus grand nombre de modèles de dimensionnement robustes plus complexes et de plus grandes dimensions.



# Références

## A.

---

- (Amelin, 2004) Amelin, M., On Monte Carlo simulation and analysis of electricity markets, *Thèse Royal Institute of Technology - Department of Electrical Engineering*, Suède, 2004.
- (Arroyo-Contreras, 1989) Arroyo-Contreras, M., Approche probabiliste du comportement élasto-plastique de structures marines, sous sollicitations aléatoires de houle, *Thèse École Nationale des Ponts et Chaussées*, France, 1989.
- (Atienza, 2003) Atienza, E., Méthodologie et outils pour le dimensionnement. *Thèse Institut National Polytechnique de Grenoble*, France, 2003.

## B.

---

- (Bakr et al., 2001) Bakr, M.H., Bandler, J.W., Madsen, K., Søndergaard, J., An introduction to the space mapping technique. *Optimization and Engineering*, vol. 2, pp. 369-384, 2001.
- (Berveiller, 2005) Berveiller, M., Eléments finis stochastiques : approches intrusive et non intrusive pour des analyses de fiabilité. *Thèse Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II.*, France, 2005.
- (Beyer and Sendhoff, 2007) Beyer, H.-G., Sendhoff, B., Robust optimization - A comprehensive survey, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, pp. 3190-3218, 2007.
- (Blatman, 2009) Blatman, G., Chaos polynomial creux et adaptatif pour la propagation d'incertitudes et l'analyse de sensibilité, *Thèse Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II.*, France, 2009.
- (Boutahar, 2004) Boutahar, J., Méthodes de réduction et de propagation d'incertitudes : application à un modèle de chimie-transport pour la modélisation et la simulation des impacts, *Thèses École des Ponts ParisTech*, France, 2004.
- (Brisset, 2007) Brisset, S., Démarches et outils pour la conception optimale des machines électriques, *Habilitation à diriger les recherches, Université des Sciences et Technologies de Lille*, France, 2007.

## C.

---

- (Caro, 2004) Caro, S., Conception robuste de mécanismes, *Thèse École Centrale de Nantes*, France, 2004.
- (Caro et al., 2005) Caro, S., Bennis, F., Wenger, P., Tolerance synthesis of mechanisms: a robust design approach, *Journal of Mechanical Design*, vol. 127, pp. 86-94, 2005.

(Chabert, 2007) Chabert, G., Techniques d'intervalles pour la résolution de systèmes d'équations, *Thèse Université de Nice Sophia-Antipolis*, France, 2007.

#### D.

---

(Doltsinis and Kang, 2004) Doltsinis, I., Kang, Z., Robust design of structures using optimization methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, pp. 2221-2237, 2004.

(Drakopoulos, 1995) Drakopoulos, J.A., Probabilities, possibilities, and fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 75, pp.1-15, 1995.

(Du and Chen, 1999) Du, X., Chen, W., Towards a better understanding of modeling feasibility robustness in engineering design, *Journal of Mechanical Design*, vol. 122, pp. 385-394, 1999.

(Du et al., 2007) Du, L., Choi, K.K., Lee, I., Robust design concept in possibility theory and optimization for system with both random and fuzzy input variables, *Proceedings of ASME 2007 - International Design Engineering Technical Conference & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE*, pp. 1183-1193, Las Vegas, United States, September 2007.

(Du et al., 2009) Du, X., Venigella, P.K., Liu, D., Robust mechanism synthesis with random and interval variables, *Mechanism and Machine Theory*, vol. 44, pp. 1321-1337, 2009.

(Duong and Lee, 2010) Duong, P.L.T., Lee, M., Multi-model PID controller design: Polynomial chaos approach, *Control Automation and Systems (ICCAS), 2010 International Conference on*, pp. 690-695, Gyeonggi-do, South Korea, October 2010.

#### E.

---

(Edwards et al., 2010) Edwards, R.S., Marvin, A.C., Porter, S.J., Uncertainty analyses in the finite-difference time-domain method, *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 52, pp.155-163, 2010.

(Enjalbert, 2009) Enjalbert, P., Sur la théorie des méconnaissances en conception robuste, *Thèse École normale supérieure de Cachan*, France, 2009.

#### F.

---

(Forrester and Keane, 2009) Forrester, A.I.J., Keane, A.J., Recent advances in surrogate-based optimization, *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 45, pp. 50-79, 2009.

