



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par *L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE*  
Discipline ou spécialité : *Énergétique et Transferts*

---

Présentée et soutenue par *Henrique MASSARD DA FONSECA*  
Le 11 janvier 2012

**Titre :** *Thermographie infrarouge et méthodes d'inférence statistique pour la détermination locale et transitoire de termes-sources et diffusivité thermique.*

---

### JURY

*Haroldo FRAGA DE CAMPOS VELHO*  
*Renato MACHADO COTTA*  
*Carolina PALMA NAVEIRA-COTTA*  
*Marcelo-José COLAÇO*  
*João-Marcos ALCOFORADO REBELLO*  
*Denis Maillet (Rapporteur)*  
*Paulo SELEGHIM JÚNIOR (Rapporteur)*

---

**Ecole doctorale :** *MEGeP (Mécanique, Énergétique, Procédés, Génie Civil)*  
**Unité de recherche :** *Centre RAPSODEE. EMAC-CNRS FRE 3213*  
**Directeur(s) de Thèse :** *Olivier FUDYM et Helcio RANGEL BARRETO ORLANDE*  
**Rapporteurs :** *Denis MAILLET et Paulo SELEGHIM JÚNIOR*



## SOLUÇÕES DE PROBLEMAS INVERSOS COM MEDIDAS TERMOGRÁFICAS EM MICRO-ESCALAS

Henrique Massard da Fonseca

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para à obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientadores: Helcio Rangel Barreto Orlande  
Olivier Fudym

Rio de Janeiro  
Janeiro de 2012

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS INVERSOS COM MEDIDAS TERMOGRÁFICAS  
EM MICRO-ESCALAS

Henrique Massard da Fonseca

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM  
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Examinada por:

---

Prof. Helcio Rangel Barreto Orlande, Ph.D.

---

Prof. Olivier Fudym, Ph.D.

---

Prof. Renato Machado Cotta, Ph.D.

---

Prof.<sup>a</sup> Carolina Palma Naveira Cotta, D.Sc.

---

Prof. Marcelo José Colaço, D.Sc.

---

Prof. Haroldo Fraga de Campos Velho, D.Sc.

---

Prof. João Marcos Alcoforado Rebello, Ph.D.

---

Prof. Paulo Seleglim Júnior, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JANEIRO DE 2012

Fonseca, Henrique Massard da

Soluções de Problemas Inversos com Medidas Termográficas em Micro-Escalas /Henrique Massard da Fonseca. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2012.

XIX, 142 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Helcio Rangel Barreto Orlande

Olivier Fudym

Tese (doutorado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Mecânica, 2012.

Referências Bibliográficas: p. 138-142.

1. Problemas Inversos. 2. Termografia por Infravermelho. 3. Termo-Fonte. I. Orlande, Helcio Rangel Barreto *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

*A vontade de Deus nunca irá levá-lo  
aonde a graça de Deus não possa protegê-lo.  
(Autor desconhecido)*

## DEDICATÓRIA

Esta tese é dedicada às 4 pessoas mais importante da minha vida: Primeiramente meus pais, Adivaldo e Marília, que ganharam alguns cabelos brancos tentando me fazer estudar e largar os carrinhos, o futebol, a pipa, etc. Mas todo esforço valeu a pena! Em seguida minha irmã Elize, que como todo bom irmão que se preze me aturou e me atazanou esses anos todos. E finalmente minha esposa, Juliane, meu coração, meu grande amor, a segunda família que Deus me deu, que aceitou a loucura de viver comigo até o fim dos tempos. Amo vocês.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, acima de tudo.

Ao meu Orientador, Helcio Rangel Barreto Orlande, gostaria de deixar registrada minha profunda admiração, e prazer em ter convivido com você esses anos todos. Eu tenho certeza que o peso do nome da UFRJ é devido a profissionais dedicados como você.

Ao meu Orientador, Olivier Fudym, por ter me aceitado para desenvolver esta tese na Escola de Minas. Os 3 anos passados nesta instituição foram de intenso amadurecimento para mim.

Ao professor Renato Machado Cotta, pela amizade, paciência e disponibilidade para todo tipo de ajuda e orientação.

Às colegas de mestrado, e agora professora Carolina Palma Naveira Cotta e engenheira Diana Albani Cerqueira pela ajuda e companheirismos nas cadeiras do mestrado e doutorado.

Aos colegas de laboratório de tempos passados, André Guilherme Fonseca, Thiago Campos, Vinicius Sabino, Daniel Sias, Jeziel Antunes, Camila Cardoso, Leandro Diniz, Juliana Santos pelos bons momentos vividos no LTTC e na UFRJ.

Aos colegas de laboratório dos tempos atuais, Wellington Betencurte, Rafael Mendonça, Lamien Bernard, Maycon Magalhães, as Ivanas (Gabriela e Fernandes), Apoena, Paulinho, Luiz Augusto e Martim.

Ao casal Marcio e Fabienne e Francisco Palma, por terem ajudado em nossa chegada à França.

Aos colegas da EMAC, Mohammed Kemiha e Jocelyn Ramaroson.

Aos amigos de toda a vida, Marquinho, Tei e Peterson pela companhia desde os tempos de criança.

Aos técnicos do LTTC, Julinho, Paulo Veiga e Paulo Cesar pela ajuda ao longo desses anos.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## SOLUÇÕES DE PROBLEMAS INVERSOS COM MEDIDAS TERMOGRÁFICAS EM MICRO-ESCALAS

Henrique Massard da Fonseca

Janeiro/2012

Orientadores: Helcio Rangel Barreto Orlande

Olivier Fudym

Programa: Engenharia Mecânica

Este trabalho tem por objetivo desenvolver técnicas teóricas e experimentais para a determinação eficiente das propriedades termofísicas e termos-fonte em macro e micro-escala. Foram estudadas duas formas temporais de termo fonte: uma constante e outra variando no tempo. A variação no tempo foi considerada com sendo um pulso em degrau e uma senóide. Duas formas diferentes de aquecimento foram usados: através de uma resistência elétrica e através de um laser-diodo. Para a aquisição dos dados foi usada uma câmera de termografia por infravermelho, com medidas não intrusivas. A estratégia nodal é usada para lidar com o presente problema que contem grande número de dados experimentais. O problema direto foi resolvido por diferenças finitas, e foram estudados dois enfoques para a solução do problema inverso, em função do comportamento temporal do termo-fonte. Ambos os enfoques lidam com a estimação dentro de uma abordagem Bayesiana, empregando o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) para o termo fonte constante no tempo e o filtro de Kalman para o problema cujo termo fonte varia no tempo. Experimentos controlados foram realizados em uma amostra com propriedades termofísicas determinadas por métodos clássicos na literatura.



Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

THERMOGRAPHIC MEASUREMENTS AND INVERSE PROBLEMS FOR THE  
SOURCE-TERM ESTIMATION

Henrique Massard da Fonseca

January/2012

Advisors: Helcio Rangel Barreto Orlande

Olivier Fudym

Department: Mechanical Engineering

This work deals with the development of new theoretical and experimental techniques for the efficient estimation of thermophysical properties and source-term in micro and macro-scale. Two kinds of source term were studied: a constant and a time varying source term. The time wise variation of the source term had a sinusoidal and a pulse form. Two devices were used for the sample heating: An electrical resistance and a laser diode. For the data acquisition, an infrared camera was used, providing a full cartography of properties of the medium and also non-contact temperature measurements. The direct problem was solved by the finite differences method, and two approaches were used for the solution of the inverse problem, depending on the time varying behavior of the source term. Both approaches deal with the parameters estimation within the Bayesian framework, using the Markov Chain Monte Carlo (MCMC) method via the Metropolis Hastings (MH) algorithm for the constant source term, and the Kalman filter for the time-varying source term. The nodal strategy is presented as a method to deal with the large number of experimental data problems. Experiments were carried out in a sample with well known thermophysical properties, determined by classical methods.

# Sumário

<b>Índice de Figuras</b> .....	<b>xi</b>
<b>Lista de Símbolos</b> .....	<b>xvii</b>
<b>1. Introdução</b> .....	<b>1</b>
<b>1.1 Motivação e Objetivos</b> .....	<b>1</b>
<b>1.2 Organização do Texto</b> .....	<b>2</b>
<b>2. Revisão Bibliográfica</b> .....	<b>4</b>
<b>2.1 Problemas Inversos</b> .....	<b>4</b>
<b>2.2 Inferência Bayesiana em Problemas Inversos</b> .....	<b>7</b>
<b>2.3 O Filtro de Kalman</b> .....	<b>10</b>
<b>2.4 Problemas Inversos utilizando a Termografia por Infravermelho</b> .....	<b>12</b>
<b>3. Problema Físico e Formulação Matemática</b> .....	<b>15</b>
<b>3.1 Descrição do problema físico</b> .....	<b>15</b>
<b>3.2 Formulação matemática</b> .....	<b>16</b>
<b>3.3 Problema direto</b> .....	<b>16</b>
<b>3.4 Definições dos problemas inversos estudados</b> .....	<b>17</b>
<b>4. Materiais e Métodos</b> .....	<b>18</b>
<b>4.1 Estratégia nodal e modelo preditivo para a solução do problema inverso</b> .....	<b>18</b>
<b>4.2 Problema Inverso</b> .....	<b>22</b>
<b>4.3 Análise dos Coeficientes de Sensibilidade</b> .....	<b>26</b>
<b>4.4 Inferência Bayesiana em Problema Inverso</b> .....	<b>27</b>
<b>4.5 Método de solução do problema inverso Tipo I</b> .....	<b>30</b>
<b>4.5.1 Cadeia de Markov</b> .....	<b>30</b>
<b>4.5.2 Algoritmo Metropolis-Hastings</b> .....	<b>31</b>
<b>4.5.3 O método de Monte Carlo via Cadeias de Markov aplicado à</b> <b>estratégia nodal</b>	<b>32</b>
<b>4.6 Método de solução do problema inverso Tipo II</b> .....	<b>32</b>
<b>4.6.1 Filtro de Kalman</b> .....	<b>33</b>

4.6.2	O filtro de Kalman aplicado à estratégia nodal.....	36
4.7	Termografia por Câmera de Infravermelho.....	38
4.7.1	Câmera CEDIP Titanium 560M.....	40
4.7.2	Fórmula de Medida.....	41
4.8	Procedimento experimental.....	47
4.8.1	Experimento com aquecimento por resistência elétrica .....	56
4.8.2	Experimento com aquecimento por laser-diodo.....	58
4.9	Tratamento das imagens.....	60
4.9.1	Filtragem.....	60
4.9.2	Corte da imagem .....	62
4.9.3	Determinação da área de leitura por pixel.....	63
5.	Resultados e Discussões .....	65
5.1	Verificação da solução do problema direto.....	65
5.2	Solução do problema inverso do tipo I com medidas simuladas .....	69
5.2.1	Análise de sensibilidade .....	71
5.2.2	Resultados .....	73
5.3	Solução do problema inverso do tipo II com medidas simuladas .....	82
5.3.1	Análise de sensibilidade .....	83
5.3.1	Resultados .....	85
5.4	Solução do problema inverso do tipo I com medidas reais.....	90
5.4.1	Experimento com a resistência elétrica.....	90
5.4.2	Experimento com o laser-diodo .....	101
5.5	Solução do problema inverso do tipo 2 com medidas reais .....	114
5.5.1	Experimento com a resistência elétrica.....	114
5.5.1	Experimento com o laser diodo.....	122
6.	Conclusões.....	135
7.	Referências Bibliográficas .....	138

# Índice de Figuras

Figura 3-1 Esquema do problema físico.....	15
Figura 4-1- Índices da discretização.....	21
Figura 4-2- Minimização do modelo de erro preditivo .....	22
Figura 4-3 Passos de previsão e atualização para o filtro de Kalman .....	36
Figura 4-4 – Espectro Eletromagnético (fonte:www.sbfisica.org.br) .....	39
Figura 4-5 – (a) Câmera Cedip 560M operando no laboratório e (b) imagem do software Altair.....	41
Figura 4-6 – Representação esquemática da situação de medida: 1 – Vizinhança; 2 – Objeto; 3 – Atmosfera; 4 – Câmera.....	42
Figura 4-7 Calibração da Câmera.....	44
Figura 4-8 Curva de calibração típica .....	44
Figura 4-9 Software Calibration File Manager.....	45
Figura 4-10 – Curva de NUC .....	46
Figura 4-11 – Histograma da distribuição de temperatura da câmera.....	46
Figura 4-12 – Desvio padrão para (a) lentes de 50mm e (b) lentes de 10mm.....	47
Figura 4-13 – Metodologia do Disco quente. (a) Posicionamento da Amostra e (b) Detalhe do sensor .....	48
Figura 4-14 – Disco quente operando no Laboratório de Propriedades Térmicas. (a) Visão geral do equipamento e (b) Detalhe do porta-amostra .....	50
Figura 4-15 - Medida da difusividade térmica, de acordo com PARKER <i>et al.</i> (1961). 52	
Figura 4-16 – Experimento Flash (a) Posicionamento da amostra e (b) Montagem do aparato .....	53
Figura 4-17 – Resultado do cálculo da difusividade térmica pelo método de PARKER (1961) .....	53
Figura 4-18 – Curvas de aumento de temperatura adimensionalizadas pela temperatura máxima .....	54
Figura 4-19 – Curvas de aumento de temperatura subtraídas da temperatura no tempo inicial .....	54
Figura 4-20 Netzsch Nanoflash LFA 447/1 .....	55

Figura 4-21 – Amostra de resina com pintura de grafite (superior) e sem pintura (inferior).....	56
Figura 4-22 – Esquema de montagem do experimento utilizando a resistência elétrica (a) Resistência utilizada e (b) Resistência posicionada para o experimento .....	57
Figura 4-23 – Montagem do experimento para a aquisição dos dados (a) Aquisição dos dados e (b) Imagem do aquecimento do corpo de prova obtido com a câmera por infravermelho.....	57
Figura 4-24 – Laser diodo .....	58
Figura 4-25 – Experimento com o laser diodo (a) Aparato montado e (b) amostra posicionada em frente ao colimador.....	59
Figura 4-26 – Laser diodo controlado pelo gerador de função.....	59
Figura 4-27 – Efeito do filtro passa baixo em uma imagem (a) original e (b) filtrada...	61
Figura 4-28 – Comparação da imagem filtrada com a original para linhas particulares.	61
Figura 4-29 – Determinação da área corte da imagem.....	63
Figura 4-30 – Determinação da área de leitura de cada pixel. ....	63
Figura 5-1 – Apresentação gráfica do termo-fonte (a) constante no tempo para o problema do tipo I e (b) variando no tempo para o problema do tipo II.....	66
Figura 5-2 – Perfil de temperatura em (a) $x = 0.0025$ m e $y = 0.0026$ m e (b) $x = 0.0038$ m e $y = 0.0030$ m para a validação do problema direto para o problema do tipo I.	67
Figura 5-3 – Perfil de temperatura em (a) $x = 0.0025$ m e $y = 0.0026$ m e (b) $x = 0.0038$ m e $y = 0.0030$ m para a validação do problema direto para o problema do tipo II.	67
Figura 5-4 – Resíduo em (a) $x = 0.0025$ m e $y = 0.0026$ m e (b) $x = 0.0038$ m e $y = 0.0030$ m para a validação do problema direto para o problema do tipo I. ....	68
Figura 5-5 - Resíduo em (a) $x = 0.0025$ m e $y = 0.0026$ m e (b) $x = 0.0038$ m e $y = 0.0030$ m para a validação do problema direto para o problema do tipo II.....	68
Figura 5-6 – (a) Materiais $A$ e $B$ em um meio quadrado periódico (b) Distribuição de $G_{i,j}$ (c) Distribuição de $H_{i,j}$ .....	70
Figura 5-7 – (a) Campo de temperatura inicial e (b) de temperatura final, em $t=2s$ .....	71
Figura 5-8 – Coeficiente de sensibilidade normalizado para um pixel no material (a) $A$ e (b) $B$ .....	72
Figura 5-9 – Determinante de $\mathbf{J}_{i,j}^T$ , $\mathbf{J}$ para diferentes modelos no material (a) $A$ e (b) em $B$ .....	73

Figura 5-10 – Taxa de aceitação do algoritmo de MH para (a) $\sigma = 0.03$ °C e (b) $\sigma = 0.2$ °C.....	74
Figura 5-11 Mapeamento da difusividade térmica para $\sigma = 0.03$ °C (a) com OLS e (b) com MH.....	74
Figura 5-12 Mapeamento de $G_{i,j}$ para $\sigma = 0.03$ °C (a) com OLS e (b) com MH.....	75
Figura 5-13 – Comparação dos perfis de difusividade térmica estimados na linha $i = 55$ . .....	75
Figura 5-14 – Distribuição posteriori para o pixel (84,49) (a) difusividade térmica (b) $G_{i,j}$ .....	76
Figura 5-15 – Evolução das cadeias de Markov (a) difusividade térmica (b) termo fonte .....	76
Figura 5-16 - Mapeamento da difusividade térmica para $\sigma = 0.2$ °C (a) com OLS e (b) com MH.....	77
Figura 5-17 – Perfis para a linha $i = 55$ (a) difusividade térmica e (b) $G_{i,j}$ .....	78
Figura 5-18 - Mapeamento de $G_{i,j}$ para $\sigma = 0.2$ °C (a) com OLS e (b) com MH .....	78
Figura 5-19 –Meio com Falha (a) difusividade térmica e (b) $G_{i,j}$ .....	79
Figura 5-20 – (a) campo de temperatura inicial e (b) campo de temperatura final .....	79
Figura 5-21 – Mapeamento da difusividade térmica com uma falha (a) OLS e (b) algoritmo de MH .....	80
Figura 5-22 – Mapeamento de $G_{i,j}$ com uma falha (a) OLS e (b) algoritmo de MH .....	80
Figura 5-23 – Mapeamento do desvio padrão posteriori (a) OLS e (b) algoritmo de MH .....	81
Figura 5-24 – (a) Distribuição espacial de $G_m$ em $t=0.25$ s e (b) variação espacial de $G_m$ em $x = 0.0175$ m, $y = 0.0165$ m .....	82
Figura 5-25 – Campo de temperatura final em $t=1.4$ s.....	83
Figura 5-26 – Coeficiente de sensibilidade reduzido em $x=0.0175$ m, $y=0.0145$ m. ....	83
Figura 5-27 – Determinante de $J^T J$ em $x = 0.0175$ m e $y = 0.0145$ m .....	84
Figura 5-28 – (a) Variações de temperatura em (a) $x=0.005$ m, $y = 0.016$ m e (b) $x = 0.0175$ m, $y = 0.0145$ m.....	85
Figura 5-29 – Variação dos resíduos em (a) $x = 0.005$ m, $y = 0.016$ m e (b) $x = 0.0175$ m, $y = 0.0145$ m .....	86
Figura 5-30 – Termo fonte estimado na linha (a) $x = 0.01$ m e $t = 0.96$ s e (b) $y = 0.02$ m e $t=0.96$ s .....	86

Figura 5-31 – Termo fonte estimado em todo o meio no tempo $t=0.96s$ .....	87
Figura 5-32 – Termo fonte estimado em (a) $x = 0.022$ m, $y = 0.015$ m e (b) $x = 0.0175$ m, $y = 0.0145$ m .....	87
Figura 5-33 – Desvio padrão médio para a imagem filtrada. ....	89
Figura 5-34 – Aquecimento pela resistência elétrica.....	89
Figura 5-35 – Aquecimento pelo laser-diodo .....	90
Figura 5-36 – Área escolhida para o corte na imagem.....	91
Figura 5-37 – (a) Distribuição inicial de temperatura e (b) pontos escolhidos para traçar os resultados .....	92
Figura 5-38 – Taxa de aceitação para o algoritmo de MH. ....	93
Figura 5-39 – Estimação da difusividade térmica pelo método de (a) OLS e (b) MCMC .....	93
Figura 5-40 – Desvio padrão para a estimação da difusividade térmica para (a) OLS e (b) MH .....	94
Figura 5-41 – Estimação de $G_{i,j}$ para o método de OLS .....	95
Figura 5-42 – Estimação de $G_{i,j}$ para o algoritmo de MH.....	95
Figura 5-43- Comparação da estimação do parâmetro $G$ para o método de OLS e MH	96
Figura 5-44 – Evolução das cadeias de Markov para $\alpha_{38,40}$ e $\alpha_{64,60}$ .....	96
Figura 5-45 – Evolução das cadeias de Markov para $H_{38,40}$ e $H_{64,60}$ .....	97
Figura 5-46 - Evolução das cadeias de Markov para $G_{38,40}$ e $G_{64,60}$ .....	97
Figura 5-47 – Distribuição posteriori nos pixels (30,90) e (58,59) .....	98
Figura 5-48 – Comparação da estimação de $\alpha_{ij}$ ao longo de linhas particulares. ....	99
Figura 5-49 – Comparação da temperatura calculada com os parâmetros estimados e a temperatura medida. ....	100
Figura 5-50 – Resíduos entre a temperatura medida e a calculada com os parâmetros estimados em pixels particulares. ....	100
Figura 5-51 – Estimação do parâmetro $H$ para (a) OLS e (b) MH.....	101
Figura 5-52 – (a) Distribuição inicial de temperatura e (b) pontos escolhidos para traçar os resultados .....	102
Figura 5-53 - Taxa de aceitação para o algoritmo de MH.....	103
Figura 5-54 Estimação da difusividade térmica pelo método de (a) OLS e (b) MCMC .....	104

Figura 5-55 – Temperatura calculada com os métodos de OLS e MCMC ao longo de linhas particulares do meio.....	105
Figura 5-56 – Área escolhida para o cálculo do valor médio dos parâmetros.....	106
Figura 5-57 – Desvio padrão para a estimação da difusividade térmica para (a) OLS e (b) MH.....	106
Figura 5-58 – Estimação de $G_{i,j}$ para OLS.....	107
Figura 5-59 - Estimação de $G_{i,j}$ para o algoritmo de MH.....	108
Figura 5-60 - Evolução das cadeias de Markov para $a_{45,64}$ e $a_{55,40}$ .....	108
Figura 5-61 - Evolução das cadeias de Markov para $H_{15,55}$ e $H_{38,44}$ .....	109
Figura 5-62 - Evolução das cadeias de Markov para $G_{45,64}$ e $G_{55,40}$ .....	109
Figura 5-63 - Distribuição posteriori nos pixels (45,64) e (55,40).....	110
Figura 5-64 - Comparação da estimação de $\alpha_{ij}$ ao longo de linhas particulares. ....	110
Figura 5-65 - Comparação da temperatura calculada com os parâmetros estimados e a temperatura medida. ....	111
Figura 5-66 - Resíduos entre a temperatura medida e a calculada com os parâmetros estimados em pixels particulares. ....	112
Figura 5-67 – Estimação do parâmetro $H$ para (a) OLS e (b) MH.....	113
Figura 5-68 – Área escolhida para o corte na imagem.....	115
Figura 5-69 – (a) Distribuição inicial de temperatura e (b) pontos escolhidos para traçar os resultados .....	116
Figura 5-70 - Variações de temperatura em pixels particulares.....	117
Figura 5-71 - Variação dos resíduos em pixels particulares.....	118
Figura 5-72 – Termo fonte estimado em todo o meio no tempo $t=13s$ .....	119
Figura 5-73 – Cartografia do termo fonte em $t = 13s$ .....	119
Figura 5-74 - Pontos escolhidos para traçar os resultados de $G_{i,j}^n$ .....	120
Figura 5-75 - Termo fonte estimado em pixels particulares comparados com o perfil de temperatura. ....	121
Figura 5-76 - Termo fonte estimado em pixels particulares comparados com o valor da potência dissipada pela resistência. ....	121
Figura 5-77 – (a) Distribuição inicial de temperatura e (b) pontos escolhidos para traçar os resultados .....	122
Figura 5-78 - Variações de temperatura em pixels particulares.....	123
Figura 5-79 - Variação dos resíduos em pixels particulares.....	124



Figura 5-80 – Termo fonte estimado em todo o meio no tempo $t=13s$ .....	125
Figura 5-81 – Cartografia do termo fonte em $t = 13s$ .....	125
Figura 5-82 - Pontos escolhidos para traçar os resultados de $G_{ij}^n$ .....	126
Figura 5-83 - Termo fonte estimado em pixels particulares comparados com o perfil de temperatura. ....	127
Figura 5-84 – (a) Distribuição inicial de temperatura e (b) pontos escolhidos para traçar os resultados .....	128
Figura 5-85 - Variações de temperatura em pixels particulares .....	129
Figura 5-86 - Variação dos resíduos em pixels particulares.....	130
Figura 5-87 – Termo fonte estimado em todo o meio no tempo $t=13s$ .....	131
Figura 5-88 – Cartografia do termo fonte em $t = 13s$ .....	131
Figura 5-89 - Pontos escolhidos para traçar os resultados de $G_{ij}^n$ .....	132
Figura 5-90 - Termo fonte estimado em pixels particulares comparados com o perfil de temperatura. ....	133

# Lista de Símbolos

- $a$  – número de nós na discretização espacial
- $A$  - aproximação para os gradientes de temperatura nas interfaces
- $C$  - capacidade térmica volumétrica –  $J/(m^3K)$
- $D$  – resistência elétrica -  $\Omega$
- $E$  – matriz de covariância da predição do estado para o filtro de Kalman
- $e$  – espessura - m
- $F$  – matriz de evolução de estados do filtro de Kalman
- $g$  - termo fonte de energia por unidade de área –  $W/m^2$
- $G$  - parâmetro relacionado ao termo fonte –  $K/s$
- $h$  – iteração na solução do problema inverso
- $h$  - coeficiente de transferência de calor combinado convecção/radiação –  $W/(m^2C)$
- $H$  – matriz de evolução de medidas para o filtro de Kalman
- $H$  - parâmetro relacionado à transferência de calor combinada convecção/radiação- $s^{-1}$
- $I$  – ponto final da malha relacionado à variável espacial  $x$
- $J$  - ponto final da malha relacionado à variável espacial  $y$
- $J$  - Coeficiente de sensibilidade
- $J$  - matriz de sensibilidade
- $K$  – matriz de ganho de Kalman
- $K$  - número de medidas no tempo
- $k$  - condutividade térmica –  $W/(mK)$
- $L$  – comprimento - m
- $L_x$  - comprimento da placa - m
- $L_y$  - largura da placa - m
- $n$  – incerteza da medida para o filtro de Kalman
- $M$  – número total de nós na malha espacial ( $L_x \times L_y$ )
- $N$  – Número total de parâmetros
- $p$  – distribuição de probabilidade
- $P$  – vetor de parâmetros
- $Q$  – matriz de covariância do modelo de evolução de estados
- $R$  – matriz de covariância do modelo de medidas
- $r$  – erro preditivo

$r$  – raio - m  
 $S$  - função objetivo  
 $T$  – temperatura - °C  
 $t$  – tempo - s  
 $U$  – sinal de saída da câmera por infravermelho  
 $\mathbf{v}$  – incerteza do estado do filtro de Kalman  
 $\mathbf{V}$  - matriz de covariâncias dos parâmetros  
 $\mathbf{x}$  – vetor de estados do filtro de Kalman  
 $x$  - variável espacial  
 $y$  - variável espacial  
 $\mathbf{y}$  – vetor de dados experimentais  
 $\mathbf{Y}$  – diferença de temperatura em dois passos de tempo subsequentes  
 $\mathbf{W}$  - inverso da matriz de covariâncias das medidas  
 $z$  - variável espacial  
 $Z$  – número de estados da cadeia de Markov

### **Gregas**

$\alpha$  - difusividade térmica – mm<sup>2</sup>/s  
 $\beta$  - razão de Hastings  
 $\varepsilon$  – emissividade da amostra  
 $\lambda$  – offset do pixel  
 $\Lambda$  – aproximação por diferenças finitas do Laplaciano da temperatura  
 $\gamma$  – erro de medida  
 $\eta$  – ganho no pixel  
 $\mu$  – média  
 $\psi$  – transmissividade da atmosfera  
 $\rho$  - coeficiente de correlação  
 $\sigma$  - desvio padrão  
 $\delta$  - gradiente da condutividade térmica na interface

### **Sobrescrito**

$T$  – transposta de uma matriz  
 $n$  – ponto no tempo

### **Subscrito**

$b$  – parâmetro  $P_b$

$i$  – ponto do nó na malha relacionado à variável espacial  $x$

$j$  - ponto do nó na malha relacionado à variável espacial  $y$

$n$  –tempo  $t_n$

$z$  – estado da cadeia de Markov

# 1. Introdução

## 1.1 Motivação e Objetivos

A estimação de propriedades termofísicas que variam com a posição e com o tempo, a partir de imagens térmicas obtidas por câmeras de termografia por infravermelho, é um problema inverso complexo. Esta dificuldade advém da grande quantidade de dados a serem tratados, estes com uma baixa relação sinal/ruído e a grande quantidade de parâmetros a serem estimados. Desta maneira, a implementação de técnicas de estimação linear são de grande importância na redução dos custos computacionais e na obtenção da solução do problema inverso em um tempo factível.

A minimização de um modelo de erro preditivo ao invés do modelo tradicional de erro de saída (LJUNG, 1999) tem sido usada com êxito para tal propósito fazendo uso da chamada estratégia nodal, com dois enfoques diferentes, que são: (i) O uso de algoritmos de estimação local, baseados na correlação entre pixels (BAMFORD *et al.*, 2008, BATSALE *et al.*, 2004, BAMFORD *et al.*, 2009, PRADERE *et al.*, 2008, PRADERE *et al.*, 2004); (ii) e o uso de técnicas Bayesianas (FUDYM *et al.*, 2008, MASSARD *et al.*, 2010, MASSARD *et al.*, no prelo). Infelizmente, em ambos os enfoques a matriz de sensibilidade é calculada a partir de operações lineares dos dados experimentais, e o efeito das incertezas no algoritmo de estimação devem ser incorporadas no problema inverso (BAMFORD *et al.*, 2008). Por outro lado, o uso de técnicas de inferência Bayesianas permite que informação a priori das quantidades desconhecidas sejam levadas em conta, incluindo a matriz de sensibilidade com seu comportamento estocástico (FUDYM *et al.*, 2008, MASSARD *et al.*, 2010 e MASSARD *et al.*, no prelo ).

A miniaturização é a principal tendência na ciência e tecnologia moderna. Uma variedade de produtos em microescala já estão disponíveis, ou logo estarão. Sensores, atuadores, motores, válvulas, tubos de calor, células combustível, instrumentos, dispositivos médicos e robôs são apenas algumas das quase intermináveis variedades de microprodutos no mercado, ou a caminho de sair do laboratório para o mercado (CHOI, 1998). Na área de transferência de calor, engenheiros fabricam dispositivos em microescala, como trocadores de calor com microcanais e microbombas (CHOI, 1998).

Devido ao crescente desenvolvimento de sistemas em miniatura a determinação precisa das propriedades termofísicas e de termos-fonte em micro-escala se faz necessário. Devido à possibilidade do modelo estudado neste trabalho descrever a difusão de calor em micro-escala, este trabalho pode também ser aplicado a problemas de determinação de propriedades termofísicas e termos-fonte em meios com dimensões reduzidas.

O principal objetivo dos problemas diretos é o de determinar o campo de temperatura no meio, quando todas as *características causais* (condição de contorno, propriedades termofísicas, etc.) são especificadas. Por outro lado, o objetivo do problema inverso é o de estimar uma ou mais dessas características causais, a partir da medida da resposta do sistema, como o campo de temperatura.

Os métodos determinísticos de solução de problemas inversos baseados na minimização da norma de mínimos quadrados levam a uma estimação pontual, sem considerar a natureza estatística das incertezas, e sem quantificar as incertezas na solução inversa. Por outro lado, a inferência Bayesiana fornece a solução do problema inverso formulando uma descrição probabilística completa dos parâmetros desconhecidos e das incertezas associadas, dados os valores experimentais de temperatura.

A minimização de erros experimentais na medida de temperatura é de extrema importância para a solução do problema inverso, pois estes são matematicamente classificados como mal-postos, ou seja, sua solução é muito sensível a erros experimentais. A termografia por câmera de infravermelho apresenta um poderoso meio de aquisição de uma grande quantidade de dados, com baixa incerteza, além de apresentar a vantagem de realizar medidas não intrusivas no meio estudado.

Desta maneira, este trabalho pretende avançar na área da estimação de parâmetros e/ou funções pertinentes tanto em micro-escala quanto em macro-escala, utilizando medidas não intrusivas realizadas com uma câmera de termografia por infravermelho. A originalidade deste trabalho reside na combinação do uso da estratégia nodal aplicada ao problema inverso via inferência Bayesiana, tanto para um termo fonte constante no tempo como para um termo fonte que varia temporalmente, e em ambos os casos variando no espaço. Dessa forma, uma metodologia atraente pode ser fornecida para a estimação de um termo fonte ou propriedades termofísicas locais usando um grande número de medidas.

Esta tese foi desenvolvida em cotutela entre a Universidade Federal do Rio de Janeiro, no Laboratório de Transmissão e Tecnologia do Calor da COPPE/UFRJ e a Escola de Minas de Albi-Carmaux (EMAC), no Laboratório de Microfluidos do Centro de Pesquisa de Albi em Engenharia de Processos, Sólidos Segregados, Energia e Meio Ambiente - RAPSODEE.

## **1.2 Organização do Texto**

O capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica de problemas inversos, mostrando alguns aspectos relevantes deste método, sua definição e suas características relativas à estimação de parâmetros, o uso da inferência Bayesiana e suas vantagens em problemas inversos e finalmente a utilização da câmera por infravermelho para medidas de temperatura em algumas áreas de aplicação.

O capítulo 3 apresenta o problema direto que descreve a física do problema estudado, sua formulação matemática e as definições dos tipos de problema inverso que foram utilizadas.

O capítulo 4 apresenta a metodologia de solução do problema direto, a solução do problema inverso pela estratégia nodal, derivação do processo de estimação via inferência Bayesiana e os métodos de solução do problema inverso segundo o comportamento temporal do termo-fonte. Também é apresentado neste capítulo o método de funcionamento da câmera de termografia por infravermelho. São apresentados os procedimentos experimentais para a realização dos experimentos com uma resistência elétrica e com um laser diodo, mostrando as vantagens de cada uma das maneiras de realizar o aquecimento da amostra. O tratamento feito nas imagens antes delas serem carregadas no programa para a determinação dos parâmetros são mostrados.

O capítulo 5 apresenta a verificação do problema direto usado neste trabalho, bem como a validação dos dois tipos de problema inverso. É feita uma análise de sensibilidade para a determinação da possibilidade da estimação dos parâmetros de interesse. Resultados para a solução dos problemas inversos envolvendo termos-fonte constante e variando no tempo são mostrados, tanto para medidas simuladas quanto para medidas experimentais reais.

## 2. Revisão Bibliográfica

A presente seção apresenta uma revisão bibliográfica dos trabalhos disponíveis na literatura para os principais temas tratados nesta tese, que são: Problemas Inversos, Inferência Bayesiana, o Filtro de Kalman e a utilização da termografia por infravermelho em problemas inversos de transferência de calor.

### 2.1 Problemas Inversos

Problemas inversos em transferência de calor normalmente podem estar associados à determinação das propriedades termofísicas ou fluxo de calor dadas as medidas experimentais de temperatura. O principal objetivo do problema direto é o de determinar o campo de temperatura  $T(x,y,z,t)$ , quando todas as características causais (condição de contorno, condição inicial, propriedades termofísicas do meio, e termo de geração de energia, se existir) são conhecidas. Por outro lado, o objetivo do problema inverso é o de estimar uma ou mais dessas características causais, a partir do conhecimento da temperatura medida (o efeito) em uma determinada região do domínio.

Problemas inversos podem ser resolvidos como uma metodologia de estimação de parâmetros ou de função. Se existir alguma informação sobre a forma funcional das quantidades desconhecidas, o problema inverso é reduzido à estimação de alguns parâmetros desconhecidos (OZISIK e ORLANDE, 2000).

Porém existem dificuldades associadas à solução de problemas inversos em transferência de calor. Matematicamente, eles pertencem à classe de problemas *mal-postos*, enquanto problemas de transferência de calor tradicionais são *bem-postos*. Para problemas de transferência de calor serem *bem-postos* sua solução deve existir ser única e deve ser estável sob pequenas alterações dos dados de entrada (OZISIK e ORLANDE, 2000). A solução de alguns problemas inversos de transferência de calor são asseguradas por razões físicas; por exemplo, se existe uma mudança nos valores da temperatura medida em um problema transiente, existe uma característica causal, como um fluxo de calor no contorno. Por outro lado, a unicidade da solução do problema inverso pode ser matematicamente provada somente para alguns casos. E de uma maneira geral, a estabilidade da solução somente é satisfeita com a utilização de alguma técnica de regularização.

Por um longo período achou-se que o problema inverso de transferência de calor não teria solução caso alguma condição para o problema ser bem-posto fosse violada. O procedimento de regularização de Tikhonov, o processo iterativo de Alifanov e o método de estimação de função de Beck contornaram esta limitação (OZISIK e ORLANDE, 2000).



O interesse na técnica de estimação de parâmetro por problemas inversos aumentou de forma significativa no final dos anos 50 e início dos anos 60 na chamada Era Espacial. O aquecimento de veículos espaciais é tão grande durante a reentrada na atmosfera que a temperatura no escudo térmico não pode ser medida diretamente com sensores de temperatura. Dessa forma, sensores são posicionados abaixo da superfície quente e a temperatura é determinada por análise inversa (OZISIK e ORLANDE, 2000). Devido ao grande número de trabalhos disponíveis na literatura, a revisão se limitou apenas aos considerados mais pertinentes ao presente trabalho.

BECK e ARNOLD (1977) publicaram um livro texto em estimação de parâmetros que se tornou referência na área. O livro trata da estimação linear e não linear de parâmetros, introduz conceitos de probabilidade e estatística e apresenta métodos clássicos, como o método de Mínimos Quadrados. São apresentados conceitos importantes no contexto de estimação de parâmetros, como o de coeficientes de sensibilidade e do projeto de experimento ótimo. Nessa época, os autores já apresentavam técnicas de inferência Bayesiana, como teorema de Bayes e métodos de Monte Carlo.

BECK *et al.* (1996) compararam diversos métodos para a determinação do fluxo de calor usando medidas transientes de temperatura. Dados experimentais foram usados, o que segundo os autores era uma lacuna existente em livros-texto de problemas inversos da época. Dentre os métodos apresentadas estão o de especificação de função, o de regularização de Tikhonov e o de regularização iterativa de Alifanov. O método dos Mínimos Quadrados Ordinários foi usado para a minimização da função objetivo. Os resultados apresentaram excelente concordância entre o fluxo de calor (conhecido) aplicado por uma resistência elétrica e o estimado pelos métodos estudados.

WANG *et al.* (2002) estimaram um termo fonte volumétrico usando o método de regularização iterativa de Alifanov. Foram apresentados resultados para formulação linear e não linear do problema de condução de calor. Para o problema não linear, foi considerada uma condutividade térmica variando com a temperatura. Os autores usaram o método do Gradiente Conjugado para a estimação do termo fonte.

HUANG e WANG (1999) estimaram o fluxo de calor em um domínio irregular tridimensional em regime transiente. O método inverso utilizado foi o do Gradiente Conjugado. Os autores derivaram a formulação do método para a estimação de uma condição de contorno, sem informação a priori da forma funcional dos parâmetros estimados. Na solução do problema direto foi usada a solução presente no código comercial CFX 4.2 pelo método dos volumes de controle. As medidas de temperatura foram simuladas e assumidas como sendo feitas por uma câmera por infravermelho em uma das faces amostra, como a técnica utilizada neste trabalho. Os autores usaram uma malha de 12 por 12 nós em  $x$  e  $y$  e 6 em  $z$ . Para o tempo, foram escolhidos 24 passos de tempo. Foi usado um número reduzido de nós espaciais e passos de tempo para não haver um grande custo computacional.

ORLANDE e OZISIK (2000) em seu livro texto analisam o formalismo de diversos casos envolvendo o estudo de problemas inversos. São derivados algoritmos para a solução de problemas inversos em condução de calor para a estimativa de funções e parâmetros, além da solução de métodos, tais como o método de Levenberg-Marquardt e o método do Gradiente Conjugado. É feita uma apresentação de conceitos como o do coeficiente de sensibilidade e análise do determinante da matriz de informação de Fisher e sua importância para a solução de problemas inversos. Grande parte das definições presentes nesta tese foi pautada neste livro.

SU e NETO (2001) estimaram a dependência circunferencial e radial da potência de um termo fonte em uma haste cilíndrica. Esta haste é aquecida e transfere calor por convecção para um fluido que a circunda. O problema inverso é resolvido pelo método do Gradiente Conjugado. O método de regularização iterativa de Alifanov foi utilizado. Os dados experimentais de temperatura foram simulados para a solução do problema inverso. Foram testadas várias posições e número de sensores para a leitura do campo de temperatura. Os autores concluíram que um excesso de sensores pode provocar uma degradação nos valores estimados.

