THÈSE

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DU HAVRE

DISCIPLINE : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Présentée par

Maëlis MEISNER

Étude unifiée d'équations aux dérivées partielles de type elliptique régies par des équations différentielles à coefficients opérateurs dans un cadre non commutatif : applications concrètes dans les espaces de Hölder et les espaces L^p

Soutenue le 22 juin 2012

JURY

M. Stéphane MAINGOT	Professeur à l'Université du Havre	Président
M. Angelo FAVINI	Professeur à l'Université de Bologne	Rapporteur
M. Keddour LEMRABET	Professeur à l'Université de Bab Ezzouar	Rapporteur
M. Alain MIRANVILLE	Professeur à l'Université de Poitiers	Rapporteur
M. Olivier GUIBÉ	Maître de Conférences à l'Université de Rouen	Examinateur
M. Rabah LABBAS	Professeur à l'Université du Havre	Directeur de thèse

À ma fille Héloïse

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse, le Professeur Rabah Labbas, pour sa confiance, se disponibilité et son aide précieuse dans la réalisation de cette thèse. Ce travail de recherche à ses côtés a pour moi été un réel plaisir : rigueur mathématique, encouragements incessants et conseils, tout était réuni pour mener à bien ce travail. Qu'il trouve dans ces mots toute ma sincère reconnaissance.

Le Professeur Stéphane Maingot me fait un grand honneur en acceptant de présider ce jury. Je n'oublie pas les nombreuses séances de travail, sa relecture attentive, ses corrections et ses conseils forts utiles à l'élaboration de cette thèse. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude.

Je remercie profondément les Professeurs Angelo Favini, Keddour Lemrabet et Alain Miranville qui ont accepté de rapporter sur cette thèse. Je remercie également Olivier Guibé d'avoir bien voulu examiner ce travail.

Durant mes trois années de recherche au sein du Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre, le cadre de travail était idéal et l'ambiance conviviale. Je remercie en particulier le Professeur Adnan Yassine, directeur de ce laboratoire, pour avoir su créer ce climat propice à la recherche.

Un grand merci à tous les doctorants et permanents du LMAH avec qui j'ai pris un réel plaisir à partager, non seulement, des discussions scientifiques, mais aussi des moments plus personnels, une pause café, un repas... Je n'oublierais pas Hanan et Fatimetou avec qui j'ai partagé mon bureau et tant d'autres choses, merci de m'avoir supportée et soutenue ! Merci à tous les doctorants qui ont rendu moins longues les journées de formation : Gaëtan, Sylvain et les autres.

Je n'oublie pas mes premières années universitaires, les plus belles sans aucun doute, en compagnie des “filles“ : merci à Charlotte, Élise, Mylène et ... Jessy !

Une pensée toute particulière à ma famille et à mes amis qui ont su apporter leur soutien. Merci à tous d'avoir cru en moi. Merci à Élise, Dom, Régine et Julien, mon mari, d'avoir été présents en ce jour si important de la soutenance. Un énorme bisou à ma fille, Héloïse, qui m'a permis de m'évader pendant ces trois années.

Merci à Djamila et Nathalie pour leurs conseils. Merci à Marie pour les conseils esthétiques et l'impression. Merci à Claire pour la mise en place du pot de thèse. Merci à tous ceux qui ont pris le temps d'assister à ma soutenance et/ou au pot qui suivait.

Enfin, toute personne ayant aidé de près ou de loin à la réalisation de cette thèse est vivement remerciée.

Table des matières

Introduction générale

1. Motivations

Il existe toute une classe d'équations elliptiques (ou quasi-elliptiques) qui s'écrit sous une forme opérationnelle unifiée

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x),\ x \in (a, b),$$

dans un espace général de Banach X, a et b sont finis ou infinis, A et B sont des opérateurs linéaires sur X (non bornés mais au moins fermés) vérifiant certaines hypothèses (dont l'ellipticité de l'équation) et représentant, par exemple, des actions de dérivation.

On donne à titre d'exemples trois problèmes concrets qui peuvent s'écrire sous cette forme.

Exemple .1 ***Comportement de la solution variationnelle du laplacien dans un cône.***

On considère Ω un cône de $\mathbb{R}^n$:

$$\Omega := \{\rho\sigma : \rho > 0, \sigma \in G\},$$

où G est un ouvert de S^{n-1}, la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ une solution variationnelle de $\Delta u = f$ avec $f \in L^p(\Omega)$, où $p \geqslant 2$.

On passe en coordonnées sphériques et on pose

$$\rho = e^x,\ x \in \mathbb{R},$$

l'ouvert de travail Ω devient une bande $\mathcal{B} = \mathbb{R} \times G$. L'équation $\Delta u = f$ s'écrit

$$D_\rho^2 u + \frac{n-1}{\rho} D_\rho u + \frac{1}{\rho^2}\Delta' u = f,$$

où Δ' est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur S^{n-1}. En multipliant par ρ^2 on obtient

$$(\rho D_\rho)^2 u + (n-2)(\rho D_\rho)u + \Delta' u = \rho^2 f := g,$$

puis

$$D_x^2 u + (n-2) D_x u + \Delta' u = g \ \text{dans}\ \mathcal{B}.$$

On peut montrer que

$$f \in L^p(\Omega) \Longleftrightarrow e^{\gamma x} g \in L^p(\mathcal{B}),$$

où $\gamma = \dfrac{n}{p} - 2$ est l'opposé du coefficient de Sobolev de $W^{2,p}(\Omega)$.

Afin d'éviter de travailler dans ces espaces à poids, on pose

$$v = e^{\gamma x}u; \quad h = e^{\gamma x}g,$$

et on trouve

$$D_x^2 v + (n-2-2\gamma)D_x v + (\Delta' + \gamma(\gamma - n + 2)I)\, v = h \text{ dans } \mathcal{B},$$

que l'on écrit sous la forme

$$v''(x) + 2Bv'(x) + Av(x) = h(x),\ x \in \mathbb{R},$$

en cachant la variable σ dans les opérateurs $A = \Delta' + \gamma(\gamma - n + 2)I$ et $B = (n-2-2\gamma)I$.

Exemple .2 ***Sur un problème de Steklov-Poincaré.***

On considère un cytoplasme homogène Ω centré en $(0,0)$ de bord Γ de classe C^∞, et entouré d'une fine membrane Ω^δ d'épaisseur $\delta > 0$ définie par

$$\Omega^\delta := \{x = m + tn(m) : m \in \Gamma, t \in]0, \delta[\},$$

où $n(m)$ est la normale à Γ au point m orientée vers l'extérieur de Ω.

Le potentiel électrique v dans Ω^δ vérifie l'équation de Laplace suivante

$$(P) \begin{cases} \Delta v = 0 \ sur\ \Omega^\delta \\ v = \varphi \ sur\ \Gamma^0 = \Gamma \times \{0\} \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0 \ sur\ \Gamma^\delta = \Gamma \times \{\delta\}. \end{cases}$$

Ici on s'intéresse au problème de Steklov-Poincaré dans la couche mince, mais on peut aussi adjoindre le problème dans Ω pour obtenir un problème de transmission. On rappelle la méthode utilisée par Favini et al. dans [19] pour écrire (P) sous une forme opérationnelle.

Vu la géométrie de Ω^δ (se décrivant par la normale et le plan tangent), on pose

$$v(x) = v(m + tn(m)) := u(m,t).$$

Pour v défini sur Ω^δ, on a u défini sur $\Gamma \times]0,1[$. Soit $\mathcal{R}(m)$, l'opérateur symétrique du plan tangent $T_m(\Gamma)$ (caractérisant la courbure de Γ au point m). Alors pour δ petit, $I + t\mathcal{R}(m)$ est un isomorphisme de $T_m(\Gamma)$. On peut écrire

$$\begin{aligned} \nabla v(x) &= (I + t\mathcal{R}(m))^{-1}\nabla_\Gamma u(m,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(m,t)n(m), \\ \Delta v(x) &= \frac{div_\Gamma\left(\det(I + t\mathcal{R}(m))(I + t\mathcal{R}(m))^{-2}\nabla_\Gamma u(m,t)\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\det(I + t\mathcal{R}(m))\frac{\partial u}{\partial t}(m,t)\right)}{\det(I + t\mathcal{R}(m))}, \end{aligned}$$

où ∇_Γ et div_Γ désignent respectivement l'opérateur de gradient de surface tangentielle et l'opérateur de divergence de surface tangentielle sur Γ.

On a

$$\det(I + t\mathcal{R}(m)) = 1 + 2tH(m) + t^2G(m),$$

avec

$$H(m) = tr\mathcal{R}(m), \quad G(m) = \det \mathcal{R}(m).$$

On note que pour δ assez petit, $\det(I + t\mathcal{R}(m)) \neq 0$ et il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall (m,t) \in \Gamma \times]0, \delta[\,,\ |\det(I + t\mathcal{R}(m))| = |1 + 2tH(m) + t^2G(m)| \geqslant C.$$

On pose $X = L^p(\Gamma)$ *et soit* u *la fonction vectorielle définie de* $]0,\delta[$ *dans* X *par*

$$u(t)(m) = u(m,t).$$

On définit, pour $t \in]0,\delta[$*, l'opérateur borné de multiplication* $p(t)$ *par*

$$\begin{cases} D(p(t)) = L^p(\Gamma) \\ (p(t)\varphi)(m) = \dfrac{\frac{\partial}{\partial t}\det(I + t\mathfrak{R}(m))}{\det(I + t\mathfrak{R}(m))}\varphi(m) = \dfrac{2H(m) + 2tG(m)}{1 + 2tH(m) + t^2G(m)}\varphi(m), \end{cases}$$

et l'opérateur elliptique non borné $q(t)$ *par*

$$\begin{cases} D(q(t)) = W^{2,p}(\Gamma) \\ (q(t)\varphi)(m) = \dfrac{div_\Gamma\left(\det(I + t\mathfrak{R}(m))(I + t\mathfrak{R}(m))^{-2}\nabla_\Gamma\varphi(m)\right)}{\det(I + t\mathfrak{R}(m))}. \end{cases}$$

Ainsi, le problème (P) *peut s'écrire sous la forme d'un problème aux limites pour une équation différentielle opérationnelle d'ordre 2 :*

$$\begin{cases} u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = 0,\ t \in]0,\delta[\,, \\ u(0) = \varphi, \qquad u'(\delta) = 0. \end{cases}$$

Exemple .3 ***Le potentiel électrique dans une cellule biologique.***

On considère une cellule $\Omega^{*\varepsilon} = \overline{\Omega^*_-} \cup \Omega^{*\varepsilon}_+$ *constituée d'un cytoplasme homogène* Ω^*_- *centré en* $(0,0)$ *de bord* Γ^* *de rayon d'un micromètre entouré d'une fine membrane* $\Omega^{*\varepsilon}_+$ *de bord* $\Gamma^{*\varepsilon}_+$ *et d'épaisseur de quelques nanomètres* $\varepsilon > 0$*. Le potentiel électrique dans cette cellule vérifie le problème suivant*

$$(P^\varepsilon)\begin{cases} \nabla.\left(\mu\nabla w^\varepsilon\right) = \mu h^\varepsilon \ \textit{dans}\ \Omega^{*\varepsilon} \\ \dfrac{\partial w^\varepsilon}{\partial n} = l^\varepsilon_+ \ \textit{sur}\ \Gamma^{*\varepsilon}_+ \\ \displaystyle\int_{\Gamma^*} w^\varepsilon(\sigma)\,d\sigma = 0, \end{cases}$$

où

$$\mu = \begin{cases} \mu_- \ \textit{dans}\ \Omega^*_- \\ \mu_+ \ \textit{dans}\ \Omega^{*\varepsilon}_+, \end{cases}$$

(généralement environ 1 *S/m (Siemens par mètre),* 5×10^{-7} *S/m respectivement) sont les coefficients positifs de conductivité des deux corps* Ω^*_-*,* $\Omega^{*\varepsilon}_+$ *dépendant éventuellement de* ε*, et la densité de charge électrique*

$$h^\varepsilon = \begin{cases} h_- \ \textit{dans}\ \Omega^*_- \\ h^\varepsilon_+ \ \textit{dans}\ \Omega^{*\varepsilon}_+, \end{cases}$$

est prise, par exemple, dans l'espace $L^p(\Omega^{*\varepsilon})$*,* $1 < p < \infty$*, i.e.* $h_- \in L^p\left(\Omega^*_-\right)$*,* $h^\varepsilon_+ \in L^p\left(\Omega^{*\varepsilon}_+\right)$*, et* l^ε_+ *est le champ électrique imposé sur le bord* $\Gamma^{*\varepsilon}_+$*. La condition de bord de Neumann sur* $\Gamma^{*\varepsilon}_+$ *implique la condition de compatibilité suivante sur* l^ε_+ *et* (μh^ε)

$$\int_{\Omega^{*\varepsilon}} (\mu h^\varepsilon)(x,y)\,dxdy + \int_{\Gamma^{*\varepsilon}_+} \mu_+ l^\varepsilon_+(\sigma)\,d\sigma = 0.$$

La condition de jauge

$$\int_{\Gamma^*} w^\varepsilon(\sigma)\,d\sigma = 0,$$

est imposée pour avoir l'unicité de la solution.

On montrera dans le Chapitre II que l'on peut réécrire le problème (P^ε) *sous forme opérationnelle comme dans les deux exemples précédents.*

Ces trois exemples donnent donc une première motivation à l'étude des équations différentielles abstraites (ou opérationnelles) complètes du second ordre et de type elliptique :

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x),\ x \in (a, b), \tag{1}$$

sur un espace de Banach complexe X, A et B étant des opérateurs linéaires fermés sur X. Plusieurs situations se présentent :

– $]a, b[= \mathbb{R}$: l'équation (1) est étudiée dans deux types d'espaces de Banach de géométrie différente :
  - $E = BUC(\mathbb{R}; X)$, l'ensemble des fonctions bornées et uniformément continues de $\mathbb{R}$ dans X (voir Chapitre I, Section 2.2), et alors on s'intéresse aux solutions classiques :
$$u \in BUC^2(\mathbb{R}; X),\ Bu',\ Au \in BUC(\mathbb{R}; X).$$
  - $E = L^p(\mathbb{R}; X)$, $1 < p < \infty$, et on cherche les solutions telles que
$$u \in W^{2,p}(\mathbb{R}; X),\ Bu',\ Au \in L^p(\mathbb{R}; X).$$

– $[a, b]$ intervalle fini de $\mathbb{R}$: l'équation (1) est étudiée avec des conditions aux limites en a et b, de type Sturm-Liouville non homogènes :
$$\begin{cases} \alpha u'(a) - Hu(a) = u_a \\ \beta u'(b) + hu(b) = u_b, \end{cases}$$
avec u_a, $u_b \in X$, α, β, h, H quatre constantes données (le cas où h, H sont deux opérateurs bornés vérifiant certaines conditions de compatibilité avec les opérateurs A et B pouvant être considéré).
À titre illustratif, on se borne aux conditions de Dirichlet :
$$u(a) = u_a; \quad u(b) = u_b.$$
De même ici on s'intéresse aux solutions classiques :
  - $E = C([a, b]; X)$, alors on montre que
$$u \in C^2([a, b]\,; X),\ Bu',\ Au \in C([a, b]\,; X),$$
pour certaines données u_a, u_b vérifiant des conditions nécessaires de compatibilité.
  - $E = L^p(a, b; X)$, $1 < p < \infty$, alors on montre que
$$u \in W^{2,p}(a, b; X),\ Bu',\ Au \in L^p(a, b; X),$$
pour des données u_a, u_b dans certains espaces d'interpolation (voir Chapitre I, Section 5).

On peut aussi envisager le cas intermédiaire où (a, b) est une demi-droite de $\mathbb{R}$ (utile dans les exemples concrets).

Remarque .4

1. *Si f est uniquement dans $C([a, b]\,; X)$ $(a, b$ finis$)$ ou dans $BUC(\mathbb{R}; X)$, la recherche d'une solution classique pour A et B non bornés est illusoire (voir Baillon [2]). On doit alors se donner un peu plus de régularité sur f, par exemple f höldérienne. On récupère alors cette régularité supplémentaire sur u'', Bu', Au.*
2. *Pour $f \in L^p(a, b; X)$, avec $1 < p < \infty$, on suppose de plus que X possède la propriété géométrique supplémentaire UMD (voir Chapitre I, Section 6). On peut aussi se placer dans un espace de Banach quelconque et prendre plus de régularité sur f, par exemple $f \in W^{\theta,p}(a, b; X)$, $\theta \in]0, 1[$. On exclut l'étude sur $L^1(a, b; X)$ et $L^\infty(a, b; X)$ qui ne sont pas des espaces UMD.*

Remarque .5 *Dans toute cette thèse, pour un opérateur A sur X et une application u définie de $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans X on notera toujours Au au lieu de $A(u(\cdot))$ pour désigner l'application qui à x associe $A(u(x))$.*

D'autres motivations peuvent être citées pour l'étude des équations différentielles opérationnelles :
- l'application aux EDP non linéaires ;
- l'unification des travaux existants sur les EDP avec la méthode variationnelle ;
- l'anisotropie : on obtient de la régularité par rapport à la variable x à valeurs dans un espace quelconque par rapport à la variable y ;
- ...

2. Historique

Les équations différentielles abstraites (en abrégé EDA) sont des équations différentielles dont les coefficients sont des opérateurs linéaires sur un espace de Banach. En 1948, E. Hille et K. Yosida résolvent chacun de leur côté le problème de Cauchy abstrait

$$\begin{cases} u'(t) - Au(t) = 0, \, t \in [0 + \infty[, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où A est un opérateur linéaire fermé sur X, X étant un espace de Banach complexe, et $u_0 \in X$. Il apparaît alors que, pour résoudre ce problème, il faut associer à l'opérateur A, un opérateur linéaire borné noté e^{tA} pour tout $t \geqslant 0$. La famille $\left(e^{tA}\right)_{t\geqslant 0}$ est appelée semi-groupe. De 1930 à 1960, W. Feller, E. Hille, G. Lumer, I. Miyadera, R. S. Phillips, M. H. Stone et K. Yosida développent intensément la théorie des semi-groupes.

D'autres outils indispensables à l'étude des EDA sont alors développés. On peut citer, entre autres, les travaux de J. L. Lions sur les puissances fractionnaires d'opérateurs, les espaces d'interpolation et les équations opérationnelles (1960-1962).

D'autres se sont intéressés à l'équation

$$Au + Bu = f,$$

où A et B sont des opérateurs linéaires fermés sur X, X étant un espace de Banach complexe et $f \in X$. On considère alors l'opérateur somme $L = A + B$ de domaine $D(A) \cap D(B)$. La théorie des sommes d'opérateurs est développée par G. Da Prato et P. Grisvard en 1975 (voir [12]), puis par G. Dore et A. Venni en 1987 dans le cadre des espaces UMD (voir [15]).

On s'est ensuite intéressé aux EDA du second ordre :

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \, x \in (a, b),$$

d'abord dans le cas où $B = 0$ puis dans le cas général. On cite, entre autres, les travaux récents de Favini, Labbas, Maingot, Tanabe et Yagi [22–27]. Ils ont étudié cette équation sur l'intervalle $[0, 1]$ couplée avec des conditions aux limites de Dirichlet :

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \, x \in (0, 1), \\ u(0) = u_0, \qquad u(1) = u_1, \end{cases} \tag{2}$$

où A et B sont des opérateurs linéaires fermés sur X, X étant un espace de Banach complexe, et $u_0, u_1 \in X$. Le cadre est **commutatif**, i.e. que les opérateurs A et B commutent en un certain sens (voir hypothèse (5) ci-dessous). L'étude est réalisée dans deux types d'espaces : les espaces de Hölder et les espaces L^p (avec X UMD). Deux cas différents sont étudiés : celui où B génère un groupe fortement continu sur X et celui où $\pm B - (B^2 - A)^{1/2}$ génèrent un semi-groupe analytique sur X. On détaille ci-dessous les résultats obtenus.

On suppose toujours l'hypothèse d'ellipticité :

$$\begin{cases} B^2 - A \text{ est un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans } X, \, \mathbb{R}^- \subset \rho(B^2 - A), \\ \exists C > 0, \, \forall \lambda \geqslant 0, \, \left\|(\lambda I + B^2 - A)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{1 + \lambda}, \end{cases} \tag{3}$$

et aussi

$$D(A) \subset D(B^2), \tag{4}$$

$$\forall y \in D(B),\ B(B^2 - A)^{-1}y = (B^2 - A)^{-1}By, \tag{5}$$

$$D((B^2 - A)^{1/2}) \subset D(B). \tag{6}$$

Les auteurs ont obtenu les théorèmes suivants dans [24–27].

Théorème .6 ***(Cadre höldérien - B génère un groupe).***
On suppose (3)-(6) et

$$B \text{ génère un groupe fortement continu sur } X,$$

$$B + (B^2 - A)^{1/2} \text{ est inversible dans } L(X),$$

$$A \text{ est inversible dans } L(X).$$

Pour tout $f \in C^\theta([0,1];X)$, $0 < \theta < 1$, et pour tout u_0, $u_1 \in D(A)$, le problème (2) a une unique solution classique.

Théorème .7 ***(Cadre höldérien - $\pm\mathbf{B} - (\mathbf{B}^2 - \mathbf{A})^{1/2}$ génèrent un semi-groupe analytique).***
On suppose (3)-(6) et

$$\pm B - (B^2 - A)^{1/2} \text{ génèrent un semi-groupe analytique sur } X,$$

$$A \text{ est inversible dans } L(X),$$

$$D(BA) \subset D(B^3).$$

1. *Soit $f \in C^\theta([0,1];X)$, $0 < \theta < 1$, et u_0, $u_1 \in D(A)$. Alors le problème (2) a une unique solution classique.*
2. *Soit $0 < \theta < 1$. Le problème (2) a une unique solution classique u satisfaisant la propriété de régularité maximale*

   $$u'',\ Bu',\ Au \in C^\theta([0,1]\,;X),$$

   si et seulement si $f \in C^\theta([0,1];X)$, u_0, $u_1 \in D(A)$, et

   $$f(i) - Au_i \in D_{-(B^2-A)}(\theta/2,\infty) = (D(A),X)_{1-\theta/2,\infty},\ i = 0, 1.$$

Théorème .8 ***(Cadre $\mathbf{L^p}$ - B génère un groupe).***
On suppose (3)-(6) et

$$X \text{ est un espace UMD},$$

$$B \text{ génère un groupe fortement continu sur } X,$$

$$\exists \theta_0 \in \,]0,\pi[\,,\ (B^2 - A) \in BIP(\theta_0, X).$$

Pour tout $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$, et pour tout u_0, $u_1 \in (D(A),X)_{1/2p,p}$, le problème (2) a une unique solution classique.

Théorème .9 ***(Cadre $\mathbf{L^p}$ - $\pm\mathbf{B}-(\mathbf{B^2}-\mathbf{A})^{1/2}$ génèrent un semi-groupe analytique).***
On suppose (3)-(6) et

$$X \text{ est un espace UMD},$$
$$\pm B-(B^2-A)^{1/2} \text{ génèrent un semi-groupe analytique sur } X,$$
$$A \text{ est inversible dans } L(X),$$
$$D(BA)\subset D(B^3),$$
$$\exists\theta_\pm\in\,]0,\pi/2[\,,\ (\pm B+(B^2-A)^{1/2})\in BIP(\theta_\pm,X).$$

Pour tout $f\in L^p(0,1;X)$, $1<p<\infty$, et pour tout u_0, $u_1\in(D(A),X)_{1/2p,p}$, le problème (2) a une unique solution classique.

Les opérateurs BIP sont définis à la Section 3.4 du Chapitre I. Pour les espaces d'interpolation du type $(D(A),X)_{1-\theta/2,\infty}$, $(D(A),X)_{1/2p,p}$ cités ci-dessus, on renvoie à la Section 5 du Chapitre I.

Les auteurs ont ensuite étudié le problème (2) en utilisant uniquement les racines opérationnelles de l'équation (lorsqu'elles existent), à savoir $-B\pm(B^2-A)^{1/2}$, dans le cadre où $\pm B-(B^2-A)^{1/2}$ génèrent un semi-groupe analytique sur X. Pour cela ils ont réécrit (2) sous la forme générale suivante

$$\left\{\begin{array}{l} u''(x)+(L-M)u'(x)-LMu(x)=f(x),\ x\in(0,1),\\ u(0)=u_0,\qquad u(1)=u_1,\end{array}\right. \tag{7}$$

où L et M sont deux opérateurs linéaires fermés sur X vérifiant notamment

$$\left\{\begin{array}{l} L-M\subset 2B\\ LM=ML\subset -A.\end{array}\right. \tag{8}$$

En particulier, les opérateurs L et M peuvent être

$$L=B-(B^2-A)^{1/2};\qquad M=-B-(B^2-A)^{1/2},$$

et on retrouve alors le problème (2).

1. Si $f\in C^\theta([0,1]\,;X)$, $0<\theta<1$, u est une solution classique de (7) lorsque
$$u\in C^2([0,1]\,;X),\ (L-M)u',\ LMu\in C([0,1]\,;X),$$
et u satisfait (7).
2. Si $f\in L^p(0,1;X)$, $1<p<\infty$, u est une solution classique de (7) lorsque
$$u\in W^{2,p}(0,1;X),\ (L-M)u',\ LMu\in L^p(0,1;X),$$
et u satisfait (7).

Si u est une solution classique de (7), alors u sera en particulier une solution classique de (2).

Les auteurs ont obtenus les résultats optimaux suivants dans [22, 23].

Théorème .10 ***(Cadre höldérien - $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ génèrent un semi-groupe analytique).***
On suppose (8) et

$$\left\{\begin{array}{l} D(L)=D(M)\\ D(ML)=D(LM),\end{array}\right.$$
$$L,\ M \text{ génèrent un semi-groupe analytique généralisé sur } X,$$
$$L+M \text{ est inversible dans } L(X).$$

1. *Soit* $f \in C^\theta([0,1];X)$, $0<\theta<1$. *Le problème (7) a une unique solution classique* u *si et seulement si* $u_0,\, u_1 \in D(LM)$ *et*
$$f(i) - Au(i) \in \overline{D(LM)},\; i=0,1.$$

2. *Soit* $0<\theta<1$. *Le problème (7) a une unique solution classique* u *satisfaisant la propriété de régularité maximale*
$$u'',\, (L-M)u',\, LMu \in C^\theta([0,1]\,;X),$$
si et seulement si $f \in C^\theta([0,1];X)$, $u_0,\, u_1 \in D(LM)$ *et*
$$f(i) - Au(i) \in (D(LM),X)_{1-\frac{\theta}{2},\infty},\; i=0,1.$$

Théorème .11 ***(Cadre*** $\mathbf{L^p}$ **-** $(-\mathbf{L})$, $(-\mathbf{M})$ ***sont BIP).***
On suppose (8) et
$$X \text{ est un espace UMD,}$$
$$\begin{cases} D(L) = D(M) \\ D(ML) = D(LM), \end{cases}$$
$$(L+M)^{-1} \text{ admet une extension bornée sur tout } X,$$
$$\exists \theta_L, \theta_M \in \,]0,\pi/2[\,,\; (-L) \in BIP(\theta_L, X),\; (-M) \in BIP(\theta_M, X).$$
Soit $f \in L^p(0,1;X)$, $1<p<\infty$. *Le problème (7) a une unique solution classique* u *si et seulement si*
$$u_i \in (D(M^2),X)_{1/2p,p} = (D(L^2),X)_{1/2p,p},\; i=0,1.$$

3. Présentation de la thèse

On présente d'abord une application concrète en biologie des équations différentielles opérationnelles. Cet exemple introductif n'utilise que le cadre commutatif, mais certains problèmes du même type nécessitent de développer le cadre non commutatif.

L'objectif de cette thèse est donc l'étude des équations différentielles opérationnelles complètes du second ordre de type elliptique dans un **cadre non commutatif**. Il s'agit en particulier de prolonger et d'améliorer les travaux cités ci-dessus [22–27]. On étudiera donc l'équation (2), avec un paramètre ω positif, d'abord sur la droite réelle :
$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x),\; x \in \mathbb{R}, \tag{9}$$
puis sur un intervalle borné
$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x),\; x \in (0,1), \\ u(0) = u_0, \qquad u(1) = u_1, \end{cases} \tag{10}$$
où A et B sont deux opérateurs linéaires fermés sur X, X étant un espace de Banach complexe, f est définie respectivement de $\mathbb{R}$ et de $[0,1]$ à valeurs dans X. Le paramètre ω permettra l'existence de solutions de (9) et (10) pour ω assez grand. On note qu'en posant $y = (b-a)x + a$ on peut, à partir de (10), se ramener à une équation sur un intervalle borné $[a,b]$ quelconque. Comme dans les travaux de Favini et al. [22, 23], on étudiera une équation plus générale sur la droite réelle
$$u''(x) + (L_\omega - M_\omega)\,u'(x) + \frac{1}{4}\left((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2\right) u(x) = f(x),\; x \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

puis sur $[0,1]$

$$\begin{cases} u''(x) + (L_\omega - M_\omega)\, u'(x) + \dfrac{1}{4}\Big((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2\Big)\, u(x) = f(x),\, x \in (0,1), \\ u(0) = u_0, \qquad u(1) = u_1, \end{cases} \tag{12}$$

qu'on montre respectivement équivalentes à

$$u''(x) + (L_\omega - M_\omega)\, u'(x) - \frac{1}{2}\,(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)\, u(x) = f(x),\, x \in \mathbb{R},$$

et

$$\begin{cases} u''(x) + (L_\omega - M_\omega)\, u'(x) - \dfrac{1}{2}\,(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)\, u(x) = f(x),\, x \in (0,1), \\ u(0) = u_0, \qquad u(1) = u_1, \end{cases} \tag{13}$$

où les opérateurs L_ω et M_ω vérifient notamment

$$\begin{cases} L_\omega - M_\omega \subset 2B \\ -\dfrac{1}{2}\,(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega) \subset A - \omega I. \end{cases}$$

On pensera en particulier au cas où

$$L_\omega = B - (B^2 - A + \omega I)^{1/2}; \qquad M_\omega = -B - (B^2 - A + \omega I)^{1/2}.$$

Il faut noter que les équations (12) et (13) généralisent (7) car elles coïncident dans le cadre commutatif.

On s'intéressera à l'existence et l'unicité de solutions classiques pour l'équation (11) lorsque $f \in BUC^\theta(\mathbb{R};X)$, puis lorsque $f \in L^p(\mathbb{R};X)$; et pour le problème (12) lorsque $f \in C^\theta([0,1];X)$, puis lorsque $f \in L^p(0,1;X)$, où $\theta \in]0,1[$ et $1 < p < \infty$. On étudiera de plus la régularité maximale de la solution classique dans le cadre höldérien pour l'équation (11) et pour le problème (12).

L'originalité de ce travail réside particulièrement dans le fait d'étudier les équations (9)-(12) dans le cadre non commutatif, i.e. sans l'hypothèse (5) (à titre comparatif, on rappellera quelques travaux effectués sur les EDA dans un cadre non commutatif, voir Chapitre IV, Section 3.2).

On définira alors le commutateur de deux opérateurs P et Q sur X par

$$\begin{cases} D([P;Q]) = D(PQ) \cap D(QP) \\ [P;Q]\,\varphi = PQ\varphi - QP\varphi,\, \varphi \in D(PQ) \cap D(QP). \end{cases} \tag{14}$$

Ici

$$L_\omega M_\omega \neq M_\omega L_\omega,$$

et en général un opérateur dépendant de M_ω ne commutera pas avec un opérateur dépendant de L_ω. On considèrera le commutateur $[M_\omega; L_\omega]$ qui sera bien évidemment non nul. On le supposera petit en un certain sens pour ω grand. Ceci constituera l'hypothèse originale dite de non commutativité, voir (38).

On commencera par étudier l'équation (11) sur toute la droite réelle, d'abord dans le cadre commutatif puis dans le cadre non commutatif. L'absence de conditions aux limites simplifiera la représentation de la solution. On pourra ensuite étudier l'équation (12) sur $[0,1]$ en adaptant les calculs.

Cette thèse comporte cinq chapitres et est organisée comme suit.

Chapitre 1

Il est consacré aux rappels fondamentaux et outils nécessaires à ce travail. Ils concernent les opérateurs linéaires, les espaces fonctionnels, le calcul fonctionnel de Dunford, les semi-groupes, les espaces d'interpolation et enfin les espaces UMD.

Chapitre 2

On reprend l'Exemple .3 donné au début de l'introduction. On montre que le problème (P^ε) s'écrit sous la forme

$$\left(P^\varepsilon_{x,y}\right)\begin{cases} (eq.1) & \Delta w^\varepsilon_-\left(x,y\right)=h_-\left(x,y\right)\ \text{dans } \Omega^*_- \\ (eq.2) & \Delta w^\varepsilon_+\left(x,y\right)=h^\varepsilon_+\left(x,y\right)\ \text{dans } \Omega^{*\varepsilon}_+ \\ (c.t.) & w^\varepsilon_-=w^\varepsilon_+,\quad \mu_-\dfrac{\partial w^\varepsilon_-}{\partial n}=\mu_+\dfrac{\partial w^\varepsilon_+}{\partial n}\ \text{sur } \Gamma^* \\ (c.j.) & \displaystyle\int_{\Gamma^*} w^\varepsilon_-\left(\sigma\right)d\sigma=\int_{\Gamma^*} w^\varepsilon_+\left(\sigma\right)d\sigma=0 \\ (c.b.) & \dfrac{\partial w^\varepsilon_+}{\partial n}=l^\varepsilon_+\ \text{sur } \Gamma^{*\varepsilon}_+, \end{cases}$$

sous la condition de compatibilité

$$(CC^\varepsilon_{x,y})\int_{\Omega^*_-}\left(\mu_-h_-\right)(x,y)\,dxdy+\int_{\Omega^{*\varepsilon}_+}\left(\mu_+h^\varepsilon_+\right)(x,y)\,dxdy+\int_{\Gamma^{*\varepsilon}_+}\mu_+l^\varepsilon_+\left(\sigma\right)d\sigma=0.$$

Par des changements de variables naturels, ce problème est réécrit sous forme d'un problème différentiel opérationnel du second ordre posé sur $]-\infty,\delta[$. Les conditions de bord, de transmission et la condition de jauge, donnent l'existence et l'unicité de la solution dans un cadre L^p. On revient ensuite au problème $\left(P^\varepsilon_{x,y}\right)$ pour obtenir le résultat suivant.

Théorème .12 *Soient $l^\varepsilon_+\in W^{1-\frac{1}{p},p}\left(\Gamma^{*\varepsilon}_+\right)$ et $h_-\in L^p\left(\Omega^*_-\right)$, $h^\varepsilon_+\in L^p\left(\Omega^{*\varepsilon}_+\right)$, $1<p<\infty$ avec $p\neq 2$, satisfaisant la condition de compatibilité $(CC^\varepsilon_{x,y})$. Alors, le problème $\left(P^\varepsilon_{x,y}\right)$ admet une unique solution*

$$w^\varepsilon=\begin{cases} w^\varepsilon_- \ \textit{dans } \Omega^*_- \\ w^\varepsilon_+ \ \textit{dans } \Omega^{*\varepsilon}_+, \end{cases}$$

telle que

$$w^\varepsilon_-\in W^{2,p}\left(\Omega^*_-\right),\qquad w^\varepsilon_+\in W^{2,p}\left(\Omega^{*\varepsilon}_+\right).$$

Chapitre 3

Il s'agit d'étudier une équation différentielle du second ordre sur toute la droite dans deux cas simples : le cas scalaire puis le cas où les opérateurs commutent. Ce travail prépare le chapitre suivant.

On étudie donc les équations

$$u''(x)+2Bu'(x)+Au(x)=f(x),\ x\in\mathbb{R}, \tag{15}$$

et

$$u''(x)+\left(L-M\right)u'(x)-LMu(x)=f(x),\ x\in\mathbb{R}. \tag{16}$$

Étude de (16) dans un cadre commutatif höldérien

On suppose

$$D(L)=D(M), \tag{17}$$

$$D(LM)=D(ML), \tag{18}$$

$$\forall\lambda\in\rho(L),\forall\mu\in\rho(M),\ \left(\lambda I-L\right)^{-1}\left(\mu I-M\right)^{-1}=\left(\mu I-M\right)^{-1}\left(\lambda I-L\right)^{-1}, \tag{19}$$

$$L,\, M \text{ sont inversibles dans } L(X), \tag{20}$$

$$L + M \text{ est inversible dans } L(X), \tag{21}$$

$$L,\, M \text{ génèrent un semi-groupe analytique généralisé sur } X. \tag{22}$$

Sous ces hypothèses, le cas scalaire permet d'avoir une représentation explicite de la solution de l'équation (16) sous la forme suivante :

$$u(x) = (L+M)^{-1} \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} f(s) ds + (L+M)^{-1} \int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L} f(s) ds. \tag{23}$$

On montre ensuite ce résultat essentiel.

Théorème .13 *On suppose (17)-(22). Soit $f \in BUC^{\theta}(\mathbb{R}; X)$, $\theta \in]0,1[$.*

1. *L'équation (16) admet une unique solution classique u définie par (23).*
2. *u vérifie la propriété de régularité maximale*

$$u'',\, (L-M)\, u',\, LMu \in BUC^{\theta}(\mathbb{R}; X).$$

Étude de (16) dans un cadre commutatif L^p

On suppose (17)-(20) et aussi

$$X \text{ est un espace UMD}, \tag{24}$$

$$\exists\, \theta_L, \theta_M \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, (-L) \in BIP(\theta_L, X) \text{ et } (-M) \in BIP(\theta_M, X). \tag{25}$$

On obtient le résultat essentiel suivant.

Théorème .14 *On suppose (17)-(20) et (24)-(25). Soit $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$, $1 < p < \infty$. Alors, l'équation (16) admet une unique solution classique u définie par (23).*

Étude de (15) dans un cadre commutatif höldérien

On suppose

$$\begin{cases} B^2 - A \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X,\, \mathbb{R}^- \subset \rho(B^2 - A), \\ \exists C > 0,\, \forall \lambda \leqslant 0,\, \left\| \left(B^2 - A - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{1 + |\lambda|}, \end{cases} \tag{26}$$

$$D(A) \subset D(B^2), \tag{27}$$

$$D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \subset D(B), \tag{28}$$

$$D(BA) \subset D(B^3), \tag{29}$$

$$\forall y \in D(B),\, B(B^2 - A)^{-1} y = (B^2 - A)^{-1} B y, \tag{30}$$

$$A \text{ est inversible dans } L(X). \tag{31}$$

On suppose, de plus, que les opérateurs

$$L := B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}, \qquad M := -B - \left(B^2 - A\right)^{1/2},$$

vérifient (22).

On peut, de même que pour l'équation (16), obtenir une représentation de la solution de (15) sous la forme

$$\begin{aligned} u(x) = &-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} \left(B^2 - A\right)^{-1/2} e^{(x-s)\left(-B-\sqrt{B^2-A}\right)} f(s)ds \\ &-\frac{1}{2}\int_{x}^{+\infty} \left(B^2 - A\right)^{-1/2} e^{(s-x)\left(B-\sqrt{B^2-A}\right)} f(s)ds,\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{32}$$

Le résultat optimal est le suivant.

Théorème .15 *On suppose (22) et (26)-(31). Soit $f \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$, $\theta \in]0,1[$.*

1. *L'équation (15) admet une unique solution classique u définie par (32).*
2. *u vérifie la propriété de régularité maximale*

$$u'',\ Bu',\ Au \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X).$$

Étude de (15) dans un cadre commutatif L^p

On suppose (24), (26)-(31) avec

$$L := B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}, \qquad M := -B - \left(B^2 - A\right)^{1/2},$$

vérifiant (25). On obtient le résultat optimal suivant.

Théorème .16 *On suppose (24)-(31). Soit $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$, $1 < p < \infty$. Alors, l'équation (15) admet une unique solution classique u définie par (32).*

Chapitre 4

On reprend l'étude de l'équation (16) avec un paramètre $\omega > 0$, mais dans un cadre non commutatif : on ne suppose pas (19) mais plutôt l'hypothèse de non commutativité (38) donnée ci-dessous. On étudie donc l'équation (11) :

$$u''(x) + (L_\omega - M_\omega)\, u'(x) + \frac{1}{4}\left((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2\right) u(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Étude de (11) dans un cadre non commutatif höldérien

Les hypothèses sont les suivantes. Il existe un réel positif fixé ω_0 tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \delta > 0,\ \exists C > 0 : \forall \omega \geqslant \omega_0,\ S_\delta \subset \rho(L_\omega),\ S_\delta \subset \rho(M_\omega), \\ \left\|(L_\omega - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{|z|},\ \left\|(M_\omega - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{|z|}, z \in S_\delta, \end{array} \right. \tag{33}$$

où $S_\delta := \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \delta\right\}$. Pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, on suppose également

$$D(L_\omega) = D(M_\omega), \tag{34}$$

$$D\left(\left(L_\omega + M_\omega\right)^2\right) \subset D\left(\left(L_\omega - M_\omega\right)^2\right), \tag{35}$$

$$L_\omega,\ M_\omega \text{ sont inversibles dans } L(X), \tag{36}$$

$$L_\omega + M_\omega \text{ est inversible dans } L(X). \tag{37}$$

L'hypothèse fondamentale de non commutativité est la suivante

$$\forall \omega \geqslant \omega_0,\ \|C_{L_\omega,M_\omega}\|_{L(X)} \leqslant \chi(\omega), \tag{38}$$

où

$$C_{L_\omega,M_\omega} := \left(L_\omega + M_\omega\right)\left[\left(L_\omega - M_\omega\right); \left(L_\omega + M_\omega\right)^{-1}\right]\left(L_\omega + M_\omega\right)^{-1},$$

et

$$\chi : [\omega_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+ \text{ avec } \lim_{\omega\to+\infty} \chi(\omega) = 0.$$

On montre que l'hypothèse (38) peut être réécrite sous la forme suivante

$$\forall \omega \geqslant \omega_0,\ \left\|\left[M_\omega; L_\omega\right]\left(L_\omega + M_\omega\right)^{-2}\right\|_{L(X)} \leqslant \chi(\omega).$$

Dans beaucoup d'exemples concrets en EDP, on trouve $\chi(\omega) = O\left(\dfrac{1}{\omega^\alpha}\right)$, où $\alpha > 0$.

Pour avoir une représentation de la solution, on utilise celle du cas commutatif, voir (23), et des considérations heuristiques : on suppose qu'il existe une solution u à l'équation (11) et on remplace la fonction f dans (23) par

$$u'' + \left(L_\omega - M_\omega\right)u' + \frac{1}{4}\left(\left(L_\omega - M_\omega\right)^2 - \left(L_\omega + M_\omega\right)^2\right)u.$$

En effectuant des intégrations par parties, on obtient une équation intégrale vérifiée par $v := (L_\omega + M_\omega)^2 u$ écrite sous la forme

$$v + R_\omega(v) = F_\omega(f),$$

où R_ω est un opérateur dépendant du commutateur C_{L_ω,M_ω}, entre autres. On se place alors dans un espace de Banach adéquat, à savoir $BUC^\theta\left(\mathbb{R}; X\right)$, pour résoudre cette équation intégrale et en déduire, pour ω assez grand, la représentation suivante

$$u = \left(L_\omega + M_\omega\right)^{-2}\left\{\left(I + R_\omega\right)^{-1}\left(F_\omega(f)\right)\right\}.$$

En étudiant la régularité de cette représentation, on obtient, sous les hypothèses citées précédemment, l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution classique.

Théorème .17 *On suppose (33)-(38). Soit $f \in BUC^\theta\left(\mathbb{R}; X\right)$, $\theta \in]0,1[$. Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$,*

1. *l'équation (11) admet une unique solution classique u ;*
2. *u vérifie la propriété de régularité maximale*

$$u'',\ \left(L_\omega - M_\omega\right)u',\ \left(L_\omega + M_\omega\right)^2 u \in BUC^\theta\left(\mathbb{R}; X\right).$$

Étude de (11) dans un cadre non commutatif L^p

On suppose qu'il existe un réel positif fixé ω_0 tel que pour tout $\omega \geqslant \omega_0$ les hypothèses (34)-(38) sont vérifiées et aussi :

$$X \text{ est un espace UMD,} \tag{39}$$

$$\begin{cases} \forall \omega \geqslant \omega_0,\,]-\infty, 0[\subset \rho\left(-L_\omega\right),\,]-\infty, 0[\subset \rho\left(-M_\omega\right); \\ \exists C \geqslant 1,\, \forall \omega \geqslant \omega_0,\, \forall \lambda > 0,\, \left\|\left(L_\omega - \lambda I\right)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{\lambda},\, \left\|\left(M_\omega - \lambda I\right)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{\lambda}, \end{cases} \tag{40}$$

$$\begin{cases} \forall \omega \geqslant \omega_0,\, \forall s \in \mathbb{R},\, (-L_\omega)^{is}, (-M_\omega)^{is} \in L(X); \\ \exists \theta_L, \theta_M \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[, \exists C \geqslant 1,\, \forall \omega \geqslant \omega_0,\, \forall s \in \mathbb{R},\, \left\|(-L_\omega)^{is}\right\|_{L(X)} \leqslant Ce^{\theta_L |s|},\, \left\|(-M_\omega)^{is}\right\|_{L(X)} \leqslant Ce^{\theta_M |s|}. \end{cases} \tag{41}$$

On étudie la régularité L^p de la représentation de la solution trouvée dans le cadre höldérien, et on obtient, l'existence et l'unicité de la solution classique.

Théorème .18 *On suppose (34)-(41). Soit $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$, $1 < p < \infty$. Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, l'équation (11) admet une unique solution classique u.*

On étudie ensuite l'équation (9) :

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x),\, x \in \mathbb{R}.$$

Étude de (9) dans un cadre non commutatif höldérien

On suppose

$$\begin{cases} B^2 - A_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X,\, \mathbb{R}^- \subset \rho(B^2 - A_{\omega_0}), \\ \exists C > 0,\, \forall \lambda \leqslant 0, \left\|\left(B^2 - A_{\omega_0} - \lambda I\right)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{1 + |\lambda|}, \end{cases} \tag{42}$$

$$\begin{cases} (i)\, D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \subset D(B), \\ (ii)\, D\left(B^2 - A\right) \subset D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2} B\right), \end{cases} \tag{43}$$

$$\forall \omega \geqslant \omega_0,\, \left\|\left[B; \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\right]\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \chi(\omega), \tag{44}$$

où

$$\chi : [\omega_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+ \text{ avec } \lim_{\omega \to +\infty} \chi(\omega) = 0,$$

et pour tout $\omega \geqslant \omega_0$

$$A_\omega := A - \omega I.$$

On suppose, de plus, que les opérateurs

$$L_\omega := B - \left(B^2 - A + \omega I\right)^{1/2}, \qquad M_\omega := -B - \left(B^2 - A + \omega I\right)^{1/2},$$

vérifient (33) et (36). On obtient alors le résultat optimal suivant.

Théorème .19 *On suppose (33), (36) et (42)-(44). Soit $f \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$, $\theta \in]0, 1[$. Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$*

1. l'équation (9) admet une unique solution classique u satisfaisant de plus

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) \in D\left(B^2 - A\right),$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right);$$

2. u vérifie la propriété de régularité maximale

$$u'',\ Bu',\ Au,\ B^2u \in BUC^{\theta}\left(\mathbb{R}; X\right).$$

Étude de (9) dans un cadre non commutatif L^p

On suppose toujours (36), (39), (42)-(44) et aussi que les opérateurs

$$L_\omega := B - \left(B^2 - A + \omega I\right)^{1/2}, \qquad M_\omega := -B - \left(B^2 - A + \omega I\right)^{1/2},$$

vérifient (40)-(41). On a alors le résultat essentiel suivant.

Théorème .20 *On suppose (39)-(44). Soit $f \in L^p\left(\mathbb{R}; X\right)$, $1 < p < \infty$. Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, l'équation (9) admet une unique solution classique u satisfaisant de plus*

$$p.p.\, x \in \mathbb{R},\ u(x) \in D\left(B^2 - A\right),$$
$$p.p.\, x \in \mathbb{R},\ u'(x) \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right),$$

et

$$B^2u \in L^p\left(\mathbb{R}; X\right).$$

Chapitre 5

Il est consacré à l'étude du problème (12) :

$$\begin{cases} u''(x) + \left(L_\omega - M_\omega\right)u'(x) + \dfrac{1}{4}\left(\left(L_\omega - M_\omega\right)^2 - \left(L_\omega + M_\omega\right)^2\right)u(x) = f(x),\ x \in (0,1), \\ u(0) = u_0, \qquad u(1) = u_1. \end{cases}$$

dans un cadre non commutatif.

Étude de (12) dans un cadre non commutatif höldérien

On se place sous les hypothèses (33)-(35) et (37)-(38) du précédent chapitre avec de plus

$$I - e^{L_\omega}e^{M_\omega} \text{ ou } I - e^{M_\omega}e^{L_\omega} \text{ est inversible dans } L(X), \tag{45}$$

$$\left(X, D\left(L_\omega\right)\right)_{1+\theta,\infty} = \left(X, D\left(M_\omega\right)\right)_{1+\theta,\infty}. \tag{46}$$

On note que, dans le cas commutatif ($L_\omega M_\omega = M_\omega L_\omega$), ces deux dernières hypothèses sont satisfaites. Il est naturel pour le cas non commutatif de supposer de telles hypothèses supplémentaires (on pourra comparer avec Da-Prato-Grisvard, voir Chapitre IV, Section 3.2).

On procède alors comme au précédent chapitre : on part de la représentation de la solution du cas commutatif sur $[0,1]$ et, après de longs et pénibles calculs, on obtient une équation intégrale vérifiée par $v := (L_\omega + M_\omega)^2 u$ et écrite sous la forme

$$v + R_\omega(v) = F_\omega(f) + D_\omega,$$

où R_ω dépend toujours de C_{L_ω,M_ω} et D_ω dépend des données u_0 et u_1. Il ne s'agit évidemment pas des mêmes R_ω et F_ω que ceux obtenus précédemment. On se place dans l'espace de Banach complexe :

$$C^\theta_{L_\omega,M_\omega}\left([0,1];X\right) := \Big\{\Phi \in C^\theta\left([0,1];X\right) : (L_\omega - M_\omega)L_\omega^{-1}C_{L_\omega,M_\omega}\Phi(0) \in \left(X, D\left(L_\omega\right)\right)_{\theta,\infty}$$
$$\text{et}\ \ (L_\omega - M_\omega)M_\omega^{-1}C_{L_\omega,M_\omega}\Phi(1) \in \left(X, D\left(L_\omega\right)\right)_{\theta,\infty}\Big\},$$

pour résoudre cette équation intégrale. On en déduit, pour ω assez grand, la représentation suivante :

$$u = \left(L_\omega + M_\omega\right)^{-2}\Big\{\left(I + R_\omega\right)^{-1}\left(F_\omega(f) + D_\omega\right)\Big\}.$$

L'étude de cette représentation permet d'obtenir, un résultat d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution dans le cas où le second membre est dans un espace d'interpolation.

Théorème .21 *On suppose (33)-(35), (37)-(38) et (45)-(46). Soit $\theta \in \left]0,1\right[$. Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (12) admet une unique solution classique u satisfaisant*

$$u'',\ \left(L_\omega - M_\omega\right)u',\ \left(L_\omega + M_\omega\right)^2 u \in C^\theta\left([0,1];X\right)$$
$$\left(L_\omega + M_\omega\right)^2 u \in C^\theta_{L_\omega,M_\omega}\left([0,1];X\right).$$

2. *$f \in C^\theta\left([0,1];X\right)$ et*

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in D\left(L_\omega M_\omega\right) \cap D(M_\omega L_\omega), \\ M_\omega\left(L_\omega + M_\omega\right)u_0 + \left(L_\omega + M_\omega\right)L_\omega^{-1}f(0) \in \left(X, D\left(L_\omega\right)\right)_{\theta,\infty}, \\ L_\omega\left(L_\omega + M_\omega\right)u_1 + \left(L_\omega + M_\omega\right)M_\omega^{-1}f(1) \in \left(X, D\left(L_\omega\right)\right)_{\theta,\infty}, \\ (L_\omega - M_\omega)L_\omega^{-1}C_{L_\omega,M_\omega}(L_\omega + M_\omega)^2 u_0 \in \left(X, D\left(L_\omega\right)\right)_{\theta,\infty}, \\ (L_\omega - M_\omega)M_\omega^{-1}C_{L_\omega,M_\omega}(L_\omega + M_\omega)^2 u_1 \in \left(X, D\left(L_\omega\right)\right)_{\theta,\infty}. \end{cases}$$

Étude de (12) dans un cadre non commutatif L^p

Sous les hypothèses (34)-(35) et (37)-(41) du précédent chapitre et sous (45) avec de plus

$$\forall\omega \geqslant \omega_0,\ ker\left(L_\omega\right) = ker\left(M_\omega\right) = \{0\},\ \overline{Im\left(L_\omega\right)} = \overline{Im\left(M_\omega\right)} = X, \tag{47}$$

on étudie la régularité L^p de la représentation de la solution trouvée dans le cadre höldérien, et on obtient, l'existence et l'unicité de la solution classique.

Théorème .22 *On suppose (34)-(35), (37)-(41), (45) et (47). Soit $f \in L^p\left(0,1;X\right)$, $1 < p < \infty$. Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (12) admet une unique solution classique u.*
2. *$u_0, u_1 \in \left(X, D\left(\left(L_\omega + M_\omega\right)^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p}$.*

On étudie ensuite le problème (10) :

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x),\ x \in (0,1), \\ u(0) = u_0, \qquad u(1) = u_1. \end{cases}$$

Étude de (10) dans un cadre non commutatif höldérien

Comme au précédent chapitre, on suppose (33), (42)-(44), avec de plus (45) et

$$\begin{aligned}&\left(X, D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\right)\right)_{\frac{1+\theta}{2},\infty}\\ &=\left(X, D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(-B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\right)\right)_{\frac{1+\theta}{2},\infty}.\end{aligned} \tag{48}$$

On introduit, pour $\omega \geqslant \omega_0$, l'espace de Banach complexe $C^{\theta}_{A,B,\omega}([0,1];X)$ des fonctions Φ de $C^{\theta}([0,1];X)$ telles que

$$\begin{cases} B\left(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}-I\right)^{-1}\left[B;\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\right]\left(B^2-A_\omega\right)^{-1}\Phi(0)\in\left(X, D\left(B^2-A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty},\\ B\left(-B-\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}-I\right)^{-1}\left[B;\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\right]\left(B^2-A_\omega\right)^{-1}\Phi(1)\in\left(X, D\left(B^2-A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}.\end{cases}$$

Le résultat essentiel est alors le suivant.

Théorème .23 *On suppose (33), (42)-(45) et (48). Soit $\theta\in\,]0,1[$. Alors, il existe $\omega^*\geqslant\omega_0$ tel que pour tout $\omega\geqslant\omega^*$, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (10) admet une unique solution classique u satisfaisant de plus*

$$\begin{aligned}&\forall x\in[0,1], u(x)\in D\left(B^2-A\right),\\ &\forall x\in[0,1], u'(x)\in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right),\end{aligned}$$

   et la propriété de régularité maximale

$$\begin{aligned}&u'',\ Bu',\ Au\in C^{\theta}([0,1];X),\\ &\left(B^2-A+\omega I\right)u\in C^{\theta}_{A,B,\omega}([0,1];X).\end{aligned}$$

2. *$f\in C^{\theta}([0,1];X)$, $u_0,u_1\in D(A)$ et*

$$\begin{cases}\left(-B-\left(B^2-A+\omega I\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A+\omega I\right)^{1/2}u_0+\left(B^2-A+\omega I\right)^{1/2}\left(B-\left(B^2-A+\omega I\right)^{1/2}\right)^{-1}f(0),\\ \left(B-\left(B^2-A+\omega I\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A+\omega I\right)^{1/2}u_1+\left(B^2-A+\omega I\right)^{1/2}\left(-B-\left(B^2-A+\omega I\right)^{1/2}\right)^{-1}f(1),\\ B\left(B-\left(B^2-A+\omega I\right)^{1/2}\right)^{-1}\left[B;\left(B^2-A+\omega I\right)^{1/2}\right]u_0,\\ B\left(-B-\left(B^2-A+\omega I\right)^{1/2}\right)^{-1}\left[B;\left(B^2-A+\omega I\right)^{1/2}\right]u_1,\end{cases}$$

   sont dans $\left(X, D\left(B^2-A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}$.

Étude de (10) dans un cadre non commutatif L^p

On suppose, comme au Chapitre IV, (39)-(44), et aussi (45) pour obtenir le résultat suivant.

Théorème .24 *On suppose (39)-(45). Soit $f\in L^p(0,1;X)$, $1<p<\infty$. Alors, il existe $\omega^*\geqslant\omega_0$ tel que pour tout $\omega\geqslant\omega^*$, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (10) admet une unique solution classique u satisfaisant de plus*

$$\begin{aligned}&p.p.\ x\in(0,1), u(x)\in D\left(B^2-A\right),\\ &p.p.\ x\in(0,1), u'(x)\in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right),\end{aligned}$$

   et

$$B^2u\in L^p(0,1;X).$$

2. $u_0, u_1 \in \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p}$.

Perspectives

On donne aussi une liste non-exhaustive de perspectives s'inscrivant dans la continuité de ces recherches.

4. Publications

On donne ici l'ensemble des articles, communications et posters réalisés sur les travaux de cette thèse.

- L'ensemble de ces travaux a été présenté lors d'un séminaire du LMAH :
  - *Étude unifiée d'équations aux dérivées partielles de type elliptique régies par des équations différentielles à coefficients opérateurs dans un cadre non commutatif : applications concrètes dans les espaces de Hölder et les espaces L^p*, Séminaire du LMAH, 14/06/2012.
- Les travaux sur la cellule ont fait l'objet d'un article soumis :
  - R. Labbas, K. Lemrabet, K. Limam, A. Medeghri & M. Meisner, *On Some Transmission Problems Set in a Biological Cell, Analysis and Resolution*, soumis (2012) ;

  de deux communications :
  - *On Some Transmission Problems Set in a Biological Cell*, Journée des Doctorants SPMII, Rouen, 19/06/2012 ;
  - *Problèmes de Transmission Dans une Cellule Biologique*, Journée de la Fédération Normandie-Mathématiques, Rouen, 13/06/2012 ;

  et d'une présentation de poster :
  - *Problèmes de Transmission Dans une Cellule Biologique*, Colloque EDP Normandie, Rouen, 25-26/10/2011.

- Les travaux du cadre commutatif sur la droite réelle (Chapitre III) ont fait l'objet d'une communication :
  - *Étude d'Équations Différentielles Abstraites Complètes de Type Elliptique sur Toute la Droite, Cas UMD et Cas Höldérien*, 2ème Mini Workshop sur les EDA, Mostaganem (Algérie), 12-16/12/2010.

- Les travaux du cadre non commutatif sur la droite réelle (Chapitre IV) ont fait l'objet d'une publication [21] :
  - A. Favini, R. Labbas, S. Maingot & M. Meisner, *Study of Complete Abstract Elliptic Differential Equations in Non-Commutative Cases*, Appl. Anal. (2011) ;

  d'une communication :
  - *Étude d'Équations Différentielles Abstraites Complètes de Type Elliptique sur Toute la Droite dans un Cadre Non Commutatif*, Journée de la Fédération Normandie-Mathématiques, Le Havre, 09/06/2011 ;

  ainsi que deux présentations de poster :
  - *Études d'Équations Différentielles Abstraites Complètes de Type Elliptique Dans un Cadre Non Commutatif*, Journée des Doctorants SPMII, Rouen, 12/04/2011 ;
  - *Études d'Équations Différentielles Abstraites Complètes de Type Elliptique*, Colloque EDP Normandie, Caen, 27-28/10/2010.

- Les travaux du cadre non commutatif sur $[0, 1]$ (Chapitre V) ont fait l'objet d'une publication [20] :
  - A. Favini, R. Labbas, S. Maingot & M. Meisner, *Boundary Value Problem for Elliptic Differential Equations in Noncommutative Cases*, Disc. Contin. Dyn. Syst. (2012).

Chapitre I

Rappels

1 Opérateurs linéaires

On va effectuer quelques rappels sur les opérateurs linéaires bornés et fermés afin que les notations utilisées au cours de cette thèse soient claires. On donnera aussi une définition des opérateurs sectoriels. Les démonstrations ne sont pas données, on renvoie par exemple à Dunford-Schwartz [16].

Soient $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ et $(Z, \|\cdot\|_Z)$ trois espaces vectoriels normés complexes.

Définition I.1

1. *Un* ***opérateur linéaire*** *de X dans Y est une application linéaire A définie d'un sous-espace vectoriel $D(A) \subset X$ et à valeurs dans Y, i.e. tel que pour tout $x, y \in D(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :*
   - $A(x + y) = Ax + Ay$,
   - $A(\lambda x) = \lambda Ax$.

   (On note que, par abus, on écrit toujours $A(x) = Ax$ pour tout $x \in D(A)$).
2. *$D(A)$ est appelé le* ***domaine*** *de A. On dit que A est à* ***domaine dense*** *(ou* ***densément défini****) si $\overline{D(A)} = X$, i.e. si pour tout $x \in X$, il existe une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $D(A)$ telle que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.*
3. *On appelle* ***noyau*** *de A le sous-espace de X, noté $Ker\,(A)$, défini par :*
$$Ker\,(A) := \{x \in D(A) : Ax = 0\}\,.$$
4. *On appelle* ***graphe*** *de A le sous espace de $X \times Y$, noté $G(A)$, défini par :*
$$G(A) := \{(x, y) \in X \times Y : x \in D(A),\ y = Ax\}\,.$$

Définition I.2 *Soient $A : D(A) \subset X \to Y$ et $B : D(B) \subset X \to Z$ deux opérateurs linéaires. On peut définir l'opérateur BA :*
$$\left\{\begin{array}{l} D(BA) = \{x \in D(A) : Ax \in D(B)\} \\ (BA)x = B(Ax),\ x \in D(BA). \end{array}\right.$$
On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n, la n-ième puissance de A, par :
$$\left\{\begin{array}{l} D(A^0) = X \text{ et } A^0 = I, \\ D(A^1) = D(A) \text{ et } A^1 = A, \\ \forall n \geqslant 2, D\left(A^n\right) = \left\{x \in D\left(A^{n-1}\right) : A^{n-1}x \in D\left(A\right)\right\} \text{ et } A^n = AA^{n-1}. \end{array}\right.$$
Si A est injectif, on peut définir l'inverse de A, noté A^{-1}, par :
$$\begin{array}{rcl} A^{-1} : A(D\left(A\right)) & \to & D(A) \\ y & \mapsto & A^{-1}y = x \text{ où } x \in D(A) \text{ est défini par } Ax = y. \end{array}$$

Définition I.3 *Soient A et B deux opérateurs linéaires de X dans Y. On dit que B est une* ***extension*** *ou un* ***prolongement*** *de A et on note $A \subset B$ si*

$$\begin{cases} D(A) \subset D(B) \text{ et} \\ \forall x \in D(A),\ Ax = Bx. \end{cases}$$

1.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition I.4 *On dit qu'un opérateur linéaire A défini de X tout entier dans Y est* ***borné*** *s'il est continu, i.e. si pour tout $x_0 \in X$*

$$\left(\lim_{x \to x_0} \|x - x_0\|_X = 0\right) \Rightarrow \left(\lim_{x \to x_0} \|Ax - Ax_0\|_Y = 0\right),$$

ce qui est équivalent à

$$\lim_{x \to 0} \|Ax\|_Y = 0.$$

On note $L(X,Y)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans Y. On pose $L(X) := L(X,X)$.

Proposition I.5

$$A \in L(X,Y) \Leftrightarrow \left(\exists M > 0, \forall x \in X, \|Ax\|_Y \leqslant M \|x\|_X\right).$$

On définit alors une norme sur $L(X,Y)$ notée $\|\cdot\|_{L(X,Y)}$ et définie pour tout $A \in L(X,Y)$ par :

$$\|A\|_{L(X,Y)} := \sup_{x \in X,\, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y.$$

Proposition I.6 *Si Y est un espace de Banach alors $L(X,Y)$ est un espace de Banach.*

Proposition I.7 *Soit $A \in L(X)$. Si $\|A\|_{L(X)} < 1$, alors $I - A$ est inversible dans $L(X)$ et $(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.*

1.2 Opérateurs linéaires fermés

Définition I.8

1. *Un opérateur linéaire de X dans Y est* ***fermé*** *si son graphe est un sous-espace vectoriel fermé de $X \times Y$.*
2. *Un opérateur linéaire est dit* ***fermable*** *s'il admet une extension fermée.*

Proposition I.9 *Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \to Y$ est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de $D(A)$ telle que*

$$\begin{cases} x_n \to x \text{ dans } X, \\ Ax_n \to y \text{ dans } Y, \end{cases}$$

on a $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

Définition I.10 *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X. L'****ensemble résolvant*** *$\rho(A)$ de A est défini par :*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \text{ est inversible dans } L(X)\}.$$

Si $\lambda \in \rho(A)$ on définit la ***résolvante*** *$R_\lambda(A)$ de A au point λ par :*

$$R_\lambda(A) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

Le ***spectre*** *de A, noté $\sigma(A)$, est défini par*

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \backslash \rho(A).$$

Proposition I.11 *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X. On a la formule de l'identité de la résolvante, i.e. pour tout $\lambda, \mu \in \rho(A)$*

$$R_\lambda(A)R_\mu(A) = \frac{R_\lambda(A) - R_\mu(A)}{\mu - \lambda}.$$

Proposition I.12 *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X. Alors l'application $R : \lambda \in \rho(A) \mapsto R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est analytique sur $\rho(A)$.*

Proposition I.13 *Soit $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire.*

1. *Si A est un opérateur fermé, alors pour tout $B \in L(X, Y)$ l'opérateur $A + B : D(A) \subset X \to Y$ est fermé.*
2. *Si A est un opérateur fermé et injectif alors A^{-1} est fermé.*
3. *Si A est un opérateur fermé à valeurs dans X et $D(A)$ est fermé dans X alors A est continu de $D(A)$ dans X (Application directe du Théorème du graphe fermé).*
4. *Si A est un opérateur continu de $D(A)$ dans X, alors A est fermé si et seulement si son domaine est fermé.*
5. *Si $\rho(A) \neq \varnothing$ alors A est fermé.*

Définition I.14 *Soit $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire. On peut munir $D(A)$ d'une norme notée $\|\cdot\|_{D(A)}$ et appelée **norme du graphe**, elle est définie pour tout $x \in D(A)$ par :*

$$\|x\|_{D(A)} := \|x\|_X + \|Ax\|_Y .$$

Proposition I.15 *Si A est un opérateur linéaire fermé, alors $\left(D, \|\cdot\|_{D(A)}\right)$ est un espace de Banach.*

La proposition suivante est un résultat qui sera beaucoup utilisé dans les chapitres suivants pour justifier que certains opérateurs utilisés sont bornés.

Proposition I.16 *Soient $A \in L(X)$ et $B : D(B) \subset X \to X$ un opérateur linéaire fermé tels que $Im(A) \subset D(B)$. Alors $BA \in L(X)$.*

Preuve. Il est clair que BA est défini sur X. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de X telle que

$$\begin{cases} x_n \to x \text{ dans } X, \\ (BA)\, x_n \to y \text{ dans } X. \end{cases}$$

Alors comme $Im(A) \subset D(B)$, $(Ax_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'éléments de $D(B)$ et comme $A \in L(X)$ on a

$$\begin{cases} Ax_n \to Ax \text{ dans } X, \\ B\,(Ax_n) \to y \text{ dans } X. \end{cases}$$

B étant fermé on a, grâce à la Proposition I.9, $Ax \in D(B)$ et $B\,(Ax) = y$. Ainsi $x \in D(BA)$ et $(BA)\, x = y$. BA est donc un opérateur fermé et défini sur X. D'après la Proposition I.13, point 3., on obtient BA borné sur X, i.e. $BA \in L(X)$. ■

1.3 Opérateurs sectoriels

Il est important de préciser qu'il existe de nombreuses définitions équivalentes pour les opérateurs sectoriels. On utilisera ici celle donnée dans Haase [37].

Définition I.17 *Soit* $0 < \omega \leqslant \frac{\pi}{2}$. *On définit le secteur suivant*

$$S_\omega := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \omega\}. \tag{I.1}$$

1. *Un opérateur linéaire fermé* A *sur* X *est dit* ***sectoriel d'angle*** ω *si*

$$\sigma(A) \subset \overline{S_\omega},$$

et

$$\forall \omega' \in]\omega, \pi[\,, M(A\omega') := \sup_{\lambda \notin \overline{S_{\omega'}}} \left\| \lambda (A - \lambda I)^{-1} \right\| < \infty.$$

2. *On note* $Sect(\omega)$ *l'ensemble des opérateurs linéaires sur* X *qui sont sectoriels d'angle* ω.

2 Espaces fonctionnels

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach complexe.

2.1 Intégrales de Bochner

Dans cette thèse, les fonctions sont définies à valeurs dans X. La mesurabilité utilisée est celle définie au sens de Bochner. On va donc en donner la définition avant de donner celle d'une intégrale de fonctions à valeurs dans X.

Définition I.18 *Soient* a *et* b *deux réels tels que* $a < b$. *Soit* $f :]a, b[\to X$.

1. f *est dite* ***étagée*** *si pour tout* $x \in]a, b[$ *il existe une famille finie* $(x_i)_{i \in I}$ *d'éléments de* X *et une famille finie* $(A_i)_{i \in I}$ *de parties mesurables de* $]a, b[$ *vérifiant*

$$\begin{cases} \bigcup\limits_{i \in I} A_i =]a, b[\,, \\ \forall i, j \in I, i \neq j, \ A_i \cap A_j = \varnothing, \end{cases}$$

telles que

$$f(x) = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{I}_{A_i},$$

où $\mathbb{I}_{A_i}$ *est la fonction caractéristique de* A_i.

2. f *est dite* ***Bochner-mesurable****, i.e. mesurable au sens de Bochner, s'il existe une suite* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de fonctions étagées telle que*

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x) \quad p.p.\, x \in]a, b[\,.$$

3. f *est dite* ***Bochner-intégrable****, i.e. intégrable au sens de Bochner, s'il existe une suite de fonctions* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *convergeant vers* f *presque partout et telle que*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \|f_n(x) - f(x)\| \, dx = 0.$$

La proposition suivante donne un lien entre l'intégrale de Bochner et l'intégrale de Lebesgue.

Proposition I.19 *Soient* a *et* b *deux réels tels que* $a < b$ *et* $f :]a, b[\to X$ *une fonction Bochner-mesurable. Alors* f *est Bochner-intégrable si et seulement si l'application* $x \in]a, b[\mapsto \|f(x)\|$ *est Lebesgue-intégrable.*

Remarque I.20 *La Proposition I.19 implique que les propriétés des intégrales de Lebesgue sont valables pour les intégrales de Bochner. De plus on a*

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leqslant \int_a^b \|f(x)\| \, dx.$$

2.2 Espaces de Hölder

Comme il a été énoncé en introduction, on va travailler dans les espaces de Hölder : $C^\theta([0,1];X)$ et $BUC^\theta(\mathbb{R};X)$, $\theta \in]0,1[$. On note que BUC signifie “Bounded Uniformly Continuous”. On va donc définir les espaces de Hölder ainsi que les espaces petit-Hölder et énoncer quelques propriétés importantes de ces espaces. On ne donne pas ici de démonstration, celles-ci sont très classiques.

Définition I.21 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $\theta \in]0,1[$ et $k \in \mathbb{N}$.*

1. *L'ensemble des fonctions θ-höldériennes de $[a,b]$ dans X est défini par*

$$C^\theta([a,b];X) := \left\{ \varphi : [a,b] \to X, \sup_{\xi,\xi' \in [a,b],\, \xi-\xi' \neq 0} \frac{\|\varphi(\xi) - \varphi(\xi')\|}{|\xi - \xi'|^\theta} < \infty \right\}.$$

2. *L'ensemble des fonctions uniformément continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans X est défini par*

$$BUC(\mathbb{R};X) := \left\{ \begin{array}{l} \varphi : \mathbb{R} \to X, \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \|\varphi(\xi)\| < \infty \text{ et } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \\ \forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}, (|\xi - \xi'| \leqslant \delta) \Rightarrow (\|\varphi(\xi) - \varphi(\xi')\| \leqslant \varepsilon) \end{array} \right\}.$$

3. *L'ensemble des fonctions k fois continûment dérivables à dérivées bornées de $\mathbb{R}$ dans X est défini par*

$$BUC^k(\mathbb{R};X) := \left\{ \varphi \in C^k(\mathbb{R};X) : \forall 0 \leqslant i \leqslant k, \varphi^{(i)} \in BUC(\mathbb{R};X) \right\}.$$

4. *L'ensemble des fonctions bornées et θ-höldériennes de $\mathbb{R}$ dans X est défini par*

$$BUC^\theta(\mathbb{R};X) := \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to X, \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \|\varphi(\xi)\| < \infty \text{ et } \sup_{\xi,\xi' \in \mathbb{R},\, \xi-\xi' \neq 0} \frac{\|\varphi(\xi) - \varphi(\xi')\|}{|\xi - \xi'|^\theta} < \infty \right\}.$$

5. *L'ensemble des fonctions k fois continûment dérivables à dérivées bornées et de dérivée k-ème θ-höldérienne de $\mathbb{R}$ dans X est défini par*

$$BUC^{k+\theta}(\mathbb{R};X) := \left\{ \varphi \in BUC^k(\mathbb{R};X) : \varphi^{(k)} \in BUC^\theta(\mathbb{R};X) \right\}.$$

Proposition I.22 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $\theta \in]0,1[$. Alors*

$$BUC^\theta(\mathbb{R};X) \subset BUC(\mathbb{R};X),$$
$$C^\theta([a,b];X) \subset C([a,b];X).$$

Proposition I.23 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $\theta \in]0,1[$ et $k \in \mathbb{N}$.*

1. *$C^\theta([a,b];X)$ est un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_{C^\theta([a,b];X)}$ définie par*

$$\|\varphi\|_{C^\theta([a,b];X)} := \sup_{\xi,\xi' \in [a,b],\ \xi-\xi' \neq 0} \frac{\|\varphi(\xi) - \varphi(\xi')\|}{|\xi - \xi'|^\theta} + \|\varphi\|_{C([a,b];X)}.$$

2. *$BUC(\mathbb{R};X)$ est un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_{BUC(\mathbb{R};X)}$ définie par*

$$\|\varphi\|_{BUC(\mathbb{R};X)} := \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \|\varphi(\xi)\|.$$

3. *$BUC^k(\mathbb{R};X)$ est un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_{BUC^k(\mathbb{R};X)}$ définie par*

$$\|\varphi\|_{BUC^k(\mathbb{R};X)} := \sum_{i=0}^{k} \left\| \varphi^{(i)} \right\|_{BUC(\mathbb{R};X)}.$$

4. *$BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)$ est un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_{BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)}$ définie par*

$$\|\varphi\|_{BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)} := \sup_{\xi,\xi'\in\mathbb{R},\ \xi-\xi'\neq 0} \frac{\|\varphi(\xi)-\varphi(\xi')\|}{|\xi-\xi'|^{\theta}} + \|\varphi\|_{BUC(\mathbb{R};X)}.$$

5. *$BUC^{k+\theta}(\mathbb{R};X)$ est un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_{BUC^{k+\theta}(\mathbb{R};X)}$ définie par*

$$\|\varphi\|_{BUC^{k+\theta}(\mathbb{R};X)} := \sup_{\xi,\xi'\in\mathbb{R},\, \xi-\xi'\neq 0} \frac{\left\|\varphi^{(k)}(\xi)-\varphi^{(k)}(\xi')\right\|}{|\xi-\xi'|^{\theta}} + \sum_{i=0}^{k} \left\|\varphi^{(i)}\right\|_{BUC(\mathbb{R};X)}.$$

Définition I.24 *Soit A un opérateur linéaire sur X de domaine $D(A)$. On définit*

$$BUC(\mathbb{R};D(A)) := \{\varphi \in BUC(\mathbb{R};X) : \forall x\in\mathbb{R}, \varphi(x)\in D(A) \text{ et } x\mapsto A\varphi(x)\in BUC(\mathbb{R};X)\}.$$

On définit de même l'espace $C([a,b];D(A))$, pour $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$.

Définition I.25 *Soient $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$, $\theta\in\,]0,1[$ et $k\in\mathbb{N}$.*

1. *L'ensemble des fonctions bornées et θ-petit-höldériennes de $[a,b]$ dans X est défini par*

$$h^{\theta}([a,b];X) := \left\{\varphi\in C^{\theta}([a,b];X) : \lim_{\delta\to 0}\left(\sup_{\xi\neq\xi'\in\mathbb{R},\,|\xi-\xi'|<\delta} \frac{\|\varphi(\xi)-\varphi(\xi')\|}{|\xi-\xi'|^{\theta}}\right) = 0\right\}.$$

2. *L'ensemble des fonctions k fois continûment dérivables à dérivées bornées et de dérivée k-ème θ-petit-höldérienne de $[a,b]$ dans X est défini par*

$$h^{k+\theta}([a,b];X) := \left\{\varphi\in C^{k}([a,b];X) : \varphi^{(k)}\in h^{\theta}([a,b];X)\right\}.$$

On peut trouver plusieurs propriétés de ces espaces dans Sinestrari [56] ou Lunardi [48]. On a notamment la proposition suivante.

Proposition I.26 *Soient $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$, et $\theta,\alpha\in\,]0,1[$ tels que $\theta>\alpha$. Alors*

$$C^{\theta}([a,b];X)\subset h^{\alpha}([a,b];X).$$

2.3 Espaces de Sobolev

Dans cette thèse, on va également travailler dans les espaces L^p et les espaces de Sobolev dont on donne la définition ci-dessous.

Définition I.27 *Soient $a<b$ finis ou infinis et $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $p\in[1,+\infty]$.*

1. *On définit pour $p\in[1,+\infty[$*

$$L^p(a,b;X) := \{f :]a,b[\to X \text{ Bochner-mesurable, } x\mapsto \|f(x)\|^p \text{ Lebesgue-intégrable}\},$$

et pour $p=+\infty$

$$L^{\infty}(a,b;X) := \left\{f :]a,b[\to X \text{ Bochner-mesurable },\ \sup_{x\in(a,b)} ess\, \|f(x)\| < \infty\right\}.$$

2. *On définit l'**espace de Sobolev***

$$W^{k,p}(a,b;X) := \left\{ f \in L^p(a,b;X),\ [f]^{(j)} \in L^p(a,b;X),\ j = 0,1,...,k \right\},$$

où pour $j = 0,1,...,k$, $[f]^{(j)}$ est la dérivée j-ème au sens des distributions de f et $[f]^{(j)} \in L^p(a,b;X)$ signifie qu'il existe $g_j \in L^p(a,b;X)$ tel que $[f]^{(j)} = [g_j]$.

Proposition I.28 *Soient $a < b$ finis ou infinis, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p \in [1,+\infty]$.*

1. *$L^p(a,b;X)$ est un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p(a,b;X)}$ définie par*

$$\|f\|_{L^p(a,b;X)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_a^b \|f(x)\|^p \, dx \right)^{1/p} & si\ p \in [1,+\infty[\\ \displaystyle\sup_{x \in (a,b)} ess \, \|f(x)\| & si\ p = +\infty. \end{cases}$$

2. *$W^{k,p}(a,b;X)$ est un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_{W^{k,p}(a,b;X)}$ définie par*

$$\|f\|_{W^{k,p}(a,b;X)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \left\| [f]^{(j)} \right\|^p_{L^p(a,b;X)} \right)^{1/p} & si\ p \in [1,+\infty[\\ \displaystyle\max_{j=1,...,k} \left\| [f]^{(j)} \right\|_{L^\infty(a,b;X)} & si\ p = +\infty. \end{cases}$$

Définition I.29 *Soient $a < b$ finis ou infinis et $p \in [1,+\infty]$. Soit A un opérateur linéaire sur X de domaine $D(A)$. On définit*

$$L^p\left(a,b;D(A)\right) := \left\{ \varphi \in L^p\left(a,b;X\right) : \varphi(x) \in D(A)\ p.p.\ x \in (a,b)\ et\ x \mapsto A\varphi(x) \in L^p\left(a,b;X\right) \right\}.$$

3 Calcul fonctionnel

On va introduire le calcul fonctionnel de Dunford pour les opérateurs linéaires bornés, puis pour les opérateurs sectoriels. On donnera aussi l'extension du calcul fonctionnel. Celui-ci sera appliqué sur les puissances fractionnaires d'opérateurs. On renvoie pour les démonstrations à Haase [37].

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach complexe. Pour U un ouvert de $\mathbb{C}$, on désigne par $H(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

Définition I.30 ***(Formule de Cauchy intégrale)*** *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact de U de bord γ orienté positivement. Soient $f \in H(U)$ et $z_0 \in K$. On a*

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Le calcul fonctionnel classique s'appuie sur la formule précédente pour construire $f(A)$, où f est holomorphe sur un voisinage ouvert de $\sigma(A)$ et $A \in L(X)$.

3.1 Calcul fonctionnel de Dunford-Riesz pour les opérateurs linéaires bornés

Définition I.31 ***(Intégrale de Dunford-Riesz)*** *Soient $A \in L(X)$, U un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact de U contenant $\sigma(A)$ et γ le bord de K orienté positivement (γ est donc finie et entoure le spectre de A). Soit $f \in H(U)$. Alors*

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z) \left(zI - A\right)^{-1} dz.$$

De plus $f(A)$ ne dépend que de la fonction f et non du domaine U. Ceci résulte du fait que la fonction $z \mapsto (zI - A)^{-1}$ est analytique sur $\rho(A)$ (voir Proposition I.12).

Proposition I.32 *Soient $A \in L(X)$, U un ouvert de $\mathbb{C}$ et K un compact de U contenant $\sigma(A)$. Alors l'application $\Phi : H(U) \to L(X)$ définie par*

$$\forall f \in H(U), \Phi(f) = f(A),$$

est un homomorphisme d'algèbre.

3.2 Calcul fonctionnel de Dunford pour les opérateurs sectoriels

Soient $\omega \in \left]0, \pi\right[$ et $A \in Sect(\omega)$. On commence par définir des espaces de fonctions holomorphes sur des secteurs S_φ, $\varphi \in \left]0, \pi\right[$, définis par (I.1).