#### G.

---

(Ghanmi et al., 2005) Ghanmi, S., Bouazizi, M.L., Bouhaddi, N., Optimisation multi-objectifs en mécanique des structures : approche basée sur les surfaces de réponse adaptative, *7ème Colloque National en Calcul des Structures*, France, 2005.

(Glancy, 1999) Glancy, C.G., A Second-Order Method for Assembly Tolerance Analysis, *Proceedings of the ASME 1999 - Design Engineering Technical Conferences*, Las Vegas, United States, September 1999.

## H.

---

(Hage-Hassan et al., 2012) Hage-Hassan, M., Remy, G., Krebs, G., Marchand, C., Radial output space mapping for electromechanical systems design, *Proceedings of the 12th International Workshop on Optimization and Inverse Problems in Electromagnetism*, pp. 22–23, Ghent, Belgium, September 2012.

(Han, 1976) Han, S.-P., Superlinearly convergent variable metric algorithms for general nonlinear programming problems, *Mathematical Programming*, vol. 11, pp. 263-282, 1976.

(Hills and Trucano, 1999) Hills, R.G., Trucano, T.G., Statistical validation of engineering and scientific models: background, *Report No. SAND99-1256, Sandia National Laboratories*, Albuquerque, 1999.

(Huang and Du, 2005) Huang, B., Du, X., Uncertainty analysis by dimension reduction integration and saddlepoint approximations, *Journal of Mechanical Design*, vol. 128, pp. 26-33, 2005.

(Huang and Du, 2006) Huang, B., Du, X., A robust design method using variable transformation and Gauss-Hermite integration, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 66, pp. 1841-1858, 2006.

## I.

---

(Irisarri, 2009) Irisarri, F.-X., Stratégies de calcul pour l'optimisation multiobjectif des structures composites, *Thèse Université Paul Sabatier - Toulouse III*, France, 2009.

## J.

---

(Jacques, 2005) Jacques, J., Contributions à l'analyse de sensibilité et à l'analyse discriminante généralisée, *Thèse Université Joseph-Fourier - Grenoble I*, France, 2005.

(Jaeger et al., 2011) Jaeger, L., Gogu, C., Segonds, S., Bes, C., Optimisation multidisciplinaire sous incertitudes en conception préliminaire avion, *20ème Congrès Français de Mécanique*, Besançon, France, Aout 2011.

(Jin et al., 2000) Jin, R., Chen, W., Simpson, T.W., Comparative studies of metamodeling techniques under multiple modeling criteria, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 23, pp. 1-13, 2000.

(Joudrier, 2013) Joudrier, H., Propagation de contraintes ODE par calcul d'intervalle pour l'optimisation globale, *Rapport de Master - Université Joseph-Fourier*, France, 2013.

## K.

---

- (Kennedy and Eberhart, 1995) Kennedy, J., Eberhart, R., Particle swarm optimization, *IEEE Proceeding of International Conference on Neural Networks ICNN'95*, vol. 4, pp. 1942-1948, Piscataway, United States, December 1995.
- (Koch et al., 2004) Koch, P.N., Yang, R.-J., Gu, L., Design for six sigma through robust optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 26, pp. 235-248.
- (Kone et al., 1993) Kone, A.D., Nogarede, B., Lajoie Mazenc, M., Le dimensionnement des actionneurs électriques : un problème de programmation non linéaire, *Journal de Physique III*, vol. 3, pp. 285-301, 1993.