HON e WEI (2004) desenvolveram um esquema numérico sem malha e sem integração para a solução de um problema inverso de condução de calor. Segundo os autores, o grande número de nós em uma malha pode resultar em um grande esforço computacional, além de questões de instabilidade numérica. Desta forma propuseram um esquema numérico sem malha baseado no uso de soluções fundamentais como funções de base radial. Assim, a solução proposta por eles somente necessita satisfazer a condição de contorno e os dados de medida. Foram utilizadas medidas simuladas para a estimação de um termo fonte em um problema unidimensional transiente. A regularização do sistema de equações mal-posto linear é feito com o uso do método de Tikhonov para obter uma aproximação numérica estável.

VOLLE *et al.* (2009) analisaram a solução de um problema inverso linear em condução de calor bidimensional transiente em uma geometria cilíndrica. O cilindro rotativo está sujeito a ebulição convectiva pelo impacto de um jato de água. O trabalho focou na determinação do fluxo de calor na parede do cilindro. O método inverso para a estimativa do fluxo de calor foi o de mínimos quadrados com regularização pelo método dos passos futuros de Beck. Os autores usaram medidas simuladas para a estimação do fluxo de calor e também testaram um experimento usado para o mesmo fim. O artigo apresenta a derivação do perfil de temperatura obtido pela transformada de Laplace. Foi feita uma detalhada quantificação dos erros para serem levados em conta no resultado da estimação. Estes foram os erros de medida, os erros na solução pela transformada de Laplace, erros no posicionamento dos termopares e finalmente o erro na suposição de propriedades constantes com a variação de temperatura.

CHENG *et al.* (2007) estimaram a distribuição tridimensional de temperatura de uma esfera oca à partir de medidas de temperatura em um ponto fixo dentro da esfera. Um método modificado da regularização de Tikhonov é implementado. Como os autores são matemáticos, o trabalho apresenta uma extensa prova da convergência e a teoria da estabilidade proposto.

## **2.2 Inferência Bayesiana em Problemas Inversos**

Geralmente a regularização tem por objetivo a minimização da norma de mínimos quadrados. Do ponto de vista estatístico, esta minimização é relacionada ao estimador de máxima verossimilhança se as seguintes hipóteses estatísticas são válidas: Os erros nas variáveis medidas são aditivos, não-correlacionados, distribuídos normalmente, com média zero e desvio padrão constante. Se o problema inverso envolve a estimação de apenas alguns parâmetros desconhecidos como a condutividade térmica uniforme de um objeto, a minimização da norma de mínimos quadrados normalmente é estável. Entretanto, se o objetivo é a estimação de um grande número de parâmetros, como a distribuição da condutividade térmica em um objeto, o problema é mal-posto, e métodos de mínimos quadrados não são indicados. Neste caso, técnicas de regularização são necessárias, como a regularização de Tikhonov ou métodos iterativos, como o de Landweber ou Alifanov. Uma característica comum dos métodos de regularização é que eles forcem a estabilidade modificando o problema de mínimos quadrados, e dessa maneira não são baseados em uma análise explícita da modelagem dos parâmetros desconhecidos (KOLEHMAINEN *et al.* 2007).

A inferência Bayesiana é baseada na construção de modelos separados para as medidas e para a informação a priori sobre os parâmetros. O problema inverso é reformulado como um problema de inferência Bayesiana. As medidas e os parâmetros são modelados como variáveis aleatórias. A aleatoriedade, que reflete a incerteza do observador, está inserida no modelo de distribuição de probabilidade dos parâmetros. Com base na inferência Bayesiana, a solução do problema inverso é a distribuição de probabilidade a posteriori dos parâmetros de interesse, quando toda informação disponível é incorporada ao modelo. Enquanto técnicas de regularização são focadas na obtenção de estimativas dos parâmetros desconhecidos baseados nos dados disponíveis, na inferência Bayesiana a solução do problema inverso não é considerada como uma simples estimação pontual, mas na forma de uma distribuição posteriori que pode ser usada para obter estimativas pontuais e medidas confiáveis para as incertezas relacionadas com os parâmetros, dados os modelos e as medidas (KOLEHMAINEN *et al.* 2007).

Neste contexto, para a estimação via inferência Bayesiana, são apresentados artigos e livros textos que apresentam a técnica desde a apresentação do algoritmo de Metropolis-Hastings até a utilização desta metodologia de estimação de parâmetros aplicada à determinação de propriedades termofísicas e termos-fonte. Foi observada uma maior publicação a partir dos anos 2000, devido ao

significativo avanço da capacidade de processamento dos computadores modernos, permitindo que a técnica fosse usada com mais frequência.

HASTINGS (1970) realizaram uma generalização do método de amostragem introduzido por Metropolis em um artigo publicado anteriormente (METROPOLIS *et al* 1953 *apud* HASTINGS 1970). Foi apresentada a teoria relevante, técnicas de aplicações e métodos e dificuldades para estimar o erro na estimativa de Monte Carlo. Segundo o autor, para problemas numéricos com um grande número de dimensões, os métodos de Monte Carlo são mais eficientes do que métodos numéricos convencionais. Entretanto, a implementação desses métodos requerem a amostragem de uma distribuição de probabilidade de grande dimensão, o que pode ser muito difícil e custoso em análise e tempo computacional, especialmente à época, quando os computadores ainda não apresentavam o desempenho dos dias atuais. O autor apresentou alguns métodos para amostragem, ou para a estimativa da expectativa de tais distribuições, que são: (i) a fatoração da distribuição no produto de uma distribuição unidimensional a partir da qual a amostragem deve ser feita, (ii) usar amostragem por importância, (iii) usar técnicas de simulação, isto é, se a amostragem direta da distribuição de interesse for difícil ou se ela for desconhecida, usa-se uma outra distribuição, e obtêm-se os valores dessa amostragem como função da amostragem de interesse. No artigo apresentado pelos autores, considerou-se os métodos de cadeias de Markov para amostragem que são generalizações do método proposto por METROPOLIS *et al.* 1953 *apud* HASTINGS 1970.

GAMERMAN (1996) em seu livro texto apresenta a técnica de Monte Carlo via Cadeias de Markov. São apresentados conceitos de inferência Bayesiana e cadeias de Markov. É apresentado o amostrador de Gibbs, e o algoritmo de Metropolis Hastings. São apresentadas discussões sobre implementações, convergência e limitações desses algoritmos.

KAPIO e SOMERSALO (2004a) apresentam em seu livro texto desde conceitos básicos e clássicos de problemas inversos como a estimativa por Máxima Verossimilhança e o método do Gradiente Conjugado. São apresentados os métodos de regularização clássicos como a regularização de Tikhonov e métodos iterativos de regularização, como o método de Landweber-Fridman e o de Kaczmarz. Os métodos estatísticos de inferência são apresentados para problemas de estimação de parâmetros distribuídos espacialmente. São apresentados os filtros de Kalman e o de Partículas.

WANG e ZABARAS (2004a) apresentaram um método baseado na inferência Bayesiana para a solução de problemas inversos estocásticos em transferência de calor. O algoritmo de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) foi explorado para a obtenção das estimativas das estatísticas dos parâmetros desconhecidos. Segundo os autores, as técnicas tradicionais determinísticas para a minimização da função objetivo com métodos de regularização fornecem uma estimativa pontual, enquanto técnicas Bayesianas fornecem uma solução inversa completa que fornece a quantificação

das incertezas. Além disso, eles citam três vantagens críticas dos métodos estatísticos de inferência Bayesiana: (i) A incorporação da distribuição da verossimilhança e da priori permite uma descrição probabilística completa dos parâmetros desconhecidos; (ii) a regularização é inerente aos métodos Bayesianos e (iii) na inferência Bayesiana o problema direto é resolvido deterministicamente, com as incertezas levadas em conta pela inferência estatística. Foi apresentada uma aplicação da inferência Bayesiana para problemas de transferência de calor. A verossimilhança e a priori foram consideradas com tendo uma distribuição normal. Desta forma, a distribuição posteriori pode ser interpretada com um balanço entre a confiança na priori dos parâmetros e a informação contida nos dados (verossimilhança). Dessa maneira, modelos de priori mais precisos, ou medidas mais acuradas podem levar a melhores resultados da estimação. Consequentemente, vantagens adicionais podem ser citadas: (i) quando o número de medidas é limitado, resultados acurados da distribuição posteriori ainda é possível pela atualização da probabilidade a priori; e (ii) o conhecimento a priori dos parâmetros é capaz de corrigir os efeitos de dados com Bias. Foi apresentado um caso-teste para a ilustração do uso da inferência Bayesiana em problemas inversos de condução de calor: A estimação da condutividade térmica em um sólido. Medidas simuladas foram usadas. Foram testadas duas formas de informação a priori: Normal e Uniforme. Os melhores resultados obtidos foram para a informação a priori normal, pois este tipo de distribuição contém Bias ao representar o valor verdadeiro do parâmetro desconhecido.

WANG e ZABARAS (2004b) apresentaram a solução de inferência Bayesiana para a solução do problema inverso de condução de calor. A função densidade de probabilidade do fluxo de calor na fronteira é determinada dadas as medidas de temperatura. O estado de espaços posterior é explorado usando o algoritmo de Monte Carlo via Cadeias de Markov. Foram feitos dois casos-teste para a estimação do fluxo de calor: O primeiro foi o caso de um problema unidimensional em regime transiente e o segundo foi um problema bidimensional em regime transiente.

WANG e ZABARAS (2005) estudaram a estimativa de parâmetros e de fluxo de calor usando um método de inferência estatística Bayesiano, levando-se em conta incerteza nos dados de temperatura medidos, localização dos sensores e propriedades termofísicas. Os casos estudados foram a determinação da condutividade térmica em um problema unidimensional em regime transiente, e posteriormente a determinação de um termo fonte que varia no tempo, para o mesmo problema unidimensional em regime transiente. Os autores deram grande contribuição nessa área, com diversos artigos escritos neste domínio, tendo sido um dos pioneiros na aplicação da inferência Bayesiana em problemas inversos em transferência de calor.

KOLEHMAINEN *et al.* (2007) estimaram a capacidade térmica volumétrica e a condutividade térmica. O esquema de medida consiste no aquecimento da amostra em diferentes pontos da superfície, medindo a evolução de temperatura. Os autores propuseram um enfoque baseado nos

dados transientes, no contorno e na modelagem dos parâmetros desconhecidos em campos aleatórios Markovianos. Medidas simuladas foram usadas para a identificação de inclusões em um meio.

MOTA (2007) em sua tese de doutorado realiza uma comparação entre o método de Gauss-MAP e Monte Carlo via Cadeias de Markov para a estimativa do fluxo de calor e propriedades termofísicas em materiais em altas temperaturas. O autor projetou e construiu um aparato experimental para os testes, apresentando resultados teóricos e experimentais para a estimação dos parâmetros.

FUDYM *et al.* (2008) identificaram as propriedades termofísicas dependentes do espaço, e realizaram dessa maneira o mapeamento da difusividade térmica de uma amostra. Foi feita a comparação entre os métodos de Mínimos Quadrados Ordinários, Maximum a Posteriori e Monte Carlo via Cadeias de Markov. Os autores utilizaram a estratégia nodal para tornar a formulação do problema inverso linear, e assim adaptar este método para o uso com câmeras por infravermelho que fornecem uma grande quantidade de dados experimentais. O campo de temperatura inicial foi considerado como tendo uma distribuição inicial espacial randômica, aumentando a relação sinal/ruído. Um caso-tese unidimensional em regime transiente foi simulado para a validação do método, com propriedades termofísicas variando ao longo do domínio do material. As descontinuidades na variação dos parâmetros foram satisfatoriamente estimadas pelo método de MCMC, enquanto os métodos de Maximum a posteriori e OLS falharam para o caso teste apresentado.

NOBREGA *et al.* (2011) usaram o Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov na estimação de parâmetros presentes na equação de transferência de calor por condução em filmes finos de metal sujeitos a um pulso de laser da ordem de femtossegundos. Foram usadas medidas simuladas para a solução do problema inverso. Nesta escala de tempo existe uma condição de não equilíbrio de temperatura entre os elétrons e a estrutura cristalina do metal.

### **2.3 O Filtro de Kalman**

O filtro de Kalman foi originalmente desenvolvido para problemas de comunicação e controle. Ele foi inventado por KALMAN (1960) como uma técnica para previsão e filtragem em sistemas lineares Gaussianos. O filtro de Kalman tem sido muito utilizado em orientação e sistemas de navegação, porém com menos frequência em aplicações em transferência de calor. Esta revisão bibliográfica apresenta livros texto, apostilas elaboradas e artigos lidando com o filtro de Kalman, o filtro de Kalman estendido e o filtro de partículas, com aplicações em transferência de calor e outras áreas de interesse em problemas de estimação de estado.

SORENSEN (1970) discute a teoria de estimação por mínimos quadrados, desde sua concepção por Gauss até sua forma moderna, desenvolvida por Kalman. As contribuições proporcionadas por Gauss são descritas e relacionadas com os desenvolvimentos que foram apresentados à época.

MAYBECK (1979) apresenta no capítulo introdutório de seu livro texto a idéia geral do filtro de Kalman, com exemplos didáticos de sua aplicação, e da importância do seu desenvolvimento mostrando aplicações em sistemas de controle, por exemplo.

JANG *et al.* (1986) usaram dois enfoques para a identificação de parâmetros e estados em sistemas não lineares, usando um exemplo de processo químico. Um deles foi o filtro de Kalman estendido para problemas não lineares. Segundo os autores, o avanço dos computadores renovava o interesse em algoritmos de controle e otimização. Uma reação exotérmica foi usada como exemplo de aplicação para a demonstração do uso do filtro de Kalman estendido para o controle ótimo de sistemas não lineares.

O primeiro trabalho encontrado pelo autor para a estimação de parâmetros em transferência de calor pelo filtro de Kalman foi o escrito por TUAN *et al.*, (1996). Os autores estimaram dois fluxos de calor desconhecidos e que variam com o tempo para um problema de transferência de calor transiente bidimensional. Os outros dois contornos foram considerados isolados. Foram testados três formas para o fluxo de calor: triangular, quadrada e senoidal. Os resultados apresentados mostram que o filtro de Kalman foi capaz de estimar o termo fonte para todos os casos estudados.

JI e JANG (1998) avaliam a aplicação do filtro de Kalman com dados experimentais. O experimento foi feito em uma placa de cobre com uma resistência acoplada. A temperatura foi medida com termopares, e o fluxo de calor determinado por um medidor de fluxo de calor. O fluxo de calor estimado pelo filtro de Kalman foi então comparado com o fluxo de calor medido. Os resultados apresentados pelos autores mostraram boa concordância entre os valores estimados com o filtro de Kalman e os valores medidos.

WELCH e BISHOP (2001) apresentaram em seu livro texto todo o equacionamento do filtro de Kalman, apresentando desde conceitos básicos de estatística, ao filtro de Kalman estendido, que é a versão do filtro de Kalman para problemas não lineares.

GREWAL e ANDREWS (2001) apresentam o filtro de Kalman com aplicações usando a plataforma MATLAB, e a importância do seu desenvolvimento para alguns dos feitos humanos mais marcantes da época, em especial a conquista espacial. O filtro de Kalman estendido também é apresentado neste livro.

RISTIC *et al.* (2004) apresentam em seu livro texto filtros usados para aplicações em rastreamento de alvos. São apresentadas ferramentas para a estimação sequencial pelo método de Monte Carlo, mais conhecidos como filtros de partículas, apresentando uma introdução ao filtro de Kalman.

ORLANDE *et al.* (2008) demonstraram a aplicação de filtros Bayesianos para a estimação de campos transientes de temperatura lineares e não lineares. Para problemas lineares, o filtro de Kalman foi usado, e para problemas não lineares, os autores utilizaram o filtro de partículas. Em ambos os casos, a temperatura estimada com o filtro de Kalman e o filtro de partículas foi mais próxima da temperatura exata do que a temperatura medida. Foi demonstrada a capacidade do método de associar medidas contendo ruídos com informação a respeito da evolução dos estados a fim de obter um resultado levando em conta todas as informações disponíveis.

ORLANDE *et al.* (2011a) apresentaram a descrição de problemas de estimação de estado dentro de uma abordagem Bayesiana. Foram aplicados dois tipos de filtros Bayesianos, o filtro de Kalman para problemas inversos lineares, e o filtro de Partículas para o problema inverso não linear. Os autores estimaram o campo de temperatura transiente usando medidas simuladas. No artigo foi apresentado também um exemplo didático de aplicação de ambos os métodos com dois casos teste: a determinação do campo de temperaturas para um problema com um fluxo de calor constante e o problema da estimação do campo de temperatura e adicionalmente a estimação da forma de um termo fonte que varia no tempo, para o caso de uma rampa e de um degrau.

ORLANDE *et al.* (no prelo) apresentaram um trabalho na mesma linha de ORLANDE *et al.* (2011a), com diversos exemplos de aplicações dos filtros de Kalman e de Partículas. Os exemplos apresentados foram a estimação de um termo fonte transiente (também apresentado em MASSARD *et al.* no prelo), a estimação do campo de temperatura em oleodutos, a estimação de uma fonte linear de calor e a frente de solidificação em um problema de mudança de fase e por fim a estimação de um fluxo de calor em uma fronteira em um problema de convecção natural.

## **2.4 Problemas Inversos utilizando a Termografia por Infravermelho.**

A solução de problemas inversos sempre foi de grande importância para a determinação de parâmetros e funções de uso corrente em engenharia. Com o advento das câmeras de termografia por infravermelho, um novo horizonte foi aberto para esta técnica, permitindo, por exemplo, a realização de maneira direta do mapeamento de propriedades termofísicas de materiais heterogêneos, sem a necessidade da instalação de um grande número de sensores e sem o contato direto com o corpo de prova. Nesta seção será feita uma breve revisão bibliográfica sobre a combinação bem sucedida destas duas técnicas.

LE NILIOT e GALLET (1998) utilizaram termografia por infravermelho para a resolução de um problema inverso de condução de calor bidimensional. O problema direto foi resolvido pelo método de elemento de contorno (BEM). O problema inverso consiste na determinação das condições de contorno ou de um termo fonte dependente do tempo e do espaço. O tipo de câmera usada pelos autores na época consistia em um único sensor conectado a um scanner vertical e horizontal.



KWON *et al.* (2001) desenvolveram um técnica para a determinação da temperatura de interface entre o chip e a ferramenta de corte. Uma câmera de infravermelho foi fixada no carrinho do torno, e fez medidas transientes de temperatura no resfriamento.

BAMFORD (2007) em sua tese de doutorado determinou a cartografia de um meio heterogêneo assim como as propriedades termofísicas locais. Foi utilizado o método Flash para a determinação simultânea da difusividade térmica e velocidade de deslocamento da amostra. Para a leitura do campo de temperatura foi utilizada a termografia por infravermelho. Para a compressão dos dados, o autor utilizou a ferramenta estatística de análise decomposição de valores singulares (SVD). Foi apresentada também a determinação das propriedades termofísicas de corpos de provas sujeitos a esforços mecânicos.

BATSALE *et al.* (2004) desenvolveram um metodologia não destrutiva para a determinação de falhas em materiais, como o *flying spot*, ou então uma excitação térmica aleatória na face frontal da amostra. Além do mais, alguns métodos de processamento das imagens infravermelhas resultantes do experimento são mostrados. Os autores consideraram que a determinação da localização da falha é equivalente a realizar a cartografia de difusividade térmica do meio, e associar a falha aos pontos onde esta difusividade é igual à do ar. O problema direto é resolvido pelo método de diferenças finitas. A metodologia foi validada com medidas simuladas, e aplicadas a um caso com medidas reais.

PRADERE *et al.* (2004) estimaram o termo fonte proveniente de uma reação química dentro de um microreator microfluídico. O campo de temperatura foi obtido com uma câmera por infravermelho. Um primeiro experimento foi realizado para a validação e caracterização do aparato usado. Um aquecimento induzido por uma resistência foi usado para o cálculo do número de Peclet local. De posse desse parâmetro caracterizado para o dispositivo, os autores realizaram uma reação ácido-base, e determinaram o fluxo de calor proveniente dessa reação.

NAVEIRA-COTTA *et al.* (2011) introduziram uso da Transformada Integral Generalizada na solução de problemas inversos. O enfoque foi na utilização da transformação integral do campo de temperatura para a compressão dos dados experimentais, sem a perda da informação contida nas medidas. A compressão de dados é particularmente interessante para técnicas modernas de medidas, como a termografia por infravermelho. O problema inverso foi resolvido em um tempo factível pelo Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov.

CHUDZIK (no prelo) apresenta o resultado para a um método de determinar propriedades termofísicas de um material isolante. A solução do problema inverso foi obtida com o método de redes neurais. Os parâmetros estimados foram a difusividade térmica e a condutividade térmica. Uma condição de contorno senoidal foi usada para o aquecimento da amostra, gerando uma difusão de calor tridimensional. A fórmula de diferença atrasada foi usada para a solução do problema

direto. A metodologia foi validada com medidas simuladas. Para os resultados experimentais, o autor obteve as medidas de temperatura por uma câmara por infravermelho.

Esta tese teve como ponto de partida o trabalho realizado no artigo de FUDYM *et al.* (2008), que usou o método OLS sem regularização em comparação com o método MCMC. Desta forma, em extensão ao trabalho proposto por FUDYM *et al.* (2008), esta tese também realizou as comparações dos métodos MCMC e filtro de Kalman com este mesmo método OLS sem regularização. Em seguida foi feita a extensão para problemas bidimensionais bem como a estimação de um termo-fonte (MASSARD *et al.* 2010), e por fim para parâmetros que variam no tempo (MASSARD *et al.* no prelo). O método desenvolvido nesta tese é uma alternativa ao enfoque restritivo de diminuir drasticamente o tamanho de pontos da malha, apresentado por HUANG e WANG (1999). Com relação à metodologia de aquisição de dados, o equipamento usado nesta tese apresenta uma matriz de detectores, em contraposição ao equipamento usado por LE NILIOT e GALLET (1998). Para lidar com as incertezas na matriz de sensibilidade que é construída com medidas experimentais devido ao uso da estratégia nodal (usado também nesta tese e apresentado na seção 4.1) BAMFORD (2007) usou o método dos Mínimos Quadrados Totais (TLS). Neste trabalho, procurou-se soluções alternativas a esta, mas também utilizando métodos que se enquadram dentro da teoria estatística Bayesiana, como o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov e o filtro de Kalman. Por fim, este trabalho de tese apresenta uma metodologia alternativa ao enfoque proposto por NAVEIRA-COTTA *et al.* (2011). Enquanto NAVEIRA-COTTA *et al.* (2011) optaram por aproximações analíticas para as funções desconhecidas e pela compressão de dados através da técnica da transformada integral, utiliza-se aqui a estratégia nodal para possibilitar um tratamento adequado a enormidade de dados experimentais disponibilizados pela câmara de termografia de infravermelho, possibilitando a solução do problema inverso dentro de tempos computacionais aceitáveis.

Desta forma a principais contribuições deste trabalho foi a utilização da estratégia nodal na solução de problemas inversos com o uso de técnicas Bayesianas para a estimação de parâmetros. Desta forma, conseguiu-se uma redução nos tempos computacionais na solução do problema inverso.

# 3. Problema Físico e Formulação Matemática

## 3.1 Descrição do problema físico

O problema físico examinado envolve a condução de calor transiente bidimensional em um meio heterogêneo. A condutividade térmica e o calor específico podem variar com a posição, e o fluxo de calor pode variar com a posição e com o tempo e com geração interna. O meio tem largura e comprimento  $L$  e espessura  $e$ . As condições de contorno são admitidas serem de isolamento em  $y=0$  e  $y=L$ ,  $x=0$  e  $x=L$  e  $z=e$ .

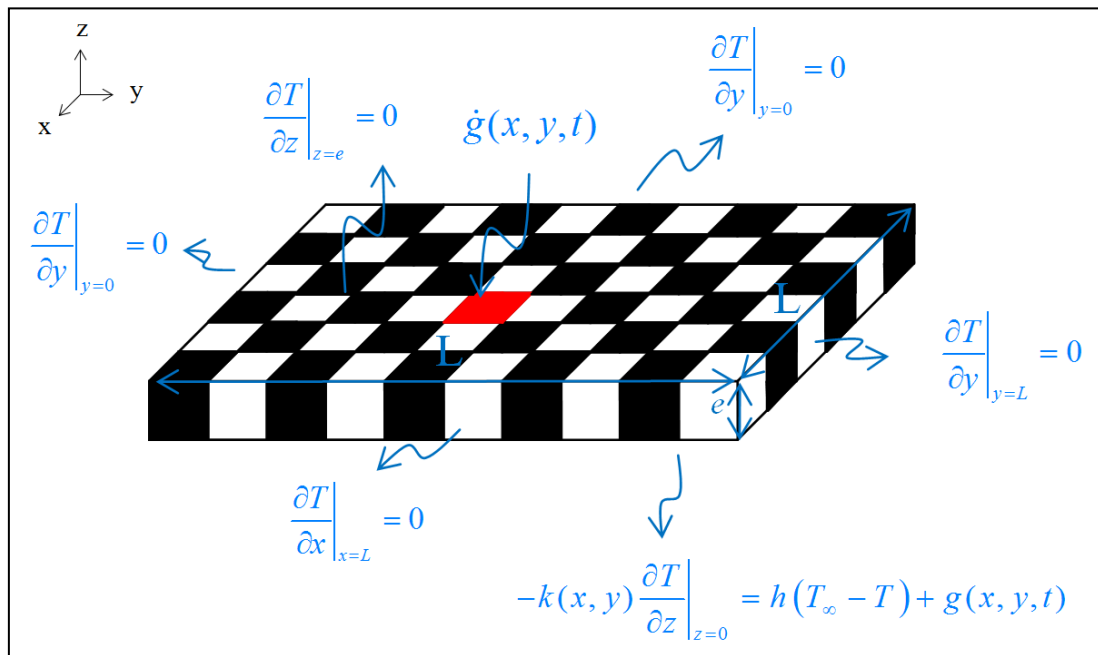


Figura 3-1 Esquema do problema físico

A superfície inferior troca calor com um meio na temperatura  $T_\infty$ , com coeficiente de transferência de calor combinado de convecção e radiação  $h(x,y)$ , que por facilidade de notação será referido ao longo do texto simplesmente por  $h$ . Um fluxo de calor  $g(x,y,t)$  foi também considerado em  $z=0$ . Foi considerado um modelo de parâmetros concentrados na direção transversal da placa. Esta situação pode ser encontrada em casos de materiais finos com alta condutividade térmica, caso onde o número de Biot transversal ( $he/k$ ) seja menor que 0.1 (OZISIK, 1990). A Figura 3-1 apresenta um desenho esquemático da descrição do problema físico, bem como os eixos coordenados usados na formulação. Os quadrados intercalados brancos e pretos representam as propriedades variando com a posição.

### 3.2 Formulação matemática

Com as considerações da seção anterior, o problema matemático que descreve a física do problema pode ser escrito como:

$$C(x, y) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k(x, y) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k(x, y) \frac{\partial T}{\partial y} \right] - \frac{h(x, y)}{e} (T - T_{\infty}) + \frac{g(x, y, t)}{e} + \dot{g}(x, y, t) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{em } x = 0 \text{ e } x = L_x, 0 < y < L_y, t > 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y = 0 \text{ e } y = L_y, 0 < x < L_x, t > 0 \quad (3.3)$$

$$T(x, y, 0) \neq T_0(x, y) \quad \text{para } t = 0, \text{ em } 0 < x < L_x, 0 < y < L_y, \quad (3.4)$$

Onde  $C(x, y)$  é a capacidade térmica,  $k(x, y)$  é a condutividade térmica e  $e$  é a espessura do material, respectivamente em  $J/(m^3K)$ ,  $W/(mK)$  e  $m$ .

Observa-se que devido à formulação do problema por parâmetros concentrados, teremos o termo de fluxo de calor  $g(x, y, t)$  em  $z=0$  dentro da Equação (3.1). Dessa forma, o termo fonte é composto dos dois termos, que são  $g(x, y, t)/e$ , que é o termo fonte proveniente da condição de contorno em  $z=0$ , e o próprio termo de geração interna de energia por unidade de volume,  $\dot{g}(x, y, t)$ .

Nota-se que esta formulação matemática é geral e abrangente. Desta maneira, ela pode ser aplicada em problemas de engenharia (na determinação de propriedades termofísicas em micro e macro-escala) na área de bioquímica (na determinação de um termo fonte que evidencie a atividade biológica) e mesmo na área biomédica (para a determinação das propriedades termofísicas de tecidos/meios biológicos). De uma forma geral, todos esses problemas envolvem a difusão de calor transiente no meio, este sujeito a condições de contorno que dependem do problema físico em estudo. Desta maneira, uma vez caracterizada e validada esta solução, sua aplicação pode ser estendida para diversos ramos disciplinares. Para o caso particular da fonte de calor, esta pode ser o objeto de estudo (como no caso do interesse em sua determinação), como pode também ser um parâmetro de entrada do problema (como no caso da determinação de propriedades termofísicas de materiais ou de tecidos/meios biológicos).

### 3.3 Problema direto

Para o problema direto associado à formulação matemática deste problema físico, a espessura do meio, as variações espaciais da capacidade térmica, da condutividade térmica, de  $h$ , a variação

especial e/ou temporal do termo fonte, assim como a condição inicial, são conhecidas. O objetivo do problema direto é determinar a variação da temperatura transiente no meio.

### **3.4 Definições dos problemas inversos estudados**

Para o presente estudo, foram considerados dois tipos de problema inverso: O problema do **Tipo I**, que trata da estimação da difusividade térmica, de  $h$  e do termo fonte, todos constantes no tempo, mas variando com a posição. Desta maneira, espera-se obter a estimação dos parâmetros supracitados em função dos eixos  $x$  e  $y$  do sistema de coordenadas. Para o problema inverso do tipo I, são apresentadas as técnicas de Mínimos Quadrados e Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC). Por outro lado, o problema do **Tipo II** trata da estimação da difusividade térmica e  $h$  variando com a posição, mas constantes no tempo, e o termo fonte variando tanto na posição quanto no tempo. Para o problema inverso do tipo II, é apresentado o Filtro de Kalman, que trata da solução de problemas de estimação de estados. Esses métodos serão apresentados no Capítulo 4. Para todos os casos estudados neste trabalho, considerou-se o termo de geração interna de energia nulo, isto é,  $\dot{g}(x, y, t) = 0$ . Desta forma, o termo-fonte é composto somente da parcela  $g(x, y, t)/e$ .

## 4. Materiais e Métodos

O presente capítulo apresenta a estratégia nodal usada para a solução do problema inverso. Ela é necessária para lidar com a grande quantidade de dados gerados pela câmera de termografia por infravermelho. O problema inverso é escrito para a aplicação desta estratégia e são apresentadas suas formulações para o caso da estimação do termo fonte constante e variando no tempo. Devido às características inerentes à solução para cada caso específico, as matrizes de temperatura experimental, de sensibilidade e de parâmetros são escritas de forma adequada para a solução de cada um dos problemas. É feita a introdução da solução de problemas inversos pelo método de Mínimos Quadrados Ordinários, apresentando as hipóteses, muitas vezes restritivas, para a aplicação deste método. Assim como no problema direto, para o problema inverso foram apresentados os métodos específicos para a estimação dos parâmetros para os dois casos estudados: o termo fonte constante e o termo fonte variando no tempo. O conceito de coeficientes de sensibilidade é apresentado, a importância de sua determinação bem como o conceito de matriz de sensibilidade, e a condição a partir de sua análise para que os parâmetros sejam estimados com menor incerteza. O conceito de inferência Bayesiana é apresentado como alternativa às técnicas clássicas em problemas inversos, apresentando suas características e vantagens com relação aos métodos tradicionais de regularização de problemas inversos. Foi feita a comparação da solução do problema inverso pelo método de Metropolis Hastings via Cadeias via Markov (MCMC) com o método de Mínimos Quadrados Ordinários (OLS) para o caso onde o termo fonte é constante. Para o problema onde o termo fonte varia no tempo, foi usado o filtro de Kalman. Para as medidas experimentais, a termografia por infravermelho foi utilizada. Esta técnica é descrita, bem como suas vantagens com relação às medidas realizadas por outros métodos. São mostradas as características do equipamento utilizado e suas especificações. O material utilizado como corpo de prova é detalhado, assim como as técnicas clássicas disponíveis na literatura para sua caracterização, e consequentemente a obtenção de seus valores de referência de propriedades termofísicas. A forma de aquecimento da amostra é descrito para os dois experimentos utilizados: A resistência elétrica e o laser-diodo.

### 4.1 *Estratégia nodal e modelo preditivo para a solução do problema inverso*

Este trabalho trata da solução de um problema inverso para a estimação da difusividade térmica, de  $h$  e do termo fonte  $g(x,y)$  ou  $g(x,y,t)$ , usando a estratégia nodal desenvolvida em BAMFORD *et al.* (2008) e BATSALE *et al.* (2004).

Para a solução do problema inverso, assume-se que medidas transientes de temperatura em diversas posições do meio estão disponíveis, tendo sido feitas com uma câmera de termografia por infravermelho. Tal técnica apresenta vantagens, pois pode prover medidas acuradas e não intrusivas, com uma resolução espacial grande e altas frequências de aquisição. Porém, a grande quantidade de dados gerados pela câmera pode também ser uma característica indesejável em alguns casos. Por exemplo, se um experimento usando uma matriz de 520 por 640 pixels a 100Hz for feito, em 1 segundo obtêm-se uma quantidade de 33280000 dados experimentais. Se o tempo de estimação por pixel for de 1 segundo, necessita-se de 1 ano para estimar os parâmetros de interesse. Neste contexto, um enfoque é necessário para contornar esta limitação. Neste trabalho a estratégia nodal é usada para lidar com as grandes quantidades de dados experimentais fornecidos pela câmera por infravermelho, tornando o problema linear e acelerando seu tempo de solução. Para a aplicação da estratégia nodal, a equação (3.1) deve ser reescrita da seguinte forma não conservativa (BATSALÉ *et al.*, 2004 e FUDYM *et al.*, 2008):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha(x, y) \nabla^2 T + \frac{1}{C(x, y)} \left[ \frac{\partial k(x, y)}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial k(x, y)}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right] - H(x, y)(T - T_\infty) + G(x, y, t) \quad (4.1)$$

onde  $H(x, y) = \frac{h(x, y)}{eC(x, y)}$ ,  $G(x, y, t) = \frac{g(x, y, t)}{eC(x, y)}$  e  $\alpha(x, y)$  é a difusividade térmica local do

material, respectivamente em 1/s, K/s e m<sup>2</sup>/s.

A discretização explícita da Equação (4.1) usando um esquema de diferenças finitas resulta em:

$$Y_{i,j}^{n+1} = \Lambda_{i,j}^n \alpha_{i,j} + Ax_{i,j}^n \delta_{i,j}^x + Ay_{i,j}^n \delta_{i,j}^y - \Delta t (T_{i,j}^n - T_\infty) H_{i,j} + \Delta t G_{i,j} \quad (4.2)$$

Onde o par subscripto  $(i, j)$  denota a diferença finita entre os nós  $x_i = i\Delta x$ ,  $i = 1 \dots I$ , e  $y_j = j\Delta y$ ,  $j = 1 \dots J$ , e os sobrescritos  $n$  denotam o tempo  $t^n = n\Delta t$ ,  $n=0 \dots (K-1)$ , onde  $K$  é o número total de medidas,  $\delta_{i,j}^x$  e  $\delta_{i,j}^y$  são as componentes do gradiente da condutividade térmica local divididas pela capacidade térmica. Os termos restantes da equação (4.2) são:

$$Y_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n \quad (4.3)$$

$$\Lambda_{i,j}^n = \Delta t \left( \frac{T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n}{(\Delta y)^2} \right) \quad (4.4)$$

$$Ax_{i,j}^n = \frac{\Delta t}{2\Delta x} (T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n) \quad (4.5)$$

$$Ay_{i,j}^n = \frac{\Delta t}{2\Delta y} (T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n) \quad (4.6)$$

A Equação (4.3) envolve a diferença avançada da temperatura no tempo, a equação (4.4) envolve uma aproximação para o laplaciano da temperatura no tempo  $t_n$  e nó  $(i,j)$  enquanto as equações (4.5) e (4.6) envolvem aproximações para os gradientes de temperatura nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

A partir desse ponto, a solução do problema inverso pode ser escrita de duas maneiras distintas, em função do comportamento temporal do termo fonte (Problema do Tipo I ou Problema do Tipo II). Esta diferenciação se deve pelo fato das técnicas envolvidas para a estimação de parâmetros constantes no tempo terem sua formulação diferente das técnicas de estimação de parâmetros que variam com o tempo, conforme será visto ao longo da tese.

Para o caso onde o termo fonte é constante no tempo (Problema Inverso do tipo I), o problema direto é resolvido em cada nó espacial (“pixel por pixel”) para todos os nós temporais. Desta forma, para cada nó na malha a solução do problema direto obtida é um vetor com comprimento correspondente ao número de passos de tempo.

Escrevendo-se a Equação (4.2) para cada nó  $(i,j)$  e todos os passos de tempo, obtemos:

$$\mathbf{Y}_{ij} = \mathbf{J}_{ij} \mathbf{P}_{ij} \quad (4.7)$$

onde

$$\mathbf{J}_{ij} = \begin{bmatrix} \Lambda_{i,j}^1 & Ax_{i,j}^1 & Ay_{i,j}^1 & -\Delta t(T_{i,j}^1 - T_\infty) & \Delta t \\ \Lambda_{i,j}^2 & Ax_{i,j}^2 & Ay_{i,j}^2 & -\Delta t(T_{i,j}^2 - T_\infty) & \Delta t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Lambda_{i,j}^K & Ax_{i,j}^K & Ay_{i,j}^K & -\Delta t(T_{i,j}^K - T_\infty) & \Delta t \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{Y}_{ij} = [Y_{i,j}^1 \quad Y_{i,j}^2 \quad \cdots \quad Y_{i,j}^K]^T \quad (4.9)$$

e

$$\mathbf{P}_{ij} = [\alpha_{i,j} \quad \delta_{i,j}^x \quad \delta_{i,j}^y \quad H_{i,j} \quad G_{i,j}]^T \quad (4.10)$$

O vetor de parâmetros no nó  $(i,j)$  definido na equação (4.10) contem os seguintes parâmetros:

$\alpha_{i,j}$  é a difusividade térmica local;

$H_{i,j}$  é o coeficiente de transferência de calor local dividido pela capacidade térmica e pela espessura da placa;

$G_{i,j}$  é o termo fonte local dividido pela capacidade térmica local e pela espessura.

Para o caso onde o termo fonte varia no tempo (Problema Inverso do tipo II), o problema direto é resolvido em cada passo de tempo para toda malha espacial de uma vez. Desta forma, para cada



passo de tempo, a solução do problema direto obtida é uma matriz com dimensões correspondentes ao número de nós utilizados na discretização espacial do problema.

Escrevendo-se a Equação (4.2) na forma de um modelo de evolução de estados (necessário pra a formulação do problema inverso pelo filtro de Kalman que será apresentado na seção 4.6.1), reordenando-se sequencialmente todos os nós  $(i,j)$  com o índice  $m=1,\dots,M$ , onde  $M=IJ$ , conforme apresentado na Figura 4-1, a Equação (4.2) torna-se:

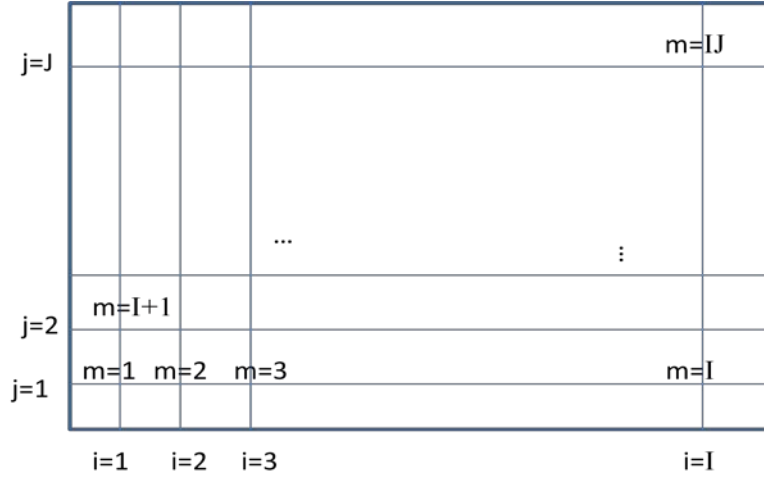


Figura 4-1- Índices da discretização

$$\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{T}^n + \mathbf{J}^n \mathbf{P}^n \quad (4.11)$$

Onde

$$\mathbf{J}^n = \begin{bmatrix} \Lambda_1^n & Ax_1^n & Ay_1^n & -\Delta t(T_1^n - T_\infty) & \Delta t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_2^n & Ax_2^n & Ay_2^n & -\Delta t(T_2^n - T_\infty) & \Delta t & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & & \dots & 0 & \Lambda_M^n & Ax_M^n & Ay_M^n & -\Delta t(T_M^n - T_\infty) & \Delta t \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

e

$$\mathbf{T}^n = [T_1^n \quad T_2^n \quad \dots \quad T_M^n]^T \quad (4.13)$$

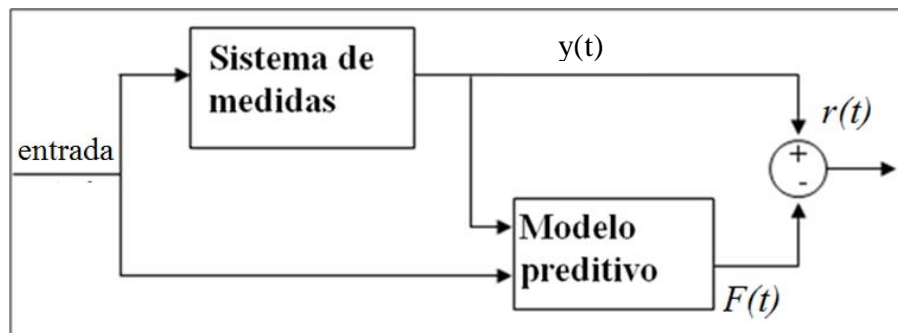
$$\mathbf{P}^n = [(\alpha_1^n \quad \delta_1^{x,n} \quad \delta_1^{y,n} \quad H_1^n \quad G_1^n), (\alpha_2^n \quad \delta_2^{x,n} \quad \delta_2^{y,n} \quad H_2^n \quad G_2^n), \dots, (\alpha_M^n \quad \delta_M^{x,n} \quad \delta_M^{y,n} \quad H_M^n \quad G_M^n)]^T \quad (4.14)$$

O vetor de parâmetros definido pela equação (4.14) contem em cada nó  $m = 1,\dots,M$ :  $\alpha$ , que é a difusividade térmica,  $H$ , que é  $h$  dividido pela capacidade térmica e espessura da placa, e  $G_m^k$ , que é o termo fonte local dividido pela capacidade térmica e espessura da placa.