Définition I.33 *Soit $\varphi \in \left]0, \pi\right[$.*

1. *$\mathcal{DR}(S_\varphi)$ est l'espace des fonctions f de $H(S_\varphi)$ vérifiant*

$$\exists C \geqslant 0,\, \exists s > 0,\, \forall z \in S_\varphi,\, |f(z)| \leqslant C \min\left\{|z|^s,\, |z|^{-s}\right\}.$$

2. *$\mathcal{DR}_0(S\varphi)$ est l'espace des fonctions f de $H(S_\varphi)$ bornées sur S_φ admettant un prolongement holomorphe sur un voisinage de 0 et vérifiant*

$$\exists s > 0,\, |f(z)| \leqslant O(|z|^{-s})\, (\textit{quand } |z| \to +\infty).$$

Définition I.34 *Soient $f \in \mathcal{DR}(S_\varphi) \cup \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$, $\varphi \in \left]\omega, \pi\right[$. On pose alors*

$$f(A) := \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(\lambda)\, (\lambda I - A)^{-1}\, d\lambda,$$

où la courbe Γ est définie comme suit.

1. *Si $f \in \mathcal{DR}(S_\varphi)$, Γ est le bord orienté positivement de $S_{\omega'}$, $\omega' \in \left]\omega, \varphi\right[$.*
2. *Si $f \in \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$, Γ est le bord orienté positivement de $S_{\omega'} \cup B(0,r)$, $\omega' \in \left]\omega, \varphi\right[$ et $r > 0$ tel que f est holomorphe au voisinage de $B(0,r)$.*

$f(A)$ ainsi défini ne dépend ni du choix de ω' ni de r.

Définition I.35 *Si $f \in \mathcal{DR}(S_\varphi) + \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$ alors il existe $g \in \mathcal{DR}(S_\varphi)$, $h \in \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$ tels que*

$$f = g + h.$$

On pose alors

$$f(A) := g(A) + h(A).$$

Proposition I.36 *Soient $f, g \in \mathcal{DR}(S_\varphi) + \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$.*

1. *$f(A) \in \mathcal{L}(X)$.*
2. *$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $(\alpha f + \beta g)(A) = \alpha(f(A)) + \beta(g(A))$.*

3.3 Extension du calcul fonctionnel

Soient $\omega \in]0, \pi[$ et $A \in Sect(\omega)$.

Définition I.37 *Soit $\varphi \in]0, \pi[$. On pose*

$$\mathcal{A}(S_\varphi) := \left\{ f \in H(S_\varphi) : \exists n \in \mathbb{N},\ \frac{f(z)}{(1+z)^n} \in \mathcal{DR}(S_\varphi) + \mathcal{DR}_0(S_\varphi) \right\}.$$

On note que $\mathcal{A}(S_\varphi)$ contient $\mathcal{DR}(S_\varphi) + \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$ et aussi toutes les fonctions rationnelles dont les pôles sont hors de $\overline{S_\varphi}$ et en particulier les constantes.

Définition I.38 *Soient $f \in \mathcal{A}(S_\varphi)$, $\varphi \in]\omega, \pi[$. On définit*

$$f(A) := (I + A)^n \left(\frac{f(z)}{(1+z)^n} \right)(A).$$

On donne les principales propriétés du calcul fonctionnel étendu.

Proposition I.39 *Soient $f, g \in \mathcal{A}(S_\varphi)$, $\varphi \in]\omega, \pi[$.*

1. *$f(A)$ est un opérateur fermé sur X.*
2. *Si A est borné alors $f(A)$ est borné.*
3. *Si $T \in L(X)$ commute avec A alors T commute avec $f(A)$.*
4. *$f(A) + g(A) \subset (f + g)(A)$ et $f(A)g(A) \subset (fg)(A)$.*
5. *$1(A) = I$, $(z^n)(A) = A^n$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*
6. *$\forall \lambda \notin \overline{S_\varphi}$, $\left(\frac{f(z)}{\lambda - z} \right)(A) = f(A)\,(\lambda I - A)^{-1}$.*
7. *$\forall \mu \in \mathbb{C}$, $((z - \mu) f(z))(A) = (A - \mu) f(A)$.*

Dans le cas particulier où A est injectif et dans l'optique de définir les puissances fractionnaires d'opérateurs, A^α, où $\alpha \in \mathbb{C}$, on s'intéresse à une nouvelle classe de fonctions.

Définition I.40 *Soit $\varphi \in]0, \pi[$. On définit*

$$\mathcal{B}(S_\varphi) := \left\{ f \in H(S_\varphi) : \exists n \in \mathbb{N},\ \frac{z^n f(z)}{(1+z)^{2n}} \in \mathcal{DR}(S_\varphi) \right\}.$$

Si A est injectif, pour tout $f \in \mathcal{B}(S_\varphi)$, $\varphi \in]\omega, \pi[$, on définit

$$f(A) := \left((1 + A)^2 A^{-1} \right)^n \left(\frac{z^n f(z)}{(1+z)^{2n}} \right)(A).$$

Proposition I.41 *Soit $f \in \mathcal{B}(S_\varphi)$, $\varphi \in]\omega, \pi[$.*

1. *$f(A)$ est un opérateur fermé sur X.*
2. *Si A est borné et inversible alors $f(A)$ est borné.*

On note que si $f \in \mathcal{A}(S_\varphi) \cap \mathcal{B}(S_\varphi)$, $f(A)$ admet alors deux formules de définition et ces formules coïncident.

3.4 Puissances fractionnaires d'opérateurs

On utilisera dans ce travail les puissances fractionnaires d'opérateurs sectoriels, en particulier les puissances 1/2. On renvoie à Haase [37] pour les démonstrations. On peut également se référer à Komatsu [39] et Balakrishnan [3].

On distingue deux cas : les puissances fractionnaires à parties réelles positives et celles à parties réelles quelconques.

Soient $A \in Sect(\omega)$, où $\omega \in]0,\pi[$, et $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $Re(\alpha) > 0$. Alors pour $\varphi \in]\omega,\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n > Re(\alpha)$, on a

$$\frac{z^\alpha}{(1+z)^n} \in \mathcal{DR}(S_\varphi),$$

et donc $z^\alpha \in \mathcal{A}(S_\varphi)$. Ceci permet de définir

$$A^\alpha := (z^\alpha)(A). \tag{I.2}$$

Proposition I.42 *Soient $A \in Sect(\omega)$, où $\omega \in]0,\pi[$, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ tels que $Re(\alpha)$, $Re(\beta) > 0$.*

1. *A^α est un opérateur linéaire fermé dans X.*
2. *Si $A \in L(X)$ alors $A^\alpha \in L(X)$.*
3. *$A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha$.*
4. *Si $Re(\alpha) < Re(\beta)$ alors $D(A^\beta) \subset D(A^\alpha)$.*
5. *Si A est injectif, alors A^α l'est aussi et $(A^{-1})^\alpha = (A^\alpha)^{-1}$.*
6. *Si $0 \in \rho(A)$ alors $0 \in \rho(A^\alpha)$.*
7. *Si $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{\omega}$, alors $A^\alpha \in Sect(\alpha\omega)$.*
8. *Si $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{\omega}$, alors $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$.*

On note que Balakrishnan [3] fournit une représentation intégrale de A^α pour $0 < Re(\alpha) < 1$.

Pour $A \in Sect(\omega)$, où $\omega \in]0,\pi[$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\varphi \in]\omega,\pi[$, $z^\alpha \in \mathcal{B}(S_\varphi)$ et si A est injectif, alors on définit encore A^α par la formule (I.2).

Proposition I.43 *Soient $A \in Sect(\omega)$, où $\omega \in]0,\pi[$ et $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$. On suppose A injectif.*

1. *A^α est un opérateur linéaire fermé dans X.*
2. *$A^{\alpha+\beta} \subset A^\alpha A^\beta$ et $D(A^\alpha A^\beta) = D(A^{\alpha+\beta}) \cap D(A^\beta)$.*
3. *Si $Re(\alpha) < Re(\beta)$ alors $D(A^\beta) \subset D(A^\alpha)$.*
4. *A^α est injectif et $(A^{-1})^\alpha = (A^\alpha)^{-1}$.*
5. *Si $0 \in \rho(A)$ alors $0 \in \rho(A^\alpha)$.*
6. *Si $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $|\alpha| < \dfrac{\pi}{\omega}$, alors $A^\alpha \in Sect(|\alpha|\omega)$.*
7. *Si $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $|\alpha| < \dfrac{\pi}{\omega}$, alors $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$.*

On note que Komatsu [39] fournit une représentation intégrale de A^α pour $0 < |Re(\alpha)| < 1$.

On utilisera également les puissances imaginaires d'opérateurs et en particulier les opérateurs BIP définis ci-dessous.

Définition I.44 *Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans X. On dit que $A \in BIP(\alpha, X)$, avec $\alpha \in [0, \pi[$, si*

$$\begin{cases}]-\infty, 0[\subset \rho(A),\ ker(A) = \{0\},\ \overline{Im(A)} = X \ \textit{et} \\ \exists c \geqslant 1,\ \forall \lambda > 0,\ \left\|(A + \lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{c}{\lambda}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R},\ A^{is} \in L(X) \ \textit{et} \\ \exists c \geqslant 1,\ \forall s \in \mathbb{R},\ \left\|A^{is}\right\|_{L(X)} \leqslant c e^{\alpha |s|}. \end{cases}$$

4 Semi-groupes

Dans cette thèse, on utilisera la théorie des semi-groupes analytiques. On va donc commencer par définir ce qu'est un semi-groupe puis on étudiera les C_0 semi-groupes et leur générateur infinitésimal. Ceci est nécessaire puisqu'un semi-groupe analytique est un C_0 semi-groupe qui possède des propriétés supplémentaires. On trouve les démonstrations et d'autres propriétés dans Pazy [51].

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach complexe. Dans cette section, on considère $(T(t))_{t \geqslant 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés définis sur X.

4.1 Semi-groupes fortement continus

Définition I.45 *La famille $(T(t))_{t \geqslant 0}$ est appelée **semi-groupe** si on a :*

1. *$T(0) = I$,*
2. *$\forall s, t \in \mathbb{R}^+, T(s + t) = T(s)T(t)$.*

Autrement dit $(T(t))_{t \geqslant 0}$ est un semi-groupe si et seulement si l'application Ψ définie de $\mathbb{R}^+$ dans $L(X)$ et qui à tout $t \geqslant 0$ associe $\Psi(t) = T(t)$ est un homomorphisme du semi-groupe additif $(\mathbb{R}^+, +)$ dans le groupe multiplicatif $(L(X), \circ)$.

Définition I.46 *Un semi-groupe $(T(t))_{t \geqslant 0}$ est dit **fortement continu**, et est noté C_0 semi-groupe, si Ψ est continue pour la topologie forte d'opérateurs sur $L(X)$, i.e. si on a pour tout $x \in X$*

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0.$$

Cette propriété est appelée la forte continuité en zéro.

Proposition I.47 *Soit $(T(t))_{t \geqslant 0}$ un C_0 semi-groupe. Alors il existe des constantes réelles $\omega \in \mathbb{R}$, $M \geqslant 1$, telles que*

$$\forall t \geqslant 0, \|T(t)\|_{L(X)} \leqslant M e^{\omega t}.$$

Si $\omega = 0$ et $M = 1$, $(T(t))_{t \geqslant 0}$ est appelé C_0 semi-groupe de contractions.

Corollaire I.48 *Soit $(T(t))_{t \geqslant 0}$ un C_0 semi-groupe. Alors pour tout $x \in X$, $t \mapsto T(t)x$ est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans X, i.e. pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^+$*

$$\lim_{t \to t_0^+} \|T(t)x - T(t_0)x\| = 0.$$

4.2 Générateurs infinitésimaux

A un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ on associe un opérateur appelé le générateur infinitésimal. Celui-ci peut être obtenu comme la dérivée à droite en 0 de la fonction $t \mapsto T(t)$.

On sait que les fonctions $t \mapsto T(t)x$, pour tout $x \in X$, sont continues, mais ne sont pas nécessairement différentiables. On doit alors se restreindre, pour cette section, aux éléments de X pour lesquels la dérivée voulue existe. Ainsi on obtient le générateur infinitésimal qui n'est pas défini partout.

Définition I.49 *Le **générateur infinitésimal** du C_0 semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est l'opérateur A défini par :*

$$\begin{cases} D(A) := \left\{ x \in X : \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{T(h)x - x}{h} \ \text{existe dans } X \right\}, \\ Ax := \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{T(h)x - x}{h},\ x \in D(A). \end{cases}$$

$D(A)$ est non vide ($0 \in D(A)$) et est bien un sous-espace vectoriel de X. A est clairement linéaire de $D(A)$ dans X.

Proposition I.50 *Soit A, de domaine $D(A)$, le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geqslant 0}$, C_0 semi-groupe. Alors on a les propriétés suivantes.*

1. $\forall t \geqslant 0,\ \forall x \in X,\ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_t^{t+h} T(s)x\ ds = T(t)x.$
2. $\forall t \geqslant 0,\ \forall x \in X,\ \displaystyle\int_0^t T(s)x\ ds \in D(A),\ A\left(\int_0^t T(s)x\ ds\right) = T(t)x - x.$
3. *$\forall t \geqslant 0,\ \forall x \in D(A),\ T(t)x \in D(A)$ et $t \mapsto T(t)x$ est différentiable sur $\mathbb{R}^+$ avec $\dfrac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$.*
4. $\forall s,t \geqslant 0,\ \forall x \in D(A),\ T(t)x - T(s)x = \displaystyle\int_s^t AT(\tau)x\ d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax\ d\tau.$

Corollaire I.51 *Soit A, de domaine $D(A)$, le générateur infinitésimal du C_0 semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$. Alors $D(A)$ est dense dans X et A est un opérateur linéaire fermé.*

Proposition I.52 *Soient $(T(t))_{t\geqslant 0}$ et $(S(t))_{t\geqslant 0}$ deux C_0 semi-groupes de générateurs infinitésimaux respectifs A et B. Si $A = B$ on a*

$$\forall t \geqslant 0,\ T(t) = S(t).$$

Proposition I.53 *Soit A, de domaine $D(A)$, le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geqslant 0}$, C_0 semi-groupe. Alors on a*

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty} D(A^n)} = X.$$

Définition I.54 *Un semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est appelé **semi-groupe uniformément continu** d'opérateurs linéaires bornés si*

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\|_{L(X)} = 0.$$

Remarque I.55 *Soit A un opérateur linéaire borné sur X. Alors*

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n,$$

existe et détermine d'une manière unique un semi-groupe uniformément continu $\left(e^{tA}\right)_{t\geqslant 0}$ *dont* A *est le générateur infinitésimal.*

Réciproquement, $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *étant un semi-groupe uniformément continu, on a pour tout* $x \in X$, $\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\, ds$ *converge uniformément vers* $T(0)x = x$ *quand* $t \to 0^+$. *Donc pour tout* $t > 0$, $\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\, ds$ *est inversible et pour tout* $y \in X$, *il existe* $x \in X$ *et* $t > 0$ *tel que*

$$y = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\, ds,$$

donc $y \in D(A)$. *Ainsi* $D(A) = X$ *et* A *est borné.*

4.3 Théorème de Hille-Yosida

On va donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur A soit le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions.

Théorème I.56 ***(Théorème de Hille-Yosida)*** *Un opérateur linéaire* A*, de domaine* $D(A)$*, est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe de contractions* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *sur* X *si et seulement si*

1. A *est fermé et* $\overline{D(A)} = X$;
2. $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$ *et, pour tout* $\lambda > 0$*, on a*

$$\|R_\lambda(A)\|_{L(X)} \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

Voici deux corollaires très intéressants de ce célèbre théorème.

Corollaire I.57 *Soit* A *le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe de contractions sur* X, $(T(t))_{t\geqslant 0}$. *Alors*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) > 0\} \subset \rho(A),$$

et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $Re(\lambda) > 0$,

$$\|R_\lambda(A)\|_{L(X)} \leqslant \frac{1}{Re(\lambda)}.$$

Corollaire I.58 *Un opérateur linéaire* A*, de domaine* $D(A)$*, est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *sur* X *tel que* $\|T(t)\|_{L(X)} \leqslant e^{\omega t}$ *si et seulement si*

1. A *est fermé et* $\overline{D(A)} = X$ *;*
2. $]\omega, +\infty[\, \subset \rho(A)$ *et, pour tout* $\lambda \in\,]\omega, +\infty[$*, on a*

$$\|R_\lambda(A)\|_{L(X)} \leqslant \frac{1}{\lambda - \omega}.$$

On donne un théorème analogue pour un C_0 semi-groupe quelconque.

Théorème I.59 *Un opérateur linéaire* A*, de domaine* $D(A)$*, est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *sur* X *tel que* $\|T(t)\|_{L(X)} \leqslant Me^{\omega t}$ *si et seulement si*

1. A *est fermé et* $\overline{D(A)} = X$ *;*
2. $]\omega, +\infty[\, \subset \rho(A)$ *et, pour tout* $\lambda \in\,]\omega, +\infty[$*, pour tout* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*, on a*

$$\left\|(R_\lambda(A))^{-n}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}.$$

4.4 Semi-groupes analytiques

Après avoir étudier les C_0 semi-groupes il est nécessaire d'aborder les semi-groupes analytiques qui seront utilisés tout au long de la thèse. C'est un outil très puissant pour la résolution de certaines équations aux dérivées partielles.

Dans cette section, on définit, pour tout $0 < \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, le secteur

$$\Sigma_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \alpha\}.$$

Définition I.60 *Soit $0 < \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Une famille $(T(z))_{z\in\Sigma_\alpha}$ d'éléments de $L(X)$ forme un **semi-groupe analytique de type** α dans X si elle vérifie les conditions suivantes :*

1. *$T(0) = I$,*
2. *$\forall z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha$ tels que $z_1 + z_2 \in \Sigma_\alpha$, $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$,*
3. *$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X, \displaystyle\lim_{z\to 0, z\in\Sigma_{\alpha-\varepsilon}} T(z)x = x$,*
4. *l'application $z \mapsto T(z)$ est holomorphe sur Σ_α.*

Si, de plus,

1. *$\forall \varepsilon > 0$, $\displaystyle\sup_{z\in\Sigma_{\alpha-\varepsilon}} \|T(z)\| < \infty$, i.e. $(T(z))_{z\in\Sigma_{\alpha-\varepsilon}}$ est uniformément borné dans $\Sigma_{\alpha-\varepsilon}$,*

*alors $(T(z))_{z\in\Sigma_\alpha}$ est appelé **semi-groupe analytique borné de type** α dans X.*

On peut aussi définir les semi-groupes analytiques de la manière suivante.

Proposition I.61 *Soit $0 < \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe analytique d'angle α dans X si et seulement si*

1. *$T(.)$ est la restriction d'une fonction holomorphe $T : \Sigma_\alpha \to L(X)$,*
2. *$\forall z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha$ tels que $z_1 + z_2 \in \Sigma_\alpha$, $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$,*
3. *$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X, \displaystyle\lim_{z\to 0, z\in\Sigma_{\alpha-\varepsilon}} T(z)x = x$.*

Théorème I.62 *Soient A un opérateur linéaire fermé à domaine dense $D(A)$ dans X et $0 < \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ tels que*

$$\begin{cases} \Sigma_{\alpha+\pi/2} \subset \rho(A), \\ \exists M > 0, \forall \lambda \in \rho(A), \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{M}{|\lambda|}. \end{cases} \tag{I.3}$$

On définit la famille d'opérateurs linéaires $(T(t))_{t\geqslant 0}$, notée $\left(e^{tA}\right)_{t\geqslant 0}$, par

$$\begin{cases} T(0) = I, \\ \forall t > 0, \forall x \in X, T(t)x = e^{tA}x = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma e^{\lambda t}(A - \lambda I)^{-1}x \, d\lambda, \end{cases}$$

où $\gamma \subset \rho(A)$ est un contour non borné dans $\Sigma_{\alpha+\pi/2}$ allant de $+\infty e^{-i(\pi/2+\alpha)}$ à $+\infty e^{i(\pi/2+\alpha)}$.

Alors $\left(e^{tA}\right)_{t\geqslant 0}$ est un C_0 semi-groupe de générateur infinitésimal A. De plus, $\left(e^{tA}\right)_{t\geqslant 0}$ se prolonge analytiquement en un semi-groupe analytique de type α noté $\left(e^{zA}\right)_{z\in\Sigma_\alpha}$.

Remarque I.63 *Si A est un opérateur linéaire fermé à domaine dense $D(A)$ dans X vérifiant (I.3), alors $-A \in Sect(\alpha + \pi/2)$, $0 < \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, au sens de Haase (voir Définition I.17).*

Dans Pazy [51], p. 70, on trouve le résultat suivant.

Proposition I.64 *Soit* $\left(e^{zA}\right)_{z\in\Sigma_\alpha}$ *un semi-groupe analytique dans* X *sur* Σ_α *de type* α *et de générateur infinitésimal* A*. Si* A *est inversible alors*

$$\begin{cases} \exists C>0, \exists\delta>0, \forall t>0, \left\|e^{tA}\right\|_{L(X)} \leqslant Ce^{-\delta t}, \\ \exists\delta>0, \forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \exists C_k>0, \forall t>0, \left\|A^k e^{tA}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C_k}{t^k}e^{-\delta t}. \end{cases}$$

Le théorème qui suit est un résultat de Balakrishnan [3]. Il donne un résultat important sur les puissances fractionnaires d'opérateurs que l'on utilisera ultérieurement.

Théorème I.65 *Soit* A *un opérateur linéaire fermé à domaine dense* $D(A)$ *dans* X *tel que*

$$]0,+\infty[\; \subset \rho(A) \text{ et } \exists M>0, \forall\lambda>0, \left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{M}{\lambda}.$$

Alors il existe un secteur Σ_ϕ, $0<\phi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$*, tel que*

$$\Sigma_\phi \subset \rho(A) \text{ et } \forall\lambda\in\Sigma_\phi, \left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{M}{|\lambda|}.$$

De plus, l'opérateur $(-A)^{1/2}$ *est bien défini et il existe un secteur* $\Sigma_{\alpha+\pi/2}$*, avec* $0<\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}$*, tel que*

$$\Sigma_{\alpha+\pi/2} \subset \rho(-(-A)^{1/2}),$$

et $-(-A)^{1/2}$ *génère un semi-groupe analytique.*

4.5 Semi-groupes analytiques généralisés

Définition I.66 *Soit* $0<\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}$*. Un semi-groupe* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *est un* ***semi-groupe analytique généralisé d'angle*** α *dans* X *si*

1. $T(.)$ *est la restriction d'une fonction holomorphe* $T:\Sigma_\alpha\to L(X)$*,*
2. $\forall z_1,z_2\in\Sigma_\alpha$ *tels que* $z_1+z_2\in\Sigma_\alpha$*,* $T(z_1+z_2)=T(z_1)T(z_2)$*.*

Remarque I.67 *Un semi-groupe analytique est donc un semi-groupe analytique généralisé qui est de plus fortement continu en* 0*.*

Dans Sinestrari [56], on trouve de nombreuses propriétés sur les semi-groupes analytiques dont les deux propositions suivantes. Tout d'abord, on a une représentation sous forme d'une intégrale de Dunford.

Proposition I.68 *Soit* A *un opérateur linéaire fermé sur* X *de domaine* $D(A)$ *vérifiant (I.3). Pour tout* $t>0$*, on peut définir* $e^{tA}\in L(X)$ *par une intégrale de Dunford*

$$e^{tA}=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma e^{\lambda t}(A-\lambda I)^{-1}d\lambda,$$

où $\gamma\subset\rho(A)$ *est un contour non borné dans* $\Sigma_{\alpha+\pi/2}$ *allant de* $+\infty e^{-i(\pi/2+\alpha)}$ *à* $+\infty e^{i(\pi/2+\alpha)}$*. On pose de plus* $e^{0A}=I$*. Alors on a les propriétés suivantes.*

1. $\forall t,s\geqslant 0$, $e^{(t+s)A}=e^{tA}e^{sA}$.
2. $\forall t>0$, $\forall x\in X$, $\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $e^{tA}x\in D(A^k)$.

3. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists C_k > 0$, $\forall t > 0$, $\left\| t^k A^k e^{tA} \right\|_{L(X)} \leqslant C_k$.
4. $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\forall t > 0$, $\dfrac{d^k e^{tA}}{dt^k} = A^k e^{tA} \in L(X)$ *et* $t \mapsto e^{tA}$ *peut s'étendre analytiquement dans un secteur* Σ_α, $0 < \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, *contenant le demi-axe réel positif.*
5. $\forall t > 0, \forall x \in D(A)$, $Ae^{tA}x = e^{tA}Ax$.
6. $\forall t > 0$, $\forall \lambda \in \rho(A)$, $(A - \lambda I)^{-1} e^{tA} = e^{tA}(A - \lambda I)^{-1}$.

Le fait que $D(A)$ n'est pas nécessairement dense dans X influence le comportement de $t \mapsto e^{tA}$ au voisinage de 0 comme le montre la proposition suivante.

Proposition I.69 *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X de domaine $D(A)$ vérifiant (I.3).*

1. *Si* $x \in \overline{D(A)}$, *alors* $\lim\limits_{t \to 0} e^{tA}x = x$. *Inversement si* $\lim\limits_{t \to 0} e^{tA}x = y$, *alors* $x \in \overline{D(A)}$ *et* $y = x$.
2. $\forall x \in X$, $\forall t > 0$, $\displaystyle\int_0^t e^{sA}x \, ds \in D(A)$ *et*
$$A \int_0^t e^{sA}x \, ds = e^{tA}x - x,$$
ainsi $\displaystyle\int_0^t Ae^{sA}x \, ds = e^{tA}x - x$ *quand* $s \mapsto \left\| Ae^{sA}x \right\|$ *est dans* $L^1(0, t; \mathbb{R})$.
3. *Si* $x \in D(A)$ *et* $Ax \in \overline{D(A)}$, *alors*
$$\lim_{t \to 0} \frac{e^{tA}x - x}{t} = Ax.$$
Inversement, si $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{e^{tA}x - x}{t} = y$, *alors* $x \in \overline{D(A)}$ *et* $Ax = y$.
4. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{t} \displaystyle\int_0^t e^{sA}x \, ds = y$ *si et seulement si* $y = x \in \overline{D(A)}$.

Théorème I.70 *Soient A un opérateur linéaire fermé sur X de domaine $D(A)$ vérifiant (I.3) et $0 < \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Alors $\left(e^{zA}\right)_{z \in \Sigma_\alpha}$ est un semi-groupe analytique généralisé de type α. A est alors appelé le générateur infinitésimal de $\left(e^{zA}\right)_{z \in \Sigma_\alpha}$.*

Remarque I.71 *Dans le théorème précédent, A est un générateur infinitésimal de $\left(e^{zA}\right)_{z \in \Sigma_\alpha}$ au sens du point 3. de la Proposition I.69. Bien évidemment si le domaine de A est dense dans X, la notion coïncide avec la Définition I.49.*

5 Espaces d'interpolation

5.1 Espaces de Moyenne

On rappelle ici la notion d'espace d'interpolation développée par J. L. Lions et J. Peetre [45].

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach complexe. Il est nécessaire d'introduire les espaces suivants.

Définition I.72 *On définit pour $p \in [1, +\infty[$*

$$L^p_*\left(\mathbb{R}^+; X\right) := \left\{ f : \mathbb{R}^+ \to X \text{ fortement mesurable}, \int_0^{+\infty} \|f(t)\|^p \frac{dt}{t} < \infty \right\},$$

et pour $p = +\infty$

$$L_*^\infty\left(\mathbb{R}^+; X\right) := \left\{ f : \mathbb{R}^+ \to X \text{ fortement mesurable}, \sup_{t\in\mathbb{R}^+} ess \|f(t)\| < \infty \right\}.$$

Proposition I.73 *Soit* $p \in [1, +\infty]$. *Alors* $L_*^p(\mathbb{R}^+, X)$ *est un espace de Banach muni de la norme*

$$\|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}^+,X)} := \begin{cases} \left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|^p \dfrac{dt}{t} \right)^{1/p} & si\ p \in [1, +\infty[\,, \\ \sup_{t\in\mathbb{R}^+} ess \|f(t)\| & si\ p = +\infty. \end{cases}$$

Soient $(X_0, \|\cdot\|_{X_0})$ et $(X_1, \|\cdot\|_{X_1})$ deux espaces de Banach s'injectant continûment dans un même espace vectoriel topologique séparé $\mathcal{E}$.

Proposition I.74 $X_0 \cap X_1$ *et* $X_0 + X_1$ *sont des espaces de Banach muni des normes respectives*

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{X_0\cap X_1} &:= \max\left\{ \|\xi\|_{X_0}; \|\xi\|_{X_1} \right\},\ \xi \in X_0 \cap X_1, \\ \|\xi\|_{X_0+X_1} &:= \inf_{x_0\in X_0,\, x_1\in X_1,\, x_0+x_1=\xi} \left\{ \|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} \right\},\ \xi \in X_0 + X_1. \end{aligned}$$

De plus on a

$$X_0 \cap X_1 \subset X_0, X_1 \subset X_0 + X_1,$$

avec injections continues.

Définition I.75 *Soient* $p \in [1, +\infty]$ *et* $\theta \in]0, 1[$. *On appelle* ***espace de moyenne*** *(ou* ***espace d'interpolation****) entre* X_0 *et* X_1*, l'espace* $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ *défini par*

$$\xi \in (X_0, X_1)_{\theta,p} \Leftrightarrow \begin{cases} i)\ \forall t > 0,\ \exists u_0(t) \in X_0,\ \exists u_1(t) \in X_1 : \xi = u_0(t) + u_1(t), \\ ii)\ t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}^+, X_0),\ t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}^+, X_1). \end{cases}$$

Proposition I.76 *Soient* $p \in [1, +\infty]$ *et* $\theta \in]0, 1[$. *Alors* $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ *est un espace de Banach muni de la norme*

$$\|\xi\|_{\theta,p} := \inf_{\substack{u_i:\mathbb{R}^+\to X, i=0,1: \\ \forall t>0, u_0(t)+u_1(t)=\xi}} \left(\left\|t^{-\theta} u_0\right\|_{L_*^p(\mathbb{R}^+,X_0)} + \left\|t^{1-\theta} u_1\right\|_{L_*^p(\mathbb{R}^+,X_1)} \right).$$

De plus on a

$$X_0 \cap X_1 \subset (X_0, X_1)_{\theta,p} \subset X_0 + X_1,$$

avec injections continues.

Proposition I.77 *Soient* $p \in [1, +\infty]$ *et* $\theta \in]0, 1[$. *Alors*

$$(X_0, X_1)_{\theta,p} = (X_1, X_0)_{1-\theta,p}.$$

Pour la définition suivante, on se place dans le cas où $X_0 = D(A)$ est le domaine d'un opérateur linéaire fermé A sur $X_1 = X$.

Définition I.78 *Soient* $p \in [1, +\infty]$, $\theta \in]0, 1[$ *et* A *un opérateur linéaire fermé de domaine* $D(A) \subset X$ *muni de la norme du graphe. On définit alors*

$$D_A(\theta, p) := (X, D(A))_{\theta,p}.$$

Lorsque A vérifie certaines propriétés spectrales, on peut donner des caractérisations explicites de $D_A(\theta, p)$ pour $p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in]0, 1[$.

Proposition I.79 *Soient $p \in [1, +\infty]$, $\theta \in]0, 1[$ et A un opérateur linéaire fermé sur X de domaine $D(A)$.*

1. *On suppose que*
$$\mathbb{R}^+ \subset \rho(A) \text{ et } \exists C > 0, \forall \lambda > 0, \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{\lambda}.$$
Alors
$$D_A(\theta, p) = \left\{\xi \in X : t^\theta A(A - tI)^{-1}\xi \in L^p_* \left(\mathbb{R}^+, X\right)\right\}.$$
(voir Grisvard [34]).
2. *On suppose que A génère un semi-groupe fortement continu borné dans X. Alors*
$$D_A(\theta, p) = \left\{\xi \in X : t^{-\theta} \left(e^{tA} - I\right) \xi \in L^p_* \left(\mathbb{R}^+, X\right)\right\}.$$
(voir Lions [44]).
3. *On suppose que A génère un semi-groupe analytique borné dans X. Alors*
$$D_A(\theta, p) = \left\{\xi \in X : t^{1-\theta} A e^{tA}\xi \in L^p_* \left(\mathbb{R}^+, X\right)\right\}.$$
(voir Butzer-Berens [7]).

Définition I.80 *Soient $p \in [1, +\infty]$, $\theta \in]0, 1[$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et A un opérateur linéaire fermé sur X de domaine $D(A)$. On définit alors*
$$D_A(\theta + k; p) := \left\{\xi \in D(A^k) : A^k\xi \in D_A(\theta, p)\right\}.$$

Proposition I.81 *Soient $p \in [1, +\infty]$, $\theta \in]0, 1[$, $k \in \mathbb{N}$ tels que $k\theta \notin \mathbb{N}$ et A un opérateur linéaire fermé sur X de domaine $D(A)$.*

1. $D_A(\theta + k, p) = \left(D(A), D(A^k)\right)_{\theta,p}$.
2. $D_{A^k}(\theta, p) = D_A(k\theta, p)$.

5.2 Espaces de Besov

Dans les applications, on doit souvent expliciter les espaces $D_A(\theta, p)$. Ceux-ci peuvent être, par exemple, des espaces de Hölder, des espaces de Sobolev, ... ou encore des espaces de Besov. On trouve dans Grisvard [32, 33], les définitions suivantes.

Définition I.82 *Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $s > 0$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$. On définit l'**espace de Besov***
$$B^1_p (\mathbb{R}^n) := \left\{\varphi \in L^p (\mathbb{R}^n) : (x, y) \mapsto \frac{\varphi(x) + \varphi(y) - 2\varphi(\frac{x+y}{2})}{|x - y|^{1+\frac{n}{p}}} \in L^p (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)\right\},$$
puis pour $s > 1$ entier
$$B^s_p (\mathbb{R}^n) := \left\{\varphi \in W^{s-1,p} (\mathbb{R}^n) : D^\alpha\varphi \in B^p_1 (\mathbb{R}^n), |\alpha| = s - 1\right\},$$
et enfin pour s non entier
$$B^s_p (\mathbb{R}^n) := W^{s,p} (\mathbb{R}^n).$$

Définition I.83 *Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $s > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit*
$$B^s_p (\Omega) := \left\{\varphi = \psi_{|\Omega} : \psi \in B^s_p (\mathbb{R}^n)\right\}.$$

Définition I.84 *Soient $m,n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $s > 0$, $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$. On définit les **espaces de Besov***

$$B^1_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n) : \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^{+\infty} t^{-q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x+te_k) + \varphi(x-te_k) - 2\varphi(x)|^p \, dx \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

et pour $0 < s < 1$

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n) : \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^{+\infty} t^{-sq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x+te_k) - \varphi(x)|^p \, dx \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

puis

$$B^m_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in W^{m-1,p}(\mathbb{R}^n) : D^\alpha \varphi \in B^1_{p,q}(\mathbb{R}^n), |\alpha| = m-1 \right\},$$

et enfin pour $m < s < m+1$,

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n) : D^\alpha \varphi \in B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{R}^n), |\alpha| = m \right\},$$

où $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition I.85 *Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $s > 0$, $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit*

$$B^s_{p,q}(\Omega) := \left\{ \varphi = \psi_{|\Omega} : \psi \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Dans le cas particulier $p = q$, on a le résultat suivant.

Proposition I.86 *Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $s > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On a*

$$B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = B^s_p(\mathbb{R}^n),$$

et

$$B^s_{p,p}(\Omega) = B^s_p(\Omega).$$

6 Espaces UMD

Les espaces de Banach fournissent un cadre de travail parfois insuffisant. Il faut alors se placer dans un espace ayant des propriétés supplémentaires, il s'agit des espaces UMD (Unconditional Martingale Difference). A l'origine, ces espaces font intervenir la théorie des martingales à valeurs vectorielles. Cependant, on utilise ici une autre définition équivalente. Celle-ci utilise la transformée de Hilbert. L'équivalence entre les deux définitions est démontrée dans Burkholder [6] et Bourgain [4].

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach complexe.

Définition I.87 *Soient $\varepsilon \in \,]0,1[$ et $p \in \,]1,+\infty[$. On définit l'opérateur $H_\varepsilon \in L(L^p(\mathbb{R},X))$ par*

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R},X),\ (H_\varepsilon f)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon < |s| < \frac{1}{\varepsilon}} \frac{f(x-s)}{s} ds,\ p.p.\ x \in \mathbb{R}.$$

*Soit $f \in L^p(\mathbb{R},X)$. Si $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} H_\varepsilon f$ existe dans $L^p(\mathbb{R},X)$, alors cette limite est notée Hf et est appelée la **transformée de Hilbert** de f sur $L^p(\mathbb{R},X)$.*

Définition I.88 *On dit que X est un* ***espace UMD*** *si*

$$\exists p \in \left]1,+\infty\right[,\ \forall f \in L^p(\mathbb{R},X),\ \lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon f \text{ existe dans } L^p(\mathbb{R},X).$$

Dans ce cas

$$\begin{array}{rcl} H : L^p(\mathbb{R},X) & \to & L^p(\mathbb{R},X) \\ f & \mapsto & Hf = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon f, \end{array}$$

est dans $L(L^p(\mathbb{R},X))$, d'après le Théorème de Banach-Steinhaus, et est appelée la ***transformée de Hilbert*** *sur $L^p(\mathbb{R},X)$.*

Proposition I.89 *On suppose que X est un espace UMD. Alors*

$$\forall p \in \left]1,+\infty\right[,\ \forall f \in L^p(\mathbb{R},X),\ \lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon f \text{ existe dans } L^p(\mathbb{R},X).$$

Afin de donner une caractérisation géométrique des espaces UMD, on définit la notion de ζ-convexité.

Définition I.90 *On dit que X est* ***ζ-convexe*** *s'il existe une fonction $\zeta : X \times X \to \mathbb{R}$ vérifiant*

1. *$\zeta(0,0) > 0$,*
2. *$\forall x, y \in X$, $\zeta(x,\cdot)$ et $\zeta(\cdot,y)$ sont convexes sur X,*
3. *$\forall x, y \in X$, $\zeta(x,y) \leqslant \|x+y\|$ si $\|x\| = \|y\| = 1$.*

Voici le résultat fondamental de Burkholder [5, 6] donnant une caractérisation géométrique des espaces UMD.

Théorème I.91 *X est un espace UMD si et seulement si X est ζ-convexe.*

Exemple I.92

1. *Tout espace de Hilbert est un espace UMD.*
2. *Soient Ω un espace mesuré σ-fini et $p \in \left]1,+\infty\right[$. Si X est un espace UMD, alors $L^p(\Omega,X)$ est un espace UMD.*
3. *Tout sous-espace fermé d'un espace UMD est un espace UMD.*
4. *Tout espace isomorphe à un espace UMD est un espace UMD.*

Chapitre II

Problèmes de transmission dans une cellule biologique

On présente dans ce chapitre une application concrète des équations différentielles opérationnelles. Ce travail a été effectué en étroite collaboration avec Kheira Limam du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées de Mostaganem (Algérie).

Beaucoup de problèmes de transmission sont posés dans un corps entouré d'une couche mince d'épaisseur petite $\varepsilon > 0$. Par exemple, ceux concernant la conductivité dans une cellule biologique. Par un changement de variables naturel, on les transforme en problèmes de transmission posés dans deux corps cylindriques $]-\infty, 0[\times]-\pi, \pi[$ et $]0, \delta[\times]-\pi, \pi[$, (où $\delta = \ln(1+\varepsilon)$), puis en problèmes différentiels opérationnels de type elliptique $\left(P^\delta\right)_{\delta>0}$. Le but de ce travail est de donner une étude complète des problèmes $\left(P^\delta\right)_{\delta>0}$ pour tout $\delta > 0$. On prouve l'existence et l'unicité de la solution classique dans le cadre L^p.

1 Introduction

On considère une cellule biologique constituée d'un cytoplasme homogène Ω_-^* (de bord Γ^*) centré en $(0,0)$ et de rayon d'un micromètre entouré d'une fine membrane $\Omega_+^{*\varepsilon}$ (de bord $\Gamma_+^{*\varepsilon}$) et d'épaisseur de quelques nanomètres $\varepsilon > 0$. Le potentiel électrique dans cette cellule $\Omega^{*\varepsilon} = \overline{\Omega_-^*} \cup \Omega_+^{*\varepsilon}$ vérifie le problème suivant

$$(P^\varepsilon)\begin{cases} \nabla.\left(\mu\nabla w^\varepsilon\right) = \mu h^\varepsilon \text{ dans } \Omega^{*\varepsilon} \\ \displaystyle\int_{\Gamma^*} w^\varepsilon(\sigma)\, d\sigma = 0 \\ \dfrac{\partial w^\varepsilon}{\partial n} = l_+^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_+^{*\varepsilon}, \end{cases}$$

où

$$\mu = \begin{cases} \mu_- \text{ dans } \Omega_-^* \\ \mu_+ \text{ dans } \Omega_+^{*\varepsilon}, \end{cases}$$

(généralement environ 1 S/m (Siemens par mètre), 5×10^{-7} S/m respectivement) sont les coefficients positifs de conductivité des deux corps Ω_-^*, $\Omega_+^{*\varepsilon}$ dépendant éventuellement de ε, et la densité de charge électrique

$$h^\varepsilon = \begin{cases} h_- \text{ dans } \Omega_-^* \\ h_+^\varepsilon \text{ dans } \Omega_+^{*\varepsilon}, \end{cases}$$

est prise, par exemple, dans l'espace $L^p(\Omega^{*\varepsilon})$, $1 < p < \infty$, i.e. $h_- \in L^p\left(\Omega_-^*\right)$, $h_+^\varepsilon \in L^p\left(\Omega_+^{*\varepsilon}\right)$, $\partial/\partial n$ désigne la dérivée par rapport à la normale extérieure et l_+^ε est le champ électrique imposé sur le bord $\Gamma_+^{*\varepsilon}$. La condition de bord de Neumann sur $\Gamma_+^{*\varepsilon}$ implique la condition de compatibilité suivante sur l_+^ε et (μh^ε)

$$\int_{\Omega^{*\varepsilon}} (\mu h^\varepsilon)(x,y)\, dxdy + \int_{\Gamma_+^{*\varepsilon}} \mu_+ l_+^\varepsilon(\sigma)\, d\sigma = 0.$$

La condition de jauge

$$\int_{\Gamma^*} w^\varepsilon(\sigma)\, d\sigma = 0,$$

est imposée pour avoir l'unicité de la solution. Le problème (P^ε) peut être écrit sous la forme

$$\left(P_{x,y}^\varepsilon\right) \begin{cases} (eq.1) & \Delta w_-^\varepsilon(x,y) = h_-(x,y) \text{ dans } \Omega_-^* \\ (eq.2) & \Delta w_+^\varepsilon(x,y) = h_+^\varepsilon(x,y) \text{ dans } \Omega_+^{*\varepsilon} \\ (c.t.) & w_-^\varepsilon = w_+^\varepsilon, \quad \mu_- \dfrac{\partial w_-^\varepsilon}{\partial n} = \mu_+ \dfrac{\partial w_+^\varepsilon}{\partial n} \text{ sur } \Gamma^* \\ (c.j.) & \displaystyle\int_{\Gamma^*} w_-^\varepsilon(\sigma)\, d\sigma = \int_{\Gamma^*} w_+^\varepsilon(\sigma)\, d\sigma = 0 \\ (c.b.) & \dfrac{\partial w_+^\varepsilon}{\partial n} = l_+^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_+^{*\varepsilon}, \end{cases}$$

sous la condition de compatibilité

$$(CC_{x,y}^\varepsilon) \int_{\Omega_-^*} (\mu_- h_-)(x,y)\, dxdy + \int_{\Omega_+^{*\varepsilon}} \left(\mu_+ h_+^\varepsilon\right)(x,y)\, dxdy + \int_{\Gamma_+^{*\varepsilon}} \mu_+ l_+^\varepsilon(\sigma)\, d\sigma = 0.$$

Pour $h_- \in L^p\left(\Omega_-^*\right)$, $h_+^\varepsilon \in L^p\left(\Omega_+^{*\varepsilon}\right)$, on cherche une solution classique du problème $\left(P_{x,y}^\varepsilon\right)$, i.e. une fonction

$$w^\varepsilon = \begin{cases} w_-^\varepsilon \text{ dans } \Omega_-^* \\ w_+^\varepsilon \text{ dans } \Omega_+^{*\varepsilon}, \end{cases}$$

telle que

$$w_-^\varepsilon \in W^{2,p}\left(\Omega_-^*\right), \qquad w_+^\varepsilon \in W^{2,p}\left(\Omega_+^{*\varepsilon}\right), \tag{II.1}$$

et vérifiant $\left(P_{x,y}^\varepsilon\right)$.

Cette L^p-régularité est essentielle pour résoudre de nombreuses équations d'évolution quasi-linéaires correspondant à (P^ε). En effet, l'utilisation du Théorème du point fixe pour résoudre ces problèmes non linéaires nécessite des régularités optimales telles que (II.1).

Beaucoup d'auteurs se sont intéressés aux problèmes de transmission avec différentes conditions de bord dans des espaces de Hilbert (voir, par exemple, Caloz et al. [8] et Nicaise [50]). Dans [18], Favini et al. ont considéré des problèmes de transmission posés dans un domaine borné pour un second membre dans un espace d'interpolation. Ils ont utilisé la théorie des sommes de Da Prato-Grisvard pour les opérateurs linéaires.

Un travail très intéressant est donné dans Dore et al. [14], où les auteurs ont considéré des problèmes de transmission dans des domaines cylindriques pour un second membre seulement dans L^p, $p > 1$.

D'autres auteurs ont travaillé sur ce sujet dans plusieurs situations biologiques concrètes. On note, par exemple, Fear et Stuchly [29], [30], où le cytoplasme est considéré comme un matériel homogène. Dans Poignard [52], la méthode des expansions asymptotiques est utilisée pour modéliser ce type de problèmes.

Dans ce travail, l'approche est différente et utilise la théorie des équations différentielles opérationnelles dans des espaces L^p et le célèbre Théorème de Dore-Venni.

On note que la petite épaisseur de la membrane entourant le cytoplasme pose beaucoup de problèmes numériques. L'essentiel est alors de les éviter tout en prenant en compte l'effet de cette membrane. L'objectif est donc de résoudre (P^{ε}) pour tout $\varepsilon > 0$ petit et ensuite, dans un travail futur, de faire tendre $\varepsilon \to 0$ afin de trouver le problème limite bien posé sur le cytoplasme Ω_-^* avec la bonne condition d'impédance sur Γ^*. Cette condition d'impédance décrira alors l'effet limite de cette fine membrane sur le bord de la cellule.

Le chapitre est organisé ainsi.

Dans la Section 2, on montre, par un changement de variables naturel, que le problème $\left(P_{x,y}^{\varepsilon}\right)$ peut s'écrire sous forme d'un problème différentiel opérationnel du second ordre particulier posé sur une demi-droite réelle. La Section 3 regroupe quelques lemmes techniques. Dans la Section 4.1, on résout deux problèmes auxiliaires permettant de trouver une formule de représentation de la solution opérationnelle. On donne ensuite un théorème essentiel sur le problème opérationnel. Enfin, la Section 4 est consacrée au retour au problème $\left(P_{x,y}^{\varepsilon}\right)$ dans la cellule biologique et on donne le théorème fondamental d'existence et d'unicité de la solution classique.

2 Formulation opérationnelle

A partir des coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, on considère les changements

$$\left\{\begin{array}{l} v_-^{\varepsilon}(r,\theta) := w_-^{\varepsilon}(r\cos\theta, r\sin\theta) \text{ et } v_+^{\varepsilon}(r,\theta) := w_+^{\varepsilon}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ k_-(r,\theta) := h_-(r\cos\theta, r\sin\theta) \text{ et } k_+^{\varepsilon}(r,\theta) := h_+^{\varepsilon}(r\cos\theta, r\sin\theta), \end{array}\right.$$

ensuite, on a

$$v_{\pm}^{\varepsilon}(r,-\pi) = w_{\pm}^{\varepsilon}(-r,0), \quad v_{\pm}^{\varepsilon}(r,\pi) = w_{\pm}^{\varepsilon}(-r,0),$$

et

$$\frac{\partial v_{\pm}^{\varepsilon}}{\partial\theta}(r,-\pi) = -r\frac{\partial w_{\pm}^{\varepsilon}}{\partial y}(-r,0), \quad \frac{\partial v_{\pm}^{\varepsilon}}{\partial\theta}(r,\pi) = -r\frac{\partial w_{\pm}^{\varepsilon}}{\partial y}(-r,0).$$

Il s'ensuit que

$$(CBP_r^{\varepsilon})\left\{\begin{array}{ll} v_-^{\varepsilon}(r,-\pi) = v_-^{\varepsilon}(r,\pi), & \dfrac{\partial v_-^{\varepsilon}}{\partial\theta}(r,-\pi) = \dfrac{\partial v_-^{\varepsilon}}{\partial\theta}(r,\pi),\ r \in (0,1) \\ v_+^{\varepsilon}(r,-\pi) = v_+^{\varepsilon}(r,\pi), & \dfrac{\partial v_+^{\varepsilon}}{\partial\theta}(r,-\pi) = \dfrac{\partial v_+^{\varepsilon}}{\partial\theta}(r,\pi),\ r \in (1,1+\varepsilon). \end{array}\right.$$

Maintenant, pour presque tout $\sigma \in \Gamma_+^{*\varepsilon}$, on écrit $\sigma = (1+\varepsilon)(\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [-\pi, +\pi[$, et

$$l_+^{\varepsilon}(\sigma) = l_+^{\varepsilon}((1+\varepsilon)(\cos\theta,\sin\theta)) := L_+^{\varepsilon}(\theta), \tag{II.2}$$

ensuite, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_+^{*\varepsilon}} l_+^{\varepsilon}(\sigma)\,d\sigma &= \int_{-\pi}^{+\pi} l_+^{\varepsilon}((1+\varepsilon)(\cos\theta,\sin\theta))\sqrt{(1+\varepsilon)^2}d\theta \\ &= (1+\varepsilon)\int_{-\pi}^{+\pi} L_+^{\varepsilon}(\theta)\,d\theta. \end{aligned} \tag{II.3}$$

Ainsi, le problème $\left(P_{x,y}^{\varepsilon}\right)$ devient

$$\left(P_{r,\theta}^{\varepsilon}\right)\left\{\begin{array}{ll} (eq.1) & (r\partial_r)^2 v_-^{\varepsilon}(r,\theta) + \partial_\theta^2 v_-^{\varepsilon}(r,\theta) = r^2 k_-(r,\theta) \text{ dans } \widehat{\Omega}_- \\ (eq.2) & (r\partial_r)^2 v_+^{\varepsilon}(r,\theta) + \partial_\theta^2 v_+^{\varepsilon}(r,\theta) = r^2 k_+^{\varepsilon}(r,\theta) \text{ dans } \widehat{\Omega}_+^{\varepsilon} \\ (c.t.) & \left\{\begin{array}{l} v_-^{\varepsilon}(1,\theta) = v_+^{\varepsilon}(1,\theta),\ \theta \in (-\pi,\pi) \\ \mu_-\dfrac{\partial v_-^{\varepsilon}}{\partial r}(1,\theta) = \mu_+\dfrac{\partial v_+^{\varepsilon}}{\partial r}(1,\theta),\ \theta \in (-\pi,\pi) \end{array}\right. \\ (c.j.) & \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} v_-^{\varepsilon}(1,\theta)\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} v_+^{\varepsilon}(1,\theta)\,d\theta = 0 \\ (c.b.) & \dfrac{\partial v_+^{\varepsilon}}{\partial r}(1+\varepsilon,\theta) = L_+^{\varepsilon}(\theta),\ \theta \in (-\pi,\pi), \end{array}\right.$$

avec les conditions de bord périodiques (CBP_r^ε) et la condition de compatibilité

$$(CC_{r,\theta}^\varepsilon)\ \int_{\widehat{\Omega}_-} (\mu_- k_-)(r,\theta)\, r dr d\theta + \int_{\widehat{\Omega}_+^\varepsilon} \left(\mu_+ k_+^\varepsilon\right)(r,\theta)\, r dr d\theta + (1+\varepsilon)\int_{-\pi}^{+\pi} \mu_+ L_+^\varepsilon(\theta)\, d\theta = 0;$$

ici

$$\widehat{\Omega}_- := (0,1)\times(-\pi,\pi)\,; \qquad \widehat{\Omega}_+^\varepsilon := (1,1+\varepsilon)\times(-\pi,\pi)\,.$$

En utilisant le changement de variables

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & (-\infty,\delta)\times(-\pi,\pi) & \to & (0,1+\varepsilon)\times(-\pi,\pi) \\ & (t,\theta) & \mapsto & \Phi(t,\theta) = (e^t,\theta) = (r,\theta)\,, \end{array}$$

où $\delta = \ln(1+\varepsilon)$, et les fonctions

$$\begin{cases} u_-^\delta(t,\theta) := v_-^\varepsilon(r,\theta)\,, & u_+^\delta(t,\theta) := v_+^\varepsilon(r,\theta) \\ g_-(t,\theta) := r^2 k_-(r,\theta)\,, & g_+^\delta(t,\theta) := r^2 k_+^\varepsilon(r,\theta)\,, \end{cases}$$

le problème $\left(P_{r,\theta}^\varepsilon\right)$ devient

$$\left(P_{t,\theta}^\delta\right)\begin{cases} (eq.1) & \Delta u_-^\delta(t,\theta) = g_-(t,\theta) \text{ dans } \Omega_- \\ (eq.2) & \Delta u_+^\delta(t,\theta) = g_+^\delta(t,\theta) \text{ dans } \Omega_+^\delta \\ (c.t.) & \begin{cases} u_-^\delta(0,\theta) = u_+^\delta(0,\theta)\,,\ \theta\in(-\pi,\pi) \\ \mu_- \dfrac{\partial u_-^\delta}{\partial t}(0,\theta) = \mu_+ \dfrac{\partial u_+^\delta}{\partial t}(0,\theta)\,,\ \theta\in(-\pi,\pi) \end{cases} \\ (c.j.) & \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u_-^\delta(0,\theta)\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} u_+^\delta(0,\theta)\, d\theta = 0 \\ (c.b.) & \dfrac{\partial u_+^\delta}{\partial t}(\delta,\theta) = f_+^\delta(\theta)\,,\ \theta\in(-\pi,\pi)\,, \end{cases}$$

avec les conditions de bord périodiques

$$(CBP_t^\delta)\begin{cases} u_-^\delta(t,-\pi) = u_-^\delta(t,\pi)\,, & \dfrac{\partial u_-^\delta}{\partial\theta}(t,-\pi) = \dfrac{\partial u_-^\delta}{\partial\theta}(t,\pi)\,,\ t\in(-\infty,0) \\ u_+^\delta(t,-\pi) = u_+^\delta(t,\pi)\,, & \dfrac{\partial u_+^\delta}{\partial\theta}(t,-\pi) = \dfrac{\partial u_+^\delta}{\partial\theta}(t,\pi)\,,\ t\in(0,\delta), \end{cases}$$

et la condition de compatibilité

$$(CC_{t,\theta}^\delta)\ \int_{\Omega_-} (\mu_- g_-)(t,\theta)\, dt d\theta + \int_{\Omega_+^\delta} \left(\mu_+ g_+^\delta\right)(t,\theta)\, dt d\theta + \int_{-\pi}^{+\pi} \mu_+ f_+^\delta(\theta)\, d\theta = 0;$$

ici

$$f_+^\delta(\theta) := e^\delta L_+^\varepsilon(\theta)\,; \qquad \Omega_- := (-\infty,0)\times(-\pi,\pi)\,; \qquad \Omega_+^\delta := (0,\delta)\times(-\pi,\pi)\,.$$

On rappelle que l'on veut trouver $w_\pm^\varepsilon$ dans $W^{2,p}\left(\Omega_\pm^{*\varepsilon}\right)$ pour le problème $\left(P_{x,y}^\varepsilon\right)$ avec $h_\pm^\varepsilon \in L^p\left(\Omega_\pm^{*\varepsilon}\right)$. Cette dernière hypothèse implique que $g_\pm^\delta$ appartient à des espaces à poids. En effet,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\pm^{*\varepsilon}} \left|h_\pm^\varepsilon(x,y)\right|^p dx dy &= \int_{\widehat{\Omega}_\pm^\varepsilon} \left|k_\pm^\varepsilon(r,\theta)\right|^p r dr d\theta \\ &= \int_{\Omega_\pm^\delta} \left|k_\pm^\varepsilon(e^t,\theta)\right|^p e^{2t} dt d\theta \\ &= \int_{\Omega_\pm^\delta} \left|g_\pm^\delta(t,\theta)\right|^p e^{2(1-p)t} dt d\theta. \end{aligned}$$

En d'autres termes, la bonne hypothèse est la suivante

$$g_{\pm}^{\delta} \in L^{p}_{e^{(-2+2/p)t}}\left(\Omega_{\pm}^{\delta}, dtd\theta\right).$$

On traduit les régularités de $w_{\pm}^{\varepsilon}$ sur $u_{\pm}^{\delta}$. On obtient

$$w_{\pm}^{\varepsilon} \in L^{p}\left(\Omega_{\pm}^{*\varepsilon}, dxdy\right) \Leftrightarrow u_{\pm}^{\delta} \in L^{p}_{e^{(2/p)t}}\left(\Omega_{\pm}^{\delta}, dtd\theta\right).$$

Ensuite, en utilisant le fait que

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial w_{\pm}^{\varepsilon}}{\partial x}(x,y) = \cos\theta \dfrac{\partial v_{\pm}^{\varepsilon}}{\partial r}(r,\theta) - \dfrac{1}{r}\sin\theta \dfrac{\partial v_{\pm}^{\varepsilon}}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \dfrac{\partial w_{\pm}^{\varepsilon}}{\partial y}(x,y) = \sin\theta \dfrac{\partial v_{\pm}^{\varepsilon}}{\partial r}(r,\theta) + \dfrac{1}{r}\cos\theta \dfrac{\partial v_{\pm}^{\varepsilon}}{\partial \theta}(r,\theta),\end{array}\right.$$

on en déduit

$$\frac{\partial w_{\pm}^{\varepsilon}}{\partial x}, \frac{\partial w_{\pm}^{\varepsilon}}{\partial y} \in L^{p}\left(\Omega_{\pm}^{*\varepsilon}, dxdy\right),$$

si et seulement si

$$\frac{\partial u_{\pm}^{\delta}}{\partial t}, \frac{\partial u_{\pm}^{\delta}}{\partial \theta} \in L^{p}_{e^{(-1+2/p)t}}\left(\Omega_{\pm}^{\delta}, dtd\theta\right).$$

De la même manière, on obtient

$$\frac{\partial^2 w_{\pm}^{\varepsilon}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w_{\pm}^{\varepsilon}}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 w_{\pm}^{\varepsilon}}{\partial y^2} \in L^{p}\left(\Omega_{\pm}^{*\varepsilon}, dxdy\right),$$

si et seulement si

$$\frac{\partial^2 u_{\pm}^{\delta}}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_{\pm}^{\delta}}{\partial t \partial \theta}, \frac{\partial^2 u_{\pm}^{\delta}}{\partial \theta^2} \in L^{p}_{e^{(-2+2/p)t}}\left(\Omega_{\pm}^{\delta}, dtd\theta\right).$$

En résumé, l'espace naturel pour $u_{\pm}^{\delta}$ est

$$E^{2,p}\left(\Omega_{\pm}^{\delta}, dtd\theta\right) = \left\{u_{\pm}^{\delta} : e^{(-|\alpha|+2/p)t}\partial^{\alpha} u_{\pm}^{\delta} \in L^{p}\left(\Omega_{\pm}^{\delta}, dtd\theta\right) \text{ pour } |\alpha| \leqslant 2\right\}.$$

Remarque II.1 *On note que le réel*

$$\varpi := -2 + \frac{2}{p},$$

est l'opposé du coefficient de Sobolev de $W^{2,p}$ à deux variables.

Cependant, il est difficile de travailler dans les espaces à poids mentionnés précédemment. C'est pourquoi, on définit de nouvelles fonctions inconnues

$$U_{\pm}^{\delta}(t,\theta) := e^{\varpi t} u_{\pm}^{\delta}(t,\theta),$$

et de nouveaux membres à droites du problème

$$G_{\pm}^{\delta}(t,\theta) := e^{\varpi t} g_{\pm}^{\delta}(t,\theta).$$

Remarque II.2 *On observe que, si $U_{\pm}^{\delta}$ est dans l'espace $W^{2,p}\left(\Omega_{\pm}^{\delta}, dtd\theta\right)$ alors $u_{\pm}^{\delta}$ appartient à $E^{2,p}\left(\Omega_{\pm}^{\delta}, dtd\theta\right)$. De plus, $G_{\pm}^{\delta} \in L^{p}\left(\Omega_{\pm}^{\delta}, dtd\theta\right)$ si et seulement si $g_{\pm}^{\delta} \in L^{p}_{e^{\varpi t}}\left(\Omega_{\pm}^{\delta}, dtd\theta\right)$.*

Ainsi, les équations vérifiées par $U_{\pm}^{\delta}$ sont

$$\left(UP_{t,\theta}^{\delta}\right)\begin{cases}(eq.1) & \partial_t^2 U_-^{\delta}(t,\theta) - 2\varpi\partial_t U_-^{\delta}(t,\theta) + \varpi^2 U_-^{\delta}(t,\theta) + \partial_\theta^2 U_-^{\delta}(t,\theta) = G_-(t,\theta) \text{ dans } \Omega_- \\ (eq.2) & \partial_t^2 U_+^{\delta}(t,\theta) - 2\varpi\partial_t U_+^{\delta}(t,\theta) + \varpi^2 U_+^{\delta}(t,\theta) + \partial_\theta^2 U_+^{\delta}(t,\theta) = G_+^{\delta}(t,\theta) \text{ dans } \Omega_+^{\delta} \\ (c.t.) & \begin{cases} U_-^{\delta}(0,\theta) = U_+^{\delta}(0,\theta),\ \theta\in(-\pi,\pi) \\ \mu_- \dfrac{\partial U_-^{\delta}}{\partial t}(0,\theta) - \mu_+ \dfrac{\partial U_+^{\delta}}{\partial t}(0,\theta) = \varpi(\mu_- - \mu_+) U_{\pm}^{\delta}(0,\theta),\ \theta\in(-\pi,\pi)\end{cases} \\ (c.j.) & \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} U_-^{\delta}(0,\theta)\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} U_+^{\delta}(0,\theta)\,d\theta = 0 \\ (c.b.) & \dfrac{\partial U_+^{\delta}}{\partial t}(\delta,\theta) - \varpi U_+^{\delta}(\delta,\theta) = F_+^{\delta}(\theta),\ \theta\in(-\pi,\pi),\end{cases}$$

avec les conditions de bord périodiques

$$\left(UCBP_t^{\delta}\right)\begin{cases} U_-^{\delta}(t,-\pi) = U_-^{\delta}(t,\pi),\ \dfrac{\partial U_-^{\delta}}{\partial\theta}(t,-\pi) = \dfrac{\partial U_-^{\delta}}{\partial\theta}(t,\pi),\ t\in(-\infty,0) \\ U_+^{\delta}(t,-\pi) = U_+^{\delta}(t,\pi),\ \dfrac{\partial U_+^{\delta}}{\partial\theta}(t,-\pi) = \dfrac{\partial U_+^{\delta}}{\partial\theta}(t,\pi),\ t\in(0,\delta),\end{cases}$$

et la condition de compatibilité

$$\left(UCC_{t,\theta}^{\delta}\right)\mu_-\int_{\Omega_-} e^{-\varpi t} G_-(t,\theta)\,dtd\theta + \mu_+\int_{\Omega_+^{\delta}} e^{-\varpi t} G_+^{\delta}(t,\theta)\,dtd\theta + \mu_+ e^{-\varpi\delta}\int_{-\pi}^{+\pi} F_+^{\delta}(\theta)\,d\theta = 0,$$

où $F_+^{\delta}(\theta) := e^{\varpi\delta} f_+^{\delta}(\theta)$.

On rappelle que $E := L_{\#}^p(-\pi,\pi)$ est l'espace des fonctions mesurables et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ avec une puissance p-ième localement intégrable et de norme

$$\|\psi\|_E = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\psi(\theta)|^p\,d\theta\right)^{1/p}.$$

Soit P l'opérateur de projection défini par

$$\begin{array}{cccc} P: & L_{\#}^p(-\pi,\pi) & \to & \mathbb{R} \\ & \psi & \mapsto & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\theta)\,d\theta. \end{array}$$

Maintenant, on pose

$$E_0 := L_{\#,0}^p(-\pi,\pi) := \left\{\psi\in L_{\#}^p(-\pi,\pi) : P\psi = 0\right\} = Ker(P),$$

ensuite

$$E = L_{\#}^p(-\pi,\pi) = E_0 \oplus E_1,$$

où

$$E_1 := \mathbb{R}.f_1 = \{\lambda f_1, \lambda\in\mathbb{R}\},$$

$f_1(\theta) = 1$ pour $\theta\in[-\pi,\pi[$.

Puisque E est un espace UMD et que E_0 est un sous-espace fermé de E, alors E_0 est un espace UMD.

On définit les opérateurs suivants

$$\begin{cases} D(A) = \{\psi\in E : \psi'\in E,\ \psi''\in E\} := W_{\#}^{2,p}(-\pi,\pi) \\ (A\psi)(\theta) = \psi''(\theta),\ \psi\in D(A),\end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} D(A_0)=\{\psi\in E_0:\psi'\in E_0,\,\psi''\in E_0\}:=W^{2,p}_{\#,0}(-\pi,\pi)\\ (A_0\psi)(\theta)=\psi''(\theta),\,\psi\in D(A_0).\end{array}\right. \tag{II.4}$$

L'opérateur A n'est pas injectif dans E mais A_0 est bijectif dans E_0.

On a

$$A\left(I-P\right)\psi=A_0\psi,\qquad AP\psi=0.$$

En posant

$$U^\delta_\pm=\left(I-P\right)U^\delta_\pm\oplus PU^\delta_\pm:=W^\delta_\pm+V^\delta_\pm,$$

et

$$H_-:=\left(I-P\right)G_-,\;H^\delta_+:=\left(I-P\right)G^\delta_+,\;M^\delta_+:=\left(I-P\right)F^\delta_+,$$

le problème $\left(UP^\delta_{t,\theta}\right)$ avec les conditions de bord périodiques $\left(UCBP^\delta_t\right)$ se divise en deux problèmes (le premier est dans E_0 et le second dans E_1)

$$\left(WP^\delta_t\right)\left\{\begin{array}{ll} (eq.1) & \left(W^\delta_-\right)''(t)-2\varpi\left(W^\delta_-\right)'(t)+\varpi^2W^\delta_-(t)+A_0W^\delta_-(t)=H_-(t)\;\text{ sur }\;(-\infty,0)\\ (eq.2) & \left(W^\delta_+\right)''(t)-2\varpi\left(W^\delta_+\right)'(t)+\varpi^2W^\delta_+(t)+A_0W^\delta_+(t)=H^\delta_+(t)\;\text{ sur }\;(0,\delta)\\ (c.t.) & \left\{\begin{array}{l} W^\delta_-(0)=W^\delta_+(0)\\ \mu_-\left(W^\delta_-\right)'(0)-\mu_+\left(W^\delta_+\right)'(0)=\varpi\left(\mu_--\mu_+\right)W^\delta_\pm(0)\end{array}\right.\\ (c.b.) & \left(W^\delta_+\right)'(\delta)-\varpi W^\delta_+(\delta)=M^\delta_+,\end{array}\right.$$

et

$$\left(VP^\delta_t\right)\left\{\begin{array}{ll} (eq.1) & \left(V^\delta_-\right)''(t)-2\varpi\left(V^\delta_-\right)'(t)+\varpi^2V^\delta_-(t)=PG_-(t)\;\text{ sur }\;(-\infty,0)\\ (eq.2) & \left(V^\delta_+\right)''(t)-2\varpi\left(V^\delta_+\right)'(t)+\varpi^2V^\delta_+(t)=PG^\delta_+(t)\;\text{ sur }\;(0,\delta)\\ (c.t.) & \left\{\begin{array}{l} V^\delta_-(0)=V^\delta_+(0)\\ \mu_-\left(V^\delta_-\right)'(0)-\mu_+\left(V^\delta_+\right)'(0)=\varpi\left(\mu_--\mu_+\right)V^\delta_\pm(0)\end{array}\right.\\ (c.j.) & V^\delta_-(0)=V^\delta_+(0)=0\\ (c.b.) & \left(V^\delta_+\right)'(\delta)-\varpi V^\delta_+(\delta)=PF^\delta_+,\end{array}\right.$$

sous la condition de compatibilité

$$\left(VCC^\delta_t\right)\;\mu_-\int_{-\infty}^0 e^{-\varpi t}PG_-(t)\,dt+\mu_+\int_0^\delta e^{-\varpi t}PG^\delta_+(t)\,dt-\mu_+e^{-\varpi\delta}PF^\delta_+=0,$$

avec $H_-\in L^p\left(-\infty,0;E_0\right)$, $H^\delta_+\in L^p\left(0,\delta;E_0\right)$, $1<p<\infty$, M^δ_+ est un élément donné dans E_0.

Maintenant, on spécifie les propriétés spectrales de l'opérateur A_0.

Proposition II.3 *L'opérateur A_0 défini par (II.4) est linéaire fermé densément défini dans E_0 et inversible dans $L(E_0)$ avec les propriétés suivantes*

$$\sigma(A_0)=\left\{-n^2:n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\right\},$$

$$\exists C>0,\,\forall\lambda\notin\,]-\infty,0[\,,\;\left\|(A_0-\lambda I)^{-1}\right\|_{L(E_0)}\leqslant\frac{C}{1+|\lambda|},$$

$$\left\{\begin{array}{l}\forall s\in\mathbb{R},\;(-A_0)^{is}\in L\left(E_0\right)\;\; et\\ \exists C>1,\,\exists\alpha\in\,]0,\pi[\,,\,\forall s\in\mathbb{R},\;\left\|(-A_0)^{is}\right\|_{L(E_0)}\leqslant Ce^{\alpha|s|}.\end{array}\right.$$

Preuve. Tout d'abord, il est facile de voir l'inversibilité de A_0 avec la formule explicite de représentation de son inverse dans E_0

$$A_0^{-1}(\psi)(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[(\theta+\pi)t - t^2/2]\psi(t)\,dt + \int_{-\pi}^{\theta}(\theta - t)\psi(t)\,dt,\ \theta \in (-\pi,\pi),$$

qui donne évidemment la continuité de A_0^{-1} sur E_0, et par conséquent A_0 est fermé. Puisque l'inclusion $D(A_0) \subset W^{2,p}(-\pi,\pi)$ est compacte, on en déduit par composition que A_0^{-1} est compacte, ainsi le spectre $\sigma(A_0)$ est entièrement constitué de valeurs propres isolées d'ordre de multiplicité fini ; voir Kato [38], Theorem 6.29, p. 187. Maintenant, l'équation

$$A_0\psi = \lambda\psi,$$

équivaut à

$$\begin{cases} \psi'' = \lambda\psi \\ \psi(-\pi) = \psi(\pi) \\ \psi'(-\pi) = \psi'(\pi); \end{cases}$$

nécessairement $\psi \in C^2[-\pi,\pi]$ et

$$\psi(\theta) = C_1 \sinh\sqrt{\lambda}\theta + C_2\cosh\sqrt{\lambda}\theta.$$

On a deux cas possibles : le premier est $C_1 = C_2 = 0$, ce qui donne $\psi \equiv 0$, et alors il n'y a pas de valeurs propres ; le second est

$$\sinh\sqrt{\lambda}\pi = 0 = \sin i\sqrt{\lambda}\pi,$$

i.e. $\sqrt{\lambda} = -in$ et donc $\lambda = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$; mais le cas $n = 0$ est impossible puisqu'il correspond à $\psi = C_2$ et la condition $P\psi = 0$ donne $\psi \equiv 0$ qui ne peut être un vecteur propre. Finalement

$$\sigma(A_0) = \left\{-n^2 : n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\right\}.$$

Ensuite, un calcul explicite pour l'équation spectrale $A_0\varphi - \lambda\varphi = \psi$ dans E_0, avec $\lambda \notin]-\infty,0]$, donne

$$\varphi(\theta) = \left\{(A_0 - \lambda I)^{-1}\psi\right\}(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} K_{\sqrt{\lambda}}(s,\theta)\psi(s)\,ds,$$

où

$$K_{\sqrt{\lambda}}(s,\theta) = -\begin{cases} \dfrac{\cosh\sqrt{\lambda}(\pi - s + \theta)}{2\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}\pi} & \text{si } \theta \leqslant s \leqslant \pi \\ \dfrac{\cosh\sqrt{\lambda}(\pi - \theta + s)}{2\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}\pi} & \text{si } -\pi \leqslant s \leqslant \theta. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que $\varphi \in D(A_0)$ et pour tout $\lambda \notin]-\infty,0]$, $\psi \in E_0$, on a par le célèbre Lemme de Schur

$$\left\|(A_0 - \lambda I)^{-1}\psi\right\| \leqslant \left(\sup_{\theta\in[-\pi,\pi]}\int_{-\pi}^{\pi}\left|K_{\sqrt{\lambda}}(s,\theta)\right|ds\right)\|\psi\|,$$

et

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\left|K_{\sqrt{\lambda}}(s,\theta)\right|ds \leqslant & \frac{1}{2|\lambda|^{1/2}\left|\sinh\sqrt{\lambda}\pi\right|}\int_{-\pi}^{\theta}\cosh Re\sqrt{\lambda}(\pi + s - \theta)ds \\ & + \frac{1}{2|\lambda|^{1/2}\left|\sinh\sqrt{\lambda}\pi\right|}\int_{\theta}^{\pi}\cosh Re\sqrt{\lambda}(\pi - s + \theta)ds \\ \leqslant & \frac{\sinh Re\sqrt{\lambda}\pi - \sinh Re\sqrt{\lambda}\theta}{|\lambda|^{1/2}\,Re\sqrt{\lambda}\left|\sinh\sqrt{\lambda}\pi\right|},\end{aligned}$$

donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|K_{\sqrt{\lambda}}(s,\theta)\right| ds \leqslant \frac{\sinh Re\sqrt{\lambda}\pi}{|\lambda|^{1/2}\, Re\sqrt{\lambda}\left|\sinh\sqrt{\lambda}\pi\right|} \leqslant \frac{1}{|\lambda|\cos(\frac{\arg(\lambda)}{2})}.$$

Puisque E_0 est un espace UMD, on déduit de l'inégalité précédente que $D\left(A_0\right)$ est dense dans E_0 ; voir Haase [37], Proposition 2.1.1, p. 18-19.

La propriété des puissances imaginaires de A_0 est dûe à Prüss-Sohr [53], Theorem C, p. 166. ■

Ainsi, l'opérateur

$$B := -\left(-A_0\right)^{1/2},$$

génère un semi-groupe analytique, $\left(e^{\xi B}\right)_{\xi\geqslant 0}$, et par le Théorème de l'image spectrale (voir Haase [37], p. 56), on en déduit que $\sigma(B) = -\mathbb{N}\setminus\{0\}$. D'autre part, il existe deux constantes positives a, M telles que, pour tout $\xi > 0$, pour tout $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on a

$$\left\|e^{\xi B}\right\|_{L(E_0)} \leqslant Me^{-a\xi}, \qquad \left\|B^m e^{\xi B}\right\|_{L(E_0)} \leqslant M\xi^{-m}e^{-a\xi}; \tag{II.5}$$

voir Pazy [51], Theorem 6.13, p. 74.

De plus, l'opérateur $\left(I + e^{2\delta B}\right)^{-1} \in L(E_0)$; voir Lunardi [48], Proposition 2.3.6, p. 60.

On considère les deux opérateurs suivants

$$B_{\varpi}^{+} := B + \varpi I, \quad B_{\varpi}^{-} := B - \varpi I.$$

On note que, B_{ϖ}^{+} de domaine $D(B_{\varpi}^{+}) = D(B)$ génère un semi-groupe analytique ; voir Engel-Nagel [17], Proposition 1.12, p. 164. Il est inversible dans $L(E_0)$ puisque pour tout $p \in \left]1,\infty\right[$, $-\varpi$ n'est jamais égal à $-n$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Ce n'est pas la même chose pour le second opérateur B_{ϖ}^{-} ; puisque pour l'unique cas particulier $p = 2$, ϖ coïncide avec la valeur spectrale

$$\varpi = -2 + \frac{2}{p} = -1.$$

C'est pourquoi, on suppose dans tout le reste du chapitre que

$$p \in \left]1,\infty\right[\text{ et } p \neq 2.$$

Remarque II.4 *On note que la situation $p = 2$ correspond au cas hilbertien et peut être traitée par la méthode variationnelle usuelle.*

Remarque II.5 *Ici, on considère le problème $\left(WP_t^{\delta}\right)$ avec A_0 défini par (II.4). Cependant, on peut aussi l'étudier quand A_0 est un opérateur linéaire fermé de domaine $D\left(A_0\right)$ dans un espace de Banach complexe E_0 sous les hypothèses suivantes*

$$E_0 \text{ est un espace UMD},$$

$$\sigma(-A_0) = \{\lambda_j\}_{j\geqslant 1} \text{ avec } 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 ...,$$

$$\forall j \geqslant 1,\ 2 - \frac{2}{p} \neq \sqrt{\lambda_j},$$

$$\exists C > 0,\ \forall \lambda \in \left[0,+\infty\right[,\ \left\|(A_0 - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(E_0)} \leqslant \frac{C}{1+|\lambda|},$$

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R},\ (-A_0)^{is} \in L\left(E_0\right) \text{ et} \\ \exists C > 1,\ \exists \alpha \in \left]0,\pi\right[,\ \forall s \in \mathbb{R},\ \left\|(-A_0)^{is}\right\|_{L(E_0)} \leqslant Ce^{\alpha|s|}. \end{cases}$$

Remarque II.6 *Si on considère Ω_-^* comme étant la sphère unité de $\mathbb{R}^m$, par un calcul analogue, on obtient les équations*

$$\left(WP_t^{\delta,m}\right)\begin{cases}\left(W_-^\delta\right)''(t)-(m-2-2\varpi)\left(W_-^\delta\right)'(t)+\varpi(\varpi-m+2)W_-^\delta(t)+A_0W_-^\delta(t)=H_-(t) \ \ sur \ \ (-\infty,0)\\ \left(W_+^\delta\right)''(t)-(m-2-2\varpi)\left(W_+^\delta\right)'(t)+\varpi(\varpi-m+2)W_+^\delta(t)+A_0W_+^\delta(t)=H_+^\delta(t) \ \ sur \ \ (0,\delta)\\ W_-^\delta(0)=W_+^\delta(0)\\ \mu_-\left(W_-^\delta\right)'(0)-\mu_+\left(W_+^\delta\right)'(0)=(\mu_--\mu_+)\varpi W_\pm^\delta(0)\\ \left(W_+^\delta\right)'(\delta)-\varpi W_+^\delta(\delta)=M_+^\delta,\end{cases}$$

où $\varpi=-2+m/p$ et A_0 est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère S^{m-1}. Ici, on doit supposer que pour tout $j\geqslant 1$

$$\varpi(\varpi-m+2)=\left(\frac{m}{p}-2\right)\left(\frac{m}{p}-m\right)\neq\lambda_j. \tag{II.6}$$

Soit $E=L^p(S^{m-1})$ et on considère l'espace de Banach $X=L^p(-\infty,\delta;E)$, et les opérateurs suivants

$$\begin{cases}D(\Lambda_1)=\{W^\delta=(W_-^\delta,W_+^\delta)\in L^p(-\infty,0;E)\times L^p(0,\delta;E):W_-^\delta(0)=W_+^\delta(0),\\ \qquad\qquad \mu_-\left(W_-^\delta\right)'(0)-\mu_+\left(W_+^\delta\right)'(0)=(\mu_--\mu_+)\varpi W_\pm^\delta(0) \ \ et \ \ \left(W_+^\delta\right)'(\delta)-\varpi W_+^\delta(\delta)=0\}\\ \Lambda_1W^\delta=(W^\delta)''-(m-2-2\varpi)\left(W^\delta\right)'+\varpi(\varpi-m+2)W^\delta,\end{cases}$$

$$\begin{cases}D(\Lambda_2)=\{W^\delta=(W_-^\delta,W_+^\delta)\in L^p(-\infty,0;E)\times L^p(0,\delta;E):W^\delta(t)\in D(A_0)\,p.p.\,t\in(-\infty,\delta)\}\\ (\Lambda_2W^\delta)(t)=A_0W^\delta(t).\end{cases}$$

On peut vérifier que les opérateurs $-\Lambda_1$ et $-\Lambda_2$ sont sectoriels et que leurs résolvantes commutent. On sait ensuite que l'intersection des spectres $\sigma(\Lambda_1)$ et $\sigma(-\Lambda_2)$ est vide, ainsi $\Lambda_1+\Lambda_2$ est fermable. Cette dernière condition signifie que (II.6) est satisfait. Ainsi, on peut conjecturer que dans les cas critiques (i.e. quand (II.6) n'est pas satisfait), la somme $\Lambda_1+\Lambda_2$ n'est pas fermable.

On veut maintenant étudier l'existence et l'unicité de la solution classique du problème $\left(VP_t^\delta\right)$, i.e. une fonction

$$V^\delta=\begin{cases}V_-^\delta \text{ dans }]-\infty,0[\\ V_+^\delta \text{ dans }]0,\delta[,\end{cases}$$

telle que

$$V_-^\delta\in W^{2,p}(-\infty,0;E_1), \qquad V_+^\delta\in W^{2,p}(0,\delta;E_1),$$

et vérifiant $\left(VP_t^\delta\right)$; de même pour le problème $\left(WP_t^\delta\right)$, une solution classique est une fonction

$$W^\delta=\begin{cases}W_-^\delta \text{ dans }]-\infty,0[\\ W_+^\delta \text{ dans }]0,\delta[,\end{cases}$$

telle que

$$\begin{cases}W_-^\delta\in W^{2,p}(-\infty,0;E_0)\cap L^p(-\infty,0;D(A_0))\\ W_+^\delta\in W^{2,p}(0,\delta;E_0)\cap L^p(0,\delta;D(A_0)),\end{cases}$$

et vérifiant $\left(WP_t^\delta\right)$.

L'étude du problème $\left(WP_t^\delta\right)$ nécessite les lemmes suivants.