## L.

---

- (Laurenceau, 2008) Laurenceau, J., Surfaces de réponse par krigeage pour l'optimisation de formes aérodynamiques, *Thèse Institut National Polytechnique de Toulouse*, France, 2008.
- (Lebrun and Dutfoy, 2009) Lebrun, R., and Dutfoy, A., Do Rosenblatt and Nataf isoprobabilistic transformations really differ?, *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 24, pp. 577-584, 2009.
- (Leclair et al., 1997) Leclair, P., Bossard, P., Chanchevri, C., Ingénierie concourante : de la technique au social, *Economica*, Paris, 1997.
- (Lee and Park, 2001) Lee, K.-H., Park, G.-J., Robust optimization considering tolerances of design variables, *Computers & Structures*, vol. 79, pp. 77-86, 2001.
- (Lee et al., 2008) Lee, I., Choi, K.K., Du, L., Gorsich, D., Dimension reduction method for reliability-based robust design optimization, *Computers & Structures*, vol. 86, pp. 1550-1562, 2008.
- (Lei et al., 1998) Lei, J., Lima-Filho, P., Styblinski, M.A., Singh, C., Propagation of variance using a new approximation in system design of integrated circuits, *Aerospace and Electronics Conference, 1998. NAECON 1998. Proceedings of the IEEE 1998 National*, pp. 242-246, 1998.
- (Lemaire, 2005) Lemaire, M., Fiabilité des structures, *Hermès - Lavoisier*, Paris, 2005.
- (Linda and Manic, 2011) Linda, O., Manic, M., Uncertainty-robust design of interval type-2 fuzzy logic controller for delta parallel robot. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 7, pp. 661-670, 2011.
- (Liu, 2007) Liu, X., Parameterized defuzzification with maximum entropy weighting function - Another view of the weighting function expectation method, *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 45, pp. 177-188, 2007.
- (Liu et al., 2008) Liu, X., Wang, S., Qiu, J., Zhu, J.G., Guo, Y., Lin, Z.W., Robust optimization in HTS cable based on design for six sigma. *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 44, pp. 978-981, 2008.

(Lu and Zhang, 2003) Lu, Z., Zhang, D., On importance sampling Monte Carlo approach to uncertainty analysis for flow and transport in porous media, *Advances in Water Resources*, vol. 26, pp. 1177-1188, 2003.

## M.

---

(Matta et al., 2012) Matta, A., Pezzoni, M., Semeraro, Q., A Kriging-based algorithm to optimize production systems approximated by analytical models, *Journal of Intelligent Manufacturing*, vol. 23, pp. 587-597, 2012.

(Maudet-Charbuillet, 2009) Maudet-Charbuillet, C., Proposition d'outils et démarches pour l'intégration de filières de recyclage de matières plastiques dans la "supply chain" automobile, *Thèse Arts et Métiers ParisTech*, France, 2009.

(Mazhoud, 2010) Mazhoud, I., Techniques d'optimisation globale pour le pré-dimensionnement en conception, *Rapport de Master - Grenoble INP*, France, 2010.

(Mazhoud et al., 2012a) Mazhoud, I., Hadj-Hamou, K., Bigeon, J., Remy, G., The electromagnetic actuator design problem: an adapted interval global optimization algorithm. *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 48, pp. 387-390, 2012.

(Mazhoud et al., 2012b) Mazhoud, I., Hadj-Hamou, K., Bigeon, J., Joyeux, P., Particle swarm optimization for dynamic analytical models involving Ordinary Differential Equations, *25th IEEE Canadian Conference on Electrical Computer Engineering (CCECE)*, Montréal, Canada, May 2012.

(Mazhoud et al., 2013) Mazhoud, I., Hadj-Hamou, K., Bigeon, J., Joyeux, P., Particle Swarm Optimization for solving engineering problems: a new constraint-handling mechanism, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 26, pp. 1263-1273, 2013.

(Messine, 2006) Messine, F., L'optimisation globale par intervalles : de l'étude théorique aux applications, *Habilitation à diriger les recherches - Institut National Polytechnique de Toulouse*, France, 2006.

(Mohammadkhani-Shali, 2007) Mohammadkhani-Shali, S., Contribution à l'étude de redondance dans les ponts : analyses des mécanismes de défaillance par surfaces de réponse, *Thèse École des Ponts ParisTech*, France, 2007.

(Moore, 1966) Moore, R.E., Interval analysis, *Prentice-Hall*, Englewood Cliffs, Etats-Unis, 1966.

## N.

---

(Nataf, 1962) Nataf, A., Détermination des distributions de probabilité dont les marges sont données, *Comptes Rendus de l'Académie Des Sciences*, pp. 42-43, 1962.

(Nguyen, 2007) Nguyen, X.S., Algorithmes probabilistes appliqués à la durabilité et à la mécanique des ouvrages de Génie Civil, *Thèse Institut National des sciences appliquées de Toulouse*, France, 2007.

## O.

---

(Olsson et al., 2003) Olsson, A., Sandberg, G., Dahlblom, O., On Latin hypercube sampling for structural reliability analysis, *Structural Safety*, vol. 25, pp. 47-68, 2003.

## P.

---

(Park et al., 2006) Park, G.-J., Lee, T.-H., Lee, K.H., Hwang, K.-H., Robust design: An overview, *AIAA Journal*, vol. 44, pp. 181-191, 2006.