A matriz de sensibilidade definida nas Equações (4.8) e (4.12) são funções do campo de temperaturas, e dessa maneira depende dos parâmetros do problema. Isto levaria a um procedimento

de estimação não linear ao se minimizar um modelo de erro de saída, baseado na diferença entre as Equações (4.7) e (4.11) e o dado experimental correspondente.

Uma maneira de contornar as não linearidades do problema de estimação é usar um modelo de erro preditivo, como ilustrado na Figura 4-2. Com este método, os dados medidos  $x(t)$ , são inseridos diretamente no modelo matemático do problema, para tornar possível o cálculo da predição  $F(t)$  (LJUNG, 2009, BAMFORD *et al.*, 2008, BATSALE *et al.*, 2004, BAMFORD *et al.*, 2009, PRADERE *et al.*, 2008, PRADERE *et al.*, 2004, FUDYM *et al.*, 2008, MASSARD *et al.*, 2010). A função objetivo a ser minimizada para a estimação dos parâmetros presentes no modelo matemático deve ser selecionada baseada em hipóteses estatísticas com respeito aos erros de medida e dos parâmetros desconhecidos (KAPIO e SOMERSALO, 2004b, BECK e ARNOLD 1977).



**Figura 4-2- Minimização do modelo de erro preditivo**

As câmeras de termografia por infravermelho atuais são capazes de realizar medidas com alta resolução espacial e com alta frequência de aquisição de dados, que podem então serem usados diretamente para o cálculo da matriz de sensibilidade, Equações (4.8) e (4.12) (BAMFORD *et al.*, 2008 e BATSALE *et al.*, 2004). Neste caso, as Equações (4.7) e (4.11) fornecem uma dependência linear da resposta do sistema com relação ao vetor de parâmetros, baseado no conhecimento da matriz de sensibilidade. A resolução espacial dos parâmetros é dada pela resolução espacial do equipamento de medida, por exemplo, o número de pixels da câmera por infravermelho.

## **4.2 Problema Inverso**

Este trabalho lida com problemas inversos em transferência de calor envolvendo um enfoque Bayesiano. O método de Mínimos Quadrados Ordinários (OLS) é apresentado como forma de comparação com o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov. O método de OLS será apresentado nesta seção na introdução à metodologia de solução de problemas inversos.

Geralmente a solução de um problema inverso se dá pela minimização de uma função objetivo com alguma técnica de estabilização usada no processo de estimação. Se forem satisfeitas as hipóteses estatísticas de erros aditivos, com média zero, variância constante, erros não-correlacionados e com distribuição normal, com os parâmetros estatísticos descrevendo o erro

conhecidos, erro randômico somente nas temperaturas medidas, e finalmente sem informação a priori das quantidades a serem estimadas, a função objetivo que fornece a menor variância é a norma de mínimos quadrados, definida por (OZISIK e ORLANDE, 2000, BECK e ARNOLD, 1977, KAIPIO e SOMERSALO, 2004a):

$$S(\mathbf{P}) = \sum_{n=1}^K (y_n - T_n(\mathbf{P}))^2 \quad (4.15)$$

Onde  $S$  é a soma dos quadrados dos erros, ou função objetivo,  $y_n$  e  $T_n$  são as temperaturas medidas e estimadas no tempo  $t_n$ , respectivamente,  $\mathbf{P}$  é o vetor de parâmetros  $\mathbf{P}^T = [P_1, P_2, \dots, P_N]$ .  $N$  é o número de parâmetros.

As temperaturas estimadas  $T_n(\mathbf{P})$  são obtidas pela solução do problema direto nos pontos de medidas, usando o conhecimento dos parâmetros  $P_b$ ,  $b=1, \dots, N$ .

A equação (4.15) pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$S(\mathbf{P}) = [\mathbf{y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})]^T [\mathbf{y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})] \quad (4.16)$$

Onde o sobrescrito T indica a transposta, e  $(\mathbf{y} - \mathbf{T}(\mathbf{P}))^T$  é definido como:

$$(\mathbf{y} - \mathbf{T}(\mathbf{P}))^T = (y_1 - T_1, y_2 - T_2, \dots, y_K - T_K) \quad (4.17)$$

Para a minimização da norma de mínimos quadrados dada pela equação (4.15), é necessário igualar a zero as derivadas de  $S(\mathbf{P})$  com relação a cada um dos parâmetros  $[P_1, P_2, \dots, P_N]$ , isto é

$$\frac{\partial S(\mathbf{P})}{\partial P_1} = \frac{\partial S(\mathbf{P})}{\partial P_2} = \dots = \frac{\partial S(\mathbf{P})}{\partial P_N} = 0 \quad (4.18)$$

Esta condição de minimização de  $S(\mathbf{P})$  pode ser representada em notação matricial igualando o gradiente de  $S(\mathbf{P})$  com relação ao parâmetros  $\mathbf{P}$  a zero, isto é

$$\nabla S(\mathbf{P}) = 2 \left[ -\frac{\partial \mathbf{T}^T(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} \right] [\mathbf{y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})] = 0 \quad (4.19)$$

Onde

$$\frac{\partial \mathbf{T}^T(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial P_1} \\ \frac{\partial}{\partial P_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial P_N} \end{bmatrix} [T_1 \quad T_2 \quad \dots \quad T_K] \quad (4.20)$$

A matriz de sensibilidade, ou matriz jacobiana,  $\mathbf{J}(\mathbf{P})$  é definida como a transposta da equação (4.20), isto é,

$$\mathbf{J}(\mathbf{P}) = \left[ \frac{\partial \mathbf{T}^T(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} \right]^T \quad (4.21)$$

De forma explicita, a matriz de sensibilidade é escrita como

$$\mathbf{J}(\mathbf{P}) = \left[ \frac{\partial \mathbf{T}^T(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial P_1} & \frac{\partial T_1}{\partial P_2} & \frac{\partial T_1}{\partial P_3} & \dots & \frac{\partial T_1}{\partial P_N} \\ \frac{\partial T_2}{\partial P_1} & \frac{\partial T_2}{\partial P_2} & \frac{\partial T_2}{\partial P_3} & \dots & \frac{\partial T_2}{\partial P_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_K}{\partial P_1} & \frac{\partial T_K}{\partial P_2} & \frac{\partial T_K}{\partial P_3} & \dots & \frac{\partial T_K}{\partial P_N} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Onde  $N$  = número total de parâmetros desconhecidos

$K$  = número total de medidas

Os elementos da matriz de sensibilidade são chamados de coeficientes de sensibilidade. O coeficiente de sensibilidade  $J_{n,b}$  são definidos como a primeira derivada do parâmetro estimado no tempo  $t_n$  com relação ao parâmetro desconhecido  $P_b$ , isto é

$$J_{nb} = \frac{\partial T_n}{\partial P_b} \quad (4.23)$$

Usando-se a definição de matriz de sensibilidade dado pela Equação (4.21), a Equação (4.23) torna-se:

$$-2\mathbf{J}^T(\mathbf{P})[\mathbf{y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})] = 0 \quad (4.24)$$

Para problemas inversos lineares, a matriz de sensibilidade não é função dos parâmetros desconhecidos. Neste caso, a Equação (4.24) pode ser resolvida em uma forma explícita para o vetor de parâmetros desconhecidos  $\mathbf{P}$  como:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{y} \quad (4.25)$$

Esta tese lida com problemas inversos lineares, logo sua solução é obtida com a Equação (4.25). Para o caso de problemas inversos não lineares, a matriz de sensibilidade tem alguma dependência com o vetor de parâmetros desconhecidos  $\mathbf{P}$ . A solução da equação (4.24) para a estimação de problemas não lineares requer um procedimento iterativo, que é obtido linearizando o vetor de temperaturas estimadas,  $\mathbf{T}(\mathbf{P})$ , que é uma expansão em séries de Taylor em torno da solução atual  $\mathbf{P}^h$ , na iteração  $h$ . Esta linearização é dada por

$$\mathbf{T}(\mathbf{P}) = \mathbf{T}(\mathbf{P}^h) + \mathbf{J}^h (\mathbf{P} - \mathbf{P}^h) \quad (4.26)$$

Onde  $\mathbf{T}(\mathbf{P}^h)$  e  $\mathbf{J}^h$  são as temperaturas estimadas e a matriz de sensibilidade calculadas na iteração  $h$ , respectivamente. A Equação (4.26) é substituída na Equação (4.24) e a expressão resultante é rearranjada para a obtenção do seguinte procedimento iterativo para a obtenção do vetor de parâmetros desconhecidos  $\mathbf{P}$  (BECK e ARNOLD, 1977, OZISIK e ORLANDE, 2000):

$$\mathbf{P}^{h+1} = \mathbf{P}^h + \left[ (\mathbf{J}^h)^T \mathbf{J}^h \right]^{-1} (\mathbf{J}^h)^T [\mathbf{y} - \mathbf{T}(\mathbf{P}^h)] \quad (4.27)$$

O procedimento iterativo dado pela Equação (4.27) é chamado de método de Gauss. Este método é uma aproximação do método de Newton (ou método de Newton-Raphson) (BECK e ARNOLD, 1977, OZISIK e ORLANDE, 2000).

Observa-se que a Equação (4.25) assim como a implementação do procedimento iterativo dado pela Equação (4.27), requerem a matriz  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  seja não singular, ou,

$$|\mathbf{J}^T \mathbf{J}| \neq 0 \quad (4.28)$$

Onde  $|\cdot|$  é o determinante.

A Equação (4.28) fornece a chamada Condição de Identificabilidade, que é caso o determinante de  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  ser zero ou mesmo muito pequeno, os parâmetro  $\mathbf{P}_b$ , para  $b=1\dots N$  não podem ser determinados usando o procedimento iterativo da Equação (4.27) ou a Equação (4.25). Problemas onde  $|\mathbf{J}^T \mathbf{J}| \approx 0$  são denominados mal-condicionados. Problemas inversos em transferência de calor são geralmente muito mal-condicionados, especialmente próximos da estimativa inicial usada para os parâmetros desconhecidos, criando dificuldades na aplicação da Equação (4.25) ou (4.27). Para contornar tal situação, foram desenvolvidas técnicas de regularização, como o método iterativo de Alifanov, a regularização de Tikhonov, e algoritmos como o de Levenbeg-Marquadt. O presente trabalho lida com esses problemas pelo uso de técnicas baseadas na teoria estatística Bayesiana, como o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov e o filtro de Kalman.

A análise estatística dos resultados permite que se obtenha uma estimativa do grau de incerteza dos valores estimados para os parâmetros. Utilizando-se as hipóteses de que as medidas contém erros aditivos e não correlacionados, com distribuição normal, média zero e desvio padrão constante, a matriz de variância  $\mathbf{V}$ , para  $P_b$ ,  $b=1, \dots, N$ , que são os parâmetros estimados resultante da minimização da norma de mínimos quadrados é dada por (BECK e ARNOLD, 1977, OZISIK e ORLANDE, 2000):

$$\mathbf{V} \equiv \begin{bmatrix} \text{cov}(P_1, P_1) & \dots & \text{cov}(P_1, P_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(P_N, P_1) & \dots & \text{cov}(P_N, P_N) \end{bmatrix} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \sigma^2 \quad (4.29)$$

Onde  $N$  na Equação (4.29) é o número de parâmetros. Os desvios-padrão para os parâmetros são obtidos através dos elementos da diagonal de  $\mathbf{V}$ , isto é:

$$\sigma_{P_b} \equiv \sqrt{\text{cov}(P_b, P_b)} = \sqrt{V_{bb}}, \text{ para } b=1, \dots, N. \quad (4.30)$$

E o coeficiente de correlação entre dois ou mais parâmetros:

$$\rho_{bc} = \frac{\text{cov}(P_c, P_b)}{\sqrt{\text{cov}(P_c, P_c) \text{cov}(P_b, P_b)}}, \text{ para } b, c = 1, \dots, N, b \neq c \quad (4.31)$$

### 4.3 Análise dos Coeficientes de Sensibilidade

A matriz de sensibilidade desempenha um papel fundamental em problemas de estimação de parâmetros, pois como demonstrado pelas Equações (4.27) e (4.25), se  $|\mathbf{J}^T \mathbf{J}|$  for muito pequeno, os parâmetros  $\mathbf{P}$  não podem ser estimados por estas Equações. Desta maneira, é feita uma breve discussão sobre o significado físico e matemático dos coeficientes de sensibilidade.

O coeficiente de sensibilidade  $J_{nb}$ , definido pela Equação (4.32) é uma medida da sensibilidade da temperatura  $T$  estimada no tempo  $t^n$  com relação ao parâmetro  $P_b$ , onde  $P_b$  é o  $b$ -ésimo parâmetro desconhecido.

$$J_{nb} = \frac{\partial T_n}{\partial P_b} \quad (4.32)$$

Um pequeno valor de magnitude de  $J_{nb}$  significa que uma grande alteração em  $P_b$  resulta em uma pequena mudança em  $T_n$ . Neste caso, a estimação de  $P_b$  é difícil. Quando o valor do coeficiente de sensibilidade é pequeno, têm-se  $|\mathbf{J}^T \mathbf{J}| \approx 0$ , e o problema inverso é mal-condicionado. Desta forma, é desejável ter coeficientes de sensibilidade grandes e linearmente independentes, de forma que o problema inverso não seja muito sensível aos erros experimentais. A maximização de  $|\mathbf{J}^T \mathbf{J}|$  é desejável no projeto de experimentos ótimos, para a estimação de parâmetros, pois a região de confiança é minimizada.

Normalmente a variação com o tempo dos coeficientes de sensibilidade e de  $|\mathbf{J}^T \mathbf{J}|$  deve ser examinada antes de se obter a solução do problema inverso. Este estudo indica o local para o melhor posicionamento dos sensores e tempo de medida para ser usado na análise inversa, o que corresponde a coeficientes de sensibilidade linearmente independentes com valores absolutos grandes, e grandes magnitudes de  $|\mathbf{J}^T \mathbf{J}|$ .

#### 4.4 Inferência Bayesiana em Problema Inverso

Devido a existência de incertezas em qualquer sistema no mundo real, mesmo as menores perturbações em dados ou variabilidade no sistema de parâmetros se propagam e se amplificam na solução inversa (WANG e ZABARAS 2004a). Dessa maneira, uma solução inversa completa deve fornecer a quantificação das incertezas e não somente uma estimativa pontual dos parâmetros. Com a rápida expansão da computação e a demanda crítica por sistemas de engenharia robustos e confiáveis, a otimização sob incertezas está recebendo atenção crescente (WANG e ZABARAS 2004b). A estatística Bayesiana tem se destacado entre os métodos de inferência, pois fornece uma função de densidade de probabilidade dos parâmetros desconhecidos a partir de toda a informação disponível. A incorporação da verossimilhança e da distribuição a priori proporciona uma descrição probabilística completa dos parâmetros desconhecidos à luz de todas as incertezas (WANG e ZABARAS 2004a). Além do mais, a inferência Bayesiana explora a distribuição de informação em dados corrompidos, o que é crítico, pois a solução inversa é extremamente sensível a ruídos (WANG e ZABARAS 2004a).

Segundo GAMERMAN (1996), na inferência Bayesiana tem-se a incorporação de todas as fontes de informação de um dado problema, o que leva a inclusão de mais componentes na análise, aumentando sua complexidade. Por isso, esta abordagem não vinha sendo desenvolvida em áreas aplicadas. Porém, a redescoberta de técnica de amostragem numéricas relativamente simples, mas extremamente poderosas, permitiu que virtualmente qualquer problema pudesse ser tratado pela abordagem Bayesiana (GAMERMAN, 1996).

A estatística Bayesiana estuda a probabilidade de uma variável randômica a partir da informação obtida e de conhecimento prévio (WANG e ZABARAS, 2004b). Assim como na inferência frequentista, a inferência Bayesiana trabalha na presença de observações  $\mathbf{y}$  cujo valor inicial é incerto e descrito através de uma distribuição de probabilidades com densidade de função de probabilidade  $p(\mathbf{y}|\mathbf{P})$ , onde  $p(\mathbf{y}|\mathbf{P})$  representa a probabilidade condicional de  $\mathbf{y}$  quando  $\mathbf{P}$  é dado.

A quantidade  $\mathbf{P}$  serve como indexador de uma família de distribuições das observações representando características de interesse que se deseja conhecer para poder ter uma descrição completa do processo (GAMERMAN, 1996). Porém, vale notar que em alguns casos, a quantidade  $\mathbf{P}$  é mais do que um simples indexador, é a própria razão de tomada de medição, pois o interesse principal do estudo é a determinação do seu valor. Além do mais, é bastante provável que o pesquisador a conheça ou saiba caracterizá-la. Neste caso é possível que esse conhecimento a respeito da quantidade seja incorporado à análise e é nesse ponto que o método Bayesiano se diferencia do frequentista. Enquanto o segundo não admite essa forma de informação por não ser observável e portanto não ser passível de comprovação empírica, o primeiro sempre incorpora essa

informação à análise através de uma densidade  $p(\mathbf{P})$  mesmo que essa informação não seja muito precisa (GAMERMAN, 1996).

A base da inferência Bayesiana é a fórmula de Bayes (WANG e ZABARAS, 2004), que é dada por:

$$p(\mathbf{P} | \mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y} | \mathbf{P})p(\mathbf{P})}{p(\mathbf{y})} \quad (4.33)$$

Onde  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{y}$  denotam o parâmetro randômico desconhecido e o dado relacionado, respectivamente. A função de densidade de probabilidade condicional  $p(\mathbf{P} | \mathbf{y})$  é chamada função de densidade de probabilidade posteriori,  $p(\mathbf{y} | \mathbf{P})$  é a função de verossimilhança e a função de densidade de probabilidade marginal  $p(\mathbf{P})$  é chamada função de densidade de probabilidade priori.

A verossimilhança  $p(\mathbf{y} | \mathbf{P})$  é definida a partir da seguinte relação:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{P}) + \gamma \quad (4.34)$$

Onde  $\mathbf{T}(\mathbf{P})$  é a solução do problema direto em uma determinada localização e tempo para o vetor de parâmetros  $\mathbf{P}$  e  $\gamma$  é o erro das medidas de temperatura. Supondo o erro  $\gamma$  sendo aditivo, normalmente distribuído com média zero e desvio padrão conhecido, a função de verossimilhança  $p(\mathbf{y} | \mathbf{P})$  é dada por (BECK e ARNOLD, 1997, KAPIO e SOMERSALO, 2004a, GAMERMAN, 1996):

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{P}) = (2\pi)^{-U/2} |\mathbf{W}^{-1}|^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{T}(\mathbf{P}))^T \mathbf{W} (\mathbf{y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})) \right] \quad (4.35)$$

Onde  $\mathbf{T}(\mathbf{P})$  é a temperatura calculada em função dos parâmetros a serem estimados,  $U = KB$ ,  $K$  o número de medidas no tempo e  $B$  o número de sensores em diferentes posições espaciais e  $\mathbf{W}$  é a inversa da matriz de covariâncias de erros em  $\mathbf{T}$ .

A distribuição a priori dos parâmetros é o conhecimento, se existir, antes de  $\mathbf{x}$  ser medido e pode ser uma estimativa de  $p(\mathbf{P})$  resultante de experimentos passados.

Em geral, a probabilidade  $p(\mathbf{y})$  não é explícita e é difícil de ser calculada. Entretanto, o conhecimento de  $p(\mathbf{y})$  pode ser desconsiderado se o espaço dos estados da posteriori puder ser explorado a menos de uma constante de normalização. Assim, a função de densidade de probabilidade posteriori pode ser escrita como:

$$p(\mathbf{P} | \mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y} | \mathbf{P})p(\mathbf{P}) \quad (4.36)$$

Para o caso envolvendo uma distribuição priori normal para os parâmetros, pode-se escrever (BECK e ARNOLD, 1997, KAPIO e SOMERSALO, 2004a, GAMERMAN, 1996):



$$p(\mathbf{P}) = (\hat{\boldsymbol{\mu}}\pi)^{\mathbf{K}} |\mathbf{V}|^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{P} - \hat{\boldsymbol{\mu}})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{P} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) \right] \quad (4.37)$$

Onde  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\mathbf{V}$  são a média e matriz de covariância conhecidos para o parâmetro  $\mathbf{P}$ , respectivamente. Substituindo a eq. (4.37) e (4.35) no teorema de Bayes, a menos da constante de normalização no denominador, obtém-se:

$$\ln[p(\mathbf{P} | \mathbf{y})] \propto -\frac{1}{2} \left[ (K + N) \ln 2\pi + \ln |\mathbf{W}^{-1}| + \ln |\mathbf{V}| + S_{MAP}(\mathbf{P}) \right] \quad (4.38)$$

Onde

$$S_{MAP}(\mathbf{P}) = [\mathbf{y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})]^T \mathbf{W} [\mathbf{y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})] + (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{P})^T \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{P}) \quad (4.39)$$

A eq. (4.38) revela que a maximização da função de distribuição da posteriori pode ser obtida com a minimização da função objetivo dada pela eq.(4.39), denominada de *função objetivo maximum a posteriori*. A Eq. (4.39) mostra a contribuição da verossimilhança e da distribuição priori na função objetivo, dados pelo primeiro e segundo termos do lado direito da equação, respectivamente (BECK e ARNOLD, 1997, KAIPIO e SOMERSALO, 2004a, GAMERMAN, 1996).

Para o problema de estimação linear, como o presente caso, a minimização da função objetivo de maximum a posteriori é obtida com:

$$\hat{\mathbf{P}}_{MAP} = [\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J} + \mathbf{V}^{-1}]^{-1} [\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{y} + \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}] \quad (4.40)$$

Observa-se pela eq. (4.40) como a informação a priori é usada como um termo de regularização. Quando a informação a priori é pobre, os termos da diagonal da matriz de covariância são grandes, e não existe o efeito de regularização.

Entretanto, se outras funções de densidade de probabilidade a priori forem usadas, a FDPP pode não permitir um tratamento analítico como o apresentado acima. Neste caso, métodos de amostragem numéricos são necessários. O método numérico mais utilizado para explorar o espaço de estados da posteriori é a simulação de Monte Carlo. A simulação de Monte Carlo é baseada em uma amostra grande da função densidade de probabilidade (neste caso, a função de densidade de probabilidade da posteriori  $p(\mathbf{P}|\mathbf{x})$ ). Várias estratégias de amostragem foram propostas na literatura, entre elas o Método de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC), adotado neste trabalho, onde a idéia básica é simular uma busca aleatória no espaço de estados de  $p(\mathbf{P})$  que converge para uma distribuição estacionária, que é a distribuição de interesse no problema.

## 4.5 Método de solução do problema inverso Tipo I

Esta seção apresenta a metodologia de solução de problemas inversos onde os parâmetros são constantes no tempo. O método de Monte Carlo via Cadeias de Markov implementado pelo algoritmo de Metropolis Hastings foi o método escolhido para a solução desse tipo de problema.

### 4.5.1 Monte Carlo via Cadeia de Markov

O método de Monte Carlo via Cadeia de Markov é uma versão iterativa dos métodos de Monte Carlo tradicionais não iterativos. A idéia é obter uma amostra da distribuição a posteriori e calcular estimativas amostrais de características desta distribuição usando técnicas de simulação iterativa, baseadas em cadeias de Markov.

Uma cadeia de Markov é um processo estocástico  $\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots\}$  tal que a distribuição de  $\mathbf{P}_z$  dados todos os valores anteriores  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_{z-1}$  depende apenas de  $\mathbf{P}_{z-1}$ . Matematicamente tem-se (GAMERMAN, 1996),

$$p(\mathbf{P}_z \in A | \mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_{z-1}) = p(\mathbf{P}_z \in A | \mathbf{P}_{z-1}) \quad (4.41)$$

para qualquer subconjunto  $A$ .

Uma cadeia de Markov é mais precisamente definida pelas suas probabilidades de transição  $p(r,u)=p(r \rightarrow u)$ , a qual define a probabilidade de que o processo, estando no estado  $s_r$  mova-se para o estado  $s_u$  em um único passo, conforme segue:

$$p(r,u) = p(r \rightarrow u) = p(\mathbf{P}_{t+1} = s_r / \mathbf{P}_t = s_u) \quad (4.42)$$

Os métodos MCMC requerem para que se obtenha uma única distribuição de equilíbrio, que a cadeia seja (EHLERS 2003):

- homogênea, i.e. as probabilidades de transição de um estado para outro são invariantes;
- irredutível, i.e. cada estado pode ser atingido a partir de qualquer outro em um número finito de iterações;
- aperiódica, i.e. não haja estados absorventes;

Assim, uma condição suficiente para se obter uma única distribuição estacionária é que o processo atenda a seguinte equação de balanço (EHLERS 2003):

$$p(r \rightarrow u)p_r(\mathbf{P} | \mathbf{y}) = p(u \rightarrow r)p_u(\mathbf{P} | \mathbf{y}) \quad (4.43)$$

Onde  $p_r(\mathbf{P} | \mathbf{y})$  e  $p_u(\mathbf{P} | \mathbf{y})$  são os estados distintos da distribuição de interesse.

Uma questão importante de ordem prática é como os valores iniciais influenciam o comportamento da cadeia. A idéia é que conforme o número de iterações aumenta, a cadeia gradualmente se afastam dos valores iniciais e converge para uma distribuição de equilíbrio. Assim,

em aplicações práticas é comum que as iterações iniciais sejam descartadas, como se formassem uma *amostra de aquecimento*. O problema então consiste em construir algoritmos que gerem cadeias de Markov cuja distribuição converge para a distribuição de interesse. Um destes algoritmos é o de Metropolis-Hastings (HASTINGS, 1970), descrito a seguir.

#### 4.5.2 Algoritmo Metropolis-Hastings

O algoritmo de Metropolis-Hastings usa a mesma idéia dos métodos de rejeição, isto é, um valor é gerado de uma distribuição auxiliar e aceito com uma dada probabilidade. Este mecanismo de correção garante a convergência da cadeia para a distribuição de equilíbrio.

O algoritmo Metropolis-Hastings faz uso de uma função densidade de probabilidade auxiliar  $q(\mathbf{P}^*/\mathbf{P})$ , da qual é fácil obter valores amostrais. Supondo que a cadeia esteja em um estado  $\mathbf{P}$ , um novo valor candidato,  $\mathbf{P}^*$ , será gerado da distribuição auxiliar  $q(\mathbf{P}^*/\mathbf{P})$ , onde  $\mathbf{P}$  é o vetor dos parâmetros em estudo. Para o presente trabalho, a distribuição auxiliar é dada por

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{P} + 2(rd - 1)(\mathbf{P}_{\max} - \mathbf{P}_{\min})eps \quad (4.44)$$

onde  $rd$  é um número randômico gerado de uma distribuição uniforme no intervalo aberto entre 0 e 1,  $\mathbf{P}_{\max}$  e  $\mathbf{P}_{\min}$  são os limites dos intervalos de cada parâmetro e  $eps$  é o tamanho percentual do passo para a busca aleatória no espaço de estados da posteriori.

O novo valor  $\mathbf{P}^*$  é aceito com probabilidade dada pela Razão de Hastings (HASTINGS, 1970):

$$\beta(\mathbf{P}, \mathbf{P}^*) = \min \left\{ 1, \frac{p(\mathbf{P}^* | \mathbf{y})q(\mathbf{P} | \mathbf{P}^*)}{p(\mathbf{P} | \mathbf{y})q(\mathbf{P}^* | \mathbf{P})} \right\} \quad (4.45)$$

Onde  $p(\mathbf{P} | \mathbf{y})$  é a função de densidade de probabilidade a posteriori de interesse. Uma observação importante é que só precisamos conhecer  $p(\mathbf{P} | \mathbf{y})$  a menos de uma constante. Uma vez que estamos trabalhando com razões entre densidades, a constante de normalização se cancela. Isto é fundamental em aplicações Bayesianas, onde a densidade a posteriori não é conhecida completamente. Nota-se também que a cadeia pode permanecer no mesmo estado por muitas iterações e, na prática, costuma-se monitorar isto calculando a porcentagem média de iterações para as quais novos valores são aceitos.

Em termos práticos, o algoritmo de Metropolis-Hastings pode ser especificado pelos seguintes passos (EHLERS, 2004):

1. Inicialize o contador de iterações  $z = 0$  e especifique um valor inicial  $\mathbf{P}^{(0)}$ ;
2. Gere um vetor candidato  $\mathbf{P}^*$  da distribuição  $q(\mathbf{P}^*/\mathbf{P})$  usando a Equação (4.44);
3. Calcule a probabilidade de aceitação  $\beta(\mathbf{P}, \mathbf{P}^*)$  usando a Equação (4.45);
4. Gere uma amostra aleatória auxiliar de uma distribuição uniforme:  $u \sim U(0, 1)$ ;

5. Se  $u \leq \beta$  então aceite o novo estado e faça  $P^{(z+1)}=P^*$ . Caso contrário, rejeite o novo vetor e faça  $P^{(z+1)}=P^{(z)}$ ;
6. Incremente o contador de  $z$  para  $z + 1$  e volte ao passo 2.

Dessa maneira, consegue-se a seqüência que representa a distribuição posteriori e a inferência nessa distribuição é obtida pela inferência nas amostras  $\{P^1, P^2, \dots, P^z\}$ . Nota-se que os valores de  $P^z$  devem ser ignorados até que a cadeia atinja o equilíbrio.

#### 4.5.3 O método de Monte Carlo via Cadeias de Markov aplicado à estratégia nodal

Na estratégia nodal, descrita na seção 4.1, a matriz de sensibilidade é calculada pelas medidas. Dessa maneira, na implementação do algoritmo de Metropolis-Hastings a incerteza no cálculo da matriz de sensibilidade deve ser levada em conta. Supondo que  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{J}$  são variáveis aleatórias independentes, a densidade de probabilidade a posteriori é então dada por:

$$p(\mathbf{P}, \mathbf{J} | \mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y} | \mathbf{P}, \mathbf{J}) p(\mathbf{P}) p(\mathbf{J}) \quad (4.46)$$

Onde  $p(\mathbf{J})$  é a distribuição a priori para a matriz de sensibilidade  $\mathbf{J}$ . Os erros nas medidas de temperatura são assumidos aditivos, não-correlacionados, distribuídos normalmente, com média zero e desvio padrão conhecido  $\sigma$ . As medidas  $\mathbf{y}$  usadas no modelo linear (4.7) são compostas da diferença de temperatura nodal em tempos subseqüente (eq.(4.3)). Desta maneira, a verossimilhança  $p(\mathbf{y} | \mathbf{P}, \mathbf{J})$  é dada pela eq.(4.40), com matriz de covariância dada por  $\mathbf{W}^{-1} = 2 \sigma^2 \mathbf{I}$ . Com tal hipótese com relação a medida de temperatura, a distribuição a priori para os elementos da matriz de sensibilidade são também normais, com valores médios dados pela eq. (4.8) e desvio padrão deduzido da eq. (4.2) de maneira que:

$$\sigma_L = \sigma \Delta t \sqrt{6(\Delta x)^{-2} + 6(\Delta y)^{-2}} \quad \text{para } L_{i,j}^n \quad (4.47)$$

#### 4.6 Método de solução do problema inverso Tipo II

Em diversas aplicações, podemos encontrar situações onde as medidas que constituem os dados de um problema inverso são feitas em um meio não estacionário. Mais precisamente, a quantidade física que é de interesse do problema pode ser dependente do tempo, e os dados medidos dependem dessas quantidades em diferentes tempos (KAPIO e SOMERSALO, 2004b). Por exemplo, considere o monitoramento contínuo do coração humano pela medida do campo magnético fora do corpo devido ao bioeletromagnetismo. Nessas medidas, o sinal observado é fraco e o nível de ruído é alto. Se a medida fosse feita em uma fonte estática, poderíamos fazer uma média da seqüência de medidas para reduzir o nível de ruído. Entretanto, medidas em diferentes tempos dão informações do estado do coração naquele momento particular, e uma média das medidas em diferentes tempos

proveriam um sinal sem sentido físico (KAPIO e SOMERSALO, 2004b). Problemas inversos desse tipo são conhecidos como *problemas inversos não estacionários* ou *problemas de estimação de estados*. Modelos Bayesianos para problemas inversos de estimação de estados são conhecidos como filtros Bayesianos. O método mais utilizado dentre os filtros Bayesianos é o Filtro de Kalman, que será apresentado na próxima seção.

#### 4.6.1 Filtro de Kalman

O Filtro de Kalman é um *algoritmo recursivo ótimo de processamento de dados*. Existem várias maneiras de se definir *ótimo*, dependendo do critério escolhido para avaliar o desempenho do método. Pode-se mostrar que sob certas hipóteses que serão apresentadas nesta seção, o filtro de Kalman é ótimo com relação a qualquer critério. Um aspecto dessa otimização é que o filtro de Kalman incorpora toda a informação que lhe pode ser fornecida. Toda a medida é processada, independente de sua precisão, para a estimação da variável de interesse, com o uso: (i) do conhecimento do sistema e da dinâmica do aparato de medida, (ii) da descrição estatística do ruído do sistema e do erro de medida e (iii) da informação da condição inicial da variável de interesse. Por exemplo, para a determinação da velocidade de uma aeronave, pode-se usar um radar Doppler, ou a indicação de velocidade de um sistema inercial de navegação, ou ainda um pitot, a pressão estática e a informação do vento relativo no sistema de dados de ar de uma aeronave. Ao invés de ignorar algum desses dados de saída, o filtro de Kalman pode ser escrito de forma a combinar todos esses dados e conhecimentos da dinâmica do sistema para gerar uma estimação global da velocidade (MAYBECK, 1979).

Conceitualmente, o que qualquer filtro tenta fazer é obter uma estimação *ótima* das quantidades desejadas a partir de dados fornecidos por um meio com ruído, onde o termo *ótimo* significa que o erro é minimizado de alguma forma. Existem diversas formas de atingir esse objetivo. Se a inferência Bayesiana for adotada, o que desejamos é que o filtro propague a densidade de probabilidade condicional das quantidades desejadas, condicionada ao conhecimento do dado atual obtido de um dispositivo de medida (MAYBECK, 1979).

O filtro de Kalman realiza esta propagação da densidade de probabilidade condicional para problemas em que o sistema pode ser descrito por um modelo linear e na qual os ruídos do sistema e de medidas são Gaussianos, aditivos, com médias e matrizes de covariância conhecidas. Sob estas condições, a média, moda e mediana e qualquer escolha para uma estimativa *ótima* coincidem, gerando então uma estimativa única e *melhor* para o valor do estado. Sob estas três restrições, o filtro de Kalman pode ser demonstrado como sendo o melhor filtro dentre todos os que possam ser concebidos (MAYBECK, 1979).

O termo *filtro* é mais comumente empregado para dispositivos físicos utilizados na remoção de frações indesejadas em misturas. Desta forma um filtro é um dispositivo utilizado na separação de

componentes indesejados de uma mistura gás-líquido-sólido. Na era dos rádios de galena e tubos de vácuo, o termo foi aplicado em circuitos analógicos que filtravam sinais eletrônicos. Os sinais eram misturas de diferentes frequências, e esses dispositivos físicos atenuavam preferencialmente frequências indesejadas. Este conceito foi estendido nos anos 30 e 40 para a separação do sinal do ruído.

Com o filtro de Kalman o termo assumiu o significado que vai além da ideia original de separação. Ele também incluiu a solução de um problema inverso, na qual se sabe representar as variáveis medidas em função das principais variáveis de interesse. Essas variáveis de interesse podem ser dinâmicas, cujo conhecimento dinâmico é parcialmente previsível (GREWAL e ANDREWS, 2001).

O impacto do filtro de Kalman na tecnologia foi, do ponto de vista dos envolvidos em problemas de estimação de controle, a grande realização em teoria da estimação do século 20. Diversas conquistas desde sua introdução não poderiam ter sido realizadas sem o filtro de Kalman. Em particular ele foi uma das tecnologias que tornou possível o desenvolvimento espacial. A navegação precisa e eficiente de espaçonaves através do sistema solar não teria sido possível sem o filtro de Kalman (GREWAL e ANDREWS, 2001).

Os principais usos do filtro de Kalman têm sido em sistemas de controles modernos, em rastreamento e navegação de todo tipo de veículo, e no projeto de previsão em estimação e sistema de controle (GREWAL e ANDREWS, 2001).

Para a definição do problema de estimação de estados, considera-se um modelo de evolução do vetor de estados  $\mathbf{x}$  na forma:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{v}_{n-1}) \quad (4.48)$$

Onde o subscrito  $n=1, \dots, K$  é referente um instante de tempo  $t_n$  em um problema dinâmico. O vetor  $\mathbf{x} \in R^{n_x}$  é chamado de *vetor de estados* e contém as variáveis a serem dinamicamente estimadas. Este vetor avança de acordo com o *modelo de evolução de estados* dado pela equação (4.48), onde  $\mathbf{f}$  é em um caso geral, uma função não linear das variáveis de estados  $\mathbf{y}$  e do vetor de incertezas  $\mathbf{v} \in R^{n_v}$ .

Considera-se também que as medidas  $\mathbf{y} \in R^{n_z}$  estão disponíveis em  $t_n, n=1, \dots, K$ . As medidas são relacionadas à variável de estado  $\mathbf{x}$  pela função geral e possivelmente não linear  $\mathbf{h}$  na forma

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{h}_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{n}_n) \quad (4.49)$$

Onde  $\mathbf{n} \in R^{n_n}$  é a incerteza da medida. A equação (4.49) é chamada de incerteza do modelo de observação (ou de medida).

O objetivo do problema de estimação de estado é de obter informação sobre  $\mathbf{x}_n$  baseado no modelo de evolução de estado (equação (4.48)) e nas medidas  $\mathbf{y}_{1:K}=\{\mathbf{y}_n, n=1\dots K\}$  dadas pelo modelo de observação (equação (4.49)) (KAPIO e SOMERSALO, 2004b, ORLANDE, 2011, KAPIO *et al.*, 2005, MAYBECK, 1979, DOUCET *et al.*, 2001, RISTI *et al.*, 2004).

Os modelos de evolução e observação dados pelas equações (4.48) e (4.49) são baseadas nas seguintes hipóteses (KAPIO e SOMERSALO, 2004b, KAPIO *et al.*, 2005, MAYBECK, 1979, DOUCET *et al.*, 2001, RISTI *et al.*, 2004):

- A sequência  $\mathbf{x}_n$  para  $n=1,2,\dots,K$  é um processo Markoviano, isto é

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) \quad (4.50)$$

- A sequência  $\mathbf{y}_n$  para  $n=1,2,\dots,K$  é um processo Markoviano com relação à história de  $\mathbf{x}_n$ , isto é

$$p(\mathbf{y}_n | \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}_{1:n-1}) = p(\mathbf{y}_n | \mathbf{x}_{n-1}) \quad (4.51)$$

- A sequência  $\mathbf{x}_k$  depende das observações passadas somente através de sua própria história, isto é

$$p(\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{n-1}) = p(\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_{n-1}) \quad (4.52)$$

Além disso, para os modelos de evolução e observação dados pelas equações (4.48) e (4.49), é assumido que para  $i \neq j$  o vetor de incerteza  $\mathbf{v}_i$  e  $\mathbf{v}_j$ , assim como  $\mathbf{n}_i$  e  $\mathbf{n}_j$ , são mutuamente independentes e também mutuamente independentes do estado inicial  $\mathbf{y}_0$ . Os vetores  $\mathbf{v}_i$  e  $\mathbf{n}_j$  são também supostos mutuamente independentes para todo  $i$  e  $j$  (KAPIO e SOMERSALO, 2004b, KAPIO *et al.*, 2005, MAYBECK, 1979, DOUCET *et al.*, 2001, RISTI *et al.*, 2004).