3 Lemmes techniques

Lemme II.7 *Soient* $Q \in \{B, B_\varpi^-, B_\varpi^+\}$ *et* $f \in L^p(0,\delta;E_0)$, $1 < p < \infty$ *avec* $p \neq 2$. *Alors*

$$Q\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-s)Q} f(s)\,ds \in L^p(0,\delta;E_0),$$
$$Q\int_{\cdot}^{\delta} e^{(s-\cdot)Q} f(s)\,ds \in L^p(0,\delta;E_0),$$
$$Q\int_0^{\delta} e^{(\cdot+s)Q} f(s)\,ds \in L^p(0,\delta;E_0).$$

Preuve. Pour la première et la deuxième applications, c'est une conséquence du Théorème de Dore-Venni [15]. Pour la troisième, il suffit d'écrire pour presque tout $t \in (0,\delta)$

$$\begin{aligned} Q\int_0^{\delta} e^{(t+s)Q} f(s)\,ds =& Q\int_0^{t} e^{(t+s)Q} f(s)\,ds + Q\int_t^{\delta} e^{(t+s)Q} f(s)\,ds \\ =& Q\int_0^{t} e^{(t-s)Q} \left(e^{2sQ} f(s)\right) ds + e^{2tQ} Q\int_t^{\delta} e^{(s-t)Q} f(s)\,ds. \end{aligned}$$

■

Lemme II.8 *Soient* $Q \in \{B, B_\varpi^-, B_\varpi^+\}$ *et* $f \in L^p(-\infty,0;E_0)$, $1 < p < \infty$ *avec* $p \neq 2$. *Alors*

$$Q\int_{\cdot}^{0} e^{(s-\cdot)Q} f(s)\,ds \in L^p(-\infty,0;E_0),$$
$$Q\int_{-\infty}^{\cdot} e^{(\cdot-s)Q} f(s)\,ds \in L^p(-\infty,0;E_0),$$
$$Q\int_{-\infty}^{0} e^{-(\cdot+s)Q} f(s)\,ds \in L^p(-\infty,0;E_0).$$

Preuve. On écrit pour presque tout $t \in (-\infty, 0)$,

$$Q\int_t^{0} e^{(s-t)Q} f(s)\,ds = Q\int_0^{-t} e^{(-t-\tau)Q} f(-\tau)\,d\tau,$$

et on effectue le changement de variables

$$t = -x, \qquad dt = -dx,$$

pour obtenir

$$Q\int_t^{0} e^{(s-t)Q} f(s)\,ds = Q\int_0^{x} e^{(x-\tau)Q} f(-\tau)\,d\tau,$$

où $f(-\cdot) \in L^p(0,+\infty;E_0)$. Alors, il est clair que

$$Q\int_{\cdot}^{0} e^{(s-\cdot)Q} f(s)\,ds \in L^p(-\infty,0;E_0),$$

si et seulement si

$$Q\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)Q} f(-\tau)\,d\tau \in L^p(0,+\infty;E_0).$$

En vertu du Théorème de Dore-Venni [15], on a

$$Q\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)Q} f(-\tau)\,d\tau \in L^p(0,T;E_0),$$

pour tout $T > 0$, et grâce à Dore [13], Theorem 2.4, p. 28, on obtient

$$Q\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)Q} f(-\tau)\, d\tau \in L^p(0,+\infty;E_0).$$

Pour la deuxième application, la preuve sera faite à la Proposition III.27 du Chapitre III.

Pour la troisième, on écrit pour presque tout $t \in (-\infty, 0)$

$$Q\int_{-\infty}^0 e^{-(t+s)Q} f(s)\, ds = e^{-2tQ} Q\int_{-\infty}^t e^{(t-s)Q} f(s)\, ds + Q\int_t^0 e^{(s-t)Q}\left(e^{-2sQ} f(s)\right) ds,$$

et on applique les résultats précédents. ■

Lemme II.9 *Soient $Q \in \{B, B_\varpi^-, B_\varpi^+\}$ et $f \in L^p(0,\delta;E_0)$, $1 < p < \infty$ avec $p \neq 2$. Alors*

$$Q\int_{-\infty}^0 e^{(\cdot-s)Q} f(s)\, ds \in L^p(0,\delta;E_0).$$

Preuve. On effectue le changement de variables suivant

$$t = -x, \qquad dt = -dx,$$

et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\delta \left\| Q\int_{-\infty}^0 e^{(t-s)Q} f(s)\, ds\right\|^p dt &= \int_{-\delta}^0 \left\| Q\int_{-\infty}^0 e^{(-x-s)Q} f(s)\, ds\right\|^p dx \\ &\leqslant \int_{-\infty}^0 \left\| Q\int_{-\infty}^0 e^{-(x+s)Q} f(s)\, ds\right\|^p dx < \infty,\end{aligned}$$

voir Lemme II.8. ■

Lemme II.10 *Soient $Q \in \{B, B_\varpi^-, B_\varpi^+\}$ et $f \in L^p(-\infty,0;E_0)$, $1 < p < \infty$ avec $p \neq 2$. Alors*

$$Q\int_0^\delta e^{(s-\cdot)Q} f(s)\, ds \in L^p(-\infty,0;E_0).$$

Preuve. On effectue le changement de variables suivant

$$t = -x, \qquad dt = -dx,$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \left\| Q\int_0^\delta e^{(s-t)Q} f(s)\, ds\right\|^p dt &= \int_0^{+\infty} \left\| Q\int_0^\delta e^{(s+x)Q} f(s)\, ds\right\|^p dx \\ &= \int_0^\delta \left\| Q\int_0^\delta e^{(s+x)Q} f(s)\, ds\right\|^p dx + \int_\delta^{+\infty} \left\| Q\int_0^\delta e^{(s+x)Q} f(s)\, ds\right\|^p dx,\end{aligned}$$

la première intégrale est finie puisque $Q\int_0^\delta e^{(s+\cdot)Q} f(s)\, ds \in L^p(0,\delta;E_0)$, voir Lemme II.7 ; pour la seconde intégrale, on utilise les propriétés des semi-groupes et l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\int_\delta^{+\infty} \left\| Q\int_0^\delta e^{(s+x)Q} f(s)\, ds\right\|^p dx &\leqslant M^p \int_\delta^{+\infty} \left(\int_0^\delta \frac{e^{-a(s+x)}}{s+x}\|f(s)\|\, ds\right)^p dx \\ &\leqslant \frac{M^p}{\delta^p}\int_\delta^{+\infty}\left(\int_0^\delta e^{-qa(s+x)} ds\right)^{\frac{p}{q}} dx\, \|f\|^p_{L^p(0,\delta;E_0)} \\ &\leqslant K\|f\|^p_{L^p(0,\delta;E_0)},\end{aligned}$$

avec $1/p + 1/q = 1$. ■

Lemme II.11 *Soient* $Q \in \{B, B_{\varpi}^{-}, B_{\varpi}^{+}\}$ *et* $1 < p < \infty$ *avec* $p \neq 2$. *Alors*

1. $\varphi \in (E_0, D(A_0))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}$ *si et seulement si* $Qe^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,\delta;E_0)$.
2. $\varphi \in (E_0, D(A_0))_{1-\frac{1}{2p},p}$ *si et seulement si* $Q^2e^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,\delta;E_0)$.

Preuve. Comme on le montrera dans la Proposition V.22 du Chapitre V, on a

$$\varphi \in (E_0, D(Q^m))_{1-\frac{1}{mp},p} \text{ si et seulement si } Q^m e^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,\delta;E_0).$$

1. En appliquant cette propriété pour $m = 1$, on obtient

$$\varphi \in (E_0, D(Q))_{1-\frac{1}{p},p} \text{ si et seulement si } Qe^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,\delta;E_0),$$

et par la propriété de réitération (voir Lions-Peetre [45]), on a

$$(E_0, D(Q))_{1-\frac{1}{p},p} = \left(E_0, D\left(Q^2\right)\right)_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p} = (E_0, D(A_0))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}.$$

2. En appliquant la propriété pour $m = 2$, on obtient le résultat.

■

Lemme II.12 *Soient* $Q \in \{B, B_{\varpi}^{-}, B_{\varpi}^{+}\}$ *et* $1 < p < \infty$ *avec* $p \neq 2$. *Alors*

$$\varphi \in (E_0, D(A_0))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p} \textit{ si et seulement si } Qe^{\cdot Q}\varphi \in L^p(-\infty,0;E_0).$$

Preuve. La preuve est similaire au Lemme II.11. ■

Proposition II.13 *Soient* A_0 *défini par (II.4) et* $1 < p < \infty$ *avec* $p \neq 2$.

1. *Si* $1 < p < 2$, *alors*

$$(E_0, D(A_0))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p} = \left\{\psi \in W^{1-\frac{1}{p},p}(-\pi,\pi) : \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta)\, d\theta = 0\right\}.$$

2. *Si* $p > 2$, *alors*

$$(E_0, D(A_0))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p} = \left\{\psi \in W^{1-\frac{1}{p},p}(-\pi,\pi) : \psi(-\pi) = \psi(\pi) \textit{ et } \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta)\, d\theta = 0\right\}.$$

Preuve. On a

$$(E_0, D(A_0))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p} = \left(L^p_{\#,0}(-\pi,\pi), W^{2,p}_{\#,0}(-\pi,\pi)\right)_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p},$$

où $W^{2,p}_{\#,0}(-\pi,\pi)$ est défini par (II.4). Ensuite, il est bien connu que

$$W^{2,p}_{\#,0}(-\pi,\pi) \subset \left(L^p_{\#,0}(-\pi,\pi), W^{2,p}_{\#,0}(-\pi,\pi)\right)_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p} \subset L^p(-\pi,\pi).$$

De plus, dans Grisvard [32], Proposizione 3, p. 683, on a

$$\left(L^p(-\pi,\pi), W^{2,p}(-\pi,\pi)\right)_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p} = B^{1-\frac{1}{p}}_{p,p}(-\pi,\pi) = W^{1-\frac{1}{p},p}(-\pi,\pi),$$

et comme dans Grisvard [32], p. 708, on obtient

$$\begin{aligned}&(L^p_{\#,0}(-\pi,\pi), W^{2,p}_{\#,0}(-\pi,\pi))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}\\ &= \begin{cases} \left\{\psi \in W^{1-\frac{1}{p},p}(-\pi,\pi) : \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta)\, d\theta = 0\right\} & \text{si } 1 < p < 2 \\ \left\{\psi \in W^{1-\frac{1}{p},p}(-\pi,\pi) : \psi(-\pi) = \psi(\pi) \text{ et } \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta)\, d\theta = 0\right\} & \text{si } p > 2.\end{cases}\end{aligned}$$

■

Lemme II.14 *Soit $\nu \geqslant 0$. Alors, l'opérateur défini par*

$$D_\nu := (1+\nu)\left(I + \frac{1-\nu}{1+\nu}e^{2\delta B}\right),$$

est inversible dans $L(E_0)$.

Preuve. On pose

$$C := -\frac{1-\nu}{1+\nu}e^{2\delta B},$$

donc pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$C^n = (-1)^n \left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)^n e^{2\delta n B},$$

et

$$\|C^n\|_{L(E_0)} = \left|\frac{1-\nu}{1+\nu}\right|^n \left\|e^{2\delta n B}\right\|_{L(E_0)}.$$

Or

$$\left|\frac{1-\nu}{1+\nu}\right| \leqslant \frac{1+|\nu|}{1+\nu} \leqslant 1,$$

donc en utilisant (II.5), on a

$$\|C^n\|_{L(E_0)} \leqslant Me^{-2a\delta n},$$

d'où pour n assez grand

$$\|C^n\|_{L(E_0)} < 1,$$

et $I - C^n$ est inversible dans $L(E_0)$, ce qui implique $I - C$ inversible dans $L(E_0)$ puisque

$$\begin{aligned} I =&(I-C)(I+C+...+C^{n-1})(I-C^n)^{-1} \\ =&(I+C+...+C^{n-1})(I-C^n)^{-1}(I-C). \end{aligned}$$

■

4 Étude du problème opérationnel

4.1 Problème $\left(VP_t^\delta\right)$

Pour le problème $\left(VP_t^\delta\right)$, on a le résultat suivant.

Proposition II.15 *Soient $F_+^\delta \in E$ et $G_- \in L^p(-\infty, 0; E)$, $G_+^\delta \in L^p(0,\delta;E)$, $1 < p < \infty$, satisfaisant $\left(VCC_t^\delta\right)$. Alors, le problème $\left(VP_t^\delta\right)$ admet une unique solution*

$$V^\delta = \begin{cases} V_-^\delta \text{ dans }]-\infty, 0[\\ V_+^\delta \text{ dans }]0, \delta[, \end{cases}$$

telle que

$$V_-^\delta \in W^{2,p}(-\infty, 0; E_1), \qquad V_+^\delta \in W^{2,p}(0,\delta;E_1).$$

Preuve. L'équation homogène sur (c,d), où $-\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty$,

$$y''(t) - 2\varpi y'(t) + \varpi^2 y(t) = 0,$$

admet comme solution générale

$$y_h(t) = (ta + b)\, e^{\varpi t}.$$

Pour résoudre l'équation non homogène

$$y''(t) - 2\varpi y'(t) + \varpi^2 y(t) = f(t),$$

on utilise la méthode de variation de la constante

$$\begin{cases} ta'(t) + b'(t) = 0, \\ \left[(1 + \varpi t)\, a'(t) + \varpi b'(t)\right] e^{\varpi t} = f(t). \end{cases}$$

Une solution particulière de l'équation non homogène est donnée par

$$y_p(t) = \left[t \int_c^t e^{-\varpi s} f(s)\, ds - \int_c^t s e^{-\varpi s} f(s)\, ds\right] e^{\varpi t}.$$

On cherche V_-^δ et V_+^δ solutions respectives de $(eq.1)$ et $(eq.2)$ dans $\left(VP_t^\delta\right)$, ce qui suppose l'existence de $a_-, a_+, b_-, b_+ \in \mathbb{R}$ tels que pour presque tout $t \in (-\infty, 0)$

$$V_-^\delta(t) = (ta_- + b_-)\, e^{\varpi t} + \left(t \int_{-\infty}^t e^{-\varpi s} PG_-(s)\, ds - \int_{-\infty}^t s e^{-\varpi s} PG_-(s)\, ds\right) e^{\varpi t},$$

et pour presque tout $t \in (0, \delta)$

$$V_+^\delta(t) = (ta_+ + b_+)\, e^{\varpi t} + \left(-t \int_t^\delta e^{-\varpi s} PG_+^\delta(s)\, ds + \int_t^\delta s e^{-\varpi s} PG_+^\delta(s)\, ds\right) e^{\varpi t}.$$

On a donc pour presque tout $t \in (-\infty, 0)$

$$\left(V_-^\delta\right)'(t) = ((1 + \varpi t)\, a_- + \varpi b_-)\, e^{\varpi t} + \left((1 + \varpi t) \int_{-\infty}^t e^{-\varpi s} PG_-(s)\, ds - \varpi \int_{-\infty}^t s e^{-\varpi s} PG_-(s)\, ds\right) e^{\varpi t},$$

et pour presque tout $t \in (0, \delta)$

$$\left(V_+^\delta\right)'(t) = ((1 + \varpi t)\, a_+ + \varpi b_+)\, e^{\varpi t} + \left(-(1 + \varpi t) \int_t^\delta e^{-\varpi s} PG_+^\delta(s)\, ds + \varpi \int_t^\delta s e^{-\varpi s} PG_+^\delta(s)\, ds\right) e^{\varpi t}.$$

On calcule maintenant a_-, a_+, b_-, b_+ en utilisant $(c.t.), (c.j.), (c.b.)$.

De la condition de transmission $V_-^\delta(0) = V_+^\delta(0)$, il s'ensuit que

$$b_- - \int_{-\infty}^0 s e^{-\varpi s} PG_-(s)\, ds = b_+ + \int_0^\delta s e^{-\varpi s} PG_+^\delta(s)\, ds, \tag{II.7}$$

et de la condition d'unicité $V_-^\delta(0) = V_+^\delta(0) = 0$, il vient

$$b_- = \int_{-\infty}^0 s e^{-\varpi s} PG_-(s)\, ds, \qquad b_+ = \int_0^\delta s e^{-\varpi s} PG_+(s)\, ds.$$

La condition de bord $\left(V_+^\delta\right)'(\delta) - \varpi V_+^\delta(\delta) = PF_+^\delta$ implique

$$\left[(1 + \varpi\delta)\, a_+ + \varpi b_+\right] e^{\varpi\delta} - \varpi\, (a_+\delta + b_+)\, e^{\varpi\delta} = PF_+^\delta,$$

i.e.

$$a_+ = e^{-\varpi\delta} PF_+^\delta. \tag{II.8}$$

La seconde condition de transmission

$$\mu_-\left(V_-^\delta\right)'(0)-\mu_+\left(V_+^\delta\right)'(0)=\varpi\left(\mu_- - \mu_+\right)V_-^\delta(0)=\varpi\left(\mu_- - \mu_+\right)V_+^\delta(0),$$

donne

$$\begin{aligned}
&\mu_-\left[a_- + \varpi b_- + \int_{-\infty}^0 e^{-\varpi s}PG_-(s)\,ds - \varpi\int_{-\infty}^0 se^{-\varpi s}PG_-(s)\,ds\right]\\
&\quad-\mu_+\left[a_+ + \varpi b_+ - \int_0^\delta e^{-\varpi s}PG_+^\delta(s)\,ds + \varpi\int_0^\delta se^{-\varpi s}PG_+^\delta(s)\,ds\right]\\
&=\varpi\left(\mu_- - \mu_+\right)\left(b_- - \int_{-\infty}^0 se^{-\varpi s}PG_-(s)\,ds\right),
\end{aligned}$$

et en utilisant (II.7), il vient

$$\mu_-\left(a_- + \int_{-\infty}^0 e^{-\varpi s}PG_-(s)\,ds\right)-\mu_+\left(a_+ - \int_0^\delta e^{-\varpi s}PG_+(s)\,ds\right)=0,$$

ensuite, la condition de compatibilité $\left(VCC_t^\delta\right)$ avec (II.8) donne

$$\mu_-\int_{-\infty}^0 e^{-\varpi s}PG_-(s)\,ds+\mu_+\int_0^\delta e^{-\varpi s}PG_+^\delta(s)\,ds-\mu_+a_+=0,$$

ainsi $\mu_-a_-=0$, donc $a_-=0$.

En résumé, on a

$$\begin{aligned}
&a_-=0, && a_+=e^{-\varpi\delta}PF_+^\delta,\\
&b_-=\int_{-\infty}^0 se^{-\varpi s}PG_-(s)\,ds, && b_+=-\int_0^\delta se^{-\varpi s}PG_+^\delta(s)\,ds.
\end{aligned}$$

La solution du problème $\left(VP_t^\delta\right)$ est donc donnée par

$$\begin{aligned}
V_-^\delta(t)&=\int_{-\infty}^0 se^{\varpi(t-s)}PG_-(s)\,ds+\int_{-\infty}^t (t-s)e^{\varpi(t-s)}PG_-(s)\,ds,\ t\in(-\infty,0),\\
V_+^\delta(t)&=te^{\varpi(t-\delta)}PF_+^\delta-\int_0^\delta se^{\varpi(t-s)}PG_+^\delta(s)\,ds-\int_t^\delta (t-s)e^{\varpi(t-s)}PG_+^\delta(s)\,ds,\ t\in(0,\delta).
\end{aligned}$$

■

4.2 Problèmes auxiliaires

Concernant le problème $\left(WP_t^\delta\right)$, l'approche consiste à résoudre les problèmes auxiliaires suivants, le premier est posé sur $(-\infty,0)$

$$\left(AuxP_-^\delta\right)\begin{cases}\left(X_-^\delta\right)''(t)-2\varpi\left(X_-^\delta\right)'(t)+\varpi^2X_-^\delta(t)+A_0X_-^\delta(t)=H_-(t)\\ \left(X_-^\delta\right)'(0)=\phi,\end{cases}$$

et le deuxième sur la couche mince $(0,\delta)$

$$\left(AuxP_+^\delta\right)\begin{cases}\left(X_+^\delta\right)''(t)-2\varpi\left(X_+^\delta\right)'(t)+\varpi^2X_+^\delta(t)+A_0X_+^\delta(t)=H_+^\delta(t)\\ X_+^\delta(0)=\psi\\ \left(X_+^\delta\right)'(\delta)-\varpi X_+^\delta(\delta)=M_+^\delta,\end{cases}$$

où $H_- \in L^p(-\infty,0;E_0)$, $H_+^\delta \in L^p(0,\delta;E_0)$ et M_+^δ, ψ, ϕ sont des éléments donnés dans E_0. On s'intéresse aux solutions classiques pour $(AuxP_-^\delta)$ et $(AuxP_+^\delta)$, i.e. les fonctions X_-^δ, X_+^δ telles que

$$X_-^\delta \in W^{2,p}(-\infty,0;E_0) \cap L^p(-\infty,0;D(A_0)), \tag{II.9}$$
$$X_+^\delta \in W^{2,p}(0,\delta;E_0) \cap L^p(0,\delta;D(A_0)), \tag{II.10}$$

et satisfaisant respectivement $(AuxP_-^\delta)$ et $(AuxP_+^\delta)$.

Maintenant, on considère la représentation suivante pour presque tout $t \in (0,\delta)$

$$X_+^\delta(t) = e^{tB_\varpi^+}\xi_0 + e^{(\delta-t)B_\varpi^-}\xi_1 + \frac{1}{2}B^{-1}\int_0^t e^{(t-s)B_\varpi^+}H_+^\delta(s)\,ds + \frac{1}{2}B^{-1}\int_t^\delta e^{(s-t)B_\varpi^-}H_+^\delta(s)\,ds,$$

avec

$$\begin{aligned}\xi_0 = {} & \left(I+e^{2\delta B}\right)^{-1}\psi + B^{-1}\left(I+e^{2\delta B}\right)^{-1}e^{\delta B_\varpi^-}M_+^\delta \\ & - \frac{1}{2}B^{-1}\left(I+e^{2\delta B}\right)^{-1}\int_0^\delta e^{sB_\varpi^-}H_+^\delta(s)\,ds - \frac{1}{2}B^{-1}\left(I+e^{2\delta B}\right)^{-1}e^{\delta B_\varpi^-}\int_0^\delta e^{(\delta-s)B_\varpi^+}H_+^\delta(s)\,ds,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\xi_1 = {} & (I+e^{2\delta B})^{-1}e^{\delta B_\varpi^+}\psi - B^{-1}(I+e^{2\delta B})^{-1}M_+^\delta \\ & + \frac{1}{2}B^{-1}(I+e^{2\delta B})^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)B_\varpi^+}H_+^\delta(s)\,ds - \frac{1}{2}B^{-1}(I+e^{2\delta B})^{-1}e^{\delta B_\varpi^+}\int_0^\delta e^{sB_\varpi^-}H_+^\delta(s)\,ds.\end{aligned}$$

On a le résultat suivant.

Proposition II.16 *Soient $H_+^\delta \in L^p(0,\delta;E_0)$, $1<p<\infty$ avec $p \neq 2$. Alors, le problème $(AuxP_+^\delta)$ admet une unique solution X_+^δ satisfaisant (II.10) si et seulement si $M_+^\delta \in (E_0, D(A_0))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}$ et $\psi \in (E_0, D(A_0))_{1-\frac{1}{2p},p}$.*

Preuve. On peut écrire pour presque tout $t \in (0,\delta)$

$$\begin{aligned}X_+^\delta(t) = {} & e^{tB_\varpi^+}\xi_0 + e^{(\delta-t)B_\varpi^-}\xi_1 + \frac{1}{2}B^{-1}\left(B_\varpi^+\right)^{-1}B_\varpi^+\int_0^t e^{(t-s)B_\varpi^+}H_+^\delta(s)\,ds \\ & + \frac{1}{2}B^{-1}\left(B_\varpi^-\right)^{-1}B_\varpi^-\int_t^\delta e^{(s-t)B_\varpi^-}H_+^\delta(s)\,ds,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}e^{tB_\varpi^+}\xi_0 = {} & \left(I+e^{2\delta B}\right)^{-1}e^{tB_\varpi^+}\psi + B^{-1}\left(I+e^{2\delta B}\right)^{-1}e^{\delta B_\varpi^-}e^{tB_\varpi^+}M_+^\delta \\ & - \frac{1}{2}B^{-1}\left(I+e^{2\delta B}\right)^{-1}\left(B_\varpi^+\right)^{-1}B_\varpi^+\int_0^\delta e^{(t+s)B_\varpi^+}(e^{-2s\varpi}H_+^\delta(s))ds \\ & - \frac{1}{2}B^{-1}\left(I+e^{2\delta B}\right)^{-1}e^{\delta B_\varpi^-}\left(B_\varpi^+\right)^{-1}B_\varpi^+\int_0^\delta e^{(t+s)B_\varpi^+}H_+^\delta(\delta-s)\,ds,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^{(\delta-t)B_\varpi^-}\xi_1 = {} & (I+e^{2\delta B})^{-1}e^{\delta B_\varpi^+}e^{(\delta-t)B_\varpi^-}\psi - B^{-1}(I+e^{2\delta B})^{-1}e^{(\delta-t)B_\varpi^-}M_+^\delta \\ & + \frac{1}{2}B^{-1}(I+e^{2\delta B})^{-1}\left(B_\varpi^-\right)^{-1}B_\varpi^-\int_0^\delta e^{(\delta-t+s)B_\varpi^-}(e^{2s\varpi}H_+^\delta(\delta-s))ds \\ & - \frac{1}{2}B^{-1}(I+e^{2\delta B})^{-1}e^{\delta B_\varpi^+}\left(B_\varpi^-\right)^{-1}B_\varpi^-\int_0^\delta e^{(\delta-t+s)B_\varpi^-}H_+^\delta(s)\,ds.\end{aligned}$$

Donc $X_+^\delta \in L^p(0,\delta;E_0)$ par le Lemme II.7. Ensuite, en appliquant $A_0 = -B^2$, on obtient

$$\begin{aligned} A_0 X_+^\delta(t) = & -B^2 e^{tB_\varpi^+}\xi_0 - B^2 e^{(\delta-t)B_\varpi^-}\xi_1 - \frac{1}{2}B\left(B_\varpi^+\right)^{-1} B_\varpi^+ \int_0^t e^{(t-s)B_\varpi^+} H_+^\delta(s)\,ds \\ & - \frac{1}{2}B\left(B_\varpi^-\right)^{-1} B_\varpi^- \int_t^\delta e^{(s-t)B_\varpi^-} H_+^\delta(s)\,ds, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} B^2 e^{tB_\varpi^+}\xi_0 = & \left(I+e^{2\delta B}\right)^{-1} B^2 e^{tB_\varpi^+}\psi + \left(I+e^{2\delta B}\right)^{-1} e^{\delta B_\varpi^-} B e^{tB_\varpi^+} M_+^\delta \\ & - \frac{1}{2}\left(I+e^{2\delta B}\right)^{-1} B\left(B_\varpi^+\right)^{-1} B_\varpi^+ \int_0^\delta e^{(t+s)B_\varpi^+}(e^{-2s\varpi}H_+^\delta(s))ds \\ & - \frac{1}{2}\left(I+e^{2\delta B}\right)^{-1} e^{\delta B_\varpi^-} B\left(B_\varpi^+\right)^{-1} B_\varpi^+ \int_0^\delta e^{(t+s)B_\varpi^+} H_+^\delta(\delta-s)\,ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^2 e^{(\delta-t)B_\varpi^-}\xi_1 = & (I+e^{2\delta B})^{-1} e^{\delta B_\varpi^+} B^2 e^{(\delta-t)B_\varpi^-}\psi - (I+e^{2\delta B})^{-1} B e^{(\delta-t)B_\varpi^-} M_+^\delta \\ & + \frac{1}{2}(I+e^{2\delta B})^{-1} B\left(B_\varpi^-\right)^{-1} B_\varpi^- \int_0^\delta e^{(\delta-t+s)B_\varpi^-}(e^{2s\varpi}H_+^\delta(\delta-s))ds \\ & - \frac{1}{2}(I+e^{2\delta B})^{-1} e^{\delta B_\varpi^+} B\left(B_\varpi^-\right)^{-1} B_\varpi^- \int_0^\delta e^{(\delta-t+s)B_\varpi^-} H_+^\delta(s)\,ds. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \left(X_+^\delta\right)'(t) = & B_\varpi^+ e^{tB_\varpi^+}\xi_0 - B_\varpi^- e^{(\delta-t)B_\varpi^-}\xi_1 + \frac{1}{2}B^{-1}B_\varpi^+ \int_0^t e^{(t-s)B_\varpi^+} H_+^\delta(s)\,ds \\ & - \frac{1}{2}B^{-1}B_\varpi^- \int_t^\delta e^{(s-t)B_\varpi^-} H_+^\delta(s)\,ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(X_+^\delta\right)''(t) = & \left(B_\varpi^+\right)^2 e^{tB_\varpi^+}\xi_0 + \left(B_\varpi^-\right)^2 e^{(\delta-t)B_\varpi^-}\xi_1 + \frac{1}{2}B_\varpi^+ B^{-1} B_\varpi^+ \int_0^t e^{(t-s)B_\varpi^+} H_+^\delta(s)\,ds \\ & + \frac{1}{2}B_\varpi^- B^{-1} B_\varpi^- \int_t^\delta e^{(s-t)B_\varpi^-} H_+^\delta(s)\,ds + H_+^\delta(t). \end{aligned}$$

Puisque $B\left(B_\varpi^\pm\right)^{-1}$, $B_\varpi^\pm B^{-1}$, $(I+e^{2\delta B})^{-1} \in L(E_0)$, on peut en déduire, grâce aux Lemmes II.7 et II.11, que

$$A_0 X_+^\delta,\ \left(X_+^\delta\right)'' \in L^p(0,\delta;E_0),$$

si et seulement si

$$M_+^\delta \in (E_0, D(A_0))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p} \text{ et } \psi \in (E_0, D(A_0))_{1-\frac{1}{2p},p}.$$

Enfin, X_+^δ vérifie le problème $(AuxP_+^\delta)$ puisque pour presque tout $t \in (0,\delta)$

$$\begin{aligned} & \left(X_+^\delta\right)''(t) - 2\varpi\left(X_+^\delta\right)'(t) + \varpi^2 X_+^\delta(t) + A_0 X_+^\delta(t) \\ = & H_+^\delta(t) + \left(\left(B_\varpi^+\right)^2 - 2\varpi B_\varpi^+ + \varpi^2 I - B^2\right) e^{tB_\varpi^+}\xi_0 + \left(\left(B_\varpi^-\right)^2 + 2\varpi B_\varpi^- + \varpi^2 I - B^2\right) e^{(\delta-t)B_\varpi^-}\xi_1 \\ & + \frac{1}{2}\left(\left(B_\varpi^+\right)^2 - 2\varpi B_\varpi^+ + \varpi^2 I - B^2\right) B^{-1} \int_0^t e^{(t-s)B_\varpi^+} H_+^\delta(s)\,ds \\ & + \frac{1}{2}\left(\left(B_\varpi^-\right)^2 + 2\varpi B_\varpi^- + \varpi^2 I - B^2\right) B^{-1} \int_t^\delta e^{(s-t)B_\varpi^-} H_+^\delta(s)\,ds \\ = & H_+^\delta(t), \end{aligned}$$

et

$$X_+^\delta(0) = \xi_0 + e^{\delta B_\varpi^-}\xi_1 + \frac{1}{2}B^{-1}\int_0^\delta e^{(s)B_\varpi^-}H_+^\delta(s)\,ds = \psi,$$

$$\begin{aligned}
&\left(X_+^\delta\right)'(\delta) - \varpi X_+^\delta(\delta) \\
=&B_\varpi^+ e^{\delta B_\varpi^+}\xi_0 - B_\varpi^-\xi_1 + \frac{1}{2}B^{-1}B_\varpi^+\int_0^\delta e^{(\delta-s)B_\varpi^+}H_+^\delta(s)\,ds - \varpi e^{\delta B_\varpi^+}\xi_0 - \varpi\xi_1 - \frac{1}{2}\varpi B^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)B_\varpi^+}H_+^\delta(s)\,ds \\
=&Be^{\delta B_\varpi^+}\xi_0 - B\xi_1 + \frac{1}{2}\int_0^\delta e^{(\delta-s)B_\varpi^+}H_+^\delta(s)\,ds \\
=&M_+^\delta.
\end{aligned}$$

■

De la même manière, on considère la représentation suivante pour presque tout $t \in (-\infty, 0)$

$$X_-^\delta(t) = e^{-tB_\varpi^-}\xi_2 + \frac{1}{2}B^{-1}\int_t^0 e^{(s-t)B_\varpi^-}H_-(s)\,ds + \frac{1}{2}B^{-1}\int_{-\infty}^t e^{(t-s)B_\varpi^+}H_-(s)\,ds,$$

où

$$\xi_2 = -\left(B_\varpi^-\right)^{-1}\phi + \frac{1}{2}B_\varpi^+\left(B_\varpi^-\right)^{-1}B^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-sB_\varpi^+}H_-(s)\,ds.$$

Grâce aux inégalités de Hölder et à la décroissance exponentielle des semi-groupes analytiques $\left(e^{\xi B_\varpi^\pm}\right)_{\xi\geqslant 0}$, on a la convergence absolue des intégrales dans X_-^δ et ξ_2. Par exemple, pour presque tout $t \in (-\infty, 0)$

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{-\infty}^t e^{(t-s)B_\varpi^+}H_-(s)\,ds\right\| &\leqslant M\left(\int_{-\infty}^t e^{-qa(t-s)}ds\right)^{\frac{1}{q}}\|H_-\|_{L^p(-\infty,0;E_0)} \\
&\leqslant C\|H_-\|_{L^p(-\infty,0;E_0)},
\end{aligned}$$

avec $1/p + 1/q = 1$.

Proposition II.17 *Soient $H_- \in L^p(-\infty, 0; E_0)$, $1 < p < \infty$ avec $p \neq 2$. Alors, le problème $(AuxP_-^\delta)$ admet une unique solution X_-^δ satisfaisant (II.9) si et seulement si $\phi \in (E_0, D(A_0))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}$.*

Preuve. Pour presque tout $t \in (-\infty, 0)$, on peut écrire

$$X_-^\delta(t) = e^{-tB_\varpi^-}\xi_2 + \frac{1}{2}B^{-1}\left(B_\varpi^-\right)^{-1}B_\varpi^-\int_t^0 e^{(s-t)B_\varpi^-}H_-(s)\,ds + \frac{1}{2}B^{-1}\left(B_\varpi^+\right)^{-1}B_\varpi^+\int_{-\infty}^t e^{(t-s)B_\varpi^+}H_-(s)\,ds,$$

où

$$e^{-tB_\varpi^-}\xi_2 = -\left(B_\varpi^-\right)^{-1}e^{-tB_\varpi^-}\phi + \frac{1}{2}B_\varpi^+\left(B_\varpi^-\right)^{-2}B^{-1}B_\varpi^-\int_{-\infty}^0 e^{-(t+s)B_\varpi^-}(e^{-2s\varpi}H_-(s))ds.$$

Ainsi, en appliquant $A_0 = -B^2$, on obtient

$$A_0X_-^\delta(t) = -B^2e^{-tB_\varpi^-}\xi_2 - \frac{1}{2}B\left(B_\varpi^-\right)^{-1}B_\varpi^-\int_t^0 e^{(s-t)B_\varpi^-}H_-(s)\,ds - \frac{1}{2}B\left(B_\varpi^+\right)^{-1}B_\varpi^+\int_{-\infty}^t e^{(t-s)B_\varpi^+}H_-(s)\,ds,$$

où

$$B^2e^{-tB_\varpi^-}\xi_2 = -B\left(B_\varpi^-\right)^{-1}Be^{-tB_\varpi^-}\phi + \frac{1}{2}B_\varpi^+B\left(B_\varpi^-\right)^{-2}B_\varpi^-\int_{-\infty}^0 e^{-(t+s)B_\varpi^-}(e^{-2s\varpi}H_-(s))ds.$$

De plus, on a

$$\left(X_{-}^{\delta}\right)'(t) = -B_{\varpi}^{-}e^{-tB_{\varpi}^{-}}\xi_2 - \frac{1}{2}B^{-1}B_{\varpi}^{-}\int_t^0 e^{(s-t)B_{\varpi}^{-}}H_{-}(s)\,ds + \frac{1}{2}B^{-1}B_{\varpi}^{+}\int_{-\infty}^t e^{(ts)B_{\varpi}^{+}}H_{-}(s)\,ds,$$

$$\begin{aligned}\left(X_{-}^{\delta}\right)''(t) = &\left(B_{\varpi}^{-}\right)^2 e^{-tB_{\varpi}^{-}}\xi_2 + \frac{1}{2}B_{\varpi}^{-}B^{-1}B_{\varpi}^{-}\int_t^0 e^{(s-t)B_{\varpi}^{-}}H_{-}(s)\,ds \\ &+ \frac{1}{2}B_{\varpi}^{+}B^{-1}B_{\varpi}^{+}\int_{-\infty}^t e^{(t-s)B_{\varpi}^{+}}H_{-}(s)\,ds + H_{-}(t).\end{aligned}$$

Enfin, X_{-}^{δ} vérifie le problème $(AuxP_{-}^{\delta})$ puisque pour presque tout $t \in (-\infty, 0)$

$$\begin{aligned}&\left(X_{-}^{\delta}\right)''(t) - 2\varpi\left(X_{-}^{\delta}\right)'(t) + \varpi^2 X_{-}^{\delta}(t) + A_0 X_{-}^{\delta}(t) \\ =&H_{-}(t) + \left(\left(B_{\varpi}^{-}\right)^2 + 2\varpi B_{\varpi}^{-} + \varpi^2 I - B^2\right)e^{-tB_{\varpi}^{-}}\xi_2 \\ &+ \frac{1}{2}\left(\left(B_{\varpi}^{-}\right)^2 + 2\varpi B_{\varpi}^{-} + \varpi^2 I - B^2\right)B^{-1}\int_t^0 e^{(s-t)B_{\varpi}^{-}}H_{-}(s)\,ds \\ &+ \frac{1}{2}\left(\left(B_{\varpi}^{+}\right)^2 - 2\varpi B_{\varpi}^{+} + \varpi^2 I - B^2\right)B^{-1}\int_{-\infty}^t e^{(t-s)B_{\varpi}^{+}}H_{-}(s)\,ds \\ =&H_{-}(t),\end{aligned}$$

et

$$\left(X_{-}^{\delta}\right)'(0) = -B_{\varpi}^{-}\xi_2 + \frac{1}{2}B^{-1}B_{\varpi}^{+}\int_{-\infty}^0 e^{-sB_{\varpi}^{+}}H_{-}(s)\,ds = \phi.$$

Par conséquent, en vertu des Lemmes II.8 et II.12, on obtient le résultat. ■

4.3 Formule de représentation de la solution de $\left(WP_t^{\delta}\right)$

On rappelle les conditions de transmission du problème $\left(WP_t^{\delta}\right)$

$$(c.t.)\left\{\begin{array}{l} W_{-}^{\delta}(0) = W_{+}^{\delta}(0) \\ \left(W_{-}^{\delta}\right)'(0) - \nu\left(W_{+}^{\delta}\right)'(0) = \varpi(1-\nu)W_{\pm}^{\delta}(0), \end{array}\right.$$

où $\nu := \dfrac{\mu_+}{\mu_-}$. En utilisant les représentations X_{-}^{δ}, X_{+}^{δ} et en combinant avec $(c.t.)$, on obtient le système d'inconnus ψ, ϕ

$$\left\{\begin{array}{l} B_{\varpi}^{-}\psi + \phi = b_1 \\ -\nu\left(I + e^{2\delta B}\right)^{-1}\left(B_{\varpi}^{+} - B_{\varpi}^{-}e^{2\delta B} + \left(\dfrac{1}{\nu} - 1\right)\varpi(I + e^{2\delta B})\right)\psi + \phi = b_2, \end{array}\right.$$

où

$$\begin{aligned} b_1 =& \int_{-\infty}^0 e^{-sB_{\varpi}^{+}}H_{-}(s)\,ds, \\ b_2 =& 2\nu\left(I + e^{2\delta B}\right)^{-1}e^{\delta B_{\varpi}^{-}}M_{+}^{\delta} - \nu\left(I + e^{2\delta B}\right)^{-1}\int_0^{\delta} e^{sB_{\varpi}^{-}}H_{+}^{\delta}(s)\,ds - \nu(I + e^{2\delta B})^{-1}e^{\delta B_{\varpi}^{-}}\int_0^{\delta} e^{(\delta-s)B_{\varpi}^{+}}H_{+}^{\delta}(s)\,ds.\end{aligned}$$

Le déterminant formel de ce système opérationnel est

$$\begin{aligned}
\Delta_\varpi :=& B_\varpi^- + \nu\left(I+e^{2\delta B}\right)^{-1}\left(B_\varpi^+ - B_\varpi^- e^{2\delta B} + \left(\frac{1}{\nu}-1\right)\varpi(I+e^{2\delta B})\right)\\
=& \left(I+e^{2\delta B}\right)^{-1}\left(B_\varpi^-\left(I+e^{2\delta B}\right) + \nu B_\varpi^+ - \nu B_\varpi^- e^{2\delta B} + (1-\nu)\,\varpi(I+e^{2\delta B})\right)\\
=& \left(I+e^{2\delta B}\right)^{-1}\left(B + Be^{2\delta B} + \nu B - \nu B e^{2\delta B}\right)\\
=& (1+\nu)\,B\left(I+e^{2\delta B}\right)^{-1}\left(I+\frac{1-\nu}{1+\nu}e^{2\delta B}\right)\\
=& B\left(I+e^{2\delta B}\right)^{-1}D_\nu,
\end{aligned}$$

D_ν est inversible dans $L(E_0)$ (voir Lemme II.14), ainsi $\Delta_\varpi^{-1}\in L(E_0,D(B))$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\psi =& -2\nu B^{-1}D_\nu^{-1}e^{\delta B_\varpi^-}M_+^\delta + B^{-1}D_\nu^{-1}\left(I+e^{2\delta B}\right)\int_{-\infty}^0 e^{-sB_\varpi^+}H_-(s)\,ds\\
&+\nu B^{-1}D_\nu^{-1}\int_0^\delta e^{sB_\varpi^-}H_+^\delta(s)\,ds + \nu B^{-1}D_\nu^{-1}e^{\delta B_\varpi^-}\int_0^\delta e^{(\delta-s)B_\varpi^+}H_+^\delta(s)\,ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\phi =& 2\nu B_\varpi^- B^{-1}D_\nu^{-1}e^{\delta B_\varpi^-}M_+^\delta + \left(I - B_\varpi^- B^{-1}D_\nu^{-1}\left(I+e^{2\delta B}\right)\right)\int_{-\infty}^0 e^{-sB_\varpi^+}H_-(s)\,ds\\
&-\nu B_\varpi^- B^{-1}D_\nu^{-1}\int_0^\delta e^{sB_\varpi^-}H_+^\delta(s)\,ds - \nu B_\varpi^- B^{-1}D_\nu^{-1}e^{\delta B_\varpi^-}\int_0^\delta e^{(\delta-s)B_\varpi^+}H_+^\delta(s)\,ds.
\end{aligned}$$

En insérant ces deux expressions dans ξ_0, ξ_1, ξ_2, et après quelques simplifications, on obtient pour presque tout $t\in(0,\delta)$,

$$W_+^\delta(t) = e^{tB_\varpi^+}\xi_0 + e^{(\delta-t)B_\varpi^-}\xi_1 + \frac{1}{2}B^{-1}\int_0^t e^{(t-s)B_\varpi^+}H_+^\delta(s)\,ds + \frac{1}{2}B^{-1}\int_t^\delta e^{(s-t)B_\varpi^-}H_+^\delta(s)\,ds,$$

et pour presque tout $t\in(-\infty,0)$

$$W_-^\delta(t) = e^{-tB_\varpi^-}\xi_2 + \frac{1}{2}B^{-1}\int_t^0 e^{(s-t)B_\varpi^-}H_-(s)\,ds + \frac{1}{2}B^{-1}\int_{-\infty}^t e^{(t-s)B_\varpi^+}H_-(s)\,ds,$$

où

$$\begin{aligned}
\xi_0 =& (1-\nu)B^{-1}D_\nu^{-1}e^{\delta B_\varpi^-}M_+^\delta + B^{-1}D_\nu^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{-sB_\varpi^+}H_-(s)\,ds\\
&-\frac{1-\nu}{2}B^{-1}D_\nu^{-1}\int_0^\delta e^{sB_\varpi^-}H_+^\delta(s)\,ds - \frac{1-\nu}{2}B^{-1}D_\nu^{-1}e^{\delta B_\varpi^-}\int_0^\delta e^{(\delta-s)B_\varpi^+}H_+^\delta(s)\,ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_1 =& -(1+\nu)B^{-1}D_\nu^{-1}M_+^\delta + B^{-1}D_\nu^{-1}e^{\delta B_\varpi^+}\int_{-\infty}^0 e^{-sB_\varpi^+}H_-(s)\,ds\\
&-\frac{1-\nu}{2}B^{-1}D_\nu^{-1}e^{\delta B_\varpi^+}\int_0^\delta e^{sB_\varpi^-}H_+^\delta(s)\,ds + \frac{1+\nu}{2}B^{-1}D_\nu^{-1}\int_0^\delta e^{(\delta-s)B_\varpi^+}H_+^\delta(s)\,ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_2 =& -2\nu B^{-1}D_\nu^{-1}e^{\delta B_\varpi^-}M_+^\delta + B^{-1}\left(-\frac{1}{2}I + D_\nu^{-1}\left(I+e^{2\delta B}\right)\right)\int_{-\infty}^0 e^{-sB_\varpi^+}H_-(s)\,ds\\
&+\nu B^{-1}D_\nu^{-1}\int_0^\delta e^{sB_\varpi^-}H_+^\delta(s)\,ds + \nu B^{-1}D_\nu^{-1}e^{\delta B_\varpi^-}\int_0^\delta e^{(\delta-s)B_\varpi^+}H_+^\delta(s)\,ds.
\end{aligned}$$

4.4 Résultat principal

Théorème II.18 *Soient* $H_- \in L^p(-\infty,0;E_0)$, $H_+^\delta \in L^p(0,\delta;E_0)$, $1<p<\infty$ *avec* $p\neq 2$. *Alors, le problème* (WP_t^δ) *admet une unique solution*

$$W^\delta = \begin{cases} W_-^\delta \text{ dans }]-\infty,0[\\ W_+^\delta \text{ dans }]0,\delta[, \end{cases}$$

telle que

$$\begin{cases} W_-^\delta \in W^{2,p}(-\infty,0;E_0)\cap L^p(-\infty,0;D(A_0)) \\ W_+^\delta \in W^{2,p}(0,\delta;E_0)\cap L^p(0,\delta;D(A_0)), \end{cases}$$

si et seulement si $M_+^\delta \in (E_0,D(A_0))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}$.

Preuve. On peut écrire pour presque tout $t\in(0,\delta)$

$$\begin{aligned} W_+^\delta(t) =& e^{tB_\varpi^+}\xi_0 + e^{(\delta-t)B_\varpi^-}\xi_1 + \frac{1}{2}B^{-1}\left(B_\varpi^+\right)^{-1}B_\varpi^+\int_0^t e^{(t-s)B_\varpi^+}H_+^\delta(s)\,ds \\ &+\frac{1}{2}B^{-1}\left(B_\varpi^-\right)^{-1}B_\varpi^-\int_t^\delta e^{(s-t)B_\varpi^-}H_+^\delta(s)\,ds, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} e^{tB_\varpi^+}\xi_0 =& (1-\nu)B^{-1}D_\nu^{-1}e^{\delta B_\varpi^-}e^{tB_\varpi^+}M_+^\delta + B^{-1}D_\nu^{-1}\left(B_\varpi^+\right)^{-1}B_\varpi^+\int_{-\infty}^0 e^{(t-s)B_\varpi^+}H_-(s)\,ds \\ &-\frac{1-\nu}{2}B^{-1}D_\nu^{-1}\left(B_\varpi^+\right)^{-1}B_\varpi^+\int_0^\delta e^{(t+s)B_\varpi^+}(e^{-2s\varpi}H_+^\delta(s))ds \\ &-\frac{1-\nu}{2}B^{-1}D_\nu^{-1}e^{\delta B_\varpi^-}\left(B_\varpi^+\right)^{-1}B_\varpi^+\int_0^\delta e^{(t+s)B_\varpi^+}H_+^\delta(\delta-s)\,ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{(\delta-t)B_\varpi^-}\xi_1 =& -(1+\nu)B^{-1}D_\nu^{-1}e^{(\delta-t)B_\varpi^-}M_+^\delta + B^{-1}D_\nu^{-1}e^{\delta B_\varpi^+}\left(B_\varpi^-\right)^{-1}B_\varpi^-\int_{-\infty}^0 e^{(\delta-t-s)B_\varpi^+}(e^{(\delta-s)\varpi}H_-(s))ds \\ &-\frac{1-\nu}{2}B^{-1}D_\nu^{-1}e^{\delta B_\varpi^+}\left(B_\varpi^-\right)^{-1}B_\varpi^-\int_0^\delta e^{(\delta-t+s)B_\varpi^-}H_+^\delta(s)\,ds \\ &+\frac{1+\nu}{2}B^{-1}D_\nu^{-1}\left(B_\varpi^-\right)^{-1}B_\varpi^-\int_0^\delta e^{(\delta-t+s)B_\varpi^-}(e^{2s\varpi}H_+^\delta(\delta-s))ds. \end{aligned}$$

Ainsi, par les Lemmes II.7 et II.9, on déduit que $W_+^\delta \in L^p(0,\delta;E_0)$. Puis, en appliquant $A_0=-B^2$, on obtient

$$\begin{aligned} A_0W_+^\delta(t) =& -B^2e^{tB_\varpi^+}\xi_0 - B^2e^{(\delta-t)B_\varpi^-}\xi_1 - \frac{1}{2}B\left(B_\varpi^+\right)^{-1}B_\varpi^+\int_0^t e^{(t-s)B_\varpi^+}H_+^\delta(s)\,ds \\ &-\frac{1}{2}B\left(B_\varpi^-\right)^{-1}B_\varpi^-\int_t^\delta e^{(s-t)B_\varpi^-}H_+^\delta(s)\,ds, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} B^2e^{tB_\varpi^+}\xi_0 =& (1-\nu)D_\nu^{-1}e^{\delta B_\varpi^-}Be^{tB_\varpi^+}M_+^\delta + D_\nu^{-1}B\left(B_\varpi^+\right)^{-1}B_\varpi^+\int_{-\infty}^0 e^{(t-s)B_\varpi^+}H_-(s)\,ds \\ &-\frac{1-\nu}{2}D_\nu^{-1}B\left(B_\varpi^+\right)^{-1}B_\varpi^+\int_0^\delta e^{(t+s)B_\varpi^+}(e^{-2s\varpi}H_+^\delta(s))ds \\ &-\frac{1-\nu}{2}D_\nu^{-1}e^{\delta B_\varpi^-}B\left(B_\varpi^+\right)^{-1}B_\varpi^+\int_0^\delta e^{(t+s)B_\varpi^+}H_+^\delta(\delta-s)\,ds, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B^2 e^{(\delta-t)B_{\varpi}^-}\xi_1 =& -(1+\nu)D_\nu^{-1}Be^{(\delta-t)B_{\varpi}^-}M_+^\delta + D_\nu^{-1}e^{\delta B_{\varpi}^+}B\left(B_{\varpi}^-\right)^{-1}B_{\varpi}^-\int_{-\infty}^0 e^{(\delta-t-s)B_{\varpi}^-}(e^{(\delta-s)\varpi}H_-(s))ds \\
&-\frac{1-\nu}{2}D_\nu^{-1}e^{\delta B_{\varpi}^+}B\left(B_{\varpi}^-\right)^{-1}B_{\varpi}^-\int_0^\delta e^{(\delta-t+s)B_{\varpi}^-}H_+^\delta(s)\,ds \\
&+\frac{1+\nu}{2}D_\nu^{-1}B\left(B_{\varpi}^-\right)^{-1}B_{\varpi}^-\int_0^\delta e^{(\delta-t+s)B_{\varpi}^-}(e^{2s\varpi}H_+^\delta(\delta-s))ds.
\end{aligned}
$$

De plus, on a

$$
\begin{aligned}
\left(W_+^\delta\right)'(t) =& B_{\varpi}^+e^{tB_{\varpi}^+}\xi_0 - B_{\varpi}^-e^{(\delta-t)B_{\varpi}^-}\xi_1 + \frac{1}{2}B^{-1}B_{\varpi}^+\int_0^t e^{(t-s)B_{\varpi}^+}H_+^\delta(s)\,ds \\
&-\frac{1}{2}B^{-1}B_{\varpi}^-\int_t^\delta e^{(s-t)B_{\varpi}^-}H_+^\delta(s)\,ds,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(W_+^\delta\right)''(t) =& \left(B_{\varpi}^+\right)^2e^{tB_{\varpi}^+}\xi_0 + \left(B_{\varpi}^-\right)^2e^{(\delta-t)B_{\varpi}^-}\xi_1 + \frac{1}{2}B_{\varpi}^+B^{-1}B_{\varpi}^+\int_0^t e^{(t-s)B_{\varpi}^+}H_+^\delta(s)\,ds \\
&+\frac{1}{2}B_{\varpi}^-B^{-1}B_{\varpi}^-\int_t^\delta e^{(s-t)B_{\varpi}^-}H_+^\delta(s)\,ds + H_+^\delta(t)\,.
\end{aligned}
$$

Ainsi, par les Lemmes II.7, II.9, II.11 et II.14, on obtient

$$W_+^\delta \in W^{2,p}(0,\delta;E_0)\cap L^p(0,\delta;D(A_0))\,,$$

si et seulement si

$$M_+^\delta \in (E_0, D(A_0))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}\,.$$

Pour W_-^δ, on a pour presque tout $t\in(-\infty,0)$

$$W_-^\delta(t) = e^{-tB_{\varpi}^-}\xi_2 + \frac{1}{2}B^{-1}\left(B_{\varpi}^-\right)^{-1}B_{\varpi}^-\int_t^0 e^{(s-t)B_{\varpi}^-}H_-(s)\,ds + \frac{1}{2}B^{-1}\left(B_{\varpi}^+\right)^{-1}B_{\varpi}^+\int_{-\infty}^t e^{(t-s)B_{\varpi}^+}H_-(s)\,ds,$$

où

$$
\begin{aligned}
e^{-tB_{\varpi}^-}\xi_2 =& -2\nu B^{-1}D_\nu^{-1}e^{(\delta-t)B_{\varpi}^-}M_+^\delta \\
&+B^{-1}\left(-\frac{1}{2}I + D_\nu^{-1}\left(I+e^{2\delta B}\right)\right)\int_{-\infty}^0 e^{-(t+s)B_{\varpi}^-}\left(e^{-2s\varpi}H_-(s)\right)ds \\
&+\nu B^{-1}D_\nu^{-1}\left(B_{\varpi}^-\right)^{-1}B_{\varpi}^-\int_0^\delta e^{(s-t)B_{\varpi}^-}H_+^\delta(s)\,ds \\
&+\nu B^{-1}D_\nu^{-1}e^{\delta B_{\varpi}^-}\left(B_{\varpi}^-\right)^{-1}B_{\varpi}^-\int_0^\delta e^{(s-t)B_{\varpi}^-}\left(e^{2s\varpi}H_+^\delta(\delta-s)\right)ds.
\end{aligned}
$$

En appliquant $A_0=-B^2$, on obtient

$$
\begin{aligned}
A_0W_-^\delta(t) =& -B^2e^{-tB_{\varpi}^-}\xi_2 - \frac{1}{2}B\left(B_{\varpi}^-\right)^{-1}B_{\varpi}^-\int_t^0 e^{(s-t)B_{\varpi}^-}H_-(s)\,ds \\
&-\frac{1}{2}B\left(B_{\varpi}^+\right)^{-1}B_{\varpi}^+\int_{-\infty}^t e^{(t-s)B_{\varpi}^+}H_-(s)\,ds,
\end{aligned}
$$

où

$$\begin{aligned}
B^2 e^{-tB_\varpi^-}\xi_2 = &- 2\nu D_\nu^{-1} B e^{(\delta-t)B_\varpi^-} M_+^\delta + B\left(-\frac{1}{2}I + D_\nu^{-1}\left(I + e^{2\delta B}\right)\right)\int_{-\infty}^0 e^{-(t+s)B_\varpi^-}\left(e^{-2s\varpi}H_-(s)\right)ds \\
&+ \nu D_\nu^{-1} B\left(B_\varpi^-\right)^{-1} B_\varpi^- \int_0^\delta e^{(s-t)B_\varpi^-} H_+^\delta(s)\,ds \\
&+ \nu D_\nu^{-1} e^{\delta B_\varpi^-} B\left(B_\varpi^-\right)^{-1} B_\varpi^- \int_0^\delta e^{(s-t)B_\varpi^-}\left(e^{2s\varpi}H_+^\delta(\delta-s)\right)ds.
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
\left(W_-^\delta\right)'(t) = &- B_\varpi^- e^{-tB_\varpi^-}\xi_2 - \frac{1}{2}B^{-1}B_\varpi^- \int_t^0 e^{(s-t)B_\varpi^-} H_-(s)\,ds \\
&+ \frac{1}{2}B^{-1}B_\varpi^+ \int_{-\infty}^t e^{(t-s)B_\varpi^+} H_-(s)\,ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(W_-^\delta\right)''(t) = &\left(B_\varpi^-\right)^2 e^{-tB_\varpi^-}\xi_2 + \frac{1}{2}B_\varpi^- B^{-1} B_\varpi^- \int_t^0 e^{(s-t)B_\varpi^-} H_-(s)\,ds \\
&+ \frac{1}{2}B_\varpi^+ B^{-1} B_\varpi^+ \int_{-\infty}^t e^{(t-s)B_\varpi^+} H_-(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Ainsi, par les Lemmes II.8, II.10, II.12 et II.14, on déduit que

$$W_-^\delta \in W^{2,p}\left(-\infty, 0; E_0\right) \cap L^p\left(-\infty, 0; D(A_0)\right),$$

si et seulement si

$$M_+^\delta \in \left(E_0, D\left(A_0\right)\right)_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}.$$

■

5 Retour au problème dans la cellule biologique

On veut revenir au problème de départ $\left(P_{x,y}^\varepsilon\right)$ dans la cellule biologique. On commence par analyser $\left(UP_{t,\theta}^\delta\right)$, on obtient alors les deux propositions suivantes comme conséquences immédiates de la Proposition II.15, du Théorème II.18 et du fait que l'opérateur $I - P$ est continu de E dans E_0, de $D(A)$ dans $D(A_0)$ et qu'il transforme les éléments de $(E, D(A))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}$ en éléments de $(E_0, D(A_0))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}$.

Proposition II.19 *Soient $G_- \in L^p(\Omega_-)$, $G_+^\delta \in L^p\left(\Omega_+^\delta\right)$, $1 < p < 2$, satisfaisant $(UCC_{t,\theta}^\delta)$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème $\left(UP_{t,\theta}^\delta\right)$ muni des conditions de bord périodiques $(UCBP_t^\delta)$ admet une unique solution*

$$U^\delta = \begin{cases} U_-^\delta & \text{dans } \Omega_- \\ U_+^\delta & \text{dans } \Omega_+^\delta, \end{cases}$$

telle que

$$U_-^\delta \in W^{2,p}(\Omega_-), \qquad U_+^\delta \in W^{2,p}\left(\Omega_+^\delta\right).$$

2. *$F_+^\delta \in W^{1-\frac{1}{p},p}(-\pi, \pi)$.*

Proposition II.20 *Soient $G_- \in L^p(\Omega_-)$, $G_+^\delta \in L^p(\Omega_+^\delta)$, $p > 2$, satisfaisant $(UCC_{t,\theta}^\delta)$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème $\left(UP_{t,\theta}^\delta\right)$ muni des conditions de bord périodiques $(UCBP_t^\delta)$ admet une unique solution*

$$U^\delta = \begin{cases} U_-^\delta \text{ dans } \Omega_- \\ U_+^\delta \text{ dans } \Omega_+^\delta, \end{cases}$$

telle que

$$U_-^\delta \in W^{2,p}(\Omega_-), \qquad U_+^\delta \in W^{2,p}\left(\Omega_+^\delta\right).$$

2. *$F_+^\delta \in W^{1-\frac{1}{p},p}(-\pi,\pi)$ et $F_+^\delta(-\pi) = F_+^\delta(\pi)$.*

La Remarque II.2 et le fait que

$$F_+^\delta \in W^{1-\frac{1}{p},p}(-\pi,\pi) \Leftrightarrow f_+^\delta \in W^{1-\frac{1}{p},p}(-\pi,\pi),$$
$$F_+^\delta(-\pi) = F_+^\delta(\pi) \Leftrightarrow f_+^\delta(-\pi) = f_+^\delta(\pi),$$

permet d'établir les résultats pour $\left(P_{t,\theta}^\delta\right)$.

Proposition II.21 *Soient $f_+^\delta \in W^{1-\frac{1}{p},p}(-\pi,\pi)$ et $g_- \in L^p_{e^{\varpi t}}(\Omega_-, dtd\theta)$, $g_+^\delta \in L^p_{e^{\varpi t}}\left(\Omega_+^\delta, dtd\theta\right)$, $1 < p < 2$, satisfaisant $(CC_{t,\theta}^\delta)$. Alors, le problème $\left(P_{t,\theta}^\delta\right)$ muni des conditions de bord périodiques (CBP_t^δ) admet une unique solution*

$$u^\delta = \begin{cases} u_-^\delta \text{ dans } \Omega_- \\ u_+^\delta \text{ dans } \Omega_+^\delta, \end{cases}$$

telle que

$$u_-^\delta \in E^{2,p}\left(\Omega_-^\delta, dtd\theta\right), \qquad u_+^\delta \in E^{2,p}\left(\Omega_+^\delta, dtd\theta\right).$$

Proposition II.22 *Soient $f_+^\delta \in W^{1-\frac{1}{p},p}(-\pi,\pi)$ tel que $f_+^\delta(-\pi) = f_+^\delta(\pi)$, et $g_- \in L^p_{e^{\varpi t}}(\Omega_-, dtd\theta)$, $g_+^\delta \in L^p_{e^{\varpi t}}\left(\Omega_+^\delta, dtd\theta\right)$, $p > 2$, satisfaisant $(CC_{t,\theta}^\delta)$. Alors, le problème $\left(P_{t,\theta}^\delta\right)$ muni des conditions de bord périodiques (CBP_t^δ) admet une unique solution*

$$u^\delta = \begin{cases} u_-^\delta \text{ dans } \Omega_- \\ u_+^\delta \text{ dans } \Omega_+^\delta, \end{cases}$$

telle que

$$u_-^\delta \in E^{2,p}\left(\Omega_-^\delta, dtd\theta\right), \qquad u_+^\delta \in E^{2,p}\left(\Omega_+^\delta, dtd\theta\right).$$

Le résultat essentiel du chapitre est le suivant.

Théorème II.23 *Soient $l_+^\varepsilon \in W^{1-\frac{1}{p},p}\left(\Gamma_+^{*\varepsilon}\right)$ et $h_- \in L^p\left(\Omega_-^*\right)$, $h_+^\varepsilon \in L^p\left(\Omega_+^{*\varepsilon}\right)$, $1 < p < \infty$ avec $p \neq 2$, satisfaisant la condition de compatibilité $(CC_{x,y}^\varepsilon)$. Alors, le problème $\left(P_{x,y}^\varepsilon\right)$ admet une unique solution*

$$w^\varepsilon = \begin{cases} w_-^\varepsilon \text{ dans } \Omega_-^* \\ w_+^\varepsilon \text{ dans } \Omega_+^{*\varepsilon}, \end{cases}$$

telle que

$$w_-^\varepsilon \in W^{2,p}\left(\Omega_-^*\right), \qquad w_+^\varepsilon \in W^{2,p}\left(\Omega_+^{*\varepsilon}\right).$$

Preuve. Comme on l'a vu dans la Section 2, on a

$$\begin{aligned} g_{\pm}^{\delta} \in L_{e^{\varpi t}}^{p}\left(\Omega_{\pm}^{\delta}, dtd\theta\right) &\Leftrightarrow h_{\pm}^{\varepsilon} \in L^{p}\left(\Omega_{\pm}^{*\varepsilon}, dxdy\right), \\ u_{\pm}^{\delta} \in E^{2,p}\left(\Omega_{\pm}^{\delta}, dtd\theta\right) &\Leftrightarrow w_{\pm}^{\varepsilon} \in W^{2,p}\left(\Omega_{\pm}^{*\varepsilon}, dxdy\right). \end{aligned}$$

De plus, grâce à (II.2) et (II.3), on obtient

$$f_{+}^{\delta} \in W^{1-\frac{1}{p},p}\left(-\pi, \pi\right) \Leftrightarrow L_{+}^{\varepsilon} \in W^{1-\frac{1}{p},p}\left(-\pi, \pi\right) \Leftrightarrow l_{+}^{\varepsilon} \in W^{1-\frac{1}{p},p}\left(\Gamma_{+}^{*\varepsilon}\right),$$

et puisque, pour $p > 2$, on a

$$\begin{aligned} f_{+}^{\delta}\left(-\pi\right) = f_{+}^{\delta}\left(\pi\right) &\Leftrightarrow L_{+}^{\varepsilon}\left(-\pi\right) = L_{+}^{\varepsilon}\left(\pi\right) \\ &\Leftrightarrow l_{+}^{\varepsilon}\left((1+\varepsilon)(\cos(-\pi), \sin(-\pi)\right) = l_{+}^{\varepsilon}\left((1+\varepsilon)(\cos(\pi), \sin(\pi)\right), \end{aligned}$$

alors l_{+}^{ε} est seulement dans $W^{1-\frac{1}{p},p}\left(\Gamma_{+}^{*\varepsilon}\right)$. ∎

Chapitre III

Cadre scalaire et cadre commutatif sur la droite réelle

L'objectif final de cette thèse est l'étude des équations différentielles opérationnelles du second ordre de type elliptique dans un cadre non commutatif. Ce chapitre est un travail préliminaire.

On débute donc par un cas très simple : l'étude d'une équation différentielle scalaire complète du second ordre posée sur toute la droite. Ceci permet de proposer ensuite une possible représentation de la solution pour le cas opérateur. L'étude du cas scalaire est faite dans deux types d'espaces : les espaces de Hölder et les espaces L^p.

On continue avec l'étude d'une équation différentielle opérationnelle complète du second ordre de type elliptique posée sur toute la droite, et dans un cadre commutatif, c'est-à-dire que les opérateurs commutent au sens des résolvantes. Là aussi l'étude est faite dans les espaces de Hölder puis dans les espaces L^p. La représentation de la solution et l'étude de sa régularité sont réutilisées dans le cas non commutatif au chapitre suivant.

1 Équation scalaire

Dans cette section, on étudie l'équation différentielle scalaire complète du second ordre posée sur toute la droite. L'existence et l'unicité de la solution classique sont prouvées. L'étude se fait dans l'espace $BUC^\theta(\mathbb{R};X)$, $\theta \in]0,1[$, puis dans l'espace $L^p(\mathbb{R};X)$, $1 < p < \infty$. On montre aussi des propriétés de régularité maximale de la solution dans le cadre höldérien. La représentation de la solution trouvée ici est ensuite adaptée pour le cas opérateur.

1.1 Introduction

On considère l'équation différentielle scalaire complète du second ordre suivante

$$u''(x) + 2bu'(x) + au(x) = f(x), \; x \in \mathbb{R}, \tag{III.1}$$

où a est une constante réelle strictement négative, b est une constante réelle quelconque et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans X, $(X, \|.\|)$ étant un espace de Banach complexe. On justifiera à la Remarque III.3 pourquoi on s'intéresse au cas $a < 0$.

On pose

$$l = b - \sqrt{b^2 - a} \quad \text{et} \quad m = -b - \sqrt{b^2 - a}, \tag{III.2}$$

et on a le résultat suivant.

Proposition III.1 $a < 0$ *si et seulement si* $l, m < 0$.

Preuve. On considère trois cas.

1. On suppose d'abord $b < 0$. On a évidemment
$$l = b - \sqrt{b^2 - a} < 0,$$
et de plus
$$\begin{aligned} a < 0 \Leftrightarrow & b^2 < b^2 - a \\ & \Leftrightarrow -b < \sqrt{b^2 - a} \\ & \Leftrightarrow -b - \sqrt{b^2 - a} < 0 \\ & \Leftrightarrow m < 0. \end{aligned}$$
2. On suppose maintenant $b > 0$. On a évidemment
$$m = -b - \sqrt{b^2 - a} < 0,$$
et de plus
$$\begin{aligned} a < 0 \Leftrightarrow & b^2 < b^2 - a \\ & \Leftrightarrow b < \sqrt{b^2 - a} \\ & \Leftrightarrow b - \sqrt{b^2 - a} < 0 \\ & \Leftrightarrow l < 0. \end{aligned}$$
3. On suppose $b = 0$. Alors $l = m = -\sqrt{-a}$ donc $l, m < 0 \Leftrightarrow a < 0$.

■

L'équation (III.1) est équivalente à
$$u''(x) + (l - m)u'(x) - lm\ u(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{III.3}$$
On note que l et m sont deux constantes réelles strictement négatives vérifiant
$$l - m = 2b \quad \text{et} \quad - lm = a.$$

Deux cas d'étude se présentent.

1. On suppose $f \in BUC^{\theta}(\mathbb{R}; X)$, où $\theta \in]0, 1[$. On cherche une solution classique de (III.1), c'est-à-dire une fonction u telle que
$$u \in BUC^2(\mathbb{R}; X),$$
et satisfaisant (III.1). On étudie également la propriété de régularité maximale de la solution classique u, c'est-à-dire
$$u'' \in BUC^{\theta}(\mathbb{R}; X)$$
2. On suppose $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$, où $1 < p < \infty$. On cherche une solution classique de (III.1), c'est-à-dire une fonction u telle que
$$u \in W^{2,p}(\mathbb{R}; X),$$
et satisfaisant (III.1).

On définit de même les solutions classiques de (III.3). Une solution classique de (III.3) est alors une solution classique de (III.1).

L'étude est organisée ainsi. La Section 1.2 est consacrée à l'équation homogène associée à (III.1). Ensuite, on résout (III.3) dans le cadre höldérien (Section 1.3) et dans le cadre L^p (Section 1.4).

1.2 Équation homogène

On considère l'équation homogène associée à (III.1)

$$u''(x) + 2bu'(x) + au(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{III.4}$$

L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 + 2b\lambda + a = 0.$$

On a le discriminant suivant

$$\Delta = 4b^2 - 4a.$$

Puisque $a < 0$, on a $\Delta > 0$, donc m et $-l$ définis par (III.2) sont les deux solutions réelles de l'équation caractéristique. Les solutions de (III.4) dans $C^2(\mathbb{R}; X)$ sont les fonctions

$$u(x) = C_1 e^{-lx} + C_2 e^{mx},\ x \in \mathbb{R},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes dans X. Si on veut de plus $u \in BUC^2(\mathbb{R}; X)$, alors nécessairement $C_1 = C_2 = 0$ et la fonction nulle est alors la seule solution.

On obtient aussi $u = 0$ si on veut $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}; X)$.

1.3 Cadre höldérien

On considère la représentation suivante

$$u(x) = (l+m)^{-1} \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)m} f(s)\ ds + (l+m)^{-1} \int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)l} f(s) ds,\ x \in \mathbb{R}. \tag{III.5}$$

On pose alors pour une fonction g donnée de $\mathbb{R}$ dans X et pour $x \in \mathbb{R}$

$$G(g)(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)m} g(s) ds, \qquad H(g)(x) = \int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)l} g(s) ds.$$

L'étude de la régularité de ces deux fonctions donnera la régularité de la représentation (III.5).

Proposition III.2 *Soit* $g \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$, $\theta \in]0,1[$. *Alors*

1. $G(g), H(g) \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$ *et il existe* $K > 0$ *tel que*

$$\begin{cases} \|G(g)\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)} \leqslant K \|g\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)}, \\ \|H(g)\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)} \leqslant K \|g\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)}. \end{cases}$$

2. $G(g), H(g) \in BUC^1(\mathbb{R}; X)$ *et*

$$\begin{cases} G(g)' = mG(g) + g, \\ H(g)' = -lH(g) - g. \end{cases}$$

Preuve. On démontre seulement les résultats pour $G(g)$. Pour $H(g)$, en effectuant le changement de variables

$$\sigma = -s, \qquad d\sigma = -ds,$$

on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$H(g)(x) = \int_{-\infty}^{-x} e^{(-x-\sigma)l} g(-\sigma) d\sigma.$$

Or $g(-\cdot) \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$, donc en échangeant les rôles de l et m, on applique les résultats de $G(g(-\cdot))(-x)$ sur $H(g)(x)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après les propriétés des intégrales de Bochner on a

$$\begin{aligned}\|G(g)(x)\| &= \left\| \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)m} g(s) ds \right\| \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)m} \|g(s)\| \, ds \\ &\leqslant \|g\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)} \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)m} ds.\end{aligned}$$

Or $m < 0$ donc on a

$$\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)m} ds = \left[-\frac{1}{m} e^{(x-s)m} \right]_{-\infty}^{x} = (-m)^{-1} .$$

Ainsi on obtient

$$\|G(g)(x)\| \leqslant (-m)^{-1} \|g\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)} .$$

Donc $G(g)$ est bien défini. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq y$. Alors en posant

$$\sigma = s - y + x, \qquad d\sigma = ds,$$

on a

$$\int_{-\infty}^{y} e^{(y-s)m} g(s) ds = \int_{-\infty}^{x} e^{(x-\sigma)m} g(\sigma + y - x) d\sigma,$$

ainsi

$$\begin{aligned}G(g)(x) - G(g)(y) &= \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)m} g(s) ds - \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)m} g(s + y - x) ds \\ &= \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)m} \left(g(s) - g(s + y - x) \right) ds.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\|G(g)(x) - G(g)(y)\| &\leqslant \left\| \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)m} \left(g(s) - g(s + y - x) \right) ds \right\| \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)m} \|g(s) - g(s + y - x)\| \, ds \\ &\leqslant \|g\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)} \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)m} ds \, |y - x|^\theta \\ &\leqslant (-m)^{-1} \|g\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)} |y - x|^\theta .\end{aligned}$$

Ainsi $G(g) \in BUC^\theta (\mathbb{R}; X)$ et on a

$$\begin{aligned}\|G(g)\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)} &= \sup_{x,y\in\mathbb{R},\ x-y\neq 0} \frac{\|G(g)(x) - G(g)(y)\|}{|x - y|^\theta} + \sup_{x\in\mathbb{R}} \|G(g)(x)\| \\ &\leqslant 2 \, (-m)^{-1} \|g\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)} .\end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\frac{dG(g)}{dx}(x) = \int_{-\infty}^{x} m e^{(x-s)m} g(s) ds + g(x) = mG(g)(x) + g(x).$$

■

Remarque III.3 *On a*

$$\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)m} ds = \begin{cases} (-m)^{-1} & si\ m < 0 \\ +\infty\ si\ m \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)l} ds = \begin{cases} (-l)^{-1} & si\ l < 0 \\ +\infty\ si\ l \geqslant 0, \end{cases}$$

donc la fonction u est bien définie si et seulement si $l, m < 0$, i.e. si et seulement si $a < 0$.

Théorème III.4 *Soit $f \in BUC^{\theta}(\mathbb{R}; X)$, $\theta \in]0,1[$. Alors, la fonction u définie par (III.5) est l'unique solution classique de (III.3) et vérifie la propriété de régularité maximale*

$$u'' \in BUC^{\theta}(\mathbb{R}; X).$$

Preuve. On remarque que u peut s'écrire

$$u = (l+m)^{-1}(G(f) + H(f)).$$

D'après la Proposition III.2, point 2., u est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$u' = (l+m)^{-1}(mG(f) + f - lH(f) - f),$$

d'où

$$u' = (l+m)^{-1}(mG(f) - lH(f)).$$

De même u' est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$u'' = (l+m)^{-1}(m^2 G(f) + mf + l^2 H(f) + lf),$$

d'où

$$u'' = (l+m)^{-1}(m^2 G(f) + l^2 H(f)) + f.$$

D'après la Proposition III.2, point 1., $u'' \in BUC^{\theta}(\mathbb{R}; X)$. Ainsi $u \in BUC^2(\mathbb{R}; X)$.

On montre que la fonction u définie par (III.5) vérifie l'équation (III.3).

$$\begin{aligned} & u'' + (l-m)u' - lm\, u \\ =& f + (l+m)^{-1}(m^2 G(f) + l^2 H(f)) + (l-m)(l+m)^{-1}(mG(f) - lH(f)) - lm(l+m)^{-1}(G(f) + H(f)) \\ =& f + (l+m)^{-1}\left(m^2 + (l-m)m - lm\right) G(f) + (l+m)^{-1}\left(l^2 - (l-m)l - lm\right) H(f) \\ =& f. \end{aligned}$$

Ainsi u est une solution classique de (III.3) vérifiant la régularité maximale $u'' \in BUC^{\theta}(\mathbb{R}; X)$.

On montre l'unicité de la solution classique. Soit v une autre solution classique de (III.3). Alors

$$v - u \in BUC^2(\mathbb{R}; X),$$

et est solution de l'équation homogène (III.4). On en déduit $v = u$. ■

1.4 Cadre L^p

On considère la représentation (III.5). Pour une fonction g donnée de $\mathbb{R}$ dans X et pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on pose encore

$$G(g)(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)m} g(s) ds, \qquad H(g)(x) = \int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)l} g(s) ds,$$

et on étudie la régularité de ces fonctions.

Proposition III.5 *Soit* $g \in L^P(\mathbb{R};X)$, $1 < p < \infty$. *Alors*

1. $G(g), H(g) \in L^p(\mathbb{R};X)$ *et il existe* $K > 0$ *tel que*

$$\begin{cases} \|G(g)\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \leqslant K \|g\|_{L^p(\mathbb{R};X)}, \\ \|H(g)\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \leqslant K \|g\|_{L^p(\mathbb{R};X)}. \end{cases}$$

2. $G(g), H(g) \in W^{1,p}(\mathbb{R};X)$ *et*

$$\begin{cases} G(g)' = mG(g) + g, \\ H(g)' = -lH(g) - g. \end{cases}$$

Preuve. On démontre seulement les résultats pour $G(g)$. Pour $H(g)$, on peut se ramener à $G(g(-\cdot))$ par un changement de variables.

1. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|G(g)(x)\|^p \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)m} g(s) ds \right\|^p dx.$$

On effectue le changement de variables suivant

$$\sigma = x - s, \qquad d\sigma = -ds,$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(g)(x)\|^p \, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \int_{0}^{+\infty} e^{\sigma m} g(x-\sigma) d\sigma \right\|^p dx \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{0}^{+\infty} e^{\sigma m} \|g(x-\sigma)\| \, d\sigma \right)^p dx \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{0}^{+\infty} e^{\sigma m/2} e^{\sigma m/2} \|g(x-\sigma)\| \, d\sigma \right)^p dx. \end{aligned}$$

Soient Φ, Ψ définies pour presque tout $\sigma \in [0, +\infty[$ par

$$\Phi(\sigma) = e^{\sigma m/2} \|g(x-\sigma)\|, \qquad \Psi(\sigma) = e^{\sigma m/2}.$$

Alors $\Phi \in L^p(0, +\infty)$ car $m < 0$ et en effectuant le changement de variables suivant

$$u = x - \sigma, \qquad du = -d\sigma,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_{0}^{+\infty} e^{p\sigma m/2} \|g(x-\sigma)\|^p \, d\sigma &\leqslant \int_{0}^{+\infty} \|g(x-\sigma)\|^p \, d\sigma \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \|g(x-\sigma)\|^p \, d\sigma \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \|g(u)\|^p \, du \\ &\leqslant \|g\|^p_{L^p(\mathbb{R};X)} < \infty. \end{aligned}$$

Soit $1 < q < \infty$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors $\Psi \in L^q(0, +\infty)$ car, puisque $m < 0$, on a

$$\int_{0}^{+\infty} e^{q\sigma m/2} d\sigma = \left[\frac{2}{qm} e^{q\sigma m/2} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{-qm} < \infty.$$

Ainsi $(\Phi\Psi) \in L^1(0,+\infty)$ et d'après l'inégalité de Hölder on a

$$\|\Phi\Psi\|_{L^1(0,+\infty)} \leqslant \|\Phi\|_{L^p(0,+\infty)} \|\Psi\|_{L^q(0,+\infty)},$$

d'où

$$\|\Phi\Psi\|^p_{L^1(0,+\infty)} \leqslant \|\Phi\|^p_{L^p(0,+\infty)} \left(\frac{2}{-qm}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Par conséquent, grâce au Théorème de Fubini et au changement de variables suivant

$$u = x - \sigma, \qquad du = dx,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \|G(g)(x)\|^p \, dx &\leqslant \left(\frac{2}{-qm}\right)^{\frac{p}{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{p\sigma m/2} \|g(x-\sigma)\|^p \, d\sigma \; dx \\
&\leqslant \left(\frac{2}{-qm}\right)^{\frac{p}{q}} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{p\sigma m/2} \|g(x-\sigma)\|^p \, dx \; d\sigma \\
&\leqslant \left(\frac{2}{-qm}\right)^{\frac{p}{q}} \int_0^{+\infty} e^{p\sigma m/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \|g(u)\|^p \, du \; d\sigma \\
&\leqslant \left(\frac{2}{-qm}\right)^{\frac{p}{q}} \|g\|^p_{L^p(\mathbb{R};X)} \int_0^{+\infty} e^{p\sigma m/2} d\sigma \\
&\leqslant \left(\frac{2}{-qm}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{2}{-pm} \|g\|^p_{L^p(\mathbb{R};X)} < \infty.
\end{aligned}$$

Ainsi $G(g) \in L^P(\mathbb{R};X)$. Soit

$$K := \left(\frac{2}{-qm}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{2}{-pm}\right)^{\frac{1}{p}} > 0.$$

Alors

$$\|G(g)\|_{L^P(\mathbb{R};X)} \leqslant K \|g\|_{L^P(\mathbb{R};X)}.$$

2. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R};X)$. On a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) G(g)(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)m} g(s) ds \; dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x} \varphi'(x) e^{(x-s)m} g(s) ds \; dx.
\end{aligned}$$

On effectue le changement de variables suivant

$$\sigma = x - s, \qquad d\sigma = -ds,$$

et on obtient en appliquant ensuite le Théorème de Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) G(g)(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi'(x) e^{\sigma m} g(x-\sigma) d\sigma \; dx \\
&= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) e^{\sigma m} g(x-\sigma) dx \; d\sigma.
\end{aligned}$$

On effectue un nouveau changement de variables

$$\tau = x - \sigma, \qquad d\tau = dx,$$

et on applique à nouveau le Théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)G(g)(x)dx &= \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(\tau+\sigma)e^{\sigma m}g(\tau)d\tau\ d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \varphi'(\tau+\sigma)e^{\sigma m}g(\tau)d\sigma\ d\tau.\end{aligned}$$

Or φ est à support compact donc, à τ fixé dans $\mathbb{R}$, il existe $\alpha_\tau \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$[\alpha_\tau, +\infty[\cap \, supp(\varphi(\tau + .)) = \varnothing,$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \varphi'(\tau+\sigma)e^{\sigma m}g(\tau)d\sigma = \int_0^{\alpha_\tau} \varphi'(\tau+\sigma)e^{\sigma m}g(\tau)d\sigma,$$

et par intégrations par parties, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \varphi'(\tau+\sigma)e^{\sigma m}g(\tau)d\sigma &= -\int_0^{\alpha_\tau} \varphi(\tau+\sigma)me^{\sigma m}g(\tau)d\sigma + \Big[\varphi(\tau+\sigma)e^{\sigma m}g(\tau)\Big]_0^{\alpha_\tau} \\ &= -\int_0^{+\infty} \varphi(\tau+\sigma)me^{\sigma m}g(\tau)d\sigma - \varphi(\tau)g(\tau),\end{aligned}$$

ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)G(g)(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \varphi(\tau+\sigma)me^{\sigma m}g(\tau)d\sigma\ d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau)g(\tau)d\tau,$$

et en effectuant les changements de variables suivants dans la première intégrale

$$\begin{aligned} x &= \tau + \sigma, \qquad & dx &= d\tau, \\ s &= x - \sigma, \qquad & ds &= -\, d\sigma,\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)G(g)(x)dx &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\left(m\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)m}g(s)ds\right)dx - \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)g(\tau)d\tau \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\left(mG(g)(x) + g(x)\right)dx.\end{aligned}$$

On obtient donc pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$G(g)'(x) = mG(g)(x) + g(x).$$

Ainsi $G(g)' = mG(g) + g \in L^p(\mathbb{R}; X)$ et $G(g) \in W^{1,p}(\mathbb{R}; X)$.