(Picheral et al., 2011) Picheral, L., Hadj-Hamou, K., Remy, G., Bigeon, J., Robust analysis towards robust optimization in engineering design, *18th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields COMPUMAG 2011*, Sydney, Australia, July 2011.

(Picheral et al., 2012) Picheral, L., Hadj-Hamou, K., Remy, G., Bigeon, J., Optimization based on parameter moments estimation for robust design, *25th IEEE Canadian Conference on Electrical Computer Engineering (CCECE)*, Montréal, Canada, May 2012.

(Picheral et al., 2013) Picheral, L., Mazhoud, I., Hadj-Hamou, K., Bigeon, J., Joyeux, P., An automated robust optimization approach based on robust constraints and objective function, *19th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields COMPUMAG 2013*, Budapest, Hungary, July 2013.

(Pierquin et al., 2013) Pierquin, A., Brisset, S., Henneron, T., Clenet, S., Benefits of waveform relaxation method and space mapping for the optimization of multirate system, *19th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields COMPUMAG 2013*, Budapest, Hungary, July 2013.

(Powell, 1978) Powell, M.J.D., Algorithms for nonlinear constraints that use lagrangian functions, *Mathematical Programming*, vol. 14, pp. 224-248, 1978.

## Q.

---

(Qureshi et al., 2010) Qureshi, A.J., Dantan, J.-Y., Bruyere, J., Bigot, R., Set based robust design of mechanical systems using the quantifier constraint satisfaction algorithm, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 23, pp. 1173-1186, 2010.

## R.

---

(Rahman and Xu, 2004) Rahman, S., Xu, H., A univariate dimension-reduction method for multi-dimensional integration in stochastic mechanics, *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 19, pp.393-408, 2004.

(Remery, 2011) Remery, M., Nouvelle méthode d'évaluation des scénarios de fin de vie pour des produits en phase de conception préliminaire, *Rapport de Master - École Polytechnique de Montréal*, Canada, 2011.

(Rolander et al., 2006) Rolander, N., Rambo, J., Joshi, Y., Allen, J.K., Mistree, F., An approach to robust design of turbulent convective systems, *Journal of Mechanical Design*, vol. 128, pp. 844-855, 2006.

(Rollet, 2007) Rollet, Y., Vers une maîtrise des incertitudes en calculs des structures composites, *Thèse École Polytechnique*, France, 2007.

(Rosenblatt, 1952) Rosenblatt, M., Remarks on a Multivariate Transformation, *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 23, pp. 470-472.

S.

---

(Scaravetti, 2004) Scaravetti, D., Formalisation préalable d'un problème de conception, pour l'aide à la décision en conception préliminaire, *Thèse Arts et Métiers ParisTech*, France, 2004.

(Soize, 2009) Soize, C., Modélisation probabiliste, identification et propagation des incertitudes dans les modèles numériques des systèmes mécaniques complexes, *9ème Colloque National en Calcul des Structures*, pp. 1-12, Giens, France, Mai 2009.

T.

---

(Tang, 1993) Tang, B., Orthogonal array-based latin hypercubes, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 88, pp. 1392-1397, 1993.

(Tsai and Kao, 2011) Tsai, C.-Y., Kao, I.-W., Particle swarm optimization with selective particle regeneration for data clustering, *Expert Systems with Applications*, vol. 38, pp. 6565-6576, 2011.

V.

---

(Vivier, 2002) Vivier, S., Stratégies d'optimisation par la méthode des Plans d'Expériences, et application aux dispositifs électrotechniques modélisés par Eléments Finis, *Thèse Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I*, France, 2002.

W.

---

(Wiener, 1938) Wiener, N., The Homogeneous Chaos, *American Journal of Mathematics*, vol. 60, pp. 897-936, 1938.

(Wilson, 1963) Wilson, R.B., A simplicial algorithm for concave programming, *Thèse Graduate School of Business Administration - Harvard University*, Etats-Unis, 1963.

X.

---

(Xiu and Karniadakis, 2003) Xiu, D., Karniadakis, G.E., Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos, *Journal of Computational Physics*, vol. 187, pp. 137-167.

Y.

---

(Yu-bing, 2010) Yu-bing, G., Robust optimization design of 3D MCM packages for reducing warpage under uncertainty, *11th International Conference on Electronic Packaging Technology High Density Packaging (ICEPT-HDP)*, pp. 571-575, 2010.

Z.

---

(Zadeh, 1965) Zadeh, L.A., Fuzzy sets, *Information and Control*, vol. 8, pp. 338-353, 1965.