Diversos problemas podem ser considerados com os modelos de evolução e observação apresentados (KAPIO e SOMERSALO, 2004b):

- O *problema de previsão*, que trata da determinação de  $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{1:n-1})$ ;
- O *problema de filtragem*, que trata da determinação de  $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{1:n})$ ;
- O *problema de suavização de retardos fixos*, que trata da determinação de  $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{1:n+p})$ , onde  $p \geq 1$  é o atraso fixo;
- O *problema de suavização do domínio completo*, que trata da determinação de  $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{1:K})$ , onde  $\mathbf{y}_{1:K}=\{\mathbf{y}_n, n=1\dots K\}$  é a sequência completa de medidas.

Este trabalho trata somente com o problema de filtragem. Assumindo que  $p(\mathbf{x}_0 | \mathbf{x}_0) = p(\mathbf{x}_0)$  está disponível, a densidade de probabilidade posterior  $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{1:n})$  é obtida com o filtro Bayesiano

em dois passos (KAPIO e SOMERSALO, 2004b): *previsão* e *atualização*, como apresentado na Figura 4-3. A próxima seção apresenta a forma do filtro de Kalman escrito especificamente para este trabalho.

#### 4.6.2 O filtro de Kalman aplicado à estratégia nodal

Para a aplicação do filtro de Kalman é suposto que os modelos de observação e evolução dados pelas equações (4.48) e (4.49) são lineares. É feita também a hipótese de que o ruído nesses modelos são aditivos, Gaussianos, com as médias e covariâncias conhecidas. Desta maneira, a densidade posteriori  $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{1:n})$  em  $t_n, n=1,2,\dots,K$ , é Gaussiana e o resultado do filtro de Kalman é a solução ótima para o problema de estimação de estado, isto é, o cálculo da densidade a posteriori é um resultado exato (KAPIO e SOMERSALO, 2004b, KAPIO *et al.*, 2005, MAYBECK, 1979, DOUCET *et al.*, 2001, RISTI *et al.*, 2004).

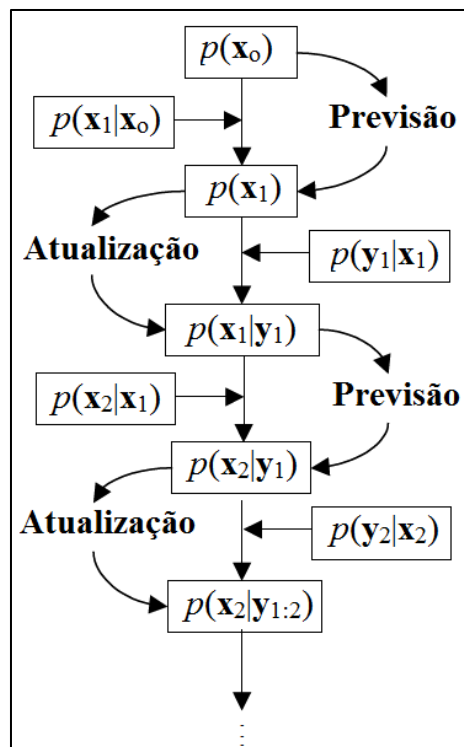


Figura 4-3 Passos de previsão e atualização para o filtro de Kalman

Com as hipóteses supracitadas, os modelos de evolução e observação podem ser escritos respectivamente como:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{x}_n + \mathbf{s}_{n+1} + \mathbf{v}_n \quad (4.53)$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{H}_{n+1} \mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{n}_{n+1} \quad (4.54)$$

Onde  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{H}$  são matrizes conhecidas para a evolução linear dos estados  $\mathbf{x}$  e das observações  $\mathbf{y}$ , respectivamente, e  $\mathbf{s}$  é um vetor conhecido para o modelo de evolução dos estados. Assumindo-se



que as incertezas  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{n}$  têm média zero e matrizes de covariância  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ , respectivamente, os passos de previsão e atualização do filtro de Kalman são dados por (KAIPIO e SOMERSALO, 2004b, KAIPIO *et al.*, 2005, MAYBECK, 1979, DOUCET *et al.*, 2001, RISTI *et al.*, 2004, KALMAN, 1960, SORENSON, 1970, WELCH e BISHOP, 2006) :

**Previsão:**

$$\mathbf{x}_{n+1}^- = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{x}_n + \mathbf{s}_{n+1} \quad (4.55)$$

$$\mathbf{E}_{n+1}^- = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{E}_n \mathbf{F}_{n+1}^T + \mathbf{Q}_{n+1} \quad (4.56)$$

**Atualização:**

$$\mathbf{K}_{n+1} = \mathbf{E}_{n+1}^- \mathbf{H}_{n+1}^T \left( \mathbf{H}_{n+1} \mathbf{E}_{n+1}^- \mathbf{H}_{n+1}^T + \mathbf{R}_{n+1} \right)^{-1} \quad (4.57)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1}^- + \mathbf{K}_{n+1} (\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{H}_{n+1} \mathbf{x}_{n+1}^-) \quad (4.58)$$

$$\mathbf{E}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{E}_{k+1}^- \quad (4.59)$$

A matriz  $\mathbf{K}$  é chamada de matriz de ganho de Kalman. Observa-se que após a previsão da variável de estado  $\mathbf{x}$  e sua matriz de covariância  $\mathbf{E}$  com as equações (4.55) e (4.56), uma estimativa a posteriori dessas variáveis são obtidas no passo de atualização fazendo-se uso das medidas  $\mathbf{y}$ .

Para a aplicação do filtro de Kalman para o presente trabalho, a Equação (4.11) precisa ser reescrita de forma que a natureza estocástica no calculo da matriz  $\mathbf{J}$  seja levada em conta. Dessa forma, escreve-se:

$$\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{T}^n + \mathbf{J}^n \mathbf{P}^n + \mathbf{v}_T^{n+1} \quad (4.60)$$

Onde  $\mathbf{v}_T^{n+1}$  é Gaussiano com matriz de covariância  $\mathbf{Q}_T$ , que é resultado da propagação de incertezas em  $\mathbf{T}^{n+1}$  devido às incertezas em  $\mathbf{J}^n$ ,  $\mathbf{T}^n$  e  $\mathbf{P}^n$ . A matriz de covariância  $\mathbf{Q}_T$  é então dada por

$$\mathbf{Q}_T^{n+1} = \mathbf{Q}_T^n + (\mathbf{P}^n \mathbf{Q}_{\mathbf{J}^n})^2 \mathbf{J}^n + \left( \sqrt{\mathbf{P}^n} \binom{n}{n}^T \right)^2 \quad (4.61)$$

O modelo de evolução para o parâmetro  $\mathbf{P}$  é dado na forma de um *passeio aleatório*, isto é

$$\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{I} \mathbf{P}^n + \mathbf{v}_P^n \quad (4.62)$$

Onde  $\mathbf{v}_P^n$  é também Gaussiano com matriz de covariância  $\mathbf{Q}_P$ .

Na equação (4.62),  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de dimensão  $(N \times M) \times (N \times M)$ , onde  $N$  é o número de parâmetros da equação a serem estimados.

Desta forma, o vetor de variáveis de estado  $\mathbf{y}$  (Equação (4.53)) é composto das variáveis  $\mathbf{T}$  e dos parâmetros  $\mathbf{P}$  e pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{y}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^n \\ \mathbf{P}^n \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

De maneira que

$$\mathbf{v}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_T^n \\ \mathbf{v}_P^n \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

A matriz de covariâncias para  $\mathbf{v}^n$  é então dado por

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_P \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Onde na equação (4.65)  $\mathbf{0}$  é uma matriz de zeros.

Com as variáveis de estado escritas na forma da equação (4.63), a matriz de evolução  $\mathbf{F}$  deve ser escrita na forma apropriada para a aplicação do filtro de Kalman (Equação (4.53)), isto é,

$$\mathbf{F}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J}^n \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Neste trabalho, é assumido que as variáveis medidas são as temperaturas transientes nos nós equidistantes da formulação nodal do problema físico em estudo. Desta maneira, a matriz  $\mathbf{H}$  do modelo de medida (Equação (4.54)) é escrita na forma:

$$\mathbf{H}^n = [\mathbf{I} \ \mathbf{0}] \quad (4.67)$$

O vetor  $\mathbf{n}$  é Gaussiano e com matriz de covariância constante  $\mathbf{R}$ , que é resultado da calibração da câmera por infravermelho usada para obter as medidas.

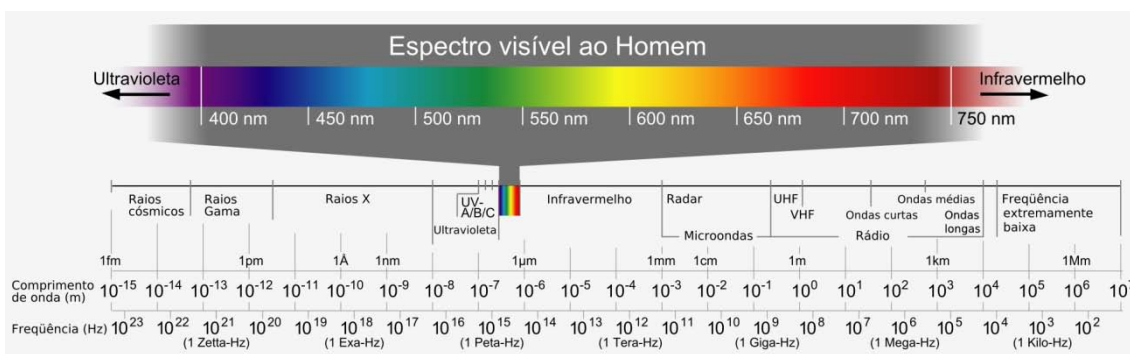
#### **4.7 Termografia por Câmera de Infravermelho**

Os problemas inversos são classificados como mal-postos. Dessa maneira, a solução do problema é altamente sensível a erros. Isto significa que o projeto experimental associado ao processo de medida é um dos fatores principais na qualidade dos resultados. Para o problema inverso de condução, as variáveis medidas são temperatura e fluxo de calor. Neste contexto, a termografia por infravermelho apresenta grandes vantagens: de um lado medidas dependentes da posição e do tempo, e por outro lado, um método de investigação não intrusivo (NILIOT e GALLET, 1998). A última propriedade permite também aplicações industriais, onde é impossível usar sensores de contato na superfície, ou no volume, como por exemplo, em processos rotacionais.

A radiação infravermelha foi descoberta em 1800 por William Herschel, um astrônomo inglês de origem alemã. Herschel colocou um termômetro de mercúrio no espectro obtido por um prisma de cristal com a finalidade de medir o calor emitido por cada cor. Descobriu que o calor era mais forte ao lado do vermelho do espectro, observando que ali não havia luz. Esta foi a primeira experiência que demonstrou que o calor pode ser captado em forma de uma onda, como acontece com a luz visível. Ainda que em seres vertebrados não seja percebida na forma de luz, a radiação infravermelha pode ser percebida como calor por terminações nervosas especializadas na pele, conhecidas como termorreceptores.

Não existe diferença entre a radiação infravermelha e outras ondas eletromagnéticas, como a luz visível, ultravioleta, raios-X ou microondas. Elas se diferem somente pelo comprimento de onda. A fronteira entre o visível e a radiação infravermelha é de aproximadamente  $0.7 \mu\text{m}$  e a fronteira entre o infravermelho e a região de microondas é de  $1000 \mu\text{m}$ . A banda infravermelha pode ser dividida em 3 sub-regiões: a região de infravermelho curto ( $0.7\text{-}2 \mu\text{m}$ ), a região de infravermelho médio ( $2\text{-}20 \mu\text{m}$ ) e a região de infravermelho longo ( $20\text{-}1000 \mu\text{m}$ ) (Hain et al 2005).

A Figura 4-4 apresenta o espectro eletromagnético e apresenta alguns tipos de ondas e seus respectivos comprimentos.



**Figura 4-4 – Espectro Eletromagnético (fonte:www.sbfisica.org.br)**

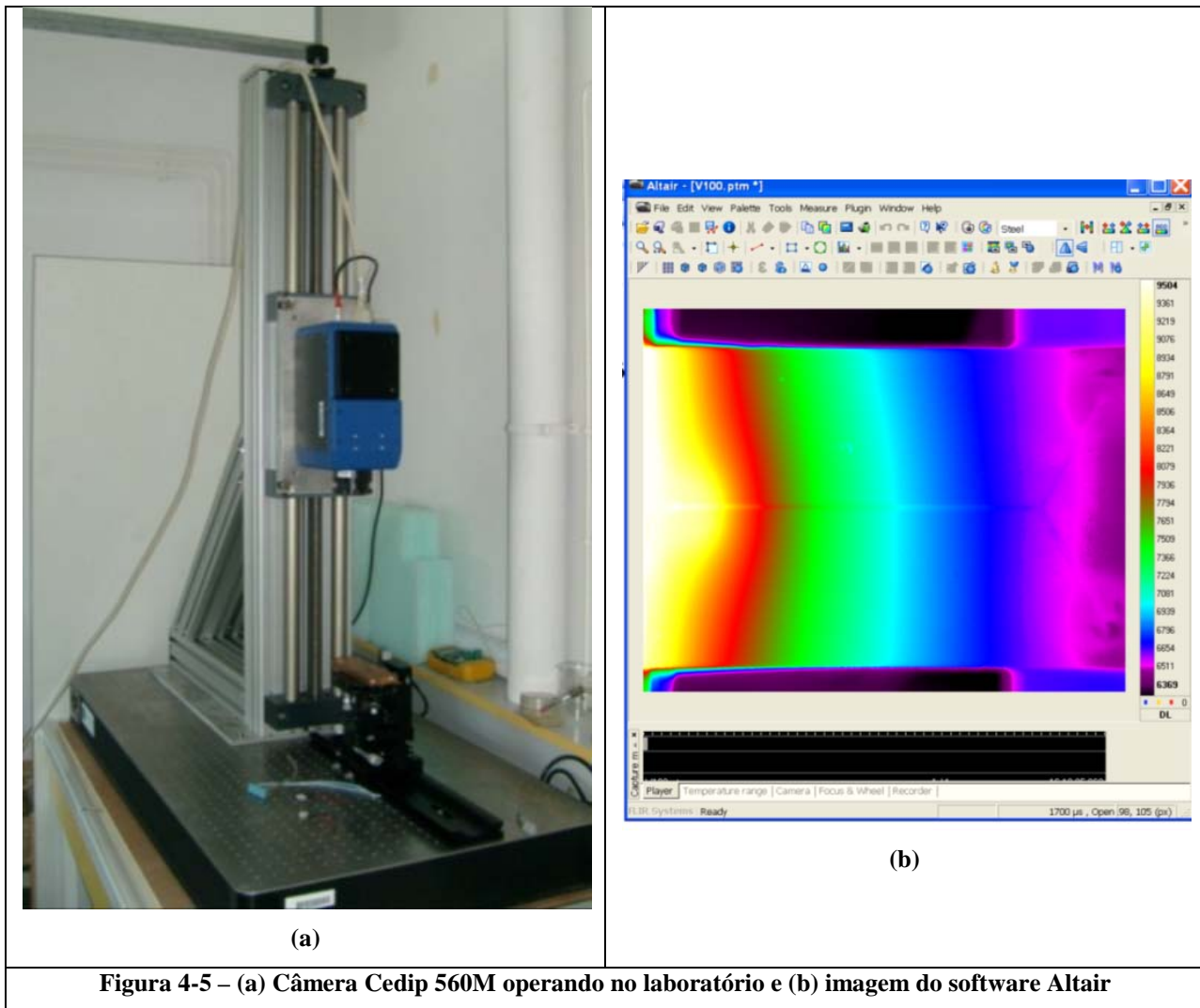
Em princípio, qualquer dispositivo que produza uma resposta à radiação incidente é um detector. O mais comum é o olho, pois existem células fotoreceptoras sobre as quais são formadas as imagens. Entretanto, este tipo de receptor fornece uma resposta qualitativa subjetiva, e o que se deseja ao realizar uma medida são respostas quantitativas. Os detectores que podem fornecer uma medida objetiva e quantitativa de luz podem ser divididos em dois grupos: detectores térmicos e detectores quânticos.

Os detectores térmicos são chamados assim, pois a resposta do detector à radiação é um aumento em sua temperatura, que pode ser detectada pela alteração em alguma propriedade do material, como por exemplo, a resistência elétrica.

Os detectores quânticos emitem elétrons em função da taxa de fótons incidentes, ao invés de medirem o aquecimento do elemento devido à radiação incidente.

#### 4.7.1 Câmera CEDIP Titanium 560M

Neste trabalho, a câmera utilizada para a aquisição dos dados experimentais é a Titanium 560M da Cedip Infrared Systems, com detector quântico de Antimônio-Índio (InSb). Dependendo da quantidade de fótons recebidos, a câmera retorna um sinal elétrico (em volts) que expressa um nível numérico (Digital Level, DL). As funções de transferência fótons/volts e volts/DL são funções lineares crescentes. O detector tem o formato de 640 x 512 pixels, sensível no espectro entre 1.5 e 5.0  $\mu\text{m}$ . Ela permite a programação da frequência de aquisição e existe a possibilidade de realizar medidas em uma área específica da imagem, pelo comando “sub-window”. O tempo de integração é ajustável entre 10 e 20000  $\mu\text{s}$  através de incrementos de 1  $\mu\text{s}$ . O tempo de integração é o tempo durante o qual o detector permanece aberto e coleta o fluxo de dados. Este tempo pode ser comparado com o tempo de abertura do obturador de uma máquina fotográfica convencional. Existe a possibilidade de sincronização da câmera com aparelhos externos, através do “external triggering”. A câmera é equipada com um motor Stirling, de modo que a temperatura de operação seja de 75 K. O consumo de energia é de 50 W durante o tempo de resfriamento e 30 W em regime permanente, operando em uma temperatura externa entre -20 e 55°C. A NETD (Noise equivalent temperature difference) é  $< 25\text{mK}$ . Por definição, a NETD é a diferença de temperatura igual ao ruído interno do detector. Dessa forma, a NETD mede a sensibilidade do detector de radiação térmica. A câmera CEDIP Titanium operando no Laboratório de Microfluídicos do EMAC, está apresentada na Figura 4-5-a. A câmera opera fixada a um aparato responsável pelo seu deslocamento vertical.



A câmera conta com o software de controle Altair®, que é responsável pela aquisição e edição das imagens e filmes, assim como organização dos arquivos, criação e organização dos projetos realizados e o local onde são definidas todas as variáveis para a aquisição das imagens. Além disso, permite definir os parâmetros do trigger externo, para experimentos sincronizados com outros equipamentos, como um gerador de funções por exemplo. A Figura 4-5-b apresenta a tela do software Altair.

#### 4.7.2 Procedimento de Calibração e Medição

Ao realizar a medida, a câmera recebe radiação não somente do objeto medido. Ela recebe também a radiação refletida pela vizinhança. As intensidades de radiação são atenuadas pela atmosfera no caminho entre o objeto e a câmera. Existe ainda a terceira contribuição radiativa, que vem da própria atmosfera.

Esta descrição da situação de medida, conforme apresentado na Figura 4-6 é, com um certo grau uma aproximação real. O que foi desprezado é, por exemplo, a dispersão da luz solar na atmosfera. Esta perturbação em geral é difícil de ser quantificada. Porém felizmente ela é pequena o suficiente

para ser omitida. A partir da Figura 4-6, é possível obter a expressão para o cálculo do sinal em volts de saída da câmera.

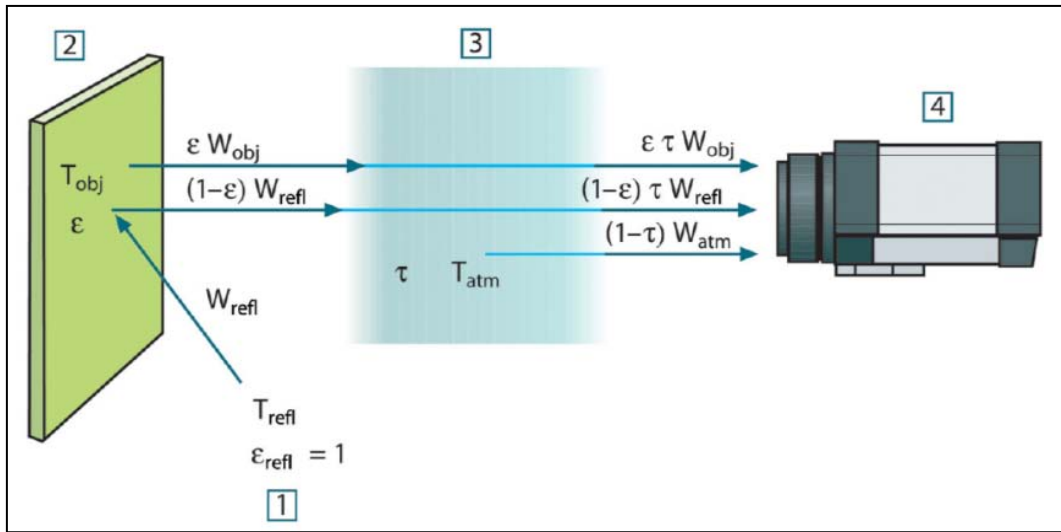


Figura 4-6 – Representação esquemática da situação de medida: 1 – Vizinhança; 2 – Objeto; 3 – Atmosfera; 4 – Câmera.

Assume-se que a radiação  $W_{corpo}$  emitida por um corpo negro e incidente sobre a câmera de temperatura  $T_{corpo}$  a uma curta distância gera um sinal de saída  $U_{corpo}$  na câmera que é proporcional à radiação incidente. Podemos então escrever:

$$U_{corpo} = CW_{corpo} \quad (4.68)$$

Onde  $C$  é uma constante de proporcionalidade. Considerando válida a hipótese de corpo cinza, com emissividade  $\varepsilon$ , a radiação emitida pelo corpo seria consequentemente  $\varepsilon W_{corpo}$ .

Pode-se agora escrever as três parcelas da radiação incidente na câmera:

1 – *Emissão do objeto* =  $\varepsilon \tau W_{obj}$ , onde  $\varepsilon$  é a emissividade do objeto e  $\tau$  é a transmissividade da atmosfera. A temperatura do objeto é  $T_{obj}$ .

2 – *Reflexão da Vizinhança no Objeto* =  $(1 - \varepsilon) \tau W_{refl}$ , onde  $(1 - \varepsilon)$  é a refletividade do objeto. Os objetos na vizinhança têm a temperatura  $T_{refl}$ . Assume-se que a temperatura  $T_{refl}$  é a mesma para todas as superfícies emissivas em uma meia esfera vista de um ponto na superfície do objeto. Isto é em certos casos uma simplificação da situação verdadeira. Entretanto, pode ser usada na derivação de uma fórmula que possa ser usada, e  $T_{refl}$  pode – ao menos teoricamente – ser dada por uma temperatura efetiva, que represente a complexa temperatura da vizinhança.

3 – *Emissão da atmosfera* =  $(1 - \tau) W_{atm}$ , onde  $(1 - \tau)$  é a emissividade da atmosfera. A temperatura da atmosfera é  $T_{atm}$ .

A radiação total recebida pela câmera pode ser escrita como:

$$W_{tot} = \varepsilon \tau W_{obj} + (1 - \varepsilon) \tau W_{refl} + (1 - \tau) W_{atm} \quad (4.69)$$

Multiplicando cada termo da Equação (4.69) por  $C$  e substituindo  $CW$  por  $U$  (de acordo com a Equação (4.68)), obtemos:

$$U_{tot} = \varepsilon\tau U_{obj} + (1 - \varepsilon)\tau U_{refl} + (1 - \tau)U_{atm} \quad (4.70)$$

Resolvendo a Equação (4.70) para  $U_{obj}$  obtêm-se:

$$U_{obj} = \frac{1}{\varepsilon\tau} U_{tot} - \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} U_{refl} + \frac{(1 - \tau)}{\varepsilon\tau} U_{atm} \quad (4.71)$$

Esta é a fórmula geral usada por todos os sistemas termográficos da FLIR. As tensões na Equação (4.71) são:

$U_{obj}$  – Tensão de saída da câmera calculada para um corpo negro de temperatura  $T_{obj}$ , isto é, uma voltagem que pode ser convertida na temperatura do objeto;

$U_{tot}$  – Tensão de saída da câmera;

$U_{refl}$  – Tensão teórica de saída para um corpo negro de temperatura  $T_{refl}$ , de acordo com a calibração;

$U_{atm}$  – Tensão teórica de saída para um corpo negro de temperatura  $T_{atm}$  de acordo com a calibração;

Uma função de transferência não-linear converte o nível numérico dado pela câmera em temperatura. Para isto, deve-se definir esta função de transferência através da realização do procedimento de calibração. Os parâmetros que influenciam neste processo são o tempo de integração e o caminho ótico (lente usada, distância do objeto à câmera, etc.). No caso da câmera utilizada nos experimentos, existem dois tipos de lentes: Uma de 50 mm com campo visual de 8° por 13°, para experimentos que não necessitem de aumento; e uma de 10 mm, com campo visual de 7 mm por 9 mm, para experimentos na qual exista a necessidade de aumento.

Dessa maneira, o fluxo de fótons que chega à câmera é diretamente proporcional ao caminho ótico e ao tempo de integração. Assim cada curva de calibração deve ser feita para a sua respectiva configuração experimental.

A calibração é feita posicionando-se um corpo negro diante da câmera, e gradativamente aumentando-se a temperatura dentro da faixa que se deseja trabalhar, conforme apresentado na Figura 4-7. Em intervalos regulares é feita a medida de temperatura, e a de nível numérico. No caso da calibração realizada neste trabalho, foi utilizado o corpo negro estendido SR-800 da CI Systems, com uma área de 10 por 10 cm. A uniformidade é de  $\pm 0.001$  °C, e a precisão é de 0.008 °C. A emissividade é dada por  $0.97 \pm 0.02$ . Ao final do processo, deve-se ter uma curva com a apresentada na Figura 4-8.



Figura 4-7 Calibração da Câmera

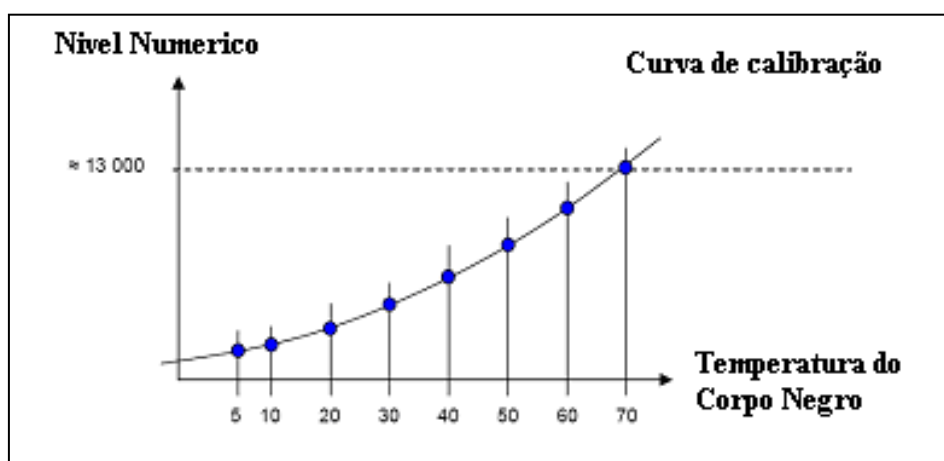


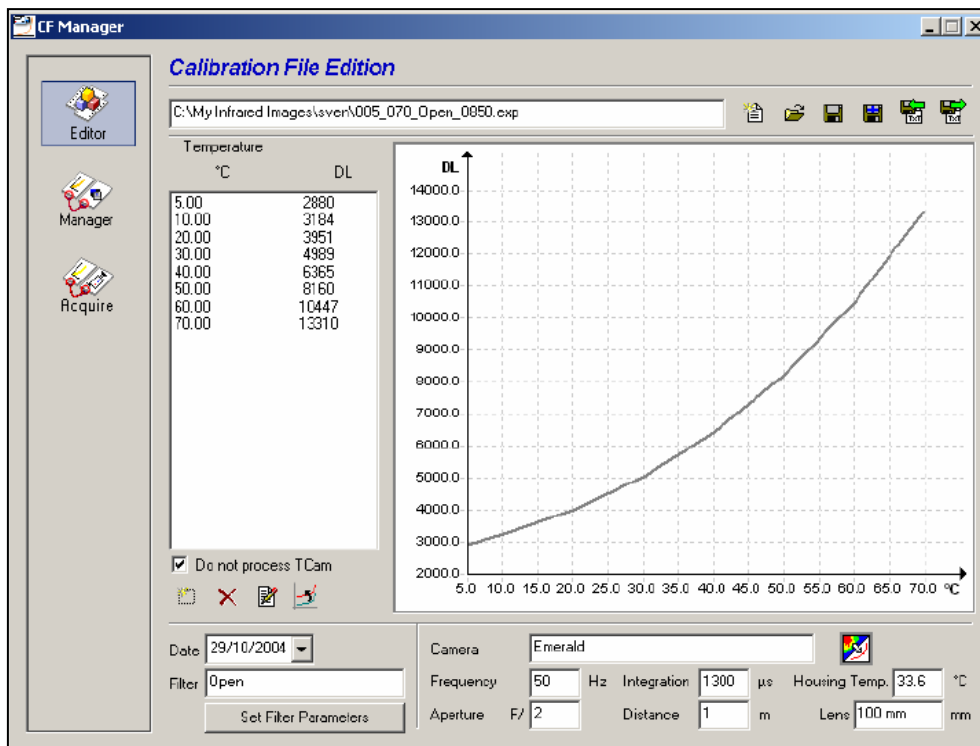
Figura 4-8 Curva de calibração típica

O software “Calibration File Manager”, disponibilizado com a câmera executa a tarefa de fornecer a curva, assim como exporta a curva de calibração para a câmera. A Figura 4-9 apresenta a tela do software.

As primeiras câmeras por infravermelho disponibilizadas no mercado usavam apenas um detector. A superfície a ser estudada era medida usando um scanner que era um equipamento dotado de um espelho. A presente câmera é equipada com uma matriz feita de vários detectores, que correspondem aos *pixels*, (palavra que vem de *Picture Element* da imagem). Esta tecnologia permite altas taxas de captura de imagens, e garante alta confiabilidade em um equipamento sem sistemas móveis e detectores que são independentes uns dos outros. Isto vem, entretanto, com o custo de características discrepantes entre os sensores, o que afeta a qualidade da imagem. A correção de não



uniformidade (NUC) é feita para compensar essas discrepâncias. A NUC é essencial para fornecer imagens coerentes.



**Figura 4-9 Software Calibration File Manager**

Cada detector (com coordenadas  $i,j$ ) tem seu próprio parâmetro de ganho ( $\eta_{ij}$ ) e offset ( $\lambda_{ij}$ ). A correção consiste em trazer a curva de cada detector em uma linha com a curva média com relação a toda a matriz, conforme a Figura 4-10.

Dessa maneira, deseja-se obter:  $\bar{y} = y_{i,j} = \eta_{i,j} x_{i,j} + \lambda_{i,j}$ , onde  $\bar{y}$  é a média das respostas dos detectores. Em outras palavras, a resposta de cada detector após a correção é igual a média das respostas de todos os detectores. O procedimento para a realização da NUC é feito automaticamente pelo software Cirrus®, disponibilizado com a câmera. Existem dois métodos de NUC. O método com dois pontos é realizado quando for feito um experimento no qual seja necessário alterar o tempo de integração, o filtro, a lente, ou quando for necessário reduzir o tamanho da imagem. Neste caso, tanto o ganho quanto o offset são atualizados. O método de um ponto é para o caso onde somente o offset é atualizado e é realizado todas as vezes que a câmera é ligada. Para realizar a NUC de dois pontos, é necessário posicionar um corpo negro em frente à câmera em duas temperaturas distintas, normalmente 30 % acima de menor temperatura do experimento, e 30 % abaixo da maior temperatura. Para a NUC de um ponto, basta posicionar um corpo negro na frente da câmera. Além do mais, durante o processo da NUC pode ser feito o processo de substituição dos pixels defeituosos, processo inteiramente automático, na qual um software detecta os pixels que

apresentam falha de medida, ou que divergem excessivamente de valores médios. O software repõe esses “vazios” com a substituição desses pixels por um valor médio de todos os pixels vizinhos.

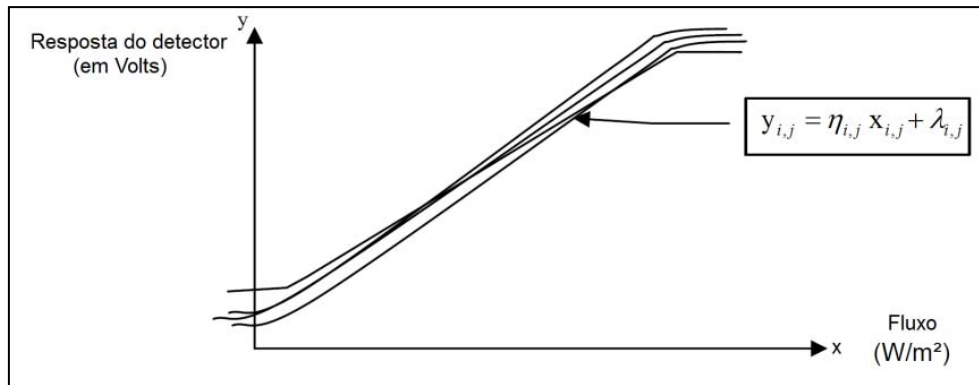


Figura 4-10 – Curva de NUC

Para a solução de problemas inversos dos tipos I e II com medidas reais, a técnica de medida deve respeitar as hipóteses estatísticas feitas para a obtenção do vetor de parâmetros desconhecidos pelo método MCMC e pelo filtro de Kalman. Dessa maneira, as hipóteses de erros nas medidas de temperatura serem assumidos como sendo aditivos, não-correlacionados, distribuídos normalmente, com média zero e desvio padrão conhecido  $\sigma$  são apresentados a seguir.

A hipótese de erros não correlacionados não é respeitada nos locais onde é feita a substituição de pixels defeituosos pela média dos vizinhos, porém esses pixels representam menos de 1% do total da matriz, o que não compromete esta hipótese.

A hipótese de distribuição normal com média zero pode ser observada pela Figura 4.11, onde a imagem da esquerda representa a medida feita do corpo negro a 23°C. Observa-se pelo histograma, à direita na figura, que este é centrado em 22.3°C e com uma distribuição Gaussiana. A diferença de 0.7 °C está dentro da incerteza da medida feita pela câmera e fornecida pelo fabricante com sendo de  $\pm 1$  °C.

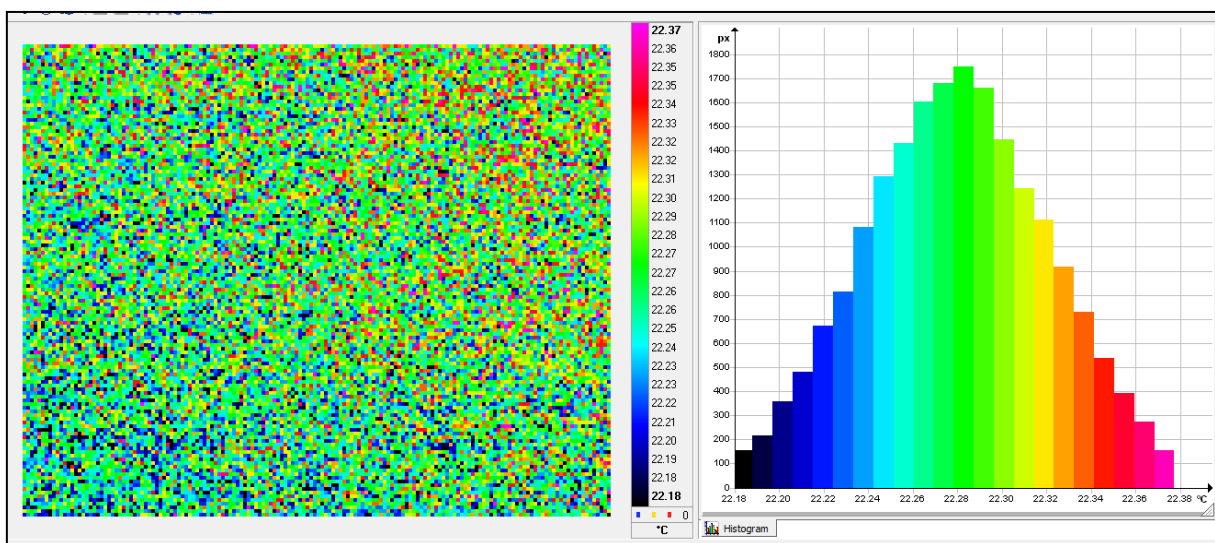


Figura 4-11 – Histograma da distribuição de temperatura da câmera

Para a hipótese de desvio padrão conhecido, este foi caracterizado fazendo-se 400 imagens a uma temperatura constante do corpo negro estendido. Em seguida, foi feita uma imagem onde o desvio padrão de cada pixel  $i,j$  é igual ao desvio padrão no tempo para as 400 imagens neste pixel. Então foi feita uma média desta matriz, e o desvio padrão resultante foi plotado contra a temperatura, conforme as Figuras 4-12-a-b, respectivamente para a lente de 50 mm e para a lente G1 (10 mm) para uma faixa de temperatura entre 15 e 60 °C.

O desvio padrão para o tempo de integração de 1000  $\mu\text{s}$  foi menor que o desvio padrão para o tempo de integração de 200 e 100  $\mu\text{s}$ . O desvio padrão para ambas as lentes foi próximo de 0.03 °C para o tempo de integração de 1000  $\mu\text{s}$ . Esses resultados se devem ao maior tempo na qual o detector coleta o fluxo de dados, dessa forma fornecendo resultados com menor incerteza.