■

Théorème III.6 *Soit $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$, $1 < p < \infty$. Alors, la fonction u définie par (III.5) est l'unique solution classique de (III.3).*

Preuve. On rappelle que u peut s'écrire

$$u = (l+m)^{-1}(G(f) + H(f)).$$

D'après la Proposition III.5, u est dérivable au sens des distributions sur $\mathbb{R}$ à valeurs vectorielles, et

$$u' = (l+m)^{-1}(mG(f) + f - lH(f) - f),$$

d'où

$$u' = (l+m)^{-1}(mG(f) - lH(f)).$$

De même u' est dérivable au sens des distributions sur $\mathbb{R}$ à valeurs vectorielles, et

$$u'' = (l+m)^{-1}(m^2G(f) + mf + l^2H(f) + lf),$$

d'où

$$u'' = (l+m)^{-1}(m^2G(f) + l^2H(f)) + f.$$

D'après la Proposition III.5, $u'' \in L^p(\mathbb{R}; X)$. Ainsi $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}; X)$.

Il est clair que u satisfait (III.3) (voir Théorème III.4 du cadre höldérien). Ainsi u est une solution classique de (III.3). L'unicité de la solution classique se montre comme au Théorème III.4. ■

2 Cadre commutatif sur les espaces de Hölder

Dans cette section, on étudie les équations différentielles opérationnelles elliptiques et complètes du second ordre posées sur toute la droite. L'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution classique sont prouvées sous des hypothèses naturelles de commutativité des opérateurs. L'étude se fait dans l'espace $BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$, $\theta \in]0,1[$. Les résultats obtenus ici sont essentiels pour débuter le cas non commutatif.

2.1 Introduction et hypothèses

On considère l'équation différentielle opérationnelle elliptique complète du second ordre suivante

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{III.6}$$

où A et B sont deux opérateurs linéaires fermés sur X, $(X, \|.\|)$ étant un espace de Banach complexe, $f \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$, où $\theta \in]0,1[$.

On cherche une solution classique de (III.6), c'est-à-dire une fonction u telle que

$$u \in BUC^2(\mathbb{R}; X) \cap BUC(\mathbb{R}; D(A)),\ u' \in BUC(\mathbb{R}; D(B)),$$

et satisfaisant (III.6). On étudie également la propriété de régularité maximale de la solution classique u, c'est-à-dire

$$u'',\ Bu',\ Au \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X). \tag{III.7}$$

Tout comme dans le cas scalaire, on étudie l'équation différentielle suivante

$$u''(x) + (L-M)\,u'(x) - LMu(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{III.8}$$

Une solution classique de (III.8), est une fonction u telle que

$$u \in BUC^2(\mathbb{R}; X) \cap BUC(\mathbb{R}; D(LM)),\ u' \in BUC(\mathbb{R}; D(L-M)),$$

et satisfaisant (III.8). La propriété de régularité maximale s'écrit alors

$$u'',\ (L-M)\,u',\ LMu \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X). \tag{III.9}$$

L'objectif est le suivant.

1. Donner des hypothèses naturelles sur L et M pour résoudre (III.8).
2. Retourner à l'équation (III.6), c'est-à-dire résoudre (III.8) avec L et M satisfaisant

$$L - M \subset 2B \quad \text{et} \quad -LM \subset A. \tag{III.10}$$

Dans ce cas, une solution classique de (III.8) sera a fortiori une solution classique de (III.6).

On indiquera ultérieurement comment construire L et M satisfaisant (III.10), voir Section 2.4. On s'inspirera du cas scalaire.

Les hypothèses sur L et M sont :

$$L,\, M \text{ génèrent un semi-groupe analytique généralisé sur } X, \tag{III.11}$$

$$D(L) = D(M), \tag{III.12}$$

$$D(LM) = D(ML), \tag{III.13}$$

$$L,\, M \text{ sont inversibles dans } L(X), \tag{III.14}$$

$$L + M \text{ est inversible dans } L(X). \tag{III.15}$$

L'hypothèse de commutativité est la suivante

$$\forall \lambda \in \rho(L), \forall \mu \in \rho(M),\ (\lambda I - L)^{-1} (\mu I - M)^{-1} = (\mu I - M)^{-1} (\lambda I - L)^{-1}. \tag{III.16}$$

Ces hypothèses nécessitent quelques commentaires.

Remarque III.7 *On note que, sous les hypothèses (III.12)-(III.13), l'équation (III.8) est équivalente à*

$$u''(x) + (L - M)\, u'(x) + \frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right) u(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{III.17}$$

En effet sur $D(LM) = D(ML)$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right) &= \frac{1}{4}\left(L^2 - LM - ML + M^2 - L^2 - LM - ML - M^2\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(LM + ML\right),\end{aligned}$$

et dans le cas commutatif, i.e. si l'hypothèse (III.16) est vérifiée, on a

$$\frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right) = -LM = -ML.$$

En revanche dans le cas non commutatif (voir Chapitre IV) on aura $LM \neq ML$ donc on étudiera l'équation (III.17) qui sera équivalente à

$$u''(x) + (L - M)\, u'(x) - \frac{1}{2}\left(LM + ML\right) u(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Remarque III.8 *On rappelle que dans le cas commutatif sur $L^p(0,1;X)$, avec X un espace UMD, l'hypothèse (III.15) est déduite de (III.14) et de quelques hypothèses sur les puissances imaginaires de L et M (voir Favini et al. [23, 24]).*

Dans l'espace de Hölder, la situation est différente. On mentionne quelques résultats importants sur la somme $L + M$:

1. *On suppose (III.11), (III.16) et $D(L) = D(M)$ dense dans X. Alors $L + M$ est fermable et $\mathbb{R}^+ \subset \rho\left(\overline{L+M}\right)$; voir Da Prato-Grisvard [12], Théorème 3.7., p. 324.*

2. *On suppose (III.11) et (III.16). Alors il existe une extension* $\widetilde{L+M}$ *telle que* $\mathbb{R}^+ \subset \rho\left(\widetilde{L+M}\right)$. *On peut construire dans cette situation un contre-exemple avec* $D\left(\overline{L+M}\right)$ *strictement inclus dans* $D\left(\widetilde{L+M}\right)$. *On a aussi* $\overline{L+M} = \widetilde{L+M}$ *si et seulement si* $(L+M-\lambda_0 I)(X)$ *est dense dans* X *pour un certain* $\lambda_0 > 0$ *(voir Labbas [41]).*

Remarque III.9 *L'hypothèse (III.14) est nécessaire ici pour avoir la décroissance des semi-groupes à l'infini (voir Remarque III.10). Elle n'est donc pas utilisée pour une équation sur un intervalle borné comme dans le Chapitre V.*

La Section 2.2 contient quelques lemmes techniques. Dans la Section 2.3, on montrera l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution classique. La Section 2.4 est consacrée au retour à l'équation initiale (III.6) avec les opérateurs A et B. Dans la Section 2.5, on donnera quelques exemples pour lesquels cette théorie s'applique.

2.2 Lemmes techniques

Voici deux conséquences immédiates des hypothèses (III.11)-(III.16).

Remarque III.10 *Sous les hypothèses (III.11) et (III.14), d'après la Proposition I.64, il existe* $C, \delta > 0$ *tels que pour tout* $\xi > 0$ *et tout* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\begin{cases} \left\|e^{\xi L}\right\|_{L(X)} \leqslant Ce^{-\delta\xi} \leqslant C, \\ \left\|e^{\xi M}\right\|_{L(X)} \leqslant Ce^{-\delta\xi} \leqslant C, \\ \left\|L^k e^{\xi L}\right\|_{L(X)} \leqslant \left(\dfrac{kC}{\xi}\right)^k e^{-\delta\xi}, \\ \left\|M^k e^{\xi M}\right\|_{L(X)} \leqslant \left(\dfrac{kC}{\xi}\right)^k e^{-\delta\xi}. \end{cases}$$

Remarque III.11

1. *On suppose (III.12) et (III.13). Alors*

$$\begin{aligned} D(LM) &= \{\varphi \in D(M) : M\varphi \in D(L)\} \\ &= \{\varphi \in D(M) : M\varphi \in D(M)\} \\ &= D(M^2). \end{aligned}$$

De même $D(ML) = D(L^2)$. *Ainsi on obtient*

$$D(LM) = D(M^2) = D(L^2) = D(ML).$$

2. *De (III.15), on déduit que* $L+M$ *et* $(L+M)^2$ *sont fermés.*

Lemme III.12 *On suppose (III.12) et (III.13). Alors, l'hypothèse (III.16) est équivalente à*

$$LM = ML. \tag{III.18}$$

Preuve. On suppose (III.18). Alors, pour tout $\varphi \in D(LM) = D(ML)$ et pour tout $\lambda \in \rho(L)$, $\mu \in \rho(M)$, on a

$$\begin{aligned} (\lambda I - L)(\mu I - M)\varphi &= \lambda\mu\varphi - \lambda M\varphi - \mu L\varphi + LM\varphi \\ &= \lambda\mu\varphi - \lambda M\varphi - \mu L\varphi + ML\varphi \\ &= (\mu I - M)(\lambda I - L)\varphi. \end{aligned}$$

Comme $(\lambda I - L)$, $(\mu I - M)$ sont inversibles dans $L(X)$, on a

$$\begin{aligned}&(\mu I - M)^{-1}(\lambda I - L)^{-1}(\lambda I - L)(\mu I - M)(\lambda I - L)^{-1}(\mu I - M)^{-1}\\ =&(\mu I - M)^{-1}(\lambda I - L)^{-1}(\mu I - M)(\lambda I - L)(\lambda I - L)^{-1}(\mu I - M)^{-1},\end{aligned}$$

donc

$$(\lambda I - L)^{-1}(\mu I - M)^{-1} = (\mu I - M)^{-1}(\lambda I - L)^{-1}.$$

Inversement, on suppose (III.16). Alors pour tout $\varphi \in D(LM) = D(ML)$, on a

$$\begin{aligned}&(\mu I - M)(\lambda I - L)(\lambda I - L)^{-1}(\mu I - M)^{-1}(\lambda I - L)(\mu I - M)\varphi\\ =&(\mu I - M)(\lambda I - L)(\mu I - M)^{-1}(\lambda I - L)^{-1}(\lambda I - L)(\mu I - M)\varphi,\end{aligned}$$

d'où

$$(\lambda I - L)(\mu I - M)\varphi = (\mu I - M)(\lambda I - L)\varphi,$$

et en développant on a

$$\lambda\mu\varphi - \lambda M\varphi - \mu L\varphi + LM\varphi = \lambda\mu\varphi - \lambda M\varphi - \mu L\varphi + ML\varphi,$$

et ainsi

$$LM = ML.$$

■

Le lemme qui suit permet d'établir quelques commutativités d'opérateurs très utiles.

Lemme III.13 *On suppose (III.12)-(III.16).*

1. *M commute avec L sur $D(LM) = D(ML)$ et $LM = ML$.*
2. *$(L+M)^{-1}$ commute avec M sur $D(M)$ et $M(L+M)^{-1} \in L(X)$.*
3. *$(L+M)^{-1}$ commute avec L sur $D(L)$ et $L(L+M)^{-1} \in L(X)$.*
4. *$(L+M)^{-1}$ commute avec $(L-M)$ sur $D(L-M)$ et $(L-M)(L+M)^{-1} \in L(X)$.*
5. *$(L+M)L^{-1}, (L+M)M^{-1} \in L(X)$.*

Preuve.

1. D'après le Lemme III.12, on a $LM = ML$ sur $D(LM) = D(ML)$.
2. Pour tout $\varphi \in D(M)$, on a en utilisant le point 1.

$$\begin{aligned}(L+M)^{-1}M\varphi =&(L+M)^{-1}M(L+M)(L+M)^{-1}\varphi\\ =&(L+M)^{-1}(ML+M^2)(L+M)^{-1}\varphi\\ =&(L+M)^{-1}(LM+M^2)(L+M)^{-1}\varphi\\ =&(L+M)^{-1}(L+M)M(L+M)^{-1}\varphi\\ =&M(L+M)^{-1}\varphi.\end{aligned}$$

M est un opérateur linéaire fermé sur X, $(L+M)^{-1} \in L(X)$ et

$$(L+M)^{-1}(X) \subset D(L+M) = D(M),$$

donc d'après la Proposition I.16, $M(L+M)^{-1} \in L(X)$.

3. Pour tout $\varphi \in D(L)$, on a en utilisant le point 1.
$$\begin{aligned}(L+M)^{-1}L\varphi =&(L+M)^{-1}L(L+M)(L+M)^{-1}\varphi\\ =&(L+M)^{-1}(L^2+LM)(L+M)^{-1}\varphi\\ =&(L+M)^{-1}(L^2+ML)(L+M)^{-1}\varphi\\ =&(L+M)^{-1}(L+M)L(L+M)^{-1}\varphi\\ =&L(L+M)^{-1}\varphi.\end{aligned}$$
L est un opérateur linéaire fermé sur X, $(L+M)^{-1} \in L(X)$ et
$$(L+M)^{-1}(X) \subset D(L+M) = D(L),$$
donc d'après la Proposition I.16, $L(L+M)^{-1} \in L(X)$.
4. $(L+M)^{-1}$ commute avec M et L sur $D(M) = D(L)$ (points 2. et 3.), ainsi $(L+M)^{-1}$ commute avec $(L-M)$ sur $D(L-M) = D(M) = D(L)$.
De plus comme $M(L+M)^{-1} \in L(X)$ et $L(L+M)^{-1} \in L(X)$, on a $(L-M)(L+M)^{-1} \in L(X)$.
5. $L+M$ est un opérateur linéaire fermé sur X, $L^{-1} \in L(X)$ et
$$L^{-1}(X) \subset D(L) = D(L+M),$$
donc d'après la Proposition I.16, $(L+M)L^{-1} \in L(X)$. En échangeant les rôles de L et M on obtient $(L+M)M^{-1} \in L(X)$.

■

2.3 Principaux résultats

On introduit deux fonctions qui seront utilisées dans la représentation de la solution classique. On pose pour une fonction g donnée de $\mathbb{R}$ dans X et pour $x \in \mathbb{R}$
$$G(g)(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} g(s)ds, \qquad H(g)(x) = \int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L} g(s)ds.$$

Proposition III.14 *On suppose (III.11) et (III.14). Soit $g \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$, $\theta \in]0,1[$. Alors*
1. *$G(g) \in BUC(\mathbb{R}; D(M))$ et $H(g) \in BUC(\mathbb{R}; D(L))$,*
2. *$MG(g)$, $LH(g) \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$ et il existe $K > 0$ tel que*
$$\begin{cases} \|MG(g)\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)} \leqslant K \|g\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)}, \\ \|LH(g)\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)} \leqslant K \|g\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)}. \end{cases}$$
3. *$G(g)$, $H(g) \in BUC^1(\mathbb{R}; X)$ et*
$$\begin{cases} G(g)' = MG(g) + g, \\ H(g)' = -LH(g) - g. \end{cases}$$

Preuve. On démontre seulement les résultats pour $G(g)$. Pour $H(g)$, en effectuant le changement de variables
$$\sigma = -s, \qquad d\sigma = -ds,$$
on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$H(g)(x) = \int_{-\infty}^{-x} e^{(-x-\sigma)L} g(-\sigma)d\sigma.$$
Or $g(-\cdot) \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$, donc en échangeant les rôles de L et M, on applique les résultats de $G(g(-\cdot))(-x)$ sur $H(g)(x)$.

On va, dans cette démonstration, utiliser les constantes C et δ définies à la Remarque III.10.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il est clair que $e^{(x-s)M}g(s)$ est bien défini pour tout $s \leqslant x$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\|G(g)(x)\| &\leqslant \int_{-\infty}^{x} \left\| e^{(x-s)M} \right\|_{L(X)} \|g(s)\| \, ds \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{x} Ce^{-\delta(x-s)} ds \, \|g\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)} \\
&\leqslant \left[\frac{C}{\delta} e^{-\delta(x-s)} \right]_{-\infty}^{x} \|g\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)} \\
&\leqslant \frac{C}{\delta} \|g\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)} .
\end{aligned}$$

Ainsi $G(g)$ est bien défini sur $\mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $g \in BUC(\mathbb{R}; X)$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, avec $|y - x| \leqslant \eta$, on ait

$$\|g(y) - g(x)\| \leqslant \frac{\delta}{C} \varepsilon.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|y - x| \leqslant \eta$. En posant

$$\sigma = s - y + x, \quad d\sigma = ds,$$

on a

$$\int_{-\infty}^{y} e^{(y-s)M} g(s) ds = \int_{-\infty}^{x} e^{(x-\sigma)M} g(\sigma + y - x) d\sigma.$$

Ainsi

$$\|G(g)(y) - G(g)(x)\| = \left\| \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} \left(g(s + y - x) - g(s) \right) ds \right\|.$$

Puisque

$$|(s + y - x) - s| = |y - x| \leqslant \eta,$$

on a

$$\|g(s + y - x) - g(s)\| \leqslant \frac{\delta}{C} \varepsilon.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|G(g)(y) - G(g)(x)\| &\leqslant \int_{-\infty}^{x} \left\| e^{(x-s)M} \right\|_{L(X)} \|g(s + y - x) - g(s)\| \, ds \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{x} Ce^{-\delta(x-s)} \frac{\delta}{C} \varepsilon ds \\
&\leqslant \varepsilon \left[e^{-\delta(x-s)} \right]_{-\infty}^{x} \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi $G(g) \in BUC(\mathbb{R}; X)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on prouve que $G(g)(x) \in D(M)$. Soit $\lambda \in \rho(M)$. Alors pour $r > 0$ assez grand

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{x} e^{(x-s)M} g(x) ds = &\int_{-r}^{x} (\lambda I - M) e^{(x-s)M} (\lambda I - M)^{-1} g(x) ds \\
=&\lambda \int_{-r}^{x} e^{(x-s)M} (\lambda I - M)^{-1} g(x) ds + \int_{-r}^{x} \frac{d}{ds} \left(e^{(x-s)M} (\lambda I - M)^{-1} g(x) \right) ds \\
=&\lambda \int_{-r}^{x} e^{(x-s)M} (\lambda I - M)^{-1} g(x) ds + (\lambda I - M)^{-1} g(x) - e^{(x+r)M} (\lambda I - M)^{-1} g(x).
\end{aligned}$$

Par conséquent $\left(\int_{-r}^{x} e^{(x-s)M}g(x)ds\right) \in D\left(M\right)$. Comme

$$\left\|e^{(x+r)M}\left(\lambda I-M\right)^{-1}g(x)\right\| \leqslant Ce^{-\delta(x+r)}\left\|\left(\lambda I-M\right)^{-1}\right\|_{L(X)}\|g\|_{BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)} \underset{r\to+\infty}{\to} 0,$$

on peut déduire quand $r\to+\infty$ que

$$\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M}g(x)ds = \lambda\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M}\left(\lambda I-M\right)^{-1}g(x)ds+\left(\lambda I-M\right)^{-1}g(x),$$

et, en appliquant $(\lambda I-M)$, on obtient

$$(\lambda I-M)\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M}g(x)ds=\lambda\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M}g(x)ds+g(x),$$

donc

$$M\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M}g(x)ds=-g(x).$$

On écrit

$$\begin{aligned}M\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M}g(s)ds=&\int_{-\infty}^{x-1} Me^{(x-s)M}\left(g(s)-g(x)\right)ds+\int_{x-1}^{x} Me^{(x-s)M}\left(g(s)-g(x)\right)ds\\&+M\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M}g(x)ds.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left\|\int_{-\infty}^{x-1} Me^{(x-s)M}\left(g(s)-g(x)\right)ds\right\| &\leqslant \int_{-\infty}^{x-1}\left\|Me^{(x-s)M}\right\|_{L(X)}\|g(s)-g(x)\|\,ds\\&\leqslant \int_{-\infty}^{x-1}\frac{C}{x-s}e^{-\delta(x-s)}\left(x-s\right)^{\theta}\|g\|_{BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)}\,ds\\&\leqslant C\int_{-\infty}^{x-1}e^{-\delta(x-s)}ds\,\|g\|_{BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)},\end{aligned}$$

puisque pour $s\leqslant x-1$ on a $\left(x-s\right)^{\theta-1}\leqslant 1$; ensuite on obtient

$$\begin{aligned}\left\|\int_{-\infty}^{x-1} Me^{(x-s)M}\left(g(s)-g(x)\right)ds\right\| &\leqslant C\left[\frac{1}{\delta}e^{-\delta(x-s)}\right]_{-\infty}^{x-1}\|g\|_{BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)}\\&\leqslant \frac{C}{\delta}e^{-\delta}\|g\|_{BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)}.\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}\left\|\int_{x-1}^{x} Me^{(x-s)M}\left(g(s)-g(x)\right)ds\right\| &\leqslant \int_{x-1}^{x}\left\|Me^{(x-s)M}\right\|_{L(X)}\|g(s)-g(x)\|\,ds\\&\leqslant \int_{x-1}^{x}\frac{C}{x-s}\left(x-s\right)^{\theta}\|g\|_{BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)}\,ds\\&\leqslant \frac{C}{\theta}\left[-\left(x-s\right)^{\theta}\right]_{x-1}^{x}\|g\|_{BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)}\\&\leqslant \frac{C}{\theta}\|g\|_{BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)},\end{aligned}$$

et

$$\left\| M \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} g(x) ds \right\| = \|-g(x)\| \leqslant \|g\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)} .$$

On obtient $G(g)(x) \in D(M)$ et

$$\|MG(g)(x)\| \leqslant \left(\frac{C}{\delta} e^{-\delta} + \frac{C}{\theta} + 1 \right) \|g\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)} .$$

Le point 2. donnera $MG(g) \in BUC\left(\mathbb{R}; X\right)$. Ainsi on obtient le résultat.

2. Maintenant on prouve que $MG(g) \in BUC^\theta\left(\mathbb{R}; X\right)$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. On pose

$$\xi = y - x > 0.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} MG(g)(y) - MG(g)(x) = & \int_{-\infty}^{x-\xi} M \left(e^{(y-s)M} - e^{(x-s)M} \right) \left(g(s) - g(x) \right) ds \\ & + \int_{x-\xi}^{x} M \left(e^{(y-s)M} - e^{(x-s)M} \right) \left(g(s) - g(x) \right) ds \\ & + \int_{x}^{y} M e^{(y-s)M} \left(g(s) - g(y) \right) ds \\ & + M \int_{-\infty}^{x} \left(e^{(y-s)M} - e^{(x-s)M} \right) g(x) ds \\ & + M \int_{x}^{y} e^{(y-s)M} g(y) ds \\ := & I_1(x, y) + I_2(x, y) + I_3(x, y) + I_4(x, y) + I_5(x, y). \end{aligned}$$

Ensuite

$$\|I_1(x, y)\| \leqslant \int_{-\infty}^{x-\xi} \left\| M e^{(y-s)M} - M e^{(x-s)M} \right\|_{L(X)} \|g(s) - g(x)\| ds.$$

Comme $y - s > 0$ et $x - s > 0$ pour tout $s \leqslant x - \xi$, on a

$$\begin{aligned} \left\| M e^{(y-s)M} - M e^{(x-s)M} \right\|_{L(X)} = & \left\| \int_{x-s}^{y-s} M^2 e^{tM} dt \right\|_{L(X)} \\ \leqslant & \int_{x-s}^{y-s} \frac{C}{t^2} dt \\ \leqslant & C \frac{y - x}{(x - s)(y - s)} \\ \leqslant & C \frac{y - x}{(x - s)^2}, \end{aligned}$$

il en découle que

$$\begin{aligned} \|I_1(x, y)\| \leqslant & \int_{-\infty}^{x-\xi} C \frac{y - x}{(x - s)^2} (x - s)^\theta \|g\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)} ds \\ \leqslant & \frac{C}{1 - \theta} \left[(x - s)^{\theta - 1} \right]_{-\infty}^{x-\xi} \|g\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)} (y - x) . \\ \leqslant & \frac{C}{1 - \theta} \|g\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)} (y - x)^\theta . \end{aligned}$$

Pour les autres termes, on a

$$\begin{aligned}
\|I_2(x,y)\| &\leqslant \int_{x-\xi}^{x} \left\| Me^{(y-s)M} - Me^{(x-s)M} \right\|_{L(X)} \|g(s)-g(x)\|\, ds \\
&\leqslant \int_{x-\xi}^{x} \left(\frac{C}{y-s} + \frac{C}{x-s} \right) (x-s)^{\theta} \|g\|_{BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)}\, ds \\
&\leqslant \int_{x-\xi}^{x} 2\frac{C}{x-s} (x-s)^{\theta} \|g\|_{BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)}\, ds \\
&\leqslant \frac{2C}{\theta} \left[-(x-s)^{\theta} \right]_{x-\xi}^{x} \|g\|_{BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)} \\
&\leqslant \frac{2C}{\theta} \|g\|_{BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)} (y-x)^{\theta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|I_3(x,y)\| &\leqslant \int_{x}^{y} \left\| Me^{(y-s)M} \right\|_{L(X)} \|g(s)-g(y)\|\, ds \\
&\leqslant \int_{x}^{y} \frac{C}{y-s} (y-s)^{\theta} \|g\|_{BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)}\, ds \\
&\leqslant \frac{C}{\theta} \left[-(y-s)^{\theta} \right]_{x}^{y} \|g\|_{BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)} \\
&\leqslant \frac{C}{\theta} \|g\|_{BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)} (y-x)^{\theta},
\end{aligned}$$

$$I_4(x,y) = \lim_{r\to+\infty} M \int_{-r}^{x} \left(e^{(y-s)M} - e^{(x-s)M} \right) g(x) ds,$$

et

$$\begin{aligned}
M \int_{-r}^{x} \left(e^{(y-s)M} - e^{(x-s)M} \right) g(x) ds &= \left[-\left(e^{(y-s)M} - e^{(x-s)M} \right) g(x) \right]_{-r}^{x} \\
&= -\left(e^{(y-x)M} - I \right) g(x) + \left(e^{(y+r)M} - e^{(x+r)M} \right) g(x),
\end{aligned}$$

or

$$\left\| \left(e^{(y+r)M} - e^{(x+r)M} \right) g(x) \right\| \leqslant C \left(e^{-\delta(y+r)} + e^{-\delta(x+r)} \right) \|g\|_{BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)} \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc

$$I_4(x,y) = -\left(e^{(y-x)M} - I \right) g(x).$$

Enfin

$$I_5(x,y) = \left[-e^{(y-s)M} g(y) \right]_{x}^{y} = \left(e^{(y-x)M} - I \right) g(y),$$

et

$$\begin{aligned}
\|I_4(x,y) + I_5(x,y)\| &\leqslant \left\| e^{(y-x)M} - I \right\|_{L(X)} \|g(y)-g(x)\| \\
&\leqslant (C+1) \|g\|_{BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)} (y-x)^{\theta}.
\end{aligned}$$

Ainsi, il existe $K > 0$ tel que

$$\|MG(g)(y) - MG(g)(x)\| \leqslant K \|g\|_{BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)} (y-x)^{\theta},$$

on en déduit le résultat.

3. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour $\varepsilon > 0$ petit
$$G_{g,\varepsilon}(x) = \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} e^{(x-s)M} g(s)ds.$$
Il est clair que lorsque $\varepsilon \to 0$, on a $G_{g,\varepsilon}(x) \to G(g)(x)$. De plus
$$\begin{aligned}\frac{dG_{g,\varepsilon}}{dx}(x) =& e^{\varepsilon M} g(x-\varepsilon) + M \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} e^{(x-s)M} g(s)ds \\ =& e^{\varepsilon M} g(x-\varepsilon) + M \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} e^{(x-s)M} (g(s)-g(x))ds - \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{d}{ds}\left(e^{(x-s)M} g(x)\right) ds \\ =& M \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} e^{(x-s)M} (g(s)-g(x))ds + e^{\varepsilon M}(g(x-\varepsilon) - g(x)),\end{aligned}$$
qui tend, lorsque $\varepsilon \to 0$, uniformément vers
$$M \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} (g(s)-g(x))ds = M \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} g(s)ds + g(x).$$

■

Remarque III.15

1. *La proposition précédente permet d'établir plus efficacement la régularité de la solution classique.*
2. *On note que cette proposition ne nécessite pas l'hypothèse de commutativité des résolvantes (III.16) et pourra donc être utilisée dans le cas non commutatif au chapitre suivant.*

On considère la représentation suivante
$$u(x) = (L+M)^{-1} \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} f(s)ds + (L+M)^{-1} \int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L} f(s)ds,\ x \in \mathbb{R}. \tag{III.19}$$
D'après la Proposition III.14, $u(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, on a le résultat fondamental suivant.

Théorème III.16 *On suppose (III.11)-(III.16). Soit $f \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$, $\theta \in]0,1[$.*

1. *L'équation (III.8) admet une unique solution classique u définie par (III.19).*
2. *u vérifie la propriété de régularité maximale (III.9).*

Preuve. On note que
$$u = (L+M)^{-1} G(f) + (L+M)^{-1} H(f).$$
D'après la Proposition III.14, on a $u \in BUC(\mathbb{R}; X)$, de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) \in D(M) = D(L)$, et en utilisant la commutativité de L et M avec $(L+M)^{-1}$ sur $D(L) = D(M)$, Lemme III.13, points 2. et 3., on a
$$Mu = (L+M)^{-1} MG(f) + (L+M)^{-1} MH(f),$$
donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Mu(x) \in D(L+M) = D(L)$ et en utilisant de plus la commutativité de L avec M sur $D(LM) = D(ML)$, on a
$$LMu = L(L+M)^{-1} MG(f) + M(L+M)^{-1} LH(f), \tag{III.20}$$
or $L(L+M)^{-1}$, $M(L+M)^{-1} \in L(X)$ donc on a $u \in BUC(\mathbb{R}; D(LM))$ et $LMu \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$.

D'après la Proposition III.14, point 3., u est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}u' &= (L+M)^{-1} MG(f) + (L+M)^{-1} f - (L+M)^{-1} LH(f) - (L+M)^{-1} f \\ &= (L+M)^{-1} MG(f) - (L+M)^{-1} LH(f),\end{aligned}$$

et, en utilisant la commutativité de L et M avec $(L+M)^{-1}$ sur $D(L) = D(M)$ on a

$$u' = M (L+M)^{-1} G(f) - L (L+M)^{-1} H(f).$$

D'après la Proposition III.14, on a $u' \in BUC(\mathbb{R}; X)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u'(x) \in D(L) = D(M) = D(L-M)$ et

$$(L-M)u' = (L-M)(L+M)^{-1} MG(f) - (L-M)(L+M)^{-1} LH(f), \tag{III.21}$$

or, $(L-M)(L+M)^{-1} \in L(X)$ d'après le Lemme III.13, point 4., donc on a $u' \in BUC(\mathbb{R}; D(L-M))$ et $(L-M)u' \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$. D'après la Proposition III.14, point 3., u' est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$u'' = M (L+M)^{-1} MG(f) + M(L+M)^{-1} f + L (L+M)^{-1} LH(f) + L(L+M)^{-1} f,$$

i.e.

$$u'' = f + M (L+M)^{-1} MG(f) + L (L+M)^{-1} LH(f). \tag{III.22}$$

En utilisant (III.22), (III.21) et (III.20), on a

$$\begin{aligned}&u'' + (L-M) u' - LMu \\ =&f + M (L+M)^{-1} MG(f) + L (L+M)^{-1} LH(f) + (L-M)(L+M)^{-1} MG(f) \\ &- (L-M)(L+M)^{-1} LH(f) - L (L+M)^{-1} MG(f) - M (L+M)^{-1} LH(f) \\ =&f.\end{aligned}$$

Donc u satisfait (III.8).

Puisque

$$u'' = -(L-M)u' + LMu + f,$$

on a $u'' \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$.

u est donc une solution classique de (III.8) et u satisfait la propriété de régularité maximale (III.9).

On montre maintenant l'unicité de la solution classique, la méthode choisie ici s'adaptera au cas non commutatif. Pour cela, on considère v une autre solution classique de (III.8). Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$v(x) \in D(LM), \quad v'(x) \in D(L-M),$$

et

$$v''(x) + (L-M) v'(x) - LMv(x) = f(x).$$

On obtient

$$\begin{aligned}u(x) &= (L+M)^{-1} \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} f(s) ds + \int_{x}^{+\infty} (L+M)^{-1} e^{(s-x)L} f(s) ds \\ &= (L+M)^{-1} \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} \left(v''(s) + (L-M) v'(s) - LMv(s)\right) ds \\ &\quad + (L+M)^{-1} \int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L} \left(v''(s) + (L-M) v'(s) - LMv(s)\right) ds \\ &:= v_1(x) + v_2(x) + v_3(x) + v_4(x) + v_5(x) + v_6(x),\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
v_1(x) &= (L+M)^{-1} \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} v''(s)ds,\\
v_2(x) &= (L+M)^{-1} \int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L} v''(s)ds,\\
v_3(x) &= (L+M)^{-1} \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} (L-M)\, v'(s)ds,\\
v_4(x) &= (L+M)^{-1} \int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L} (L-M)\, v'(s)ds,\\
v_5(x) &= -(L+M)^{-1} \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} LMv(s)ds,\\
v_6(x) &= -(L+M)^{-1} \int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L} LMv(s)ds.
\end{aligned}$$

Alors, par une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
v_1(x) &= \Big[(L+M)^{-1} e^{(x-s)M} v'(s)\Big]_{-\infty}^{x} + (L+M)^{-1} M \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} v'(s)ds\\
&= (L+M)^{-1} v'(x) + (L+M)^{-1} M \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} v'(s)ds,
\end{aligned}$$

on utilise la continuité de $e^{(x-s)M}$ en $s=x$, car $v'(x) \in D(L-M) = D(M)$, et sa décroissance à $s=-\infty$. De la même façon, on obtient

$$\begin{aligned}
v_1(x) &= (L+M)^{-1} v'(x) + \Big[(L+M)^{-1} Me^{(x-s)M} v(s)\Big]_{-\infty}^{x} + (L+M)^{-1} M \int_{-\infty}^{x} Me^{(x-s)M} v(s)ds\\
&= (L+M)^{-1} v'(x) + (L+M)^{-1} Mv(x) + (L+M)^{-1} M \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} Mv(s)ds,
\end{aligned}$$

car comme $v(x) \in D(M)$ on a

$$Me^{(x-s)M} v(x) = e^{(x-s)M} Mv(x),$$

et on utilise la continuité du semi-groupe $e^{(x-s)M}$ en $s=x$, puisque on a $Mv(x) \in D(L) = D(M)$, et sa décroissance à $s=-\infty$. De même on a

$$\begin{aligned}
v_2(x) &= \Big[(L+M)^{-1} e^{(s-x)L} v'(s)\Big]_{x}^{+\infty} - (L+M)^{-1} L \int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L} v'(s)ds\\
&= -(L+M)^{-1} v'(x) - \Big[(L+M)^{-1} Le^{(s-x)L} v(s)\Big]_{x}^{+\infty} + (L+M)^{-1} L \int_{x}^{+\infty} Le^{(s-x)L} v(s)ds\\
&= -(L+M)^{-1} v'(x) + (L+M)^{-1} Lv(x) + (L+M)^{-1} L \int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L} Lv(s)ds.
\end{aligned}$$

On utilise deux fois la décroissance de $e^{(s-x)L}$ à $s=+\infty$ et sa continuité en $s=x$, puisque $v'(x) \in D(L-M) = D(L)$, $v(x) \in D(LM) = D(L^2)$ et

$$Le^{(s-x)L} v(x) = e^{(s-x)L} Lv(x).$$

Ainsi

$$v_1(x) + v_2(x) = v(x) + (L+M)^{-1} M \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} Mv(s)ds + (L+M)^{-1} L \int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L} Lv(s)ds.$$

Maintenant, pour $v_3(x)$ et $v_4(x)$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}v_3(x) &= \Big[(L+M)^{-1}\, e^{(x-s)M}(L-M)v(s)\Big]_{-\infty}^{x} + (L+M)^{-1}\, M \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M}(L-M)v(s)ds \\ &= (L+M)^{-1}\,(L-M)\,v(x) + (L+M)^{-1}\, M\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M}\,(L-M)\,v(s)ds,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_4(x) &= \Big[(L+M)^{-1}\, e^{(s-x)L}(L-M)v(s)\Big]_{x}^{+\infty} - (L+M)^{-1}\, L \int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L}(L-M)v(s)ds \\ &= -\,(L+M)^{-1}\,(L-M)\,v(x) - (L+M)^{-1}\, L\int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L}\,(L-M)\,v(s)ds,\end{aligned}$$

ici on utilise encore la décroissance des semi-groupes à l'infini et leur continuité en $s = x$ puisque $(L-M)v(x) \in D(L)\cap D(M)$ et

$$\begin{aligned}M(L-M)v(x) &= MLv(x) - M^2v(x),\\ L(L-M)v(x) &= L^2v(x) - LMv(x),\end{aligned}$$

sont bien définis. Ainsi

$$v_3(x)+v_4(x) = (L+M)^{-1}\, M\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M}\,(L-M)\,v(s)ds - (L+M)^{-1}\, L\int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L}\,(L-M)\,v(s)ds.$$

Ensuite, en utilisant la commutativité de L et M (Lemme III.13, point 1.)

$$v_5(x)+v_6(x) = -\,(L+M)^{-1}\, M\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M}Lv(s)ds - (L+M)^{-1}\, L\int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L}Mv(s)ds.$$

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}u(x) =& v_1(x)+v_2(x)+v_3(x)+v_4(x)+v_5(x)+v_6(x)\\ =& v(x) + (L+M)^{-1}\, M\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M}Mv(s)ds\\ &+ (L+M)^{-1}\, L\int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L}Lv(s)ds\\ &+ (L+M)^{-1}\, M\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M}\,(L-M)\,v(s)ds\\ &- (L+M)^{-1}\, L\int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L}\,(L-M)\,v(s)ds\\ &- (L+M)^{-1}\, M\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M}Lv(s)ds\\ &- (L+M)^{-1}\, L\int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L}Mv(s)ds\\ =& v(x).\end{aligned}$$

Par conséquent $u = v$, ce qui montre l'unicité de la solution classique. ■

2.4 Retour à l'équation initiale

On illustre ici la théorie opérationnelle précédente en construisant une paire d'opérateurs (L, M) satisfaisant (III.11)-(III.16). L'objectif est ensuite de pouvoir résoudre (III.6).

On suppose que les opérateurs A et B vérifient

$$\begin{cases} B^2 - A \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X,\ \mathbb{R}^- \subset \rho(B^2 - A), \\ \exists C > 0,\ \forall \lambda \leqslant 0, \left\| \left(B^2 - A - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{1 + |\lambda|}, \end{cases} \tag{III.23}$$

$$D(A) \subset D(B^2), \tag{III.24}$$

$$D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \subset D(B), \tag{III.25}$$

$$D(BA) \subset D(B^3), \tag{III.26}$$

$$\forall y \in D(B), B(B^2 - A)^{-1} y = (B^2 - A)^{-1} By, \tag{III.27}$$

$$A \text{ est inversible dans } L(X), \tag{III.28}$$

$$\begin{cases} L := B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} \text{ et } M := -B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} \\ \text{génèrent des semi-groupes analytiques généralisés sur } X. \end{cases} \tag{III.29}$$

On rappelle que l'hypothèse (III.23) est la même que celle utilisée dans Krein [40] représentant l'ellipticité lorsque $B = 0$. Celle-ci implique que l'opérateur $-(B^2 - A)^{1/2}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique généralisé uniformément borné sur X.

Le lemme suivant donne plusieurs manières équivalentes pour définir la commutativité.

Lemme III.17 *On suppose (III.23).*

1. *L'hypothèse (III.27) est équivalente à*

$$\begin{cases} D\left(B\left(B^2 - A\right)\right) \subset D\left(\left(B^2 - A\right)B\right) \text{ et} \\ \forall y \in D\left(B\left(B^2 - A\right)\right), B\left(B^2 - A\right)y = \left(B^2 - A\right)By. \end{cases}$$

2. *L'hypothèse (III.27) est équivalente à*

$$\begin{cases} \forall y \in D(B), \left(B^2 - A\right)^{-1/2} y \in D(B) \text{ et} \\ B\left(B^2 - A\right)^{-1/2} y = \left(B^2 - A\right)^{-1/2} By. \end{cases}$$

3. *On suppose de plus (III.25). L'hypothèse (III.27) est équivalente à*

$$\begin{cases} D\left(B\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \subset D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2} B\right) \text{ et} \\ \forall y \in D\left(B\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right), B\left(B^2 - A\right)^{1/2} y = \left(B^2 - A\right)^{1/2} By. \end{cases}$$

Preuve. Les deux premiers points ont été démontrés dans Favini et al. [26], Lemma 4, p. 426.

Maintenant, on suppose le point 1. Soit $y \in D\left(B\left(B^2-A\right)^{1/2}\right) \subset D(B)$. Alors $\left(B^2-A\right)^{-1/2} y \in D\left(B\left(B^2-A\right)\right) \subset D(B)$ et, en appliquant successivement les points 1. et 2., on a

$$\begin{aligned} B\left(B^2-A\right)^{1/2} y =& B\left(B^2-A\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2} y \\ =& \left(B^2-A\right) B\left(B^2-A\right)^{-1/2} y \\ =& \left(B^2-A\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2} By \\ =& \left(B^2-A\right)^{1/2} By, \end{aligned}$$

et $D\left(B\left(B^2-A\right)^{1/2}\right) \subset D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2} B\right)$.

Réciproquement, on suppose le point 3. Soit $y \in D\left(B\left(B^2-A\right)\right) \subset D\left(B\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)$. Alors $\left(B^2-A\right)^{1/2} y \in D\left(B\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)$ et, en appliquant deux fois le point 3., on a

$$\begin{aligned} B\left(B^2-A\right) y =& B\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B^2-A\right)^{1/2} y \\ =& \left(B^2-A\right)^{1/2} B\left(B^2-A\right)^{1/2} y \\ =& \left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B^2-A\right)^{1/2} By \\ =& \left(B^2-A\right) By, \end{aligned}$$

et $D\left(B\left(B^2-A\right)\right) \subset D\left(\left(B^2-A\right) B\right)$. ■

Le lemme qui suit précise, entre autres, les domaines de L et M ; voir Favini et al. [23], Lemma 7, p. 178. Il précise aussi l'inversibilité de L et M ; voir Favini et al. [26], Lemmas 7-8, p. 431-432.

Lemme III.18 *On suppose (III.23)-(III.29). Alors on a*

$$\begin{cases} D(M) = D(L) = D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right), \\ LM = ML = -A, \\ L - M \subset 2B, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (L+M)^{-1} = -\dfrac{1}{2}\left(B^2-A\right)^{-1/2} \in L(X), \\ L^{-1} = \left(B + \left(B^2-A\right)^{1/2}\right) A^{-1} \in L(X), \\ M^{-1} = \left(-B + \left(B^2-A\right)^{1/2}\right) A^{-1} \in L(X). \end{cases}$$

On rappelle que $LM = ML$ est équivalent à (III.16) d'après le Lemme III.12. Ainsi, (III.23)-(III.29) impliquent (III.11)-(III.16). On a alors le résultat optimal suivant.

Théorème III.19 *On suppose (III.23)-(III.29). Soit $f \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$, $\theta \in]0,1[$.*

1. *L'équation (III.6) admet une unique solution classique u.*
2. *u vérifie la propriété de régularité maximale (III.7).*

Remarque III.20 *D'après (III.19), la représentation de l'unique solution classique de (III.6) s'écrit*

$$\begin{aligned} u(x) =& -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\left(B^2-A\right)^{-1/2} e^{(x-s)\left(-B-\sqrt{B^2-A}\right)} f(s)ds \qquad \text{(III.30)} \\ & -\frac{1}{2}\int_{x}^{+\infty}\left(B^2-A\right)^{-1/2} e^{(s-x)\left(B-\sqrt{B^2-A}\right)} f(s)ds,\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2.5 Applications

Exemple 1 (Sur l'intervalle fini).

On considère l'espace de Hilbert $X = L^2(0,1)$ muni de son produit scalaire usuel $< .,. >$ et l'opérateur linéaire suivant

$$\begin{cases} D(T) = \left\{\varphi \in H^1(0,1) : \varphi(0) = \varphi(1)\right\} \\ T\varphi = i\varphi', \end{cases} \tag{III.31}$$

duquel on obtient

$$\begin{cases} D(T^2) = \left\{\varphi \in H^2(0,1) : \varphi(0) = \varphi(1); \varphi'(0) = \varphi'(1)\right\} \\ T^2\varphi = -\varphi''. \end{cases}$$

Proposition III.21 *On considère l'opérateur T défini par (III.31). Alors on a les propriétés suivantes*

1. *T est auto-adjoint ;*
2. *T^2 est auto-adjoint positif.*

Preuve.

1. Soient $\varphi, \psi \in D(T)$. Alors

$$< T\varphi, \psi >=< i\varphi', \psi >=< \varphi', -i\psi >=< \varphi, i\psi' >=< \varphi, T\psi > .$$

2. Soient $\varphi, \psi \in D(T^2)$. Alors

$$\begin{aligned} &< T^2\varphi, \psi >=< -\varphi'', \psi >=< \varphi, -\psi'' >=< \varphi, T^2\psi >, \\ &< T^2\varphi, \varphi >=< -\varphi'', \varphi >=< \varphi', \varphi' >= \|\varphi'\|_{L^2(0,1)} \geqslant 0. \end{aligned}$$

■

On peut alors définir A et B comme suit

$$\begin{cases} D(B) = D(T) \\ B\varphi = \varphi', \end{cases} \qquad \begin{cases} D(A) = D(T^2) \\ A\varphi = 2\varphi'' - a\varphi, \ (a > 0). \end{cases}$$

On note que $B = -iT$ et $A = -2T^2 - aI$.

Proposition III.22 *L'opérateur $B^2 - A = T^2 + aI$ (de domaine $D(T^2)$) est auto-adjoint et strictement positif.*

Preuve. Soient $\varphi, \psi \in D(T^2)$. Alors en utilisant la proposition précédente on a

$$\begin{aligned} < (T^2 + aI)\varphi, \psi > &= < T^2\varphi, \psi > + < a\varphi, \psi > \\ &= < \varphi, T^2\psi > + < \varphi, a\psi > \\ &= < \varphi, (T^2 + aI)\psi > . \end{aligned}$$

Soit $\varphi \in D(T^2) \setminus \{0\}$. Alors comme $a > 0$

$$< (T^2 + aI)\varphi, \varphi >=< T^2\varphi, \varphi > +a < \varphi, \varphi >= \|\varphi'\|_{L^2(0,1)} + a\|\varphi\|_{L^2(0,1)} > 0.$$

■

On montre maintenant que les opérateurs A et B vérifient les hypothèses (III.23)-(III.29).

- En utilisant la théorie de l'interpolation réelle et complexe (voir Triebel [58], p. 141, 142, 143), on a

$$\begin{aligned}\left[L^2(0,1), D(T^2)\right]_{1/2} &= \left[L^2(0,1), D\left(B^2 - A\right)\right]_{1/2} \\ &= \left(L^2(0,1), D(T^2)\right)_{1/2,2} \\ &= \left(L^2(0,1), D\left(B^2 - A\right)\right)_{1/2,2} \\ &= D(T) = D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right),\end{aligned}$$

et $\left(B^2 - A\right)^{1/2}$ est un opérateur auto-adjoint strictement positif. On en déduit (en vertu du Théorème de Heinz, voir Tanabe [57], p. 45, Corollary appliqué à $0 < \alpha = \dfrac{1}{2} < 1$)

$$D\left(\left[\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right]^{1/2}\right) = D(|T|^{1/2}) = D(|-iB|^{1/2}),$$

(ici $|T| = (T^2)^{1/2}$). Ainsi, grâce à Favini-Triggiani [28], Theorem 1.1, p. 94, on a $-\left(B^2 - A\right)^{1/2} \pm i(-iB)$ génèrent des semi-groupes analytiques sur $L^2(0,1)$, i.e.

$$L = B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}, \ M = -B - \left(B^2 - A\right)^{1/2},$$

génèrent des semi-groupes analytiques sur $L^2(0,1)$, (III.29) est satisfaite.
- Il est clair que (III.24) et (III.25) sont satisfaites. De plus

$$\begin{cases} D(L) = D(M) = D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) = D(T) = D(B), \\ D(LM) = D(ML) = D(B^2 - A) = D(T^2) = D(A). \end{cases}$$

- On a

$$\begin{aligned}\varphi \in D(BA) &\Leftrightarrow \varphi \in D\left(A\right) \text{ et } A\varphi \in D\left(B\right) \\ &\Leftrightarrow \varphi \in D\left(T^2\right) \text{ et } 2\varphi'' - a\varphi \in D\left(T\right) \\ &\Leftrightarrow \varphi \in H^2(0,1) \text{ et } \varphi'' \in H^1(0,1); \varphi(0) = \varphi(1); \varphi'(0) = \varphi'(1); \varphi''(0) = \varphi''(1) \\ &\Leftrightarrow \varphi \in H^3(0,1) \text{ et } \varphi(0) = \varphi(1); \varphi'(0) = \varphi'(1); \varphi''(0) = \varphi''(1) \\ &\Leftrightarrow \varphi \in D(B^3),\end{aligned}$$

ainsi (III.26) est satisfaite.
- On prouve qu'il existe $\left(\lambda I + B^2 - A\right)^{-1}$ pour tout $\lambda \geqslant 0$. On doit pour cela résoudre l'équation spectrale

$$\left(\lambda I + B^2 - A\right)\varphi = \psi \in X,$$

qui est équivalente à

$$\begin{cases} -\varphi''(y) + (a + \lambda)\varphi(y) = \psi(y) \\ \varphi(0) = \varphi(1) \\ \varphi'(0) = \varphi'(1), \end{cases}$$

où $a > 0$, ψ est donné dans $L^2(0,1)$. On a

$$\varphi(y) = \int_0^1 K_1(y,s)\psi(s)ds = \left[\left(\lambda I + B^2 - A\right)^{-1}\psi\right](y),$$

où

$$K_1(y,s) = \begin{cases} \dfrac{\cosh \frac{\sqrt{a+\lambda}}{2}(2s-2y+1)}{2\sqrt{a+\lambda}\sinh \frac{\sqrt{a+\lambda}}{2}} & \text{si } 0 \leq s \leq y \\ \dfrac{\cosh \frac{\sqrt{a+\lambda}}{2}(2y-2s+1)}{2\sqrt{a+\lambda}\sinh \frac{\sqrt{a+\lambda}}{2}} & \text{si } y \leq s \leq 1. \end{cases}$$

On applique ensuite le célèbre Lemme de Schur, voir par exemple Kato [38], p. 144,

$$\begin{aligned} \left\| \left(\lambda I + B^2 - A\right)^{-1} \right\|_{L(X)} &\leqslant \sup_{0 \leqslant y \leqslant 1} \int_0^1 |K_1(y,s)| ds \\ &\leqslant \sup_{0 \leqslant y \leqslant 1} \left(\int_0^y \frac{\cosh \frac{\sqrt{a+\lambda}}{2}(2s-2y+1)}{2\sqrt{a+\lambda}\sinh \frac{\sqrt{a+\lambda}}{2}} ds + \int_y^1 \frac{\cosh \frac{\sqrt{a+\lambda}}{2}(2y-2s+1)}{2\sqrt{a+\lambda}\sinh \frac{\sqrt{a+\lambda}}{2}} ds \right) \\ &\leqslant \sup_{0 \leqslant y \leqslant 1} \frac{\sinh \frac{\sqrt{a+\lambda}}{2} - \sinh \frac{\sqrt{a+\lambda}}{2}(1-2y) - \sinh \frac{\sqrt{a+\lambda}}{2}(2y-1) + \sinh \frac{\sqrt{a+\lambda}}{2}}{2(a+\lambda)\sinh \frac{\sqrt{a+\lambda}}{2}} \\ &\leqslant \frac{1}{a+\lambda} \\ &\leqslant \frac{\max\{1; \frac{1}{a}\}}{1+\lambda}, \end{aligned}$$

on obtient ainsi (III.23).

- On prouve maintenant (III.27). Soit $\psi \in D(B)$, alors on a

$$\begin{aligned} \left[B\left(B^2 - A\right)^{-1} \psi \right](y) &= \frac{d}{dy} \left(\int_0^1 K_1(y,s)\psi(s)ds \right) \\ &= \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{\cosh \frac{\sqrt{a}}{2}(2s-2y+1)}{2\sqrt{a}\sinh \frac{\sqrt{a}}{2}} \psi(s)ds + \frac{d}{dy} \int_y^1 \frac{\cosh \frac{\sqrt{a}}{2}(2y-2s+1)}{2\sqrt{a}\sinh \frac{\sqrt{a}}{2}} \psi(s)ds \\ &= -\int_0^y \frac{\sinh \frac{\sqrt{a}}{2}(2s-2y+1)}{2\sinh \frac{\sqrt{a}}{2}} \psi(s)ds + \int_y^1 \frac{\sinh \frac{\sqrt{a}}{2}(2y-2s+1)}{2\sinh \frac{\sqrt{a}}{2}} \psi(s)ds \\ &= -\frac{\cosh \frac{\sqrt{a}}{2}}{2\sqrt{a}\sinh \frac{\sqrt{a}}{2}} \psi(y) + \frac{\cosh \frac{\sqrt{a}}{2}(1-2y)}{2\sqrt{a}\sinh \frac{\sqrt{a}}{2}} \psi(0) + \int_0^y \frac{\cosh \frac{\sqrt{a}}{2}(2s-2y+1)}{2\sqrt{a}\sinh \frac{\sqrt{a}}{2}} \psi'(s)ds \\ &\quad - \frac{\cosh \frac{\sqrt{a}}{2}(1-2y)}{2\sqrt{a}\sinh \frac{\sqrt{a}}{2}} \psi(1) + \frac{\cosh \frac{\sqrt{a}}{2}}{2\sqrt{a}\sinh \frac{\sqrt{a}}{2}} \psi(y) + \int_y^1 \frac{\cosh \frac{\sqrt{a}}{2}(2y-2s+1)}{2\sqrt{a}\sinh \frac{\sqrt{a}}{2}} \psi'(s)ds, \end{aligned}$$

grâce à deux intégrations par parties ; enfin

$$\begin{aligned} \left[B\left(B^2 - A\right)^{-1} \psi \right](y) &= \int_0^y \frac{\cosh \frac{\sqrt{a}}{2}(2s-2y+1)}{2\sqrt{a}\sinh \frac{\sqrt{a}}{2}} \psi'(s)ds + \int_y^1 \frac{\cosh \frac{\sqrt{a}}{2}(2y-2s+1)}{2\sqrt{a}\sinh \frac{\sqrt{a}}{2}} \psi'(s)ds \\ &= \left[\left(B^2 - A\right)^{-1} B\psi \right](y). \end{aligned}$$

- On montre que A est inversible dans $L(X)$ (hypothèse (III.28)). On doit pour cela résoudre l'équation spectrale

$$A\varphi = \psi \in X,$$

qui est équivalente à

$$\begin{cases} 2\varphi''(y) - a\varphi(y) = \psi(y) \\ \varphi(0) = \varphi(1) \\ \varphi'(0) = \varphi'(1), \end{cases}$$

où $a > 0$, ψ est donné dans $L^2(0,1)$. On a

$$\varphi(y) = -\frac{1}{2}\int_0^1 K_2(y,s)\psi(s)ds = \left[A^{-1}\psi\right](y),$$

où

$$K_2(y,s) = \begin{cases} \dfrac{\cosh \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{2}}(2s-2y+1)}{\sqrt{2a}\sinh \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{2}}} & \text{si } 0 \leq s \leq y \\ \dfrac{\cosh \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{2}}(2y-2s+1)}{\sqrt{2a}\sinh \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{2}}} & \text{si } y \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Toutes les hypothèses sont démontrées. On peut alors appliquer le Théorème III.19 au problème différentiel suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - au(x,y) = f(x,y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in (0,1) \\ u(x,0) = u(x,1),\ x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1),\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dès que $f \in BUC^\theta\left(\mathbb{R}; L^2(0,1)\right)$, $\theta \in]0,1[$.

Remarque III.23 *On réécrit ce problème différentiel sous forme opérationnelle (III.6) en utilisant les opérateurs A et B et leurs domaines. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \in (0,1)$*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - au(x,y) = f(x,y),$$

équivaut à

$$(u''(x))(y) + 2(Bu'(x))(y) + (Au(x))(y) = f(x)(y).$$

Les domaines de A et B sont obtenus grâce aux conditions aux limites. En effet $u(x) \in D(A)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ équivaut à

$$u(x,0) = u(x,1), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,1),\ x \in \mathbb{R}, \tag{III.32}$$

et $u'(x) \in D(B)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ équivaut à

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,1),\ x \in \mathbb{R},$$

qui découle directement de (III.32) puisque pour $x \in \mathbb{R}$ fixé on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,0)-u(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,1)-u(x,1)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,1).$$

Exemple 2 (Un problème quasi-elliptique).

Soit $X = L^p(\Omega)$ avec Ω un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à bord régulier et $1 < p < \infty$. On pose

$$\begin{cases} D(B) = \left\{\varphi \in W^{2,p}(\Omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\} \\ B\varphi = \Delta\varphi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(A) = \left\{\varphi \in W^{4,p}(\Omega) : \varphi = \Delta\varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\} \\ A\varphi = -\delta\Delta^2\varphi,\ \text{avec } \delta > 0. \end{cases}$$

On montre maintenant que les opérateurs A et B vérifient les hypothèses (III.23)-(III.29).

- Il est clair que B est générateur d'un semi-groupe analytique borné et est inversible dans $L(X)$.
- On a

$$\begin{aligned} D(B^2) =& \{\varphi \in D(B) : B\varphi \in D(B)\} \\ =& \left\{\varphi \in W^{2,p}(\Omega) : \Delta\varphi \in W^{2,p}(\Omega) \text{ et } \varphi = 0 = \Delta\varphi \text{ sur } \partial\Omega\right\} \\ =& \left\{\varphi \in W^{4,p}(\Omega) : \varphi = \Delta\varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\} \\ =& D(A), \end{aligned}$$

(III.24) et (III.25) sont alors satisfaites.
- On a

$$\begin{aligned} \varphi \in D(BA) \Leftrightarrow& \varphi \in D\,(A) \text{ et } A\varphi \in D\,(B) \\ \Leftrightarrow& \varphi \in W^{4,p}(\Omega) \text{ et } -\delta\Delta^2\varphi \in W^{2,p}(\Omega); \varphi = \Delta\varphi = \Delta^2\varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \Leftrightarrow& \varphi \in W^{6,p}(\Omega) \text{ et } \varphi = \Delta\varphi = \Delta^2\varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \Leftrightarrow& \varphi \in D(B^3), \end{aligned}$$

ainsi (III.26) est satisfaite.
- De plus $-\delta B^2 = A$ est inversible dans $L(X)$ ((III.28) est vérifiée).
- On a

$$\left(B^2\right)^{1/2} = -B, \qquad B^2 - A = (1+\delta)B^2, \qquad (B^2 - A)^{1/2} = -\sqrt{(1+\delta)}B,$$

l'hypothèse (III.23) est clairement satisfaite.
- Pour tout $\varphi \in D(B)$

$$B(B^2 - A)^{-1}\varphi = (1+\delta)^{-1}B^{-1}\varphi = (B^2 - A)^{-1}B\varphi,$$

(III.27) est alors satisfaite.
- Il est clair que

$$\begin{aligned} B - (B^2 - A)^{1/2} &= \left(1 + \sqrt{(1+\delta)}\right) B, \\ -B - (B^2 - A)^{1/2} &= \left(-1 + \sqrt{(1+\delta)}\right) B, \end{aligned}$$

génèrent des semi-groupes analytiques dans X ((III.29) est donc satisfaite).

On peut alors appliquer le Théorème III.19 au problème quasi-elliptique suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2\Delta_y \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \delta\Delta_y^2 u(x,y) = f(x,y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \Omega \\ u(x,\sigma) = \Delta_\sigma u(x,\sigma) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ \sigma \in \partial\Omega, \end{cases}$$

dès que $f \in BUC^\theta\left(\mathbb{R}; L^p(\Omega)\right)$, $\theta \in]0,1[$.

Remarque III.24 *On réécrit ce problème différentiel sous forme opérationnelle (III.6) en utilisant les opérateurs A et B et leurs domaines. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \in (0,1)$*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2\Delta_y \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \delta\Delta_y^2 u(x,y) = f(x,y),$$

équivaut à

$$(u''(x))(y) + 2(Bu'(x))(y) + (Au(x))(y) = f(x)(y).$$

Les domaines de A et B sont obtenus grâce aux conditions aux limites. En effet $u(x) \in D(A)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ équivaut à

$$u(x,\sigma) = \Delta_\sigma u(x,\sigma) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ \sigma \in \partial\Omega, \tag{III.33}$$

et $u'(x) \in D(B)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ équivaut à

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\sigma) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ \sigma \in \partial\Omega,$$

qui découle directement de (III.33) puisque pour tout $\sigma \in \partial\Omega$ et pour $x \in \mathbb{R}$ fixé on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\sigma) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,\sigma) - u(x,\sigma)}{h} = 0.$$

3 Cadre commutatif sur les espaces L^p

Dans cette section, on étudie les équations différentielles opérationnelles elliptiques et complètes du second ordre posées sur toute la droite. L'existence et l'unicité de la solution classique sont prouvées sous des hypothèses naturelles de commutativité des opérateurs. L'étude se fait dans l'espace $L^p(\mathbb{R}; X)$, $1 < p < \infty$. On reprend la même démarche que dans la section précédente. Les résultats obtenus ici sont essentiels pour débuter le cas non commutatif.

3.1 Introduction et hypothèses

On considère l'équation différentielle opérationnelle elliptique complète du second ordre suivante

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{III.34}$$

où A et B sont deux opérateurs linéaires fermés sur X, $(X, \|.\|)$ étant un espace de Banach complexe, $f \in L^P(\mathbb{R}; X)$, $1 < p < \infty$. Ici on n'exige pas de régularité supplémentaire sur f, contrairement au cas höldérien, mais on suppose que

$$X \text{ est un espace UMD.} \tag{III.35}$$

On cherche une solution classique de (III.34), c'est-à-dire une fonction u telle que

$$u \in W^{2,p}(\mathbb{R}; X) \cap L^p(\mathbb{R}; D(A)), u' \in L^p(\mathbb{R}; D(B)),$$

et satisfaisant (III.34).

Remarque III.25 *On peut également résoudre (III.34) dans le cas où X est un espace de Banach quelconque. Pour cela, il est nécessaire d'avoir un peu plus de régularité sur f, par exemple $f \in W^{\theta,p}(\mathbb{R}; X)$, $\theta \in]0,1[$.*

Pour ne pas supposer de régularité supplémentaire sur f, une alternative possible est de se placer dans le cas où X est un espace de Banach UMD (voir Chapitre I, Section 6), comme dans Favini et al. [23, 24].

On s'intéresse alors à l'équation suivante

$$u''(x) + (L - M)\, u'(x) - LMu(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{III.36}$$

Une solution classique de (III.36) est une fonction u telle que

$$u \in W^{2,p}(\mathbb{R}; X) \cap L^p(\mathbb{R}; D(LM)), u' \in L^p(\mathbb{R}; D(L - M)),$$

et satisfaisant (III.36).

L'objectif est le suivant.

1. Donner des hypothèses naturelles sur L et M pour résoudre (III.36).
2. Retourner au problème (III.34), c'est-à-dire résoudre (III.36) avec L et M satisfaisant

$$L - M \subset 2B \quad \text{et} \quad -LM \subset A. \tag{III.37}$$

Dans ce cas, une solution classique de (III.36) sera a fortiori une solution classique de (III.34).

Comme dans le cas höldérien, on peut construire L et M satisfaisant (III.37). On y reviendra dans la Section 3.3.

Les hypothèses sur L et M sont :

$$D(L) = D(M), \tag{III.38}$$

$$D(LM) = D(ML), \tag{III.39}$$

$$\exists\, \theta_L, \theta_M \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, (-L) \in BIP(\theta_L, X) \text{ et } (-M) \in BIP(\theta_M, X), \tag{III.40}$$

$$L,\, M \text{ sont inversibles dans } L(X). \tag{III.41}$$

L'hypothèse de commutativité est la suivante

$$\forall \lambda \in \rho(L), \forall \mu \in \rho(M),\ (\lambda I - L)^{-1} (\mu I - M)^{-1} = (\mu I - M)^{-1} (\lambda I - L)^{-1}. \tag{III.42}$$

Ces hypothèses nécessitent quelques commentaires.

Remarque III.26

1. *Les hypothèses (III.38), (III.39), (III.41) et (III.42) ont également été utilisées dans le cadre höldérien, voir Section 2.*
2. *L'hypothèse (III.40) implique que L et M vérifient la propriété de sectorialité*

$$\left\{\begin{array}{l}]-\infty, 0[\, \subset \rho(-L),\ ker(L) = \{0\},\ \overline{Im(L)} = X; \\ ]-\infty, 0[\, \subset \rho(-M),\ ker(M) = \{0\},\ \overline{Im(M)} = X; \\ \exists C \geqslant 1,\ \forall \lambda > 0,\ \left\|(L - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{\lambda},\ \left\|(M - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{\lambda}. \end{array}\right.$$

   D'après Haase [37], Proposition 1.1, p. 19, X étant un espace UMD, il est réflexif, ainsi $D(L)$ et $D(M)$ sont denses dans X.

3. *De plus L et M génèrent des semi-groupes analytiques uniformément bornés sur X, $\left(e^{\xi L}\right)_{\xi \geqslant 0}$, $\left(e^{\xi M}\right)_{\xi \geqslant 0}$; voir Prüss-Sohr [54], Theorem 2, p. 437. En vertu de (III.41) on peut appliquer la Proposition I.64, donc il existe des constantes positives C, δ telles que pour tout $\xi > 0$ et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*

$$\left\{\begin{array}{l} \left\|e^{\xi L}\right\|_{L(X)} \leqslant Ce^{-\delta\xi} \leqslant C, \\ \left\|e^{\xi M}\right\|_{L(X)} \leqslant Ce^{-\delta\xi} \leqslant C, \\ \left\|L^k e^{\xi L}\right\|_{L(X)} \leqslant \left(\dfrac{kC}{\xi}\right)^k e^{-\delta\xi}, \\ \left\|M^k e^{\xi M}\right\|_{L(X)} \leqslant \left(\dfrac{kC}{\xi}\right)^k e^{-\delta\xi}. \end{array}\right. \tag{III.43}$$

4. *En utilisant Prüss-Sohr [54], Theorems 4 et 5, p. 441 et p. 443, on a*

$$-(L + M) \in BIP(\theta, X) \text{ où } \theta = max(\theta_L, \theta_M).$$

   De plus, grâce à (III.38)-(III.39), on a LM est fermé et par Prüss-Sohr [54], Corollary 3, p. 444, on a

$$LM,\ ML \in BIP(\theta_L + \theta_M, X).$$

5. *Il s'ensuit que $L+M$ génère un semi-groupe analytique uniformément borné sur X, $\left(e^{\xi(L+M)}\right)_{\xi\geqslant 0}$. De plus $L+M$ est inversible dans $L(X)$.*
6. *Sous les hypothèses (III.35), (III.38)-(III.42), le Lemme III.13 est vérifié.*

Dans la Section 3.2, on montrera l'existence et l'unicité de la solution classique. On utilise, pour cela, la représentation de la solution trouvée dans le cadre höldérien (voir (III.19)). La Section 3.3 est consacrée au retour à l'équation initiale (III.34). Dans la Section 3.4, on donnera un exemple pour lequel cette théorie s'applique.

3.2 Principaux résultats

Comme dans le cadre höldérien, on pose pour une fonction g donnée de $\mathbb{R}$ dans X et pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$G(g)(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} g(s)ds, \qquad H(g)(x) = \int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L} g(s)ds.$$

On va s'appuyer sur les techniques utilisées par Dore-Venni [13, 15] pour obtenir les régularités de ces fonctions.

Proposition III.27 *On suppose (III.35), (III.40)-(III.41). Soit $g \in L^P(\mathbb{R};X)$, $1<p<\infty$. Alors*

$$\begin{cases} G(g) \in W^{1,p}(\mathbb{R};X) \cap L^P(\mathbb{R};D(M)), \\ H(g) \in W^{1,p}(\mathbb{R};X) \cap L^P(\mathbb{R};D(L)), \end{cases}$$

et il existe $K>0$ tel que

$$\begin{cases} \|MG(g)\|_{L^P(\mathbb{R};X)} \leqslant K \|g\|_{L^P(\mathbb{R};X)}, \\ \|LH(g)\|_{L^P(\mathbb{R};X)} \leqslant K \|g\|_{L^P(\mathbb{R};X)}. \end{cases}$$

De plus

$$\begin{cases} G(g)' = MG(g) + g, \\ H(g)' = -LH(g) - g. \end{cases}$$

Preuve. On démontre seulement les résultats pour $G(g)$. Pour $H(g)$, on peut se ramener à $G(g(-\cdot))$ par un changement de variables.

On vérifie que $G(g) \in L^P(\mathbb{R};X)$. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|G(g)(x)\|^p dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} g(s)ds\right\|^p dx.$$

On effectue le changement de variables suivant

$$\sigma = x - s, \qquad d\sigma = -ds,$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(g)(x)\|^p dx = & \int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\int_{0}^{+\infty} e^{\sigma M} g(x-\sigma)d\sigma\right\|^p dx \\ \leqslant & C^p \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{0}^{+\infty} e^{-\delta\sigma} \|g(x-\sigma)\| d\sigma\right)^p dx \\ \leqslant & C^p \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{0}^{+\infty} e^{-\delta\sigma/2} e^{-\delta\sigma/2} \|g(x-\sigma)\| d\sigma\right)^p dx. \end{aligned}$$

Soient Φ, Ψ définies pour presque tout $\sigma \in [0,+\infty[$ par

$$\Phi(\sigma) = e^{-\delta\sigma/2} \|g(x-\sigma)\|, \qquad \Psi(\sigma) = e^{-\delta\sigma/2}.$$

Alors $\Phi \in L^p(0,+\infty)$ car en effectuant le changement de variables suivant

$$u = x - \sigma, \qquad du = -d\sigma,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-p\delta\sigma/2} \|g(x-\sigma)\|^p \, d\sigma &\leqslant \int_0^{+\infty} \|g(x-\sigma)\|^p \, d\sigma \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \|g(x-\sigma)\|^p \, d\sigma \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \|g(u)\|^p \, du \\ &\leqslant \|g\|^p_{L^p(\mathbb{R};X)} < \infty.\end{aligned}$$

Soit $1 < q < \infty$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors $\Psi \in L^q(0,+\infty)$ car

$$\int_0^{+\infty} e^{-q\delta\sigma/2} d\sigma = \left[-\frac{2}{q\delta} e^{-q\delta\sigma/2}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{q\delta} < \infty.$$

Ainsi $(\Phi\Psi) \in L^1(0,+\infty)$ et d'après l'inégalité de Hölder on a

$$\|\Phi\Psi\|_{L^1(0,+\infty)} \leqslant \|\Phi\|_{L^p(0,+\infty)} \|\Psi\|_{L^q(0,+\infty)},$$

d'où

$$\|\Phi\Psi\|^p_{L^1(0,+\infty)} \leqslant \|\Phi\|^p_{L^p(0,+\infty)} \left(\frac{2}{q\delta}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Par conséquent, grâce au Théorème de Fubini et au changement de variables suivant

$$u = x - \sigma, \qquad du = dx,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \|G(g)(x)\|^p \, dx \leqslant & C^p \left(\frac{2}{q\delta}\right)^{\frac{p}{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-p\delta\sigma/2} \|g(x-\sigma)\|^p \, d\sigma \, dx \\ \leqslant & C^p \left(\frac{2}{q\delta}\right)^{\frac{p}{q}} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\delta\sigma/2} \|g(x-\sigma)\|^p \, dx \, d\sigma \\ \leqslant & C^p \left(\frac{2}{q\delta}\right)^{\frac{p}{q}} \int_0^{+\infty} e^{-p\delta\sigma/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \|g(u)\|^p \, du \, d\sigma \\ \leqslant & C^p \left(\frac{2}{q\delta}\right)^{\frac{p}{q}} \|g\|^p_{L^p(\mathbb{R};X)} \int_0^{+\infty} e^{-p\delta\sigma/2} d\sigma \\ \leqslant & C^p \left(\frac{2}{q\delta}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{2}{p\delta} \|g\|^p_{L^p(\mathbb{R};X)} < \infty.\end{aligned}$$

Ainsi $G(g) \in L^P(\mathbb{R};X)$.

Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ et pour presque tout $s < x$, $e^{(x-s)M} g(s) \in D(M)$. On vérifie que $MG(g) \in L^P(\mathbb{R};X)$. On procède comme dans Dore [13], p. 28-29.

On pose pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{aligned} G_1(g)(x) &= M \int_{-\infty}^{x-1} e^{(x-s)M} g(s) ds, \\ G_2(g)(x) &= M \int_{x-1}^{x} e^{(x-s)M} g(s) ds. \end{aligned}\right.$$

En utilisant (III.43), on a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \|G_1(g)(x)\|^p\, dx &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \int_{-\infty}^{x-1} M e^{(x-s)M} g(s) ds \right\|^p dx \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{x-1} \frac{C}{x-s} e^{-\delta(x-s)} \|g(s)\|\, ds \right)^p dx \\ &\leqslant C^p \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{x-1} e^{-\delta(x-s)} \|g(s)\|\, ds \right)^p dx \\ &\leqslant C^p \int_{-\infty}^{+\infty} \mid (\psi * \phi)(x) \mid^p\, dx,\end{aligned}$$

où

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 1 \\ e^{-\delta x} \text{ si } x > 1, \end{cases} \qquad \phi(x) = \|g(x)\|\,, x \in \mathbb{R}.$$

Or $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mid \psi(x) \mid dx = \int_1^{+\infty} e^{-\delta x} dx = \left[-\frac{1}{\delta} e^{-\delta x} \right]_1^{+\infty} = \frac{e^{-\delta}}{\delta} < \infty,$$

et $\phi \in L^p(\mathbb{R})$ car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mid \phi(x) \mid^p\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \|g(x)\|^p\, dx = \|g\|^p_{L^p(\mathbb{R};X)} < \infty.$$

Ainsi $\psi * \phi \in L^p(\mathbb{R})$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|G_1(g)(x)\|^p\, dx \leqslant C^p\, \|\psi * \phi\|^p_{L^p(\mathbb{R})} < \infty.$$

Ainsi, $G_1(g) \in L^p(\mathbb{R}; X)$.

Ensuite on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|G_2(g)(x)\|^p\, dx = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{j-1}^{j} \left\| M \int_{x-1}^{x} e^{(x-s)M} g(s) ds \right\|^p dx.$$

Pour $j \in \mathbb{N}$, on pose alors

$$g_j = \mathbb{I}_{[j-1,j[}\, g,$$

où $\mathbb{I}_{[j-1,j[}$ est la fonction caractéristique de $[j-1, j[$ et

$$\begin{cases} I_j = \displaystyle\int_{j-1}^{j} \left\| M \int_{j-1}^{x} e^{(x-s)M} g_j(s) ds \right\|^p dx, \\ J_j = \displaystyle\int_{j-1}^{j} \left\| M \int_{x-1}^{j-1} e^{(x-s)M} g_{j-1}(s) ds \right\|^p dx. \end{cases}$$

On effectue les changements de variables suivants pour I_j

$$\begin{aligned} \tau &= x + 1 - j, \qquad d\tau = dx, \\ \sigma &= s - j + 1, \qquad d\sigma = ds, \end{aligned}$$

ainsi on obtient

$$\begin{aligned} I_j &= \int_0^1 \left\| M \int_{j-1}^{\tau-1+j} e^{(\tau-1+j-s)M} g_j(s) ds \right\|^p d\tau \\ &= \int_0^1 \left\| M \int_0^{\tau} e^{(\tau-\sigma)M} g_j(\sigma + j - 1) d\sigma \right\|^p d\tau \\ &= \|\Lambda(g_j(\cdot + j - 1))\|^p_{L^p(0,1;X)}\,, \end{aligned}$$

où Λ est la fonction définie pour tout $g_1 \in L^p(0,1;X)$ et pour presque tout $x \in (0,1)$ par

$$\Lambda(g_1)(x) = M \int_0^x e^{(x-s)M} g_1(s) ds.$$

D'après Dore-Venni [15], $\Lambda(g_1) \in L^p(0,1;X)$ et il existe $C_1 > 0$ tel que

$$\|\Lambda(g_1)\|_{L^p(0,1;X)} \leqslant C_1 \|g_1\|_{L^p(0,1;X)} .$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} I_j \leqslant & C_1^p \|g_j(\cdot + j - 1)\|^p_{L^p(0,1;X)} \\ \leqslant & C_1^p \|g_j\|^p_{L^p(j-1,j;X)} . \end{aligned}$$

Puis, on effectue les changements de variables suivants pour J_j

$$\begin{aligned} \tau &= x + 1 - j, \qquad & d\tau &= dx, \\ \sigma &= s - j + 1, \qquad & d\sigma &= ds, \end{aligned}$$

ainsi on obtient

$$\begin{aligned} J_j &= \int_0^1 \left\| M \int_{\tau-2+j}^{j-1} e^{(\tau-1+j-s)M} g_{j-1}(s) ds \right\|^p d\tau \\ &= \int_0^1 \left\| M \int_{\tau-1}^{0} e^{(\tau-\sigma)M} g_{j-1}(\sigma + j - 1) d\sigma \right\|^p d\tau \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_{-1}^{0} \left\| M e^{(\tau-\sigma)M} g_{j-1}(\sigma + j - 1) \right\| d\sigma \right)^p d\tau \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_{-1}^{0} \frac{C}{\tau - \sigma} \|g_{j-1}(\sigma + j - 1)\| d\sigma \right)^p d\tau \\ &\leqslant C^p \int_0^1 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau - \sigma} \mathbb{I}_{[-1,0]}(\sigma) \|g_{j-1}(\sigma + j - 1)\| d\sigma \right)^p d\tau \\ &\leqslant C^p \int_{-\infty}^{+\infty} \left(H \left(\mathbb{I}_{[-1,0]} \|g_{j-1}(\cdot + j - 1)\|_{L^p(-1,0;X)} \right) \right)^p d\tau, \end{aligned}$$

où $H(\Psi)$ désigne la transformée de Hilbert d'une fonction $\Psi \in L^p(\mathbb{R})$. Comme X est un espace UMD, on en déduit

$$H \left(\mathbb{I}_{[-1,0]} \|g_{j-1}(\cdot + j - 1)\|_{L^p(-1,0;X)} \right) \in L^p(\mathbb{R}),$$

et il existe $C_2 > 0$ tel que

$$\begin{aligned} J_j \leqslant & C_2 C^p \|g_{j-1}(\cdot + j - 1)\|^p_{L^p(-1,0;X)} \\ \leqslant & C_2 C^p \|g_{j-1}\|^p_{L^p(j-2,j-1;X)} . \end{aligned}$$

Enfin on remarque que

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \|g_j\|^p_{L^p(j-1,j;X)} = \|g\|^p_{L^p(\mathbb{R};X)} , \\ &\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \|g_{j-1}\|^p_{L^p(j-2,j-1;X)} = \|g\|^p_{L^p(\mathbb{R};X)} . \end{aligned} \right.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \|G_2(g)(x)\|^p \, dx =& \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{j-1}^{j} \|G_2(g)(x)\|^p \, dx \\ \leqslant& 2^{p-1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (I_j + J_j) \\ \leqslant& 2^{p-1} C_1^p \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \|g_j\|^p_{L^p(j-1,j;X)} + 2^{p-1} C_2 C^p \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \|g_{j-1}\|^p_{L^p(j-2,j-1;X)} \\ \leqslant& 2^p \max\left(C_1^p; C_2 C^p\right) \|g\|^p_{L^p(\mathbb{R};X)} < \infty.\end{aligned}$$

Ainsi, $G_2(g) \in L^p(\mathbb{R};X)$, par somme $MG(g) \in L^p(\mathbb{R};X)$ et il existe $K > 0$ tel que

$$\|MG(g)\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \leqslant K \|g\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \, .$$

On montre que $G(g) \in W^{1,p}(\mathbb{R}, X)$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R};X)$. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) G(g)(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} g(s) ds \; dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x} \varphi'(x) e^{(x-s)M} g(s) ds \; dx.\end{aligned}$$

On effectue le changement de variables suivant

$$\sigma = x - s, \qquad d\sigma = -ds,$$

et on obtient en appliquant ensuite le Théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) G(g)(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x) e^{\sigma M} g(x-\sigma) d\sigma \; dx \\ &= \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) e^{\sigma M} g(x-\sigma) dx \; d\sigma.\end{aligned}$$

On effectue un nouveau changement de variables

$$\tau = x - \sigma, \qquad d\tau = dx,$$

et on applique à nouveau le Théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) G(g)(x) dx &= \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(\tau+\sigma) e^{\sigma M} g(\tau) d\tau \; d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} \varphi'(\tau+\sigma) e^{\sigma M} g(\tau) d\sigma \; d\tau.\end{aligned}$$

Or φ est à support compact donc, à τ fixé dans $\mathbb{R}$, il existe $\alpha_\tau \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$[\alpha_\tau, +\infty[\cap \, supp(\varphi(\tau + .)) = \varnothing,$$

d'où

$$\int_{0}^{+\infty} \varphi'(\tau+\sigma) e^{\sigma M} g(\tau) d\sigma = \int_{0}^{\alpha_\tau} \varphi'(\tau+\sigma) e^{\sigma M} g(\tau) d\sigma,$$

et par intégrations par parties, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \varphi'(\tau+\sigma)e^{\sigma M}g(\tau)d\sigma &= -\int_0^{\alpha_\tau} \varphi(\tau+\sigma)Me^{\sigma M}g(\tau)d\sigma + \Big[\varphi(\tau+\sigma)e^{\sigma M}g(\tau)\Big]_0^{\alpha_\tau},\\ &= -\int_0^{+\infty} \varphi(\tau+\sigma)Me^{\sigma M}g(\tau)d\sigma - \varphi(\tau)g(\tau),\end{aligned}$$

ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)G(g)(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \varphi(\tau+\sigma)Me^{\sigma M}g(\tau)d\sigma\ d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau)g(\tau)d\tau,$$

et en effectuant les changements de variables suivants dans la première intégrale

$$\begin{aligned} x &= \tau+\sigma, & dx &= d\tau,\\ s &= x-\sigma, & ds &= -d\sigma,\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)G(g)(x)dx &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\left(M\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M}g(s)ds\right)dx - \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)g(\tau)d\tau\\ &= -\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\left(MG(g)(x)+g(x)\right)dx.\end{aligned}$$

On obtient donc pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$G(g)'(x) = MG(g)(x) + g(x).$$

Ainsi $G(g)' = MG(g) + g \in L^p(\mathbb{R};X)$ et $G(g) \in W^{1,p}(\mathbb{R};X)$. ■

Remarque III.28

1. *La proposition précédente permet d'établir plus efficacement la régularité de la solution classique.*
2. *On note que cette proposition ne nécessite pas l'hypothèse de commutativité des résolvantes (III.42) et pourra donc être utilisée dans le cas non commutatif au chapitre suivant.*

On énonce le résultat fondamental suivant.

Théorème III.29 *On suppose (III.35) et (III.38)-(III.42). Soit $f \in L^p(\mathbb{R};X)$, $1 < p < \infty$. Alors, l'équation (III.36) admet une unique solution classique u définie par (III.19).*

Preuve. Dans cette démonstration on utilise les résultats de la Proposition III.27. Tout d'abord, on note que

$$u = (L+M)^{-1}G(f) + (L+M)^{-1}H(f).$$

Ainsi $u \in W^{1,p}(\mathbb{R};X) \cap L^P(\mathbb{R};D(M))$ et en utilisant la commutativité de L et M avec $(L+M)^{-1}$ sur $D(L) = D(M)$, Lemme III.13, points 2. et 3., on a

$$Mu = (L+M)^{-1}MG(f) + (L+M)^{-1}MH(f),$$

donc pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $Mu(x) \in D(L+M) = D(L)$ et

$$LMu = L(L+M)^{-1}MG(f) + M(L+M)^{-1}LH(f), \tag{III.44}$$

or $L\,(L+M)^{-1}$, $M\,(L+M)^{-1} \in L(X)$ donc on a $u \in L^p\,(\mathbb{R}; D(LM))$. De plus u est dérivable au sens des distributions sur $\mathbb{R}$ à valeurs vectorielles et

$$\begin{aligned} u' &= (L+M)^{-1}\,MG(f) + (L+M)^{-1}f - (L+M)^{-1}\,LH(f) - (L+M)^{-1}f \\ &= (L+M)^{-1}\,MG(f) - (L+M)^{-1}\,LH(f). \end{aligned}$$

En utilisant la commutativité de L et M avec $(L+M)^{-1}$ sur $D(L) = D(M)$, on a

$$u' = M\,(L+M)^{-1}\,G(f) - L\,(L+M)^{-1}\,H(f).$$

Ainsi $u' \in W^{1,p}\,(\mathbb{R}; X) \cap L^P\,(\mathbb{R}; D(L-M))$ car $(L-M)\,(L+M)^{-1} \in L(X)$ d'après le Lemme III.13, point 4., et

$$(L-M)u' = (L-M)\,(L+M)^{-1}\,MG(f) - (L-M)\,(L+M)^{-1}\,LH(f). \tag{III.45}$$

De plus u' est dérivable au sens des distributions sur $\mathbb{R}$ à valeurs vectorielles et

$$u'' = M\,(L+M)^{-1}\,MG(f) + M(L+M)^{-1}f + L\,(L+M)^{-1}\,LH(f) + L(L+M)^{-1}f,$$

i.e.

$$u'' = f + M\,(L+M)^{-1}\,MG(f) + L\,(L+M)^{-1}\,LH(f). \tag{III.46}$$

Ainsi $u'' \in L^p\,(\mathbb{R}; X)$.

En utilisant (III.46), (III.45) et (III.44), on a

$$\begin{aligned} & u'' + (L-M)\,u' - LMu \\ =& f + M\,(L+M)^{-1}\,MG(f) + L\,(L+M)^{-1}\,LH(f) + (L-M)\,(L+M)^{-1}\,MG(f) \\ & - (L-M)\,(L+M)^{-1}\,LH(f) - L\,(L+M)^{-1}\,MG(f) - M\,(L+M)^{-1}\,LH(f) \\ =& f. \end{aligned}$$

Donc u satisfait (III.36).

u est donc une solution classique de (III.36). L'unicité de la solution classique se montre comme au Théorème III.16. ∎

3.3 Retour à l'équation initiale

Dans cette section, on illustre cette théorie opérationnelle précédente en construisant une paire d'opérateurs (L, M) satisfaisant (III.38)-(III.42) (sous l'hypothèse (III.35) d'espace UMD). L'objectif est ensuite de pouvoir résoudre (III.34).

On suppose que les opérateurs A et B vérifient

$$\begin{cases} B^2 - A \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X,\ \mathbb{R}^- \subset \rho(B^2 - A), \\ \exists C > 0,\ \forall \lambda \leqslant 0,\ \left\| \left(B^2 - A - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{1+|\lambda|}, \end{cases} \tag{III.47}$$

$$D(A) \subset D(B^2), \tag{III.48}$$

$$D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \subset D(B), \tag{III.49}$$

$$D(BA) \subset D(B^3), \tag{III.50}$$

$$\forall y \in D(B), B(B^2 - A)^{-1}y = (B^2 - A)^{-1}By, \tag{III.51}$$

$$A \text{ est inversible dans } L(X), \tag{III.52}$$

$$\exists\, \theta_L, \theta_M \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, (-L) \in BIP(\theta_L, X) \text{ et } (-M) \in BIP(\theta_M, X), \tag{III.53}$$

où

$$L := B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} \text{ et } M := -B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}.$$

La démarche est la même que dans le cadre höldérien. On constate notamment que les Lemmes III.17 et III.18 sont satisfaits. Ainsi, (III.47)-(III.53) impliquent (III.38)-(III.42). On a alors le résultat essentiel suivant.

Théorème III.30 *On suppose (III.35) et (III.47)-(III.53). Soit $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$, $1 < p < \infty$. Alors, l'équation (III.34) admet une unique solution classique u définie par (III.30).*

3.4 Application

On va considérer l' Exemple 2 du cadre höldérien, voir Section 2.5. On rappelle que pour cet exemple, on a déjà prouvé les hypothèses (III.47)-(III.52). Il reste à prouver (III.35) et (III.53).

Soit $X = L^p(\Omega)$ avec Ω un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à bord régulier et $1 < p < \infty$. Alors X est un espace UMD. On pose

$$\begin{cases} D(B) = \left\{\varphi \in W^{2,p}(\Omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\} \\ B\varphi = \Delta\varphi, \end{cases}$$
$$\begin{cases} D(A) = \left\{\varphi \in W^{4,p}(\Omega) : \varphi = \Delta\varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\} \\ A\varphi = -\delta\Delta^2\varphi, \text{ avec } \delta > 0. \end{cases}$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} L &= B - (B^2 - A)^{1/2} = \left(1 + \sqrt{(1+\delta)}\right) B, \\ M &= -B - (B^2 - A)^{1/2} = \left(-1 + \sqrt{(1+\delta)}\right) B, \end{aligned}$$

satisfont (III.53) d'après Seeley [55].

On peut alors appliquer le Théorème III.30 au problème quasi-elliptique suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2\Delta_y \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \delta\Delta_y^2 u(x,y) = f(x,y), \; x \in \mathbb{R}, \; y \in \Omega \\ u(x,\sigma) = \Delta_\sigma u(x,\sigma) = 0, \; x \in \mathbb{R}, \; \sigma \in \partial\Omega, \end{cases}$$

dès que $f \in L^q(\mathbb{R}; L^p(\Omega))$, $1 < p, q < \infty$, en particulier dès que $f \in L^p(\mathbb{R} \times \Omega)$.

Chapitre IV

Cadre non commutatif sur la droite réelle

Dans ce chapitre, on étudie les équations différentielles opérationnelles elliptiques et complètes du second ordre posées sur toute la droite. L'existence et l'unicité de la solution classique sont prouvées sous des hypothèses naturelles de non commutativité des coefficients opérateurs. L'étude se fait dans l'espace $BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)$, $\theta \in]0,1[$, puis dans l'espace $L^p(\mathbb{R};X)$, $1<p<\infty$. On montre aussi des propriétés de régularité maximale de la solution dans le cadre höldérien. Les résultats obtenus ici sont essentiels pour attaquer ensuite le cas non commutatif sur $[0,1]$.

On considère l'équation différentielle opérationnelle complète du second ordre et de type elliptique suivante

$$u''(x)+2Bu'(x)+Au(x)-\omega u(x)=f(x),\ x\in\mathbb{R}, \tag{IV.1}$$

où A et B sont deux opérateurs linéaires fermés sur X, $(X,\|.\|)$ étant un espace de Banach complexe, ω est un réel positif assez grand et f est une fonction définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans X. L'ellipticité de l'équation sera précisée plus loin, voir (IV.35).

On étudiera, comme dans le cas commutatif, l'équation suivante

$$u''(x)+(L_\omega-M_\omega)\,u'(x)+\frac{1}{4}\left((L_\omega-M_\omega)^2-(L_\omega+M_\omega)^2\right)u(x)=f(x),\ x\in\mathbb{R}, \tag{IV.2}$$

où L_ω et M_ω sont deux opérateurs linéaires fermés sur X dépendant du paramètre ω.

L'objectif est le suivant.

1. Donner des hypothèses naturelles de non commutativité sur L_ω et M_ω qui permettent de résoudre (IV.2) pour ω assez grand.
2. Retourner au problème (IV.1), c'est-à-dire résoudre (IV.2) avec L_ω et M_ω satisfaisant

$$L_\omega-M_\omega\subset 2B \quad \text{et} \quad \frac{1}{4}\left((L_\omega-M_\omega)^2-(L_\omega+M_\omega)^2\right)\subset A-\omega I.$$

Dans ce cas, une solution classique de (IV.2) sera a fortiori une solution classique de (IV.1). On indiquera ultérieurement comment construire L_ω et M_ω.

L'étude est faite dans deux cadres différents :

- cadre höldérien : on suppose $f\in BUC^{\theta}(\mathbb{R};X)$, $\theta\in]0,1[$;
- cadre L^p : on suppose $f\in L^p(\mathbb{R};X)$, $1<p<\infty$, avec X un espace UMD.

Le chapitre est alors organisé ainsi.

Les Sections 1 et 2 contiennent l'étude des équations (IV.1) et (IV.2) respectivement dans le cadre höldérien et dans le cadre L^p. Enfin, dans la Section 3, on compare ce travail avec une approche différente, celle des multiplicateurs de Fourier, et avec d'autres travaux du cadre non commutatif.

1 Cadre höldérien

1.1 Introduction et hypothèses

On suppose ici que $f \in BUC^{\theta}(\mathbb{R}; X)$, $\theta \in]0,1[$.

Les hypothèses sur les opérateurs L_ω et M_ω sont les suivantes. Il existe un réel positif fixé ω_0 tel que

$$\left\{\begin{array}{l} \exists \delta > 0,\, \exists C > 0 : \forall \omega \geqslant \omega_0,\, S_\delta \subset \rho(L_\omega),\, S_\delta \subset \rho(M_\omega), \\ \left\|(L_\omega - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{|z|},\, \left\|(M_\omega - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{|z|}, z \in S_\delta, \end{array}\right. \tag{IV.3}$$

où $S_\delta := \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \delta\right\}$. Pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, on suppose également

$$D(L_\omega) = D(M_\omega), \tag{IV.4}$$

$$D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right) \subset D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right), \tag{IV.5}$$

$$L_\omega,\, M_\omega \text{ sont inversibles dans } L(X), \tag{IV.6}$$

$$L_\omega + M_\omega \text{ est inversible dans } L(X). \tag{IV.7}$$

L'hypothèse de non commutativité est la suivante

$$\forall \omega \geqslant \omega_0,\, \|C_{L_\omega, M_\omega}\|_{L(X)} \leqslant \chi(\omega), \tag{IV.8}$$

où le commutateur est

$$C_{L_\omega, M_\omega} := (L_\omega + M_\omega)\left[(L_\omega - M_\omega); (L_\omega + M_\omega)^{-1}\right](L_\omega + M_\omega)^{-1},$$

voir (14) dans l'introduction pour la notion de commutateur et Lemme IV.5 pour justifier que $C_{L_\omega, M_\omega} \in L(X)$; et

$$\chi : [\omega_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+ \text{ avec } \lim_{\omega \to +\infty} \chi(\omega) = 0.$$

On verra que, dans de nombreux cas concrets, $\chi(\omega) = \dfrac{C}{\omega^\alpha}$, où C, $\alpha > 0$.

D'après l'hypothèse (IV.5), $(L_\omega + M_\omega)^2$ est principal sur $(L_\omega - M_\omega)^2$. On cherche alors une solution classique de (IV.2), c'est-à-dire une fonction u telle que

$$\left\{\begin{array}{l} u \in BUC^2(\mathbb{R}; X) \cap BUC\left(\mathbb{R}; D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)\right) \\ u' \in BUC(\mathbb{R}; D(L_\omega - M_\omega)), \end{array}\right.$$

et satisfaisant (IV.2). On veut montrer également la propriété de régularité maximale de la solution classique u, c'est-à-dire

$$u'',\, (L_\omega - M_\omega)\, u',\, (L_\omega + M_\omega)^2 u \in BUC^{\theta}(\mathbb{R}; X). \tag{IV.9}$$

Bien évidemment, la solution classique u vérifiera alors

$$u \in BUC\left(\mathbb{R}; D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right)\right),$$

avec la régularité maximale

$$(L_\omega - M_\omega)^2 u \in BUC^{\theta}(\mathbb{R}; X),$$

puisque
$$(L_\omega - M_\omega)^2 u = -4u'' - 4(L_\omega - M_\omega)u' + (L_\omega + M_\omega)^2 u + 4f.$$

Les hypothèses données précédemment nécessitent quelques commentaires.

Remarque IV.1 *On compare ces hypothèses avec celles du cadre commutatif pour les espaces de Hölder (voir Chapitre III, Section 2).*

1. *Les hypothèses (IV.4), (IV.6), (IV.7) ont également été utilisées dans le cadre commutatif.*
2. *Sous l'hypothèse (IV.3), L_ω et M_ω génèrent des semi-groupes analytiques généralisés sur X, $\left(e^{\xi L_\omega}\right)_{\xi>0}$, $\left(e^{\xi M_\omega}\right)_{\xi>0}$. Ainsi (IV.3) et (III.11) sont équivalentes au paramètre ω près.*
3. *L'hypothèse (III.13) d'égalité des domaines de $L_\omega M_\omega$ et $M_\omega L_\omega$ implique l'inclusion des domaines (IV.5).*
4. *On suppose ici l'hypothèse de non commutativité (IV.8) qui est beaucoup plus générale que l'hypothèse forte de commutativité des résolvantes (III.16).*

Remarque IV.2 *Concernant (IV.4), on note que si P et Q sont deux opérateurs linéaires fermés sur X, alors l'hypothèse $D(P) = D(Q)$ n'implique pas $D(P^2) = D(Q^2)$. En effet, on donne l'exemple suivant sur $E = L^p(0,1)$*

$$\begin{cases} D(P) = \left\{\varphi \in W^{1,p}(0,1) : \varphi(0) = 0\right\} \\ (P\varphi)(y) = \varphi'(y),\ \varphi \in D(P),\ p.p.\ y \in (0,1)\,, \end{cases}$$
$$\begin{cases} D(Q) = \left\{\varphi \in W^{1,p}(0,1) : \varphi(0) = 0\right\} \\ (Q\varphi)(y) = q(y)\varphi'(y),\ \varphi \in D(Q),\ p.p.\ y \in (0,1)\,, \end{cases}$$

avec $q \in C^1([0,1])$ vérifiant $q(0) = 0$. Alors

$$\begin{cases} D(P^2) = \left\{\varphi \in W^{2,p}(0,1) : \varphi(0) = \varphi'(0) = 0\right\} \\ (P^2\varphi)(y) = \varphi''(y),\ \varphi \in D(P^2),\ p.p.\ y \in (0,1)\,, \end{cases}$$
$$\begin{cases} D(Q^2) = \left\{\varphi \in W^{2,p}(0,1) : \varphi(0) = 0\right\} \\ (Q^2\varphi)(y) = q(y)\left(q'(y)\varphi'(y) + q(y)\varphi''(y)\right),\ \varphi \in D(Q^2),\ p.p.\ y \in (0,1)\,. \end{cases}$$

Dans le cas commutatif du Chapitre III, Section 2, on a supposé

$$D(L_\omega) = D(M_\omega),$$

$$D(M_\omega L_\omega) = D(L_\omega M_\omega),$$

ce qui entraine
$$D\left(M_\omega^2\right) = D\left(L_\omega^2\right).$$

Ici cette hypothèse n'est pas faite et on a donc en général

$$D\left(M_\omega^2\right) \neq D\left(L_\omega^2\right).$$

Remarque IV.3 *Concernant (IV.7), il y a de bons résultats étendant ceux de la Remarque III.8 dans une situation non commutative. On suppose (IV.3). Si L_ω et M_ω vérifient la célèbre hypothèse de non commutativité de Da Prato-Grisvard ; voir [12], (6.4) et (6.5), p. 346, alors il existe une extension fermée $\widetilde{L_\omega + M_\omega}$ qui génère un semi-groupe analytique au sens des graphes ; voir Fuhrman [31], Theorem 5.2., p. 27.*

L'étude est organisée comme suit.

La Section 1.2 contient quelques lemmes techniques. Dans la Section 1.3, on utilise la représentation de la solution du cas commutatif et quelques considérations heuristiques pour obtenir une équation intégrale, vérifiée par l'éventuelle solution classique $u := (L_\omega + M_\omega)^{-2}v$. Cette équation intégrale est écrite sous la forme

$$v + R_\omega(v) = F_\omega(f),$$

où R_ω, F_ω dépendent de L_ω et M_ω, R_ω dépendant aussi du commutateur C_{L_ω,M_ω}. La Section 1.4 contient l'étude de $F_\omega(f)$ et R_ω, ce qui permet d'écrire pour ω assez grand

$$u = (L_\omega + M_\omega)^{-2}\left\{(I + R_\omega)^{-1}(F_\omega(f))\right\}.$$

On analyse ensuite cette représentation afin d'obtenir le théorème fondamental d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution classique. La Section 1.5 est dédiée à quelques exemples auxquels cette théorie s'applique. Enfin, dans la Section 1.6, on étudie le retour à l'équation initiale (IV.1).

Dans le but de simplifier, quand la dépendance de ω n'est pas utile, on omet ω dans les notations, par exemple, on note L_ω, M_ω... par L, M...

1.2 Lemmes techniques

Le premier lemme précise les domaines de quelques opérateurs.

Lemme IV.4 *On suppose (IV.4)-(IV.5) et (IV.7).*

1. $D(LM) = D\left(M^2\right)$ *et* $D(ML) = D\left(L^2\right)$.
2. $D\left((L+M)^2\right) = D\left(L^2\right) \cap D\left(M^2\right) = D(LM) \cap D(ML)$.
3. $D\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right) = D(LM) \cap D(ML)$.

Preuve.

1. soit $\phi \in D(LM)$, alors $\phi \in D(M)$ et
$$M\phi \in D(L) = D(M),$$
d'où $\phi \in D(M^2)$. Inversement, si $\phi \in D(M^2)$ alors $\phi \in D(M)$ et
$$M\phi \in D(M) = D(L),$$
d'où $\phi \in D(LM)$. On obtient l'égalité $D(LM) = D(M^2)$. En échangeant les rôles de L et M on a $D(ML) = D(L^2)$.
2. Soit $\phi \in D\left((L+M)^2\right)$, alors il existe $\xi \in X$ tel que
$$\phi = (L+M)^{-2}\xi,$$
de plus $\phi \in D(L+M) = D(M)$ et
$$\begin{aligned} M\phi =& M(L+M)^{-2}\xi \\ =& \frac{1}{2}\left(2M(L+M)^{-1}\right)(L+M)^{-1}\xi \\ =& \frac{1}{2}\left(I - (L+M-2M)(L+M)^{-1}\right)(L+M)^{-1}\xi \\ =& \frac{1}{2}\left(I - (L-M)(L+M)^{-1}\right)(L+M)^{-1}\xi \\ =& \frac{1}{2}(L+M)^{-1}\xi - \frac{1}{2}(L-M)(L+M)^{-2}\xi, \end{aligned}$$

mais $y = \dfrac{1}{2}(L+M)^{-1}\xi \in D(M)$ et (IV.5) implique

$$z = \frac{1}{2}(L-M)(L+M)^{-2}\xi \in D(L-M) = D(M),$$

d'où $M\phi = y - z \in D(M)$ donc $\phi \in D(M^2)$. En échangeant les rôles de L et M, on obtient $\phi \in D(L^2)$ et ainsi

$$\phi \in D(L^2) \cap D(M^2).$$

Inversement, soit $\phi \in D(L^2) \cap D(M^2)$. Alors

$$L\phi \in D(L) = D(L+M) \text{ et } M\phi \in D(M) = D(L+M),$$

donc $L\phi + M\phi \in D(L+M)$, ainsi

$$\phi \in D\left((L+M)^2\right).$$

3. Le point 2. et (IV.5) permettent de déduire que

$$D\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right) = D\left((L+M)^2\right) = D(LM) \cap D(ML).$$

■

Le lemme qui suit précise que certains opérateurs sont bornés.

Lemme IV.5 *On suppose (IV.4)-(IV.7).*

1. $(L+M)M^{-1}, (L+M)L^{-1}, M(L+M)^{-1}, L(L+M)^{-1}, (L-M)(L+M)^{-1} \in L(X)$.
2. $L(L-M)(L+M)^{-2} \in L(X)$ *et* $M(L-M)(L+M)^{-2} \in L(X)$.
3. $(L+M)(L-M)(L+M)^{-2}$, $(L-M)^2(L+M)^{-2} \in L(X)$ *et* $LM(L+M)^{-2}$, $ML(L+M)^{-2} \in L(X)$.
4. $C_{L,M} \in L(X)$.

Preuve.

1. Voir Lemme III.13 du Chapitre III, Section 2.2, le résultat reste vrai dans ce chapitre puisque la démonstration n'utilise pas l'hypothèse de la commutativité des résolvantes de L et de M.
2. Le point 1. implique que $(L-M)(L+M)^{-2} \in L(X)$ et, grâce à (IV.5), on a

   $$(L-M)(L+M)^{-2}(X) \subset D(L-M) = D(L) = D(M),$$

   L, M étant fermés, la Proposition I.16 implique $L(L-M)(L+M)^{-2}$, $M(L-M)(L+M)^{-2} \in L(X)$.
3. Par somme et par différence du point précédent, on obtient $(L+M)(L-M)(L+M)^{-2} \in L(X)$ et $(L-M)^2(L+M)^{-2} \in L(X)$. Ensuite, en utilisant les points 1. et 2., on a

   $$LM(L+M)^{-2} = \frac{1}{2}\left(L(L+M)(L+M)^{-2} - L(L-M)(L+M)^{-2}\right) \in L(X),$$

   de même $ML(L+M)^{-2} \in L(X)$.
4. Par les points 1. et 4., on a

   $$C_{L,M} = (L+M)(L-M)(L+M)^{-2} - (L-M)(L+M)^{-1} \in L(X).$$

■

Le lemme suivant regroupe les calculs algébriques utilisés dans ce chapitre.

Lemme IV.6 *On suppose (IV.4)-(IV.5) et (IV.7).*

1. $(L+M)^2 = L^2 + LM + ML + M^2$ *et pour* $\phi \in D\left((L+M)^2\right)$
$$(L-M)^2\phi = L^2\phi - LM\phi - ML\phi + M^2\phi.$$
2. $\frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right) = -\frac{1}{2}(LM+ML)$.
3. $[(L-M);(L+M)^{-1}] = -2[M;(L+M)^{-1}] = 2[L;(L+M)^{-1}]$.
4. $C_{L,M} = 2\,[M;L]\,(L+M)^{-2}$.
5. $\begin{cases} \left(4ML + (L-M)^2 - (L+M)^2\right)(L+M)^{-2} = C_{L,M}, \\ \left(4LM + (L-M)^2 - (L+M)^2\right)(L+M)^{-2} = -C_{L,M}. \end{cases}$
6. $\begin{cases} (L+M)^{-1}M - \frac{1}{2}(L+M)^{-1}C_{L,M}(L+M) = M(L+M)^{-1}, \\ -(L+M)^{-1}L - \frac{1}{2}(L+M)^{-1}C_{L,M}(L+M) = -L(L+M)^{-1}. \end{cases}$
7. $\begin{cases} M(L+M)^{-1}M + \frac{1}{4}(L-M)(L+M)^{-1}C_{L,M}(L+M) = \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}(L-M)M(L+M)^{-1}, \\ L(L+M)^{-1}L + \frac{1}{4}(L-M)(L+M)^{-1}C_{L,M}(L+M) = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}(L-M)L(L+M)^{-1}. \end{cases}$
8. $\begin{cases} M + (L-M)M(L+M)^{-1} + \frac{1}{2}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)(L+M)^{-1} = 0, \\ L - (L-M)L(L+M)^{-1} + \frac{1}{2}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)(L+M)^{-1} = 0. \end{cases}$

Preuve.

1. En vertu du point 2. du Lemme IV.4, on a pour $\varepsilon \in \{-1,1\}$ et pour $\phi \in D\left((L+M)^2\right) \subset D\left((L-M)^2\right)$
$$\begin{aligned}(L+\varepsilon M)^2(\phi) &= (L+\varepsilon M)(L\phi + \varepsilon M\phi) \\ &= L(L\phi+\varepsilon M\phi) + \varepsilon M(L\phi + \varepsilon M\phi) \\ &= L^2\phi + \varepsilon LM\phi + \varepsilon ML\phi + M^2\phi.\end{aligned}$$
2. C'est une conséquence du point précédent et du Lemme IV.4.
3. Pour $\phi \in D(L) = D(M)$, on a
$$[(L-M);(L+M)^{-1}]\phi = [L;(L+M)^{-1}]\phi - [M;(L+M)^{-1}]\phi,$$
et
$$[L;(L+M)^{-1}]\phi + [M;(L+M)^{-1}]\phi = [(L+M);(L+M)^{-1}]\phi = 0,$$
donc
$$[L;(L+M)^{-1}]\phi = -[M;(L+M)^{-1}]\phi,$$
et
$$[(L-M);(L+M)^{-1}]\phi = -2[M;(L+M)^{-1}]\phi = 2[L;(L+M)^{-1}]\phi.$$
4. Grâce au point 2. du Lemme IV.4 on a pour $\phi \in D\left((L+M)^2\right)$
$$\begin{cases} (L+M)(L-M)\phi = L^2\phi - LM\phi + ML\phi - M^2\phi, \\ (L-M)(L+M)\phi = L^2\phi + LM\phi - ML\phi - M^2\phi, \end{cases}$$

et ainsi

$$((L+M)(L-M)-(L-M)(L+M))\,\phi = 2(ML-LM)\phi = 2[M;L]\phi.$$

D'où

$$\begin{aligned} C_{L,M} =& ((L+M)(L-M)-(L-M)(L+M))(L+M)^{-2} \\ =& 2[M;L](L+M)^{-2}. \end{aligned}$$

5. En utilisant les points 2. et 4., il vient

$$\begin{aligned} \left(4ML+(L-M)^2-(L+M)^2\right)(L+M)^{-2} =& (4ML-2(LM+ML))(L+M)^{-2} \\ =& (2ML-2LM)(L+M)^{-2} \\ =& 2[M;L](L+M)^{-2} \\ =& C_{L,M}. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \left(4LM+(L-M)^2-(L+M)^2\right)(L+M)^{-2} =& (4LM-2(LM+ML))(L+M)^{-2} \\ =& -(2ML-2LM)(L+M)^{-2} \\ =& -2[M;L](L+M)^{-2} \\ =& -C_{L,M}. \end{aligned}$$

6. En utilisant le point 3., on obtient

$$\begin{aligned} (L+M)^{-1}M-\frac{1}{2}(L+M)^{-1}C_{L,M}(L+M) =& (L+M)^{-1}M+\left[M;(L+M)^{-1}\right] \\ =& M(L+M)^{-1}. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} -(L+M)^{-1}L-\frac{1}{2}(L+M)^{-1}C_{L,M}(L+M) =& -(L+M)^{-1}L-\left[L;(L+M)^{-1}\right] \\ =& -L(L+M)^{-1}. \end{aligned}$$

7. En utilisant le point 3., on a

$$\begin{aligned} & M(L+M)^{-1}M+\frac{1}{4}(L-M)(L+M)^{-1}C_{L,M}(L+M) \\ =& M(L+M)^{-1}M-\frac{1}{2}(L-M)\left[M;(L+M)^{-1}\right] \\ =& M(L+M)^{-1}M-\frac{1}{2}(L-M)M(L+M)^{-1}+\frac{1}{2}(L-M)(L+M)^{-1}M \\ =& \frac{1}{2}M-\frac{1}{2}(L-M)M(L+M)^{-1}. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} & L(L+M)^{-1}L+\frac{1}{4}(L-M)(L+M)^{-1}C_{L,M}(L+M) \\ =& L(L+M)^{-1}L+\frac{1}{2}(L-M)\left[L;(L+M)^{-1}\right] \\ =& L(L+M)^{-1}L+\frac{1}{2}(L-M)L(L+M)^{-1}-\frac{1}{2}(L-M)(L+M)^{-1}L \\ =& \frac{1}{2}L+\frac{1}{2}(L-M)L(L+M)^{-1}. \end{aligned}$$

8. On a

$$\begin{aligned}
& M + (L-M)M\,(L+M)^{-1} + \frac{1}{2}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)(L+M)^{-1} \\
=& (L-M)M\,(L+M)^{-1} + \frac{1}{2}(L-M)^2\,(L+M)^{-1} + M - \frac{1}{2}\,(L+M) \\
=& \frac{1}{2}(L-M)(L-M+2M)\,(L+M)^{-1} - \frac{1}{2}(L+M-2M) \\
=& \frac{1}{2}(L-M) - \frac{1}{2}\,(L-M) \\
=& 0.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
& L - (L-M)L\,(L+M)^{-1} + \frac{1}{2}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)(L+M)^{-1} \\
=& -(L-M)L\,(L+M)^{-1} + \frac{1}{2}(L-M)^2\,(L+M)^{-1} + L - \frac{1}{2}\,(L+M) \\
=& \frac{1}{2}(L-M)(L-M-2L)\,(L+M)^{-1} - \frac{1}{2}(L+M-2L) \\
=& -\frac{1}{2}(L-M) + \frac{1}{2}\,(L-M) \\
=& 0.
\end{aligned}$$

■

Remarque IV.7

1. *Le point 2. du Lemme IV.6 permet d'écrire (IV.2) sous la forme*

$$u''(x) + (L_\omega - M_\omega)\,u'(x) - \frac{1}{2}\,(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)\,u(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Dans le cas commutatif on retrouve alors l'équation (III.8) étudiée au chapitre précédent.

2. *Le point 4. du Lemme IV.6 permet d'écrire l'hypothèse sur le commutateur (IV.8) sous la forme*

$$\forall \omega \geqslant \omega_0,\ \left\|[M_\omega ; L_\omega]\,(L_\omega + M_\omega)^{-2}\right\|_{L(X)} \leqslant \chi(\omega). \tag{IV.10}$$

Remarque IV.8 *Il est intéressant de comparer l'hypothèse de non commutativité (IV.8) ou (IV.10) avec celle utilisée par Da Prato-Grisvard ; voir [12], (6.4) et (6.5), p. 346. Si on écrit l'hypothèse de non commutativité de Da Prato-Grisvard pour L_ω, M_ω satisfaisant (IV.3), on a*

$$\begin{cases}
(i)\ (M_\omega - \lambda I)^{-1} D\,(L_\omega) \subset D\,(L_\omega)\,,\ \lambda \in \rho(M_\omega) \\
(ii)\ \left\|\left[L_\omega ; (M_\omega - \lambda I)^{-1}\right](L_\omega - \mu I)^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{C}{(1+|\lambda|)^{1-\beta}(1+|\mu|)^{\delta}}, \lambda \in \rho(M_\omega),\ \mu \in \rho(L_\omega),
\end{cases}$$

avec $-1 \leqslant \beta < \delta \leqslant 1$.

Dans ce travail, il est clair que (i) est vérifié. On calcule le membre de gauche de (ii) pour $\lambda = \mu = 0$. On obtient

$$\left[L_\omega ; M_\omega^{-1}\right] L_\omega{}^{-1} = L_\omega M_\omega^{-1} L_\omega^{-1} - M_\omega^{-1},$$

et

$$\begin{aligned}
\left\|\left[L_\omega ; M_\omega^{-1}\right] L_\omega{}^{-1}\right\| \leqslant & \left\|L_\omega M_\omega^{-1}\right\| \left\|L_\omega^{-1}\right\| + \left\|M_\omega^{-1}\right\| \\
\leqslant & C \max\left(\left\|L_\omega^{-1}\right\|, \left\|M_\omega^{-1}\right\|\right).
\end{aligned}$$

Dans beaucoup de cas concrets, on a

$$\left\|L_\omega^{-1}\right\| = O\left(1/\omega^{1/2}\right), \quad \left\|M_\omega^{-1}\right\| = O\left(1/\omega^{1/2}\right),$$

et aussi

$$\left\|[M_\omega; L_\omega]\,(L_\omega + M_\omega)^{-2}\right\| = O\left(1/\omega^{1/2}\right).$$

1.3 Formule de représentation de la solution

Dans le cas commutatif, la représentation de la solution de (IV.2) est donnée par la formule (III.19) :

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x} (L+M)^{-1} e^{(x-s)M} f(s)ds + \int_{x}^{+\infty} (L+M)^{-1} e^{(s-x)L} f(s)ds,$$

pour $x \in \mathbb{R}$. Maintenant, on fait le raisonnement heuristique suivant. On suppose qu'il existe une solution classique u à l'équation (IV.2) satisfaisant la propriété de régularité maximale (IV.9). On désire trouver une équation intégrale satisfaite par

$$v := (L+M)^2\, u.$$

Alors, on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{x} (L+M)^{-1} e^{(x-s)M} f(s)ds + \int_{x}^{+\infty} (L+M)^{-1} e^{(s-x)L} f(s)ds \\
=&\int_{-\infty}^{x} (L+M)^{-1} e^{(x-s)M} \left(u''(s) + (L-M)u'(s) + \frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)u(s)\right)ds \\
&+ \int_{x}^{+\infty} (L+M)^{-1} e^{(s-x)L} \left(u''(s) + (L-M)u'(s) + \frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)u(s)\right)ds \\
:=&u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + u_4(x) + u_5(x) + u_6(x),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
u_1(x) =& \int_{-\infty}^{x} (L+M)^{-1} e^{(x-s)M} u''(s)ds, \\
u_2(x) =& \int_{x}^{+\infty} (L+M)^{-1} e^{(s-x)L} u''(s)ds, \\
u_3(x) =& \int_{-\infty}^{x} (L+M)^{-1} e^{(x-s)M} (L-M)u'(s)ds, \\
u_4(x) =& \int_{x}^{+\infty} (L+M)^{-1} e^{(s-x)L} (L-M)u'(s)ds, \\
u_5(x) =& \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{x} (L+M)^{-1} e^{(x-s)M} \left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)u(s)ds, \\
u_6(x) =& \frac{1}{4}\int_{x}^{+\infty} (L+M)^{-1} e^{(s-x)L} \left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)u(s)ds.
\end{aligned}$$

L'idée principale est d'effectuer des intégrations par parties afin de déduire l'équation intégrale satisfaite par v. Puisque u est une solution classique de (IV.2) satisfaisant la propriété de régularité maximale (IV.9), tous les calculs seront justifiés.

Alors, par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= \left[(L+M)^{-1} e^{(x-s)M} u'(s)\right]_{-\infty}^{x} + \int_{-\infty}^{x} (L+M)^{-1} M e^{(x-s)M} u'(s)ds \\
&= (L+M)^{-1} u'(x) + \int_{-\infty}^{x} (L+M)^{-1} M e^{(x-s)M} u'(s)ds,
\end{aligned}$$

où on a utilisé la continuité de $e^{(x-s)M}$ en $s = x$, puisque $u'(x) \in D(M)$, et sa décroissance à $s = -\infty$. De la même façon, on obtient

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= (L+M)^{-1}\, u'(x) + \Big[(L+M)^{-1}\, M e^{(x-s)M} u(s)\Big]_{-\infty}^{x} + \int_{-\infty}^{x} (L+M)^{-1}\, M^2 e^{(x-s)M} u(s)ds \\
&= (L+M)^{-1}\, u'(x) + (L+M)^{-1}\, M u(x) + \int_{-\infty}^{x} (L+M)^{-1}\, M^2 e^{(x-s)M} u(s)ds,
\end{aligned}$$

car

$$M e^{(x-s)M} u(s) = e^{(x-s)M} M u(s),$$

puisque $u(s) \in D(M)$, et on utilise la continuité du semi-groupe $e^{(x-s)M}$ en $s = x$, puisque $Mu(x) \in D(M)$, et sa décroissance à $s = -\infty$. De même on a

$$\begin{aligned}
u_2(x) &= \Big[(L+M)^{-1}\, e^{(s-x)L} u'(s)\Big]_{x}^{+\infty} - \int_{x}^{+\infty} (L+M)^{-1}\, L e^{(s-x)L} u'(s)ds \\
&= -\,(L+M)^{-1}\, u'(x) - \int_{x}^{+\infty} (L+M)^{-1}\, L e^{(s-x)L} u'(s)ds \\
&= -\,(L+M)^{-1}\, u'(x) - \Big[(L+M)^{-1}\, L e^{(s-x)L} u(s)\Big]_{x}^{+\infty} + \int_{x}^{+\infty} (L+M)^{-1}\, L^2 e^{(s-x)L} u(s)ds \\
&= -\,(L+M)^{-1}\, u'(x) + (L+M)^{-1}\, L u(x) + \int_{x}^{+\infty} (L+M)^{-1}\, L^2 e^{(s-x)L} u(s)ds.
\end{aligned}$$

On a utilisé deux fois la décroissance de $e^{(s-x)L}$ à $s = +\infty$ et sa continuité en $s = x$, puisque $u'(x) \in D(L)$ et $u(x) \in D(L^2)$.

En appliquant $(L+M)^2$ à $u_1(x) + u_2(x)$, on obtient

$$\begin{aligned}
(L+M)^2\,(u_1(x) + u_2(x)) = {} & v(x) + (L+M)\int_{-\infty}^{x} M^2 e^{(x-s)M}\,(L+M)^{-2}\, v(s)ds \\
& +(L+M)\int_{x}^{+\infty} L^2 e^{(s-x)L}\,(L+M)^{-2}\, v(s)ds.
\end{aligned} \tag{IV.11}$$

Maintenant, pour $u_3(x) + u_4(x)$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
u_3(x) + u_4(x) &= \Big[(L+M)^{-1}\, e^{(x-s)M}(L-M)u(s)\Big]_{-\infty}^{x} + \int_{-\infty}^{x} (L+M)^{-1}\, M e^{(x-s)M}(L-M)u(s)ds \\
&\quad + \Big[(L+M)^{-1}\, e^{(s-x)L}(L-M)u(s)\Big]_{x}^{+\infty} - \int_{x}^{+\infty} (L+M)^{-1}\, L e^{(s-x)L}(L-M)u(s)ds \\
&= (L+M)^{-1}\,(L-M)u(x) + \int_{-\infty}^{x} (L+M)^{-1}\, M e^{(x-s)M}(L-M)u(s)ds \\
&\quad -(L+M)^{-1}\,(L-M)u(x) - \int_{x}^{+\infty} (L+M)^{-1}\, L e^{(s-x)L}(L-M)u(s)ds;
\end{aligned}$$

ici on utilise encore la décroissance des semi-groupes à l'infini et leur continuité en $s = x$ puisque $(L-M)u(x) \in D(L) \cap D(M)$ d'après (IV.5) et grâce au point 2. du Lemme IV.5 on peut écrire

$$\begin{aligned}
M(L-M)u(x) &= M(L-M)(L+M)^{-2}(L+M)^2 u(x), \\
L(L-M)u(x) &= L(L-M)(L+M)^{-2}(L+M)^2 u(x).
\end{aligned}$$

En appliquant $L+M$ à $u_3(x) + u_4(x)$, on obtient

$$\begin{aligned}
(L+M)\,(u_3(x) + u_4(x)) = {} & \int_{-\infty}^{x} M e^{(x-s)M}(L-M)\,(L+M)^{-2}\, v(s)ds \\
& -\int_{x}^{+\infty} L e^{(s-x)L}(L-M)\,(L+M)^{-2}\, v(s)ds.
\end{aligned}$$

Or, le Lemme IV.5, point 3., permet d'écrire

$$\begin{aligned} Me^{(x-s)M}(L-M)\left(L+M\right)^{-2} v(s) &= e^{(x-s)M} ML \left(L+M\right)^{-2} v(s) - M^2 e^{(x-s)M}\left(L+M\right)^{-2} v(s), \\ Le^{(s-x)L}(L-M)\left(L+M\right)^{-2} v(s) &= L^2 e^{(s-x)L}\left(L+M\right)^{-2} v(s) - e^{(s-x)L} LM \left(L+M\right)^{-2} v(s), \end{aligned}$$

ainsi, en appliquant encore $L+M$, on a

$$\begin{aligned} \left(L+M\right)^2\left(u_3(x)+u_4(x)\right) = \left(L+M\right) &\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} ML \left(L+M\right)^{-2} v(s)ds \\ + \left(L+M\right) &\int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L} LM \left(L+M\right)^{-2} v(s)ds \\ - \left(L+M\right) &\int_{-\infty}^{x} M^2 e^{(x-s)M}\left(L+M\right)^{-2} v(s)ds \\ - \left(L+M\right) &\int_{x}^{+\infty} L^2 e^{(s-x)L}\left(L+M\right)^{-2} v(s)ds. \end{aligned} \tag{IV.12}$$

Enfin, en appliquant $(L+M)^2$ à $u_5(x)+u_6(x)$, on a

$$\begin{aligned} (L+M)^2\left(u_5(x)+u_6(x)\right) = &\frac{1}{4}(L+M)\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M}\left(L-M\right)^2\left(L+M\right)^{-2} v(s)ds \\ &-\frac{1}{4}(L+M)\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M}\left(L+M\right)^2\left(L+M\right)^{-2} v(s)ds \\ &+\frac{1}{4}(L+M)\int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L}\left(L-M\right)^2\left(L+M\right)^{-2} v(s)ds \\ &-\frac{1}{4}(L+M)\int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L}\left(L+M\right)^2\left(L+M\right)^{-2} v(s)ds. \end{aligned} \tag{IV.13}$$

Ensuite, en utilisant (IV.11), (IV.12) et (IV.13), on a

$$\begin{aligned} &\left(L+M\right)\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} f(s)ds + \left(L+M\right)\int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L} f(s)ds \\ =&v(x) + \left(L+M\right)\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} ML\left(L+M\right)^{-2} v(s)ds \\ &+\frac{1}{4}\left(L+M\right)\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M}\left(L-M\right)^2\left(L+M\right)^{-2} v(s)ds \\ &-\frac{1}{4}\left(L+M\right)\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M}\left(L+M\right)^2\left(L+M\right)^{-2} v(s)ds \\ &+\left(L+M\right)\int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L} LM\left(L+M\right)^{-2} v(s)ds \\ &+\frac{1}{4}\left(L+M\right)\int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L}\left(L-M\right)^2\left(L+M\right)^{-2} v(s)ds \\ &-\frac{1}{4}\left(L+M\right)\int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L}\left(L+M\right)^2\left(L+M\right)^{-2} v(s)ds. \end{aligned}$$

En vertu du point 5. du Lemme IV.6, on obtient

$$\begin{aligned} &v(x) + \frac{1}{4}(L+M)\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} C_{L,M} v(s)ds - \frac{1}{4}(L+M)\int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L} C_{L,M} v(s)ds \\ =&\left(L+M\right)\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} f(s)ds + \left(L+M\right)\int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L} f(s)ds, \end{aligned}$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$v + R(v) = F(f), \tag{IV.14}$$

où

$$F(f)(x) = (L+M)\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} f(s)ds + (L+M)\int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L} f(s)ds,$$

et

$$R(v)(x) = \frac{1}{4}(L+M)\int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M} C_{L,M} v(s)ds - \frac{1}{4}(L+M)\int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L} C_{L,M} v(s)ds.$$

Maintenant, on fait apparaître la dépendance de ω pour F : F_ω ; et R : R_ω. Pour $f \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$, le but est de trouver $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$

1. $F_\omega(f) \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$,
2. $I + R_\omega$ est inversible dans $L\left(BUC^\theta(\mathbb{R}; X)\right)$.

Dans ce cas, pour $\omega \geqslant \omega^*$, on peut déduire que s'il existe une solution classique u de (IV.2) satisfaisant la propriété de régularité maximale (IV.9), alors u est uniquement déterminé par la formule de représentation

$$u = (L_\omega + M_\omega)^{-2}\left\{(I + R_\omega)^{-1}(F_\omega(f))\right\}. \tag{IV.15}$$

Ainsi, pour obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour l'équation (IV.2), il suffit d'étudier la régularité de cette représentation.

Bien entendu, quand L_ω et M_ω commutent, la formule (IV.15) coïncide avec la formule (III.19) donnée au Chapitre III.

Remarque IV.9 *Concernant (IV.14), on peut aussi utiliser la théorie de Fredholm lorsqu'il n'y a pas de paramètre ω.*

1.4 Principaux résultats

On pose pour une fonction g donnée de $\mathbb{R}$ dans X et pour $x \in \mathbb{R}$

$$G(g)(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M_\omega} g(s)ds, \qquad H(g)(x) = \int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L_\omega} g(s)ds.$$

On remarque que la Proposition III.14 du Chapitre III est vérifiée et la constante K y est indépendante de ω grâce à l'hypothèse (IV.3).

On obtient grâce à cette proposition les régularités de F_ω et de R_ω.

Corollaire IV.10 *On suppose (IV.3)-(IV.7). Soit $f \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$, $\theta \in \,]0,1[$. Alors $F_\omega(f) \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$.*

Preuve. Il suffit de remarquer que

$$F(f) = (L+M)M^{-1}MG(f) + (L+M)L^{-1}LH(f). \tag{IV.16}$$

$(L+M)M^{-1}$, $(L+M)L^{-1} \in L(X)$ d'après le Lemme IV.5, point 1., donc on a le résultat par la Proposition III.14. ∎

Corollaire IV.11 *On suppose (IV.3)-(IV.8). Soit $\theta \in \,]0,1[$. Alors $R_\omega \in L\left(BUC^\theta(\mathbb{R}; X)\right)$ et il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$*

$$\|R_\omega\|_{L(BUC^\theta(\mathbb{R};X))} < 1.$$

Ainsi $I + R_\omega$ est inversible dans $L\left(BUC^\theta(\mathbb{R}; X)\right)$ pour $\omega \geqslant \omega^*$.

Preuve. Soit $v \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$. $C_{L,M} \in L(X)$, d'après le Lemme IV.5, point 4., donc $C_{L,M}v \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$. Alors, en écrivant

$$R(v) = \frac{1}{4}(L+M)M^{-1}MG(C_{L,M}v) - \frac{1}{4}(L+M)L^{-1}LH(C_{L,M}v), \tag{IV.17}$$

on a $R(v) \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$ par la Proposition III.14. De plus, pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, on a grâce à (IV.8)

$$\begin{aligned}\|R_\omega(v)\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)} \leqslant & \frac{1}{4}K\left\|(L_\omega + M_\omega)M_\omega^{-1}\right\|_{L(X)} \|C_{L_\omega,M_\omega}\|_{L(X)} \|v\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)} \\ & + \frac{1}{4}K\left\|(L_\omega + M_\omega)L_\omega^{-1}\right\|_{L(X)} \|C_{L_\omega,M_\omega}\|_{L(X)} \|v\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)} \\ \leqslant & C\chi(\omega)\|v\|_{BUC^\theta(\mathbb{R};X)}.\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{\omega\to+\infty} \chi(\omega) = 0$, donc il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$

$$\|R_\omega\|_{L(BUC^\theta(\mathbb{R};X))} < 1.$$

Ainsi $I + R_\omega$ est inversible dans $L\left(BUC^\theta(\mathbb{R}; X)\right)$ pour $\omega \geqslant \omega^*$. ■

Remarque IV.12 *En vertu des corollaires précédents, on peut dire que s'il existe une solution classique de (IV.2) satisfaisant la propriété de régularité maximale (IV.9), elle s'écrit sous la forme (IV.15) pour $\omega \geqslant \omega^*$. On déduit alors l'unicité de la solution classique et aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) \in D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)$, ce qui implique, grâce à l'hypothèse (IV.5), que $u(x) \in D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right)$.*

On énonce alors le résultat fondamental de cette section.

Théorème IV.13 *On suppose (IV.3)-(IV.8). Soit $f \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X)$, $\theta \in]0,1[$. Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$*

1. *l'équation (IV.2) admet une unique solution classique u ;*
2. *u vérifie la propriété de régularité maximale*

$$u'',\ (L_\omega - M_\omega)u',\ (L_\omega + M_\omega)^2 u \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X).$$

Preuve. Soit $\omega > 0$ fixé tel que $\omega \geqslant \omega^*$. On note encore $L_\omega = L$, $M_\omega = M$ et $R_\omega = R$, $F_\omega = F$. On veut prouver que u défini par (IV.15) est l'unique solution classique de (IV.2).

On pose

$$v := (I+R)^{-1}(F(f)) = (L+M)^2 u \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X),$$

grâce aux Corollaires IV.10 et IV.11. Puisque $(L-M)^2(L+M)^{-2} \in L(X)$, on a

$$(L-M)^2 u = (L-M)^2(L+M)^{-2}(L+M)^2 u \in BUC^\theta(\mathbb{R}; X).$$

Ensuite

$$v = F(f) - R(v),$$

d'où

$$u = (L+M)^{-2}F(f) - (L+M)^{-2}R(v),$$

puis en utilisant (IV.16) et (IV.17), on obtient

$$v = (L+M)\left(G(f) + H(f) - \frac{1}{4}G(C_{L,M}v) + \frac{1}{4}H(C_{L,M}v)\right), \tag{IV.18}$$

et
$$u = (L+M)^{-1}\left(G(f)+H(f)-\frac{1}{4}G(C_{L,M}v)+\frac{1}{4}H(C_{L,M}v)\right). \tag{IV.19}$$

On note que u est (en un certain sens) une "perturbation" de (III.19) du cas commutatif.

D'après la Proposition III.14, point 3., u est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$u' = (L+M)^{-1}\left(MG(f)-LH(f)-\frac{1}{4}MG(C_{L,M}v)-\frac{1}{4}LH(C_{L,M}v)-\frac{1}{2}C_{L,M}v\right), \tag{IV.20}$$

donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $u'(x)\in D(L+M)=D(L-M)$ et comme $(L-M)(L+M)^{-1}\in L(X)$ (Lemme IV.5, point 1.)

$$(L-M)\,u' = (L-M)(L+M)^{-1}(L+M)\,u' \in BUC^{\theta}(\mathbb{R};X).$$

De plus, en remplaçant (IV.18) dans (IV.20), on obtient

$$\begin{aligned} u' = &(L+M)^{-1}\left(MG(f)-LH(f)-\frac{1}{4}MG(C_{L,M}v)-\frac{1}{4}LH(C_{L,M}v)\right) \\ &-\frac{1}{2}(L+M)^{-1}C_{L,M}(L+M)\left(G(f)+H(f)-\frac{1}{4}G(C_{L,M}v)+\frac{1}{4}H(C_{L,M}v)\right). \end{aligned} \tag{IV.21}$$

Alors, d'après le point 6. du Lemme IV.6, on a

$$(L+M)^{-1}M-\frac{1}{2}(L+M)^{-1}C_{L,M}(L+M) = M(L+M)^{-1}\in L(X),$$

et de même
$$-(L+M)^{-1}L-\frac{1}{2}(L+M)^{-1}C_{L,M}(L+M) = -L(L+M)^{-1}\in L(X),$$

ainsi (IV.21) devient

$$\begin{aligned} u' = &M(L+M)^{-1}G(f)-L(L+M)^{-1}H(f) \\ &-\frac{1}{4}M(L+M)^{-1}G(C_{L,M}v)-\frac{1}{4}L(L+M)^{-1}H(C_{L,M}v). \end{aligned} \tag{IV.22}$$

D'après la Proposition III.14, point 3., u' est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} u'' =& f+M(L+M)^{-1}MG(f)+L(L+M)^{-1}LH(f) \\ &-\frac{1}{4}M(L+M)^{-1}MG(C_{L,M}v)+\frac{1}{4}L(L+M)^{-1}LH(C_{L,M}v) \\ &+\frac{1}{4}(L-M)(L+M)^{-1}C_{L,M}v \\ =& f+M(L+M)^{-1}MG(f)+L(L+M)^{-1}LH(f) \\ &-\frac{1}{4}M(L+M)^{-1}MG(C_{L,M}v)+\frac{1}{4}L(L+M)^{-1}LH(C_{L,M}v) \\ &+\frac{1}{4}(L-M)(L+M)^{-1}C_{L,M}(L+M)\left(G(f)+H(f)-\frac{1}{4}G(C_{L,M}v)+\frac{1}{4}H(C_{L,M}v)\right). \end{aligned}$$

Alors, en utilisant le point 7. du Lemme IV.6, on a

$$\begin{aligned} S_1 :=& M(L+M)^{-1}M+\frac{1}{4}(L-M)(L+M)^{-1}C_{L,M}(L+M) \\ =& \frac{1}{2}M-\frac{1}{2}(L-M)M(L+M)^{-1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_1 :=& L\,(L+M)^{-1}\,L + \frac{1}{4}(L-M)\,(L+M)^{-1}\,C_{L,M}(L+M) \\ =& \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}(L-M)L\,(L+M)^{-1}\,, \end{aligned}$$

d'où

$$u'' = f + S_1G(f) + T_1H(f) - \frac{1}{4}S_1G(C_{L,M}v) + \frac{1}{4}T_1H(C_{L,M}v). \tag{IV.23}$$

En utilisant (IV.19), (IV.22) et (IV.23), on a

$$\begin{aligned} & u'' + (L-M)u' + \frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)u \\ =& f + S_2G(f) + T_2H(f) - \frac{1}{4}S_2G(C_{L,M}v) + \frac{1}{4}T_2H(C_{L,M}v), \end{aligned}$$

où

$$S_2 := \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}(L-M)M\,(L+M)^{-1} + (L-M)M\,(L+M)^{-1} + \frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)(L+M)^{-1} = 0,$$

et

$$T_2 := \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}(L-M)L\,(L+M)^{-1} - (L-M)L\,(L+M)^{-1} + \frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)(L+M)^{-1} = 0,$$

d'après le point 8. du Lemme IV.6. On obtient enfin

$$u'' + (L-M)u' + \frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)u = f.$$

Or $(L-M)u'$, $(L-M)^2\,u$, $(L+M)^2\,u$ et f sont dans $BUC^\theta\,(\mathbb{R};X)$ donc on peut déduire de cette dernière formule que $u'' \in BUC^\theta\,(\mathbb{R};X)$.

On vient de montrer que u défini par (IV.15) est une solution classique de (IV.2) vérifiant la propriété de régularité maximale (IV.9) et l'unicité de cette solution classique résulte de la Remarque IV.12. ■

1.5 Applications

On va considérer trois exemples. Pour le premier exemple, on se place dans un espace $X = L^p(\Omega)$, où $\Omega =]c,d[$. Le second exemple généralise le premier en prenant Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^n$. Le dernier exemple reprend le premier en conservant les mêmes actions d'opérateurs mais en se plaçant dans le cadre höldérien $X = C_0^\beta([c,d])$, $\beta \in]0,1[$.

Exemple 1.
On considère sur $X = L^p\,(c,d)$, $1 < p < \infty$, les opérateurs définis par

$$\begin{cases} D(L_\omega) = D(M_\omega) = \left\{\varphi \in W^{2,p}\,(c,d) : \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\} \\ L_\omega\varphi(y) = \varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - \omega^\alpha\varphi(y),\ y \in (c,d) \\ M_\omega\varphi(y) = \varphi''(y),\ y \in (c,d)\,, \end{cases}$$

où $\omega > 0$, $\alpha > 0$ et avec, pour plus de simplicité,

$$a \in C^2([c,d]),\ a(c) = a(d) = 0,\ Im(a) \neq \{0\}. \tag{IV.24}$$

On remarque que $L_\omega = L_0 - \omega^\alpha I$ et $M_\omega = M_0$, où

$$\begin{cases} D(L_0) = D(M_0) = \left\{\varphi \in W^{2,p}(c,d) : \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\} \\ L_0\varphi(y) = \varphi''(y) + a(y)\varphi'(y), \quad M_0\varphi(y) = \varphi''(y), \quad y \in (c,d)\,. \end{cases}$$

On va montrer que les opérateurs L_ω, M_ω vérifient les hypothèses (IV.3)-(IV.8).

- D'après Lunardi [48], Theorem 3.1.3, p. 73, L_ω, M_ω génèrent des semi-groupes analytiques. De plus, il existe $\delta > 0$ et $C_0 > 0$ tel que pour tout $z \in S_\delta = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} + \delta\right\}$

$$\left\|(L_0 - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C_0}{|z|}, \quad \left\|(M_0 - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C_0}{|z|},$$

dont on déduit pour tout $\omega > 0$

$$\left\|(L_\omega - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C_0}{|\omega^\alpha + z|}, \quad \left\|(M_\omega - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C_0}{|z|}. \tag{IV.25}$$

Ensuite si $|\omega^\alpha + z| \geqslant |z|$ alors

$$\left\|(L_\omega - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C_0}{|z|}, \quad \left\|(M_\omega - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C_0}{|z|},$$

sinon $Re(z) < 0$ et

$$|\omega^\alpha + z| \geqslant \cos(|\arg z| - \frac{\pi}{2})\,|z| \geqslant \cos(\delta)\,|z|\,.$$

Donc il existe $C_1 = \dfrac{C_0}{\cos(\delta)} > C_0 > 0$ tel que pour tout $\omega > 0$ et pour tout $z \in S_\delta$

$$\left\|(L_\omega - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C_1}{|z|}, \quad \left\|(M_\omega - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C_1}{|z|}.$$

- M_ω est inversible dans $L(X)$. En effet, on résout l'équation spectrale

$$M_\omega \varphi = \psi \in X,$$

qui est équivalente à

$$\begin{cases} \varphi''(y) = \psi(y),\ y \in (c,d) \\ \varphi(c) = 0 \\ \varphi(d) = 0, \end{cases}$$

où $\varphi \in W^{2,p}(c,d)$ et ψ est donné dans X. On obtient alors que pour presque tout $y \in (c,d)$,

$$\begin{aligned} M_0^{-1}\psi(y) = M_\omega^{-1}\psi(y) = \varphi(y) = & \frac{y-d}{d-c}\int_c^d t\psi(t)dt + \frac{d(c-y)}{d-c}\int_c^d \psi(t)dt \\ & + \int_y^d t\psi(t)dt + y\int_c^y \psi(t)dt. \end{aligned} \tag{IV.26}$$

Maintenant, en posant

$$\begin{cases} D(P) = D(Q) = W^{1,p}\,(c,d) \\ P\varphi(y) = \varphi'(y),\ y \in (c,d) \\ Q\varphi(y) = a(y)\varphi'(y),\ y \in (c,d)\,, \end{cases}$$

on a

$$L_\omega = M_0 + Q - \omega^\alpha I.$$

D'après Engel-Nagel [17], Example 2.2, p. 169, l'opérateur P est M_0-borné, et, grâce à (IV.24), on en déduit que Q est M_0-borné. De plus, $\omega^\alpha \in \rho(M_0)$, donc il s'ensuit du Lemma 2.6 de [17], p. 173, que $\omega^\alpha \in \rho(M_0 + Q)$, autrement dit L_ω est inversible dans $L(X)$.

- En vertu de (IV.24), on a

$$\begin{aligned}
D(M_\omega L_\omega) &= \{\varphi \in D(L_\omega) : L_\omega \varphi \in D(M_\omega)\}\\
&= \big\{\varphi \in W^{2,p}(c,d) : \varphi(\xi) = 0 \text{ et } \varphi'' + a\varphi' - \omega^\alpha \varphi \in W^{2,p}(c,d) \text{ avec}\\
&\qquad \varphi''(\xi) + a(\xi)\varphi'(\xi) - \omega^\alpha \varphi(\xi) = 0,\ \xi \in \{c,d\}\}\\
&= \big\{\varphi \in W^{3,p}(c,d) : \varphi'' + a\varphi' \in W^{2,p}(c,d), \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\big\}\\
&= \big\{\varphi \in W^{3,p}(c,d) : \varphi'' \in W^{2,p}(c,d), \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\big\}\\
&= \big\{\varphi \in W^{4,p}(c,d) : \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\big\},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} D(M_\omega L_\omega) = \big\{\varphi \in W^{4,p}(c,d) : \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\big\}\\ (M_\omega L_\omega)\varphi(y) = \varphi^{(4)}(y) + a(y)\varphi^{(3)}(y) + 2a'(y)\varphi''(y) + a''(y)\varphi'(y) - \omega^\alpha \varphi''(y),\ y \in (c,d), \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(L_\omega M_\omega) = \big\{\varphi \in W^{4,p}(c,d) : \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\big\}\\ (L_\omega M_\omega)\varphi(y) = \varphi^{(4)}(y) + a(y)\varphi^{(3)}(y) - \omega^\alpha \varphi''(y),\ y \in (c,d), \end{cases}$$

$$\begin{cases} D([M_\omega ; L_\omega]) = \big\{\varphi \in W^{4,p}(c,d) : \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\big\}\\ [M_\omega ; L_\omega]\,\varphi(y) = 2a'(y)\varphi''(y) + a''(y)\varphi'(y),\ y \in (c,d). \end{cases}$$

De plus

$$\begin{cases} D(L_\omega - M_\omega) = \big\{\varphi \in W^{2,p}(c,d) : \varphi(c) = \varphi(d) = 0\big\}\\ (L_\omega - M_\omega)\varphi(y) = a(y)\varphi'(y) - \omega^\alpha \varphi(y),\ y \in (c,d), \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(L_\omega + M_\omega) = \big\{\varphi \in W^{2,p}(c,d) : \varphi(c) = \varphi(d) = 0\big\}\\ (L_\omega + M_\omega)\varphi(y) = 2\varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - \omega^\alpha \varphi(y),\ y \in (c,d), \end{cases}$$

ce qui implique que $L_\omega - M_\omega$ est fermé, $L_\omega + M_\omega$ est inversible dans $L(X)$ (même démonstration que pour L_ω) et, comme pour (IV.25), il existe $C > 0$ tel que pour tout $\omega > 0$

$$\left\|(L_\omega + M_\omega)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{\omega^\alpha}, \qquad \left\|(L_\omega + M_\omega)^{-2}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{\omega^{2\alpha}}.$$

- On a, en utilisant (IV.24),

$$\begin{aligned}
D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right) &= \{\varphi \in D(L_\omega + M_\omega) : (L_\omega + M_\omega)\varphi \in D(L_\omega + M_\omega)\}\\
&= \big\{\varphi \in W^{2,p}(c,d) : \varphi(\xi) = 0 \text{ et } 2\varphi'' + a\varphi' - \omega^\alpha \varphi \in W^{2,p}(c,d) \text{ avec}\\
&\qquad 2\varphi''(\xi) + a(\xi)\varphi'(\xi) - \omega^\alpha \varphi(\xi) = 0,\ \xi \in \{c,d\}\}\\
&= \big\{\varphi \in W^{4,p}(c,d) : \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\big\},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right) &= \{\varphi \in D(L_\omega - M_\omega) : (L_\omega - M_\omega)\varphi \in D(L_\omega - M_\omega)\}\\
&= \big\{\varphi \in W^{2,p}(c,d) : \varphi(\xi) = 0 \text{ et } a\varphi' - \omega^\alpha \varphi \in W^{2,p}(c,d) \text{ avec}\\
&\qquad a(\xi)\varphi'(\xi) - \omega^\alpha \varphi(\xi) = 0,\ \xi \in \{c,d\}\}\\
&= \big\{\varphi \in W^{3,p}(c,d) : \varphi(c) = \varphi(d) = 0\big\};
\end{aligned}$$

ainsi

$$D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right) \subset D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right).$$

- De plus, on a pour tout $\varphi \in D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)$ et pour presque tout $y \in (c,d)$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2\right)\varphi(y) \\
=&\frac{1}{4}\Big((a(y))^2\varphi''(y) - 2\omega^\alpha a(y)\varphi'(y) + a(y)a'(y)\varphi'(y) + \omega^{2\alpha}\varphi(y) \\
&- 4\varphi^{(4)}(y) - 4a(y)\varphi^{(3)}(y) - 4a'(y)\varphi''(y) - 2a''(y)\varphi'(y) + 4\omega^\alpha\varphi''(y) \\
&- (a(y))^2\varphi''(y) + 2\omega^\alpha a(y)\varphi'(y) - a(y)a'(y)\varphi'(y) - \omega^{2\alpha}\varphi(y)\Big) \\
=&-\varphi^{(4)}(y) - a(y)\varphi^{(3)}(y) - a'(y)\varphi''(y) - \frac{1}{2}a''(y)\varphi'(y) + \omega^\alpha\varphi''(y).
\end{aligned}$$

Proposition IV.14 *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\omega > 0$,*

$$\left\|[M_\omega; L_\omega]\,(L_\omega + M_\omega)^{-2}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{\omega^\gamma},$$

où $\gamma = \begin{cases} 2\alpha \text{ si } 0 < \omega < 1, \\ \alpha \text{ si } \omega \geqslant 1. \end{cases}$

Preuve. On pose, pour $f \in X = L^p(c,d)$

$$\begin{cases} (L_\omega + M_\omega)^{-2} f = g \\ (L_\omega + M_\omega)^{-1} f = \psi, \end{cases}$$

alors

$$(L_\omega + M_\omega)^{-1}\psi = g,$$

$g \in D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right) = D(L_\omega M_\omega) \cap D(M_\omega L_\omega)$ et ainsi

$$\begin{cases} g \in W^{4,p}(c,d) \\ g''(c) = g''(d) = g(c) = g(d) = 0 \\ 2g''(y) + a(y)g'(y) - \omega^\alpha g(y) = \psi(y). \end{cases} \tag{IV.27}$$

On a

$$\{[M_\omega; L_\omega]\,g\}(y) = 2a'(y)g''(y) + a''(y)g'(y) = 2a'(y)M_0 g(y) + a''(y)Pg(y),$$

or P est M_0-borné et, grâce à (IV.27), on a

$$\begin{aligned}
\|[M_\omega; L_\omega]\,g\| &\leqslant C\left(\|M_0 g\| + \|Pg\|\right) \\
&\leqslant C_1\left(\|M_0 g\| + \|g\|\right) \\
&\leqslant C_1\left(\|g''\| + \|g\|\right) \\
&\leqslant C_2\left(\|\psi\| + \frac{1}{\omega^\alpha}\|\psi\|\right).
\end{aligned} \tag{IV.28}$$

De plus, de $(L_\omega + M_\omega)^{-1} f = \psi$, on déduit

$$\begin{cases} \psi \in W^{2,p}(c,d) \\ \psi(c) = \psi(d) = 0 \\ 2\psi''(y) + a(y)\psi'(y) - \omega^\alpha\psi(y) = f(y), \end{cases}$$

et

$$\|\psi\| \leqslant \frac{C}{\omega^\alpha}\|f\|. \tag{IV.29}$$

Il s'ensuit (de (IV.28) et (IV.29)) que

$$\begin{aligned}\|[M_\omega ; L_\omega]\, g\| &= \left\|[M_\omega ; L_\omega]\,(L_\omega + M_\omega)^{-2} f\right\| \\ &\leqslant C\left(\frac{1}{\omega^\alpha} + \frac{1}{\omega^{2\alpha}}\right)\|f\| \\ &\leqslant \frac{2C}{\omega^\gamma}\|f\|.\end{aligned}$$

■

Par conséquent, toutes les hypothèses sont vérifiées, on peut appliquer le Théorème IV.13 au problème aux limites et quasi-elliptique d'ordre quatre suivant pour $\omega > 0$ assez grand

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + a(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) - \omega^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y) - a(y)\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,y) \\ -a'(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \dfrac{1}{2}a''(y)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \omega^\alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in (c,d) \\ u(x,c) = u(x,d) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,c) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,d) = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dès que $f \in BUC^\theta\left(\mathbb{R}; L^p\left(c,d\right)\right)$, $\theta \in \left]0,1\right[$.

Remarque IV.15 *On réécrit ce problème différentiel sous forme opérationnelle (IV.2) en utilisant les opérateurs L_ω, M_ω et leurs domaines. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \in (c,d)$*

$$u''(x) + (L_\omega - M_\omega)\,u'(x) + \frac{1}{4}\left((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2\right)u(x) = f(x),$$

équivaut à

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + a(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) - \omega^\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y) - a(y)\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,y) \\ &- a'(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \frac{1}{2}a''(y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \omega^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y).\end{aligned}$$

$D(L_\omega)$ et $D(M_\omega)$ sont obtenus grâce aux conditions aux limites. En effet $u(x) \in D\left((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ équivaut à

$$u(x,c) = u(x,d) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,c) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,d) = 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{IV.30}$$

et $u'(x) \in D(L_\omega - M_\omega)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ équivaut à

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,c) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,d) = 0,\ x \in \mathbb{R},$$

qui découle directement de (IV.30) puisque pour $x \in \mathbb{R}$ fixé on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,c) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,c) - u(x,c)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0,$$

de même

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,d) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,d) - u(x,d)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0.$$

Remarque IV.16 *On peut aussi appliquer Lunardi [48], Theorem 3.2.3., relativement à* $\lambda u - \mathcal{A}u = g$ *et l'estimation*

$$|\lambda| \|u\|_p + |\lambda|^{1/2} \|Du\|_p + \left\|D^2 u\right\|_p \leqslant C_p \|\lambda u - \mathcal{A}u\|_p, \tag{IV.31}$$

donne

$$\begin{aligned}
&\left\|[M_\omega; L_\omega] (L_\omega + M_\omega)^{-2} g\right\|_p \\
=&\left\|(2a'D^2 + a''D) (L_\omega + M_\omega)^{-1} (L_\omega + M_\omega)^{-1} g\right\|_p \\
\leqslant& C \left\|\left(D^2 (L_\omega + M_\omega)^{-1}\right) (L_\omega + M_\omega)^{-1} g\right\|_p + C_1 \left\|\left(D (L_\omega + M_\omega)^{-1}\right) (L_\omega + M_\omega)^{-1} g\right\|_p \\
\leqslant& C' \left\|(L_\omega + M_\omega)^{-1} g\right\|_p + C''\omega^{-\alpha/2} \left\|(L_\omega + M_\omega)^{-1} g\right\|_p \\
\leqslant& C \left(\frac{1}{\omega^\alpha} + \frac{1}{\omega^{3\alpha/2}}\right) \|g\|_p \\
\leqslant& \frac{C}{\omega^\gamma} \|g\|_p .
\end{aligned}$$

Remarque IV.17 *On montre que l'hypothèse (IV.24) est nécessaire dans cet exemple. Pour cela, on suppose que* $a \in C^2([c,d])$ *avec* $(a(c), a(d)) \neq (0,0)$. *Alors*

$$\begin{aligned}
D(M_\omega L_\omega) &= \{\varphi \in D(L_\omega) : L_\omega \varphi \in D(M_\omega)\} \\
&= \big\{\varphi \in W^{2,p}(c,d) : \varphi(\xi) = 0 \text{ et } \varphi'' + a\varphi' - \omega^\alpha \varphi \in W^{2,p}(c,d) \text{ avec} \\
&\qquad \varphi''(\xi) + a(\xi)\varphi'(\xi) - \omega^\alpha \varphi(\xi) = 0,\ \xi \in \{c,d\}\} \\
&= \big\{\varphi \in W^{4,p}(c,d) : \varphi''(c) + a(c)\varphi'(c) = \varphi''(d) + a(d)\varphi'(d) = 0 \text{ et } \varphi(c) = \varphi(d) = 0\big\},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D(L_\omega M_\omega) &= \{\varphi \in D(M_\omega) : M_\omega \varphi \in D(L_\omega)\} \\
&= \big\{\varphi \in W^{4,p}(c,d) : \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\big\},
\end{aligned}$$

ainsi $D(M_\omega L_\omega)$ *et* $D(L_\omega M_\omega)$ *sont différents, de plus*

$$D([M_\omega; L_\omega]) = \big\{\varphi \in W^{4,p}(c,d) : \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0 \text{ et } a(c)\varphi'(c) = a(d)\varphi'(d) = 0\big\}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right) &= \{\varphi \in D(L_\omega + M_\omega) : (L_\omega + M_\omega)\varphi \in D(L_\omega + M_\omega)\} \\
&= \big\{\varphi \in W^{2,p}(c,d) : \varphi(\xi) = 0 \text{ et } 2\varphi'' + a\varphi' - \omega^\alpha \varphi \in W^{2,p}(c,d) \text{ avec} \\
&\qquad 2\varphi''(\xi) + a(\xi)\varphi'(\xi) - \omega^\alpha \varphi(\xi) = 0,\ \xi \in \{c,d\}\} \\
&= \big\{\varphi \in W^{4,p}(c,d) : 2\varphi''(c) + a(c)\varphi'(c) = 2\varphi''(d) + a(d)\varphi'(d) = 0 \text{ et } \varphi(c) = \varphi(d) = 0\big\},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right) &= \{\varphi \in D(L_\omega - M_\omega) : (L_\omega - M_\omega)\varphi \in D(L_\omega - M_\omega)\} \\
&= \big\{\varphi \in W^{2,p}(c,d) : \varphi(\xi) = 0 \text{ et } a\varphi' - \omega^\alpha \varphi \in W^{2,p}(c,d) \text{ avec} \\
&\qquad a(\xi)\varphi'(\xi) - \omega^\alpha \varphi(\xi) = 0,\ \xi \in \{c,d\}\} \\
&= \big\{\varphi \in W^{3,p}(c,d) : a(c)\varphi'(c) = a(d)\varphi'(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\big\};
\end{aligned}$$

ainsi la condition (IV.5) n'est pas satisfaite.

Exemple 2.
Soit Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. On considère sur $X = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, les opérateurs définis par

$$\begin{cases} D(L_\omega) = D(M_\omega) = \left\{\varphi \in W^{2,p}(\Omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\} \\ L_\omega \varphi(y) = \Delta_y \varphi(y) + \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i(y) D_i \varphi(y) - \omega^\alpha \varphi(y),\ y \in \Omega \\ M_\omega \varphi(y) = \Delta_y \varphi(y),\ y \in \Omega, \end{cases}$$

où $\omega > 0$, $\alpha > 0$ et avec

$$a \in C^2(\overline{\Omega}),\ a_k = 0 \text{ sur } \partial\Omega,\ Im(a_k) \neq \{0\},\ k = 1, ..., n. \tag{IV.32}$$

On va montrer que les opérateurs L_ω, M_ω vérifient les hypothèses (IV.3)-(IV.8).

- L_ω, M_ω sont inversibles dans $L(X)$ et génèrent des semi-groupes analytiques vérifiant (IV.3) (comme dans l'Exemple 1).
- De plus on a

$$\begin{cases} D(M_\omega L_\omega) = D(L_\omega M_\omega) = D([M_\omega; L_\omega]) = \left\{\varphi \in W^{4,p}(\Omega) : \varphi = \Delta_y \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\} \\ (M_\omega L_\omega)\varphi(y) = \Delta_y^2 \varphi(y) + \Delta_y \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i(y) D_i \varphi(y)\right) - \omega^\alpha \Delta_y \varphi(y),\ y \in \Omega \\ (L_\omega M_\omega)\varphi(y) = \Delta_y^2 \varphi(y) + \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i(y) D_i (\Delta_y \varphi)(y) - \omega^\alpha \Delta_y \varphi(y),\ y \in \Omega \\ [M_\omega; L_\omega]\, \varphi(y) = \Delta_y \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i(y) D_i \varphi(y)\right) - \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i(y) D_i (\Delta_y \varphi)(y), y \in \Omega. \end{cases}$$

D'autre part

$$\begin{cases} D(L_\omega - M_\omega) = \left\{\varphi \in W^{2,p}(\Omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\} \\ (L_\omega - M_\omega)\varphi(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i(y) D_i \varphi(y) - \omega^\alpha \varphi(y),\ y \in \Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(L_\omega + M_\omega) = \left\{\varphi \in W^{2,p}(\Omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\} \\ (L_\omega + M_\omega)\varphi(y) = 2\Delta_y \varphi(y) + \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i(y) D_i \varphi(y) - \omega^\alpha \varphi(y),\ y \in \Omega, \end{cases}$$

alors $L_\omega + M_\omega$ est inversible dans $L(X)$ et

$$\left\|(L_\omega + M_\omega)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{\omega^\alpha}, \quad \left\|(L_\omega + M_\omega)^{-2}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{\omega^{2\alpha}}.$$

- On a, en utilisant (IV.32),

$$\begin{aligned} D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right) &= \{\varphi \in D\,(L_\omega + M_\omega) : (L_\omega + M_\omega)\,\varphi \in D\,(L_\omega + M_\omega)\} \\ &= \left\{\varphi \in W^{2,p}(\Omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } 2\Delta_y \varphi + \sum_{i=1}^n a_i D_i \varphi - \omega^\alpha \varphi \in W^{2,p}(\Omega) \text{ avec} \right. \\ &\qquad \left. 2\Delta_y \varphi + \sum_{i=1}^n a_i D_i \varphi - \omega^\alpha \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} \\ &= \left\{\varphi \in W^{4,p}(\Omega) : \varphi = \Delta_y \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right) &= \{\varphi \in D(L_\omega - M_\omega) : (L_\omega - M_\omega)\varphi \in D(L_\omega - M_\omega)\} \\
&= \Bigg\{\varphi \in W^{2,p}(\Omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } \sum_{i=1}^n a_i D_i\varphi - \omega^\alpha\varphi \in W^{2,p}(\Omega) \text{ avec} \\
&\qquad \sum_{i=1}^n a_i D_i\varphi - \omega^\alpha\varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\Bigg\} \\
&= \left\{\varphi \in W^{2,p}(\Omega) : \sum_{i=1}^n a_i D_i\varphi \in W^{2,p}(\Omega),\ \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right) \subset D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right).$$

- De plus, on a pour tout $\varphi \in D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)$ et pour presque tout $y \in \Omega$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2\right)\varphi(y) \\
&= -\Delta_y^2\varphi(y) - \frac{1}{2}\Delta_y\left(\sum_{i=1}^n a_i(y)D_i\varphi(y)\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i(y)D_i(\Delta_y\varphi)(y) + \omega^\alpha\Delta_y\varphi(y) \\
&= -\Delta_y^2\varphi(y) - \sum_{i=1}^n a_i(y)D_i(\Delta_y\varphi)(y) - \sum_{i,k=1}^n (D_k a_i) D_k D_i\varphi(y) - \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^n \left(D_k^2 a_i\right) D_i\varphi(y) + \omega^\alpha\Delta_y\varphi(y).
\end{aligned}$$

- Maintenant, pour tout $g \in L^p(\Omega)$

$$[M_\omega; L_\omega](L_\omega + M_\omega)^{-2} g = \left(\sum_{i,k=1}^n \left(D_k^2 a_i\right) D_i + 2\sum_{i,k=1}^n (D_k a_i) D_k D_i\right)(L_\omega + M_\omega)^{-1}(L_\omega + M_\omega)^{-1} g,$$

et, comme dans l'Exemple 1 (en utilisant les mêmes arguments et (IV.31)), il existe $C > 0$ tel que pour tout $\omega > 0$, il existe $\gamma > 0$

$$\left\|[M_\omega; L_\omega](L_\omega + M_\omega)^{-2} g\right\| \leqslant \frac{C}{\omega^\gamma}\|g\|.$$

Par conséquent, toutes les hypothèses sont vérifiées, on peut appliquer le Théorème IV.13 au problème aux limites et quasi-elliptique d'ordre quatre suivant pour $\omega > 0$ assez grand

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y_i\partial x}(x,y) - \omega^\alpha\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \Delta_y^2 u(x,y) - \sum_{i=1}^n a_i(y)\frac{\partial(\Delta_y u)}{\partial y_i}(x,y) \\
-\displaystyle\sum_{i,k=1}^n \left(\frac{\partial a_i}{\partial y_k}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y_k\partial y_i}(x,y) - \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^n \left(\frac{\partial^2 a_i}{\partial y_k^2}\right)\frac{\partial u}{\partial y_i}(x,y) + \omega^\alpha\Delta_y u(x,y) = f(x,y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \Omega \\
u(x,\sigma) = \Delta_\sigma u(x,\sigma) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ \sigma \in \partial\Omega,
\end{array}\right.$$

dès que $f \in BUC^\theta(\mathbb{R}; L^p(\Omega))$.