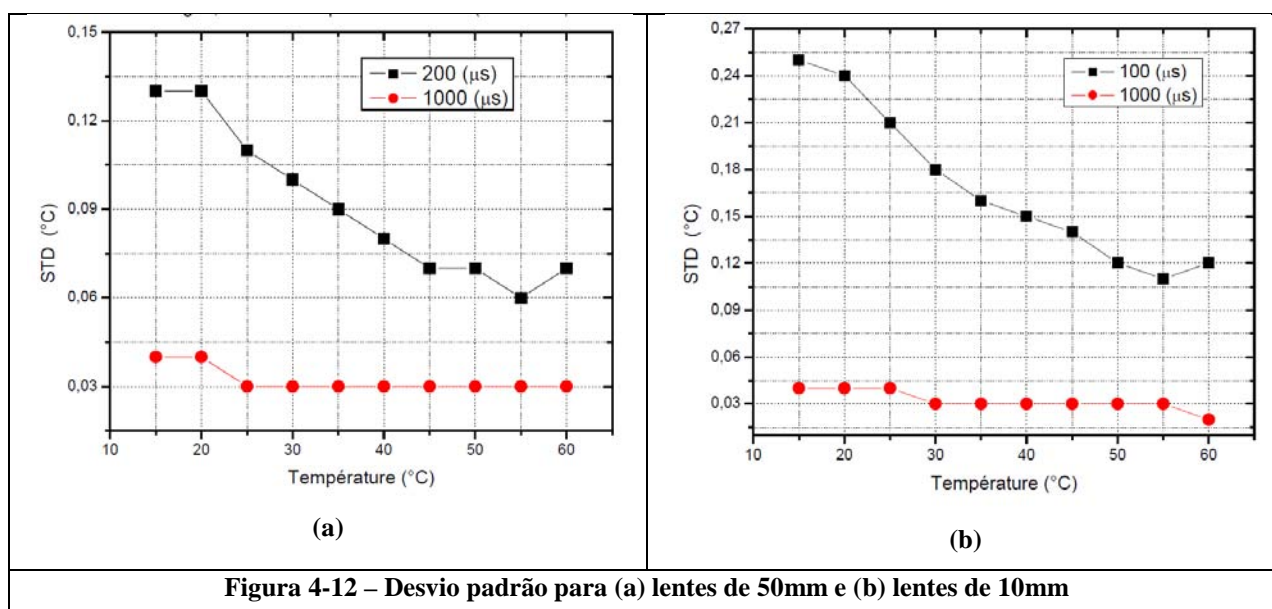


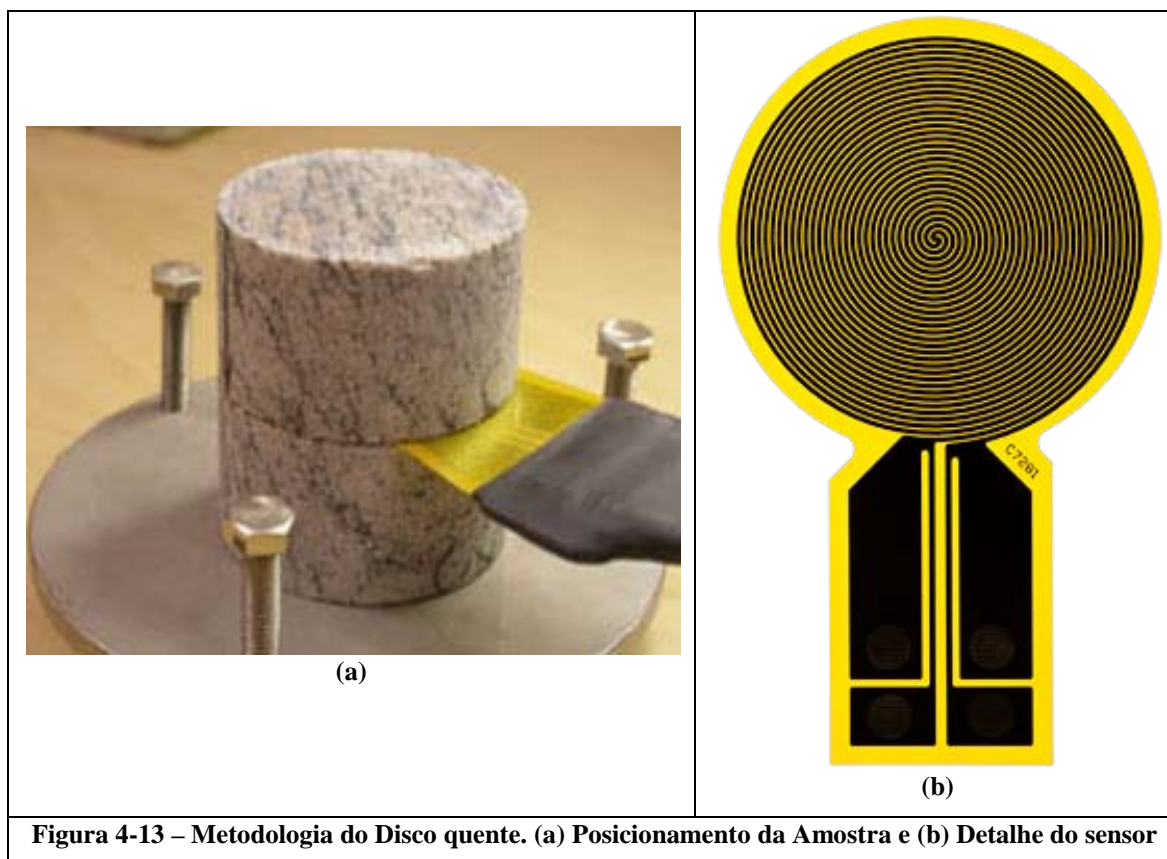
Figura 4-12 – Desvio padrão para (a) lentes de 50mm e (b) lentes de 10mm

#### 4.8 Procedimento experimental

Experimentos controlados foram realizados com uma placa fabricada em resina epóxi, cujas propriedades termofísicas foram determinadas de três maneiras distintas: O método da Fonte Plana Transiente (comercialmente conhecida como Disco Quente), o método Flash em um equipamento comercial e pelo método Flash em uma montagem desenvolvida no Laboratório de Microfluídicos da EMAC. Para o método do Disco Quente, o equipamento utilizado foi o TPS 2500 da Hot Disk AB, operando no Laboratório de Propriedades Térmicas da EMAC. Para o método Flash, o equipamento utilizado foi o NETZSCH LFA 447/1 operando no LTTC/COPPE/UFRJ.

O método do Disco Quente é uma metodologia recente, desenvolvida para a estimação da condutividade térmica e da difusividade térmica de materiais sólidos, líquidos, pastas e materiais porosos na faixa de 0.005 a 500 W/(mK) em uma faixa de temperatura de 30 a 1000K. Este método

foi baseado na teoria desenvolvida por GUSTAFSSON (1991), que a partir de sua publicação patenteou e comercializou uma série de equipamentos para a realização desse tipo de teste. Os equipamentos desenvolvidos por Gustafsson usam um sensor em forma de espiral dupla de Níquel, com 10  $\mu\text{m}$  de espessura. Este sensor age como uma fonte de calor para o aumento da temperatura da amostra e possui também um termistor, para a leitura da temperatura. O sensor é posicionado entre dois pedaços idênticos do corpo de prova a ser testado, conforme apresentado na Figura 4-13-a. O sensor é construído em fita de Kapton para fornecer resistência mecânica e isolamento elétrico, conforme apresentado na Figura 4-13-b.



**Figura 4-13 – Metodologia do Disco quente. (a) Posicionamento da Amostra e (b) Detalhe do sensor**

O experimento é feito pela leitura da alteração da tensão elétrica no sensor, enquanto a amostra sofre um pequeno aquecimento por uma corrente elétrica. O tempo de aquecimento deve ser curto o suficiente para que a hipótese de transferência de calor em um meio infinito seja considerada. Desta forma, o tempo de uma medida deve ser escolhido de maneira que os contornos da amostra não influenciem o aumento de temperatura do corpo de prova. As primeiras medidas normalmente são desconsideradas devido à inércia térmica da sonda.

Um potencial elétrico constante aplicado ao sensor resulta em um aumento de temperatura igual a  $\Delta T(t)$  que é diretamente relacionado à variação na resistência do sensor  $D(t)$  pela equação:

$$D(t) = D_o \left[ 1 + \nu \cdot \Delta \bar{T}(t) \right] \quad (4.72)$$

Onde  $D_o$  é a resistência elétrica do Níquel antes do início do experimento,  $v$  é o coeficiente que relaciona a medida da resistência elétrica à medida de temperatura, e  $\Delta\bar{T}(t)$  é o valor médio do aumento da temperatura do sensor com o tempo.

O perfil de temperatura é obtido pela resolução da equação de transferência de calor em um meio infinito. No caso particular da geometria usada no experimento com  $n$  fontes de calor circulares e concêntricas,  $\Delta\bar{T}(t)$  pode ser obtida pela equação (SOLORZANO *et al.*, 2008):

$$\Delta\bar{T}(\tau) = P_o \left( \pi^{3/2} r k \right)^{-1} D(\tau) \quad (4.73)$$

Onde  $P_o$  é a potência dissipada pela resistência,  $k$  é a condutividade térmica do material,  $D(\tau)$  é uma função geométrica que é característica do número  $n$  de anéis concêntricos e  $\Delta\bar{T}(t)$  é o aumento de temperatura no sensor expresso em termos de uma variável  $\tau$  definida como:

$$\tau = \left( t/\vartheta \right)^{1/2}; \vartheta = r^2/\alpha \quad (4.74)$$

Onde  $t$  é o tempo de medida a partir do início do aquecimento,  $\vartheta$  é o tempo característico que depende de parâmetros do sensor e da amostra,  $r$  é o raio do sensor e  $\alpha$  é a difusividade térmica da amostra.

A condutividade térmica é obtida ajustando-se os dados experimentais à curva dada pela equação (4.73); a difusividade térmica é calculada da equação (4.74), levando-se em conta o valor de  $\tau$ , determinado no ajuste anterior. A capacidade térmica é calculada pela definição de difusividade térmica, isto é,

$$\alpha = \frac{k}{C} \quad (4.75)$$

A Figura 4-14 apresenta o equipamento utilizado para a determinação da difusividade térmica, calor específico e condutividade térmica. Pode-se observar na Figura 4-14-a a bancada experimental e na Figura 4-14-b, em detalhe, o aparato onde a amostra é posicionada.



**Figura 4-14 – Disco quente operando no Laboratório de Propriedades Térmicas. (a) Visão geral do equipamento e (b) Detalhe do porta-amostra**

O resultado obtido para a estimação das propriedades termofísicas do corpo de prova utilizado neste trabalho é apresentado na Tabela 4-1. Foram feitos 4 testes na temperatura ambiente (20 °C). A média das três medidas de difusividade térmica com o Disco Quente foi de 0.24 mm<sup>2</sup>/s, com um desvio padrão de 0.001 mm<sup>2</sup>/s.

**Tabela 4-1 – Resultado do Disco Quente para a resina**

Teste	$\alpha$ (mm <sup>2</sup> /s)	$k$ (W/mK)	$C$ (MJ/m <sup>3</sup> K)
1	0,246	0,442	1,80
2	0,241	0,440	1,83
3	0,242	0,439	1,81
4	0,242	0,439	1,81
<b>Média</b>	<b>0,243</b>	<b>0,440</b>	<b>1,81</b>
<b>Desvio padrão</b>	<b>0,001</b>	<b>0,001</b>	<b>0,01</b>

Para os resultados da estimação das propriedades termofísicas pelo método Flash desenvolvido no laboratório de Microfluidos do RAPSODEE/EMAC, usou-se a metodologia proposta por PARKER (1961). Em 1961, PARKER e colaboradores (PARKER *et al.* 1961) publicaram um trabalho pioneiro no desenvolvimento de métodos para identificação de propriedades termofísicas em materiais sólidos, o qual foi denominado método Flash. Esse método consiste numa amostra pequena e fina de um material sujeito a um pulso de energia de alta intensidade e curta duração. A energia do pulso é absorvida em uma face da amostra e o aumento de temperatura na face oposta é medida. Esse aumento de temperatura deve ser pequeno, para que a hipótese de propriedades constantes seja válida. Para obter a difusividade térmica, PARKER *et al.* (1961) usaram um modelo de condução de calor unidimensional, desprezando perdas de calor e assumindo que a energia é absorvida instantaneamente em uma pequena profundidade do corpo de prova. Considerando-se a

distribuição inicial de temperatura no sólido de espessura  $L$  como  $T(x,0)$ , a distribuição de temperatura em qualquer instante de tempo pode ser descrita como:

$$T(x,t) = \frac{1}{L} \int_0^L T(x,0) dx + \frac{2}{L} \sum_{q=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{q^2 \pi^2 \alpha t}{L^2}\right) \cos\left(\frac{q\pi x}{L}\right) \int_0^L T(x,0) \cos\left(\frac{q\pi x}{L}\right) dx \quad (4.76)$$

Onde  $\alpha$  é a difusividade térmica. Os autores consideraram que um pulso de energia  $Q$  é instantaneamente e uniformemente absorvido (largura do pulso nula) em uma camada fina ( $\xi$ ) do corpo de prova em  $x=0$ , e que as propriedades termofísicas eram constantes com o pequeno aumento de temperatura. Além disso, também assumiram que a condução de calor no corpo de prova era unidimensional, e que as perdas de calor poderiam ser desprezadas. Sob estas condições, a distribuição inicial de temperatura pode ser dada por:

$$T(x,0) = \begin{cases} \frac{Q}{\rho C_p \xi}, & 0 < x < \xi \\ 0, & \xi < x < L \end{cases}$$

Com esta condição inicial, a temperatura na face traseira ( $x = L$ ) do sólido para qualquer instante de tempo pode ser descrita como:

$$T(L,t) = \frac{Q}{\rho C_p L} \left[ 1 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q \exp\left(-q^2 \pi^2 \frac{\alpha t}{L^2}\right) \right] \quad (4.77)$$

A equação (4.77) pode ser escrita na forma adimensional, usando-se os seguintes parâmetros:

$$\Theta = T(L,t)/T_m \quad (4.78)$$

$$\tau = \alpha t / L^2 \quad (4.79)$$

onde  $T_m$  é a temperatura máxima na superfície traseira [ $T_m = T(L, t \rightarrow \infty)$ ]. Substituindo as equações (4.77) e (4.79) em (4.77), obtemos:

$$\Theta(\tau) = 1 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q \exp(-q^2 \pi^2 \tau) \quad (4.80)$$

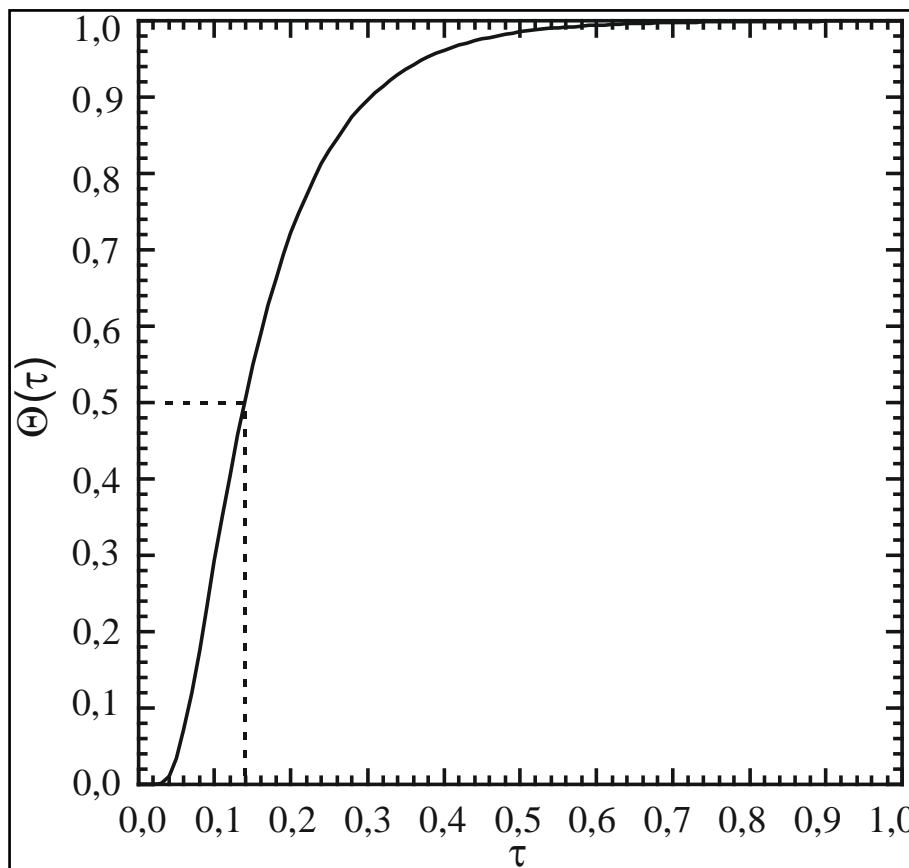
A Figura 4-15 mostra a variação da temperatura adimensional  $\Theta$  como uma função de  $\tau$ , à partir da equação (4.80). De acordo com PARKER *et al.* (1961), a difusividade térmica pode ser determinada pela equação (4.80) e a Figura 4-15, no ponto onde a temperatura adimensional  $\Theta$  é igual a 0.5. Neste ponto, o tempo adimensional  $\tau$  é igual a 0.1388, e a partir da equação (4.80):

$$\alpha = 0.1388 L^2 / t_{0.5} \quad (4.81)$$

Onde  $t_{0.5}$  é o tempo necessário para que a temperatura da superfície traseira do corpo de prova alcance a metade da temperatura máxima. Então, a difusividade térmica  $\alpha$  pode ser determinada

diretamente pela equação (4.81), medindo-se o tempo onde a temperatura adimensional  $\Theta$  é igual a 0,5 ( $t_{0,5}$ ). É importante observar que não é necessário conhecer a quantidade de energia absorvida no corpo de prova para se determinar a difusividade térmica com este modelo, que só depende da forma da curva temperatura *versus* tempo (Figura 4-15) e da espessura do corpo de prova.

PARKER *et al.* (1961) compararam os dados obtidos da equação (4.81) com outros valores disponíveis na época, obtendo uma boa concordância e desvios na ordem de  $\pm 5\%$ .

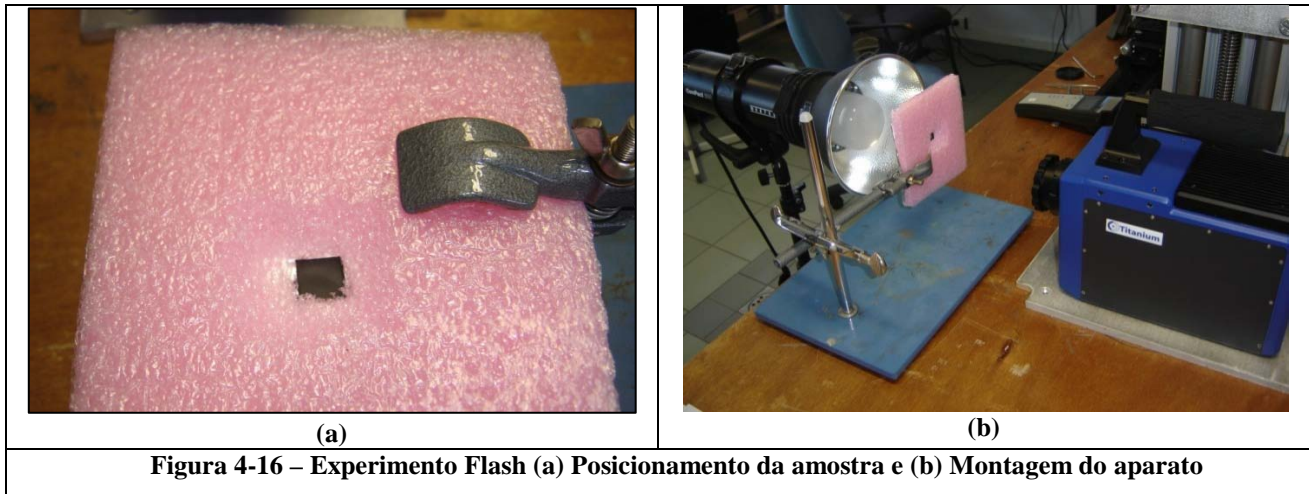


**Figura 4-15 - Medida da difusividade térmica, de acordo com PARKER *et al.* (1961).**

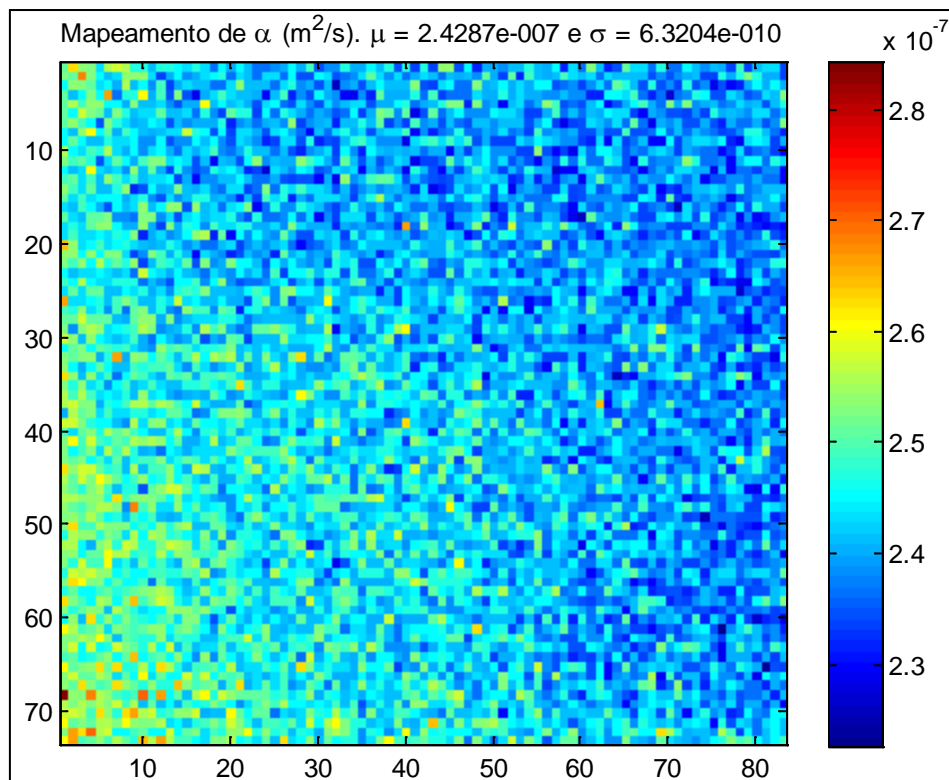
Este mesmo procedimento foi repetido no laboratório de Microfluidos da EMAC, usando uma amostra de dimensões 10x10x1 (mm). Esta amostra foi posicionada em um material isolante para garantir a difusão unidimensional no meio, conforme apresentado na Figura 4-16-a. Este porta amostra foi então posicionado em frete a uma lâmpada flash modelo ComPact600, da marca Profoto, capaz de fornecer uma potência de 600 J em um tempo de 1/850 s. O experimento foi realizado posicionando a amostra em frente a câmera de termografia por infravermelho, incidindo na amostra a energia fornecida pelo flash e registrando a curva de aumento de temperatura *vs* tempo na face oposta à incidência do pulso de energia, conforme apresentado na Figura 4-16-b. A difusividade térmica foi obtida a partir da equação (4.81) para cada pixel da câmera e posteriormente feito uma média para todos os pixels. A Figura 4-17 apresenta o a medida de difusividade térmica com o método Flash descrito acima, para um experimento particular. Observe-se por essa figura a pequena dispersão dos resultados obtidos para todos os pixels. A média dos



pixels está de acordo com aquela obtida pelo método do Disco Quente. O experimento foi repetido 4 vezes, e a média, levando-se em conta todos os experimentos foi de  $0.2420 \text{ mm}^2/\text{s}$ , com desvio padrão de  $0.0006 \text{ mm}^2/\text{s}$ . Todos os experimentos foram realizados à temperatura ambiente ( $20 \text{ }^\circ\text{C}$ ).

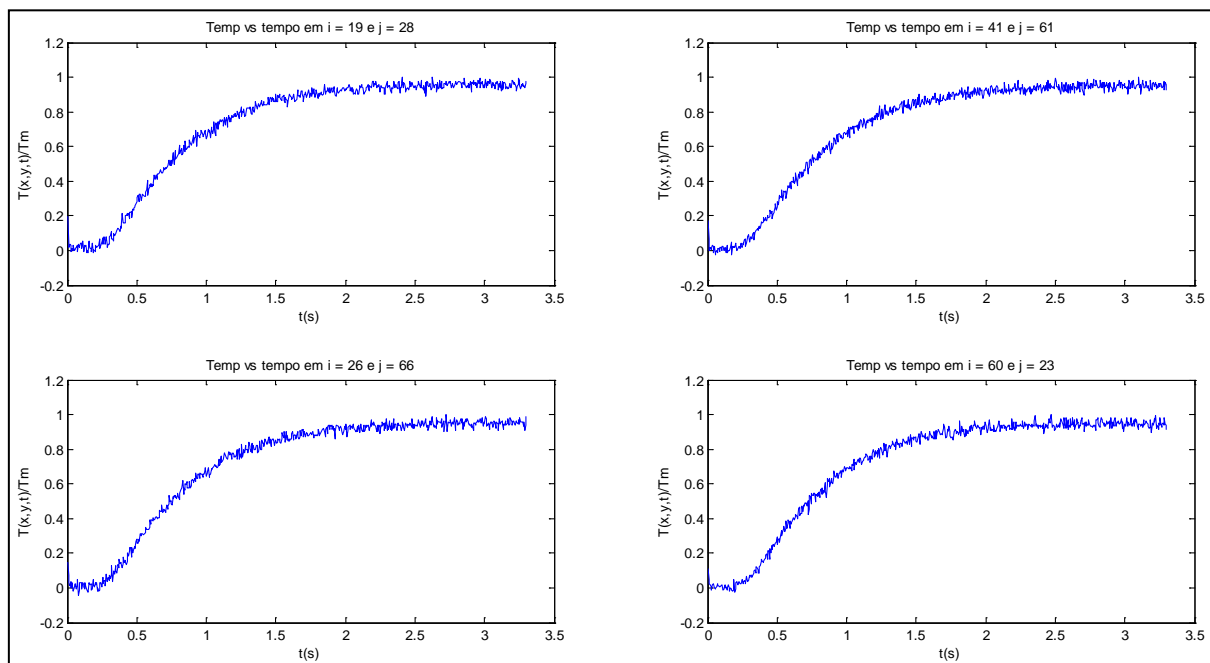


As Figuras 4-18 apresentam as variações de temperatura dividida pela temperatura máxima  $T_m(i,j)$  na face oposta ao flash versus o tempo do experimento para alguns pixels particulares, a saber  $(i = 19, j = 28)$ ,  $(i = 41, j = 61)$ ,  $(i = 26, j = 66)$ ,  $(i = 60, j = 23)$ . Observa-se por essas figuras o comportamento adiabático esperado pelo método de PARKER (1961). As medidas foram feitas com a câmera por infravermelho CEDIP Titanium 560M e os cálculos foram efetuados na plataforma MATLAB.

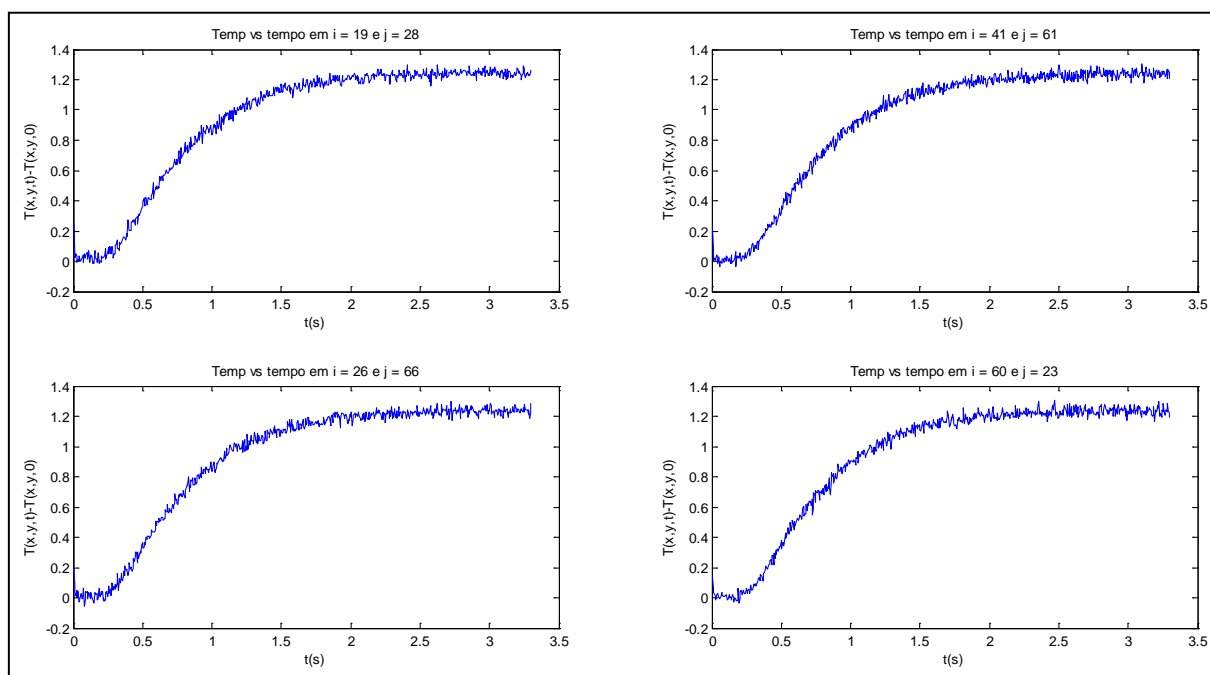


**Figura 4-17 – Resultado do cálculo da difusividade térmica pelo método de PARKER (1961)**

As Figuras 4-19 apresentam os gráficos do aumento de temperatura em relação à temperatura no instante de tempo inicial ( $t_0=0$ ). Observa-se que o aumento de temperatura foi da ordem de  $1.2\text{ }^\circ\text{C}$ , o que respeita a hipótese proposta por PARKER (1961) de que o aumento de temperatura não pode ser muito elevado para que as propriedades sejam constantes ao longo de experimento.



**Figura 4-18 – Curvas de aumento de temperatura adimensionalizadas pela temperatura máxima**

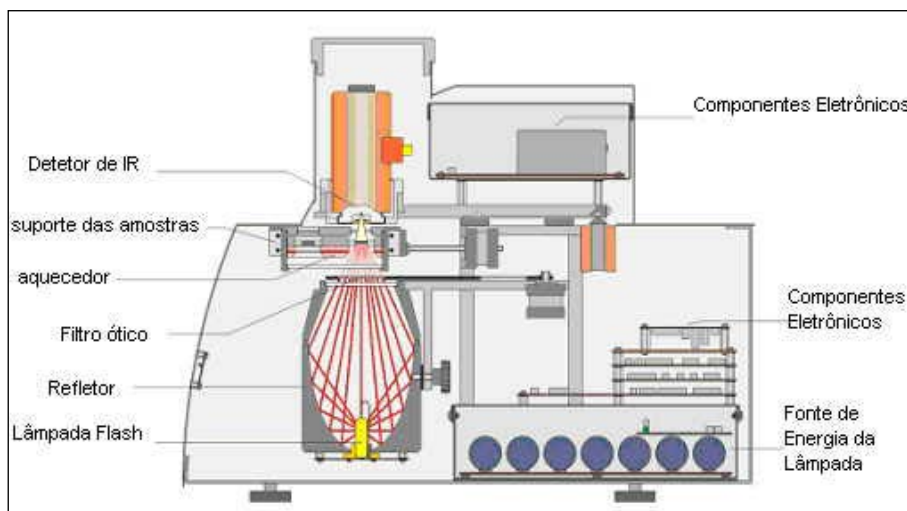


**Figura 4-19 – Curvas de aumento de temperatura subtraídas da temperatura no tempo inicial**

Finalmente foi feita a medição da difusividade térmica com o LFA 447/1 da NETZSCH. Este é um instrumento utilizado para medir difusividade térmica, calor específico e condutividade térmica de metais, grafite, revestimentos, compósitos, cerâmicas, polímeros, líquidos e outros materiais, numa faixa de temperatura de  $25$  a  $200^\circ\text{C}$ , baseado no método Flash. A fonte de energia para gerar

o aumento de temperatura na amostra é uma lâmpada de Xenônio de alta potência. Ela é envolvida por um espelho parabólico (refletor) que direciona o feixe de luz para a amostra.

O LFA 447/1 usa um detector de InSb-IR na faixa de comprimento de onda de 2000 a 5000 nm, resfriado por nitrogênio líquido, que permite uma leitura de temperatura rápida e sem contato direto com a amostra. Um forno integrado mantém a temperatura da amostra estável durante a medida. O forno é integrado ao suporte da amostra, que tem uma massa térmica baixa, permitindo altas taxas de aquecimento e resfriamento. As medidas de temperatura da amostra são feitas no suporte por um termopar. Um Chiller Julabo é usado para auxiliar o controle de temperatura do forno. A Figura 4-20 mostra um esquema do equipamento, que está operando no LTCC/COPPE/UFRJ.



**Figura 4-20 Netzsch Nanoflash LFA 447/1**

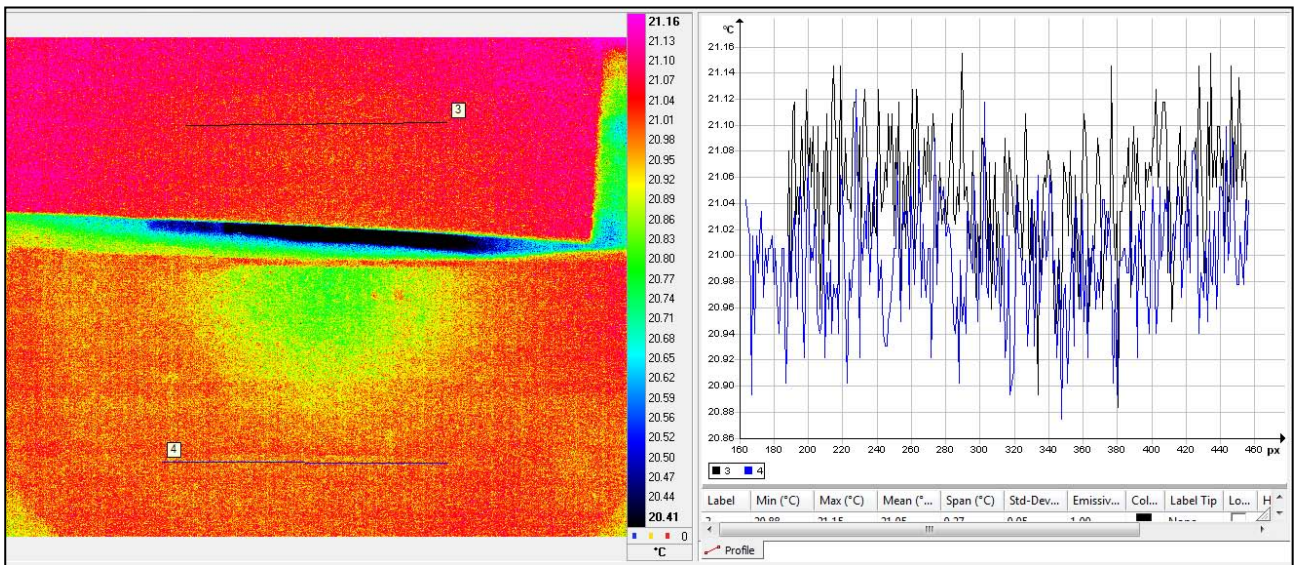
Para a resina utilizada neste trabalho foram feitos 3 testes na temperatura ambiente (20 °C). A média das três medidas de difusividade térmica com o LFA 447/1 foi de 0.240 mm<sup>2</sup>/s, com um desvio padrão de 0.001 mm<sup>2</sup>/s.

A Tabela 4-2 sintetiza os resultados obtidos para a difusividade térmica da resina utilizada neste trabalho, com os três métodos descritos acima.

**Tabela 4-2 – Síntese dos resultados da estimação da difusividade térmica da resina**

Método	Difusividade média (mm <sup>2</sup> /s)	Desvio padrão (mm <sup>2</sup> /s)
Disco Quente	0,243	0,001
LFA 447/1	0,240	0,001
Flash	0,2420	0,0006

A motivação do uso desta resina se dá por suas propriedades serem próximas de um material isolante, o que faz com que a difusão de calor no meio não ocorra de forma muito rápida, como seria o caso de um metal, por exemplo. Dessa maneira a quantidade de dados experimentais obtidos é suficiente para a estimação dos parâmetros desejados. Além disso, o material mostrou uma boa emissão de radiação infravermelha no comprimento de onda da câmera utilizada nos experimentos, conforme detalhado a seguir.



**Figura 4-21 – Amostra de resina com pintura de grafite (superior) e sem pintura (inferior)**

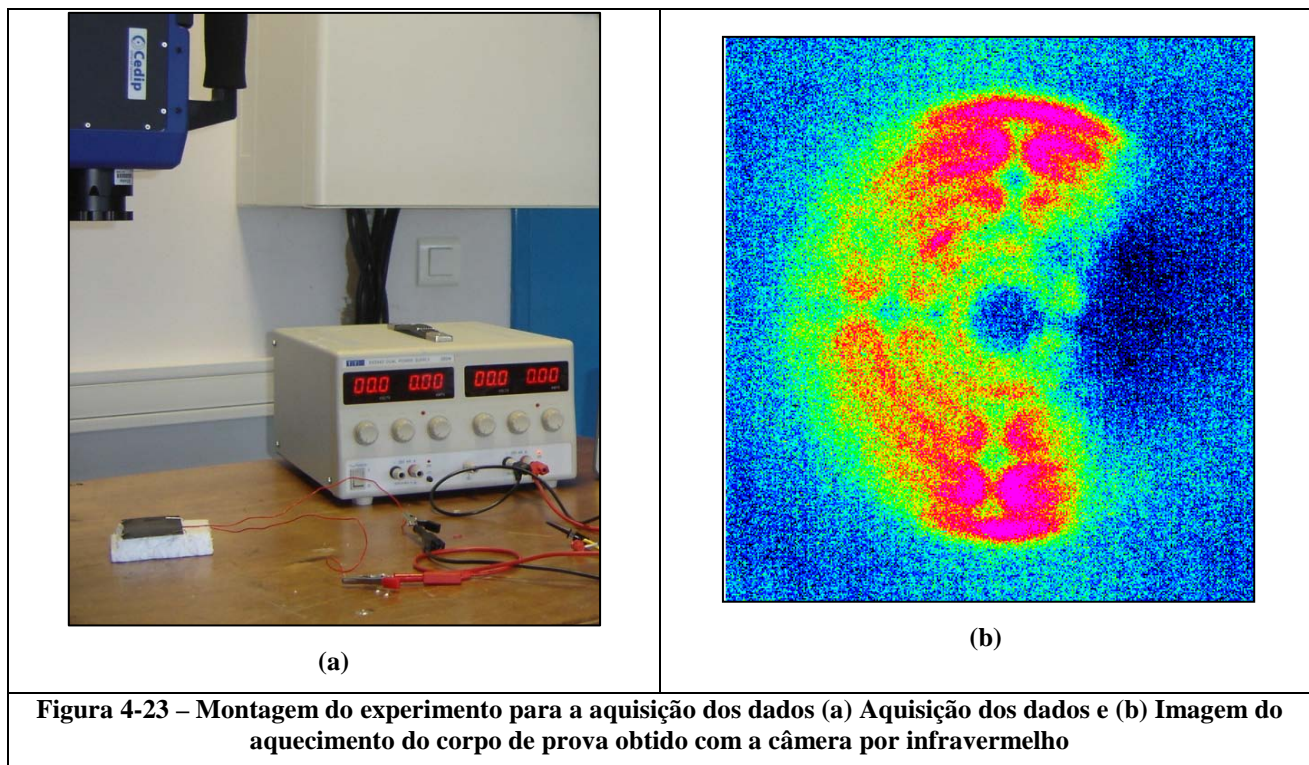
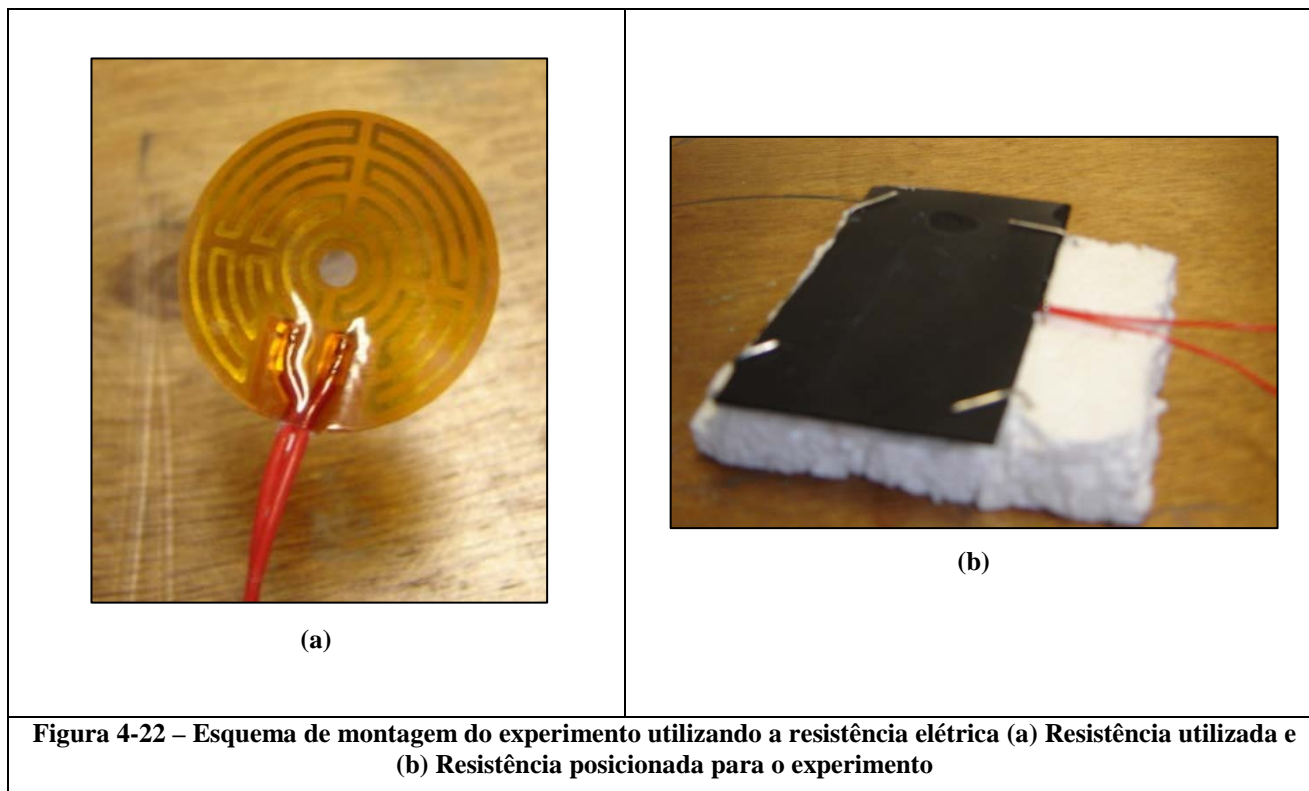
A Figura 4-21 apresenta uma imagem feita com duas amostras idênticas da resina utilizada. A amostra na parte superior da figura foi pintada com uma tinta de grafite enquanto a amostra na parte inferior não foi pintada. Observa-se que a distribuição de temperaturas nas linhas 3 e 4, plotadas na parte direita da imagem, apresentam o mesmo comportamento para ambos os casos, dentro da incerteza da medida da câmera. Dessa maneira, não houve a necessidade de se realizar a pintura com uma tinta de emissividade próxima de 1, o que prejudicaria o resultado em algumas condições experimentais que serão vistas na próxima seção. Além do mais, a resina utilizada apresentou uma boa absorção da energia do laser diodo utilizado em um dos experimentos.