Exemple 3.
On considère $X = C_0^\beta([c,d])$, $\beta \in]0,1[$, l'espace de Banach des fonctions g, β-höldériennes, à valeurs complexes, telles que

$$g(c) = g(d) = 0. \tag{IV.33}$$

On définit

$$\begin{cases} D(L_\omega) = D(M_\omega) = \left\{\varphi \in C^2([c,d]) : \varphi'' \in C_0^\beta([c,d]) \text{ et } \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\} \\ L_\omega\varphi(y) = \varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - \omega^\alpha\varphi(y),\ y \in [c,d] \\ M_\omega\varphi(y) = \varphi''(y),\ y \in [c,d]\,, \end{cases}$$

avec a vérifiant

$$a \in C^2([c,d]), a'' \in C_0^\beta([c,d]),\ a(c) = a(d) = 0,\ Im(a) \neq \{0\}. \tag{IV.34}$$

Alors, on peut vérifier toutes les hypothèses comme dans le premier exemple.

- D'après Lunardi [48], Proposition 0.2.1, p. 4, la fermeture dans la norme höldérienne des domaines $D(L_\omega) = D(M_\omega)$ coïncide exactement avec l'espace du petit β-Hölder $h_0^\beta([c,d])$ défini au Chapitre I, Section 2.2. Ainsi, L_ω, M_ω génèrent des semi-groupes analytiques généralisés, non fortement continus en 0 puisque

$$\overline{D(L_\omega)} = \overline{D(M_\omega)} = h_0^\beta([c,d]) \neq X;$$

 voir Lunardi [48], Corollary 3.1.32, (i), p. 110.
- M_ω est inversible dans $L(X)$ et admet (IV.26) pour inverse. De plus, en utilisant Engel-Nagel [17], p. 171, et le même raisonnement que dans l'Exemple 1, on obtient que L_ω est inversible dans $L(X)$.
- En vertu de (IV.34), on a

$$\begin{aligned} &D(M_\omega L_\omega) \\ &= \{\varphi \in D(L_\omega) : L_\omega\varphi \in D(M_\omega)\} \\ &= \Big\{\varphi \in C^2([c,d]) : \varphi'' + a\varphi' - \omega^\alpha\varphi \in C^2([c,d]),\ \varphi'', (\varphi'' + a\varphi' - \omega^\alpha\varphi)'' \in C_0^\beta([c,d])\ , \\ &\qquad \varphi(\xi) = \varphi''(\xi) + a(\xi)\varphi'(\xi) - \omega^\alpha\varphi(\xi) = 0,\ \xi \in \{c,d\}\} \\ &= \Big\{\varphi \in C^3([c,d]) : \varphi'' + a\varphi' \in C^2([c,d]),\ (\varphi'' + a\varphi' - \omega^\alpha\varphi)'' \in C_0^\beta([c,d]),\ \varphi''(\xi) = \varphi(\xi) = 0,\ \xi \in \{c,d\}\Big\} \\ &= \Big\{\varphi \in C^4([c,d]) : \varphi^4 + a''\varphi' + 2a'\varphi'' + a\varphi^{(3)} - \omega^\alpha\varphi'' \in C_0^\beta([c,d]),\ \varphi''(\xi) = \varphi(\xi) = 0,\ \xi \in \{c,d\}\Big\} \\ &= \Big\{\varphi \in C^4([c,d]) : \varphi^4 \in C_0^\beta([c,d]), \varphi''(\xi) = \varphi(\xi) = 0,\ \xi \in \{c,d\}\Big\}\,, \end{aligned}$$

 d'où

$$\begin{cases} D(M_\omega L_\omega) = D(L_\omega M_\omega) = D([M_\omega; L_\omega]) = \\ \left\{\varphi \in C^4([c,d]) : \varphi^{(4)} \in C_0^\beta([c,d]) \text{ et } \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\} \\ (M_\omega L_\omega)\varphi(y) = \varphi^{(4)}(y) + a(y)\varphi^{(3)}(y) + 2a'(y)\varphi''(y) + a''(y)\varphi'(y) - \omega^\alpha\varphi''(y),\ y \in [c,d] \\ (L_\omega M_\omega)\varphi(y) = \varphi^{(4)}(y) + a(y)\varphi^{(3)}(y) - \omega^\alpha\varphi''(y),\ y \in [c,d] \\ [M_\omega; L_\omega]\,\varphi(y) = 2a'(y)\varphi''(y) + a''(y)\varphi'(y),\ y \in [c,d]\,. \end{cases}$$

 De plus

$$\begin{cases} D(L_\omega - M_\omega) = \left\{\varphi \in C^2([c,d]) : \varphi'' \in C_0^\beta([c,d]) \text{ et } \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\} \\ (L_\omega - M_\omega)\varphi(y) = a(y)\varphi'(y) - \omega^\alpha\varphi(y),\ y \in [c,d]\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(L_\omega + M_\omega) = \left\{\varphi \in C^2([c,d]) : \varphi'' \in C_0^\beta([c,d]) \text{ et } \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\} \\ (L_\omega + M_\omega)\varphi(y) = 2\varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - \omega^\alpha\varphi(y),\ y \in [c,d]\,, \end{cases}$$

 ce qui implique que $L_\omega - M_\omega$ est fermé, $L_\omega + M_\omega$ est inversible dans $L(X)$ et, comme pour (IV.25), on obtient l'inégalité suivante

$$\left\|(L_\omega + M_\omega)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{\omega^\alpha}, \qquad \left\|(L_\omega + M_\omega)^{-2}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{\omega^{2\alpha}}.$$

- On a, en utilisant (IV.34),

$$D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right) = \left\{\varphi \in C^4([c,d]) : \varphi^{(4)} \in C_0^\beta([c,d]) \text{ et } \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\},$$

et

$$D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right) = \left\{\varphi \in C^3([c,d]) : \varphi^{(3)} \in C_0^\beta([c,d]) \text{ et } \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\};$$

ainsi

$$D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right) \subset D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right).$$

- Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\omega > 0$

$$\left\| [M_\omega; L_\omega] (L_\omega + M_\omega)^{-2} \right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{\omega^\gamma},$$

où $\gamma = \begin{cases} 2\alpha \text{ si } 0 < \omega < 1, \\ \alpha \text{ si } \omega \geqslant 1. \end{cases}$

Par conséquent, toutes les hypothèses sont vérifiées, on peut appliquer le Théorème IV.13 au problème aux limites et quasi-elliptique d'ordre quatre suivant pour $\omega > 0$ assez grand

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + a(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) - \omega^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y) - a(y)\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,y) \\ -a'(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \dfrac{1}{2}a''(y)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \omega^\alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in [c,d] \\ u(x,c) = u(x,d) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,c) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,d) = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dès que $f \in BUC^\theta\left(\mathbb{R}; C_0^\beta([c,d])\right)$, $\theta \in]0,1[$.

Remarque IV.18 *De la même manière, on peut considérer la situation analogue dans $X = C_0^\beta(\overline{\Omega})$, Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, sous des conditions de bord de Dirichlet ou Neumann (ou mêlées). On applique ensuite les résultats de Campanato [9] et [10] pour avoir l'analyticité des semi-groupes générés par les opérateurs L_ω et M_ω. On remarque que (IV.33) est essentiel puisque l'espace $C_0^\beta(\overline{\Omega})$ ne peut pas être remplacé par $C^\beta(\overline{\Omega})$; voir Lunardi [48], Example 3.1.33, p. 110.*

1.6 Retour à l'équation initiale

On illustre ici la théorie opérationnelle précédente en construisant une paire d'opérateurs (L_ω, M_ω) satisfaisant (IV.3)-(IV.8). L'objectif est ensuite de pouvoir résoudre (IV.1).

Dans toute cette section, pour un opérateur linéaire P sur X et pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $P_\lambda = P - \lambda I$.

On suppose qu'il existe un réel positif fixé ω_0 tel que les opérateurs A et B vérifient

$$\begin{cases} B^2 - A_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X,\ \mathbb{R}^- \subset \rho(B^2 - A_{\omega_0}), \\ \exists C > 0,\ \forall \lambda \leqslant 0,\ \left\| \left(B^2 - A_{\omega_0} - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{1 + |\lambda|}, \end{cases} \tag{IV.35}$$

$$\begin{cases} (i)\ D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \subset D(B), \\ (ii)\ D\left(B^2 - A\right) \subset D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2} B\right), \end{cases} \tag{IV.36}$$

$$\forall \omega \geqslant \omega_0,\ \left\| \left[B; \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\right] \left(B^2 - A_\omega\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \chi(\omega), \tag{IV.37}$$

où
$$\chi : [\omega_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+ \text{ avec } \lim_{\omega \to +\infty} \chi(\omega) = 0.$$
On suppose que les opérateurs
$$\begin{cases} L_\omega := B - \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}, \\ M_\omega := -B - \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}, \end{cases}$$
vérifient les hypothèses suivantes
$$\begin{cases} \exists \delta > 0, \exists C > 0 : \forall \omega \geqslant \omega_0, \ S_\delta \subset \rho(L_\omega), \ S_\delta \subset \rho(M_\omega), \\ \left\|(L_\omega - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{|z|}, \ \left\|(M_\omega - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{|z|}, z \in S_\delta, \end{cases} \tag{IV.38}$$
où $S_\delta := \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \delta\right\}$; et
$$L_\omega, \ M_\omega \text{ sont inversibles dans } L(X). \tag{IV.39}$$

Voici quelques commentaires sur ces hypothèses.

Remarque IV.19

1. *L'hypothèse d'ellipticité (IV.35) est de type Krein [40]. D'après (IV.35), il existe* $\theta_1 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\delta_2 > 0$ *petit tel que le secteur*
$$\Sigma := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| \geqslant 2\theta_1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 2\delta_2\},$$
vérifie
$$\begin{cases} \Sigma \subset \rho\left(B^2 - A_{\omega_0}\right), \\ \exists C > 0, \forall \lambda \in \Sigma, \left\|\left(B^2 - A_{\omega_0} - \lambda I\right)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{1 + |\lambda|}. \end{cases}$$
2. *Pour tout* $\omega \geqslant \omega_0$, $A_\omega = A_{\omega_0} - (\omega - \omega_0)I$, *donc (IV.35) implique que*
$$\begin{cases} B^2 - A_\omega \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \ \Sigma \subset \rho(B^2 - A_\omega), \\ \exists C > 0, \forall \lambda \in \Sigma, \ \left\|\left(B^2 - A_\omega - \lambda I\right)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{1 + |\lambda + \omega_0 - \omega|}, \end{cases}$$
où C *est la constante, indépendante de* ω, *définie dans (IV.35). Ainsi l'opérateur* $-(B^2 - A_\omega)^{1/2}$ *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique généralisé uniformément borné sur* X.
3. *L'hypothèse (IV.36) est nécessaire puisque l'opérateur*
$$\left[B; \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\right] \left(B^2 - A_\omega\right)^{-1}$$
de l'hypothèse (IV.37) est défini sur X *tout entier si et seulement si*
$$\begin{cases} D\left(B^2 - A\right) \subset D\left(B\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right), \\ D\left(B^2 - A\right) \subset D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2} B\right), \end{cases}$$
donc si et seulement si (IV.36) est vérifiée.
De plus, dans le cas où X *est un espace de Hilbert, si* $B^2 - A$ *et* B^2 *sont des opérateurs auto-adjoints positifs sur* X, *d'après le Théorème de Heinz (voir Tanabe [57], Corollary, p. 45), l'hypothèse* (i) *de (IV.36) est déduite du fait qu'on a toujours* $D\left(B^2 - A\right) \subset D\left(B^2\right)$.

4. *L'hypothèse (IV.38) implique que L_ω et M_ω génèrent des semi-groupes analytiques généralisés sur X, $\left(e^{\xi L_\omega}\right)_{\xi>0}$, $\left(e^{\xi M_\omega}\right)_{\xi>0}$. Dans le cas où $B=0$, cette hypothèse est déduite de (IV.35).*

Remarque IV.20 *On compare ces hypothèses avec celles du cadre commutatif pour les espaces de Hölder (voir Chapitre III, Section 2.4).*

1. *Les hypothèses (IV.35) et (IV.38) sont équivalentes à celles du cadre commutatif au paramètre ω près.*
2. *Concernant (IV.36), (i) est l'hypothèse (III.25) utilisée dans le cas commutatif et implique (ii) si (III.27) est vérifiée.*
3. *L'hypothèse de non commutativité (IV.37) supposée ici est beaucoup plus générale que l'hypothèse de commutativité des résolvantes (III.27).*
4. *L'hypothèse (IV.39) était déduite de (III.23)-(III.28) dans le cadre commutatif.*

On veut montrer que les opérateurs $L_\omega = B - \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}$ et $M_\omega = -B - \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}$ vérifient les hypothèses (IV.3)-(IV.8).

Lemme IV.21 *On suppose (IV.35)-(IV.36).*

1. *Les domaines des opérateurs sont*
$$\begin{cases} D(L_\omega) = D(M_\omega) = D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right), \\ D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right) = D\left(B^2 - A\right), \\ D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right) = D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \cap D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2} B\right), \\ D(L_\omega M_\omega) = D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right), \\ D(M_\omega L_\omega) = D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right), \\ D\left([M_\omega; L_\omega]\right) = D\left(B^2 - A\right), \end{cases}$$
et
$$D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right) \subset D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right).$$
2. *L'opérateur $L_\omega + M_\omega$ est inversible dans $L(X)$ et*
$$(L_\omega + M_\omega)^{-1} = -\frac{1}{2}\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1/2} \in L(X).$$
3. *On a les extensions d'opérateurs suivantes*
$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}\left((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2\right) \subset A_\omega, \\ L_\omega - M_\omega \subset 2B. \end{cases}$$

Preuve.

- En vertu de (IV.36), on obtient les domaines suivants
$$D(L_\omega) = D(M_\omega) = D(B) \cap D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) = D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right).$$
- D'autre part
$$\begin{cases} D(L_\omega + M_\omega) = D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \\ (L_\omega + M_\omega)\varphi = -2\left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\varphi, \end{cases}$$
et, d'après (IV.35), $L_\omega + M_\omega$ est inversible dans $L(X)$ avec
$$(L_\omega + M_\omega)^{-1} = -\frac{1}{2}\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1/2}.$$

- De même

$$\left\{\begin{array}{l} D(L_\omega - M_\omega) = D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \\ (L_\omega - M_\omega)\varphi = 2B\varphi, \end{array}\right.$$

et, en vertu de (i) de (IV.36), $L_\omega - M_\omega \subset 2B$.

- De plus

$$\begin{aligned} \varphi \in D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right) \Leftrightarrow & \varphi \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \text{ et } -2\left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\varphi \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \\ \Leftrightarrow & \varphi \in D\left(B^2 - A\right), \end{aligned}$$

ainsi

$$\left\{\begin{array}{l} D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right) = D\left(B^2 - A\right) \\ (L_\omega + M_\omega)^2\varphi = 4\left(B^2 - A_\omega\right)\varphi. \end{array}\right.$$

Il est clair que $(L_\omega + M_\omega)^2 = 4\left(B^2 - A_\omega\right)$.

- De même, on a

$$\begin{aligned} \varphi \in D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right) \Leftrightarrow & \varphi \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \text{ et } 2B\varphi \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \\ \Leftrightarrow & \varphi \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \cap D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2} B\right) \subset D(B^2), \end{aligned}$$

grâce à (i) de (IV.36), et on en déduit

$$\left\{\begin{array}{l} D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right) = D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \cap D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2} B\right) \\ (L_\omega - M_\omega)^2\varphi = 4B^2\varphi. \end{array}\right.$$

Il est clair que l'opérateur $(L_\omega - M_\omega)^2$ admet $4B^2$ pour extension.

- De plus, grâce à (ii) de (IV.36), on obtient

$$D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right) \subset D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right).$$

- On a

$$\begin{aligned} \varphi \in D(L_\omega M_\omega) \Leftrightarrow & \varphi \in D\left(M_\omega\right) \text{ et } M_\omega\varphi \in D\left(L_\omega\right) \\ \Leftrightarrow & \varphi \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \text{ et } -B\varphi - \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\varphi \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \\ \Leftrightarrow & \varphi \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right), \end{aligned}$$

donc

$$\left\{\begin{array}{l} D(L_\omega M_\omega) = D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right) \\ L_\omega M_\omega\varphi = \left(B - \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\right)\left(-B - \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\right)\varphi. \end{array}\right.$$

- De la même manière on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} D(M_\omega L_\omega) = D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right) \\ M_\omega L_\omega\varphi = \left(-B - \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\right)\left(B - \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\right)\varphi. \end{array}\right.$$

- On remarque que $D(L_\omega M_\omega)$ n'est pas nécessairement égal à $D(M_\omega L_\omega)$ puisque pour $\varphi \in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)$

$$-B\varphi-\left(B^2-A\right)^{1/2}\varphi \in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right),$$

n'implique pas nécessairement

$$B\varphi-\left(B^2-A\right)^{1/2}\varphi=\left(-B\varphi-\left(B^2-A\right)^{1/2}\varphi\right)+2B\varphi \in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right).$$

Mais

$$\begin{aligned}
\varphi \in D(M_\omega L_\omega)\cap D(L_\omega M_\omega) \Leftrightarrow & \begin{cases} \varphi \in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right) \\ -B\varphi-\left(B^2-A\right)^{1/2}\varphi \in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right) \\ B\varphi-\left(B^2-A\right)^{1/2}\varphi \in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right) \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} \varphi \in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right) \\ B\varphi \in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right) \\ \left(B^2-A\right)^{1/2}\varphi \in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right) \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} \varphi \in D\left(B^2-A\right) \\ B\varphi \in D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\right) \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \varphi \in D\left(B^2-A\right)\cap D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}B\right).
\end{aligned}$$

De plus, grâce à (ii) de (IV.36), on a

$$D\left(B^2-A\right)\cap D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}B\right)=D\left(B^2-A\right),$$

et pour tout $\varphi \in D\left(B^2-A\right)\subset D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}B\right)\cap D\left(B\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)$

$$\begin{aligned}
[M_\omega;L_\omega]\varphi =& \left(-B-\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\right)\left(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\right)\varphi \\
&-\left(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\right)\left(-B-\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\right)\varphi \\
=&-B^2\varphi+B\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\varphi-\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}B\varphi+\left(B^2-A_\omega\right)\varphi \\
&+B^2\varphi+B\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\varphi-\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}B\varphi-\left(B^2-A_\omega\right)\varphi \\
=&2\left[B;\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\right]\varphi.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{cases} D\left([M_\omega;L_\omega]\right)=D\left(B^2-A\right) \\ [M_\omega;L_\omega]\varphi=2\left[B;\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\right]\varphi. \end{cases}$$

- Pour tout $\varphi \in D\left((L_\omega-M_\omega)^2-(L_\omega+M_\omega)^2\right)=D(B^2-A)\subset D(A)$, on a

$$\frac{1}{4}\left((L_\omega-M_\omega)^2-(L_\omega+M_\omega)^2\right)\varphi=B^2\varphi-\left(B^2-A_\omega\right)\varphi=A_\omega\varphi,$$

on en déduit

$$\frac{1}{4}\left((L_\omega-M_\omega)^2-(L_\omega+M_\omega)^2\right)\subset A_\omega.$$

■

Lemme IV.22 *On suppose (IV.35)-(IV.37). Alors, le commutateur est*

$$C_{L_\omega,M_\omega} = 4\left[B;\left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\right]\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1} \in L(X),$$

et (IV.8) est satisfaite.

Preuve. Pour tout $\varphi \in X$, on a $\psi = \left(B^2 - A_\omega\right)^{-1}\varphi \in D(B^2 - A)$ et, grâce à (i) et (ii) de (IV.36), on a

$$\psi \in D\left(B\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \cap D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2} B\right).$$

Donc

$$\begin{aligned} 4\left[B;\left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\right]\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1}\varphi =& 2\left[M_\omega; L_\omega\right]\left(L_\omega + M_\omega\right)^{-2}\varphi \\ =& C_{L_\omega,M_\omega}\varphi. \end{aligned}$$

De plus, d'après (IV.37), on a

$$\forall \omega \geqslant \omega_0,\ \left\|C_{L_\omega,M_\omega}\right\|_{L(X)} \leqslant \chi(\omega),$$

donc (IV.8) est satisfaite. ■

D'après ces lemmes, il est clair que les hypothèses (IV.35)-(IV.39) impliquent (IV.3)-(IV.8). On applique alors le Théorème IV.13 pour obtenir le résultat principal de cette section.

Théorème IV.23 *On suppose (IV.35)-(IV.39). Soit $f \in BUC^\theta(\mathbb{R};X)$, $\theta \in]0,1[$. Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$*

1. *l'équation (IV.1) admet une unique solution u telle que*

$$\left\{\begin{array}{l} u \in BUC^2(\mathbb{R};X) \cap BUC\left(\mathbb{R};D\left(A\right)\right), \\ u' \in BUC\left(\mathbb{R};D(B)\right), \end{array}\right.$$

satisfaisant

$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R},\ u(x) \in D\left(B^2 - A\right), \\ \forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right); \end{array}$$

2. *u vérifie la propriété de régularité maximale*

$$u'',\ Bu',\ Au,\ B^2u \in BUC^\theta\left(\mathbb{R};X\right).$$

On termine cette section en donnant deux méthodes d'inversibilité des opérateurs L_ω et M_ω. Il s'agit de conditions suffisantes. La première nécessite le lemme suivant.

Lemme IV.24 *On suppose (IV.35)-(IV.36) et*

$$\exists C,\varepsilon > 0,\ \forall \lambda \in \rho(B^2 - A_{\omega_0}),\ \left\|B\left(B^2 - A_{\omega_0} - \lambda I\right)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{|\lambda|^{1/2+\varepsilon}}. \qquad \text{(IV.40)}$$

Alors il existe $K > 0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega_0 + 2\delta_2$

$$\left\|B\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1/2}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{K}{\left(\omega - \omega_0\right)^\varepsilon},$$

où δ_2 est défini au point 1. de la Remarque IV.19.

Preuve. Il est clair que $B\left(B^2-A_\omega\right)^{-1/2}\in L(X)$. En notant que $z\mapsto z^{-1/2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ et en utilisant les notations et les résultats du point 1. de la Remarque IV.19, on a

$$B\left(B^2-A_\omega\right)^{-1/2}=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma z^{-1/2}B\left(B^2-A_{\omega_0}-(\omega_0-\omega+z)I\right)^{-1}dz,$$

où γ est la courbe orientée positivement du secteur

$$\{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}:|\arg z|\geqslant\delta_1\}\cup\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant\delta_2\},$$

où $2\theta_1<\delta_1<\pi$.

On pose $\gamma:=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3$, où

$$\begin{aligned}\gamma_1&:=\left\{re^{-i\delta_1}:\delta_2\leqslant r<+\infty\right\},\\ \gamma_2&:=\left\{\delta_2e^{i\theta}:-\delta_1\leqslant\theta\leqslant\delta_1\right\},\\ \gamma_3&:=\left\{re^{i\delta_1}:\delta_2\leqslant r<+\infty\right\}.\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $\omega':=\omega-\omega_0$, il vient

$$B\left(B^2-A_\omega\right)^{-1/2}=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma z^{-1/2}B\left(B^2-A_{\omega_0}-(z-\omega')I\right)^{-1}dz.$$

D'après (IV.40), on a

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\gamma_1}z^{-1/2}B\left(B^2-A_{\omega_0}-(z-\omega')I\right)^{-1}dz\right\|&\leqslant C\int_{\delta_2}^{+\infty}r^{-1/2}\left|re^{-i\delta_1}-\omega'\right|^{-1/2-\varepsilon}dr\\ &\leqslant C\int_{\delta_2}^{+\infty}r^{-1/2}(\omega')^{-1/2-\varepsilon}\left|\frac{r}{\omega'}e^{-i\delta_1}-1\right|^{-1/2-\varepsilon}dr,\end{aligned}$$

on pose

$$s=\frac{r}{\omega'},\qquad ds=\frac{dr}{\omega'},$$

et on obtient

$$\left\|\int_{\gamma_1}z^{-1/2}B\left(B^2-A_{\omega_0}-(z-\omega')I\right)^{-1}dz\right\|\leqslant C(\omega')^{-\varepsilon}\int_0^{+\infty}s^{-1/2}\left|se^{-i\delta_1}-1\right|^{-1/2-\varepsilon}ds,$$

la dernière intégrale est convergente car il existe $K>0$ tel que pour s assez petit

$$s^{-1/2}\left|se^{-i\delta_1}-1\right|^{-1/2-\varepsilon}\leqslant Ks^{-1/2},$$

et pour s assez grand

$$s^{-1/2}\left|se^{-i\delta_1}-1\right|^{-1/2-\varepsilon}\leqslant Ks^{-1-\varepsilon}.$$

Ainsi

$$\left\|\int_{\gamma_1}z^{-1/2}B\left(B^2-A_{\omega_0}-(z-\omega')I\right)^{-1}dz\right\|\leqslant\frac{C}{(\omega')^\varepsilon},$$

et de même

$$\left\|\int_{\gamma_3}z^{-1/2}B\left(B^2-A_{\omega_0}-(z-\omega')I\right)^{-1}dz\right\|\leqslant\frac{C}{(\omega')^\varepsilon}.$$

Enfin, pour $\omega' \geqslant 2\delta_2$

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{\gamma_2} z^{-1/2} B\left(B^2 - A_{\omega_0} - (z-\omega')I\right)^{-1} dz\right\| \leqslant & C\int_{-\delta_1}^{\delta_1} \delta_2^{1/2}\left|\delta_2 e^{i\theta} - \omega'\right|^{-1/2-\varepsilon} d\theta \\
\leqslant & C\delta_2^{1/2}(\omega')^{-1/2-\varepsilon}\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\left|\frac{\delta_2}{\omega'}e^{i\theta} - 1\right|^{-1/2-\varepsilon} d\theta \\
\leqslant & C\delta_2^{1/2}(\omega')^{-1/2-\varepsilon}\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\left|\frac{1}{2}\right|^{-1/2-\varepsilon} d\theta \\
\leqslant & \frac{C}{(\omega')^{1/2+\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Ainsi il existe $K > 0$ tel que pour $\omega' \geqslant 2\delta_2$

$$\left\|B\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1/2}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{K}{(\omega')^\varepsilon}.$$

■

Proposition IV.25 *On suppose (IV.35)-(IV.36) et (IV.40). Il existe $\omega_1 > \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega_1$, les opérateurs L_ω, M_ω sont inversibles dans $L(X)$ et*

$$\begin{cases} L_\omega^{-1} = -\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1/2}\left(I - B\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1/2}\right)^{-1} \in L(X), \\ M_\omega^{-1} = \left(B^2 - A_\omega\right)^{-1/2}\left(I + B\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1/2}\right)^{-1} \in L(X). \end{cases}$$

Preuve. Pour tout $\varphi \in D\left(L_\omega\right) = D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \subset D(B)$, on a

$$\begin{aligned}
L\varphi =& B\varphi - \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\varphi \\
=& -\left(I - B\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1/2}\right)\left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\varphi.
\end{aligned}$$

D'après le lemme précédent, on a pour tout $\omega \geqslant \omega_0 + 2\delta_2$

$$\left\|B\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1/2}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{K}{(\omega - \omega_0)^\varepsilon}.$$

Donc, il existe $\omega_1 \geqslant \omega_0 + 2\delta_2$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega_1$,

$$\left\|B\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1/2}\right\|_{L(X)} < 1,$$

et l'opérateur $\left(I - B\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1/2}\right)$ est inversible dans $L(X)$ pour $\omega \geqslant \omega_1$. Ainsi, L_ω est inversible dans $L(X)$ et

$$L_\omega^{-1} = -\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1/2}\left(I - B\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1/2}\right)^{-1} \in L(X).$$

De même, pour tout $\varphi \in D\left(M_\omega\right) = D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \subset D(B)$, on a

$$\begin{aligned}
M\varphi =& -B\varphi - \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\varphi \\
=& -\left(I + B\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1/2}\right)\left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\varphi.
\end{aligned}$$

L'opérateur $\left(I + B\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1/2}\right)$ est inversible dans $L(X)$ pour $\omega \geqslant \omega_1$. Ainsi, M_ω est inversible dans $L(X)$ et

$$M_\omega^{-1} = -\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1/2}\left(I + B\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1/2}\right)^{-1} \in L(X).$$

■

Proposition IV.26 *On suppose (IV.35)-(IV.38) et*

$$D(A) \subset D(B^2), \tag{IV.41}$$

$$D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(-B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\right) = D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\right), \tag{IV.42}$$

$$\left\{\begin{array}{l} [\omega_0, +\infty[\subset \rho(A), \\ \exists C > 0,\, \forall \lambda \geqslant 0,\, \left\|(A_{\omega_0}-\lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{1+\lambda}. \end{array}\right. \tag{IV.43}$$

Alors il existe $\omega_1 \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega_1$, les opérateurs L_ω, M_ω sont inversibles dans $L(X)$ et

$$\left\{\begin{array}{l} L_\omega^{-1} = \left(B + \left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\right) A_\omega^{-1} \left(I + C_\omega\right)^{-1} \in L(X), \\ M_\omega^{-1} = \left(-B + \left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\right) A_\omega^{-1} \left(I - C_\omega\right)^{-1} \in L(X), \end{array}\right.$$

où $C_\omega := \left[B; \left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\right] A_\omega^{-1} \in L(X)$.

Preuve. De (IV.43), on déduit que, pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, A_ω est inversible dans $L(X)$ et

$$\left\|A_\omega^{-1}\right\|_{L(X)} = \left\|(A_{\omega_0}-(\omega-\omega_0)I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{1+\omega-\omega_0}. \tag{IV.44}$$

Maintenant, en utilisant le point 1. du Lemme IV.21 et (IV.42), on a

$$D(L_\omega M_\omega) = D(M_\omega L_\omega),$$

et, en vertu de (IV.41), on obtient

$$D(A) = D(B^2-A) = D(L_\omega M_\omega) \cap D(M_\omega L_\omega) = D(L_\omega M_\omega) = D(M_\omega L_\omega).$$

Pour $\varphi \in D(L_\omega M_\omega) = D(A)$, on a

$$\varphi \in D\left(B\left(B^2-A\right)^{1/2}\right) \cap D\left(\left(B^2-A\right)^{1/2} B\right),$$

grâce à (IV.36), et de plus

$$\begin{aligned} L_\omega M_\omega \varphi &= -\left[B; \left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\right]\varphi - A_\omega\varphi \\ &= -\left(I + \left[B; \left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\right] A_\omega^{-1}\right) A_\omega\varphi \\ &= -\left(I + C_\omega\right) A_\omega \varphi, \end{aligned}$$

et

$$C_\omega = \left[B; \left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\right] \left(B^2-A_\omega\right)^{-1} \left(B^2-A_\omega\right) A_\omega^{-1}.$$

En utilisant (IV.44), on obtient

$$\begin{aligned} \left\|\left(B^2-A_\omega\right) A_\omega^{-1}\right\|_{L(X)} &= \left\|\left(B^2 A_{\omega_0}^{-1} A_{\omega_0} A_\omega^{-1} - I\right)\right\|_{L(X)} \\ &\leqslant \left\|B^2 A_{\omega_0}^{-1}\right\|_{L(X)} \left\|A_{\omega_0} A_\omega^{-1}\right\|_{L(X)} + 1 \\ &\leqslant K \left\|(A_\omega + (\omega-\omega_0)I) A_\omega^{-1}\right\|_{L(X)} + 1 \\ &\leqslant K \left\|I + (\omega-\omega_0) A_\omega^{-1}\right\|_{L(X)} + 1 \\ &\leqslant K(1+C) + 1, \end{aligned}$$

et avec (IV.37), on en déduit

$$\begin{aligned}\|C_\omega\|_{L(X)} \leqslant &\left\| \left[B; \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\right] \left(B^2 - A_\omega\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \left\| \left(B^2 - A_\omega\right) A_\omega^{-1} \right\|_{L(X)} \\ \leqslant &(K + KC + 1)\chi(\omega),\end{aligned}$$

or, $\lim\limits_{\omega \to +\infty} \chi(\omega) = 0$, donc il existe $\omega_1 \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega_1$

$$\|C_\omega\|_{L(X)} < 1,$$

et l'opérateur $(I + C_\omega)$ est inversible dans $L(X)$ pour $\omega \geqslant \omega_1$. Ainsi $L_\omega M_\omega$ est inversible dans $L(X)$ pour $\omega \geqslant \omega_1$ et

$$(L_\omega M_\omega)^{-1} = -A_\omega^{-1} \left(I + C_\omega\right)^{-1}.$$

De même pour $\varphi \in D(M_\omega L_\omega) = D(A)$, on a

$$\begin{aligned}M_\omega L_\omega \varphi &= \left[B; \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\right] \varphi - A_\omega \varphi \\ &= -\left(I - \left[B; \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\right] A_\omega^{-1}\right) A_\omega \varphi \\ &= -\left(I - C_\omega\right) A_\omega \varphi.\end{aligned}$$

Ainsi $M_\omega L_\omega$ est inversible dans $L(X)$ pour $\omega \geqslant \omega_1$ et

$$(M_\omega L_\omega)^{-1} = -A_\omega^{-1} \left(I - C_\omega\right)^{-1}.$$

Maintenant, pour $\varphi \in X$

$$L_\omega M_\omega (L_\omega M_\omega)^{-1} \varphi = \varphi,$$

donc $M_\omega (L_\omega M_\omega)^{-1} \in L(X)$ est l'inverse à droite de L_ω. Pour construire l'inverse à gauche, on remarque que pour $\psi \in D(M_\omega L_\omega)$

$$(M_\omega L_\omega)^{-1} M_\omega L_\omega \psi = \psi,$$

et, d'après (IV.38), $1 \in \rho(L_\omega)$, donc pour $\varphi \in D(L_\omega)$, $(L_\omega - I)^{-1}\varphi \in D(L_\omega^2) = D(M_\omega L_\omega)$, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}(L_\omega - I)(M_\omega L_\omega)^{-1} M_\omega (L_\omega - I)^{-1} L_\omega \varphi =& (L_\omega - I)(M_\omega L_\omega)^{-1} M_\omega L_\omega (L_\omega - I)^{-1} \varphi \\ =& (L_\omega - I)(L_\omega - I)^{-1} \varphi \\ =& \varphi,\end{aligned}$$

donc L_ω est inversible dans $L(X)$ pour $\omega \geqslant \omega_1$ et

$$\begin{aligned}L_\omega^{-1} =& M_\omega (L_\omega M_\omega)^{-1} \\ =& \left(B + \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\right) A_\omega^{-1} \left(I + C_\omega\right)^{-1}.\end{aligned}$$

De même pour $\varphi \in X$

$$M_\omega L_\omega (M_\omega L_\omega)^{-1} \varphi = \varphi,$$

donc $L_\omega (M_\omega L_\omega)^{-1} \in L(X)$ est l'inverse à droite de M_ω. Pour construire l'inverse à gauche, on remarque que pour $\psi \in D(L_\omega M_\omega)$

$$(L_\omega M_\omega)^{-1} L_\omega M_\omega \psi = \psi,$$

et, d'après (IV.38), $1 \in \rho(M_\omega)$, donc pour $\varphi \in D(M_\omega)$, $(M_\omega - I)^{-1}\varphi \in D(M_\omega^2) = D(L_\omega M_\omega)$, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}(M_\omega - I)(L_\omega M_\omega)^{-1} L_\omega (M_\omega - I)^{-1} M_\omega \varphi =& (M_\omega - I)(L_\omega M_\omega)^{-1} L_\omega M_\omega (M_\omega - I)^{-1} \varphi \\ =& (M_\omega - I)(M_\omega - I)^{-1} \varphi \\ =& \varphi,\end{aligned}$$

donc M_ω est inversible dans $L(X)$ pour $\omega \geqslant \omega_1$ et

$$\begin{aligned} M_\omega^{-1} =& L_\omega (M_\omega L_\omega)^{-1} \\ =& \left(-B + \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\right) A_\omega^{-1} \left(I - C_\omega\right)^{-1}. \end{aligned}$$

■

Remarque IV.27 *La Proposition IV.26 généralise le Lemma 7, p. 431 de Favini et al. [26].*

2 Cadre L^p

2.1 Introduction et hypothèses

On suppose ici que $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$, $1 < p < \infty$. On n'exige pas de régularité supplémentaire sur f, contrairement au cadre höldérien, mais on suppose que

$$X \text{ est un espace UMD.} \tag{IV.45}$$

Les hypothèses sur les opérateurs L_ω et M_ω sont les suivantes. Il existe un réel positif fixé ω_0 tel que

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \omega \geqslant \omega_0,\ ]-\infty, 0] \subset \rho\left(-L_\omega\right),\ ]-\infty, 0] \subset \rho\left(-M_\omega\right); \\ \exists C \geqslant 1,\ \forall \omega \geqslant \omega_0,\ \forall \lambda > 0,\ \left\|\left(L_\omega - \lambda I\right)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{\lambda},\ \left\|\left(M_\omega - \lambda I\right)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{\lambda}, \end{array}\right. \tag{IV.46}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \omega \geqslant \omega_0,\ \forall s \in \mathbb{R},\ (-L_\omega)^{is}, (-M_\omega)^{is} \in L(X); \\ \exists \theta_L, \theta_M \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[, \exists C \geqslant 1,\ \forall \omega \geqslant \omega_0,\ \forall s \in \mathbb{R}, \\ \quad \left\|(-L_\omega)^{is}\right\|_{L(X)} \leqslant C e^{\theta_L |s|},\ \left\|(-M_\omega)^{is}\right\|_{L(X)} \leqslant C e^{\theta_M |s|}. \end{array}\right. \tag{IV.47}$$

Pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, on suppose également

$$D(L_\omega) = D(M_\omega), \tag{IV.48}$$

$$D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right) \subseteq D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right), \tag{IV.49}$$

$$L_\omega + M_\omega \text{ est inversible dans } L(X). \tag{IV.50}$$

L'hypothèse de non commutativité est la suivante

$$\forall \omega \geqslant \omega_0,\ \|C_{L_\omega, M_\omega}\|_{L(X)} \leqslant \chi(\omega), \tag{IV.51}$$

où le commutateur est

$$C_{L_\omega, M_\omega} := (L_\omega + M_\omega)\left[(L_\omega - M_\omega); (L_\omega + M_\omega)^{-1}\right](L_\omega + M_\omega)^{-1},$$

et

$$\chi : [\omega_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+ \text{ avec } \lim_{\omega \to +\infty} \chi(\omega) = 0.$$

On rappelle que, dans de nombreux cas concrets, $\chi(\omega) = \dfrac{C}{\omega^\alpha}$, où C, $\alpha > 0$.

D'après l'hypothèse (IV.49), $(L_\omega + M_\omega)^2$ est principal sur $(L_\omega - M_\omega)^2$. On cherche alors une solution classique de (IV.2), c'est-à-dire une fonction u telle que

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(\mathbb{R}; X) \cap L^p\left(\mathbb{R}; D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)\right) \\ u' \in L^p(\mathbb{R}; D(L_\omega - M_\omega)), \end{cases}$$

et satisfaisant (IV.2).

Bien évidemment, la solution classique u vérifiera alors

$$u \in L^p\left(\mathbb{R}; D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right)\right),$$

puisque

$$(L_\omega - M_\omega)^2 u = -4u'' - 4(L_\omega - M_\omega) u' + (L_\omega + M_\omega)^2 u + 4f.$$

Les hypothèses données précédemment nécessitent quelques commentaires.

Remarque IV.28 *On compare ces hypothèses avec celles du cadre commutatif pour les espaces L^p (voir Chapitre III, Section 3).*

1. *Sous les hypothèses (IV.46)-(IV.47), on a $(-L_\omega) \in BIP(\theta_L, X)$, $(-M_\omega) \in BIP(\theta_M, X)$ et sont inversibles dans $L(X)$. Ainsi (IV.46)-(IV.47) est équivalent à (III.40)-(III.41) au paramètre ω près.*
2. *L'hypothèse (IV.48) a également été utilisée dans le cadre commutatif.*
3. *L'hypothèse (III.39) d'égalité des domaines de $L_\omega M_\omega$ et $M_\omega L_\omega$ implique l'inclusion des domaines (IV.49).*
4. *Dans le cadre commutatif, l'hypothèse (IV.50) était déduite de (IV.48) et de $0 \in \rho(L_\omega) \cap \rho(M_\omega)$.*
5. *On suppose ici l'hypothèse de non commutativité (IV.51) qui est beaucoup plus générale que l'hypothèse forte de commutativité des résolvantes (III.42).*

Remarque IV.29

1. *Les hypothèses (IV.48)-(IV.51) ont également été utilisées dans le cadre höldérien, voir Section 1.*
2. *L'hypothèse (IV.46) implique que $D(L_\omega)$ et $D(M_\omega)$ sont denses dans l'espace UMD X (qui est réflexif) ; voir Haase [37], Proposition 1.1, p. 19.*
3. *Les hypothèses (IV.46)-(IV.47) impliquent que, pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, $(-L_\omega) \in BIP(\theta_L, X)$ et $(-M_\omega) \in BIP(\theta_M, X)$ donc L_ω et M_ω génèrent des semi-groupes analytiques uniformément bornés sur X, $\left(e^{\xi L_\omega}\right)_{\xi \geqslant 0}$, $\left(e^{\xi M_\omega}\right)_{\xi \geqslant 0}$; voir Prüss-Sohr [54], Theorem 2, p. 437. Puisque $0 \in \rho(L_\omega) \cap \rho(M_\omega)$, on peut appliquer la Proposition I.64, donc il existe des constantes positives C, δ (indépendantes de ω d'après (IV.46)-(IV.47)) telles que pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, $\xi > 0$ et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*

$$\begin{cases} \left\|e^{\xi L_\omega}\right\|_{L(X)} \leqslant C e^{-\delta\xi} \leqslant C, \\ \left\|e^{\xi M_\omega}\right\|_{L(X)} \leqslant C e^{-\delta\xi} \leqslant C, \\ \left\|L_\omega^k e^{\xi L_\omega}\right\|_{L(X)} \leqslant \left(\dfrac{kC}{\xi}\right)^k e^{-\delta\xi}, \\ \left\|M_\omega^k e^{\xi M_\omega}\right\|_{L(X)} \leqslant \left(\dfrac{kC}{\xi}\right)^k e^{-\delta\xi}. \end{cases} \tag{IV.52}$$

4. *Si on suppose $0 \in \rho(L_\omega) \cap \rho(M_\omega)$ et une hypothèse de non commutativité différente de (IV.51) de type Labbas-Terreni [42], alors (IV.50) est satisfaite ; voir Monniaux-Prüss [49], Theorem 1, p. 4790.*
5. *Sous les hypothèses (IV.45)-(IV.51), la Proposition III.27, les Lemmes IV.4, IV.5 et IV.6 ainsi que la Remarque IV.7 sont vérifiés.*

L'étude est organisée comme suit.

Dans la Section 2.2, on montre l'existence et l'unicité de la solution classique. On utilise, pour cela, la représentation de la solution trouvée dans le cadre höldérien (voir (IV.15)). On donne ensuite une application de cette théorie dans la Section 2.3. Enfin, dans la Section 2.4, on étudie le retour à l'équation initiale (IV.1).

Dans le but de simplifier, quand la dépendance de ω n'est pas utile, on omet ω dans les notations, par exemple, on note L_ω, M_ω... par L, M...

2.2 Principaux résultats

On rappelle la démarche adoptée dans le cadre höldérien, et qui est également valable dans notre cadre L^p. Si u est une solution classique de (IV.2), alors $v := (L_\omega + M_\omega)^2 u$ vérifie l'équation intégrale suivante

$$v + R_\omega(v) = F_\omega(f),$$

où pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$F_\omega(f)(x) = (L_\omega + M_\omega) \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M_\omega} f(s)ds + (L_\omega + M_\omega) \int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L_\omega} f(s)ds,$$

et

$$R_\omega(v)(x) = \frac{1}{4}(L_\omega + M_\omega) \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds - \frac{1}{4}(L_\omega + M_\omega) \int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds.$$

Pour $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$, le but est de trouver $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$

1. $F_\omega(f) \in L^p(\mathbb{R}; X)$,
2. $I + R_\omega$ est inversible dans $L(L^p(\mathbb{R}; X))$.

Dans ce cas, pour $\omega \geqslant \omega^*$, on peut déduire que s'il existe une solution classique u de (IV.2), alors u est uniquement déterminé par la formule de représentation (IV.15) :

$$u = (L_\omega + M_\omega)^{-2} \left\{ (I + R_\omega)^{-1} (F_\omega(f)) \right\}.$$

Ainsi, pour obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour l'équation (IV.2), il suffit d'étudier la régularité de cette représentation.

On pose alors pour une fonction g donnée de $\mathbb{R}$ dans X et pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$G(g)(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{(x-s)M_\omega} g(s)ds, \qquad H(g)(x) = \int_{x}^{+\infty} e^{(s-x)L_\omega} g(s)ds.$$

On rappelle que la Proposition III.27 du Chapitre III est vérifiée. De plus, la constante K y est indépendante de ω.

On obtient grâce à cette proposition les régularités de F_ω et de R_ω.

Corollaire IV.30 *On suppose (IV.45)-(IV.50). Soit $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$, $1 < p < \infty$. Alors $F_\omega(f) \in L^p(\mathbb{R}; X)$.*

Preuve. On rappelle que

$$F(f) = (L + M)M^{-1}MG(f) + (L + M)L^{-1}LH(f). \tag{IV.53}$$

$(L + M)M^{-1}$, $(L + M)L^{-1} \in L(X)$ d'après le Lemme IV.5, point 1., donc on a le résultat par la Proposition III.27. ■

Corollaire IV.31 *On suppose (IV.45)-(IV.51). Soit $1 < p < \infty$. Alors $R_\omega \in L\left(L^p\left(\mathbb{R}; X\right)\right)$ et il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$*

$$\left\|R_\omega\right\|_{L(L^p(\mathbb{R};X))} < 1.$$

Ainsi $I + R_\omega$ est inversible dans $L\left(L^p\left(\mathbb{R}; X\right)\right)$ pour $\omega \geqslant \omega^*$.

Preuve. Soit $v \in L^p\left(\mathbb{R}; X\right)$. $C_{L,M} \in L(X)$, d'après le Lemme IV.5, point 4., donc on a $C_{L,M}v \in L^p(\mathbb{R}; X)$. Alors, en écrivant

$$R(v) = \frac{1}{4}(L+M)M^{-1}MG(C_{L,M}v) - \frac{1}{4}(L+M)L^{-1}LH(C_{L,M}v), \tag{IV.54}$$

on a $R(v) \in L^p\left(\mathbb{R}; X\right)$ par la Proposition III.27.

On fait apparaître la dépendance de ω. Pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, on a grâce à (IV.51)

$$\begin{aligned}\left\|R_\omega(v)\right\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \leqslant & \frac{1}{4}K\left\|(L_\omega + M_\omega)M_\omega^{-1}\right\|_{L(X)}\left\|C_{L_\omega,M_\omega}\right\|_{L(X)}\left\|v\right\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \\ & + \frac{1}{4}K\left\|(L_\omega + M_\omega)L_\omega^{-1}\right\|_{L(X)}\left\|C_{L_\omega,M_\omega}\right\|_{L(X)}\left\|v\right\|_{L^p(\mathbb{R};X)} \\ \leqslant & C\chi(\omega)\left\|v\right\|_{L^p(\mathbb{R};X)}.\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\chi(\omega) = 0$, donc il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$

$$\left\|R_\omega\right\|_{L(L^p(\mathbb{R};X))} < 1.$$

Ainsi $I + R_\omega$ est inversible dans $L\left(L^p\left(\mathbb{R}; X\right)\right)$ pour $\omega \geqslant \omega^*$. ■

Remarque IV.32 *En vertu des corollaires précédents, on peut dire que s'il existe une solution classique de (IV.2), elle s'écrit sous la forme (IV.15) :*

$$u = \left(L_\omega + M_\omega\right)^{-2}\left\{\left(I + R_\omega\right)^{-1}\left(F_\omega(f)\right)\right\},$$

pour $\omega \geqslant \omega^*$. On déduit alors l'unicité de la solution classique et aussi, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) \in D\left(\left(L_\omega + M_\omega\right)^2\right)$, ce qui implique, grâce à l'hypothèse (IV.49), que $u(x) \in D\left(\left(L_\omega - M_\omega\right)^2\right)$.

On énonce alors le résultat fondamental de cette section.

Théorème IV.33 *On suppose (IV.45)-(IV.51). Soit $f \in L^p\left(\mathbb{R}; X\right)$, $1 < p < \infty$. Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, l'équation (IV.2) admet une unique solution classique u.*

Preuve. Soit $\omega > 0$ fixé tel que $\omega \geqslant \omega^*$. On note encore $L_\omega = L$, $M_\omega = M$ et $R_\omega = R$, $F_\omega = F$. On veut prouver que u défini par (IV.15) est l'unique solution classique de (IV.2). On réutilise, pour cela, la méthode de la démonstration du Théorème IV.13.

On pose

$$v := \left(I + R\right)^{-1}\left(F(f)\right) = \left(L + M\right)^2 u \in L^p\left(\mathbb{R}; X\right),$$

grâce aux Corollaires IV.30 et IV.31. Puisque $\left(L - M\right)^2\left(L + M\right)^{-2} \in L(X)$, on a

$$\left(L - M\right)^2 u = \left(L - M\right)^2\left(L + M\right)^{-2}\left(L + M\right)^2 u \in L^p\left(\mathbb{R}; X\right).$$

Ensuite

$$v = F(f) - R\left(v\right),$$

d'où

$$u = \left(L + M\right)^{-2}F(f) - \left(L + M\right)^{-2}R\left(v\right),$$

puis en utilisant (IV.53) et (IV.54), on obtient

$$v = (L+M)\left(G(f) + H(f) - \frac{1}{4}G(C_{L,M}v) + \frac{1}{4}H(C_{L,M}v)\right), \tag{IV.55}$$

et

$$u = (L+M)^{-1}\left(G(f) + H(f) - \frac{1}{4}G(C_{L,M}v) + \frac{1}{4}H(C_{L,M}v)\right). \tag{IV.56}$$

D'après la Proposition III.27, u est dérivable au sens des distributions sur $\mathbb{R}$ à valeurs vectorielles et

$$u' = (L+M)^{-1}\left(MG(f) - LH(f) - \frac{1}{4}MG(C_{L,M}v) - \frac{1}{4}LH(C_{L,M}v) - \frac{1}{2}C_{L,M}v\right), \tag{IV.57}$$

donc pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u'(x) \in D(L+M) = D(L-M)$ et comme $(L-M)(L+M)^{-1} \in L(X)$ (Lemme IV.5, point 1.)

$$(L-M)\,u' = (L-M)\,(L+M)^{-1}\,(L+M)\,u' \in L^p\,(\mathbb{R};X)\,.$$

De plus, en remplaçant (IV.55) dans (IV.57), on obtient

$$\begin{aligned} u' =& (L+M)^{-1}\left(MG(f) - LH(f) - \frac{1}{4}MG(C_{L,M}v) - \frac{1}{4}LH(C_{L,M}v)\right) \\ &- \frac{1}{2}\,(L+M)^{-1}\,C_{L,M}\,(L+M)\left(G(f) + H(f) - \frac{1}{4}G(C_{L,M}v) + \frac{1}{4}H(C_{L,M}v)\right). \end{aligned}$$

On obtient alors en utilisant le point 6. du Lemme IV.6

$$\begin{aligned} u' &= M\,(L+M)^{-1}\,G(f) - L\,(L+M)^{-1}\,H(f) \\ &-\frac{1}{4}M\,(L+M)^{-1}\,G(C_{L,M}v) - \frac{1}{4}L\,(L+M)^{-1}\,H(C_{L,M}v). \end{aligned} \tag{IV.58}$$

D'après la Proposition III.27, u' est dérivable au sens des distributions sur $\mathbb{R}$ à valeurs vectorielles et

$$\begin{aligned} u'' =& f + M\,(L+M)^{-1}\,MG(f) + L\,(L+M)^{-1}\,LH(f) \\ &- \frac{1}{4}M\,(L+M)^{-1}\,MG(C_{L,M}v) + \frac{1}{4}L\,(L+M)^{-1}\,LH(C_{L,M}v) \\ &+ \frac{1}{4}(L-M)\,(L+M)^{-1}\,C_{L,M}v \\ =& f + M\,(L+M)^{-1}\,MG(f) + L\,(L+M)^{-1}\,LH(f) \\ &- \frac{1}{4}M\,(L+M)^{-1}\,MG(C_{L,M}v) + \frac{1}{4}L\,(L+M)^{-1}\,LH(C_{L,M}v) \\ &+ \frac{1}{4}(L-M)\,(L+M)^{-1}\,C_{L,M}\,(L+M)\left(G(f) + H(f) - \frac{1}{4}G(C_{L,M}v) + \frac{1}{4}H(C_{L,M}v)\right). \end{aligned}$$

On obtient en utilisant le point 7. du Lemme IV.6

$$u'' = f + S_1G(f) + T_1H(f) - \frac{1}{4}S_1G(C_{L,M}v) + \frac{1}{4}T_1H(C_{L,M}v), \tag{IV.59}$$

où

$$S_1 = \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}(L-M)M\,(L+M)^{-1}\,,$$

et

$$T_1 = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}(L-M)L\,(L+M)^{-1}\,.$$

De plus, en utilisant (IV.56), (IV.58) et (IV.59), on a

$$u'' + (L-M)u' + \frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)u = f,$$

grâce au point 8. du Lemme IV.6. De plus $(L-M)u'$, $(L-M)^2\,u$, $(L+M)^2\,u$ et f sont dans $L^p\,(\mathbb{R};X)$ donc on peut déduire de cette dernière formule que $u'' \in L^p\,(\mathbb{R};X)$.

On vient de montrer que u défini par (IV.15) est une solution classique de (IV.2) et l'unicité de cette solution classique résulte de la Remarque IV.32. ■

2.3 Applications

On va considérer les exemples du cadre höldérien, voir Section 1.5. Pour le premier exemple, on se place dans un espace $X = L^p(\Omega)$, où $\Omega =]c,d[$. Le second exemple généralise le premier en prenant Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que dans ces exemples, les hypothèses (IV.48)-(IV.51) ont déjà été prouvées dans la Section 1.5. Il reste à prouver (IV.45)-(IV.47).

Exemple 1.
On considère sur $X = L^p\,(c,d)$, $1 < p < \infty$, qui est un espace UMD (d'après Exemple I.92, Chapitre I), les opérateurs définis par

$$\begin{cases} D(L_\omega) = D(M_\omega) = \left\{\varphi \in W^{2,p}\,(c,d) : \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\} \\ L_\omega\varphi(y) = \varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - \omega^\alpha\varphi(y),\ y \in \Omega \\ M_\omega\varphi(y) = \varphi''(y),\ y \in \Omega, \end{cases}$$

où $\omega > 0$, $\alpha > 0$ et avec, pour plus de simplicité,

$$a \in C^2([c,d]),\ a(c) = a(d) = 0,\ Im(a) \neq \{0\}.$$

D'après Seeley [55], L_ω et M_ω vérifient (IV.46)-(IV.47).

On peut appliquer le Théorème IV.33 au problème aux limites et quasi-elliptique d'ordre quatre suivant pour $\omega > 0$ assez grand

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + a(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(x,y) - \omega^\alpha\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y) - a(y)\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,y) \\ -a'(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \dfrac{1}{2}a''(y)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \omega^\alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in (c,d) \\ u(x,c) = u(x,d) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,c) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,d) = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dès que $f \in L^q\,(\mathbb{R};L^p\,(c,d))$, $1 < p,q < \infty$, en particulier dès que $f \in L^p\,(\mathbb{R}\times(c,d))$.

Exemple 2.
Soit Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. On considère sur $X = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, qui est un espace UMD, les opérateurs définis par

$$\begin{cases} D(L_\omega) = D(M_\omega) = \left\{\varphi \in W^{2,p}(\Omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\} \\ L_\omega\varphi(y) = \Delta_y\varphi(y) + \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i(y)D_i\varphi(y) - \omega^\alpha\varphi(y),\ y \in \Omega \\ M_\omega\varphi(y) = \Delta_y\varphi(y),\ y \in \Omega, \end{cases}$$

où $\omega > 0$, $\alpha > 0$ et avec

$$a \in C^2(\overline{\Omega}),\ a_k = 0 \text{ sur } \partial\Omega,\ Im(a_k) \neq \{0\},\ k = 1,...,n.$$

D'après Seeley [55], L_ω et M_ω vérifient encore (IV.46)-(IV.47).

On peut appliquer le Théorème IV.33 au problème aux limites et quasi-elliptique d'ordre quatre suivant pour $\omega > 0$ assez grand

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i(y) \dfrac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial x}(x,y) - \omega^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \Delta_y^2 u(x,y) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i(y) \dfrac{\partial(\Delta_y u)}{\partial y_i}(x,y) \\ - \displaystyle\sum_{i,k=1}^{n} \left(\dfrac{\partial a_i}{\partial y_k}\right) \dfrac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_i}(x,y) - \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i,k=1}^{n} \left(\dfrac{\partial^2 a_i}{\partial y_k^2}\right) \dfrac{\partial u}{\partial y_i}(x,y) + \omega^\alpha \Delta_y u(x,y) = f(x,y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \Omega \\ u(x,\sigma) = \Delta_\sigma u(x,\sigma) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ \sigma \in \partial\Omega, \end{cases}$$

dès que $f \in L^q(\mathbb{R}; L^p(\Omega))$, $1 < p, q < \infty$, en particulier dès que $f \in L^p(\mathbb{R} \times \Omega)$.

Remarque IV.34 *On ne peut pas ici reprendre l'Exemple 3 de la Section 1.5 puisque l'espace $C_0^\beta([c,d])$ n'est pas un espace UMD.*

2.4 Retour à l'équation initiale

On illustre ici la théorie opérationnelle précédente en construisant une paire d'opérateurs (L_ω, M_ω) satisfaisant (IV.46)-(IV.51) (sous l'hypothèse (IV.45) d'espace UMD). L'objectif est ensuite de pouvoir résoudre (IV.1).

Dans toute cette section, pour un opérateur linéaire P sur X et pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $P_\lambda = P - \lambda I$.

On suppose qu'il existe un réel positif fixé ω_0 tel que les opérateurs A et B vérifient

$$\begin{cases} B^2 - A_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X,\ \mathbb{R}^- \subset \rho(B^2 - A_{\omega_0}), \\ \exists C > 0,\ \forall \lambda \leqslant 0,\ \left\| \left(B^2 - A_{\omega_0} - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{1 + |\lambda|}, \end{cases} \tag{IV.60}$$

$$\begin{cases} (i)\ D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \subset D(B), \\ (ii)\ D\left(B^2 - A\right) \subset D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2} B\right), \end{cases} \tag{IV.61}$$

$$\forall \omega \geqslant \omega_0,\ \left\| \left[B; \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\right] \left(B^2 - A_\omega\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \chi(\omega), \tag{IV.62}$$

où

$$\chi : [\omega_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+ \text{ avec } \lim_{\omega \to +\infty} \chi(\omega) = 0.$$

On suppose que les opérateurs

$$\begin{cases} L_\omega := B - \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}, \\ M_\omega := -B - \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}, \end{cases}$$

vérifient les hypothèses suivantes

$$\begin{cases} \forall \omega \geqslant \omega_0,\ ]-\infty, 0] \subset \rho\left(-L_\omega\right),\ ]-\infty, 0] \subset \rho\left(-M_\omega\right); \\ \exists C \geqslant 1,\ \forall \omega \geqslant \omega_0,\ \forall \lambda > 0,\ \left\| \left(L_\omega - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{\lambda},\ \left\| \left(M_\omega - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{\lambda}, \end{cases} \tag{IV.63}$$

et

$$\begin{cases} \forall \omega \geqslant \omega_0,\ \forall s \in \mathbb{R},\ (-L_\omega)^{is}, (-M_\omega)^{is} \in L(X); \\ \exists \theta_L, \theta_M \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ \exists C \geqslant 1,\ \forall \omega \geqslant \omega_0,\ \forall s \in \mathbb{R}, \\ \quad \left\| (-L_\omega)^{is} \right\|_{L(X)} \leqslant C e^{\theta_L |s|},\ \left\| (-M_\omega)^{is} \right\|_{L(X)} \leqslant C e^{\theta_M |s|}. \end{cases} \tag{IV.64}$$

Voici quelques commentaires sur ces hypothèses.

Remarque IV.35 *On compare ces hypothèses avec celles du cadre commutatif pour les espaces L^p (voir Chapitre 2, Section 3.3).*

1. *Les hypothèses (IV.60), (IV.63) et (IV.64) sont équivalentes à celles du cadre commutatif au paramètre ω près.*
2. *Concernant (IV.61), (i) est l'hypothèse (III.49) utilisée dans le cas commutatif et implique (ii) si (III.51) est vérifiée.*
3. *L'hypothèse de non commutativité (IV.62) supposée ici est beaucoup plus générale que l'hypothèse de commutativité des résolvantes (III.51).*

Il est clair que sous les hypothèses (IV.60)-(IV.62), la Remarque IV.19 et les Lemmes IV.21-IV.22 sont vérifiés. Ainsi, les hypothèses (IV.60)-(IV.64) impliquent (IV.46)-(IV.51). On applique alors le Théorème IV.33.

Théorème IV.36 *On suppose (IV.45) et (IV.60)-(IV.64). Soit $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$, $1 < p < \infty$. Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, l'équation (IV.1) admet une unique solution u telle que*

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(\mathbb{R}; X) \cap L^p(\mathbb{R}; D(A)), \\ u' \in L^p(\mathbb{R}; D(B)), \end{cases}$$

satisfaisant

$$\begin{array}{l} p.p.\, x \in \mathbb{R},\, u(x) \in D\left(B^2 - A\right), \\ p.p.\, x \in \mathbb{R},\, u'(x) \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right), \end{array}$$

et

$$B^2 u \in L^p(\mathbb{R}; X).$$

3 Comparaison avec d'autres travaux

3.1 Approche par les multiplicateurs de Fourier

On rappelle que dans Arendt et al. [1], les auteurs ont utilisé la théorie des multiplicateurs de Fourier pour l'équation (IV.1) avec $B = 0$ et $\omega = 0$ dans un cadre commutatif sur un espace de type C^θ.

On veut montrer que cette théorie ne peut pas s'appliquer pour ce cadre non commutatif.

Comme f est bornée et donc $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$, on peut utiliser la transformée de Fourier pour l'équation (IV.1) afin d'obtenir formellement

$$\left(A - \left(\omega + y^2\right) I + 2iyB\right) \widehat{u}(y) = \widehat{f}(y),$$

où la transformée de Fourier est définie par

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} f(x) dx.$$

Ainsi, si on suppose que

$$\left(A - \left(\omega + y^2\right) I + 2iyB\right)^{-1} \in L(X), \tag{IV.65}$$

on peut écrire

$$\widehat{u}(y) = \left(A - \left(\omega + y^2\right) I + 2iyB\right)^{-1} \widehat{f}(y),$$

et donc

$$u = \overline{\mathcal{F}}\left(m(.)\widehat{f}(.)\right).$$

Cette dernière formule suggère d'utiliser les multiplicateurs de Fourier dans le cas Hölder (voir Arendt et al. [1]). Ces hypothèses sur L_ω et M_ω permettent d'avoir pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$\left(B - \left(B^2 - A + \omega I\right)^{1/2} \pm iyI\right)^{-1} \in L(X),$$
$$\left(-B - \left(B^2 - A + \omega I\right)^{1/2} \pm iyI\right)^{-1} \in L(X),$$

dont on peut déduire, seulement dans le cas commutatif entre $\left(B^2 - A + \omega I\right)^{1/2}$ et B, que

$$A - \left(\omega + y^2\right) I + 2iyB = -\left(B - \left(B^2 - A + \omega I\right)^{1/2} + iy\right)\left(-B - \left(B^2 - A + \omega I\right)^{1/2} - iy\right),$$

et cette dernière égalité implique (IV.65).

Mais cette approche ne s'applique pas ici puisque L_ω et M_ω ne commutent pas.

3.2 Rappel de travaux dans le cadre non commutatif

Certains travaux ont déjà été réalisés dans un cadre non commutatif. On peut alors comparer les hypothèses de non commutativité utilisées dans cette thèse avec celles de ces travaux.

Da Prato-Grisvard

En 1975, Da Prato et Grisvard [12] ont étudié l'équation suivante posée sur un espace de Banach complexe X dans le cas parabolique

$$Ax + Bx - \lambda x = y, \tag{IV.66}$$

où $y \in X$, $\lambda > 0$, A et B sont des opérateurs linéaires fermés sur X vérifiant $H(\theta_A)$ et $H(\theta_B)$ respectivement avec $\theta_A + \theta_B < \pi$. L'hypothèse classique de commutativité des résolvantes des opérateurs A et B est remplacée par l'hypothèse plus faible $H(A, B, \varphi)$.

On dit qu'un opérateur P linéaire sur X vérifie $H(\theta)$, $\theta \in [0, \pi[$, si

$$\Sigma_P = \{z \in \mathbb{C}, |\arg z| < \pi - \theta\} \subset \rho(P),$$

et s'il existe une fonction numérique paire convexe C_P définie dans $] - \pi + \theta, \pi - \theta[$ telle que

$$\left\|(P - zI)^{-1}\right\| \leqslant \frac{C_P(\phi)}{|z|} \text{ pour } \arg z = \phi.$$

On dit que A et B vérifient $H(A, B, \varphi)$ si

$$\forall \lambda \in \rho(A),\ (A - \lambda I)^{-1}(D(B)) \subset D(B),$$

et s'il existe deux fonctions numériques C et φ définies dans $]\pi + \theta_A, \pi - \theta_A[\times]\pi + \theta_B, \pi - \theta_B[$ et $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ respectivement, avec C convexe et paire dans les deux variables telles que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_\gamma \varphi(|z + \lambda|; |z|) d|z| = 0,$$

$$\left\|[B; (A - z'I)^{-1}](B - z''I)^{-1}\right\| \leqslant C(\theta'; \theta'')\varphi(|z'|; |z''|),$$

pour $\theta' = \arg z'$, $\theta'' = \arg z''$, $|\theta'| < \pi - \theta_A$, $|\theta''| < \pi - \theta_B$; γ désigne ici une courbe simple joignant $\infty^{-i\theta_0}$ à $\infty^{i\theta_0}$ en demeurant dans $(\Sigma_A - \lambda) \cap (\Sigma_B)$ avec $\theta_B < \theta_0 < \pi - \theta_A$. Ils supposent de plus

$$\left\|[B; (A - z'I)^{-1}](B - z''I)^{-1}\right\|_{L(D_B(\theta;p))} \leqslant C(\theta'; \theta'')\varphi(|z'|; |z''|). \tag{IV.67}$$

Le théorème principal est le suivant.

Théorème IV.37 *Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés dans X vérifiant respectivement $H(\theta_A)$ et $H(\theta_B)$ avec $\theta_A + \theta_B < \pi$, $H(A, B, \varphi)$ et (IV.67). Alors, il existe $\omega \geqslant 0$ tel que pour $y \in D_B(\theta; p)$, le problème (IV.66) admet une unique solution classique x telle que Ax, $Bx \in D_B(\theta; p)$ pour tout $\lambda \geqslant \omega$.*

Labbas-Terreni

En 1987, Labbas et Terreni [42] ont étudié l'équation (IV.66) dans un espace de Banach complexe X avec $\lambda > 0$, $y \in X$.

Le problème est posé avec des hypothèses de type parabolique, i.e. A et B sont des opérateurs linéaires fermés sur X à domaines non nécessairement denses dans X, tels que $(A - zI)^{-1}$ et $(B - z'I)^{-1}$ existent pour tout $z \in \Sigma_A$ et pour tout $z' \in \Sigma_B$, où

$$\Sigma_A = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \pi - \theta_A\},$$
$$\Sigma_B = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \pi - \theta_B\},$$

tels que $\theta_A + \theta_B < \pi$, et

$$\forall z \in \Sigma_A, \left\|(A - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{|z|},$$
$$\forall z' \in \Sigma_B, \left\|(B - z'I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{|z'|}.$$

Une hypothèse sur le commutateur est donnée : il existe $\lambda_0 > 0$ tel que

$$\left\|z' (A - \lambda_0 I) (A - zI)^{-1} \left[(A - \lambda_0 I)^{-1} ; (B + z'I)^{-1}\right]\right\|_{L(X)} \leqslant C \sum_{i=1}^{h} |z|^{-\alpha_i} |z'|^{-\beta_i}, z \in \Sigma_A, z' \in \Sigma_{-B}, \quad \text{(IV.68)}$$

où

$$0 \leqslant 1 - \alpha_i \leqslant \beta_i \leqslant 2, \ \forall i = 1, ..., h.$$

Ils ont obtenus des résultats dans le cas non commutatif : en particulier ils ont démontré pour λ assez grand l'existence et la régularité maximale d'une solution $x \in D(A) \cap D(B)$, si on choisit la donnée y dans un espace intermédiaire convenable entre $D(A)$ et X (ou entre $D(B)$ et X) (i.e. un espace d'interpolation). L'idée de régularité maximale signifie que si $y \in D_B(\sigma, \infty)$ (respectivement $D_A(\sigma, \infty)$, $D_B(\sigma, p)$, $D_A(\sigma, p)$, $1 \leqslant p < \infty$) alors $(A - \lambda I)x$ et Bx sont dans $D_B(\sigma, \infty)$ (respectivement $D_A(\sigma, \infty)$, $D_B(\sigma, p)$, $D_A(\sigma, p)$, $1 \leqslant p < \infty$). La solution est obtenue sous la forme d'une intégrale de Dunford, la technique utilisée est analogue à celle de Da Prato-Grisvard [12], où cependant l'équation (IV.66) est étudiée sous une hypothèse différente de (IV.68).

Autres travaux

Il existe d'autres travaux réalisés dans un cadre non commutatif. On cite, entre autres Monniaux et Prüss [49] qui ont étendu le Théorème de Dore-Venni au cadre non commutatif et où le commutateur vérifie une condition de type Labbas-Terreni (IV.68).

On cite aussi Lunardi [46] et [47] où elle étudie la somme $A + B$ de générateurs de semi-groupes qui ne commutent pas dans un espace de Banach. Cependant leur commutateur doit admettre une extension fermée commutant avec les opérateurs A et B au sens de la résolvante.

Chapitre V

Cadre non commutatif sur un intervalle borné

Dans ce chapitre, on étudie les équations différentielles opérationnelles elliptiques et complètes du second ordre posées sur l'intervalle borné $[0,1]$, munies de conditions de Dirichlet. L'existence et l'unicité de la solution classique sont prouvées sous des hypothèses naturelles de non commutativité des coefficients opérateurs. L'étude se fait dans l'espace $C^\theta([0,1];X)$, $\theta \in]0,1[$, puis dans l'espace $L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$. On montre aussi des propriétés de régularité maximale de la solution dans le cadre höldérien.

On considère le problème différentiel opérationnel complet du second ordre et de type elliptique suivant

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x),\ x \in (0,1), \\ u(0) = u_0, \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{V.1}$$

où A et B sont deux opérateurs linéaires fermés sur X, $(X, \|.\|)$ étant un espace de Banach complexe, ω est un réel positif assez grand, u_0, u_1 sont donnés dans X et f est une fonction définie de $[0,1]$ à valeurs dans X. L'ellipticité de l'équation sera précisée plus loin, voir (V.39).

Comme dans le chapitre précédent, on commence par étudier le problème différentiel suivant

$$\begin{cases} u''(x) + (L_\omega - M_\omega)\, u'(x) + \dfrac{1}{4}\Big((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2\Big)\, u(x) = f(x),\ x \in (0,1), \\ u(0) = u_0, \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{V.2}$$

où L_ω et M_ω sont deux opérateurs linéaires fermés sur X dépendant du paramètre ω.

L'objectif est le suivant.

1. Donner des hypothèses naturelles de non commutativité sur L_ω et M_ω qui permettent de résoudre (V.2) pour ω assez grand.
2. Retourner au problème (V.1), c'est-à-dire résoudre (V.2) avec L_ω et M_ω satisfaisant

$$L_\omega - M_\omega \subset 2B \quad \text{et} \quad \frac{1}{4}\Big((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2\Big) \subset A - \omega I.$$

Dans ce cas, une solution classique de (V.2) sera a fortiori une solution classique de (V.1). On indiquera ultérieurement comment construire L_ω et M_ω.

L'étude est faite dans deux cadres différents :

- cadre höldérien : on suppose $f \in C^\theta([0,1];X)$, $\theta \in]0,1[$;
- cadre L^p : on suppose $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$, avec X un espace UMD.

1 Cadre höldérien

1.1 Introduction et hypothèses

On suppose ici que $f \in C^{\theta}([0,1]\,;X)$, $\theta \in \,]0,1[$.

Les hypothèses sur les opérateurs L_ω et M_ω sont les suivantes. Il existe un réel positif fixé ω_0 tel que

$$\left\{\begin{array}{l} \exists \delta > 0,\, \exists C > 0 : \forall \omega \geqslant \omega_0,\, S_\delta \subset \rho(L_\omega),\, S_\delta \subset \rho(M_\omega), \\ \left\|(L_\omega - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{|z|},\, \left\|(M_\omega - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{|z|}, z \in S_\delta, \end{array}\right. \tag{V.3}$$

où $S_\delta := \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \delta\right\}$. Pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, on suppose également

$$D(L_\omega) = D(M_\omega), \tag{V.4}$$

$$D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right) \subseteq D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right), \tag{V.5}$$

$$L_\omega + M_\omega \text{ est inversible dans } L(X), \tag{V.6}$$

$$I - e^{L_\omega} e^{M_\omega} \text{ ou } I - e^{M_\omega} e^{L_\omega} \text{ est inversible dans } L(X), \tag{V.7}$$

$$(X, D(L_\omega))_{1+\theta,\infty} = (X, D(M_\omega))_{1+\theta,\infty}. \tag{V.8}$$

L'hypothèse de non commutativité est la suivante

$$\forall \omega \geqslant \omega_0,\, \|C_{L_\omega,M_\omega}\|_{L(X)} \leqslant \chi(\omega), \tag{V.9}$$

où le commutateur est

$$C_{L_\omega,M_\omega} := (L_\omega + M_\omega)\left[(L_\omega - M_\omega)\,;(L_\omega + M_\omega)^{-1}\right](L_\omega + M_\omega)^{-1},$$

et

$$\chi : [\omega_0, +\infty[\,\to \mathbb{R}^+ \text{ avec } \lim_{\omega \to +\infty} \chi(\omega) = 0.$$

On rappelle que, dans de nombreux cas concrets, $\chi(\omega) = \dfrac{C}{\omega^\alpha}$, où C, $\alpha > 0$.

On note que, sous ces hypothèses et comme au chapitre précédent, le problème (V.2) est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} u''(x) + (L_\omega - M_\omega)\, u'(x) - \dfrac{1}{2}\,(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)\, u(x) = f(x),\, x \in (0,1), \\ u(0) = u_0, \\ u(1) = u_1. \end{array}\right.$$

D'après l'hypothèse (V.5), $(L_\omega + M_\omega)^2$ est principal sur $(L_\omega - M_\omega)^2$. On cherche alors une solution classique de (V.2), c'est-à-dire une fonction u telle que

$$\left\{\begin{array}{l} u \in C^2([0,1]\,;X) \cap C\left([0,1]\,;D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)\right) \\ u' \in C([0,1]\,;D(L_\omega - M_\omega)), \end{array}\right.$$

et satisfaisant (V.2). On veut montrer également la propriété de régularité maximale de la solution classique u, c'est-à-dire
$$u'', \, (L_\omega - M_\omega) \, u', \, (L_\omega + M_\omega)^2 \, u \in C^\theta \left([0,1] \, ; X\right). \tag{V.10}$$
Bien évidemment, la solution classique u vérifiera alors
$$u \in C \left([0,1] \, ; D \left((L_\omega - M_\omega)^2\right)\right),$$
avec la régularité maximale
$$(L_\omega - M_\omega)^2 \, u \in C^\theta \left([0,1] \, ; X\right),$$
puisque
$$(L_\omega - M_\omega)^2 \, u = -4u'' - 4 \, (L_\omega - M_\omega) \, u' + (L_\omega + M_\omega)^2 \, u + 4f.$$

Les hypothèses (V.3)-(V.6) et (V.9) sont les mêmes qu'au Chapitre IV, Section 1. Les Remarques IV.2 et IV.3 concernant ces hypothèses sont donc encore valables ici. On note que les hypothèses (V.7) et (V.8) n'apparaissaient pas au Chapitre IV ; elles sont dûes aux conditions aux limites. Voici quelques remarques concernant ces nouvelles hypothèses.

Remarque V.1 *On suppose (V.3).*

1. *Alors $I - e^{L_\omega} e^{M_\omega}$ est inversible dans $L(X)$ si et seulement si $I - e^{M_\omega} e^{L_\omega}$ l'est et dans ce cas*
$$\left(I - e^{L_\omega} e^{M_\omega}\right)^{-1} = I + e^{L_\omega} \left(I - e^{M_\omega} e^{L_\omega}\right)^{-1} e^{M_\omega};$$
voir Haak et al. [36], Lemma 3.1, p. 209.
2. *L'hypothèse (V.7) peut-être déduite d'une des hypothèses suivantes (obtenues dans beaucoup de cas concrets)*
$$\exists C, \alpha > 0, \forall \omega \geqslant \omega_0, \forall z \in S_\delta, \left\| (M_\omega - zI)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{|\omega^\alpha + z|},$$
$$\exists C, \alpha > 0, \forall \omega \geqslant \omega_0, \forall z \in S_\delta, \left\| (L_\omega - zI)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{|\omega^\alpha + z|}.$$
En effet, si on suppose la première, on a alors
$$e^{M_\omega} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^z \, (M_\omega - zI)^{-1} \, dz,$$
où γ est la courbe orientée positivement du secteur de $\rho\,(M_\omega)$ suivant
$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| \leqslant \frac{\pi}{2} + \delta_1 \right\} \cup \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \delta_2 \},$$
où $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ sont donnés.
On remarque que, pour tout $z \in \gamma$, il existe $a > 0$ tel que
$$|e^z| = e^{Re(z)} \leqslant e^{-a|z|}.$$
Ainsi
$$\left\| e^{M_\omega} \right\|_{L(X)} \leqslant K \int_\gamma e^{Re(z)} \frac{C}{|\omega^\alpha + z|} d\,|z|,$$
mais sur γ, il est clair que
$$\frac{1}{|\omega^\alpha + z|} \leqslant \frac{C}{\omega^\alpha},$$

d'où

$$\left\|e^{M_\omega}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{\omega^\alpha}\int_\gamma e^{-a|z|}d\,|z| \leqslant \frac{C}{\omega^\alpha},$$

et on peut supposer ω_0 *assez grand tel que pour tout* $\omega \geqslant \omega_0$

$$\left\|e^{M_\omega}\right\|_{L(X)} < 1,$$

et grâce à (V.3) on a

$$\left\|e^{M_\omega}e^{L_\omega}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{\omega^\alpha} < 1, \qquad \left\|e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C}{\omega^\alpha} < 1.$$

On en déduit que $I - e^{L_\omega}e^{M_\omega}$ *et* $I - e^{M_\omega}e^{L_\omega}$ *sont inversibles dans* $L(X)$.
On note que, dans cette remarque, C *désigne différentes constantes indépendantes de* ω.

Remarque V.2 *On note que sous l'hypothèse (V.4), on a*

$$(X, D\left(L_\omega\right))_{\theta,\infty} = (X, D\left(M_\omega\right))_{\theta,\infty}.$$

Remarque V.3 *On suppose (V.4)-(V.5). Si, de plus*

$$D(L_\omega M_\omega) = D(M_\omega L_\omega),$$

alors (V.8) est satisfaite.
En effet, d'après le Lemme IV.4, on a

$$D(L_\omega M_\omega) = D\left(M_\omega^2\right) = D(M_\omega L_\omega) = D\left(L_\omega^2\right),$$

donc pour tout $\theta \in \left]0,1\right[$ *on obtient*

$$\left(X, D(L_\omega^2)\right)_{\theta,\infty} = \left(X, D(M_\omega^2)\right)_{\theta,\infty},$$

et par la propriété de réitération (voir Lions-Peetre [45]), il s'ensuit

$$(X, D(L_\omega))_{1+\theta,\infty} = \left(X, D(L_\omega^2)\right)_{\frac{1+\theta}{2},\infty} = \left(X, D(M_\omega^2)\right)_{\frac{1+\theta}{2},\infty} = (X, D(M_\omega))_{1+\theta,\infty}.$$

Remarque V.4 *On suppose (V.3), (V.4), (V.6) et on considère le cas commutatif* ($L_\omega M_\omega = M_\omega L_\omega$). *Alors les hypothèses (V.5), (V.7) et (V.8) sont vérifiées.*

1. *Soit* $\varphi \in D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)$, *alors* $\varphi \in D(L_\omega + M_\omega) = D(L_\omega - M_\omega)$ *et* $(L_\omega + M_\omega)\varphi \in D(L_\omega + M_\omega) = D(L_\omega - M_\omega)$, *de plus*

$$\begin{aligned}(L_\omega - M_\omega)\varphi =& (L_\omega - M_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-1}(L_\omega + M_\omega)\varphi \\ =& (L_\omega + M_\omega)^{-1}(L_\omega - M_\omega)(L_\omega + M_\omega)\varphi \in D(L_\omega + M_\omega) = D(L_\omega - M_\omega),\end{aligned}$$

   ainsi, $\varphi \in D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right)$ *et (V.5) est satisfaite.*

2. $L_\omega + M_\omega$ *génère un semi-groupe analytique sur* X, $\left(e^{\xi(L_\omega+M_\omega)}\right)_{\xi>0}$, *et* $I - e^{L_\omega+M_\omega}$ *admet un inverse borné en vertu de Lunardi [48], p. 60, de plus on a*

$$e^{L_\omega+M_\omega} = e^{L_\omega}e^{M_\omega} = e^{M_\omega}e^{L_\omega},$$

   ainsi l'hypothèse (V.7) est satisfaite.

3. *On a* $D(L_\omega M_\omega) = D(M_\omega L_\omega)$ *donc d'après la Remarque V.3, l'hypothèse (V.8) est satisfaite.*

L'étude est organisée comme suit.

La Section 1.2 contient quelques lemmes techniques. Dans la Section 1.3, on utilise la représentation de la solution du cas commutatif et quelques considérations heuristiques pour obtenir une équation intégrale vérifiée par l'éventuelle solution classique $u := (L_\omega + M_\omega)^{-2}v$. Cette équation intégrale est écrite sous la forme

$$v + R_\omega(v) = F_\omega(f) + D_\omega,$$

où R_ω, F_ω, D_ω dépendent de L_ω et M_ω, R_ω dépendant aussi du commutateur C_{L_ω,M_ω}, et D_ω des données u_0, u_1. Bien évidemment les opérateurs R_ω et F_ω sont différents de ceux du précédent chapitre. La Section 1.4 contient l'étude de $F_\omega(f) + D_\omega$ et R_ω, ce qui permet d'écrire pour ω assez grand

$$u = (L_\omega + M_\omega)^{-2}\left\{(I + R_\omega)^{-1}(F_\omega(f) + D_\omega)\right\}.$$

On analyse ensuite cette représentation afin d'obtenir un théorème fondamental d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution classique. Dans la Section 1.5, on donne des exemples auxquels cette théorie s'applique. Enfin, la Section 1.6 est dédiée à l'étude du retour à l'équation initiale (V.1).

Dans le but de simplifier, quand la dépendance de ω n'est pas utile, on omet ω dans les notations, par exemple, on note L_ω, M_ω... par L, M...

1.2 Lemmes techniques

On note que les Lemmes IV.4, IV.5 (points 2. à 4.) et IV.6 sont vérifiés sous les hypothèses de ce chapitre. Puisque $1 \in \rho(L) \cap \rho(M)$, on a $(L - I)^{-1}$, $(M - I)^{-1} \in L(X)$ et, d'après la Proposition I.16, on a aussi $M(L-I)^{-1}$, $L(M-I)^{-1}$, $(L+M)(L-I)^{-1}$, $(L+M)(M-I)^{-1}$, $(L-M)(L-I)^{-1}$, $(L-M)(M-I)^{-1} \in L(X)$.

Lemme V.5 *Sous les hypothèses (V.3),(V.4) et (V.7), on a*

$$\begin{cases} \left(I - e^L e^M\right)^{-1} = I + e^L e^M \left(I - e^L e^M\right)^{-1}, \\ \left(I - e^M e^L\right)^{-1} = I + e^M e^L \left(I - e^M e^L\right)^{-1}, \end{cases}$$

et $M\left(I - e^L e^M\right)^{-1}(L - I)^{-1}$, $L\left(I - e^M e^L\right)^{-1}(M - I)^{-1} \in L(X)$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} &\left(I - e^L e^M\right)\left(I + e^L e^M \left(I - e^L e^M\right)^{-1}\right) \\ =&I - e^L e^M + e^L e^M \left(I - e^L e^M\right)^{-1} - e^L e^M e^L e^M \left(I - e^L e^M\right)^{-1} \\ =&I - e^L e^M + e^L e^M \left(I - e^L e^M\right)\left(I - e^L e^M\right)^{-1} \\ =&I, \end{aligned}$$

de même

$$\left(I + e^L e^M \left(I - e^L e^M\right)^{-1}\right)\left(I - e^L e^M\right) = I,$$

d'où

$$\left(I - e^L e^M\right)^{-1} = I + e^L e^M \left(I - e^L e^M\right)^{-1}.$$

En inversant les rôles de L et M, on obtient

$$\left(I - e^M e^L\right)^{-1} = I + e^M e^L \left(I - e^M e^L\right)^{-1}.$$

Il suffit ensuite d'écrire

$$M\left(I - e^L e^M\right)^{-1}(L - I)^{-1} = M(L - I)^{-1} + M(L - I)^{-1}(L - I)e^L e^M \left(I - e^L e^M\right)^{-1}(L - I)^{-1} \in L(X),$$

$$L\left(I - e^M e^L\right)^{-1}(M - I)^{-1} = L(M - I)^{-1} + L(M - I)^{-1}(M - I)e^M e^L \left(I - e^M e^L\right)^{-1}(M - I)^{-1} \in L(X).$$

■

Lemme V.6 *Sous l'hypothèse (V.4), (V.8) est équivalente à*

$$\left\{\begin{array}{l} M(L-I)^{-1}(X,D(L))_{\theta,\infty} \subset (X,D(L))_{\theta,\infty}, \\ L(M-I)^{-1}(X,D(M))_{\theta,\infty} \subset (X,D(M))_{\theta,\infty}. \end{array}\right. \tag{V.11}$$

Preuve. On suppose (V.8). Soit $\varphi \in (X,D(L))_{\theta,\infty} = (X,D(L-I))_{\theta,\infty}$. Alors

$$(L-I)^{-1}\varphi := \psi \in (X,D(L-I))_{1+\theta,\infty},$$

donc $\psi \in D(L)$ et $(L-I)\psi \in (X,D(L-I))_{\theta,\infty} = (X,D(L))_{\theta,\infty}$, or $\psi \in (X,D(L))_{\theta,\infty}$ donc par somme $L\psi \in (X,D(L))_{\theta,\infty}$, i.e. $\psi \in (X,D(L))_{1+\theta,\infty} = (X,D(M))_{1+\theta,\infty}$. Ainsi $M(L-I)^{-1}\varphi \in (X,D(M))_{\theta,\infty} = (X,D(L))_{\theta,\infty}$, ce qui prouve la première ligne de (V.11). La seconde ligne est obtenue en échangeant les rôles de L et M.

Inversement, on suppose (V.11). Soit $\varphi \in (X,D(L))_{1+\theta,\infty}$. Alors $(L-I)\varphi = L\varphi - \varphi \in (X,D(L))_{\theta,\infty}$, donc

$$M\varphi = M(L-I)^{-1}(L-I)\varphi \in (X,D(L))_{\theta,\infty} = (X,D(M))_{\theta,\infty},$$

ainsi $\varphi \in (X,D(M))_{1+\theta,\infty}$. De la même manière si $\varphi \in (X,D(M))_{1+\theta,\infty}$, alors $\varphi \in (X,D(L))_{1+\theta,\infty}$. ∎

1.3 Formule de représentation de la solution

Dans le cas commutatif, la solution donnée par Favini et al. dans [22], formule (9) p. 977, peut s'écrire sous la forme $\phi + \psi + d$, où, pour $x \in [0,1]$

$$\phi(x) = (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds + (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)ds, \tag{V.12}$$

$$\begin{aligned}\psi(x) = &-(L+M)^{-1}e^{xM}\left(I-e^Le^M\right)^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\ &+(L+M)^{-1}e^{xM}\left(I-e^Le^M\right)^{-1}e^L\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds \\ &-(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left(I-e^Me^L\right)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds \\ &+(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left(I-e^Me^L\right)^{-1}e^M\int_0^1 e^{sL}f(s)ds,\end{aligned} \tag{V.13}$$

$$d(x) = \left(e^{xM} - e^{(1-x)L}e^M\right)\left(I-e^Le^M\right)^{-1}u_0 + \left(e^{(1-x)L} - e^{xM}e^L\right)\left(I-e^Me^L\right)^{-1}u_1.$$

Maintenant, on fait le raisonnement heuristique suivant. On suppose qu'il existe une solution classique u au problème (V.2) satisfaisant la propriété de régularité maximale (V.10). On désire trouver une équation intégrale satisfaite par

$$v := (L+M)^2 u.$$

Ici, dans ce cas non commutatif, on considère ϕ défini par (V.12) et on écrit pour tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}\phi(x) = &\int_0^x (L+M)^{-1}e^{(x-s)M}\left(u''(s) + (L-M)u'(s) + \frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)u(s)\right)ds \\ &+\int_x^1 (L+M)^{-1}e^{(s-x)L}\left(u''(s) + (L-M)u'(s) + \frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)u(s)\right)ds \\ :=&u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + u_4(x) + u_5(x) + u_6(x),\end{aligned}$$

où

$$
\begin{aligned}
u_1(x) &= \int_0^x (L+M)^{-1} e^{(x-s)M} u''(s)ds,\\
u_2(x) &= \int_x^1 (L+M)^{-1} e^{(s-x)L} u''(s)ds,\\
u_3(x) &= \int_0^x (L+M)^{-1} e^{(x-s)M} (L-M)\, u'(s)ds,\\
u_4(x) &= \int_x^1 (L+M)^{-1} e^{(s-x)L} (L-M)\, u'(s)ds,\\
u_5(x) &= \frac{1}{4}\int_0^x (L+M)^{-1} e^{(x-s)M} \left((L-M)^2-(L+M)^2\right) u(s)ds,\\
u_6(x) &= \frac{1}{4}\int_x^1 (L+M)^{-1} e^{(s-x)L} \left((L-M)^2-(L+M)^2\right) u(s)ds.
\end{aligned}
$$

L'idée principale est d'effectuer des intégrations par parties afin de déduire l'équation intégrale satisfaite par v. Puisque u est une solution classique de (V.2) satisfaisant la propriété de régularité maximale (V.10), tous les calculs seront justifiés.

Alors, par intégration par parties, on a

$$
\begin{aligned}
u_1(x) &= \left[(L+M)^{-1} e^{(x-s)M} u'(s)\right]_0^x + \int_0^x (L+M)^{-1} M e^{(x-s)M} u'(s)ds\\
&= (L+M)^{-1} u'(x) - (L+M)^{-1} e^{xM} u'(0)\\
&\quad + \left[(L+M)^{-1} M e^{(x-s)M} u(s)\right]_0^x + \int_0^x (L+M)^{-1} M^2 e^{(x-s)M} u(s)ds\\
&= (L+M)^{-1} u'(x) - (L+M)^{-1} e^{xM} u'(0) + (L+M)^{-1} M u(x)\\
&\quad - (L+M)^{-1} M e^{xM} u_0 + \int_0^x (L+M)^{-1} M^2 e^{(x-s)M} u(s)ds,
\end{aligned}
$$

où on a utilisé deux fois la continuité du semi-groupe $e^{(x-s)M}$ en $s=x$, puisque $u'(x)\in D(M)$ et $u(x)\in D(M^2)$.

De même, on a

$$
\begin{aligned}
u_2(x) &= (L+M)^{-1} e^{(1-x)L} u'(1) - (L+M)^{-1} u'(x) - \int_x^1 (L+M)^{-1} L e^{(s-x)L} u'(s)ds\\
&= (L+M)^{-1} e^{(1-x)L} u'(1) - (L+M)^{-1} u'(x) + (L+M)^{-1} L u(x)\\
&\quad - (L+M)^{-1} L e^{(1-x)L} u_1 + \int_x^1 (L+M)^{-1} L^2 e^{(s-x)L} u(s)ds,
\end{aligned}
$$

où on a utilisé deux fois la continuité du semi-groupe $e^{(s-x)L}$ en $s=x$, puisque $u'(x)\in D(L)$ et $u(x)\in D(L^2)$.

Comme $u_0, u_1 \in D\left((L-M)^2-(L+M)^2\right) = D(LM)\cap D(ML)$, on a

$$
\begin{aligned}
(L+M)^{-1} M e^{xM} u_0 &= (L+M)^{-1} e^{xM} M u_0,\\
(L+M)^{-1} L e^{(1-x)L} u_1 &= (L+M)^{-1} e^{(1-x)L} L u_1.
\end{aligned}
$$

En appliquant $(L+M)^2$ à $u_1(x)+u_2(x)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
(L+M)^2\left(u_1(x)+u_2(x)\right) = &-(L+M)\, e^{xM}\left(u'(0)+Mu_0\right) + (L+M)\, e^{(1-x)L}\left(u'(1)-Lu_1\right)\\
&+v(x) + (L+M)\int_0^x M^2 e^{(x-s)M} (L+M)^{-2} v(s)ds\\
&+(L+M)\int_x^1 L^2 e^{(s-x)L} (L+M)^{-2} v(s)ds.
\end{aligned}
\tag{V.14}
$$

Maintenant, pour $u_3(x) + u_4(x)$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}(u_3(x) + u_4(x)) = {} & (L+M)^{-1}(L-M)u(x) - (L+M)^{-1}(L-M)u(x) \\ & - (L+M)^{-1} e^{xM}(L-M)u_0 + (L+M)^{-1} e^{(1-x)L}(L-M)u_1 \\ & + \int_0^x (L+M)^{-1} M e^{(x-s)M}(L-M)u(s)ds \\ & - \int_x^1 (L+M)^{-1} L e^{(s-x)L}(L-M)u(s)ds;\end{aligned}$$

ici, on utilise encore la continuité des semi-groupes en $s = x$ car $(L-M)u(x) \in D(L) \cap D(M)$ d'après (V.5) et grâce au Lemme IV.5, point 2., on peut écrire

$$\begin{aligned}M(L-M)u(x) &= M(L-M)(L+M)^{-2}(L+M)^2u(x), \\ L(L-M)u(x) &= L(L-M)(L+M)^{-2}(L+M)^2u(x).\end{aligned}$$

En appliquant $L + M$ à $u_3(x) + u_4(x)$, on obtient

$$\begin{aligned}(L+M)(u_3(x) + u_4(x)) = {} & - e^{xM}(L-M)u_0 + e^{(1-x)L}(L-M)u_1 \\ & + \int_0^x M e^{(x-s)M}(L-M)(L+M)^{-2} v(s)ds \\ & - \int_x^1 L e^{(s-x)L}(L-M)(L+M)^{-2} v(s)ds.\end{aligned}$$

Or, le Lemme IV.5, point 3., permet d'écrire

$$\begin{aligned}Me^{(x-s)M}(L-M)(L+M)^{-2} v(s) &= e^{(x-s)M} ML (L+M)^{-2} v(s) - M^2 e^{(x-s)M} (L+M)^{-2} v(s), \\ Le^{(s-x)L}(L-M)(L+M)^{-2} v(s) &= L^2 e^{(s-x)L} (L+M)^{-2} v(s) - e^{(s-x)L} LM (L+M)^{-2} v(s),\end{aligned}$$

ainsi, en appliquant encore $L + M$, on a

$$\begin{aligned}(L+M)^2 (u_3(x) + u_4(x)) = {} & - (L+M) e^{xM}(L-M)u_0 + (L+M) e^{(1-x)L}(L-M)u_1 \\ & + (L+M) \int_0^x e^{(x-s)M} ML (L+M)^{-2} v(s)ds \\ & + (L+M) \int_x^1 e^{(s-x)L} LM (L+M)^{-2} v(s)ds \\ & - (L+M) \int_0^x M^2 e^{(x-s)M} (L+M)^{-2} v(s)ds \\ & - (L+M) \int_x^1 L^2 e^{(s-x)L} (L+M)^{-2} v(s)ds.\end{aligned} \tag{V.15}$$

Enfin, en appliquant $(L + M)^2$ à $u_5(x) + u_6(x)$, on a

$$\begin{aligned}(L+M)^2 (u_5(x) + u_6(x)) = {} & \frac{1}{4}(L+M) \int_0^x e^{(x-s)M} (L-M)^2 (L+M)^{-2} v(s)ds \\ & -\frac{1}{4}(L+M) \int_0^x e^{(x-s)M} (L+M)^2 (L+M)^{-2} v(s)ds \\ & +\frac{1}{4}(L+M) \int_x^1 e^{(s-x)L} (L-M)^2 (L+M)^{-2} v(s)ds \\ & -\frac{1}{4}(L+M) \int_x^1 e^{(s-x)L} (L+M)^2 (L+M)^{-2} v(s)ds.\end{aligned} \tag{V.16}$$

Ensuite, en utilisant (V.14), (V.15) et (V.16), on a

$$\begin{aligned}(L+M)^2\phi(x) =&v(x) - (L+M)\,e^{xM}\left(u'(0)+Lu_0\right) + (L+M)\,e^{(1-x)L}\left(u'(1)-Mu_1\right)\\ &+ (L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}ML\,(L+M)^{-2}\,v(s)ds\\ &+ \frac{1}{4}(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}\,(L-M)^2\,(L+M)^{-2}\,v(s)ds\\ &- \frac{1}{4}(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}\,(L+M)^2\,(L+M)^{-2}\,v(s)ds\\ &+ (L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}LM\,(L+M)^{-2}\,v(s)ds\\ &+ \frac{1}{4}(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}\,(L-M)^2\,(L+M)^{-2}\,v(s)ds\\ &- \frac{1}{4}(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}\,(L+M)^2\,(L+M)^{-2}\,v(s)ds.\end{aligned}$$

En vertu du point 5. du Lemme IV.6, on obtient

$$\begin{aligned}(L+M)^2\phi(x) = v(x) + \frac{1}{4}(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}C_{L,M}v(s)ds - \frac{1}{4}(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}C_{L,M}v(s)ds\\ - (L+M)\,e^{xM}\left(u'(0)+Lu_0\right) + (L+M)\,e^{(1-x)L}\left(u'(1)-Mu_1\right).\end{aligned} \tag{V.17}$$

On considère ensuite ψ défini par (V.13). Tout d'abord, on note que (V.17) pour $x=0$ et $x=1$ donne

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds &= -u'(0) + e^Lu'(1) + Mu_0 - e^LMu_1 - \frac{1}{4}\int_0^1 e^{sL}C_{L,M}v(s)ds;\\ \int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds &= -e^Mu'(0) + u'(1) - e^MLu_0 + Lu_1 + \frac{1}{4}\int_0^1 e^{(1-s)M}C_{L,M}v(s)ds.\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient l'équation intégrale suivante

$$\begin{aligned}(L+M)^2\psi(x) =&- (L+M)\,e^{xM}\left(I-e^Le^M\right)^{-1}\left(-u'(0)+e^Lu'(1)+Mu_0-e^LMu_1\right)\\ &+ (L+M)\,e^{xM}\left(I-e^Le^M\right)^{-1}e^L\left(-e^Mu'(0)+u'(1)-e^MLu_0+Lu_1\right)\\ &- (L+M)\,e^{(1-x)L}\left(I-e^Me^L\right)^{-1}\left(-e^Mu'(0)+u'(1)-e^MLu_0+Lu_1\right)\\ &+ (L+M)\,e^{(1-x)L}\left(I-e^Me^L\right)^{-1}e^M\left(-u'(0)+e^Lu'(1)+Mu_0-e^LMu_1\right)\\ &+ \frac{1}{4}\,(L+M)\,e^{xM}\left(I-e^Le^M\right)^{-1}\int_0^1 e^{sL}C_{L,M}v(s)ds\\ &+ \frac{1}{4}\,(L+M)\,e^{xM}\left(I-e^Le^M\right)^{-1}e^L\int_0^1 e^{(1-s)M}C_{L,M}v(s)ds\\ &- \frac{1}{4}\,(L+M)\,e^{(1-x)L}\left(I-e^Me^L\right)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M}C_{L,M}v(s)ds\\ &- \frac{1}{4}\,(L+M)\,e^{(1-x)L}\left(I-e^Me^L\right)^{-1}e^M\int_0^1 e^{sL}C_{L,M}v(s)ds.\end{aligned}$$

Cette dernière équation sommée avec (V.17) permet de poser

$$v + R(v) = F(f) + D,$$

où pour tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} R(v)(x) =& \frac{1}{4}(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M} C_{L,M} v(s)ds - \frac{1}{4}(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L} C_{L,M} v(s)ds \\ &+ \frac{1}{4}(L+M)\, e^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} \int_0^1 e^{sL} C_{L,M} v(s)ds \\ &+ \frac{1}{4}(L+M)\, e^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} e^L \int_0^1 e^{(1-s)M} C_{L,M} v(s)ds \\ &- \frac{1}{4}(L+M)\, e^{(1-x)L}\left(I - e^M e^L\right)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} C_{L,M} v(s)ds \\ &- \frac{1}{4}(L+M)\, e^{(1-x)L}\left(I - e^M e^L\right)^{-1} e^M \int_0^1 e^{sL} C_{L,M} v(s)ds, \end{aligned} \tag{V.18}$$

$$\begin{aligned} F(f)(x) =& (L+M)\int_0^x e^{(x-s)M} f(s)ds + (L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L} f(s)ds \\ &- (L+M)\, e^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} \int_0^1 e^{sL} f(s)ds \\ &+ (L+M)\, e^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} e^L \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds \\ &- (L+M)\, e^{(1-x)L}\left(I - e^M e^L\right)^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds \\ &+ (L+M)\, e^{(1-x)L}\left(I - e^M e^L\right)^{-1} e^M \int_0^1 e^{sL} f(s)ds, \end{aligned} \tag{V.19}$$

$$\begin{aligned} D(x) =& (L+M)\, e^{xM}\left(u'(0) + Lu_0\right) - (L+M)\, e^{(1-x)L}\left(u'(1) - Mu_1\right) \\ &+ (L+M)\, e^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1}\left(-u'(0) + e^L u'(1) + Mu_0 - e^L M u_1\right) \\ &- (L+M)\, e^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} e^L\left(-e^M u'(0) + u'(1) - e^M L u_0 + L u_1\right) \\ &+ (L+M)\, e^{(1-x)L}\left(I - e^M e^L\right)^{-1}\left(-e^M u'(0) + u'(1) - e^M L u_0 + L u_1\right) \\ &- (L+M)\, e^{(1-x)L}\left(I - e^M e^L\right)^{-1} e^M\left(-u'(0) + e^L u'(1) + M u_0 - e^L M u_1\right), \end{aligned}$$

de plus, en factorisant, D peut s'écrire

$$\begin{aligned} D(x) =& (L+M)\, e^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1}\left[\left(I - e^L e^M\right)\left(u'(0) + Lu_0\right) - u'(0)\right. \\ &\left. + Mu_0 + e^L e^M u'(0) + e^L e^M L u_0 - e^L (L+M)\, u_1\right] \\ &+ (L+M)\, e^{(1-x)L}\left(I - e^M e^L\right)^{-1}\left[-\left(I - e^M e^L\right)\left(u'(1) - Mu_1\right) + u'(1)\right. \\ &\left. + Lu_1 - e^M e^L u'(1) + e^M e^L M u_1 - e^M (L+M)\, u_0\right], \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} D(x) =& (L+M)\, e^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1}\left((L+M)\, u_0 - e^L (L+M)\, u_1\right) \\ &+ (L+M)\, e^{(1-x)L}\left(I - e^M e^L\right)^{-1}\left((L+M)\, u_1 - e^M (L+M)\, u_0\right). \end{aligned} \tag{V.20}$$

Finalement, si u est une solution classique de (V.2) satisfaisant la propriété de régularité maximale (V.10), alors $v = (L+M)^2 u$ satisfait l'équation intégrale

$$v + R(v) = F(f) + D,$$

avec R, $F(f)$, D donnés par (V.18), (V.19) et (V.20).

On fait apparaître la dépendance de ω pour $F : F_\omega$; $R : R_\omega$; et $D : D_\omega$. Pour $f \in C^\theta([0,1];X)$, le but est de trouver $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que l'on peut construire, pour $\omega \geqslant \omega^*$ donné, un sous-espace Y_ω de $C^\theta([0,1];X)$ satisfaisant

1. $F_\omega(f) + D_\omega \in Y_\omega$ sous quelques hypothèses sur les données u_0, u_1, $f(0)$ et $f(1)$,
2. $I + R_\omega$ est inversible dans $L(Y_\omega)$.

Dans ce cas, pour $\omega \geqslant \omega^*$, on peut déduire que s'il existe une solution classique u de (V.2) satisfaisant la propriété de régularité maximale (V.10), alors u est uniquement déterminé par la formule de représentation

$$u = (L_\omega + M_\omega)^{-2} \left\{ (I + R_\omega)^{-1} (F_\omega(f) + D_\omega) \right\}. \tag{V.21}$$

Ainsi, pour obtenir des résultats d'unicité et d'existence pour le problème (V.2), il suffit d'étudier la régularité de cette représentation.

Bien entendu, quand L_ω et M_ω commutent, la formule (V.21) coïncide avec celle donnée dans Favini et al. [22], p. 977.

1.4 Principaux résultats

L'étude de la représentation (V.21) nécessite les résultats suivants sur la régularité höldérienne.

Proposition V.7 *Soit Q un générateur infinitésimal de semi-groupe analytique sur X, $\left(e^{\xi Q}\right)_{\xi>0}$, non nécessairement continu en 0.*

1. *Soient $\theta \in]0,1[$ et $\varphi \in X$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*
   (a) $e^{\cdot Q}\varphi \in C^\theta([0,1];X)$.
   (b) $\varphi \in (X, D(Q))_{\theta,\infty}$.
2. *Soient $\theta \in]0,1[$ et $g \in C^\theta([0,1];X)$. On pose*
$$w_1(x) = \int_0^x e^{(x-s)Q} g(s)ds,\ x \in [0,1].$$
   Alors $w_1 \in C^\theta([0,1];X)$, et il existe $K > 0$ tel que
$$\|w_1\|_{C^\theta([0,1];X)} \leqslant K \|g\|_{C^\theta([0,1];X)}.$$
3. *Soient $\theta \in]0,1[$ et $g \in C^\theta([0,1];X)$. On pose*
$$w_2(x) = \int_0^x e^{(x-s)Q} (g(s) - g(0))\, ds,\ x \in [0,1].$$
   Alors $w_2 \in C^{1,\theta}([0,1];X) \cap C^\theta([0,1];D(Q))$.
4. *Soient $\theta \in]0,1[$, $g \in C^\theta([0,1];X)$ et $\varphi \in X$. On pose*
$$w_3(x) = e^{xQ}\varphi + \int_0^x e^{(x-s)Q} g(s)ds,\ x \in [0,1].$$
   Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes.
   (a) $w_3 \in C^{1,\theta}([0,1];X) \cap C^\theta([0,1];D(Q))$.
   (b) $\varphi \in D(Q)$ *et* $g(0) + Q\varphi \in (X, D(Q))_{\theta,\infty}$.

En particulier, si $\varphi = 0_X$ *et* $g(0) \in (X, D(Q))_{\theta,\infty}$, *alors il existe* $K > 0$ *tel que*

$$\|Qw_3\|_{C^\theta([0,1];X)} \leqslant K \|g\|_{C^\theta([0,1];X)}.$$

5. *Soient* $\theta \in]0,1[$ *et* $g \in C^\theta([0,1];X)$. *Alors*

$$Q\int_0^1 e^{sQ}(g(s) - g(0))\,ds \in (X, D(Q))_{\theta,\infty},$$
$$Q\int_0^1 e^{(1-s)Q}(g(s) - g(1))\,ds \in (X, D(Q))_{\theta,\infty}.$$

Le point 3. est obtenu en appliquant la théorie des sommes de Da Prato-Grisvard [12]. Le point 4. qui améliore le point 3. est dû à Sinestrari [56], voir aussi Da Prato [11]. On trouve dans Guidetti [35], une preuve simple de ces résultats, voir Proposition 2.5 p.132, Corollary 2.1 et Theorem 2.4, p. 136.

On pose pour une fonction g donnée de $[0,1]$ dans X et pour $x \in [0,1]$

$$G(g)(x) = \int_0^x e^{(x-s)M_\omega} g(s)ds, \qquad H(g)(x) = \int_x^1 e^{(s-x)L_\omega} g(s)ds.$$

Proposition V.8 *On suppose (V.3)-(V.8). Soit* $f \in C^\theta([0,1];X)$, $\theta \in]0,1[$. *Alors*

$$F_\omega(f) + D_\omega \in C^\theta([0,1];X),$$

si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} u_0, u_1 \in D(L_\omega M_\omega) \cap D(M_\omega L_\omega), \\ M_\omega (L_\omega + M_\omega) u_0 + (L_\omega + M_\omega)(L_\omega - I)^{-1} f(0) \in (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty}, \\ L_\omega (L_\omega + M_\omega) u_1 + (L_\omega + M_\omega)(M_\omega - I)^{-1} f(1) \in (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty}. \end{array}\right. \tag{V.22}$$

Preuve. On note $L_\omega = L$ et $M_\omega = M$... En utilisant le Lemme V.5, on écrit pour tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
&F(f)(x) + D(x) \\
={}& (L+M)(M-I)^{-1}(M-I)G(f)(x) \\
&+ (L+M)(L-I)^{-1}(L-I)H(f)(x) \\
&+ (L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}(M-I)((L+M)u_0 - H(f)(0)) \\
&+ (L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}(M-I)(L-I)^{-1}(L-I)e^L(G(f)(1) - (L+M)u_1) \\
&+ (L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}(L-I)((L+M)u_1 - G(f)(1)) \\
&+ (L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}(L-I)(M-I)^{-1}(M-I)e^M(H(f)(0) - (L+M)u_0) \\
&+ (L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}(M-I)(L-I)^{-1}(L-I)e^Le^M\left(I - e^Le^M\right)^{-1}\cdot \\
&\qquad \left((L+M)u_0 - H(f)(0) + e^LG(f)(1) - e^L(L+M)u_1\right) \\
&+ (L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}(L-I)(M-I)^{-1}(M-I)e^Me^L\left(I - e^Me^L\right)^{-1}\cdot \\
&\qquad \left((L+M)u_1 - G(f)(1) + e^MH(f)(0) - e^M(L+M)u_0\right) \\
:={}& (I)(x) + (II)(x) + (III)(x) + (IV)(x) + (V)(x) + (VI)(x) + (VII)(x) + (VIII)(x).
\end{aligned}$$

On rappelle que $(L+M)(M-I)^{-1}$, $(L+M)(L-I)^{-1} \in L(X)$. De plus, pour tout $x \in [0,1]$, $G(f)(x) \in D(M)$, $H(f)(x) \in D(L)$ puisque $f \in C^\theta([0,1];X)$, $\theta \in]0,1[$.

Alors, pour (I) et (II), on a

$$
\begin{aligned}
(I)(x) = &(L+M)(M-I)^{-1}M\int_0^x e^{(x-s)M}\left(f(s)-f(x)\right)ds\\
&+(L+M)(M-I)^{-1}M\int_0^x e^{(x-s)M}f(x)ds-(L+M)(M-I)^{-1}G(f)(x)\\
=&(L+M)(M-I)^{-1}\int_0^x Me^{(x-s)M}\left(f(s)-f(x)\right)ds-(L+M)(M-I)^{-1}f(x)\\
&+(L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}\left(f(x)-f(0)\right)-(L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}(L-I)^{-1}f(0)\\
&+(L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}L(L-I)^{-1}f(0)-(L+M)(M-I)^{-1}G(f)(x)\\
:=&I_1(x)+I_2(x)+I_3(x)+I_4(x)+I_5(x)+I_6(x),
\end{aligned}
$$

de même

$$
\begin{aligned}
(II)(x) = &(L+M)(L-I)^{-1}L\int_x^1 e^{(s-x)L}\left(f(s)-f(x)\right)ds\\
&+(L+M)(L-I)^{-1}L\int_x^1 e^{(s-x)L}f(x)ds-(L+M)(L-I)^{-1}H(f)(x)\\
=&(L+M)(L-I)^{-1}\int_x^1 Le^{(s-x)L}\left(f(s)-f(x)\right)ds-(L+M)(L-I)^{-1}f(x)\\
&+(L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}\left(f(x)-f(1)\right)-(L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}(M-I)^{-1}f(1)\\
&+(L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}M(M-I)^{-1}f(1)-(L+M)(L-I)^{-1}H(f)(x)\\
:=&I_7(x)+I_8(x)+I_9(x)+I_{10}(x)+I_{11}(x)+I_{12}(x).
\end{aligned}
$$

Il est clair que I_2, I_3, I_8, $I_9\in C^\theta([0,1];X)$; I_4, $I_{10}\in C^\theta([0,1];X)$ par la Proposition V.7, point 1. ; I_6, $I_{12}\in C^\theta([0,1];X)$ par la Proposition V.7, point 2. ; I_1, $I_7\in C^\theta([0,1];X)$ par la Proposition V.7, point 5.

Pour (III) et (V), on utilise

$$
\begin{aligned}
LH(f)(0) &= \int_0^1 Le^{sL}\left(f(s)-f(0)\right)ds+e^Lf(0)-f(0),\\
MG(f)(1) &= \int_0^1 Me^{(1-s)M}\left(f(s)-f(1)\right)ds+e^Mf(1)-f(1),
\end{aligned}
\tag{V.23}
$$

ainsi

$$
\begin{aligned}
(III)(x) = &-(L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}(M-I)(L-I)^{-1}\int_0^1 Le^{sL}\left(f(s)-f(0)\right)ds\\
&+(L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}(M-I)(L-I)^{-1}\left(H(f)(0)-e^Lf(0)\right)\\
&-(L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}\left((L+M)u_0+(L-I)^{-1}f(0)\right)\\
&+(L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}\left(M(L+M)u_0+M(L-I)^{-1}f(0)\right)\\
:=&K_1(x)+K_2(x)+K_3(x)+K_4(x),
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
(V)(x) = &-(L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}(L-I)(M-I)^{-1}\int_0^1 Me^{(1-s)M}\left(f(s)-f(1)\right)ds\\
&+(L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}(L-I)(M-I)^{-1}\left(G(f)(1)-e^Mf(1)\right)\\
&-(L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}\left((L+M)u_1+(M-I)^{-1}f(1)\right)\\
&+(L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}\left(L(L+M)u_1+L(M-I)^{-1}f(1)\right)\\
:=&K_5(x)+K_6(x)+K_7(x)+K_8(x).
\end{aligned}
$$

Grâce à (V.11) et à la Proposition V.7, point 5., on a

$$\begin{aligned}
&(M-I)(L-I)^{-1}\int_0^1 Le^{sL}\left(f(s)-f(0)\right)ds \in \left(X, D\left(L\right)\right)_{\theta,\infty},\\
&(L-I)(M-I)^{-1}\int_0^1 Me^{M(1-s)}\left(f(s)-f(1)\right)ds \in \left(X, D\left(M\right)\right)_{\theta,\infty},
\end{aligned}$$

dont on déduit $K_1, K_5 \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$ grâce à la Proposition V.7, point 1. En utilisant encore (V.11), on a

$$\begin{aligned}
&(M-I)(L-I)^{-1}\left(H(f)(0)-e^L f(0)\right) \in \left(X, D\left(L\right)\right)_{\theta,\infty},\\
&\left((L+M)\,u_0+(L-I)^{-1}f(0)\right) \in D(L) \subset \left(X, D\left(L\right)\right)_{\theta,\infty},\\
&(L-I)(M-I)^{-1}\left(G(f)(1)-e^M f(1)\right) \in \left(X, D\left(L\right)\right)_{\theta,\infty},\\
&\left((L+M)\,u_1+(M-I)^{-1}f(1)\right) \in D(L) \subset \left(X, D\left(L\right)\right)_{\theta,\infty},
\end{aligned}$$

donc K_2, K_3, K_6, $K_7 \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$ par la Proposition V.7, point 1.

En vertu de (V.11) et de la Proposition V.7, point 1., il est clair que (IV), (VI), (VII), $(VIII) \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$.

On pose

$$\begin{aligned}
\Lambda :=&I_1+I_2+I_3+I_4+I_6+I_7+I_8+I_9+I_{10}+I_{12}+K_1+K_2+K_3+K_5+K_6+K_7\\
&+(IV)+(VI)+(VII)+(VIII),
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
F(f)(x)+D(x) =&\Lambda(x)+\left(I_5(x)+K_4(x)\right)+\left(I_{11}(x)+K_8(x)\right)\\
=&\Lambda(x)+\left(L+M\right)\left(M-I\right)^{-1}e^{xM}\left(M\left(L+M\right)u_0+\left(L+M\right)\left(L-I\right)^{-1}f(0)\right)\\
&+\left(L+M\right)\left(L-I\right)^{-1}e^{(1-x)L}\left(L\left(L+M\right)u_1+\left(L+M\right)\left(M-I\right)^{-1}f(1)\right).
\end{aligned}$$

L'étude précédente montre que $\Lambda \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$, de plus

$$\begin{aligned}
x \mapsto &\left(L+M\right)\left(M-I\right)^{-1}e^{xM}\left(M\left(L+M\right)u_0+\left(L+M\right)\left(L-I\right)^{-1}f(0)\right)\\
&+\left(L+M\right)\left(L-I\right)^{-1}e^{(1-x)L}\left(L\left(L+M\right)u_1+\left(L+M\right)\left(M-I\right)^{-1}f(1)\right),
\end{aligned}$$

est dans $C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$ si et seulement si (V.22) est satisfaite. On obtient ainsi le résultat. ∎

On pose pour $\omega \geqslant \omega_0$

$$\begin{aligned}
C^\theta_{L_\omega,M_\omega}\left([0,1]\,;X\right) := \Big\{ &v \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right) : \left(L_\omega-M_\omega\right)\left(L_\omega-I\right)^{-1}C_{L_\omega,M_\omega}v(0) \in \left(X, D\left(L_\omega\right)\right)_{\theta,\infty},\\
&\left(L_\omega-M_\omega\right)\left(M_\omega-I\right)^{-1}C_{L_\omega,M_\omega}v(1) \in \left(X, D\left(L_\omega\right)\right)_{\theta,\infty}\Big\}.
\end{aligned}$$

Or $\left(L_\omega-M_\omega\right)\left(L_\omega-I\right)^{-1}, \left(L_\omega-M_\omega\right)\left(M_\omega-I\right)^{-1}, C_{L_\omega,M_\omega} \in L(X)$. Ainsi, il est clair que $C^\theta_{L_\omega,M_\omega}\left([0,1]\,;X\right)$ est un espace de Banach complexe.

Proposition V.9 *On suppose (V.3)-(V.9). Soit* $\theta \in \,]0,1[$.

1. $R_\omega(v) \in C^\theta([0,1]\,;X)$ *si et seulement si* $v \in C^\theta_{L_\omega,M_\omega}\left([0,1]\,;X\right)$.
2. $R_\omega(v) \in C^\theta_{L_\omega,M_\omega}\left([0,1]\,;X\right)$ *si et seulement si* $v \in C^\theta_{L_\omega,M_\omega}\left([0,1]\,;X\right)$.
3. $R_\omega \in L\left(C^\theta_{L_\omega,M_\omega}\left([0,1]\,;X\right)\right)$.

4. Il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$

$$\|R_\omega\|_{L\left(C^\theta_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X)\right)} < 1.$$

Ainsi $I + R_\omega$ est inversible dans $L\left(C^\theta_{L_\omega,M_\omega}([0,1]\,;X)\right)$ pour $\omega \geqslant \omega^*$.

Preuve. On note $L_\omega = L$ et $M_\omega = M$... Soit $v \in C^\theta_{L,M}([0,1]\,;X)$. $C_{L,M} \in L(X)$, donc $C_{L,M}v \in C^\theta([0,1]\,;X)$.

On effectue une analyse similaire à celle de la démonstration de la Proposition V.8. En utilisant le Lemme V.5, on écrit pour tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
&4R(v)(x)\\
=&(L+M)(M-I)^{-1}(M-I)G(C_{L,M}v)(x)\\
&-(L+M)(L-I)^{-1}(L-I)H(C_{L,M}v)(x)\\
&+(L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}(M-I)(L-I)^{-1}(L-I)H(C_{L,M}v)(0)\\
&+(L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}(M-I)(L-I)^{-1}(L-I)e^{L}G(C_{L,M}v)(1)\\
&-(L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}(L-I)(M-I)^{-1}(M-I)G(C_{L,M}v)(1)\\
&-(L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}(L-I)(M-I)^{-1}(M-I)e^{M}H(C_{L,M}v)(0)\\
&+(L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}(M-I)(L-I)^{-1}(L-I)e^{L}e^{M}\left(I-e^{L}e^{M}\right)^{-1}\cdot\\
&\qquad\left(H(C_{L,M}v)(0)+e^{L}G(C_{L,M}v)(1)\right)\\
&-(L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}(L-I)(M-I)^{-1}(M-I)e^{M}e^{L}\left(I-e^{M}e^{L}\right)^{-1}\cdot\\
&\qquad\left(G(C_{L,M}v)(1)+e^{M}H(C_{L,M}v)(0)\right)\\
:=&(I)(x)+(II)(x)+(III)(x)+(IV)(x)+(V)(x)+(VI)(x)+(VII)(x)+(VIII)(x).
\end{aligned}$$

Alors, pour (I) et (II), on a

$$\begin{aligned}
(I)(x) =& (L+M)(M-I)^{-1}M\int_0^x e^{(x-s)M}\left(C_{L,M}v(s)-C_{L,M}v(x)\right)ds\\
&+(L+M)(M-I)^{-1}M\int_0^x e^{(x-s)M}C_{L,M}v(x)ds-(L+M)(M-I)^{-1}G(C_{L,M}v)(x)\\
=&(L+M)(M-I)^{-1}\int_0^x Me^{(x-s)M}\left(C_{L,M}v(s)-C_{L,M}v(x)\right)ds-(L+M)(M-I)^{-1}C_{L,M}v(x)\\
&+(L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}\left(C_{L,M}v(x)-C_{L,M}v(0)\right)-(L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}(L-I)^{-1}C_{L,M}v(0)\\
&+(L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}L(L-I)^{-1}C_{L,M}v(0)-(L+M)(M-I)^{-1}G(C_{L,M}v)(x)\\
:=&I_1(x)+I_2(x)+I_3(x)+I_4(x)+I_5(x)+I_6(x),
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
(II)(x) =& -(L+M)(L-I)^{-1}L\int_x^1 e^{(s-x)L}\left(C_{L,M}v(s)-C_{L,M}v(x)\right)ds\\
&-(L+M)(L-I)^{-1}L\int_x^1 e^{(s-x)L}C_{L,M}v(x)ds+(L+M)(L-I)^{-1}H(C_{L,M}v)(x)\\
=&-(L+M)(L-I)^{-1}\int_x^1 Le^{(s-x)L}\left(C_{L,M}v(s)-C_{L,M}v(x)\right)ds+(L+M)(L-I)^{-1}C_{L,M}v(x)\\
&-(L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}\left(C_{L,M}v(x)-C_{L,M}v(1)\right)\\
&+(L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}(M-I)^{-1}C_{L,M}v(1)\\
&-(L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}M(M-I)^{-1}C_{L,M}v(1)+(L+M)(L-I)^{-1}H(C_{L,M}v)(x)\\
:=&I_7(x)+I_8(x)+I_9(x)+I_{10}(x)+I_{11}(x)+I_{12}(x).
\end{aligned}$$

Il est clair que I_2, I_3, I_8, $I_9 \in C^\theta([0,1];X)$; I_4, $I_{10} \in C^\theta([0,1];X)$ par la Proposition V.7, point 1. ; I_6, $I_{12} \in C^\theta([0,1];X)$ par la Proposition V.7, point 2. ; I_1, $I_7 \in C^\theta([0,1];X)$ par la Proposition V.7, point 5.

Pour (III) et (V), on a

$$\begin{aligned}(III)(x) =& (L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}(M-I)(L-I)^{-1}\int_0^1 Le^{sL}\left(C_{L,M}v(s)-C_{L,M}v(0)\right)ds\\ &-(L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}(M-I)(L-I)^{-1}\left(H(C_{L,M}v)(0)-e^{L}C_{L,M}v(0)\right)\\ &+(L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}(L-I)^{-1}C_{L,M}v(0)\\ &-(L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}M(L-I)^{-1}C_{L,M}v(0)\\ :=&K_1(x)+K_2(x)+K_3(x)+K_4(x),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(V)(x) =& -(L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}(L-I)(M-I)^{-1}\int_0^1 Me^{(1-s)M}\left(C_{L,M}v(s)-C_{L,M}v(1)\right)ds\\ &+(L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}(L-I)(M-I)^{-1}\left(G(C_{L,M}v)(1)-e^{M}C_{L,M}v(1)\right)\\ &-(L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}(M-I)^{-1}C_{L,M}v(1)\\ &+(L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}L(M-I)^{-1}C_{L,M}v(1)\\ :=&K_5(x)+K_6(x)+K_7(x)+K_8(x).\end{aligned}$$

Grâce à (V.11) et à la Proposition V.7, point 5., on a

$$\begin{aligned}&(M-I)(L-I)^{-1}\int_0^1 Le^{sL}\left(C_{L,M}v(s)-C_{L,M}v(0)\right)ds \in (X,D(L))_{\theta,\infty}\,,\\ &(L-I)(M-I)^{-1}\int_0^1 Me^{M(1-s)}\left(C_{L,M}v(s)-C_{L,M}v(1)\right)ds \in (X,D(M))_{\theta,\infty}\,,\end{aligned}$$

dont on déduit $K_1, K_5 \in C^\theta([0,1];X)$ grâce à la Proposition V.7, point 1. En utilisant encore (V.11), on a

$$\begin{aligned}&(M-I)(L-I)^{-1}\left(H(C_{L,M}v)(0)-e^{L}C_{L,M}v(0)\right) \in (X,D(L))_{\theta,\infty}\,,\\ &(L-I)^{-1}C_{L,M}v(0) \in D(L) \subset (X,D(L))_{\theta,\infty}\,,\\ &(L-I)(M-I)^{-1}\left(G(C_{L,M}v)(1)-e^{M}C_{L,M}v(1)\right) \in (X,D(L))_{\theta,\infty}\,,\\ &(M-I)^{-1}C_{L,M}v(1) \in D(L) \subset (X,D(L))_{\theta,\infty}\,,\end{aligned}$$

donc K_2, K_3, K_6, $K_7 \in C^\theta([0,1];X)$ par la Proposition V.7, point 1.

En vertu de (V.11) et de la Proposition V.7, point 1., il est clair que (IV), (VI), (VII), $(VIII) \in C^\theta([0,1];X)$.

On pose

$$\begin{aligned}\Lambda :=& I_1+I_2+I_3+I_4+I_6+I_7+I_8+I_9+I_{10}+I_{12}+K_1+K_2+K_3+K_5+K_6+K_7\\ &+(IV)+(VI)+(VII)+(VIII),\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}4R(v)(x) =& \Lambda(x)+(I_5(x)+K_4(x))+(I_{11}(x)+K_8(x))\\ =&\Lambda(x)+(L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}(L-M)(L-I)^{-1}C_{L,M}v(0)\\ &+(L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}(L-M)(M-I)^{-1}C_{L,M}v(1).\end{aligned}$$

L'étude précédente montre que $\Lambda \in C^\theta([0,1]\,;X)$, de plus

$$\begin{aligned}x \mapsto &(L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}(L-M)(L-I)^{-1}C_{L,M}v(0)\\ &+(L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}(L-M)(M-I)^{-1}C_{L,M}v(1),\end{aligned}$$

est dans $C^\theta([0,1]\,;X)$ si et seulement si

$$\begin{cases}(L-M)(L-I)^{-1}C_{L,M}v(0) \in (X, D(L))_{\theta,\infty}\,,\\ (L-M)(M-I)^{-1}C_{L,M}v(1) \in (X, D(L))_{\theta,\infty}\,,\end{cases}$$

donc si et seulement si $v \in C^\theta_{L,M}([0,1]\,;X)$.

On a donc $R(v) \in C^\theta([0,1]\,;X)$ si et seulement si $v \in C^\theta_{L,M}([0,1]\,;X)$. De plus, on a

$$\begin{aligned}R(v)(0) = &-\frac{1}{4}(L+M)H(C_{L,M}v)(0) + \frac{1}{4}(L+M)\left(I-e^Le^M\right)^{-1}H(C_{L,M}v)(0)\\ &+\frac{1}{4}(L+M)\left(I-e^Le^M\right)^{-1}e^LG(C_{L,M}v)(1) - \frac{1}{4}(L+M)e^L\left(I-e^Me^L\right)^{-1}G(C_{L,M}v)(1)\\ &-\frac{1}{4}(L+M)e^L\left(I-e^Me^L\right)^{-1}e^MH(C_{L,M}v)(0),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}R(v)(0) = &-\frac{1}{4}(L+M)\left(I-\left(I-e^Le^M\right)^{-1}+e^L\left(I-e^Me^L\right)^{-1}e^M\right)H(C_{L,M}v)(0)\\ &-\frac{1}{4}(L+M)\left(e^L\left(I-e^Me^L\right)^{-1}-\left(I-e^Le^M\right)^{-1}e^L\right)G(C_{L,M}v)(1),\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}&I-\left(I-e^Le^M\right)^{-1}+e^L\left(I-e^Me^L\right)^{-1}e^M\\ &=\left(I-e^Le^M\right)^{-1}\left(\left(I-e^Le^M\right)-I+\left(I-e^Le^M\right)e^L\left(I-e^Me^L\right)^{-1}e^M\right)\\ &=\left(I-e^Le^M\right)^{-1}e^L\left(-I+\left(I-e^Me^L\right)^{-1}-e^Me^L\left(I-e^Me^L\right)^{-1}\right)e^M\\ &=\left(I-e^Le^M\right)^{-1}e^L\left(-I+\left(I-e^Me^L\right)\left(I-e^Me^L\right)^{-1}\right)e^M,\end{aligned}$$

ainsi

$$I-\left(I-e^Le^M\right)^{-1}+e^L\left(I-e^Me^L\right)^{-1}e^M=0, \tag{V.24}$$

et

$$\begin{aligned}&e^L\left(I-e^Me^L\right)^{-1}-\left(I-e^Le^M\right)^{-1}e^L\\ &=\left(I-e^Le^M\right)^{-1}\left(\left(I-e^Le^M\right)e^L\left(I-e^Me^L\right)^{-1}-e^L\right)\\ &=\left(I-e^Le^M\right)^{-1}e^L\left(\left(I-e^Me^L\right)^{-1}-e^Me^L\left(I-e^Me^L\right)^{-1}-I\right)\\ &=\left(I-e^Le^M\right)^{-1}e^L\left(\left(I-e^Me^L\right)\left(I-e^Me^L\right)^{-1}-I\right),\end{aligned}$$

d'où

$$e^L\left(I-e^Me^L\right)^{-1}-\left(I-e^Le^M\right)^{-1}e^L=0, \tag{V.25}$$

donc

$$R(v)(0)=0. \tag{V.26}$$

De même
$$R(v)(1) = 0. \tag{V.27}$$
Ainsi, $R(v) \in C^{\theta}_{L,M}([0,1];X)$ si et seulement si $v \in C^{\theta}_{L,M}([0,1];X)$ et R est un opérateur linéaire de $C^{\theta}_{L,M}([0,1];X)$ dans lui-même.

On fait apparaître la dépendance de ω. Alors, par la Proposition V.7, points 2. et 4., et par l'hypothèse (V.9), on a pour tout $\omega \geqslant \omega_0$

$$\begin{aligned}\|R_\omega(v)\|_{C^{\theta}_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X)} &\leqslant C\,\|C_{L_\omega,M_\omega}\|_{L(X)}\,\|v\|_{C^{\theta}_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X)}\\ &\leqslant C\chi(\omega)\,\|v\|_{C^{\theta}_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X)}\,.\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\chi(\omega) = 0$, donc il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$

$$\|R_\omega\|_{L\left(C^{\theta}_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X)\right)} < 1.$$

Ainsi $I + R_\omega$ est inversible dans $L\left(C^{\theta}_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X)\right)$ pour $\omega \geqslant \omega^*$. ■

On note qu'il est nécessaire de considérer R_ω dans $C^{\theta}_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X)$ puisque $I + R_\omega$ n'est pas inversible dans $C^{\theta}([0,1];X)$ ou dans $C([0,1];X)$.

Proposition V.10 *On suppose (V.3)-(V.8). Soit $f \in C^{\theta}([0,1];X)$, $\theta \in]0,1[$. Alors*

$$F_\omega(f) + D_\omega \in C^{\theta}_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X)\,,$$

si et seulement si

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in D(L_\omega M_\omega) \cap D(M_\omega L_\omega),\\ M_\omega(L_\omega + M_\omega)u_0 + (L_\omega + M_\omega)(L_\omega - I)^{-1}f(0) \in (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty}\,,\\ L_\omega(L_\omega + M_\omega)u_1 + (L_\omega + M_\omega)(M_\omega - I)^{-1}f(1) \in (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty}\,,\\ (L_\omega - M_\omega)(L_\omega - I)^{-1}C_{L_\omega,M_\omega}(L_\omega + M_\omega)^2u_0 \in (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty}\,,\\ (L_\omega - M_\omega)(M_\omega - I)^{-1}C_{L_\omega,M_\omega}(L_\omega + M_\omega)^2u_1 \in (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty}\,. \end{cases}$$

Preuve. On note $L_\omega = L$ et $M_\omega = M$... Par la Proposition V.8, il suffit de calculer $F(f) + D$ en 0 et en 1.

$$\begin{aligned}(F(f)+D)(0) = {}&(L+M)\,H(f)(0) - (L+M)\left(I - e^Le^M\right)^{-1}H(f)(0)\\ &+ (L+M)\left(I - e^Le^M\right)^{-1}e^LG(f)(1) - (L+M)\,e^L\left(I - e^Me^L\right)^{-1}G(f)(1)\\ &+ (L+M)\,e^L\left(I - e^Me^L\right)^{-1}e^MH(f)(0)\\ &+ (L+M)\left(I - e^Le^M\right)^{-1}\left((L+M)\,u_0 - e^L(L+M)\,u_1\right)\\ &+ (L+M)\,e^L\left(I - e^Me^L\right)^{-1}\left((L+M)\,u_1 - e^M(L+M)\,u_0\right),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(F(f)+D)(0) = {}&(L+M)\left(I - \left(I - e^Le^M\right)^{-1} + e^L\left(I - e^Me^L\right)^{-1}e^M\right)H(f)(0)\\ &+ (L+M)\left(\left(I - e^Le^M\right)^{-1}e^L - e^L\left(I - e^Me^L\right)^{-1}\right)G(f)(1)\\ &+ (L+M)\left(\left(I - e^Le^M\right)^{-1} - e^L\left(I - e^Me^L\right)^{-1}e^M\right)(L+M)\,u_0\\ &+ (L+M)\left(e^L\left(I - e^Me^L\right)^{-1} - \left(I - e^Le^M\right)^{-1}e^L\right)(L+M)\,u_1,\end{aligned}$$

ainsi, en vertu de (V.24) et (V.25), on a

$$(F(f)+D)(0) = (L+M)\, I\, (L+M)\, u_0 = (L+M)^2\, u_0. \tag{V.28}$$

De même

$$(F(f)+D)(1) = (L+M)^2\, u_1. \tag{V.29}$$

On obtient ainsi le résultat. ■

Remarque V.11 *Par les propositions précédentes, on peut dire que s'il existe une solution classique de (V.2) satisfaisant la propriété de régularité maximale (V.10), elle s'écrit sous la forme (V.21) pour $\omega \geqslant \omega^*$. On déduit alors l'unicité de la solution classique et aussi, pour tout $x \in [0,1]$, $u(x) \in D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)$, ce qui implique, grâce à l'hypothèse (V.5), que $u(x) \in D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right)$.*

On énonce alors le résultat fondamental suivant.

Théorème V.12 *On suppose (V.3)-(V.9). Soit $\theta \in \,]0,1[$. Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (V.2) admet une unique solution classique u satisfaisant*

$$\begin{aligned} &u'',\ (L_\omega - M_\omega)\, u',\ (L_\omega + M_\omega)^2\, u \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right), \\ &(L_\omega + M_\omega)^2\, u \in C^\theta_{L_\omega, M_\omega}\left([0,1]\,;X\right). \end{aligned}$$

2. *$f \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$ et*

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in D\left(L_\omega M_\omega\right) \cap D(M_\omega L_\omega), \\ M_\omega\left(L_\omega + M_\omega\right) u_0 + \left(L_\omega + M_\omega\right)\left(L_\omega - I\right)^{-1} f(0) \in \left(X, D\left(L_\omega\right)\right)_{\theta,\infty}, \\ L_\omega\left(L_\omega + M_\omega\right) u_1 + \left(L_\omega + M_\omega\right)\left(M_\omega - I\right)^{-1} f(1) \in \left(X, D\left(L_\omega\right)\right)_{\theta,\infty}, \\ (L_\omega - M_\omega)(L_\omega - I)^{-1} C_{L_\omega, M_\omega}(L_\omega + M_\omega)^2 u_0 \in \left(X, D\left(L_\omega\right)\right)_{\theta,\infty}, \\ (L_\omega - M_\omega)(M_\omega - I)^{-1} C_{L_\omega, M_\omega}(L_\omega + M_\omega)^2 u_1 \in \left(X, D\left(L_\omega\right)\right)_{\theta,\infty}. \end{cases} \tag{V.30}$$

Preuve. Soit $\omega > 0$ fixé tel que $\omega \geqslant \omega^*$. On note encore $L_\omega = L$, $M_\omega = M$...

Tout d'abord on prouve que 2. implique 1. Pour cela, on suppose (V.30) et $f \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$, on veut prouver que u défini par (V.21) est l'unique solution classique de (V.2). On pose

$$v := (I+R)^{-1}\,(F(f)+D),$$

alors

$$v = F(f) + D - R\,(v)\,,$$

d'où

$$u = (L+M)^{-2}\,(F(f)+D) - (L+M)^{-2}\, R\,(v)\,. \tag{V.31}$$

On note que $(L+M)^2\, u = v \in C^\theta_{L,M}\left([0,1]\,;X\right)$ par les Corollaires V.9 et V.10. Puisque $(L-M)^2\,(L+M)^{-2} \in L(X)$, on a

$$(L-M)^2\, u = (L-M)^2\,(L+M)^{-2}\,(L+M)^2\, u \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right).$$

De plus, en utilisant (V.18), (V.19) et (V.20), dans (V.31), on obtient pour tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
u(x) = {} & (L+M)^{-1} G(f)(x) + (L+M)^{-1} H(f)(x) \\
& - (L+M)^{-1} e^{xM} \left(I - e^{L}e^{M}\right)^{-1} H(f)(0) \\
& + (L+M)^{-1} e^{xM} \left(I - e^{L}e^{M}\right)^{-1} e^{L} G(f)(1) \\
& - (L+M)^{-1} e^{(1-x)L} \left(I - e^{M}e^{L}\right)^{-1} G(f)(1) \\
& + (L+M)^{-1} e^{(1-x)L} \left(I - e^{M}e^{L}\right)^{-1} e^{M} H(f)(0) \\
& + (L+M)^{-1} e^{xM} \left(I - e^{L}e^{M}\right)^{-1} \left((L+M)\, u_0 - e^{L} (L+M)\, u_1\right) \\
& + (L+M)^{-1} e^{(1-x)L} \left(I - e^{M}e^{L}\right)^{-1} \left((L+M)\, u_1 - e^{M} (L+M)\, u_0\right) \\
& - \frac{1}{4} (L+M)^{-1} G(C_{L,M}v)(x) + \frac{1}{4} (L+M)^{-1} H(C_{L,M}v)(x) \\
& - \frac{1}{4} (L+M)^{-1} e^{xM} \left(I - e^{L}e^{M}\right)^{-1} H(C_{L,M}v)(0) \\
& - \frac{1}{4} (L+M)^{-1} e^{xM} \left(I - e^{L}e^{M}\right)^{-1} e^{L} G(C_{L,M}v)(1) \\
& + \frac{1}{4} (L+M)^{-1} e^{(1-x)L} \left(I - e^{M}e^{L}\right)^{-1} G(C_{L,M}v)(1) \\
& + \frac{1}{4} (L+M)^{-1} e^{(1-x)L} \left(I - e^{M}e^{L}\right)^{-1} e^{M} H(C_{L,M}v)(0),
\end{aligned}$$

que l'on peut écrire

$$\begin{aligned}
u(x) = {} & (L+M)^{-1} G(f)(x) + (L+M)^{-1} H(f)(x) - \frac{1}{4} (L+M)^{-1} G(C_{L,M}v)(x) \\
& + \frac{1}{4} (L+M)^{-1} H(C_{L,M}v)(x) + (L+M)^{-1} e^{xM} f_0 + (L+M)^{-1} e^{(1-x)L} f_1,
\end{aligned} \tag{V.32}$$

où

$$\begin{aligned}
f_0 := \left(I - e^{L}e^{M}\right)^{-1} \Big(& -H(f)(0) + e^{L} G(f)(1) + (L+M)\, u_0 - e^{L} (L+M)\, u_1 \\
& - \frac{1}{4} H(C_{L,M}v)(0) - \frac{1}{4} e^{L} G(C_{L,M}v)(1) \Big),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f_1 := \left(I - e^{M}e^{L}\right)^{-1} \Big(& -G(f)(1) + e^{M} H(f)(0) + (L+M)\, u_1 - e^{M} (L+M)\, u_0 \\
& + \frac{1}{4} G(C_{L,M}v)(1) + \frac{1}{4} e^{M} H(C_{L,M}v)(0) \Big).
\end{aligned}$$

On a donc pour tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
v(x) = {} & (L+M)\, G(f)(x) + (L+M)\, H(f)(x) - \frac{1}{4} (L+M)\, G(C_{L,M}v)(x) \\
& + \frac{1}{4} (L+M)\, H(C_{L,M}v)(x) + (L+M)\, e^{xM} f_0 + (L+M)\, e^{(1-x)L} f_1.
\end{aligned} \tag{V.33}$$

D'après la Proposition V.7, point 4.,

$$u \in C^{1,\theta}\left([0,1]\,; X\right) \cap C^{\theta}\left([0,1]\,; D(L)\right),$$

si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l}
f_0, f_1 \in D(M) = D(L), \\
f(0) - \frac{1}{4} C_{L,M} v(0) + M f_0 \in (X, D(M))_{\theta,\infty} = (X, D(L))_{\theta,\infty}, \\
f(1) + \frac{1}{4} C_{L,M} v(1) + L f_1 \in (X, D(L))_{\theta,\infty}.
\end{array} \right. \tag{V.34}$$

Or, en écrivant

$$f_0 = (M-I)^{-1}(M-I)\left(I-e^Le^M\right)^{-1}(L-I)^{-1}(L-I)\Big(-H(f)(0)+e^LG(f)(1)+(L+M)\,u_0$$
$$-e^L\,(L+M)\,u_1-\frac{1}{4}H(C_{L,M}v)(0)-\frac{1}{4}e^LG(C_{L,M}v)(1)\Big),$$

il est clair que $f_0 \in D(M) = D(L)$, grâce notamment au Lemme V.5, et de plus

$$\begin{aligned} f(0)-\frac{1}{4}C_{L,M}v(0)+Mf_0 =& f(0)-\frac{1}{4}C_{L,M}v(0) \\ &+M(L-I)^{-1}\left(-LH(f)(0)+L\,(L+M)\,u_0-\frac{1}{4}LH(C_{L,M}v)(0)\right) \\ &+M(L-I)^{-1}\left(H(f)(0)-(L+M)\,u_0+\frac{1}{4}H(C_{L,M}v)(0)\right) \\ &+M(L-I)^{-1}(L-I)e^L\left(G(f)(1)-(L+M)\,u_1-\frac{1}{4}G(C_{L,M}v)(1)\right) \\ &+M(L-I)^{-1}(L-I)e^Le^Mf_0, \end{aligned}$$

et en utilisant (V.23), on obtient

$$\begin{aligned} f(0)-\frac{1}{4}C_{L,M}v(0)+Mf_0 =& M\,(L+M)\,u_0+(L+M)(L-I)^{-1}f(0)-\frac{1}{4}(L-M)(L-I)^{-1}C_{L,M}v(0) \\ &-(L-I)^{-1}\left(f(0)-\frac{1}{4}C_{L,M}v(0)\right) \\ &-M(L-I)^{-1}\left(\int_0^1 Le^{sL}\,(f(s)-f(0))\,ds+e^Lf(0)\right) \\ &-\frac{1}{4}M(L-I)^{-1}\left(\int_0^1 Le^{sL}\,(C_{L,M}v(s)-C_{L,M}v(0))\,ds+e^LC_{L,M}v(0)\right) \\ &+M(L-I)^{-1}\left(H(f)(0)-(L+M)\,u_0+\frac{1}{4}H(C_{L,M}v)(0)\right) \\ &+M(L-I)^{-1}(L-I)e^L\left(G(f)(1)-(L+M)\,u_1-\frac{1}{4}G(C_{L,M}v)(1)\right) \\ &+M(L-I)^{-1}(L-I)e^Le^Mf_0. \end{aligned}$$

D'après (V.11), (V.30) et la Proposition V.7, point 5., on a

$$f(0)-\frac{1}{4}C_{L,M}v(0)+Mf_0 \in (X, D\,(M))_{\theta,\infty}\,,$$

de même

$$f(1)+\frac{1}{4}C_{L,M}v(1)+Lf_1 \in (X, D\,(L))_{\theta,\infty}\,.$$

Ainsi

$$u \in C^{1,\theta}\left([0,1]\,;X\right)\cap C^{\theta}\left([0,1]\,;D\left((L+M)^2\right)\right).$$

Ensuite, on obtient pour tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} (L+M)\,u'(x) =& MG(f)(x)-LH(f)(x)-\frac{1}{4}MG(C_{L,M}v)(x)-\frac{1}{4}LH(C_{L,M}v)(x)-\frac{1}{2}C_{L,M}v(x) \\ &+Me^{xM}f_0-Le^{(1-x)L}f_1, \end{aligned}$$

donc pour tout $x \in [0,1]$, on a $u'(x) \in D(L+M) = D(L-M)$. De plus, en insérant (V.33) dans cette dernière formule, et en utilisant le Lemme IV.6, point 6., on obtient pour tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} u'(x) = {} & M\left(L+M\right)^{-1} G(f)(x) - L\left(L+M\right)^{-1} H(f)(x) - \frac{1}{4}M\left(L+M\right)^{-1} G(C_{L,M}v)(x) \\ & -\frac{1}{4}L\left(L+M\right)^{-1} H(C_{L,M}v)(x) + M\left(L+M\right)^{-1} e^{xM} f_0 - L\left(L+M\right)^{-1} e^{(1-x)L} f_1. \end{aligned} \tag{V.35}$$

En vertu de (V.34) et de la Proposition V.7, point 4., on a

$$u' \in C^{1,\theta}\left([0,1]\,; X\right) \cap C^{\theta}\left([0,1]\,; D\left(L-M\right)\right).$$

On a pour tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} u''(x) = {} & f(x) + M\left(L+M\right)^{-1} MG(f)(x) + L\left(L+M\right)^{-1} LH(f)(x) - \frac{1}{4}M\left(L+M\right)^{-1} MG(C_{L,M}v)(x) \\ & + \frac{1}{4}L\left(L+M\right)^{-1} LH(C_{L,M}v)(x) + \frac{1}{4}(L-M)\left(L+M\right)^{-1} C_{L,M}v(x) \\ & + M\left(L+M\right)^{-1} Me^{xM} f_0 + L\left(L+M\right)^{-1} Le^{(1-x)L} f_1. \end{aligned}$$

Puis, on insère (V.33) dans cette dernière formule, et on a

$$\begin{aligned} u''(x) = {} & f(x) + S_1G(f)(x) + T_1H(f)(x) - \frac{1}{4}S_1G(C_{L,M}v)(x) + \frac{1}{4}T_1H(C_{L,M}v)(x) \\ & + S_1e^{xM} f_0 + T_1e^{(1-x)L} f_1, \end{aligned} \tag{V.36}$$

où

$$\begin{aligned} S_1 := {} & M\left(L+M\right)^{-1} M + \frac{1}{4}(L-M)\left(L+M\right)^{-1} C_{L,M}(L+M) \\ = {} & \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}(L-M)M\left(L+M\right)^{-1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_1 := {} & L\left(L+M\right)^{-1} L + \frac{1}{4}(L-M)\left(L+M\right)^{-1} C_{L,M}(L+M) \\ = {} & \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}(L-M)L\left(L+M\right)^{-1}, \end{aligned}$$

d'après le point 7. du Lemme IV.6.

En utilisant (V.32), (V.35) et (V.36), on a pour tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} & u''(x) + (L-M)u'(x) + \frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)u(x) \\ = {} & f(x) + S_2G(f)(x) + T_2H(f)(x) - \frac{1}{4}S_2G(C_{L,M}v)(x) + \frac{1}{4}T_2H(C_{L,M}v)(x) + S_2e^{xM} f_0 + T_2e^{(1-x)L} f_1, \end{aligned}$$

où

$$S_2 := \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}(L-M)M\left(L+M\right)^{-1} + (L-M)M\left(L+M\right)^{-1} + \frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)\left(L+M\right)^{-1} = 0,$$

et

$$T_2 := \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}(L-M)L\left(L+M\right)^{-1} - (L-M)L\left(L+M\right)^{-1} + \frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)\left(L+M\right)^{-1} = 0,$$

d'après le point 8. du Lemme IV.6. On obtient enfin

$$u'' + (L-M)u' + \frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)u = f.$$

De plus, par (V.26), (V.27), (V.28) et (V.29)

$$u(0) = (L+M)^{-2}(F(f)+D)(0) - (L+M)^{-2}R(v)(0) = u_0,$$

$$u(1) = (L+M)^{-2}(F(f)+D)(1) - (L+M)^{-2}R(v)(1) = u_1.$$

Donc u défini par (V.21) est une solution classique de (V.2) vérifiant la propriété de régularité maximale (V.10) et $(L+M)^2 u \in C^\theta_{L,M}([0,1];X)$; l'unicité de cette solution classique résulte de la Remarque V.11.

Inversement, on suppose le point 1. D'une part, on a

$$u'' + (L-M)u' + \frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)u = f,$$

dont on déduit $f \in C^\theta([0,1];X)$. D'autre part, u est uniquement déterminé par la formule (V.21) et

$$(L+M)^2 u = (I+R)^{-1}(F(f)+D) \in C^\theta_{L,M}([0,1];X),$$

et en appliquant $I + R \in L\left(C^\theta_{L,M}([0,1];X)\right)$, voir Proposition V.9, il s'ensuit

$$F(f) + D \in C^\theta_{L,M}([0,1];X),$$

ainsi par la Proposition V.10, (V.30) est satisfaite. ■

1.5 Applications

On va considérer les exemples traités dans la Section 1.5 du chapitre IV. Pour le premier exemple, on se place dans un espace $X = L^p(\Omega)$, où $\Omega =]c,d[$. Le second exemple généralise le premier en prenant Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^n$. Le dernier exemple reprend le premier en conservant les mêmes actions d'opérateurs mais en se plaçant dans le cadre höldérien $X = C^\beta_0([c,d])$, $\beta \in]0,1[$. On rappelle que dans tous ces exemples, les hypothèses (V.3)-(V.6) et (V.9) ont déjà été prouvées dans la Section 1.5 du chapitre IV. Il reste à montrer les hypothèses (V.7) et (V.8).

Exemple 1.

On veut traiter le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + a(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(x,y) - \omega^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y) - a(y)\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,y) - a'(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \\ -\dfrac{1}{2}a''(y)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \omega^\alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y),\ x \in [0,1],\ y \in]c,d[\\ u(x,c) = u(x,d) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,c) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,d) = 0,\ x \in [0,1] \\ u(0,y) = u_0,\ y \in]c,d[\\ u(1,y) = u_1,\ y \in]c,d[\,, \end{array}\right. \tag{V.37}$$

où $\omega > 0$, $\alpha > 0$, et

$$a \in C^2([c,d]),\ a(c) = a(d) = 0,\ Im(a) \neq \{0\}.$$

On définit les opérateurs L_0 et M_0 sur $X = L^p(c,d)$ par

$$\left\{\begin{array}{l} D(L_0) = D(M_0) = \left\{\varphi \in W^{2,p}(c,d) : \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\} \\ L_0\varphi(y) = \varphi''(y) + a(y)\varphi'(y), \quad M_0\varphi(y) = \varphi''(y), \quad y \in (c,d)\,. \end{array}\right.$$

Le problème (V.37) s'écrit sous la forme opérationnelle (V.2) avec $L_\omega := L_0 - \omega^\alpha I$, $M_\omega := M_0$.

– Il existe $C_0 > 0$ tel que, pour tout $z \in S_\delta = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \delta\right\}$, on a

$$\left\|(L_0 - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C_0}{|z|},$$

dont on déduit

$$\left\|(L_\omega - zI)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \frac{C_0}{|\omega^\alpha + z|}.$$

Ainsi, la Remarque V.1, point 2., donne

$$I - e^{L_\omega}e^{M_\omega},\ I - e^{M_\omega}e^{L_\omega} \text{ sont inversibles dans } L(X).$$

– On a $D(L_\omega M_\omega) = D(M_\omega L_\omega)$ donc la Remarque V.3 donne

$$(X, D(L_\omega))_{1+\theta,\infty} = (X, D(M_\omega))_{1+\theta,\infty}.$$

Ainsi, toutes les hypothèses sont satisfaites. On peut alors appliquer le Théorème V.12 au problème (V.37). En particulier, dans les points 1. et 2. de ce théorème, il est aisé de voir qu'ici on peut remplacer L_ω et M_ω par L, M. Le domaine d'interpolation $(X, D(L_\omega))_{\theta,\infty}$ est défini dans la proposition suivante.

Proposition V.13 *Soient $\theta \in]0,1[$ et $1 < p < \infty$. Alors*

$$(L^p(c,d), D(L_\omega))_{\theta,\infty} = \begin{cases} B^{2\theta}_{p,\infty}(]c,d[) \ \textit{si}\ 0 < \theta < \dfrac{1}{2p} \\ B^{\frac{1}{p}}_{p}(]c,d[) \ \textit{si}\ \theta = \dfrac{1}{2p} \\ \left\{\varphi \in B^{2\theta}_{p,\infty}(]c,d[) : \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\} \ \textit{si}\ \dfrac{1}{2p} < \theta < 1. \end{cases}$$

Preuve. En utilisant Grisvard [32], Proposizione 3, p. 683, on a

$$\left(L^p(c,d), W^{2,p}(c,d)\right)_{\theta,\infty} = B^{2\theta}_{p,\infty}(]c,d[).$$

Les éléments de $B^{2\theta}_{p,\infty}(]c,d[)$ ont une trace en c et d si et seulement si $\theta > \dfrac{1}{2p}$. On utilise Triebel [58], p. 321. Si $\theta \neq \dfrac{1}{2p}$, alors $2\theta - \dfrac{1}{p} \neq 0$ donc

$$(L^p(c,d), D(L_\omega))_{\theta,\infty} = \begin{cases} B^{2\theta}_{p,\infty}(]c,d[) \text{ si } 0 < \theta < \dfrac{1}{2p} \\ \left\{\varphi \in B^{2\theta}_{p,\infty}(]c,d[) : \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\} \text{ si } \dfrac{1}{2p} < \theta < 1. \end{cases}$$

Si $\theta = \dfrac{1}{2p}$, alors $2\theta - \dfrac{1}{p} = 0$ donc $(L^p(c,d), D(L_\omega))_{\theta,\infty} = B^{\frac{1}{p}}_{p}(]c,d[)$. ∎

Exemple 2.

On veut traiter le problème aux limites et quasi-elliptique d'ordre quatre suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial x}(x,y) - \omega^\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \Delta_y^2 u(x,y) - \sum_{i=1}^{n} a_i(y)\frac{\partial(\Delta_y u)}{\partial y_i}(x,y) \\ - \displaystyle\sum_{i,k=1}^{n}\left(\frac{\partial a_i}{\partial y_k}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_i}(x,y) - \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 a_i}{\partial y_k^2}\right)\frac{\partial u}{\partial y_i}(x,y) + \omega^\alpha \Delta_y u(x,y) \\ = f(x,y),\ x \in [0,1],\ y \in \Omega \\ u(x,\sigma) = \Delta_\sigma u(x,\sigma) = 0,\ x \in [0,1],\ \sigma \in \partial\Omega \\ u(0,y) = u_0,\ y \in \Omega \\ u(1,y) = u_1,\ y \in \Omega, \end{cases} \tag{V.38}$$

où Ω est un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $\omega > 0$, $\alpha > 0$, et

$$a \in C^2(\overline{\Omega}),\ a_k = 0 \text{ sur } \partial\Omega,\ Im(a_k) \neq \{0\},\ k = 1, ..., n.$$

On définit les opérateurs L_0 et M_0 sur $X = L^p(\Omega)$ par

$$\begin{cases} D(L_0) = D(M_0) = \left\{\varphi \in W^{2,p}(\Omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\} \\ L_0\varphi(y) = \Delta_y\varphi(y) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i(y) D_i\varphi(y),\ y \in \Omega \\ M_0\varphi(y) = \Delta_y\varphi(y),\ y \in \Omega. \end{cases}$$

Le problème (V.38) s'écrit sous la forme opérationnelle (V.2) avec $L_\omega := L_0 - \omega^\alpha I$, $M_\omega := M_0$. De la même manière qu'à l'Exemple 1, on obtient les hypothèses (V.7) et (V.8).

On peut alors appliquer le Théorème V.12. En particulier, dans les points 1. et 2. de ce théorème, on peut encore ici remplacer L_ω et M_ω par L, M. Comme dans l'Exemple 1, on a le résultat suivant.

Proposition V.14 *Soient $\theta \in]0,1[$ et $1 < p < \infty$. Alors*

$$(L^p(\Omega), D(L_\omega))_{\theta,\infty} = \begin{cases} B^{2\theta}_{p,\infty}(\Omega) \ \textit{si}\ 0 < \theta < \dfrac{1}{2p} \\ B^{\frac{1}{p}}_{p}(\Omega) \ \textit{si}\ \theta = \dfrac{1}{2p} \\ \left\{\varphi \in B^{2\theta}_{p,\infty}(\Omega) : \varphi = 0 \ \textit{sur}\ \partial\Omega\right\} \ \textit{si}\ \dfrac{1}{2p} < \theta < 1. \end{cases}$$

Exemple 3.

On veut encore traiter le problème (V.37) où $\omega > 0$, $\alpha > 0$, et

$$a \in C^2([c,d]),\ a(c) = a(d) = 0, a'' \in C_0^\beta([c,d]),\ Im(a) \neq \{0\},$$

mais en définissant les opérateurs L_0 et M_0 sur $X = C_0^\beta([c,d])$, $\beta \in]0,1[$, par

$$\begin{cases} D(L_0) = D(M_0) = \left\{\varphi \in C^2([c,d]) : \varphi'' \in C_0^\beta([c,d]) \text{ et } \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\} \\ L_0\varphi(y) = \varphi''(y) + a(y)\varphi'(y), \quad M_0\varphi(y) = \varphi''(y), \quad y \in [c,d]. \end{cases}$$

Le problème (V.37) s'écrit sous la forme opérationnelle (V.2) avec $L_\omega := L_0 - \omega^\alpha I$, $M_\omega := M_0$.

De la même manière qu'à l'Exemple 1, on obtient les hypothèses (V.7) et (V.8). On peut appliquer le Théorème V.12. Dans les points 1. et 2. de ce théorème, on peut encore remplacer L_ω et M_ω par L, M. On a aussi le résultat suivant.

Proposition V.15 *Soient $\theta, \beta \in]0,1[$.*

1. *Si $2\theta + \beta \geqslant 2$, alors*

$$\left(C_0^\beta([c,d]), D(L_\omega)\right)_{\theta,\infty} = \left\{\varphi \in C^{2\theta+\beta}([c,d]) : \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\}.$$

2. *Si $0 < 2\theta + \beta < 2$, alors*

$$\left(C_0^\beta([c,d]), D(L_\omega)\right)_{\theta,\infty} = \left\{\varphi \in C^{2\theta+\beta}([c,d]) : \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\}.$$

Preuve. D'après Triebel [58], Theorem 1, p. 201, on a

$$\left(C^\beta([c,d]), C^{2+\beta}([c,d])\right)_{\theta,\infty} = C^{2\theta+\beta}([c,d]).$$

On a $2\theta + \beta > 0$, donc pour $\varphi \in C^{2\theta+\beta}([c,d])$, les traces $\varphi(c) = \varphi(d) = 0$ sont bien définies.

Ensuite, pour $\varphi \in C^{2\theta+\beta}([c,d])$, les traces $\varphi''(c) = \varphi''(d) = 0$ sont bien définies si et seulement si $2\theta + \beta \geqslant 2$.

■

1.6 Retour à l'équation initiale

On illustre ici la théorie opérationnelle précédente en construisant une paire d'opérateurs (L_ω, M_ω) satisfaisant (V.3)-(V.9). L'objectif est ensuite de pouvoir résoudre (V.1).

Dans toute cette section, pour un opérateur linéaire P sur X et pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $P_\lambda = P - \lambda I$.

On suppose qu'il existe un réel positif fixé ω_0 tel que les opérateurs A et B vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} B^2 - A_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X,\ \mathbb{R}^- \subset \rho(B^2 - A_{\omega_0}), \\ \exists C > 0,\ \forall \lambda \leqslant 0, \left\| \left(B^2 - A_{\omega_0} - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{1 + |\lambda|}, \end{array} \right. \tag{V.39}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (i)\, D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \subset D(B), \\ (ii)\, D\left(B^2 - A\right) \subset D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2} B\right), \end{array} \right. \tag{V.40}$$

$$\left(X, D\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right)_{1+\theta,\infty} = \left(X, D\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right)_{1+\theta,\infty}, \tag{V.41}$$

$$\forall \omega \geqslant \omega_0,\ \left\| \left[B; \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\right] \left(B^2 - A_\omega\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \chi(\omega), \tag{V.42}$$

où

$$\chi : [\omega_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+ \text{ avec } \lim_{\omega \to +\infty} \chi(\omega) = 0.$$

On suppose que les opérateurs

$$\left\{ \begin{array}{l} L_\omega := B - \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}, \\ M_\omega := -B - \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}, \end{array} \right.$$

vérifient les hypothèses suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \delta > 0,\ \exists C > 0 :\ \forall \omega \geqslant \omega_0,\ S_\delta \subset \rho(L_\omega),\ S_\delta \subset \rho(M_\omega), \\ \left\| (L_\omega - zI)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{|z|},\ \left\| (M_\omega - zI)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{|z|}, z \in S_\delta, \end{array} \right. \tag{V.43}$$

où $S_\delta := \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \delta \right\}$; et

$$I - e^{L_\omega} e^{M_\omega} \text{ ou } I - e^{M_\omega} e^{L_\omega} \text{ est inversible dans } L(X). \tag{V.44}$$

Les hypothèses (V.39)-(V.40), (V.42)-(V.43) sont les mêmes que celles utilisées au Chapitre IV, Section 1.6. Par conséquent, la Remarque IV.19 et les Lemmes IV.21-IV.22 sont encore valables ici. Voici une remarque concernant l'hypothèse (V.44).

Remarque V.16 *Dans le cas où $B = 0$, l'hypothèse (V.44) est déduite de (V.39).*

On veut montrer que les opérateurs $L_\omega = B - \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}$ et $M_\omega = -B - \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}$ vérifient les hypothèses (V.3)-(V.9).