Para a estimação do termo-fonte pelos problemas I e II, assim como a estimação da difusividade térmica e de  $h$ , foram utilizados dois aparatos para o aquecimento da resina: um com aquecimento através de resistência elétrica e o outro com laser-diodo. As seções a seguir detalham o procedimento utilizado em cada um dos experimentos.

#### 4.8.1 Experimento com aquecimento por resistência elétrica

A resistência elétrica utilizada tem um formato circular com um diâmetro de 24.9 mm e com  $37.2 \Omega$ , isolada eletricamente com fita Kapton, como mostrado na Figura 4-22-a, com uma área efetiva de aquecimento de aproximadamente  $3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ . Dessa maneira, a potência dissipada pela resistência é de aproximadamente 1.16 W para a tensão de 10 V. Para o caso do corpo de prova utilizado neste trabalho, com a espessura de 0.0011 m e  $C = 1.833 \times 10^6 \text{ J}/(\text{Km}^3)$ ,  $G=1.93 \text{ K/s}$ , (ver Equação (4.1)). A resistência foi posicionada na parte inferior da resina, conforme apresentado na Figura 4-22-b. Desta maneira espera-se que uma parte da potência da resistência seja dissipada para a amostra e a outra parte seja dissipada para o lado oposto. A resistência é então conectada a uma fonte de tensão, conforme apresentado na Figura 4-23-a, e posicionada em frente à câmera. A fonte é ligada em um certo intervalo de tempo, provocando o aquecimento da amostra. A Figura 4-23-b

apresenta uma imagem obtida da câmera para o presente experimento. A vantagem desta metodologia é o conhecimento preciso da quantidade de calor dissipado pela resistência, igual a  $RI^2$ , onde R é a resistência I é a corrente que passa através da resistência elétrica.



#### 4.8.2 Experimento com aquecimento por laser-diodo

A segunda maneira de realizar o aquecimento é através de um laser. Este experimento é realizado posicionando-se a amostra em frente ao laser fazendo-o incidir sobre a amostra.

O laser utilizado para este experimento foi montado a partir de vários equipamentos. Ele é composto de um emissor semiconductor laser de marca Spectra-Physics modelo SFB 060, acoplado a um núcleo, composto de uma fibra ótica de baixa abertura numérica, fornecendo uma saída de alta potência. Este é conectado a uma fibra ótica, que tem em sua extremidade um colimador F-H10 de marca Newport fornecendo um feixe Gaussiano com 7 mm de diâmetro. O laser é controlado pelo módulo 525B da Newport. O laser utilizado neste trabalho apresenta um comprimento de onda de 830 nm e uma potência máxima na saída de 0.7W, o que fornece um fluxo de calor de aproximadamente  $26 \text{ kW/m}^2$ . Os dispositivos que compõem o laser-diodo estão apresentados na Figura 4-24.

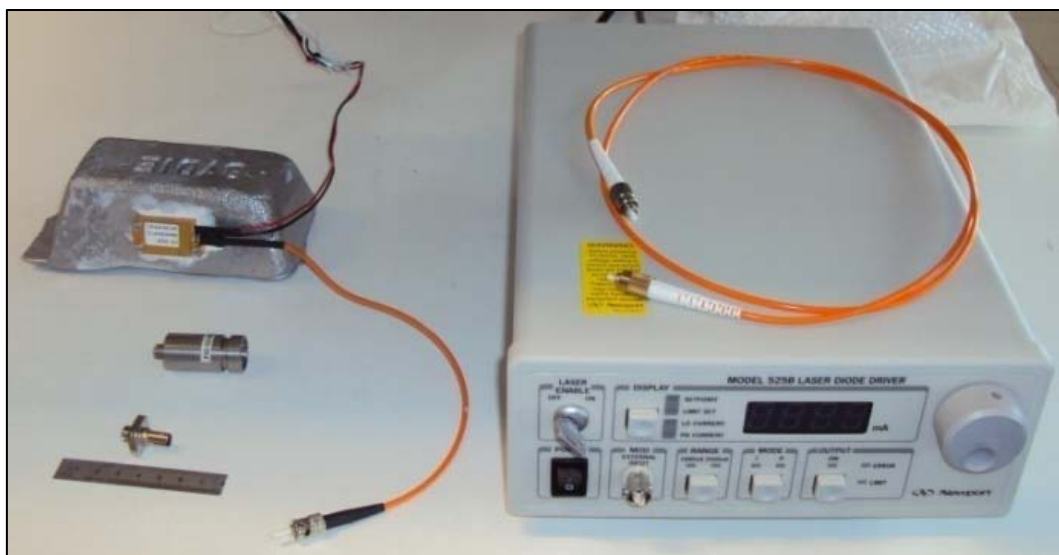


Figura 4-24 – Laser diodo

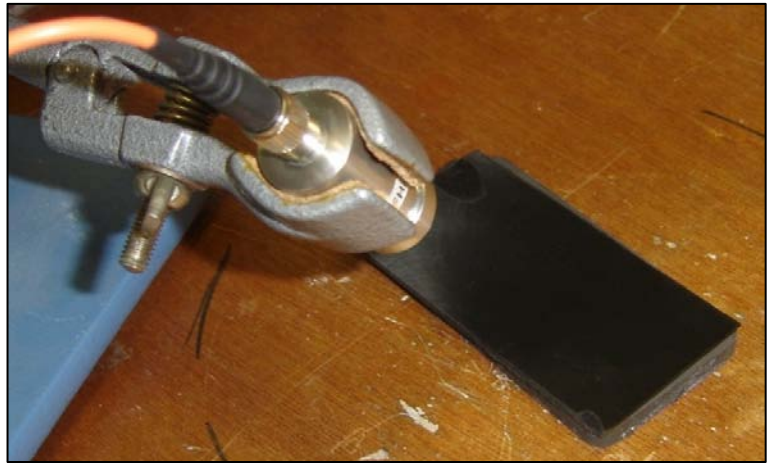
A montagem experimental no Laboratório de Microfluidicos/EMAC é apresentada nas Figuras 4-25-a-b.

O laser diodo pode ser controlado por um gerador de função, conforme apresentado na Figuras 4-26. Desta forma, pode-se definir a forma funcional do termo fonte agindo na amostra. O gerador de função utilizado foi o 33220A da Agilent.

A vantagem do experimento realizado com o laser-diodo é o controle preciso do tempo na qual o termo-fonte age na amostra. Uma desvantagem é o desconhecimento da potência exata absorvida pela amostra.



(a)



(b)

Figura 4-25 – Experimento com o laser diodo (a) Aparato montado e (b) amostra posicionada em frente ao colimador



Figura 4-26 – Laser diodo controlado pelo gerador de função

## 4.9 Tratamento das imagens

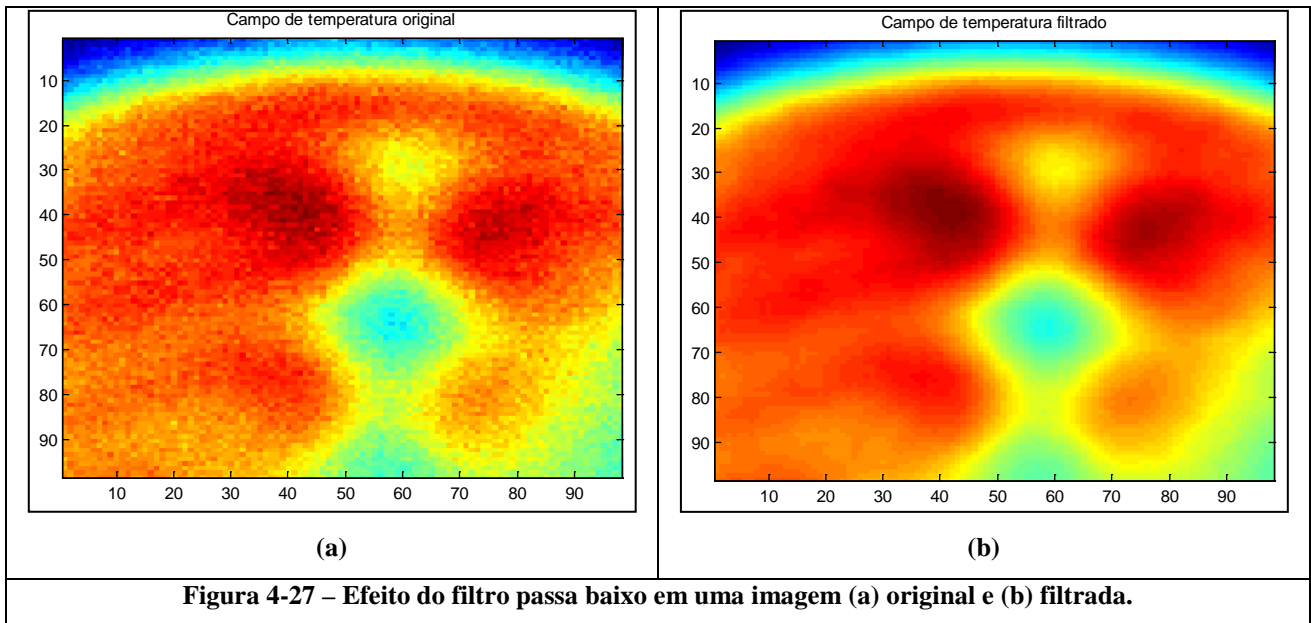
A fim de se obter o melhor aproveitamento dos dados gerados pela câmera de termografia por infravermelho, estes precisam passar por uma etapa de pós-processamento para que a solução do problema inverso seja feita de maneira mais precisa e robusta. Os métodos de processamento usados são a filtragem e o corte, o primeiro visando a redução dos ruídos e o segundo visando a eliminação de porções da imagem que não trazem informação relevante para a análise. Além disso, é necessário a partir de uma imagem, determinar a área de leitura de cada pixel, para haver coincidência dos pixels da câmera com a discretização por diferenças finitas do problema físico estudado. Abaixo são descritos os métodos de filtragem e corte utilizados.

### 4.9.1 Filtragem

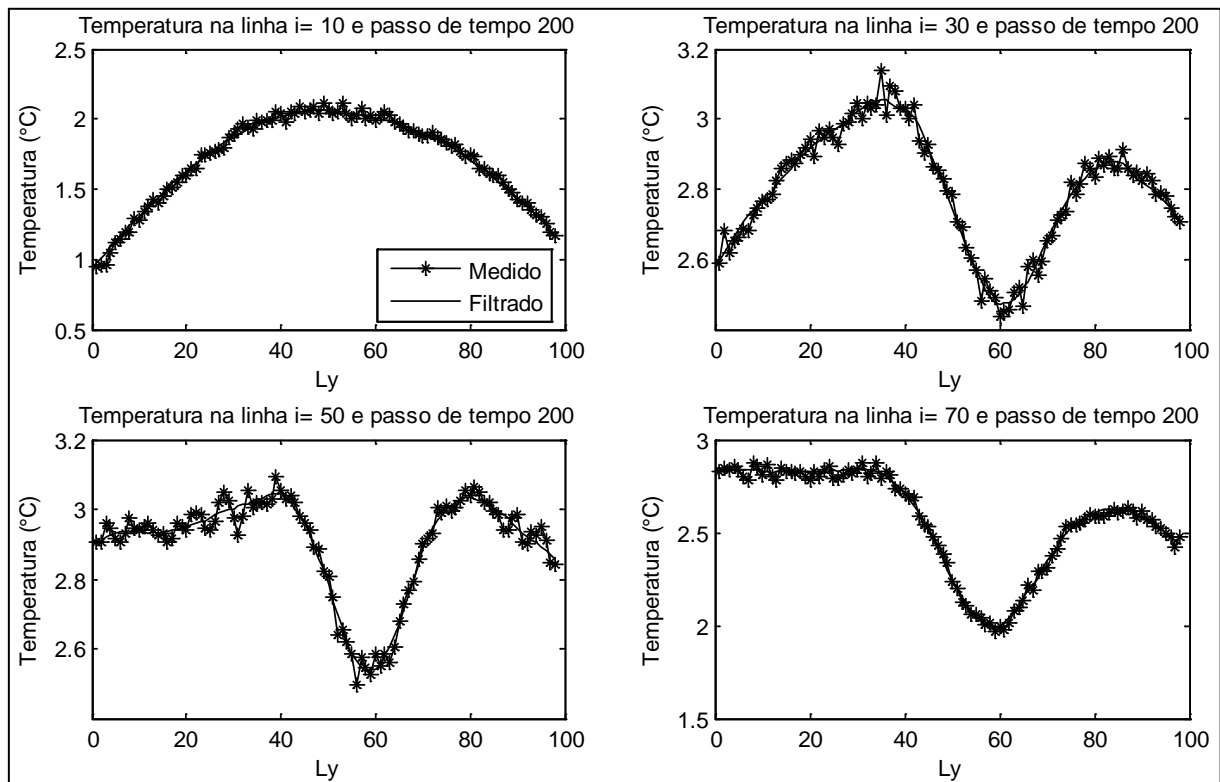
A filtragem é uma operação fundamental em tratamento de imagens. Ela permite melhorar a percepção de detalhes, reduzir ruídos, compensar certos defeitos de captura, etc. Para o caso específico deste trabalho, o interesse é a redução dos ruídos, em particular para a melhoria da relação sinal/ruído. De forma geral, o ruído apresenta uma alta frequência, e é possível reduzi-lo graças ao filtro passa-baixa (BUREL 2001), mantendo o sinal de interesse, de baixa frequência. Um filtro passa-baixa é um filtro que permite que sinais de baixa frequência passem, mas atenua (ou reduz a amplitude de) sinais com frequência maior que uma certa frequência de corte. Um filtro passa-baixa é o oposto de um filtro passa-alta, e um filtro passa-faixa é a combinação de ambos.

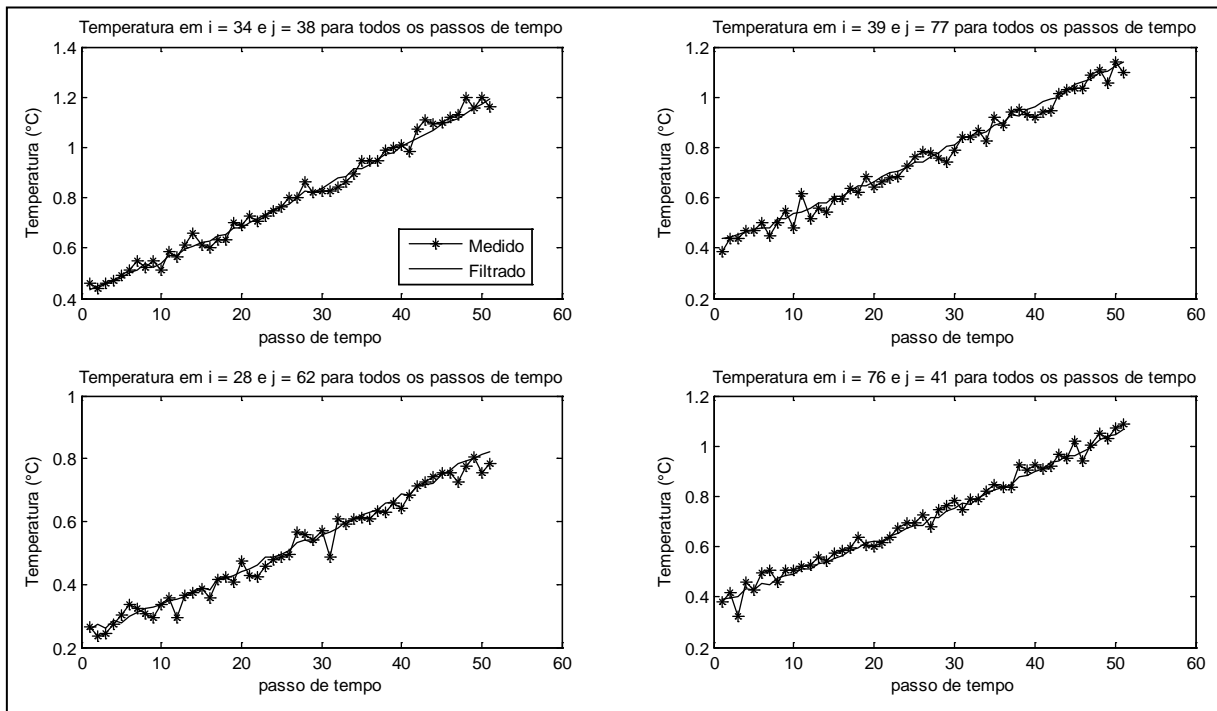
A filtragem foi feita em cada frame da imagem, o que equivale a filtrar a imagem em cada passo de tempo, e foi feita através da função *filter2* do MATLAB, conforme apresentado em (BUREL 2001). A função *filter2* filtra os dados de temperatura com o filtro bidimensional FIR, ou filtro de resposta impulsiva finita. A partir da matriz  $y$ , que é a matriz de dados experimentais, e de uma matriz de entrada  $h$ , que é o filtro FIR bidimensional, a função *filter2* rotaciona a matriz filtro de 180 graus para criar o núcleo de convolução. Internamente é chamada a função *conv2*, que é a função bidimensional de convolução, para a implementação da operação de filtragem. As Figuras 4-27-a-b apresentam uma imagem original obtida com a câmera e a imagem após o filtro passa-baixa ter sido usado, respectivamente. Observa-se por essas imagens o efeito do filtro sobre os ruídos, melhorando sensivelmente a qualidade do sinal obtido.





As Figuras 4-28 apresentam uma comparação das curvas de temperatura ao longo de algumas linhas particulares da Figura 4-27. Observa-se pela presente figura o efeito da atenuação do ruído de alta frequência pelo filtro passa-baixa, mantendo o sinal de menor frequência, que é o sinal de interesse para o presente estudo. Da mesma forma que as Figuras 4-28, as figuras 4-29 apresentam uma comparação das curvas de temperatura, porém temporalmente, e não no espaço. Observa-se nas Figuras 4-29 a mesma atenuação do ruído de alta frequência que observado nas Figuras 4-28.

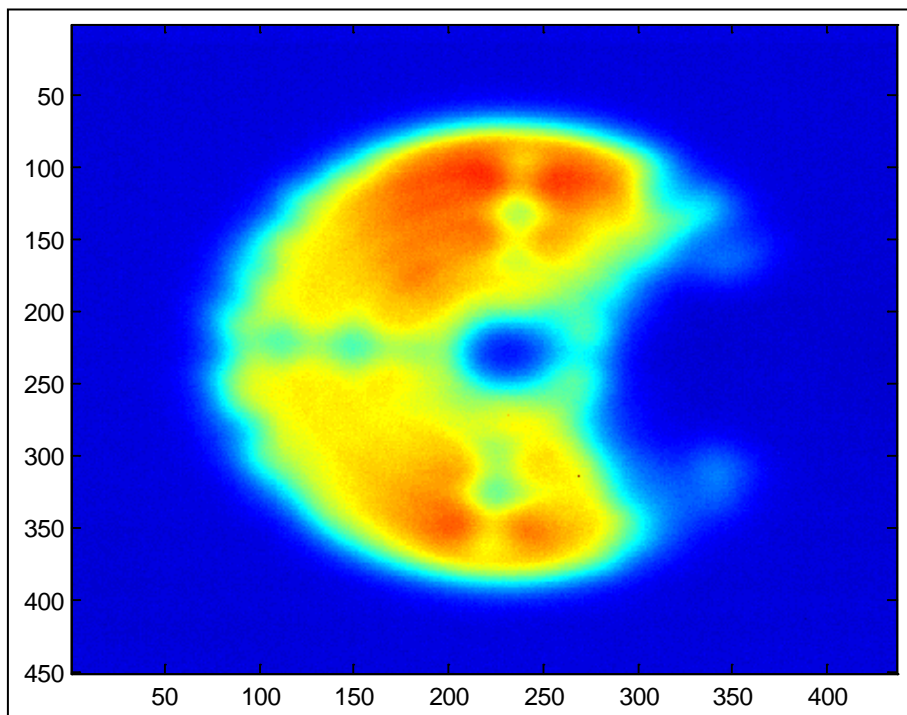




4-29 – Comparação da imagem filtrada com a imagem original em pixels particulares

#### 4.9.2 Corte da imagem

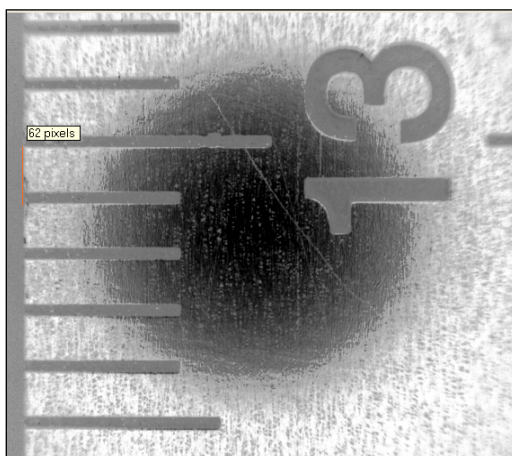
A câmera CEDIP Titanium, que foi utilizada neste trabalho, possui uma matriz de detectores de 640 x 512 pixels. Este tamanho de imagem deve ser ajustado ao tamanho do corpo de prova a ser estudado. A Figura 4-30 apresenta uma imagem feita com a câmera, onde pode-se observar que o aquecimento da amostra é feito na parte central da figura, o que torna a estimação fora dessa região sem interesse prático. Dessa forma, as imagens são sempre cortadas nas regiões onde a informação obtida pela leitura de temperatura da câmera de termografia por infravermelho for útil para a solução do problema inverso. Uma vez que a discretização utilizada faz com que o pixel em estudo dependa dos pixels vizinhos (Equação (4.4)), as condições de contorno no corte são satisfeitas independente da localização onde este é feito.



**Figura 4-30 – Determinação da área corte da imagem.**

### 4.9.3 Determinação da área de leitura por pixel

Como a câmera possui uma matriz de pixels, cada um destes é responsável pela leitura de uma determinada área da amostra. Esta área é equivalente aos nós da discretização do problema através da estratégia nodal, descrita na seção 4.1. Desta maneira, para que os nós da discretização coincidam com a área de cada pixel, é necessário determinar a quantidade de pixels em uma determinada área de medida. Esta área é proporcional à distância entre a câmera e a amostra, de modo que ela deve ser determinada para cada experimento, fazendo uma imagem de uma régua e contando o número de pixels em uma determinada unidade de comprimento, por exemplo, em 1 mm, conforme mostrado na Figura 4-31.



**Figura 4-31 – Determinação da área de leitura de cada pixel.**

Esta figura apresenta uma linha reta traçada ao longo de 1 mm para a leitura da temperatura. Como são necessários 62 pixels para a medida nesse 1 mm, esta área foi de aproximadamente 16

$\mu\text{m} \times 16 \mu\text{m}$  neste experimento particular. Logo, na solução por diferenças finitas, o passo espacial para este caso foi de  $16 \mu\text{m}$  nas direções  $i$  e  $j$ .

## 5. Resultados e Discussões

O presente capítulo apresenta a verificação da solução do problema direto, escrevendo sua solução por dois métodos clássicos: O método das diferenças finitas e o método dos volumes finitos, para os dois casos estudados nesta tese, quais sejam: o caso do termo fonte constante e o caso do termo fonte variando no tempo. Para o problema inverso do tipo I, os métodos utilizados para a solução do problema foram verificados com medidas experimentais simuladas, para dois casos-teste distintos: A estimativa simultânea de propriedades termofísicas e termo-fonte em um meio heterogêneo, e a estimativa de uma falha em um material homogêneo. Para o caso do problema inverso do tipo II, a solução do problema inverso com medidas simuladas, em um meio homogêneo sujeito a um termo fonte que varia no tempo, é apresentada. Após esta etapa, são apresentados os resultados da solução do problema inverso para o caso de medidas reais, feitas com a câmera de termografia por infravermelho para o caso do aquecimento realizado de duas maneiras distintas: com uma resistência elétrica e com um laser diodo para termos fontes constantes e variáveis no tempo.

### 5.1 Verificação da solução do problema direto

Para a verificação da solução do problema direto, usou-se uma formulação por volumes finitos para a comparação com a solução por diferenças finitas. Esta formulação foi desenvolvida por FUDYM *et al.* (2008). Como será visto adiante, esta solução por volumes finitos também será usada para evitar o *crime inverso*, quando medidas experimentais simuladas serão usadas para a verificação da solução dos problemas inversos. Para a verificação da solução do problema direto considerou-se as propriedades da resina medidas pelas técnicas apresentadas na Seção 4.8. As propriedades termofísicas da resina são:  $k = 0.44 \text{ W/(mK)}$ ,  $a = 0.24 \text{ mm}^2/\text{s}$  e  $C = 1.83 \times 10^6 \text{ J/(m}^3\text{K)}$ .

Para a verificação da solução do problema direto foi utilizada uma malha espacial de  $72 \times 72$  nós (em  $x$  e  $y$  respectivamente), e 50 passos de tempo. A malha espacial foi escolhida como  $\Delta x = \Delta y = 80 \mu\text{m}$ , de maneira que a espessura e comprimento da placa são  $0.0058 \text{ m}$ . O tempo final foi de  $0.25 \text{ s}$  e o passo de tempo escolhido foi de  $1/200 \text{ s}$ , o que satisfaz o critério de estabilidade do esquema de diferenças finitas explícito usado na estratégia nodal.

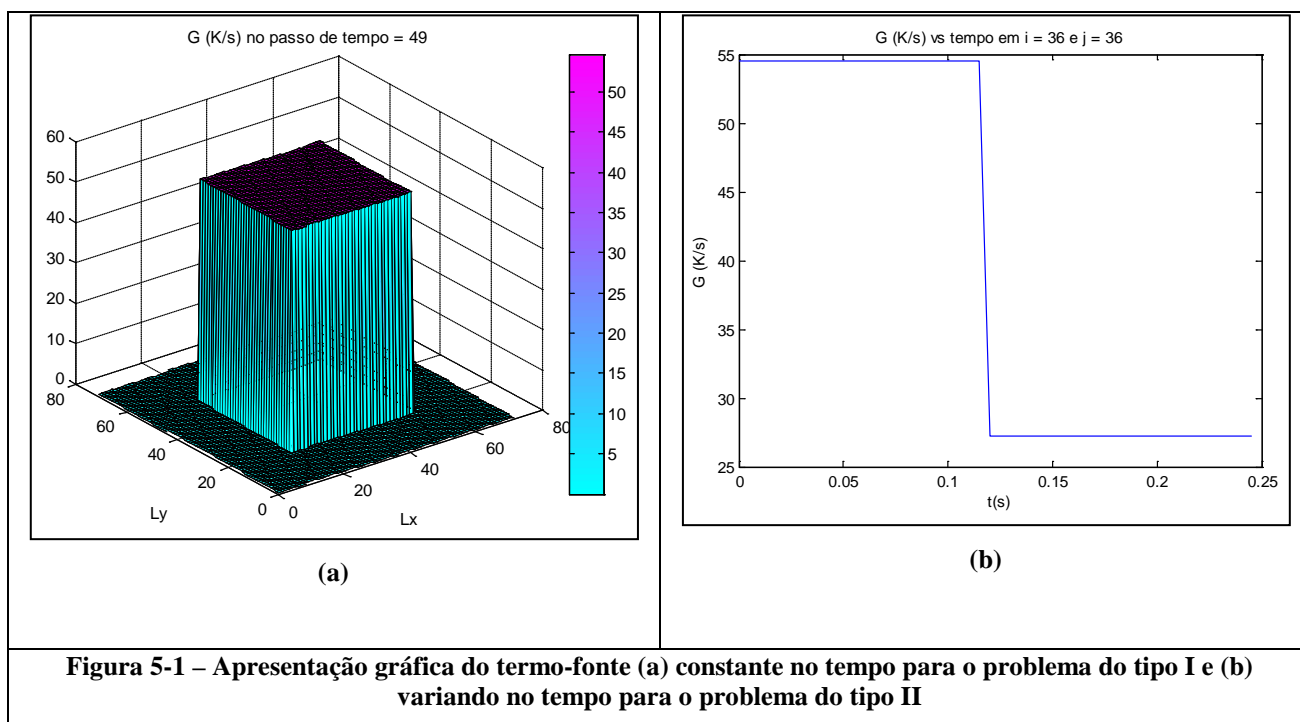
Foram consideradas duas formas funcionais para o comportamento do termo fonte: o primeiro constante no tempo, mas variando espacialmente (como no problema do tipo I), aplicado em uma região definida por  $0.0014 \text{ m} < x < 0.0043 \text{ m}$  e  $0.0014 \text{ m} < y < 0.0043 \text{ m}$  de valor  $54.56 \text{ K/s}$ , e outro variando tanto no tempo como no espaço (como no problema do tipo II), aplicado na mesma região espacial definida anteriormente, porém de valor  $54.56 \text{ K/s}$  entre  $0 < t < 0.13 \text{ s}$  e  $27.28 \text{ K/s}$  entre  $0.13$

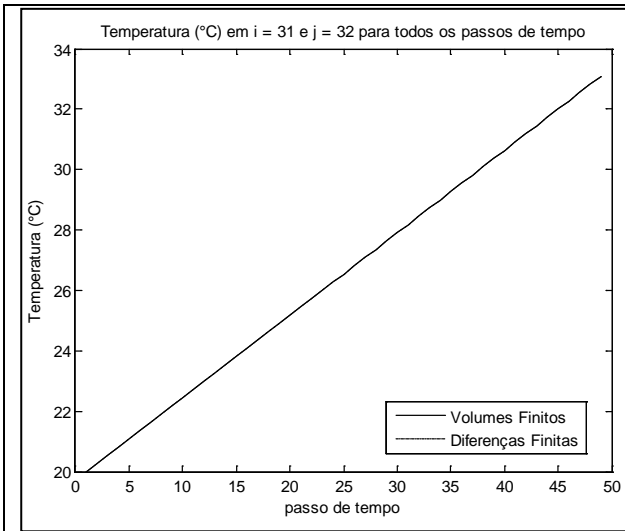
$< t < 0.25s$ . Ambos os casos foram considerados sendo aplicados em uma placa plana de espessura  $e = 0.01$  m. Para os dois casos, o termo-fonte foi considerado nulo fora da região apresentada acima.

A Figura 5-1-a apresenta a distribuição espacial do termo fonte para a verificação da solução do problema direto para o problema do tipo I, e a Figura 5-1-b apresenta o comportamento temporal do termo fonte para a verificação da solução do problema direto para o problema do tipo II. Para o caso do termo-fonte usado para o problema do tipo II, o comportamento espacial é o mesmo do apresenta na Figura 5-1-a para  $0 < t < 0.13s$ .

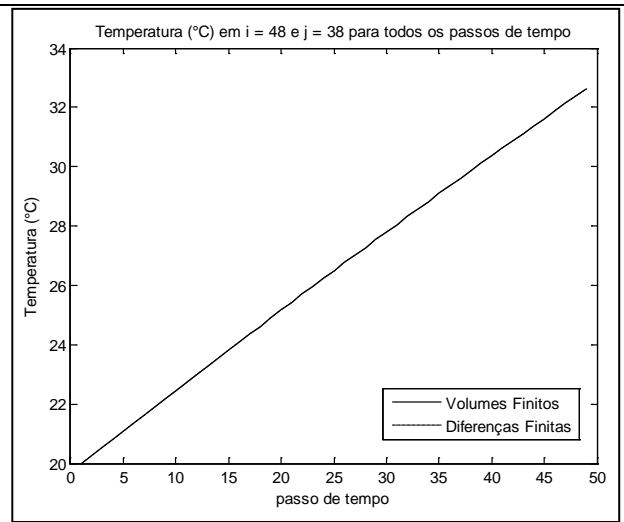
As Figuras 5-2-a-b e Figuras 5-3-a-b apresentam o perfil de temperatura para dois pixels particulares para a solução do problema direto para o problema do tipo I e tipo II, respectivamente. Observa-se por estas figuras a excelente concordância para a temperatura calculada pelos dois métodos utilizados neste trabalho, para ambos os casos estudados.

As Figuras 5-4-a-b e Figuras 5-5-a-b apresentam a diferença percentual entre a temperatura calculada pelo método de diferenças finitas e pelo método de volumes finitos, para a verificação da solução do problema direto para os problemas do tipo I e tipo II, respectivamente. Observa-se a excelente concordância entre os resultados, com diferenças entre os métodos da ordem de 0.04% para ambos os casos.



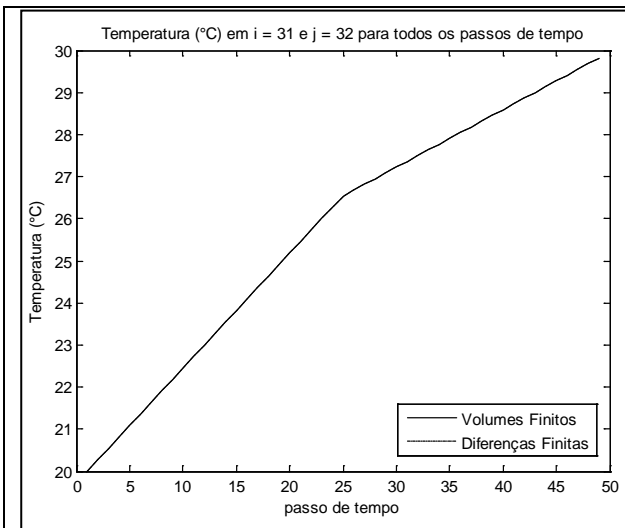


(a)

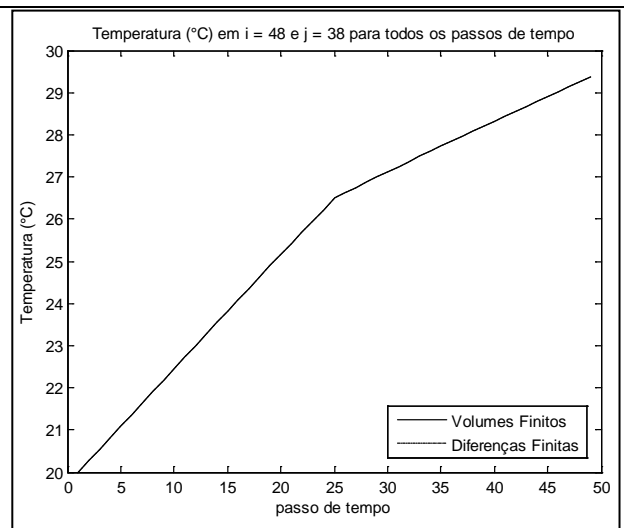


(b)

**Figura 5-2 – Perfil de temperatura em (a)  $x = 0.0025$  m e  $y = 0.0026$  m e (b)  $x = 0.0038$  m e  $y = 0.0030$  m para a validação do problema direto para o problema do tipo I.**

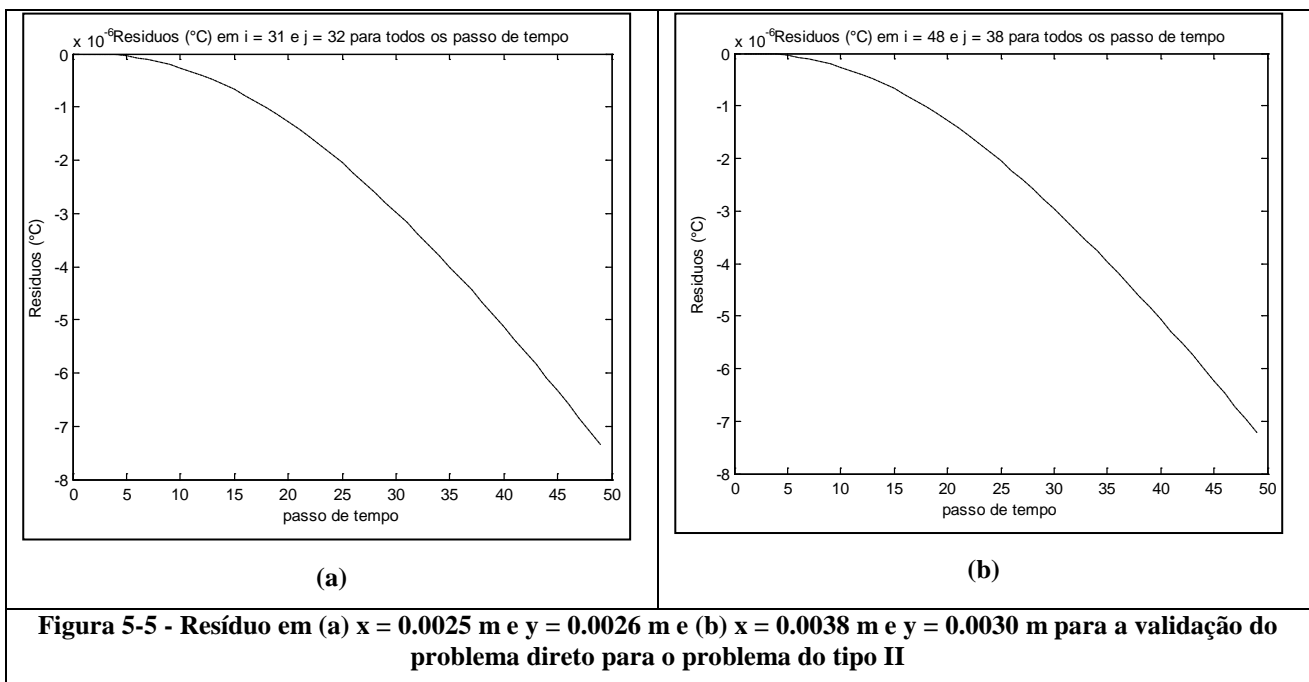
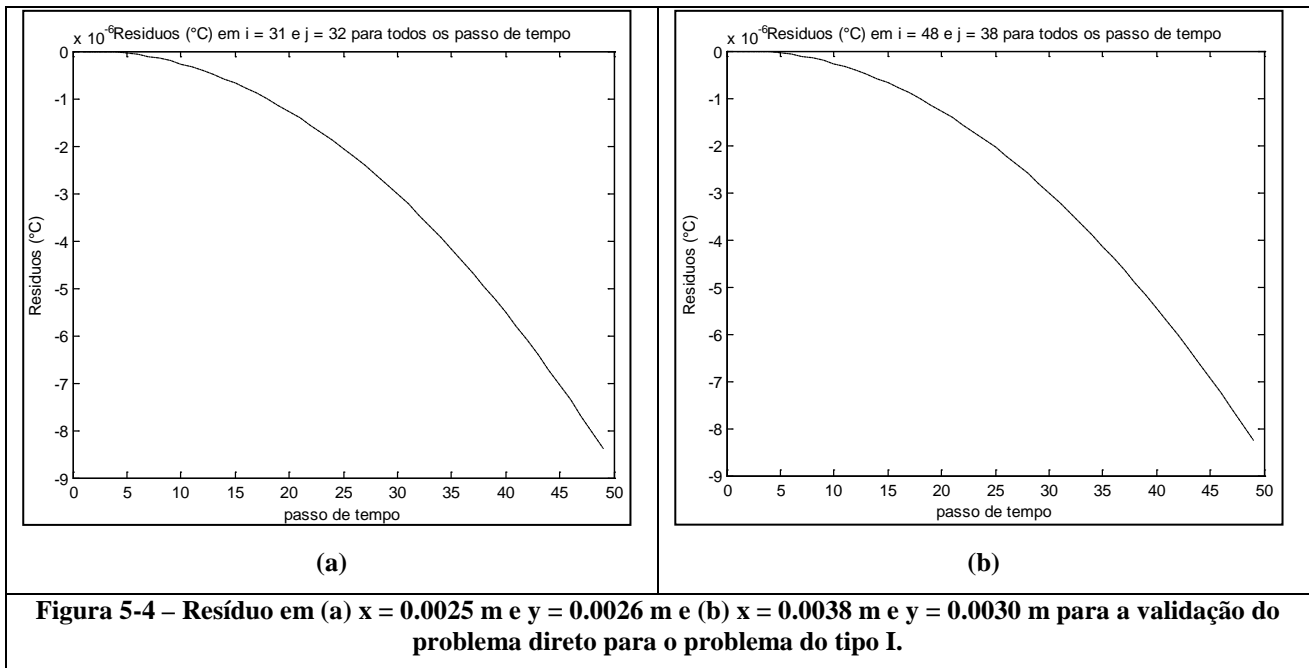


(a)



(b)

**Figura 5-3 – Perfil de temperatura em (a)  $x = 0.0025$  m e  $y = 0.0026$  m e (b)  $x = 0.0038$  m e  $y = 0.0030$  m para a validação do problema direto para o problema do tipo II**



A partir dos resultados apresentados, conclui-se que as soluções apresentam uma excelente concordância entre si, verificando a metodologia de cálculo utilizada na metodologia da estratégia nodal.