Lemme V.17 *On suppose (V.39)-(V.40).*

1. *On a le domaine d'interpolation*

$$(X, D(L_\omega))_{\theta,\infty} = \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}.$$

2. *L'hypothèse (V.41) est équivalente à (V.8).*

Preuve.

1. D'après le Lemme IV.21, point 1., on a
$$D(L_\omega) = D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right).$$
Comme $0 < \theta < 1$, on a
$$(X, D(L_\omega))_{\theta,\infty} = \left(X, D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right)_{\theta,\infty},$$
et on applique ensuite la propriété de réitération pour obtenir
$$(X, D(L_\omega))_{\theta,\infty} = \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}.$$
2. Par la propriété de réitération, il s'ensuit que (V.41) est équivalente à
$$\left(X, D\left(\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^2\right)\right)_{\frac{1+\theta}{2},\infty} = \left(X, D\left(\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^2\right)\right)_{\frac{1+\theta}{2},\infty}.$$
De plus, on a
$$\begin{aligned} D\left(M_\omega^2\right) &= D\left(\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^2\right), \\ D\left(L_\omega^2\right) &= D\left(\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^2\right). \end{aligned}$$
Comme $0 < \dfrac{1+\theta}{2} < 1$, l'hypothèse (V.41) est équivalente à
$$\left(X, D\left(L_\omega^2\right)\right)_{\frac{1+\theta}{2},\infty} = \left(X, D\left(M_\omega^2\right)\right)_{\frac{1+\theta}{2},\infty},$$
et par la propriété de réitération, il s'ensuit que (V.41) est équivalente à
$$(X, D(L_\omega))_{1+\theta,\infty} = (X, D(M_\omega))_{1+\theta,\infty}.$$

■

Lemme V.18 *Sous les hypothèses (V.39)-(V.40), l'hypothèse (V.41) est équivalente à*
$$\left\{\begin{array}{l} \left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)^{-1}\left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty} \subset \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}, \\ \left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)^{-1}\left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty} \subset \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}. \end{array}\right. \tag{V.45}$$

Preuve. Tout d'abord, par la propriété de réitération et par (i) de (V.40), on a
$$\left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty} = \left(X, D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right)_{\theta,\infty} = \left(X, D\left(\pm B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right)_{\theta,\infty}. \tag{V.46}$$
On suppose (V.41). Alors, pour $\varphi \in \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty} = \left(X, D\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)\right)_{\theta,\infty}$, on a
$$\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)^{-1}\varphi := \psi \in \left(X, D\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)\right)_{1+\theta,\infty},$$
donc $\psi \in D\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)$ et
$$\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)\psi \in \left(X, D\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)\right)_{\theta,\infty} = \left(X, D\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right)_{\theta,\infty}, \tag{V.47}$$

or $\psi \in \left(X, D\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right)_{\theta,\infty}$ donc par somme $\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\psi \in \left(X, D\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right)_{\theta,\infty}$, i.e. $\psi \in \left(X, D\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right)_{1+\theta,\infty} = \left(X, D\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right)_{1+\theta,\infty}$, par (V.41), donc,

$$\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)^{-1}\varphi \in \left(X, D\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right)_{\theta,\infty} = \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty},$$

ce qui prouve la première ligne. En échangeant les rôles de $B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}$ et $-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}$, on obtient la seconde ligne.

Inversement, on suppose (V.45). Alors, pour $\varphi \in \left(X, D\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right)_{1+\theta,\infty}$, on a

$$\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)\varphi \in \left(X, D\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right)_{\theta,\infty} = \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty},$$

donc, par (V.45), on obtient

$$\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)^{-1}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)\varphi \in \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty},$$

ainsi

$$\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\varphi \in \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty} = \left(X, D\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right)_{\theta,\infty},$$

d'où

$$\varphi \in \left(X, D\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right)_{1+\theta,\infty}.$$

De la même manière si $\varphi \in \left(X, D\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right)_{1+\theta,\infty}$, alors $\varphi \in \left(X, D\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right)_{1+\theta,\infty}$. ∎

On introduit, pour $\omega \geqslant \omega_0$, l'espace $C^\theta_{A,B,\omega}([0,1];X)$ des fonctions v de $C^\theta([0,1];X)$ telles que

$$\begin{cases} B\left(B - \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2} - I\right)^{-1}\left[B; \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\right]\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1} v(0) \in \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}, \\ B\left(-B - \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2} - I\right)^{-1}\left[B; \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\right]\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1} v(1) \in \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}. \end{cases}$$

Alors, il est clair que

$$C^\theta_{A,B,\omega}([0,1];X) = C^\theta_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X),$$

et est un espace de Banach complexe.

D'après les Lemmes IV.21, IV.22 et V.17, il est clair que les hypothèses (V.39)-(V.44) impliquent (V.3)-(V.9). On applique alors le Théorème V.12.

Théorème V.19 *On suppose (V.39)-(V.44). Soit $\theta \in \,]0,1[$. Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (V.1) admet une unique solution u telle que*

$$\begin{cases} u \in C^2([0,1];X) \cap C([0,1];D(A)), \\ u' \in C([0,1];D(B)), \end{cases}$$

satisfaisant

$$\begin{aligned} &\forall x \in [0,1], \; u(x) \in D\left(B^2 - A\right), \\ &\forall x \in [0,1], \; u'(x) \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right), \end{aligned}$$

et la propriété de régularité maximale

$$\begin{aligned} &u'', \; Bu', \; Au, \; B^2 u \in C^\theta([0,1];X), \\ &\left(B^2 - A_\omega\right) u \in C^\theta_{A,B,\omega}([0,1];X). \end{aligned}$$

2. $f \in C^{\theta}([0,1];X)$, $u_0, u_1 \in D\left(B^2 - A\right)$ *et*

$$\left\{\begin{array}{l}\left(-B-\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}u_0+\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\left(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}-I\right)^{-1}f(0),\\ \left(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\right)\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}u_1+\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\left(-B-\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}-I\right)^{-1}f(1),\\ B\left(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}-I\right)^{-1}\left[B;\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\right]u_0,\\ B\left(-B-\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}-I\right)^{-1}\left[B;\left(B^2-A_\omega\right)^{1/2}\right]u_1,\end{array}\right. \tag{V.48}$$

sont dans $\left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}$.

On souhaite comparer ce résultat avec le Théorème 3 p. 975 de Favini et al. [22] dans le cas commutatif (avec $\omega = 0$). Cela nécessite le lemme suivant.

Lemme V.20 *On suppose (V.39)-(V.41). Sous l'hypothèse de commutativité (III.27), on a*

$$\left\{\begin{array}{l}\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}-I\right)^{-1}\left(X,D\left(B^2-A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}=\left(X,D\left(B^2-A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty},\\ \left(B^2-A\right)^{1/2}\left(-B-\left(B^2-A\right)^{1/2}-I\right)^{-1}\left(X,D\left(B^2-A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}=\left(X,D\left(B^2-A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}.\end{array}\right.$$

Preuve. Soit $\varphi \in \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}$. Alors

$$\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}-I\right)^{-1}\varphi=\varphi+\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}-I\right)^{-1}\varphi\in\left(X,D\left(B^2-A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty},$$

et d'après le Lemme V.18, on a

$$\left(-B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}-I\right)^{-1}\varphi\in\left(X,D\left(B^2-A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}.$$

Par somme, on obtient

$$-2\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}-I\right)^{-1}\varphi\in\left(X,D\left(B^2-A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty},$$

d'où $\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}-I\right)^{-1}\varphi\in\left(X,D\left(B^2-A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}$.

Réciproquement, soit $\varphi \in \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}$. Alors

$$\varphi=\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}-I\right)^{-1}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}-I\right)\left(B^2-A\right)^{-1/2}\varphi.$$

De plus

$$\left(B^2-A\right)^{-1/2}\varphi\in\left(X,D\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)_{1+\theta,\infty}=\left(X,D\left(B^2-A\right)\right)_{\frac{1+\theta}{2},\infty},$$

par la propriété de réitération. Or d'après les Lemmes IV.4 et IV.21, points 1.,

$$\left\{\begin{array}{l}D(LM)=D\left(M^2\right)=D\left(\left(-B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^2\right),\\ D(ML)=D\left(L^2\right)=D\left(\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}\right)^2\right),\\ D\left(ML\right)\cap D(LM)=D\left(B^2-A\right),\end{array}\right.$$

et d'après le Lemma 7 p. 178 de Favini et al. [23], on a $D(LM) = D(ML) = D\left(B^2 - A\right)$, donc

$$D\left(B^2 - A\right) = D\left(\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^2\right) = D\left(\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^2\right). \tag{V.49}$$

Ainsi puisque $0 < \dfrac{1+\theta}{2} < 1$, on a

$$\left(B^2 - A\right)^{-1/2} \varphi \in \left(X, D\left(\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^2\right)\right)_{\frac{1+\theta}{2},\infty} = \left(X, D\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right)_{1+\theta,\infty},$$

par la propriété de réitération, donc

$$\psi := \left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)\left(B^2 - A\right)^{-1/2} \varphi \in \left(X, D\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\right)_{\theta,\infty} = \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty},$$

par (V.46), et

$$\varphi = \left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)^{-1} \psi \in \left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)^{-1}\left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty},$$

ce qui prouve la première ligne. En échangeant les rôles de $B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}$ et $-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}$, on obtient la seconde ligne. ■

Dans le cas commutatif et avec $\omega = 0$, c'est-à-dire lorsque $\left[B; \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right] = 0$ sur $D\left(B\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \subset D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2} B\right)$ (voir point 3. du Lemme III.17), la condition de compatibilité (V.48) est équivalente à

$$\begin{cases} \left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{1/2} u_0 + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)^{-1} f(0) \in \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}, \\ \left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{1/2} u_1 + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)^{-1} f(1) \in \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}. \end{cases}$$

Or

$$\begin{aligned} &\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{1/2} u_0 + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)^{-1} f(0) \\ &= \left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)^{-1}\left(\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) u_0 + f(0)\right) \\ &= \left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)^{-1}\left(f(0) - Au_0\right) \\ &\quad - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)^{-1}\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) u_0, \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} &\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)\left(B^2 - A\right)^{1/2} u_1 + \left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)^{-1} f(1) \\ &= \left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)^{-1}\left(f(1) - Au_1\right) \\ &\quad - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)^{-1}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) u_1, \end{aligned}$$

et, puisque $u_0, u_1 \in D\left(B^2 - A\right)$, on a $\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) u_0$, $\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) u_1 \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)$ par (V.49), puis en utilisant le Lemme V.20, on obtient

$$\begin{aligned} &\left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)^{-1}\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) u_0 \in \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}, \\ &\left(B^2 - A\right)^{1/2}\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2} - I\right)^{-1}\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) u_1 \in \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}, \end{aligned}$$

ainsi (V.48) est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l}\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}-I\right)^{-1}\left(f(0)-Au_0\right)\in\left(X,D\left(B^2-A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty},\\ \left(B^2-A\right)^{1/2}\left(-B-\left(B^2-A\right)^{1/2}-I\right)^{-1}\left(f(1)-Au_1\right)\in\left(X,D\left(B^2-A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}.\end{array}\right.$$

De plus, d'après le Lemme V.20

$$\begin{array}{l}\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(B-\left(B^2-A\right)^{1/2}-I\right)^{-1}\left(f(0)-Au_0\right)\in\left(X,D\left(B^2-A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}\\ \Leftrightarrow f(0)-Au_0\in\left(X,D\left(B^2-A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty},\end{array}$$

et

$$\begin{array}{l}\left(B^2-A\right)^{1/2}\left(-B-\left(B^2-A\right)^{1/2}-I\right)^{-1}\left(f(1)-Au_1\right)\in\left(X,D\left(B^2-A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}\\ \Leftrightarrow f(1)-Au_1\in\left(X,D\left(B^2-A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty},\end{array}$$

donc (V.48) est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l}f(0)-Au_0\in\left(X,D\left(B^2-A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty},\\ f(1)-Au_1\in\left(X,D\left(B^2-A\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}.\end{array}\right.$$

On retrouve alors le Théorème 3 p. 975 de Favini et al. [22].

2 Cadre L^p

2.1 Introduction et hypothèses

On suppose ici que $f\in L^p(0,1;X)$, $1<p<\infty$. On n'exige pas de régularité supplémentaire sur f, contrairement au cadre höldérien, mais on suppose que

$$X \text{ est un espace UMD.} \tag{V.50}$$

Les hypothèses sur les opérateurs L_ω et M_ω sont les suivantes. Il existe un réel positif fixé ω_0 tel que

$$\left\{\begin{array}{l}\forall\omega\geqslant\omega_0,\ ]-\infty,0[\subset\rho\left(-L_\omega\right)\cap\rho\left(-M_\omega\right),\ ker\left(L_\omega\right)=ker\left(M_\omega\right)=\{0\},\ \overline{Im\left(L_\omega\right)}=\overline{Im\left(M_\omega\right)}=X;\\ \exists C\geqslant 1,\ \forall\omega\geqslant\omega_0,\ \forall\lambda>0,\ \left\|\left(L_\omega-\lambda I\right)^{-1}\right\|_{L(X)}\leqslant\dfrac{C}{\lambda},\ \left\|\left(M_\omega-\lambda I\right)^{-1}\right\|_{L(X)}\leqslant\dfrac{C}{\lambda},\end{array}\right. \tag{V.51}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l}\forall\omega\geqslant\omega_0,\ \forall s\in\mathbb{R},\ (-L_\omega)^{is},(-M_\omega)^{is}\in L(X);\\ \exists\theta_L,\theta_M\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[,\ \exists C\geqslant 1,\ \forall\omega\geqslant\omega_0,\ \forall s\in\mathbb{R},\\ \quad\left\|(-L_\omega)^{is}\right\|_{L(X)}\leqslant Ce^{\theta_L|s|},\ \left\|(-M_\omega)^{is}\right\|_{L(X)}\leqslant Ce^{\theta_M|s|}.\end{array}\right. \tag{V.52}$$

Pour tout $\omega\geqslant\omega_0$, on suppose également

$$D(L_\omega)=D(M_\omega), \tag{V.53}$$

$$D\left(\left(L_\omega+M_\omega\right)^2\right)\subseteq D\left(\left(L_\omega-M_\omega\right)^2\right), \tag{V.54}$$

$$L_\omega+M_\omega \text{ est inversible dans } L(X), \tag{V.55}$$

$$I - e^{L_\omega} e^{M_\omega} \text{ ou } I - e^{M_\omega} e^{L_\omega} \text{ est inversible dans } L(X). \tag{V.56}$$

L'hypothèse de non commutativité est la suivante

$$\forall \omega \geqslant \omega_0,\ \|C_{L_\omega, M_\omega}\|_{L(X)} \leqslant \chi(\omega), \tag{V.57}$$

où le commutateur est

$$C_{L_\omega, M_\omega} := (L_\omega + M_\omega)\left[(L_\omega - M_\omega)\,;(L_\omega + M_\omega)^{-1}\right](L_\omega + M_\omega)^{-1},$$

et

$$\chi : [\omega_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+ \text{ avec } \lim_{\omega \to +\infty} \chi(\omega) = 0.$$

On rappelle que, dans de nombreux cas concrets, $\chi(\omega) = \dfrac{C}{\omega^\alpha}$, où C, $\alpha > 0$.

On note que, sous ces hypothèses et comme au chapitre précédent, le problème (V.2) est équivalent à

$$\begin{cases} u''(x) + (L_\omega - M_\omega)\, u'(x) - \dfrac{1}{2}\,(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)\, u(x) = f(x),\ x \in (0,1), \\ u(0) = u_0, \\ u(1) = u_1. \end{cases}$$

D'après l'hypothèse (V.54), $(L_\omega + M_\omega)^2$ est principal sur $(L_\omega - M_\omega)^2$. On cherche alors une solution classique de (V.2), c'est-à-dire une fonction u telle que

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p\left(0,1; D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)\right) \\ u' \in L^p(0,1; D(L_\omega - M_\omega)), \end{cases}$$

et satisfaisant (V.2).

Bien évidemment, la solution classique u vérifiera alors

$$u \in L^p\left(0,1; D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right)\right),$$

puisque

$$(L_\omega - M_\omega)^2 u = -4u'' - 4\,(L_\omega - M_\omega)\, u' + (L_\omega + M_\omega)^2 u + 4f.$$

Les hypothèses (V.52)-(V.55) et (V.57) sont les mêmes qu'au Chapitre IV, Section 2. La Remarque IV.29 concernant ces hypothèses est donc encore valable ici. Concernant l'hypothèse (V.56), on renvoie à la Remarque V.1.

Remarque V.21 *L'hypothèse (V.51) est plus faible que l'hypothèse (IV.46) du précédent chapitre puisqu'on suppose que L_ω et M_ω sont injectifs à images denses sans être nécessairement inversibles. On a précisé à la Remarque III.9 pourquoi l'inversibilité de ces opérateurs n'étaient pas nécessaires dans ce chapitre.*

L'étude est organisée comme suit.

Dans la Section 2.2, on montre l'existence et l'unicité de la solution classique. On utilise, pour cela, la représentation de la solution trouvée dans le cadre höldérien (voir (V.21)). On donne ensuite des applications de cette théorie dans la Section 2.3. Enfin, dans la Section 2.4, on étudie le retour à l'équation initiale (V.1).

Dans le but de simplifier, quand la dépendance de ω n'est pas utile, on omet ω dans les notations, par exemple, on note L_ω, M_ω... par L, M...

2.2 Principaux résultats

On rappelle la démarche adoptée dans le cadre höldérien, et qui est également valable dans notre cadre L^p. Si u est une solution classique de (V.2) telle que $u_0, u_1 \in D(L_\omega) = D(M_\omega)$, alors $v := (L_\omega + M_\omega)^2 u$ vérifie l'équation intégrale suivante

$$v + R_\omega(v) = F_\omega(f) + D_\omega,$$

où pour presque tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
R_\omega(v)(x) =& \frac{1}{4}(L_\omega + M_\omega)\int_0^x e^{(x-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds - \frac{1}{4}(L_\omega + M_\omega)\int_x^1 e^{(s-x)L_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
&+ \frac{1}{4}(L_\omega + M_\omega) e^{xM_\omega}\left(I - e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
&+ \frac{1}{4}(L_\omega + M_\omega) e^{xM_\omega}\left(I - e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)^{-1} e^{L_\omega}\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
&- \frac{1}{4}(L_\omega + M_\omega) e^{(1-x)L_\omega}\left(I - e^{M_\omega}e^{L_\omega}\right)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
&- \frac{1}{4}(L_\omega + M_\omega) e^{(1-x)L_\omega}\left(I - e^{M_\omega}e^{L_\omega}\right)^{-1} e^{M_\omega}\int_0^1 e^{sL_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_\omega(f)(x) =& (L_\omega + M_\omega)\int_0^x e^{(x-s)M_\omega} f(s)ds + (L_\omega + M_\omega)\int_x^1 e^{(s-x)L_\omega} f(s)ds \\
&- (L_\omega + M_\omega) e^{xM_\omega}\left(I - e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega} f(s)ds \\
&+ (L_\omega + M_\omega) e^{xM_\omega}\left(I - e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)^{-1} e^{L_\omega}\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} f(s)ds \\
&- (L_\omega + M_\omega) e^{(1-x)L_\omega}\left(I - e^{M_\omega}e^{L_\omega}\right)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} f(s)ds \\
&+ (L_\omega + M_\omega) e^{(1-x)L_\omega}\left(I - e^{M_\omega}e^{L_\omega}\right)^{-1} e^{M_\omega}\int_0^1 e^{sL_\omega} f(s)ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D_\omega(x) =& (L_\omega + M_\omega) e^{xM_\omega}\left(I - e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)^{-1}\left((L_\omega + M_\omega) u_0 - e^{L_\omega}(L_\omega + M_\omega) u_1\right) \\
&+ (L_\omega + M_\omega) e^{(1-x)L_\omega}\left(I - e^{M_\omega}e^{L_\omega}\right)^{-1}\left((L_\omega + M_\omega) u_1 - e^{M_\omega}(L_\omega + M_\omega) u_0\right).
\end{aligned}$$

Pour $f \in L^p(0,1;X)$, le but est de trouver $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$

1. $F_\omega(f) + D_\omega \in L^p(0,1;X)$ sous quelques hypothèses sur les données u_0 et u_1,
2. $I + R_\omega$ est inversible dans $L(L^p(0,1;X))$.

Dans ce cas, pour $\omega \geqslant \omega^*$, on peut déduire que s'il existe une solution classique u de (V.2), alors u est uniquement déterminé par la formule de représentation (V.21) :

$$u = (L_\omega + M_\omega)^{-2}\left\{(I + R_\omega)^{-1}(F_\omega(f) + D_\omega)\right\}.$$

Ainsi, pour obtenir des résultats d'unicité et d'existence pour le problème (V.2), il suffit d'étudier la régularité de cette représentation.

Bien entendu, quand L_ω et M_ω commutent, la formule (V.21) coïncide avec celle donnée dans Favini et al. [23], p. 170.

L'étude de la représentation (V.21) nécessite les résultats suivants.

Proposition V.22 *Soit Q un générateur infinitésimal de semi-groupe analytique sur X, $\left(e^{\xi Q}\right)_{\xi \geqslant 0}$. Soient $\varphi \in X$, $1 < p < \infty$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

1. *$e^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,1;X)$.*
2. *$Q^m e^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,1;X) \Leftrightarrow e^{\cdot Q}\varphi \in W^{m,p}(0,1;X) \Leftrightarrow \varphi \in (X, D(Q^m))_{1-\frac{1}{mp},p}$.*

Preuve.

1. On a

$$\int_0^1 \left\|e^{xQ}\varphi\right\|^p dx \leqslant C \left\|\varphi\right\|^p < \infty.$$

2. On a pour tout $\theta \in]0,1[$

$$(X, D(Q^m))_{\theta,p} = \left\{\varphi \in X : \int_0^{+\infty} \left\|x^{m(1-\theta)} Q^m e^{xQ}\varphi\right\|^p \frac{dx}{x} < \infty\right\},$$

(voir Triebel [58], p. 96). Soit $\varphi \in (X, D(Q^m))_{1-\frac{1}{mp},p}$, alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left\|Q^m e^{xQ}\varphi\right\|^p dx &= \int_0^1 \left\|x^{\frac{1}{p}} Q^m e^{xQ}\varphi\right\|^p \frac{dx}{x} \\ &\leqslant \int_0^{+\infty} \left\|x^{m\frac{1}{mp}} Q^m e^{xQ}\varphi\right\|^p \frac{dx}{x} \\ &\leqslant \left\|\varphi\right\|_{(X,D(Q^m))_{1-\frac{1}{mp},p}} < \infty.\end{aligned}$$

Réciproquement si $Q^m e^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,1;X)$, alors

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left\|x^{m\frac{1}{mp}} Q^m e^{xQ}\varphi\right\|^p \frac{dx}{x} &= \int_0^1 \left\|Q^m e^{xQ}\varphi\right\|^p dx + \int_1^{+\infty} \left\|Q^m e^{xQ}\varphi\right\|^p dx \\ &= \left\|Q^m e^{\cdot Q}\varphi\right\|^p_{L^p(0,1;X)} + \int_1^{+\infty} \left\|Q^m e^{xQ}\varphi\right\|^p dx.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \left\|Q^m e^{xQ}\varphi\right\|^p dx &\leqslant C^p \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{mp}} \left\|\varphi\right\|^p dx \\ &\leqslant C^p \left\|\varphi\right\|^p \left[\frac{1}{1-mp} x^{1-mp}\right]_1^{+\infty} \\ &\leqslant \frac{C^p}{mp-1} \left\|\varphi\right\|^p < \infty.\end{aligned}$$

D'où

$$\varphi \in (X, D(Q^m))_{1-\frac{1}{mp},p} \Leftrightarrow Q^m e^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,1;X) \Leftrightarrow e^{\cdot Q}\varphi \in W^{m,p}(0,1;X).$$

■

On pose pour une fonction g donnée de $(0,1)$ dans X et pour presque tout $x \in (0,1)$

$$G(g)(x) = \int_0^x e^{(x-s)M_\omega} g(s)ds, \qquad H(g)(x) = \int_x^1 e^{(s-x)L_\omega} g(s)ds.$$

Le résultat suivant est dû à Prüss-Sohr [54].

Proposition V.23 *On suppose (V.50)-(V.52). Soit $g \in L^P(0,1;X)$, $1 < p < \infty$. Alors*

$$\begin{cases} G(g) \in W^{1,p}(0,1;X) \cap L^P(0,1;D(M_\omega)), \\ H(g) \in W^{1,p}(0,1;X) \cap L^P(0,1;D(L_\omega)), \end{cases}$$

et il existe $K > 0$ tel que

$$\begin{cases} \|G(g)\|_{L^P(0,1;X)} \leqslant K \|g\|_{L^P(0,1;X)}, \\ \|H(g)\|_{L^P(0,1;X)} \leqslant K \|g\|_{L^P(0,1;X)}, \\ \|M_\omega G(g)\|_{L^P(0,1;X)} \leqslant K \|g\|_{L^P(0,1;X)}, \\ \|L_\omega H(g)\|_{L^P(0,1;X)} \leqslant K \|g\|_{L^P(0,1;X)}. \end{cases}$$

De plus

$$\begin{cases} G(g)' = M_\omega G(g) + g, \\ H(g)' = -L_\omega H(g) - g. \end{cases}$$

Proposition V.24 *On suppose (V.50)-(V.53). Soit $g \in L^P(0,1;X)$, $1 < p < \infty$. Alors les applications*

$$\begin{aligned} \Psi_1(g) &:= e^{\cdot M_\omega}\left(I - e^{L_\omega} e^{M_\omega}\right)^{-1} H(g)(0), \\ \Psi_2(g) &:= e^{\cdot M_\omega}\left(I - e^{L_\omega} e^{M_\omega}\right)^{-1} e^{L_\omega} G(g)(1), \\ \Psi_3(g) &:= e^{(1-\cdot)L_\omega}\left(I - e^{M_\omega} e^{L_\omega}\right)^{-1} G(g)(1), \\ \Psi_4(g) &:= e^{(1-\cdot)L_\omega}\left(I - e^{M_\omega} e^{L_\omega}\right)^{-1} e^{M_\omega} H(g)(0), \end{aligned}$$

sont dans $L^P(0,1;D(L_\omega))$ et il existe $K > 0$ tel que

$$\begin{cases} \|\Psi_i(g)\|_{L^P(0,1;X)} \leqslant K \|g\|_{L^P(0,1;X)}, \; i = 1,2,3,4, \\ \|M_\omega \Psi_i(g)\|_{L^P(0,1;X)} \leqslant K \|g\|_{L^P(0,1;X)}, \; i = 1,2, \\ \|L_\omega \Psi_i(g)\|_{L^P(0,1;X)} \leqslant K \|g\|_{L^P(0,1;X)}, \; i = 3,4. \end{cases}$$

Preuve. On note $L_\omega = L$ et $M_\omega = M$... Pour $i = 1,2,3,4$, il est clair que $\Psi_i(g) \in L^P(0,1;X)$ avec

$$\|\Psi_i(g)\|_{L^P(0,1;X)} \leqslant K \|g\|_{L^P(0,1;X)}.$$

En effet, par exemple, pour $\Psi_1(g)$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|\Psi_1(g)(x)\|^p \, dx &= \int_0^1 \left\| e^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} H(g)(0) \right\|^p dx \\ &= \int_0^1 \left\| e^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} \int_0^1 e^{sL} g(s) ds \right\|^p dx \\ &\leqslant \int_0^1 \left\| e^{xM} \right\|_{L(X)}^p \left\| \left(I - e^L e^M\right)^{-1} \right\|_{L(X)}^p \left(\int_0^1 \left\| e^{sL} \right\|_{L(X)} \|g(s)\| \, ds \right)^p dx \\ &\leqslant C \left(\int_0^1 \|g(s)\| \, ds \right)^p. \end{aligned}$$

Or $\|g(\cdot)\| \in L^p(0,1) \subset L^1(0,1)$ et par l'inégalité de Hölder

$$\left(\int_0^1 \|g(s)\| \, ds \right)^p \leqslant \int_0^1 \|g(s)\|^p \, ds = \|g\|_{L^p(0,1;X)}^p.$$

Ainsi

$$\int_0^1 \|\Psi_1(g)(x)\|^p \, dx \leqslant K \|g\|_{L^P(0,1;X)}.$$

1. Pour $M\Psi_1(g)$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \|M\Psi_1(g)(x)\|^p\,dx =& \int_0^1 \left\| Me^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} \int_0^1 e^{sL} g(s)ds\right\|^p dx\\ \leqslant& 2^{p-1}\int_0^1 \left\| Me^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} \int_0^x e^{sL} g(s)ds\right\|^p dx\\ &+ 2^{p-1}\int_0^1 \left\| Me^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} \int_x^1 e^{sL} g(s)ds\right\|^p dx.\end{aligned}$$

Pour la première intégrale, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left\| Me^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} \int_0^x e^{sL} g(s)ds\right\|^p dx &= \int_0^1 \left\| \int_0^x Me^{(x-s)M} e^{sM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} e^{sL} g(s)ds\right\|^p dx\\ &= \int_0^1 \left\| MG(e^{\cdot M}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} e^{\cdot L} g(\cdot))(x)\right\|^p dx\\ &= \left\| MG(e^{\cdot M}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} e^{\cdot L} g(\cdot))\right\|^p_{L^p(0,1;X)},\end{aligned}$$

et en utilisant la Proposition V.23, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \left\| Me^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} \int_0^x e^{sL} g(s)ds\right\|^p dx\\ \leqslant& K^p \left\| e^{\cdot M}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} e^{\cdot L} g(\cdot)\right\|^p_{L^p(0,1;X)}\\ \leqslant& K^p \int_0^1 \left\| e^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} e^{xL} g(x)\right\|^p dx\\ \leqslant& K^p \int_0^1 \left\| e^{xM}\right\|^p_{L(X)} \left\| \left(I - e^L e^M\right)^{-1}\right\|^p_{L(X)} \left\| e^{xL}\right\|^p_{L(X)} \|g(x)\|^p dx\\ \leqslant& C\int_0^1 \|g(x)\|^p dx\\ \leqslant& C\|g\|^p_{L^p(0,1;X)}.\end{aligned}$$

Pour la seconde intégrale, on a

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \left\| Me^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} \int_x^1 e^{sL} g(s)ds\right\|^p dx\\ =& \int_0^1 \left\| e^{xM} M\left(I - e^L e^M\right)^{-1} (L-I)^{-1} e^{xL}(L-I) \int_x^1 e^{(s-x)L} g(s)ds\right\|^p dx\\ =& \int_0^1 \left\| e^{xM} M\left(I - e^L e^M\right)^{-1} (L-I)^{-1} e^{xL}(L-I)H(g)(x)\right\|^p dx\\ \leqslant& \int_0^1 \left\| e^{xM}\right\|^p_{L(X)} \left\| M\left(I - e^L e^M\right)^{-1} (L-I)^{-1}\right\|^p_{L(X)} \left\| e^{xL}\right\|^p_{L(X)} \|(L-I)H(g)(x)\|^p dx\\ \leqslant& 2^{p-1}C\int_0^1 \|LH(g)(x)\|^p dx + 2^{p-1}C\int_0^1 \|H(g)(x)\|^p dx\\ \leqslant& 2^{p-1}C\|LH(g)\|^p_{L^p(0,1;X)} + 2^{p-1}C\|H(g)\|^p_{L^p(0,1;X)}\\ \leqslant& 2^p KC\|g\|^p_{L^p(0,1;X)}.\end{aligned}$$

Ainsi, il existe une constante $K_1 > 0$ telle que

$$\|M\Psi_1(g)\|_{L^p(0,1;X)} \leqslant K_1\|g\|_{L^p(0,1;X)}.$$

2. Pour $M\Psi_2(g)$, on procède de la même manière
$$\begin{aligned}\int_0^1 \|M\Psi_2(g)(x)\|^p\,dx =& \int_0^1 \left\|Me^{xM}\left(I-e^Le^M\right)^{-1}e^L\int_0^1 e^{(1-s)M}g(s)ds\right\|^p dx\\ \leqslant& 2^{p-1}\int_0^1 \left\|Me^{xM}\left(I-e^Le^M\right)^{-1}e^L\int_0^x e^{(1-s)M}g(s)ds\right\|^p dx\\ &+2^{p-1}\int_0^1 \left\|Me^{xM}\left(I-e^Le^M\right)^{-1}e^L\int_x^1 e^{(1-s)M}g(s)ds\right\|^p dx.\end{aligned}$$
Pour la première intégrale, on a
$$\begin{aligned}&\int_0^1 \left\|Me^{xM}\left(I-e^Le^M\right)^{-1}e^L\int_0^x e^{(1-s)M}g(s)ds\right\|^p dx\\ =&\int_0^1\left\|\int_0^x Me^{(x-s)M}e^{sM}\left(I-e^Le^M\right)^{-1}e^Le^{(1-s)M}g(s)ds\right\|^p dx\\ =&\int_0^1\left\|MG(e^{\cdot M}\left(I-e^Le^M\right)^{-1}e^Le^{(1-\cdot)M}g(\cdot))(x)\right\|^p dx\\ =&\left\|MG(e^{\cdot M}\left(I-e^Le^M\right)^{-1}e^Le^{(1-\cdot)M}g(\cdot))\right\|^p_{L^p(0,1;X)}\\ \leqslant& C\|g\|^p_{L^p(0,1;X)},\end{aligned}$$
comme pour la première intégrale de $M\Psi_1(g)$. Pour la seconde intégrale, on a de même
$$\begin{aligned}&\int_0^1 \left\|Me^{xM}\left(I-e^Le^M\right)^{-1}e^L\int_x^1 e^{(1-s)M}g(s)ds\right\|^p dx\\ =&\int_0^1\left\|e^{xM}M\left(I-e^Le^M\right)^{-1}(L-I)^{-1}e^{xL}(L-I)\int_x^1 e^{(s-x)L}e^{(1-s)L}e^{(1-s)M}g(s)ds\right\|^p dx\\ =&\int_0^1\left\|e^{xM}M\left(I-e^Le^M\right)^{-1}(L-I)^{-1}e^{xL}(L-I)H(e^{(1-\cdot)L}e^{(1-\cdot)M}g(\cdot))(x)\right\|^p dx\\ \leqslant& C\int_0^1\left\|(L-I)H(e^{(1-\cdot)L}e^{(1-\cdot)M}g(\cdot))(x)\right\|^p dx\\ \leqslant& C\left\|(L-I)H(e^{(1-\cdot)L}e^{(1-\cdot)M}g(\cdot))\right\|^p_{L^p(0,1;X)}\\ \leqslant& KC\|g\|^p_{L^p(0,1;X)}.\end{aligned}$$
Ainsi, il existe une constante $K_2>0$ telle que
$$\|M\Psi_2(g)\|_{L^p(0,1;X)}\leqslant K_2\|g\|_{L^p(0,1;X)}.$$

3. Pour $L\Psi_3(g)$, on effectue les changements de variables suivants
$$\begin{aligned}\sigma&=1-s, & d\sigma&=-ds,\\ \tau&=1-x, & d\tau&=-dx,\end{aligned}$$
et on obtient
$$\begin{aligned}\int_0^1\|L\Psi_3(g)(x)\|^p\,dx=&\int_0^1\left\|Le^{(1-x)L}\left(I-e^Me^L\right)^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)M}g(s)ds\right\|^p dx\\ =&\int_0^1\left\|Le^{\tau L}\left(I-e^Me^L\right)^{-1}\int_0^1 e^{\sigma M}g(1-\sigma)d\sigma\right\|^p d\tau\\ \leqslant& K_1\|g(1-\cdot)\|^p_{L^p(0,1;X)},\end{aligned}$$

grâce au point 1. et en échangeant les rôles de L et M. On en déduit

$$\|L\Psi_3(g)\|_{L^p(0,1;X)} \leqslant K_1 \|g\|_{L^p(0,1;X)}.$$

4. Pour $L\Psi_4(g)$, on effectue les changements de variables suivants

$$\begin{aligned} \sigma &= 1-s, \qquad d\sigma = -ds,\\ \tau &= 1-x, \qquad d\tau = -dx, \end{aligned}$$

et on obtient de même

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|L\Psi_4(g)(x)\|^p\, dx &= \int_0^1 \left\| Le^{(1-x)L}\left(I-e^Me^L\right)^{-1} e^M \int_0^1 e^{sL}g(s)ds\right\|^p dx\\ &= \int_0^1 \left\| Le^{\tau L}\left(I-e^Me^L\right)^{-1} e^M \int_0^1 e^{(1-\sigma)L}g(1-\sigma)d\sigma\right\|^p d\tau\\ &\leqslant K_2 \|g(1-\cdot)\|^p_{L^p(0,1;X)}. \end{aligned}$$

grâce au point 1. et en échangeant les rôles de L et M. On en déduit

$$\|L\Psi_4(g)\|_{L^p(0,1;X)} \leqslant K_2 \|g\|_{L^p(0,1;X)}.$$

Il suffit ensuite de prendre $K = \max\{K_1, K_2\}$ pour conclure. ■

Proposition V.25 *On suppose (V.50)-(V.56). Soit $f \in L^p(0,1;X)$, $1<p<\infty$. Alors $F_\omega(f) \in L^p(0,1;X)$.*

Preuve. On note $L_\omega = L$ et $M_\omega = M$... En utilisant les notations de la Proposition V.24, on peut écrire

$$\begin{aligned} F(f) = &(L+M)(M-I)^{-1}(M-I)G(f) + (L+M)(L-I)^{-1}(L-I)H(f)\\ &-(L+M)(M-I)^{-1}(M-I)\Psi_1(f) + (L+M)(M-I)^{-1}(M-I)\Psi_2(f)\\ &-(L+M)(L-I)^{-1}(L-I)\Psi_3(f) + (L+M)(L-I)^{-1}(L-I)\Psi_4(f). \end{aligned}$$

On rappelle que $(L+M)(M-I)^{-1}$, $(L+M)(L-I)^{-1} \in L(X)$. Ainsi $F(f) \in L^P(0,1;X)$ en vertu des Propositions V.23 et V.24. ■

Proposition V.26 *On suppose (V.50)-(V.56). Soit $1<p<\infty$. Alors*

$$D_\omega \in L^p(0,1;X),$$

si et seulement si

$$u_0, u_1 \in \left(X, D\left((L_\omega+M_\omega)^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p}.$$

Preuve. On note $L_\omega = L$ et $M_\omega = M$... En utilisant le Lemme V.5, on écrit pour presque tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} D(x) = &(L+M)(M-I)^{-1}(M-I)e^{xM}(L+M)u_0\\ &-(L+M)(M-I)^{-1}(M-I)e^{xM}e^L(L+M)u_1\\ &+(L+M)(L-I)^{-1}(L-I)e^{(1-x)L}(L+M)u_1\\ &-(L+M)(L-I)^{-1}(L-I)e^{(1-x)L}e^M(L+M)u_0\\ &+(L+M)(M-I)^{-1}(M-I)e^{xM}e^Le^M\left(I-e^Le^M\right)^{-1}\left((L+M)u_0 - e^L(L+M)u_1\right)\\ &+(L+M)(L-I)^{-1}(L-I)e^{(1-x)L}e^Me^L\left(I-e^Me^L\right)^{-1}\left((L+M)u_1 - e^M(L+M)u_0\right)\\ :=&(I)(x)+(II)(x)+(III)(x)+(IV)(x)+(V)(x)+(VI)(x). \end{aligned}$$

On rappelle que $(L+M)(M-I)^{-1}$, $(L+M)(L-I)^{-1} \in L(X)$. Il est clair que (II), (IV), (V) et (VI) sont dans $L^P(0,1;X)$ si et seulement si $u_0, u_1 \in D(L+M)$ par le point 2. de la Proposition V.22.

Ensuite, (I) et (III) sont dans $L^P(0,1;X)$ si et seulement si

$$\begin{cases} (L+M)\,u_0 \in (X, D(M))_{1-\frac{1}{p},p}\,, \\ (L+M)\,u_1 \in (X, D(L))_{1-\frac{1}{p},p}\,, \end{cases}$$

et, comme $0 < 1 - \dfrac{1}{p} < 1$, en utilisant (V.53), cette dernière est équivalente à

$$(L+M)\,u_0, (L+M)\,u_1 \in (X, D(L+M))_{1-\frac{1}{p},p}\,,$$

qui est équivalente à

$$u_0, u_1 \in (X, D(L+M))_{2-\frac{1}{p},p}\,,$$

qui est encore équivalente à

$$u_0, u_1 \in \left(X, D\left((L+M)^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p}\,,$$

par la propriété de réitération. ■

Proposition V.27 *On suppose (V.50)-(V.57). Soit* $1 < p < \infty$. *Alors* $R_\omega \in L(L^p(0,1;X))$ *et il existe* $\omega^* \geqslant \omega_0$ *tel que pour tout* $\omega \geqslant \omega^*$

$$\|R_\omega\|_{L(L^p(0,1;X))} < 1.$$

Ainsi $I + R_\omega$ *est inversible dans* $L(L^p(0,1;X))$ *pour* $\omega \geqslant \omega^*$.

Preuve. On note $L_\omega = L$ et $M_\omega = M$... Soit $v \in L^p(0,1;X)$. $C_{L,M} \in L(X)$, d'après le Lemme IV.5, point 4., donc on a $C_{L,M}v \in L^p(0,1;X)$. En utilisant les notations de la Proposition V.24, on peut écrire

$$\begin{aligned} 4R(v) = {} & (L+M)(M-I)^{-1}(M-I)G(C_{L,M}v) - (L+M)(L-I)^{-1}(L-I)H(C_{L,M}v) \\ & + (L+M)(M-I)^{-1}(M-I)\Psi_1(C_{L,M}v) + (L+M)(M-I)^{-1}(M-I)\Psi_2(C_{L,M}v) \\ & - (L+M)(L-I)^{-1}(L-I)\Psi_3(C_{L,M}v) - (L+M)(L-I)^{-1}(L-I)\Psi_4(C_{L,M}v). \end{aligned}$$

On rappelle que $(L+M)(M-I)^{-1}$, $(L+M)(L-I)^{-1} \in L(X)$. Ainsi, $R(v) \in L^p(0,1;X)$ en vertu des Propositions V.23 et V.24.

On fait apparaître la dépendance de ω. Alors, grâce à ces mêmes propositions, il existe une constante $K > 0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega_0$

$$\|R_\omega(v)\|_{L^p(0,1;X)} \leqslant K \|C_{L_\omega,M_\omega}\|_{L(X)} \|v\|_{L^p(0,1;X)}\,,$$

puis, grâce à l'hypothèse (V.57), on a

$$\|R_\omega(v)\|_{L^p(0,1;X)} \leqslant K\chi(\omega) \|v\|_{L^p(0,1;X)}\,.$$

Or $\lim\limits_{\omega \to +\infty} \chi(\omega) = 0$, donc il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$

$$\|R_\omega\|_{L(L^p(0,1;X))} < 1.$$

Ainsi $I + R_\omega$ est inversible dans $L(L^p(0,1;X))$ pour $\omega \geqslant \omega^*$. ■

Remarque V.28 *Par les propositions précédentes, on peut dire que s'il existe une solution classique de (V.2), elle s'écrit sous la forme (V.21) pour* $\omega \geqslant \omega^*$. *On déduit alors l'unicité de la solution classique et aussi, pour presque tout* $x \in (0,1)$, $u(x) \in D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)$, *ce qui implique, grâce à l'hypothèse (V.54), que* $u(x) \in D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right)$.

On énonce alors le résultat fondamental suivant.

Théorème V.29 *On suppose (V.50)-(V.57). Soit $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$. Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (V.2) admet une unique solution classique u.*
2. $u_0, u_1 \in \left(X, D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p}$.

Preuve. Soit $\omega > 0$ fixé tel que $\omega \geqslant \omega^*$. On note encore $L_\omega = L$, $M_\omega = M$... On réutilise la méthode de la démonstration du Théorème V.12.

Tout d'abord on prouve que 2. implique 1. Pour cela, on suppose

$$u_0, u_1 \in \left(X, D\left((L+M)^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p} = (X, D(L+M))_{2-\frac{1}{p},p}, \tag{V.58}$$

par la propriété de réitération. On veut prouver que u défini par (V.21) est l'unique solution classique de (V.2). On pose

$$v := (I+R)^{-1}(F(f)+D) = (L+M)^2 u \in L^p(0,1;X),$$

par les Propositions V.25, V.26 et V.27. Puisque $(L-M)^2(L+M)^{-2} \in L(X)$, on a

$$(L-M)^2 u = (L-M)^2 (L+M)^{-2} (L+M)^2 u \in L^p(0,1;X).$$

Ensuite

$$v = F(f) + D - R(v),$$

d'où

$$u = (L+M)^{-2}(F(f)+D) - (L+M)^{-2} R(v).$$

On rappelle que pour presque tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
u(x) = &(L+M)^{-1} G(f)(x) + (L+M)^{-1} H(f)(x) \\
&- (L+M)^{-1} e^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} H(f)(0) \\
&+ (L+M)^{-1} e^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} e^L G(f)(1) \\
&- (L+M)^{-1} e^{(1-x)L}\left(I - e^M e^L\right)^{-1} G(f)(1) \\
&+ (L+M)^{-1} e^{(1-x)L}\left(I - e^M e^L\right)^{-1} e^M H(f)(0) \\
&+ (L+M)^{-1} e^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1}\left((L+M)u_0 - e^L(L+M)u_1\right) \\
&+ (L+M)^{-1} e^{(1-x)L}\left(I - e^M e^L\right)^{-1}\left((L+M)u_1 - e^M(L+M)u_0\right) \\
&- \frac{1}{4}(L+M)^{-1} G(C_{L,M}v)(x) + \frac{1}{4}(L+M)^{-1} H(C_{L,M}v)(x) \\
&- \frac{1}{4}(L+M)^{-1} e^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} H(C_{L,M}v)(0) \\
&- \frac{1}{4}(L+M)^{-1} e^{xM}\left(I - e^L e^M\right)^{-1} e^L G(C_{L,M}v)(1) \\
&+ \frac{1}{4}(L+M)^{-1} e^{(1-x)L}\left(I - e^M e^L\right)^{-1} G(C_{L,M}v)(1) \\
&+ \frac{1}{4}(L+M)^{-1} e^{(1-x)L}\left(I - e^M e^L\right)^{-1} e^M H(C_{L,M}v)(0),
\end{aligned}$$

que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} u(x) = {} & (L+M)^{-1} G(f)(x) + (L+M)^{-1} H(f)(x) - \frac{1}{4} (L+M)^{-1} G(C_{L,M}v)(x) \\ & + \frac{1}{4} (L+M)^{-1} H(C_{L,M}v)(x) + (L+M)^{-1} e^{xM} f_0 + (L+M)^{-1} e^{(1-x)L} f_1, \end{aligned} \tag{V.59}$$

où

$$\begin{aligned} f_0 := {} & \left(I - e^L e^M\right)^{-1} \Big(-H(f)(0) + e^L G(f)(1) + (L+M) u_0 - e^L (L+M) u_1 \\ & - \frac{1}{4} H(C_{L,M}v)(0) - \frac{1}{4} e^L G(C_{L,M}v)(1) \Big), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_1 := {} & \left(I - e^M e^L\right)^{-1} \Big(-G(f)(1) + e^M H(f)(0) + (L+M) u_1 - e^M (L+M) u_0 \\ & + \frac{1}{4} G(C_{L,M}v)(1) + \frac{1}{4} e^M H(C_{L,M}v)(0) \Big). \end{aligned}$$

On a donc pour presque tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} v(x) = {} & (L+M) G(f)(x) + (L+M) H(f)(x) - \frac{1}{4} (L+M) G(C_{L,M}v)(x) \\ & + \frac{1}{4} (L+M) H(C_{L,M}v)(x) + (L+M) e^{xM} f_0 + (L+M) e^{(1-x)L} f_1. \end{aligned} \tag{V.60}$$

Maintenant, en utilisant le Lemme V.5, on a

$$f_0 = - H(f)(0) + e^L G(f)(1) + (L+M) u_0 - e^L (L+M) u_1 - \frac{1}{4} H(C_{L,M}v)(0) - \frac{1}{4} e^L G(C_{L,M}v)(1) + e^L e^M f_0,$$

et par (V.58), il est clair que $(L+M) u_0 \in (X, D(L+M))_{1-\frac{1}{p},p}$, de plus en vertu de la Proposition V.23, on a $H(f)(0), H(C_{L,M}v)(0) \in D(L) = D(M)$, d'où

$$f_0 \in (X, D(M))_{1-\frac{1}{p},p}.$$

De même

$$f_1 \in (X, D(L))_{1-\frac{1}{p},p}.$$

Ainsi, d'après les Propositions V.22 et V.23, $u \in W^{1,p}(0,1;X)$ et pour presque tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} (L+M) u'(x) = {} & MG(f)(x) - LH(f)(x) - \frac{1}{4} MG(C_{L,M}v)(x) - \frac{1}{4} LH(C_{L,M}v)(x) \\ & - \frac{1}{2} C_{L,M}v(x) + Me^{xM} f_0 - Le^{(1-x)L} f_1. \end{aligned} \tag{V.61}$$

Par conséquent, on a $(L+M) u' \in L^p(0,1;X)$. Ainsi pour presque tout $x \in (0,1)$, on a $u'(x) \in D(L+M) = D(L-M)$ et comme $(L-M)(L+M)^{-1} \in L(X)$ (Lemme IV.5, point 1.)

$$(L-M) u' = (L-M)(L+M)^{-1} (L+M) u' \in L^p(0,1;X).$$

Ensuite, en insérant (V.60) dans (V.61), et en utilisant le Lemme IV.6, point 6., on obtient pour presque tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} u'(x) = {} & M (L+M)^{-1} G(f)(x) - L (L+M)^{-1} H(f)(x) - \frac{1}{4} M (L+M)^{-1} G(C_{L,M}v)(x) \\ & - \frac{1}{4} L (L+M)^{-1} H(C_{L,M}v)(x) + M (L+M)^{-1} e^{xM} f_0 - L (L+M)^{-1} e^{(1-x)L} f_1. \end{aligned} \tag{V.62}$$

D'après les Propositions V.22 et V.23, $u' \in W^{1,p}(0,1;X)$ et pour presque tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
u''(x) =& f(x) + M\,(L+M)^{-1}\,MG(f)(x) + L\,(L+M)^{-1}\,LH(f)(x) \\
& - \frac{1}{4}M\,(L+M)^{-1}\,MG(C_{L,M}v)(x) + \frac{1}{4}L\,(L+M)^{-1}\,LH(C_{L,M}v)(x) \\
& + \frac{1}{4}(L-M)\,(L+M)^{-1}\,C_{L,M}v(x) + M\,(L+M)^{-1}\,Me^{xM}f_0 + L\,(L+M)^{-1}\,Le^{(1-x)L}f_1.
\end{aligned}$$

Ainsi $u'' \in L^p(0,1;X)$. Puis, on insère (V.60) dans cette dernière formule, et on a pour presque tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
u''(x) = & f(x) + S_1G(f)(x) + T_1H(f)(x) - \frac{1}{4}S_1G(C_{L,M}v)(x) + \frac{1}{4}T_1H(C_{L,M}v)(x) \\
& + S_1e^{xM}f_0 + T_1e^{(1-x)L}f_1,
\end{aligned} \tag{V.63}$$

où

$$\begin{aligned}
S_1 :=& M\,(L+M)^{-1}\,M + \frac{1}{4}(L-M)\,(L+M)^{-1}\,C_{L,M}(L+M) \\
=& \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}(L-M)M\,(L+M)^{-1},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
T_1 :=& L\,(L+M)^{-1}\,L + \frac{1}{4}(L-M)\,(L+M)^{-1}\,C_{L,M}(L+M) \\
=& \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}(L-M)L\,(L+M)^{-1},
\end{aligned}$$

d'après le point 7. du Lemme IV.6.

En utilisant (V.59), (V.62) et (V.63), on a pour presque tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
& u''(x) + (L-M)u'(x) + \frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)u(x) \\
=& f(x) + S_2G(f)(x) + T_2H(f)(x) - \frac{1}{4}S_2G(C_{L,M}v)(x) + \frac{1}{4}T_2H(C_{L,M}v)(x) + S_2e^{xM}f_0 + T_2e^{(1-x)L}f_1,
\end{aligned}$$

où

$$S_2 := \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}(L-M)M\,(L+M)^{-1} + (L-M)M\,(L+M)^{-1} + \frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)(L+M)^{-1} = 0,$$

et

$$T_2 := \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}(L-M)L\,(L+M)^{-1} - (L-M)L\,(L+M)^{-1} + \frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)(L+M)^{-1} = 0,$$

d'après le point 8. du Lemme IV.6. On obtient enfin

$$u'' + (L-M)u' + \frac{1}{4}\left((L-M)^2 - (L+M)^2\right)u = f.$$

De plus, il est clair que

$$u(0) = u_0,$$

et

$$u(1) = u_1,$$

voir la démonstration du Théorème V.12.

Donc u défini par (V.21) est une solution classique de (V.2) et l'unicité de cette solution classique résulte de la Remarque V.28.

Réciproquement, on suppose le point 1. Alors u s'écrit sous la forme (V.21) :

$$u = (L+M)^{-2}\left\{(I+R)^{-1}(F(f)+D)\right\}.$$

On a

$$(L+M)^2 u = (I+R)^{-1}(F(f)+D) \in L^p(0,1;X),$$

et en appliquant $(I+R) \in L(L^p(0,1;X))$, voir Proposition V.27, il s'ensuit

$$F(f)+D \in L^p(0,1;X),$$

de plus comme $F(f) \in L^p(0,1;X)$ par la Proposition V.25, on obtient

$$D \in L^p(0,1;X),$$

ainsi par la Proposition V.26, le point 2. est satisfait. ■

2.3 Applications

On va considérer les exemples traités dans la Section 2.3 du Chapitre IV. Pour le premier exemple, on se place dans un espace $X = L^p(\Omega)$, où $\Omega = (c,d)$. Le second exemple généralise le premier en prenant Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que dans tous ces exemples, les hypothèses (V.50)-(V.57) ont déjà été prouvées dans les Sections 2.3 du Chapitre IV et 1.5 de ce chapitre.

Exemple 1.

On veut traiter le problème aux limites et quasi-elliptique d'ordre quatre suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + a(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) - \omega^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y) - a(y)\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,y) - a'(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \\ -\dfrac{1}{2}a''(y)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \omega^\alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y),\ x \in (0,1)\,,\ y \in (c,d) \\ u(x,c) = u(x,d) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,c) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,d) = 0,\ x \in (0,1) \\ u(0,y) = u_0,\ y \in (c,d) \\ u(1,y) = u_1,\ y \in (c,d)\,, \end{cases} \tag{V.64}$$

où $\omega > 0$, $\alpha > 0$, et

$$a \in C^2([c,d]),\ a(c) = a(d) = 0,\ Im(a) \neq \{0\}.$$

On définit les opérateurs L_0 et M_0 sur $X = L^p(c,d)$ par

$$\begin{cases} D(L_0) = D(M_0) = \left\{\varphi \in W^{2,p}(c,d) : \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\} \\ L_0\varphi(y) = \varphi''(y) + a(y)\varphi'(y), \quad M_0\varphi(y) = \varphi''(y), \quad y \in (c,d)\,. \end{cases}$$

Le problème (V.64) s'écrit sous la forme opérationnelle (V.2) avec $L_\omega := L_0 - \omega^\alpha I$, $M_\omega := M_0$.

On peut appliquer le Théorème V.29 dès que $f \in L^q(0,1;L^p(c,d))$, $1 < p,q < \infty$, en particulier pour $f \in L^p((0,1)\times(c,d))$. De plus, il est aisé de voir qu'ici, dans les points 1. et 2. du théorème, on peut remplacer L_ω et M_ω par L, M. On a aussi le résultat suivant.

Proposition V.30 *Soit* $1 < p < \infty$. *Alors*

$$\left(L^p(c,d), D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p} = \begin{cases} \left\{\varphi \in B_p^{4-\frac{2}{p}}(]c,d[) : \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\} \ si\ 1 < p \leqslant \dfrac{3}{2} \\ \left\{\varphi \in B_p^{4-\frac{2}{p}}(]c,d[) : \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\} \ si\ p > \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Preuve. En utilisant Grisvard [32], Proposizione 3, p. 683, on a

$$\left(L^p(c,d), W^{4,p}(c,d)\right)_{1-\frac{1}{2p},p} = B_{p,p}^{4-\frac{2}{p}}(]c,d[) = B_p^{4-\frac{2}{p}}(]c,d[).$$

En utilisant Triebel [58], p.321, on obtient

1. Si $p > \dfrac{3}{2}$, alors $4 - \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{p} > 2$ donc

$$\left(L^p(c,d), D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p} = \left\{\varphi \in B_p^{4-\frac{2}{p}}(]c,d[) : \varphi''(c) = \varphi''(d) = \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\}.$$

2. Si $1 < p < \dfrac{3}{2}$, alors $0 < 4 - \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{p} < 2$ donc

$$\left(L^p(c,d), D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p} = \left\{\varphi \in B_p^{4-\frac{2}{p}}(]c,d[) : \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\}.$$

3. Si $p = \dfrac{3}{2}$, alors $4 - \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{p} = 2$ donc

$$\begin{aligned}\left(L^p(c,d), D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p} &= \left\{\varphi \in B_{\frac{3}{2}}^{4-\frac{1}{3}}(]c,d[) : \varphi'' \in B_{\frac{3}{2}}^{\frac{2}{3}}(]c,d[), \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\} \\ &= \left\{\varphi \in B_{\frac{3}{2}}^{4-\frac{1}{3}}(]c,d[) : \varphi(c) = \varphi(d) = 0\right\},\end{aligned}$$

puisque pour $\varphi \in B_{\frac{3}{2}}^{4-\frac{1}{3}}(]c,d[)$, on a $\varphi'' \in W^{2-\frac{1}{3},\frac{3}{2}}(]c,d[)$ donc $\varphi'' \in B_{\frac{3}{2}}^{\frac{2}{3}}(]c,d[)$.

■

Exemple 2.

On veut traiter le problème aux limites et quasi-elliptique d'ordre quatre suivant

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial x}(x,y) - \omega^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \Delta_y^2 u(x,y) - \sum_{i=1}^n a_i(y)\dfrac{\partial(\Delta_y u)}{\partial y_i}(x,y) \\ - \displaystyle\sum_{i,k=1}^n \left(\dfrac{\partial a_i}{\partial y_k}\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_i}(x,y) - \dfrac{1}{2}\sum_{i,k=1}^n \left(\dfrac{\partial^2 a_i}{\partial y_k^2}\right)\dfrac{\partial u}{\partial y_i}(x,y) + \omega^\alpha \Delta_y u(x,y) \\ = f(x,y),\ x \in (0,1)\,,\ y \in \Omega \\ u(x,\sigma) = \Delta_\sigma u(x,\sigma) = 0,\ x \in (0,1)\,,\ \sigma \in \partial\Omega \\ u(0,y) = u_0,\ y \in \Omega \\ u(1,y) = u_1,\ y \in \Omega, \end{array}\right. \tag{V.65}$$

où Ω est un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $\omega > 0$, $\alpha > 0$, et

$$a \in C^2(\overline{\Omega}),\ a_k = 0 \text{ sur } \partial\Omega,\ Im(a_k) \neq \{0\},\ k = 1, ..., n.$$

On définit les opérateurs L_0 et M_0 sur $X = L^p(\Omega)$ par

$$\left\{\begin{array}{l} D(L_0) = D(M_0) = \left\{\varphi \in W^{2,p}(\Omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\} \\ L_0\varphi(y) = \Delta_y\varphi(y) + \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i(y) D_i\varphi(y),\ y \in \Omega \\ M_0\varphi(y) = \Delta_y\varphi(y),\ y \in \Omega. \end{array}\right.$$

Le problème (V.65) s'écrit sous la forme opérationnelle (V.2) avec $L_\omega := L_0 - \omega^\alpha I$, $M_\omega := M_0$.

On peut appliquer le Théorème V.29 dès que $f \in L^q(0,1;L^p(\Omega))$, $1 < p, q < \infty$, en particulier pour $f \in L^p((0,1)\times\Omega)$. De plus, il est aisé de voir qu'ici, dans les points 1. et 2. du théorème, on peut encore remplacer L_ω et M_ω par L, M. De même que pour l'Exemple 1, on a le résultat suivant.

Proposition V.31 *Soit* $1 < p < \infty$. *Alors*

$$\left(L^p(c,d), D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p} = \begin{cases} \left\{\varphi \in B_p^{4-\frac{2}{p}}(\Omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\} & \text{si } 1 < p \leqslant \dfrac{3}{2} \\ \left\{\varphi \in B_p^{4-\frac{2}{p}}(\Omega) : \varphi = \Delta_y\varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\} & \text{si } p > \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

2.4 Retour à l'équation initiale

On illustre ici la théorie opérationnelle précédente en construisant une paire d'opérateurs (L_ω, M_ω) satisfaisant (V.51)-(V.57) (sous l'hypothèse (V.50) d'espace UMD). L'objectif est ensuite de pouvoir résoudre (V.1).

Dans toute cette section, pour un opérateur linéaire P sur X et pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $P_\lambda = P - \lambda I$.

On suppose qu'il existe un réel positif fixé ω_0 tel que les opérateurs A et B vérifient

$$\begin{cases} B^2 - A_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X,\ \mathbb{R}^- \subset \rho(B^2 - A_{\omega_0}), \\ \exists C > 0,\ \forall \lambda \leqslant 0, \left\|\left(B^2 - A_{\omega_0} - \lambda I\right)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{1+|\lambda|}, \end{cases} \tag{V.66}$$

$$\begin{cases} (i)\, D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right) \subset D(B), \\ (ii)\, D\left(B^2 - A\right) \subset D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2} B\right), \end{cases} \tag{V.67}$$

$$\forall \omega \geqslant \omega_0,\ \left\|\left[B; \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}\right]\left(B^2 - A_\omega\right)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \chi(\omega), \tag{V.68}$$

où

$$\chi : [\omega_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+ \text{ avec } \lim_{\omega\to+\infty} \chi(\omega) = 0.$$

On suppose que les opérateurs

$$\begin{cases} L_\omega := B - \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}, \\ M_\omega := -B - \left(B^2 - A_\omega\right)^{1/2}, \end{cases}$$

vérifient les hypothèses suivantes

$$\begin{cases} \forall \omega \geqslant \omega_0,\ ]-\infty, 0[\subset \rho(-L_\omega) \cap \rho(-M_\omega),\ ker(L_\omega) = ker(M_\omega) = \{0\},\ \overline{Im(L_\omega)} = \overline{Im(M_\omega)} = X; \\ \exists C \geqslant 1,\ \forall \omega \geqslant \omega_0,\ \forall \lambda > 0,\ \left\|(L_\omega - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{\lambda},\ \left\|(M_\omega - \lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} \leqslant \dfrac{C}{\lambda}, \end{cases} \tag{V.69}$$

$$\begin{cases} \forall \omega \geqslant \omega_0,\ \forall s \in \mathbb{R},\ (-L_\omega)^{is}, (-M_\omega)^{is} \in L(X); \\ \exists \theta_L, \theta_M \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ \exists C \geqslant 1,\ \forall \omega \geqslant \omega_0,\ \forall s \in \mathbb{R}, \\ \quad \left\|(-L_\omega)^{is}\right\|_{L(X)} \leqslant Ce^{\theta_L|s|},\ \left\|(-M_\omega)^{is}\right\|_{L(X)} \leqslant Ce^{\theta_M|s|}, \end{cases} \tag{V.70}$$

et

$$I - e^{L_\omega}e^{M_\omega} \text{ ou } I - e^{M_\omega}e^{L_\omega} \text{ est inversible dans } L(X). \tag{V.71}$$

Les hypothèses (V.66)-(V.70) sont les mêmes que celles utilisées au Chapitre IV, Section 2.4. L'hypothèse (V.71) a été utilisée dans le cadre höldérien, Section 1.6. Par conséquent, les Remarques IV.19, V.16 et les Lemmes IV.21, IV.22 sont encore valables ici.

Lemme V.32 *On suppose (V.66)-(V.67). On a le domaine d'interpolation*

$$\left(X, D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p} = \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p}.$$

Preuve. Puisque $0 < 1 - \dfrac{1}{2p} < 1$ et $D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right) = D(B^2 - A)$, Lemme IV.21, point 1., on a

$$\left(X, D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p} = \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p}.$$

■

Ainsi, les hypothèses (V.66)-(V.71) impliquent (V.51)-(V.57). On applique alors le Théorème V.29.

Théorème V.33 *On suppose (V.50) et (V.66)-(V.71). Soit $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$. Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (V.1) admet une unique solution u telle que*

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)), \\ u' \in L^p(0,1;D(B)), \end{cases}$$

satisfaisant

$$\begin{array}{l} p.p.\ x \in (0,1),\ u(x) \in D\left(B^2 - A\right), \\ p.p.\ x \in (0,1),\ u'(x) \in D\left(\left(B^2 - A\right)^{1/2}\right), \end{array}$$

et

$$B^2 u \in L^p(0,1;X).$$

2. $u_0, u_1 \in \left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p}$.

Remarque V.34 *Ce théorème généralise le Theorem 5 p. 173 de Favini et al. [23] dans le cas commutatif et avec $\omega = 0$. En effet, sous l'hypothèse de commutativité (III.27), on a d'après les Lemmes IV.4 et IV.21, points 1.,*

$$\begin{cases} D(LM) = D\left(M^2\right) = D\left(\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^2\right), \\ D(ML) = D\left(L^2\right) = D\left(\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^2\right), \\ D(ML) \cap D(LM) = D\left(B^2 - A\right), \end{cases}$$

et d'après le Lemma 7 p. 178 de Favini et al. [23], on a $D(LM) = D(ML) = D\left(B^2 - A\right)$, donc

$$D\left(B^2 - A\right) = D\left(\left(-B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^2\right) = D\left(\left(B - \left(B^2 - A\right)^{1/2}\right)^2\right).$$

Ainsi, puisque $0 < 1 - \frac{1}{2p} < 1$, on obtient

$$\left(X, D\left(B^2 - A\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p} = \left(X, D\left(M^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p} = \left(X, D\left(L^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p},$$

et on retrouve le résultat.

Conclusion générale et perspectives

Cette thèse présente l'étude des équations différentielles opérationnelles complètes du second ordre de type elliptique dans un **cadre non commutatif**. Elle prolonge en particulier les travaux de Favini et al. [22–27]. On a donc étudié l'équation

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x),$$

sur toute la droite réelle, puis sur un intervalle borné (en particulier $[0,1]$) muni de conditions aux limites de Dirichlet. Ici A et B sont deux opérateurs linéaires fermés sur X, X étant un espace de Banach complexe, f est définie respectivement de $\mathbb{R}$ et de $[0,1]$ à valeurs dans X. Le paramètre ω permet l'existence de solutions classiques pour ω assez grand.

On a étudié l'équation plus générale

$$u''(x) + (L_\omega - M_\omega)\, u'(x) + \frac{1}{4}\Big((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2\Big)\, u(x) = f(x),$$

sur la droite réelle et sur l'intervalle $[0,1]$. Ici les opérateurs L_ω et M_ω vérifient notamment

$$\begin{cases} L_\omega - M_\omega \subset 2B \\ \dfrac{1}{4}\Big((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2\Big) \subset A - \omega I. \end{cases}$$

En particulier, on peut choisir

$$L_\omega = B - (B^2 - A + \omega I)^{1/2}; \quad M_\omega = -B - (B^2 - A + \omega I)^{1/2}.$$

On a montré l'existence et l'unicité de solutions classiques lorsque $f \in BUC^\theta(\mathbb{R};X)$, puis lorsque $f \in L^p(\mathbb{R};X)$ pour les deux équations sur $\mathbb{R}$; et lorsque $f \in C^\theta([0,1];X)$, puis lorsque $f \in L^p(0,1;X)$, pour les deux problèmes sur $[0,1]$, avec $\theta \in \,]0,1[$ et $1 < p < \infty$. On a également montré la régularité maximale de la solution classique dans le cadre höldérien. Pour le cadre L^p, on s'est placé dans un espace UMD X.

L'originalité de ce travail réside particulièrement dans le fait d'étudier ces équations dans le cadre non commutatif. Le commutateur proposé est bien évidemment non nul et supposé petit pour ω grand en un certain sens. Ceci constitue l'hypothèse originale dite de non commutativité.

On donne maintenant une liste non exhaustive de perspectives.

1. On peut reprendre les mêmes équations avec des conditions aux limites de type Robin

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x),\ x \in (0,1), \\ \alpha u'(0) - Hu(0) = u_0, \qquad \beta u'(1) + hu(1) = u_1, \end{cases}$$

où α, β, sont deux constantes données, H et h sont deux opérateurs linéaires sur X. Le cadre de travail restera le même (non commutatif). Bien sûr, on étudiera l'équation associée avec les opérateurs L_ω et M_ω. Le problème général quand L_ω, M_ω, H et h ne commutent pas entre eux étant très délicat, il faudra certainement commencer par des cas intermédiaires : par exemple H ou h égal à νI, $\nu \in \mathbb{C}$. Il faudra alors trouver un ou plusieurs autres commutateurs. Ce type de problème est très intéressant puisque liés aux problèmes physiques issus de problèmes de transmission.

2. On peut reprendre ces équations avec des opérateurs A et B dépendant de x

$$\begin{cases} u''(x) + 2B(x)u'(x) + A(x)u(x) - \omega u(x) = f(x),\ x \in (0,1), \\ u(0) = u_0, \qquad u(1) = u_1. \end{cases}$$

   Il est intéressant de noter que les opérateurs

$$\begin{aligned} L_\omega(x) &:= B(x) - \left(B^2(x) - A(x) + \omega I\right)^{1/2}, \\ M_\omega(x) &:= -B(x) - \left(B^2(x) - A(x) + \omega I\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

   vérifient toujours

$$D\left(L_\omega(x)\right) = D\left(M_\omega(x)\right).$$

   Il faudra commencer par étudier l'équation sur toute la droite réelle (plus simple). Mais quels seront les commutateurs à utiliser ?

3. L'équation d'ordre 4 peut être abordée dans le cadre non commutatif. Elle permettra de résoudre des problèmes elliptiques où apparaît notamment le bilaplacien (très physique).

4. L'application proposée au Chapitre II peut être poursuivie. Il reste à faire tendre $\varepsilon \to 0$ pour avoir le problème limite sur le cytoplasme. Il faudra trouver la bonne condition d'impédance posée sur le bord Γ^* qui décrira l'effet de la couche mince sur le cytoplasme.

   Il faudra ensuite regarder les majorations d'erreurs entre la solution du problème limite w et la solution w^ε du problème (P^ε).

   D'autres applications similaires connues mais nécessitant le cadre non commutatif pourraient être traitées en utilisant les méthodes développées dans cette thèse.

Bibliographie

[1] W. Arendt, C. Batty & S. Bu, *Fourier Multipliers for Hölder Continuous Functions and Maximal Regularity*, Studia Math. 160(1) (2004), p. 23-51.

[2] J. B. Baillon, *Caractère borné de certains générateurs de semi-groupes linéaires dans les espaces de Banach*, C. R. Acad. Sci. Paris 290 (1980), p. 757-760.

[3] A. V. Balakrishnan, *Fractional Powers of Closed Operators and the Semigroups Generated by Them*, Pac. J. Math. 10 (1960), p. 419-437.

[4] J. Bourgain, *Some Remarks on Banach Spaces in which Martingale Difference Sequences are Unconditional*, Ark. Mat. 21 (1983), p. 163-168.

[5] D. L. Burkholder, *Martingales and Fourier Analysis in Banach Spaces*, Probability and Analysis, Lect. Sess. C.I.M.E., Varenna/Italy 1985, Lect. Notes Math. 1206, Springer-Verlag, Berlin, 1986, p. 61-108.

[6] D. L. Burkholder, *A Geometrical Characterization of Banach Spaces in which Martingale Difference Sequences are Unconditional*, Ann. Probab. 9 (1981), p. 997-1011.

[7] P. L. Butzer & H. Berens, *Semigroups of Operators and Approximation*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[8] G. Caloz, M. Costabel, M. Dauge & G. Vial, *Asymptotic Expansion of the Solution of an Interface Problem in a Polygonal Domain with Thin Layer*, Asymptot. Anal. 50(1,2) (2006), p. 121-173.

[9] S. Campanato, *Generation of Analytic Semigroups by Elliptic Operators of Second Order in Hölder Spaces*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4) 8(3) (1981), p. 495-512.

[10] S. Campanato, *Generation of Analytic Semigroups, in the Hölder Topology, by Elliptic Operators of Second Order with Neumann Boundary Condition*, Matematiche 35(1-2) (1980), p. 61-72.

[11] G. Da Prato, *Abstract Differential Equations, Maximal Regularity and Linearization*, Proc. Symp. Pure Math. 45(1) (1986), p. 359-370.

[12] G. Da Prato & P. Grisvard, *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles*, J. Math. Pures Appl. (9) 54 (1975), p. 305-387.

[13] G. Dore, *L^p Regularity for Abstract Differential Equations*, Functional Analysis and Related Topics, Kyoto 1991, Lect. Notes in Math. 1540, Springer-Verlag, Berlin, 1993, p. 25-38.

[14] G. Dore, A. Favini, R. Labbas & K. Lemrabet, *An Abstract Transmission Problem in a Thin Layer, I : Sharp Estimates*, J. Funct. Anal. 261 (2011), p. 1865-1922.

[15] G. Dore & A. Venni, *On the Closedness of the Sum of Two Closed Operators*, Math. Z. 196 (1987), p. 189-201.

[16] N. Dunford & J. T. Schwartz, *Linear operators. Part 1 : General Theory*, Interscience Publishers, New York, 1958.

[17] K-J. Engel & R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Grad. Texts Math. 194, Springer, New York, 2000.

[18] A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet & S. Maingot, *Study of the Limit of Transmission Problems in a Thin Layer by the Sum Theory of Linear Operators*, Rev. Mat. Complut. 18(1) (2005), p. 143-176.

[19] A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet & B-K. Sadallah, *Study of Complete Abstract Differential Equation of Elliptic Type with Variable Operator Coefficients, I*, Rev. Mat. Complut. 21(1) (2008), p. 89-133.

[20] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot & M. Meisner, *Boundary Value Problem for Elliptic Differential Equations in Noncommutative Cases*, Disc. Contin. Dyn. Syst. (2012).

[21] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot & M. Meisner, *Study of Complete Abstract Elliptic Differential Equations in Non-Commutative Cases*, Appl. Anal. (2011).

[22] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe & A. Yagi, *Necessary and Sufficient Conditions for Maximal Regularity in the Study of Elliptic Differential Equations in Hölder Spaces*, Disc. Contin. Dyn. Syst. 22(4) (2008), p. 973-987.

[23] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe & A. Yagi, *A Simplified Approach in the Study of Elliptic Differential Equations in UMD Spaces and New Applications*, Funkcial. Eckvac. 51(2) (2008), p. 165-187.

[24] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe & A. Yagi, *Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type in UMD Spaces*, Funkcial. Eckvac. 49(2) (2006), p. 193-214.

[25] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe & A. Yagi, *Étude unifiée de problèmes elliptiques dans le cadre höldérien*, C. R. Acad. Sci. Paris 341(8) (2005), p. 485-490.

[26] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe & A. Yagi, *On the Solvability and the Maximal Regularity of Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type*, Funkcial. Eckvac. 47(3) (2004), p. 423-452.

[27] A. Favini, R. Labbas, H. Tanabe & A. Yagi, *On the Solvability of Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type*, Funkcial. Eckvac. 47(2) (2004), p. 205-224.

[28] A. Favini & R. Triggiani, *Analytic Gevrey Class Semigroups Generated by $-A+iB$, and Applications*, Differential Equations in Banach Spaces, Bologna/Italy 1991, M. Dekker, New York, Lect. Notes Pure Appl. Math. 148, 1993, p. 93-114 .

[29] E. C. Fear & M. A. Stuchly, *Modeling Assemblies of Biological Cells Exposed to Electric Fields*, IEEE Trans. Bio. Eng. 45(1) (1998), p. 1259-1271.

[30] E. C. Fear & M. A. Stuchly, *A Novel Equivalent Circuit Model for Gap-Connected Cells*, Phys. Med. Biol. 43 (1998), p. 1439-1448.

[31] M. Fuhrman, *Sums of Generators of Analytic Semigroups and Multivalued Linear Operators*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 173 (1997), p. 63-105 .

[32] P. Grisvard, *Spazi di Tracce e Applicazioni*, Rendiconti di Matematica (4) 6(5) (1972), p. 657-729.

[33] P. Grisvard, *Équations différentielles abstraites*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 2(3) (1969), p. 311-395.

[34] P. Grisvard, *Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications*, J. Math. Pures Appl. (9) 45 (1966), p. 143-290.

[35] D. Guidetti, *An introduction to maximal regularity for parabolic problems and interpolation theory with application to an inverse problem*, International Minicourse-Workshop, Interplay Between (C_0)-semigroups and PDEs : theory and applications, Bari/Italy September 22-26, 2003, p. 113-146.

[36] B. H. Haak, M. Haase & P. C. Kunstmann, *Perturbation, Interpolation, and Maximal Regularity*, Adv. Differential Equations 11(2) (2006), p. 201-240.

[37] M. Haase, *The Functional Calculus for Sectorial Operators and Similarity Methods*, Thesis, Universität Ulm, Germany, 2003.

[38] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.

[39] H. Komatsu, *Fractional Powers of Operators*, Pac. J. Math. 19 (1966), p. 285-346.

[40] S. G. Krein, *Linear Differential Equations in Banach Spaces*, Moscou, 1967 ; English translation, AMS, Providence, 1971.

[41] R. Labbas, *Some Results on the Sum of Linear Operators with Nondense Domains*, Ann. Mate. Pura Appl. (4) 154 (1989), p. 91-97.

[42] R. Labbas & B. Terreni, *Sommes d'opérateurs linéaires de type parabolique, I*, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) 1(2) (1987), p. 545-569.

[43] J. L. Lions, *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Séminaire de Mathématiques Supérieures 1, Été 1962, Les Presses de l'Université de Montréal, Montreal, 1965.

[44] J. L. Lions, *Théorèmes de trace et d'interpolation I et II*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat. (3) 13 (1959), p. 389-403 ; et 14 (1960), p. 317-331.

[45] J. L. Lions & J. Peetre, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 19 (1964), p. 5-68.

[46] A. Lunardi, *On Generators of Noncommuting Semigroups : Sums, Interpolation, Regularity*, Evolution equations, semigroups and functional analysis, Milano 2000, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 50, Birkhäuser, Basel, 2002, p. 263-277.

[47] A. Lunardi, *Regularity for a Class of Sums of Noncommuting Operators*, Topics in nonlinear analysis, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 35, Birkhäuser, Basel, 1999, p. 517-533.

[48] A. Lunardi, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhaüser, Basel, 1995.

[49] S. Monniaux & J. Prüss, *A Theorem of the Dore-Venni Type for Noncommuting Operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 349(12) (1997), p. 4787-4814.

[50] S. Nicaise, *Polygonal Interface Problems*, Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik. 39 Frankfurt/Main : Peter Lang, 1993.

[51] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.

[52] C. Poignard, *Asymptotics for Steady State Voltage Potentials in a Bidimensional Highly Contrasted Medium with Thin Layer*, Math. Methods Appl. Sci. 31(4) (2008), p. 443-479.

[53] J. Prüss & H. Sohr, *Imaginary Powers of Elliptic Second Order Differential Operators in L^p-spaces*, Hiroshima Math J. 23 (1993), p. 161-192.

[54] J. Prüss & H. Sohr, *On Operators with Bounded Imaginary Powers in Banach Spaces*, Math. Z. 203(3) (1990), p. 429-452.

[55] R. Seeley, *Norms and Domains of the Complex Powers $(A_B)^z$*, Amer. J. Math. 93 (1971), p. 299-309.

[56] E. Sinestrari, *On the Abstract Cauchy Problem of Parabolic Type in Spaces of Continuous Functions*, J. Math. Anal. Appl. 107 (1985), p. 16-66.

[57] H. Tanabe, *Equations of Evolution*, Pitman, London, San Francisco, Melbourne, 1979.

[58] H. Triebel, *Interpolation Theory, Functions Spaces, Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

Résumé
L'objectif de ce travail est l'étude des équations différentielles complètes du second ordre de type elliptique à coefficients opérateurs dans un espace de Banach X quelconque.
Une application concrète de ces équations est détaillée, il s'agit d'un problème de transmission du potentiel électrique dans une cellule biologique où la membrane constitue une couche mince.
L'originalité de ce travail réside particulièrement dans le fait que les opérateurs non bornés considérés ne commutent pas nécessairement. Une nouvelle hypothèse dite de non commutativité est alors introduite. L'analyse est faite dans deux cadres fonctionnels distincts : les espaces de Hölder et les espaces L^p (avec X un espace UMD). L'équation est d'abord étudiée sur la droite réelle puis sur un intervalle borné avec conditions aux limites de Dirichlet.
On donne des résultats d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution classique sous des conditions sur les données dans des espaces d'interpolation. Les techniques utilisées sont basées sur la théorie des semi-groupes, le calcul fonctionnel de Dunford et la théorie de l'interpolation.
Ces résultats sont tous appliqués à des équations aux dérivées partielles concrètes de type elliptique ou quasi-elliptique.

Mots clés : équation différentielle opérationnelle du second ordre de type elliptique, cadre non commutatif, condition aux limites, régularité maximale, semi-groupe analytique, calcul fonctionnel de Dunford, espace d'interpolation, espace UMD, problème de transmission, couche mince, cellule biologique.

Abstract
The aim of this work is the study of complete elliptic differential equations of second order with operator coefficients in a Banach space X.
A concrete application of these equations is detailed, it concerns a transmission problem of electric potential in a biological cell where the membrane is considered as a thin layer.
The originality of this work is the fact that unbounded operators which are considered do not commute necessarily. A new noncommutativity hypothesis is then introduced. The analysis is performed in two distinct functional frameworks : the Hölder spaces and the L^p spaces (X being a UMD space). First, the equation is studied on the whole real line and secondly in a bounded interval with Dirichlet boundary conditions.
Existence, uniqueness and maximal regularity of the classical solution are proved under some conditions on the data in interpolation spaces. The techniques used are based on semigroup theory, Dunford functional calculus and interpolation theory.
All the results are applied to concrete partial differential equations of elliptic or quasi-elliptic type.

Keywords : second order operational elliptic differential equation, noncommutative framework, boundary condition, maximal regularity, analytic semigroup, Dunford functional calculus, interpolation space, UMD space, transmission problem, thin layer, biological cell.