Casos teste foram examinados nas seções 5.2 e 5.3 para a solução do problema inverso com as técnicas desenvolvidas neste trabalho, usando medidas experimentais simuladas de dois casos diferentes no problema do tipo I e para um caso no problema do tipo II. O objetivo é verificar a solução do problema inverso pelas técnicas desenvolvidas neste trabalho.



## 5.2 Solução do problema inverso do tipo I com medidas simuladas

Os casos examinados abaixo envolvem uma placa fina. A placa é composta de dois materiais  $A$  e  $B$ . Os materiais são interpostos em diferentes formas para avaliar casos-teste envolvendo diferentes formas funcionais da difusividade térmica, e do termo fonte. Primeiramente, quadrados periódicos dos materiais  $A$  e  $B$  foram testados. Depois, uma configuração representativa de uma falha em um meio homogêneo foi analisada.

O meio periódico é composto de dois materiais com as seguintes propriedades termofísicas:

$$k_A = 10 \text{ W/(mK)}, C_A = 3.75 \cdot 10^6 \text{ J/(m}^3\text{K)}, \alpha_A = 2.66 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

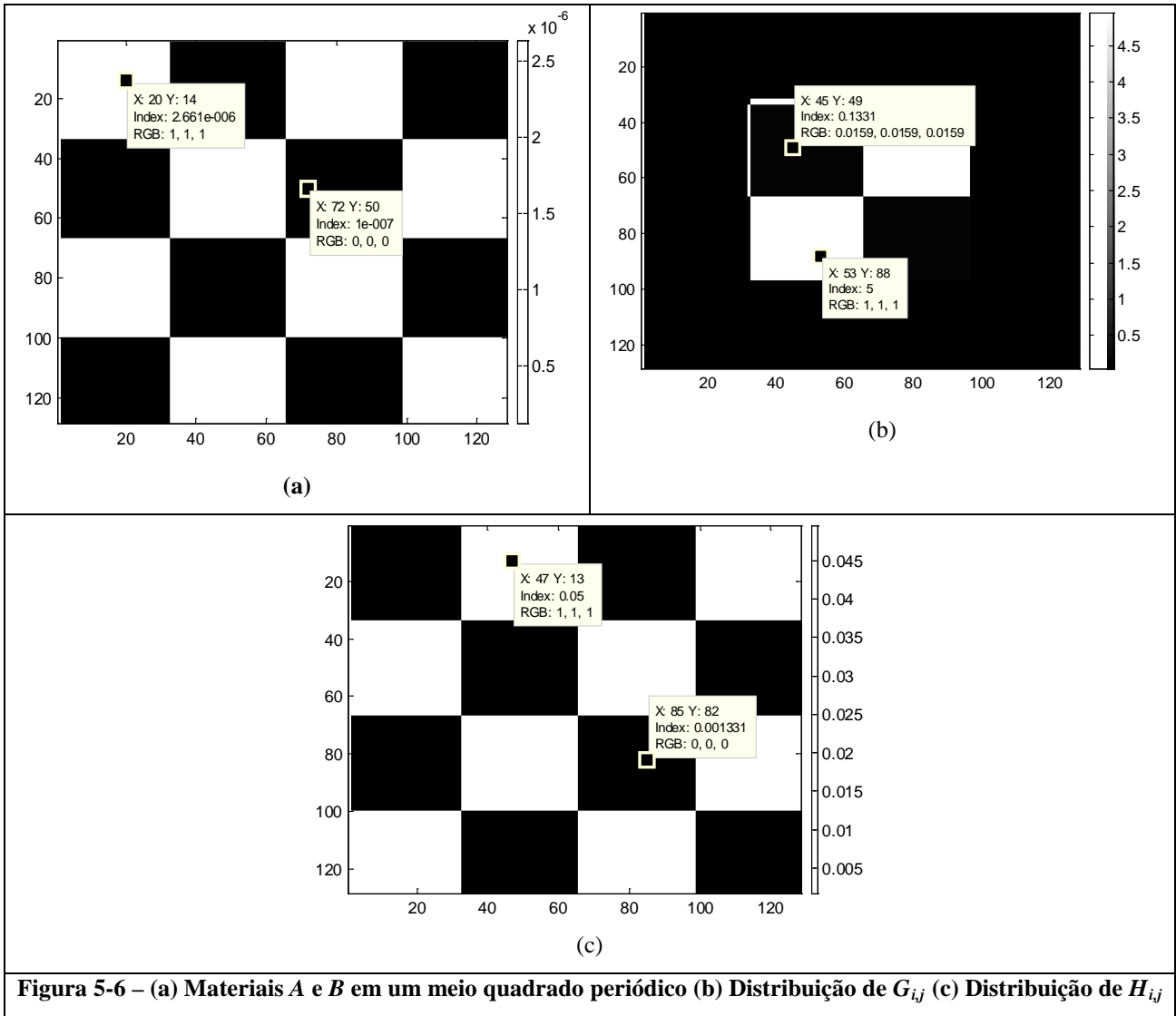
$$k_B = 0.01 \text{ W/(mK)}, C_B = 1 \cdot 10^5 \text{ (J/m}^3\text{K)}, \alpha_B = 1.0 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

A difusividade térmica, o coeficiente  $G_{i,j}$  e o coeficiente  $H_{i,j}$  estão mostrados nas Figuras 5-6-a-b-c respectivamente. A escala dos eixos corresponde ao número de pixels. As propriedades térmicas dos meios  $A$  e  $B$  foram escolhidas para serem representativas de um meio com uma grande variação de difusividade térmica.

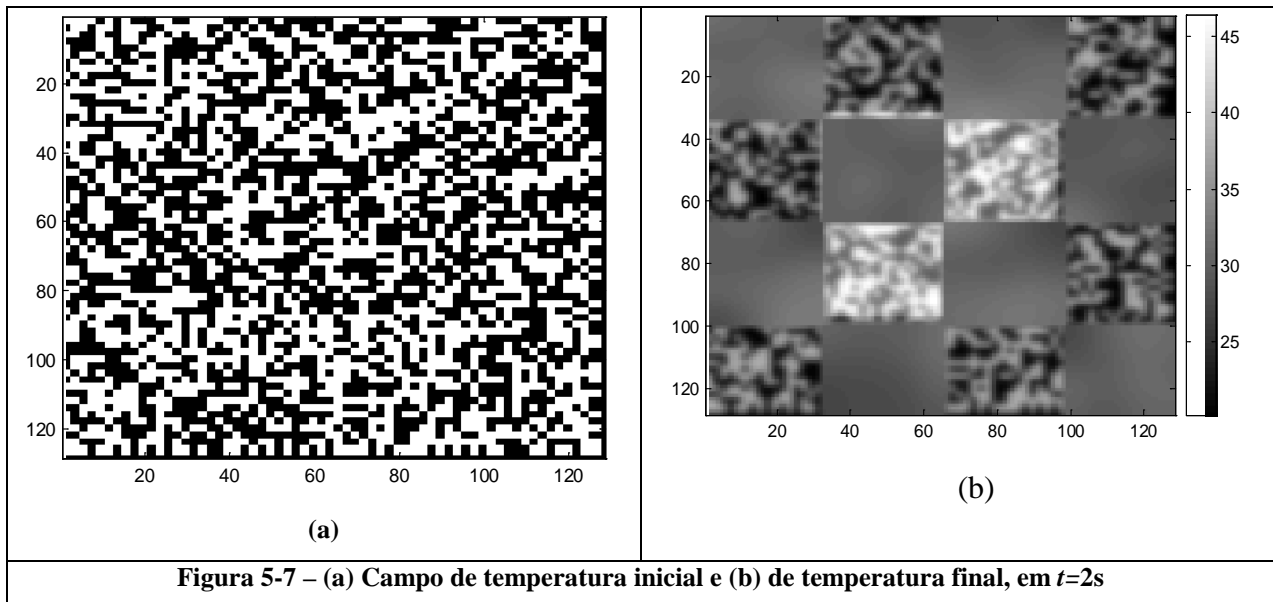
Para se evitar o crime inverso de usar a mesma solução para a geração dos dados experimentais simulados e para a solução do problema inverso, a solução em volumes finitos desenvolvida por FUDYM *et al.* (2008) foi usada para gerar os dados simulados. Para a solução do problema inverso, o meio foi discretizado em  $a_i = a_j = 128$  nós internos, onde o valor dos parâmetros  $\alpha_{i,j}$ , e  $G_{i,j}$  em  $\mathbf{P}_{i,j}$  foram estimados. O passo no espaço é escolhido como:  $\Delta x = \Delta y = 200 \mu\text{m}$ . Neste caso, a largura e comprimento da placa são  $L_i = L_j = 0.0256 \text{ m}$ .

O termo fonte aplicado foi de  $g_{i,j} = 1 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$  na região  $\{I,J\}$ , tal que  $a_i/4 < I < 3a_i/4$  e  $a_j/4 < J < 3a_j/4$ . Dessa maneira, os valores não-nulos a serem determinados são  $G_A = 0.133 \text{ K/s}$  e  $G_B = 5 \text{ K/s}$ , respectivamente, como mostrado na Figura 5-6-b.

O coeficiente de transferência de calor foi tomado como constante e igual a  $h(x,y) = 10 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ . Sendo assim, o campo do coeficiente  $H(x,y)$  é apresentado na Figura 5-6-c



A placa é inicialmente excitada com uma seqüência binária pseudo randômica (PRBS), de maneira que a distribuição inicial de temperatura seja distribuída de maneira aleatória entre 20 ou 40 °C. Esta distribuição é escolhida para aumentar os gradientes térmicos na placa, e conseqüentemente os coeficientes de sensibilidade locais. O campo de temperatura inicial e após  $t = 2$  s são apresentados nas Figuras 5-7-a-b respectivamente.



Para meios heterogêneos envolvendo interfaces acentuadas entre materiais homogêneos, como o da Figura 5-6-a, os parâmetros  $\delta_{i,j}^x$  e  $\delta_{i,j}^y$  são zero, exceto nas interfaces. Para tal caso, foi observado por FUDYM *et al.* (2008) que não considerar esses parâmetros na análise inversa não afeta a estimação da difusividade local nas partes homogêneas do meio, mas gera somente um bias nas interfaces. Desta maneira, esse parâmetro não está incluído nas análises subsequentes para o vetor de parâmetros a serem estimados.

### 5.2.1 Análise de sensibilidade

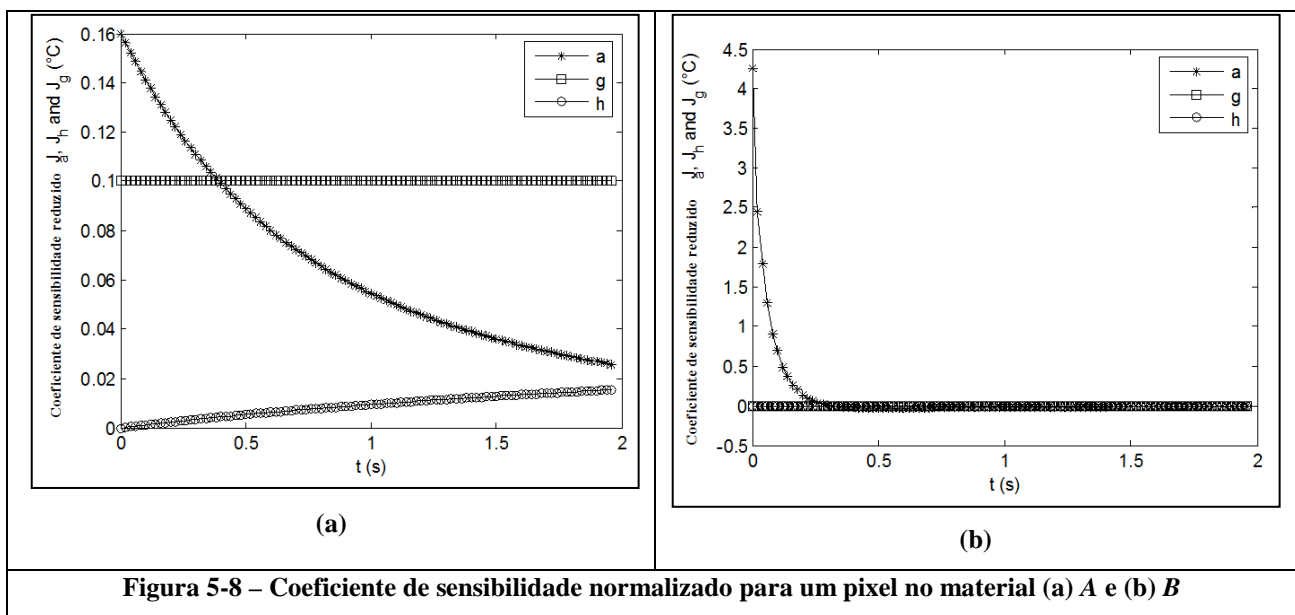
A análise de sensibilidade é feita para estudar os efeitos do tempo de experimento e determinar áreas aonde os parâmetros apresentem maior sensibilidade para a análise inversa. Os coeficientes de sensibilidade reduzidos com respeito a  $H_{i,j}$ ,  $G_{i,j}$  e  $\alpha_{i,j}$  são plotados nas Figuras 5-8-a-b, para um pixel no material A e B respectivamente. Os coeficientes de sensibilidade reduzidos são calculados multiplicando-se o coeficiente de sensibilidade original, obtido para cada elemento da matriz de sensibilidade dado pela Equação (4.8) pelo parâmetro que ele corresponde. Para ambos os casos, o coeficiente de sensibilidade reduzido com respeito às perdas de calor são praticamente zero. Desta maneira, o parâmetro  $H_{i,j}$  não pode ser estimado de forma acurada, mas ao mesmo tempo, ele não afeta o campo de temperaturas na região, já que seu coeficiente de sensibilidade é praticamente nulo. Por outro lado, o coeficiente de sensibilidade com respeito à difusividade térmica atinge valores relativamente altos. O coeficiente de sensibilidade com relação a  $G_{i,j}$  é constante e igual a  $\Delta t$  (ver eq.(4.8)), que neste caso foi considerado como 0.02 s

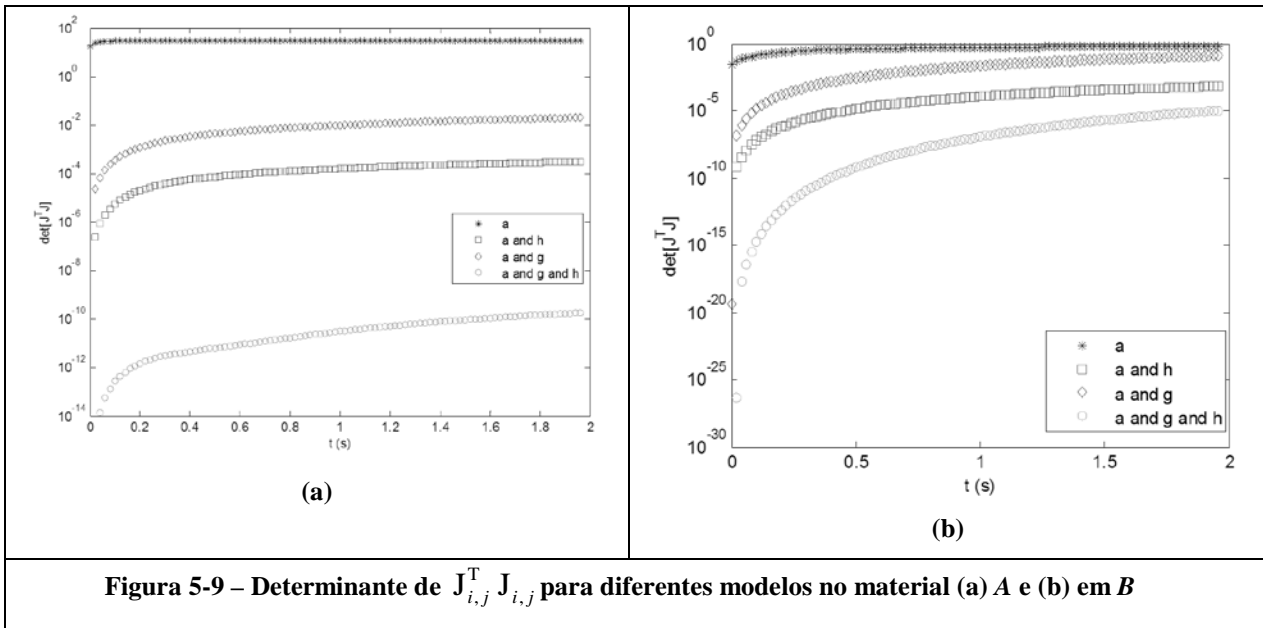
Observa-se pelas Figuras 5-8-a-b que após o máximo valor em tempos pequenos, o coeficiente de sensibilidade reduzido com respeito à difusividade térmica tende a zero rapidamente, especialmente para o material mais difusivos. Desta maneira, para tempos maiores que 2 s, esses coeficientes de sensibilidade se tornam relativamente pequenos, e a informação fornecida pela

medida de temperatura para a estimação desse parâmetro é drasticamente reduzida. Além do mais, como o coeficiente de sensibilidade com relação a  $h$  é muito pequeno, o problema é altamente mal-condicionado. Isto também é mostrado pela análise do determinante da matriz de informação  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  apresentado nas Figuras 5-9-a-b para pixels dos materiais  $A$  e  $B$  respectivamente. Nestas figuras estão plotados os determinantes da matriz de informação para diferentes conjuntos de parâmetros a serem estimados. A análise das Figuras 5-9-a-b mostra que a estimação do coeficiente de transferência de calor por convecção deve ser descartada, tendo em vista que os valores do determinante são extremamente baixos quando  $H_{i,j}$  é incluído entre os parâmetros a serem estimados.

Por não apresentarem coeficientes de sensibilidade linearmente dependentes, assim como valores do  $|\mathbf{J}^T \mathbf{J}|$  relativamente altos, nesta seção será considerada a estimativa dos parâmetros  $\alpha_{i,j}$  e  $G_{i,j}$  para cada pixel.

A análise das Figuras 5-9-a-b mostra que  $|\mathbf{J}^T \mathbf{J}|$  torna-se praticamente constante para tempos maiores que 1 segundo. De fato, os coeficientes de sensibilidade de  $\alpha_{i,j}$  tornam-se muito pequenos para tempos maiores, como pode ser observado nas Figuras 5-8-a-b





Estes resultados motivaram a escolha do tempo de experimento em  $t = 1$  s. Infelizmente, este tempo final pequeno impõe restrições no número de medidas disponíveis para o processo de estimação. Para uma frequência de medida de 50 Hz, (passo de tempo  $\Delta t = 0.02$  s), o número de dados experimentais disponíveis para cada pixel é igual a 50.

## 5.2.2 Resultados

Casos envolvendo dois diferentes erros experimentais foram usados:  $\sigma = 0.03$  °C e  $\sigma = 0.2$  °C, o que correspondem respectivamente a 0.15% e 1 % da máxima diferença de temperatura no meio.

Para o algoritmo de Metropolis-Hastings (MH), a distribuição a priori para o campo de difusividade térmica  $\alpha(x,y)$  é assumido como sendo uniforme no intervalo  $[5.10^{-9}, 9.10^{-6}]$  m<sup>2</sup>/s. Tal intervalo compreende a maioria do materiais isolantes, e não fornece nenhuma informação prática ao valores dos parâmetros a serem estimados. A informação a priori para o termo fonte é assumido como sendo uniforme no intervalo  $[0, 10]$  K/s.

A cadeia de Markov para cada pixel consistiu em 1600 estados, onde os 800 primeiros foram desconsiderados para o cálculo dos parâmetros estatísticos. A taxa da aceitação do algoritmo de MH foi da ordem de 40% para as medidas com desvio padrão de 0.03 °C e 60% para medidas com desvio padrão de 0.2 °C, conforme ilustram as Figuras 5-10-a-b. A amplitude de movimento dos parâmetros foi de aproximadamente 1 % para a difusividade térmica assim como para a matriz de sensibilidade e 3 % para o parâmetro relativo ao termo-fonte.

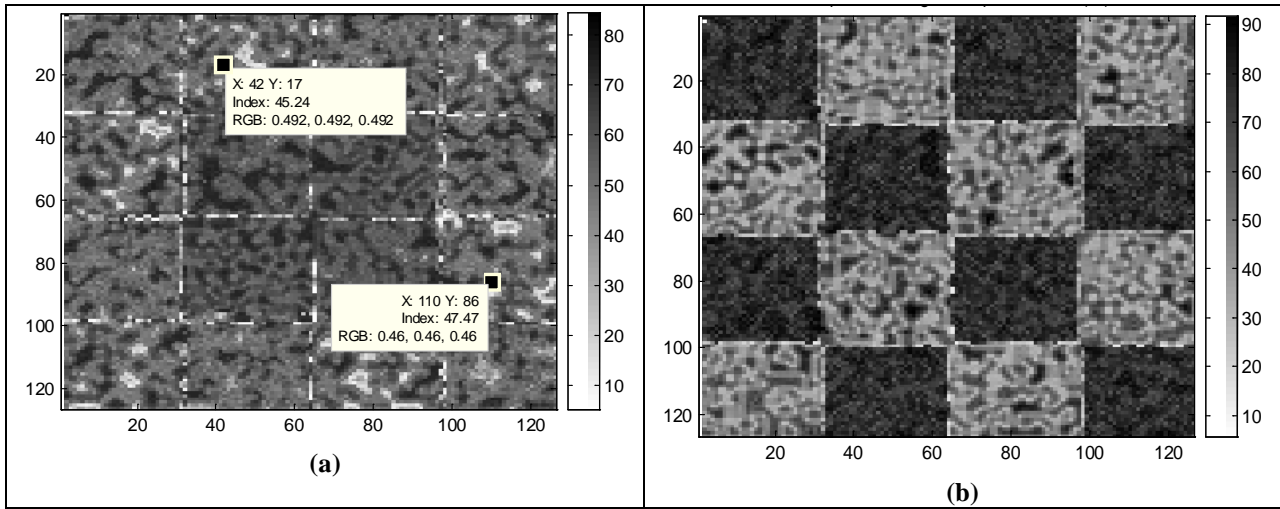


Figura 5-10 – Taxa de aceitação do algoritmo de MH para (a)  $\sigma = 0.03 \text{ }^\circ\text{C}$  e (b)  $\sigma = 0.2 \text{ }^\circ\text{C}$

### 5.2.2.1 Meio Periódico com $\sigma = 0.03 \text{ }^\circ\text{C}$ .

As Figuras 5-11-a-b apresentam a comparação entre os campos de difusividade térmica estimados com mínimos quadrados ordinários (OLS), e o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov implementado com o algoritmo de Metropolis Hastings (MH). As Figuras 5-12-a-b apresentam o mapeamento do parâmetro  $G_{ij}$  obtidos com os métodos OLS e MH. A comparação desses resultados com o campo exato, mostrado nas Figuras 5-6-a-b respectivamente mostram que o método de MH é capaz de estimar razoavelmente bem  $G_{ij}$ . Por outro lado o OLS falha na estimação de  $G_{ij}$  por não ser usado nenhum método de regularização na estimativa e por este ser biased (BAMFORD *et al.*, 2008). Ambos os algoritmos estimam eficientemente a distribuição da difusividade térmica. Como esperado, existe um bias na estimação nas interfaces entre os materiais A e B, devido ao fato que os gradientes de condutividade térmica foram desconsiderados na solução do problema inverso.

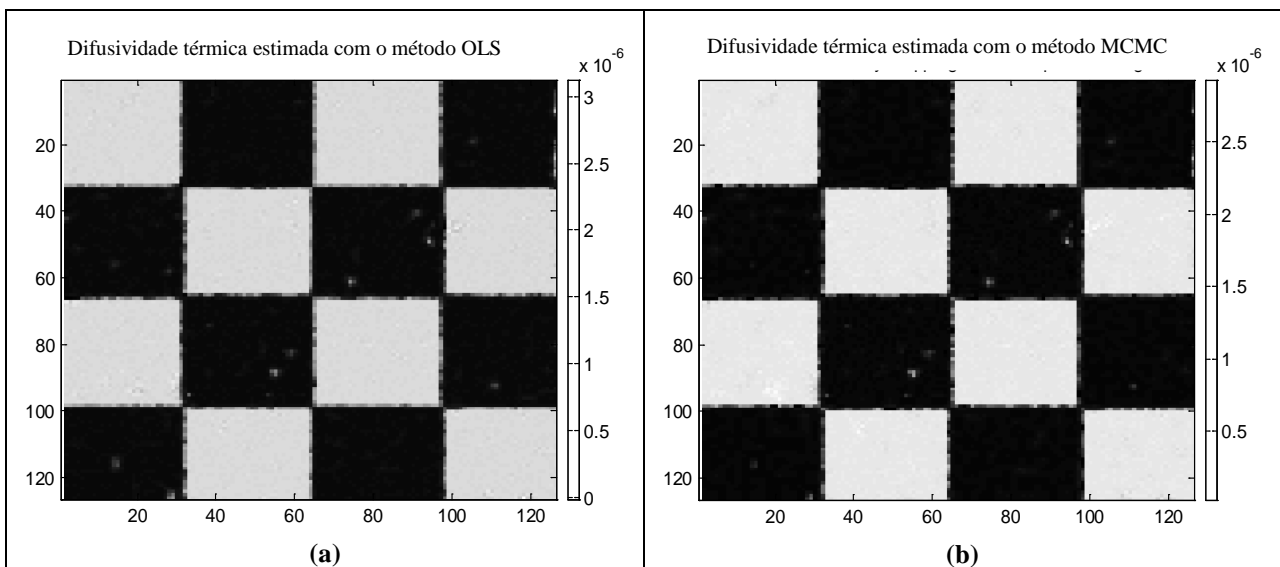
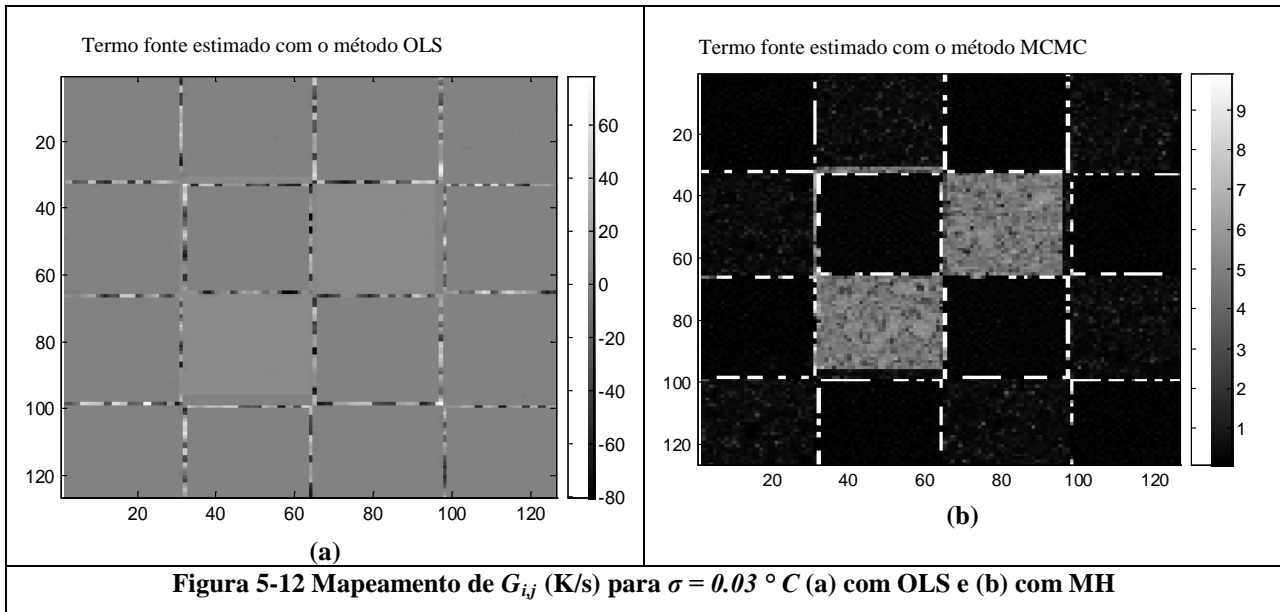
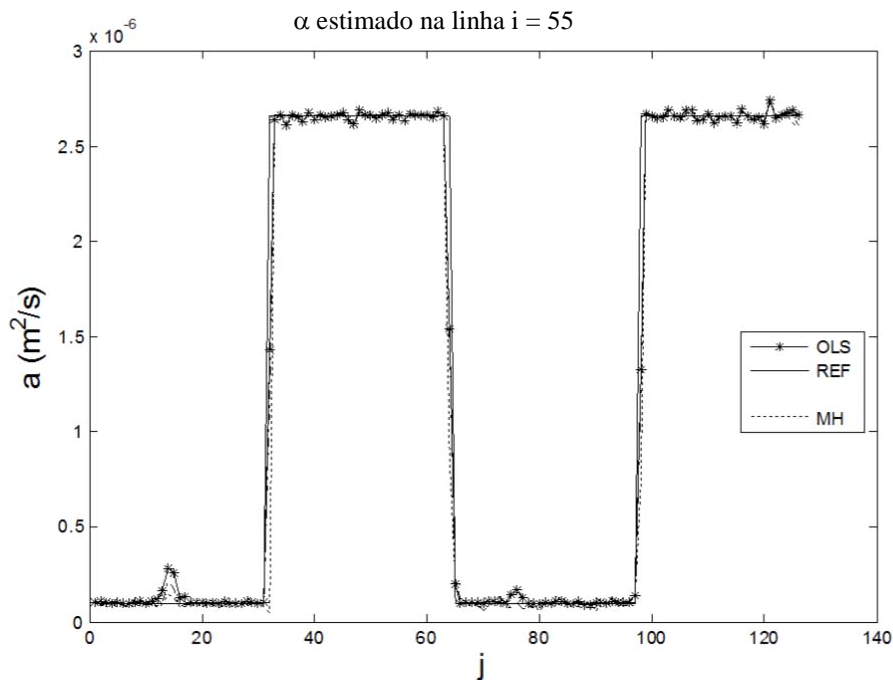


Figura 5-11 Mapeamento da difusividade térmica ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ) para  $\sigma = 0.03 \text{ }^\circ\text{C}$  (a) com OLS e (b) com MH



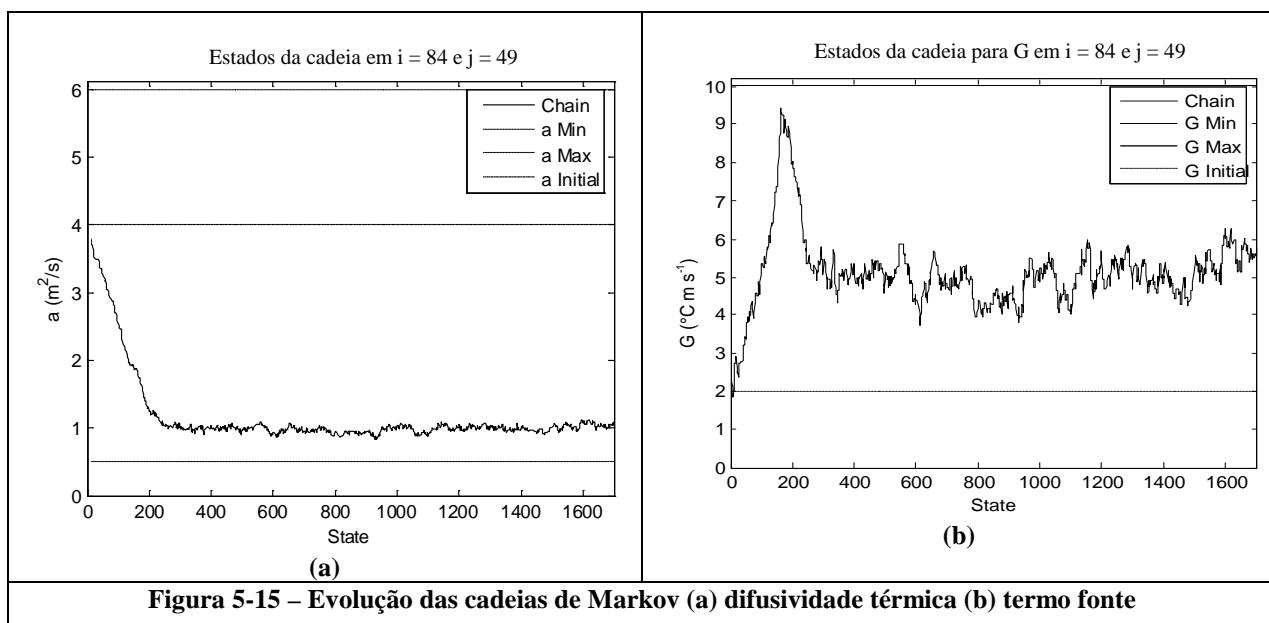
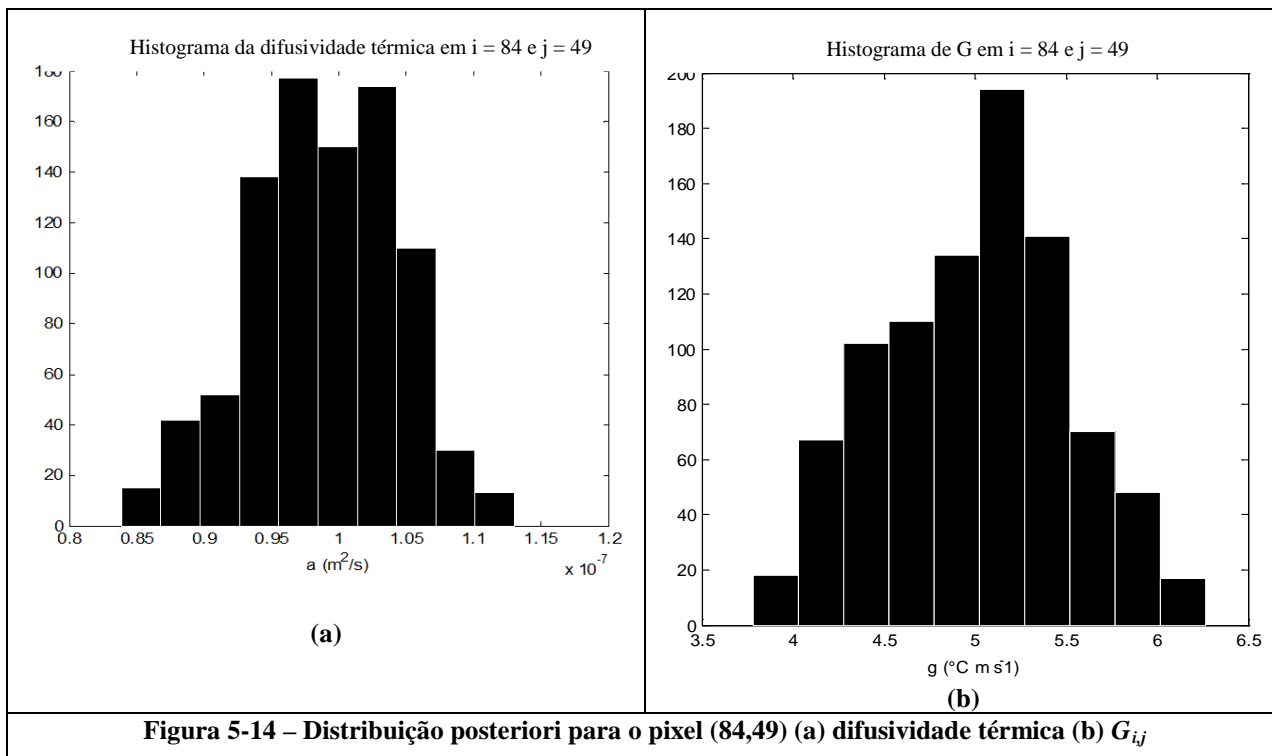
Resultado similar é mostrado na Figura 5-13, que apresenta a variação da difusividade térmica ao longo da linha  $i = 55$  (que corresponde a  $x = 0.1$  m) obtidas com OLS e MH e comparados com os valores de referência.



**Figura 5-13 – Comparação dos perfis de difusividade térmica estimados na linha  $i = 55$ .**

As Figuras 5-14-a-b e 5-15-a-b mostram as densidades marginais posteriores e os comportamentos da convergência da cadeia de Markov, respectivamente. As Figuras 5-14-a-b apresenta a distribuição marginal posterior obtida com MCMC para a difusividade térmica e  $G_{i,j}$ , estimados no pixel ( $i = 84, j = 49$ ) que corresponde a ( $x = 0.0168$  m,  $y = 0.0098$  m). Pode-se observar que a distribuição posterior aproxima-se de uma distribuição Gaussiana, conforme esperado pela

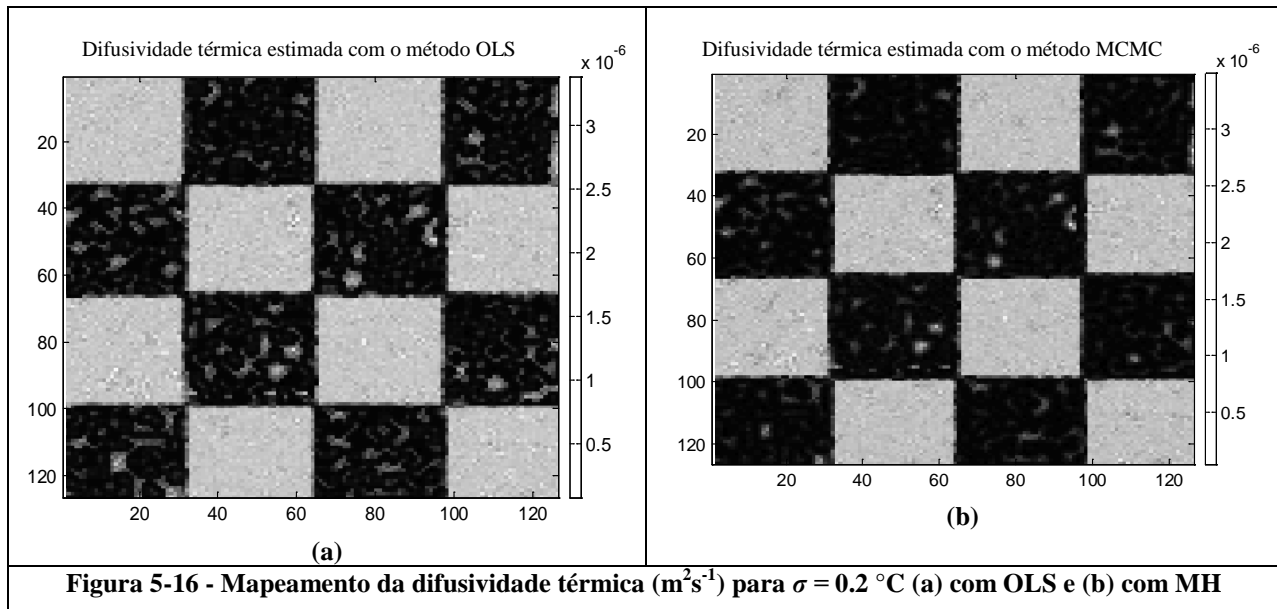
verossimilhança Gaussiana e a distribuição priori uniforme assumidas. As Figuras 5-15-a-b apresenta a evolução dos estados da cadeia para 1600 estados para os mesmos pixels da figura anterior. Pode ser observado que após os estados de aquecimento, a cadeia alcançou a convergência rapidamente.



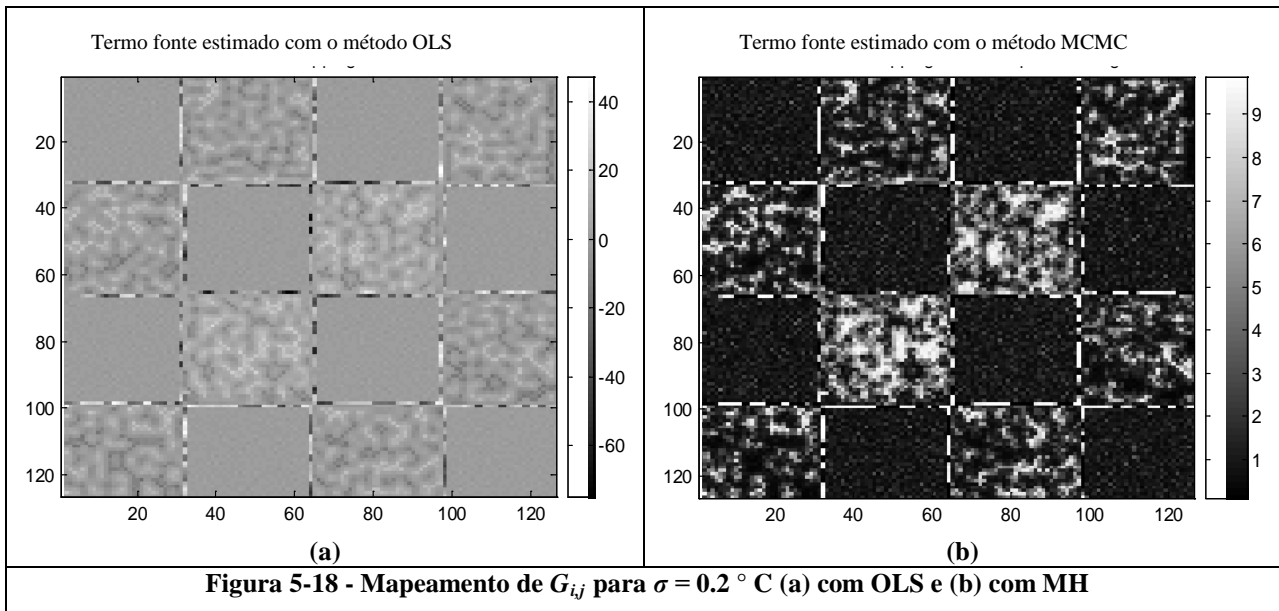
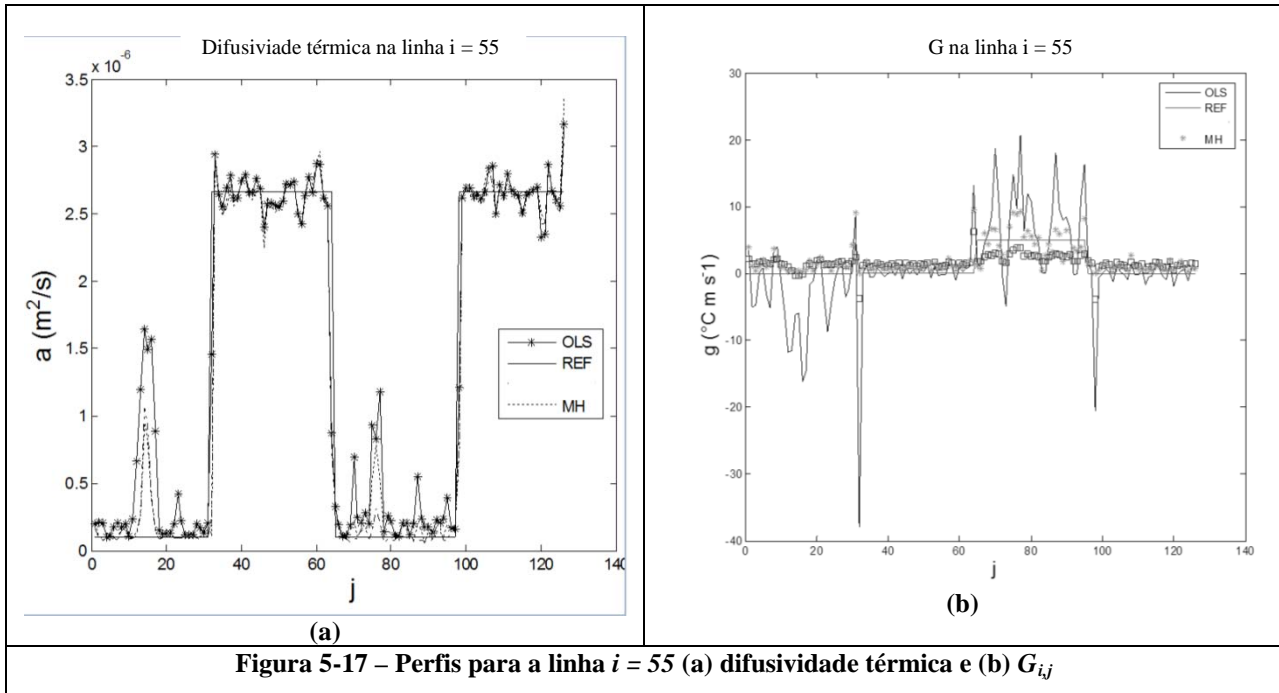


### 5.2.2.2 Meio Periódico com $\sigma = 0.2 \text{ }^\circ\text{C}$

Os mesmos métodos foram usados agora com medidas simuladas contendo desvio padrão de  $\sigma = 0.2 \text{ }^\circ\text{C}$ . Os campos de difusividade térmica estimados estão mostrados nas Figuras 5-16-a-b. Nestas figuras está aparente o caráter mais suave da estimação com o algoritmo de MH que com o método OLS.



As Figuras 5-17-a-b apresentam a difusividade térmica e o parâmetro  $G_{i,j}$  ao longo da linha  $i = 55$ . Para este nível de erros alto, o algoritmo de MH apresenta melhores resultados que o OLS para o mapeamento de  $G_{i,j}$ . Por outro lado, o mapeamento de  $G_{i,j}$  é relativamente pobre tanto pelo OLS como pelo algoritmo de MH, conforme mostrado nas Figuras 5-18-a-b, quando comparado com o mapeamento de referência, dado pela Figura 5-6-b.



### 5.2.2.3 Falha com $\sigma = 0.03 \text{ } ^\circ\text{C}$

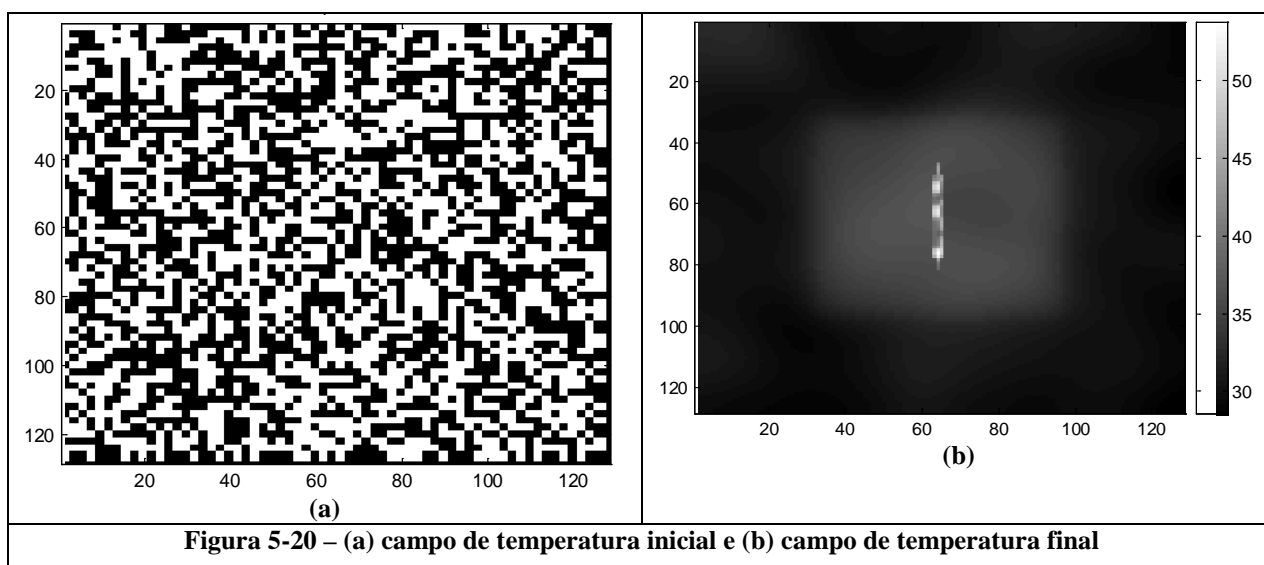
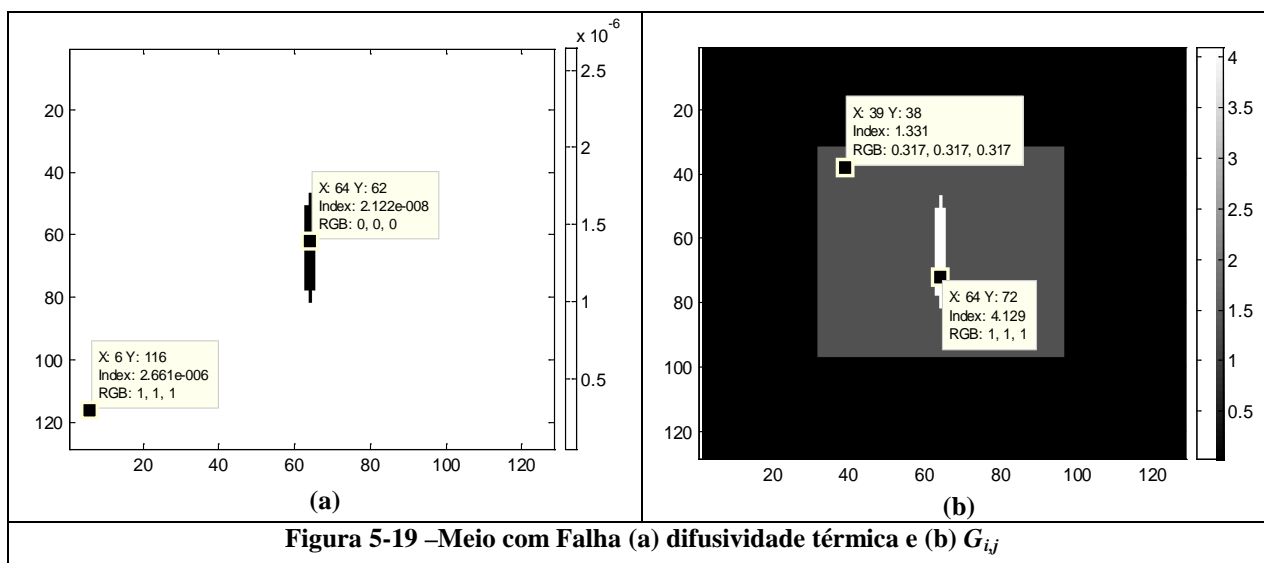
Para este caso, considerou-se que o meio seja composto por um material homogêneo  $A$  e uma falha, representada pelo material  $B$ . Desta maneira:

$$k_A = 10 \text{ W/(mK)}, C_A = 3.75 \cdot 10^6 \text{ J/(m}^3\text{K)}, \alpha_A = 2.66 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

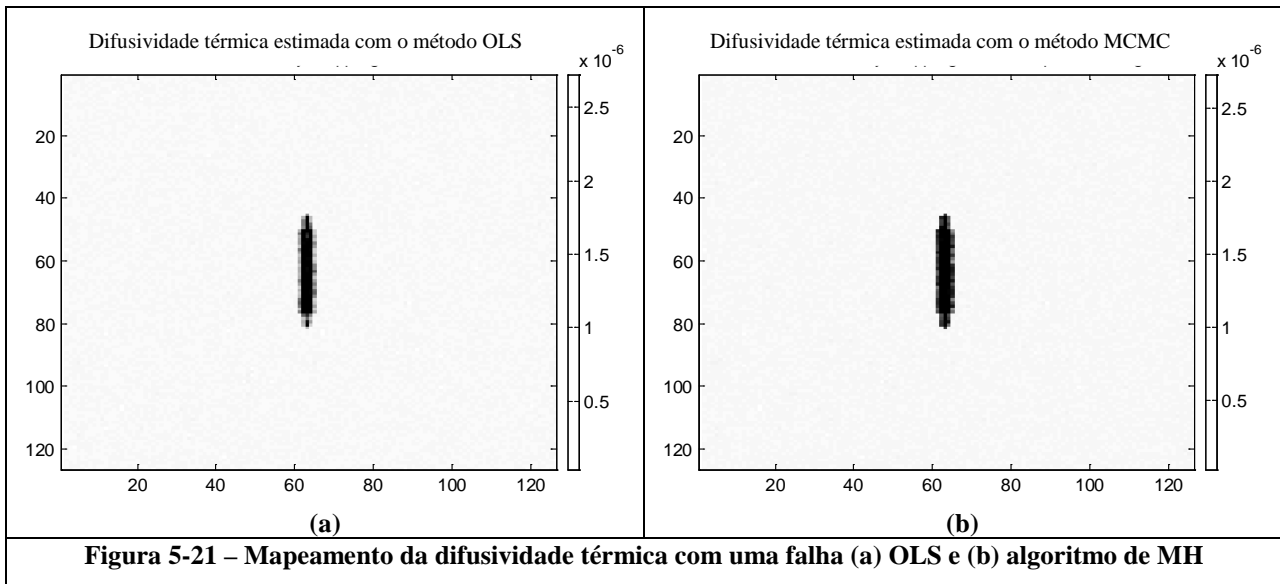
$$k_B = 0.0257 \text{ W/(mK)}, C_B = 1211025 \text{ J/(m}^3\text{K)}, \alpha_B = 2.12 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$$

A difusividade térmica e o parâmetro  $G_{i,j}$ , que depende do termo fonte, estão mostrados nas Figuras 5-19-a-b. As escalas dos eixos correspondem ao número de pixels. O termo fonte aplicado foi de  $g_{i,j} = 1 \cdot 10^4 \text{ W/m}^2$  na região  $\{I, J\}$ , tal que  $a_i/4 < I < 3a_i/4$  e  $a_j/4 < J < 3a_j/4$ . Desta forma, os

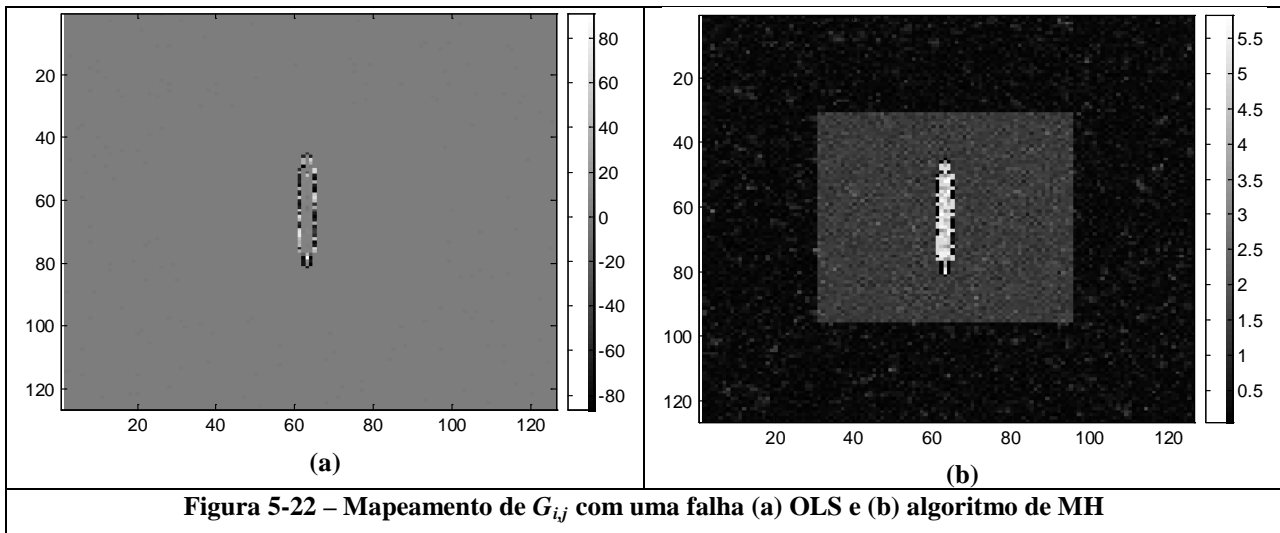
valores não negativos a serem estimados são:  $G_A = 1.33 \text{ K/s}$  e  $G_B = 4.129 \text{ K/s}$  respectivamente, conforme mostrado na Figura 5-19-b. As Figuras 5-20-a-b apresentam, respectivamente, os campos de temperaturas inicial e final.

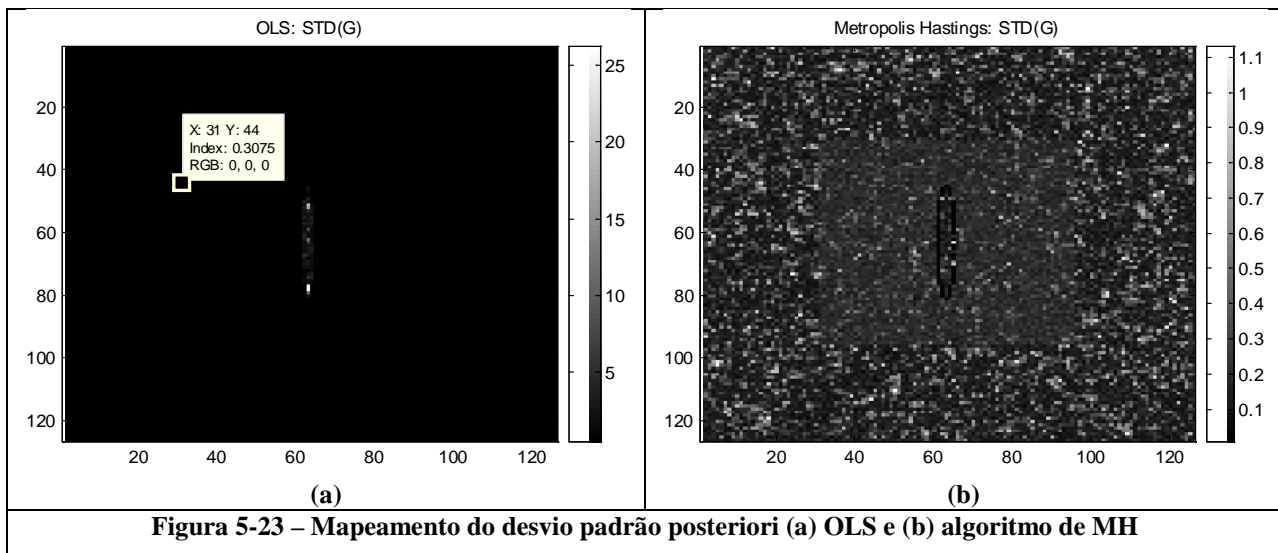


O desvio padrão para as medidas experimentais foi de  $\sigma = 0.03 \text{ }^\circ\text{C}$ . A amplitude de movimento escolhida foi de 1 % para a difusividade térmica, 2 % para a matriz de sensibilidade e 13% para  $G_{ij}$ . A cadeia de Markov para cada pixel consistiu em 1500 estados, onde os 500 primeiros foram descartados para o cálculo das estatísticas dos parâmetros. A taxa de aceitação foi em média 10 %.



As Figuras 5-21-a-b apresentam a comparação dos campos de difusividade térmica estimados com OLS e algoritmo de MH, enquanto as Figuras 5-22-a-b apresentam o mapeamento de  $G_{i,j}$ , estimado com OLS e algoritmo de MH. A difusividade térmica foi estimada de forma satisfatória por ambos os métodos. O OLS falhou ao realizar a estimativa de  $G_{i,j}$ , por não ser utilizada nenhuma regularização e por este ser biased (BAMFORD *et al.*, 2008). O algoritmo de MH é capaz de estimar o parâmetro  $G_{i,j}$ . Este resultado é corroborado pela análise do mapeamento do desvio padrão de  $G_{i,j}$ , mostrado nas Figuras 5-23-a-b.





Foi feita uma média em todo o campo do desvio padrão da distribuição marginal posteriori para se avaliar a dispersão dos parâmetros estimados. Estes valores são comparados com os desvios padrões obtidos com a estimação OLS. Estes resultados estão dados na Tabela 5-1. Os comentários sobre o desempenho do método MCMC são confirmados por esta tabela, já que o desvio padrão médio do MCMC foi menor que o do OLS.

Para o caso periódico, o desvio padrão médio da estimativa da difusividade térmica para o erro de medida  $\sigma = 0.03 \text{ }^\circ\text{C}$  é 45% menor com o algoritmo de MH do que com o método OLS. Já para o caso com erro de medida  $\sigma = 0.2 \text{ }^\circ\text{C}$ , a diferença sobe para 49%.

Para o parâmetro  $G_{i,j}$ , o desvio padrão médio da estimativa com erro de medida  $\sigma = 0.03 \text{ }^\circ\text{C}$  é 62% maior para a estimativa com OLS que com o método de MH. Já para o erro de medida  $\sigma = 0.2 \text{ }^\circ\text{C}$ , a diferença é de 72%.

Para o material com uma falha, o comportamento foi o mesmo. O desvio padrão médio da estimativa da difusividade térmica para o erro de medida  $\sigma = 0.03 \text{ }^\circ\text{C}$  é 30% menor com o algoritmo de MH do que com o método OLS. Já para o parâmetro  $G_{i,j}$ , esta diferença é de 28%.

O método de MH resultou em estimativas mais precisas para  $\alpha_{i,j}$  e  $G_{i,j}$ , para todos os casos analisados. Além disso, nota-se que a performance superior do método de MH fica mais significativa quando as medidas envolvem maiores erros experimentais.

**Tabela 5-1 - Desvio padrão médio para OLS e MH**

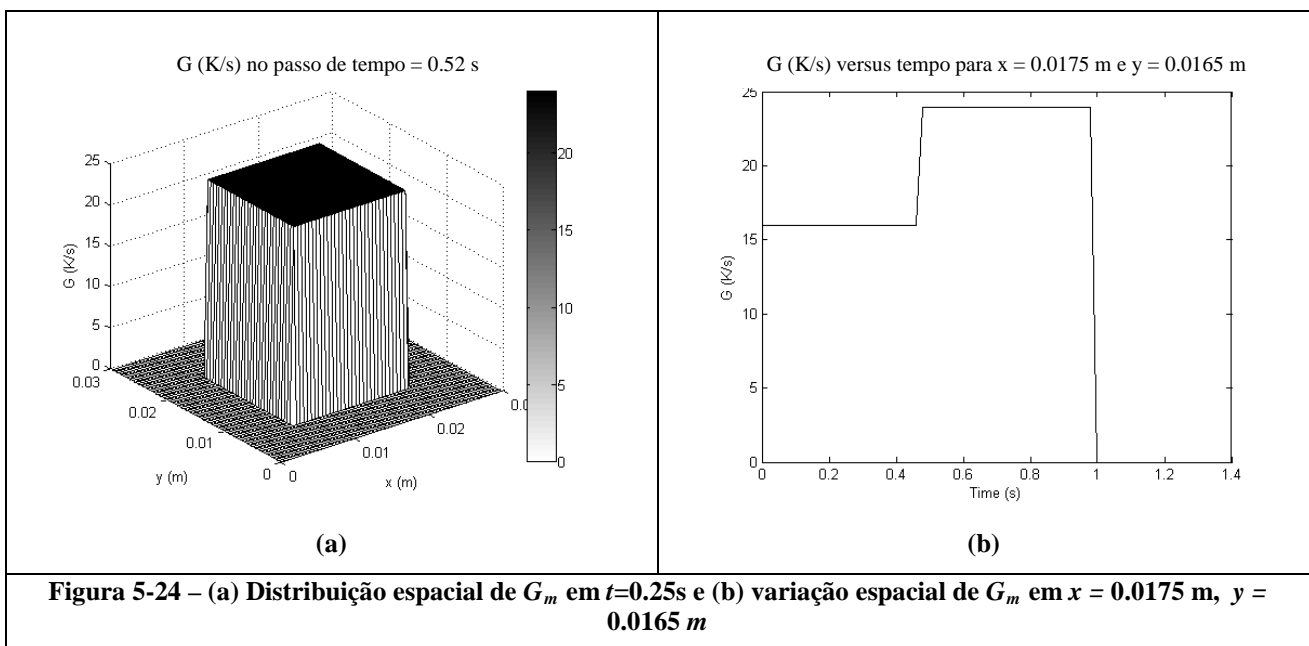
<i>Caso</i>	<i>Método</i>	<i>a</i>	<i>G</i>	<i>a</i>	<i>G</i>
		( $\text{m}^2/\text{s}$ ) $\sigma = 0.03 \text{ }^\circ\text{C}$	( $\text{Ks}^{-1}$ ) $\sigma = 0.03 \text{ }^\circ\text{C}$	( $\text{m}^2/\text{s}$ ) $\sigma = 0.2 \text{ }^\circ\text{C}$	( $\text{Ks}^{-1}$ ) $\sigma = 0.2 \text{ }^\circ\text{C}$
<i>Periódico</i>	<i>OLS</i>	<b><math>2.9 \times 10^{-8}</math></b>	<b>0.64</b>	<b><math>1.4 \times 10^{-7}</math></b>	<b>2.7</b>
<i>Periódico</i>	<i>MH</i>	<b><math>1.6 \times 10^{-8}</math></b>	<b>0.24</b>	<b><math>7.2 \times 10^{-8}</math></b>	<b>0.75</b>
<i>Falha</i>	<i>OLS</i>	<b><math>1.4 \times 10^{-8}</math></b>	<b>0.32</b>	-	-
<i>Falha</i>	<i>MH</i>	<b><math>9.9 \times 10^{-9}</math></b>	<b>0.23</b>	-	-

Para o passo no espaço de 200  $\mu\text{m}$  usado nesta verificação, observa-se que para todos os casos analisados as propriedades termofísicas e termos-fonte foram estimados de forma satisfatória com o algoritmo de Metropolis-Hastings. Dessa forma, verificou-se também a possibilidade do presente modelo matemático e do problema inverso estudado em estimar termos-fonte constantes no tempo e propriedades termofísicas em micro-escala.

### 5.3 Solução do problema inverso do tipo II com medidas simuladas

Para a verificação da solução do problema inverso do tipo II uma placa plana de espessura  $e = 0.002$  m composta de um material com propriedades  $k=10$  W/(mK) e  $C=3.76 \cdot 10^6$  J/(m<sup>3</sup>K) é sujeita a um termo fonte que varia com o tempo. Como na seção 5.2, uma solução por volumes finitos foi usada para gerar as medidas experimentais e evitar o *crime inverso*. Para a solução do problema inverso, a placa foi discretizada em  $a_i = a_j = 60$  nós internos e 70 passos de tempo. Os valores do parâmetro  $G_m^n$  foram então estimados para cada um desses nós e passos de tempo. A malha espacial foi escolhida como  $\Delta x = \Delta y = 500 \mu\text{m}$ , de maneira que as dimensões da placa são  $L_x = L_y = 0.03$  m. O tempo final foi de 1.4s, e o passo de tempo foi de 0.02s, que satisfaz o critério de estabilidade do método de diferenças finitas usado na estratégia nodal.

O termo fonte foi suposto como aplicado em cada nó na região definida por  $0.0075 < x < 0.0225$  m e  $0.0075 < y < 0.0225$  m, com  $g_m = 1.2 \times 10^5$  W/m<sup>2</sup>, para  $0 < t < 0.5$  s,  $g_m = 1.8 \times 10^5$  W/m<sup>2</sup>, para  $0.51 < t < 1$  s e  $g_m = 0$  W/m<sup>2</sup>, para  $1 < t < 1.4$  s. O termo fonte foi considerado nulo fora desta região. Desta forma, os valores não negativos a serem estimados são  $G_m = 15.97$  K/s, para  $0 < t < 0.5$  s e  $G_m = 23.95$  K/s, para  $0.51 < t < 1$  s, conforme apresentado nas Figuras 5-24-a-b, que apresentam as variações espaciais e temporais de  $G_m$ .



O coeficiente de transferência de calor foi assumido como tendo o valor de  $5 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ . A temperatura inicial da placa foi considerada de  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . A temperatura final ( $t=1.4\text{s}$ ) está apresentada na Figura 5-25

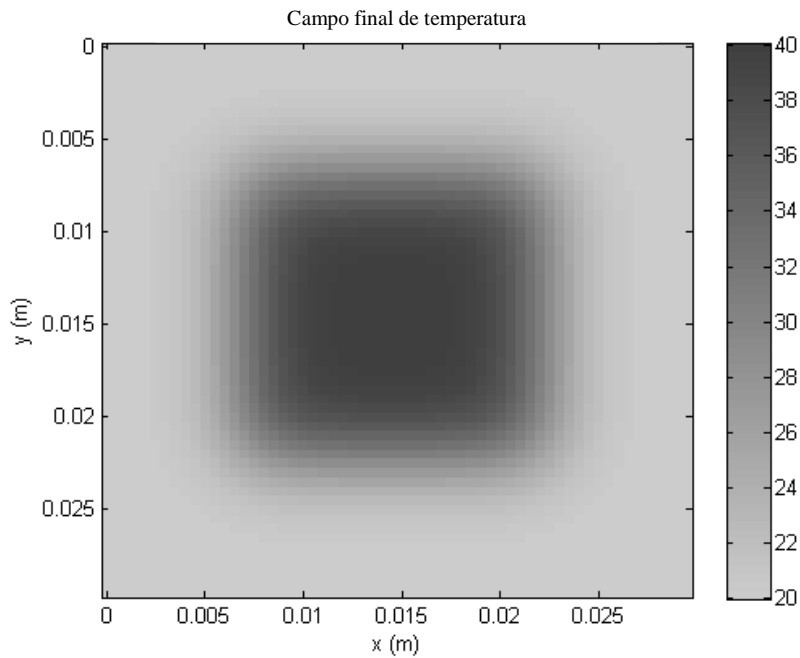


Figura 5-25 – Campo de temperatura final em  $t=1.4\text{s}$

### 5.3.1 Análise de sensibilidade

A análise de sensibilidade é feita para examinar o efeito das perdas de calor na superfície da placa, assim como a possibilidade da estimação do termo-fonte. O coeficiente de sensibilidade reduzido com relação a  $H_m^k$  e  $G_m^k$  estão apresentados na Figura 5-26 em função do tempo, para um pixel específico.

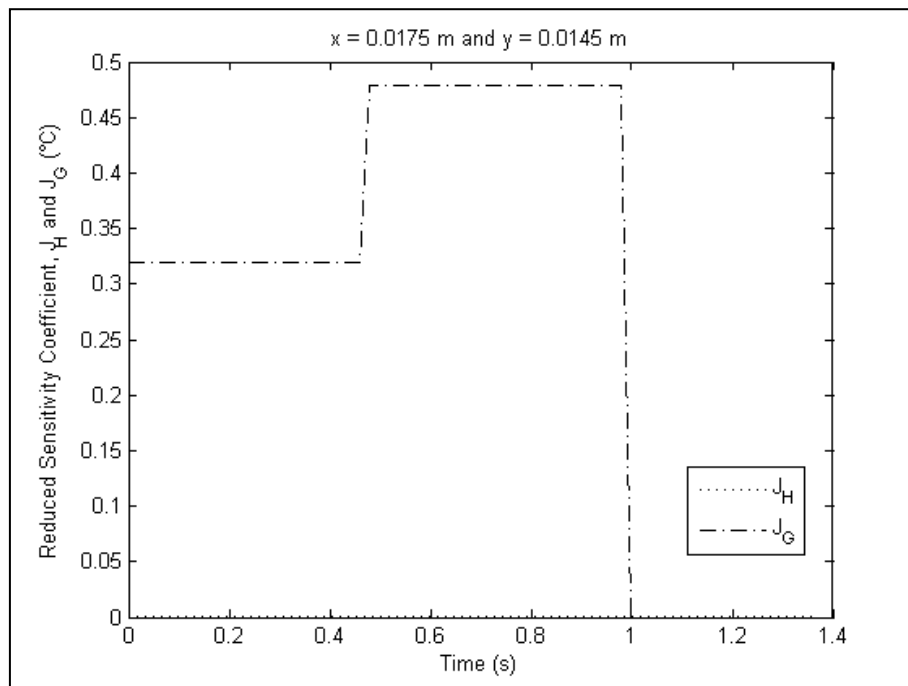
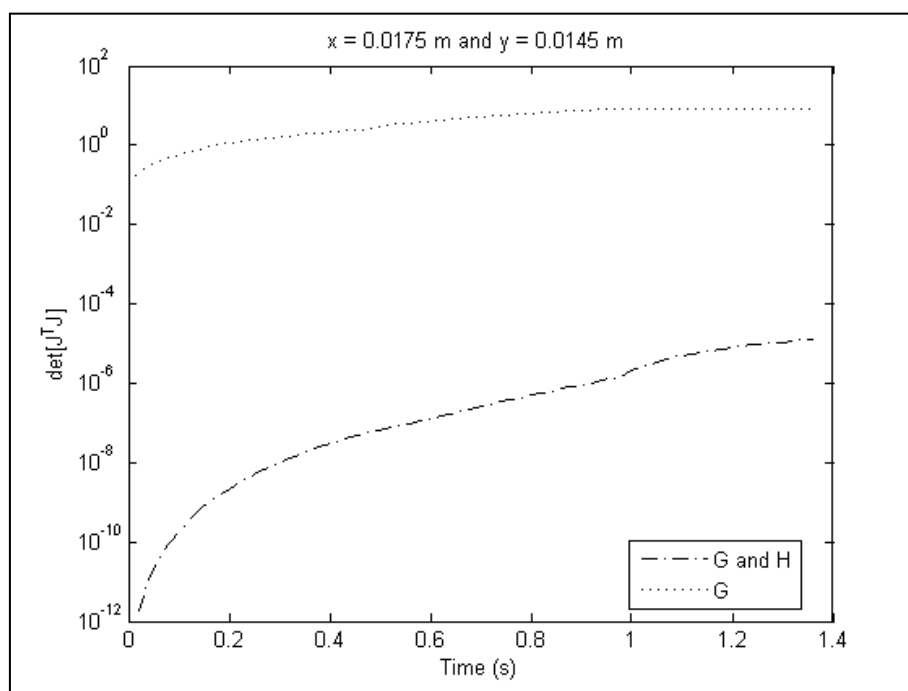


Figura 5-26 – Coeficiente de sensibilidade reduzido em  $x=0.0175 \text{ m}$ ,  $y=0.0145 \text{ m}$ .

A Figura 5-26 apresenta o coeficiente de sensibilidade reduzido para os pixels ( $i=35, j=29$ ) ( $x=0.0175$  m,  $y=0.0145$  m), onde o termo fonte é não nulo. O coeficiente de sensibilidade com relação às perdas de calor é praticamente nulo. Desta forma o parâmetro  $H_m^k$  não poderá ser estimado com a mesma incerteza que  $G_m^k$  com o procedimento experimental apresentado, e ao mesmo tempo o campo de temperatura na região estudada não é afetado pela presença desse parâmetro.

Como o coeficiente de sensibilidade reduzido tende a zero para  $H_m^k$  e em alguns locais para  $G_m^k$ , o presente problema é altamente mal-condicionado. Isto também é aparente pela análise do determinante da matriz de informação  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  apresentado na Figura 5-27.



**Figura 5-27 – Determinante de  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  em  $x = 0.0175$  m e  $y = 0.0145$  m**

O determinante da matriz de informação é mostrado na Figura 5-27 para dois grupos de parâmetros a serem estimados,  $H_m^k$  e  $G_m^k$  ou somente  $G_m^k$ . A Figura 5-27 confirma o resultado da análise de sensibilidade, que a estimação somente de  $G_m^k$  é mais bem condicionado do que a estimação de  $G_m^k$  e  $H_m^k$ . Desta maneira, para a presente validação do problema inverso do tipo II, foi considerada somente a estimação do termo fonte  $G_m^k$ . Por outro lado, as incertezas no conhecimento de  $H_m^k$  e  $\alpha$  são levadas em conta no modelo de evolução através da matriz  $\mathbf{Q}_p^k$  (Equação (4.61)). Os desvios-padrões de  $H_m^k$  e  $\alpha$  são considerados sendo 0.001 1/s e 0.001 m<sup>2</sup>/s, respectivamente. Estes valores representam a pequena incerteza sobre a informação a priori desses parâmetros, indicando

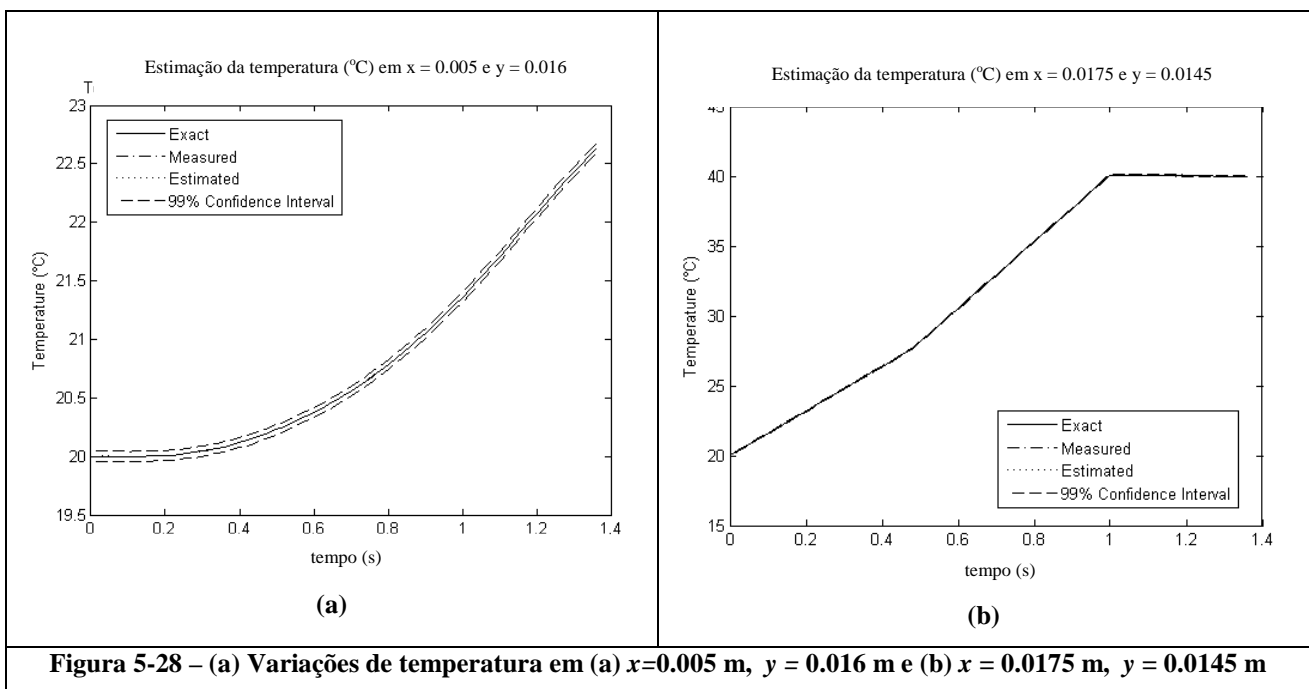


que estes são bem conhecidos, e que a evolução desses parâmetros não será levada em conta no vetor de estados.

### 5.3.1 Resultados

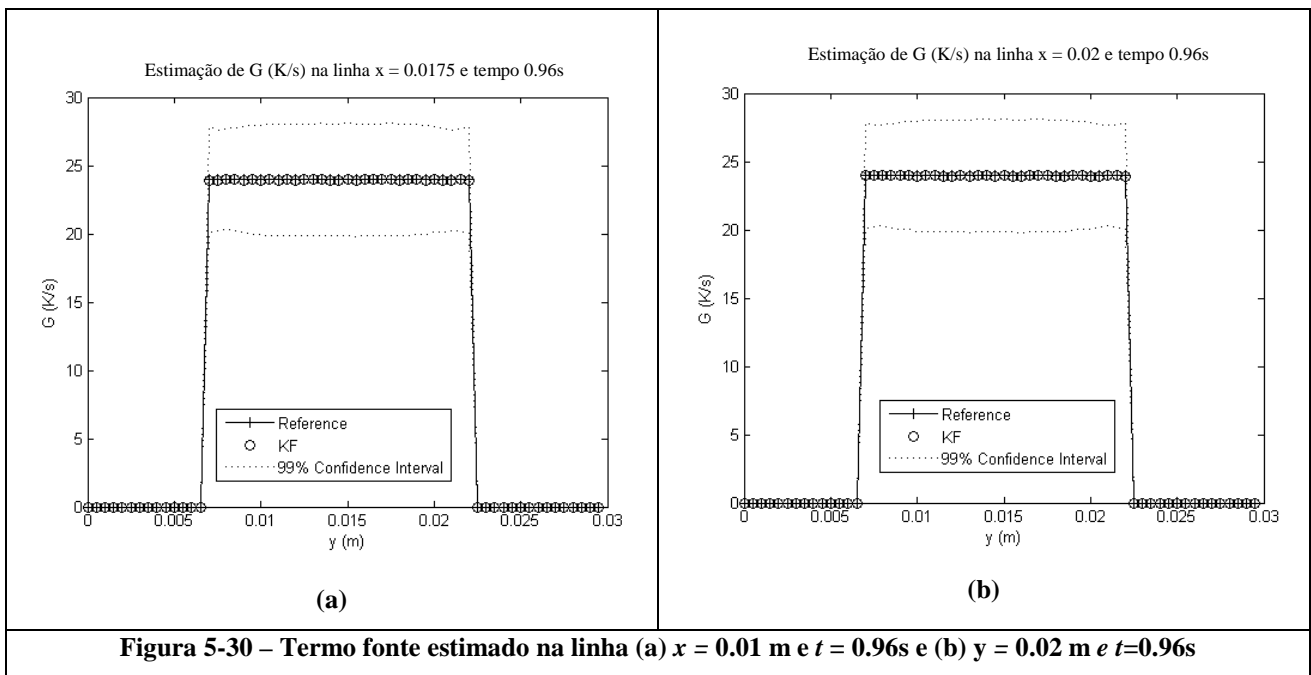
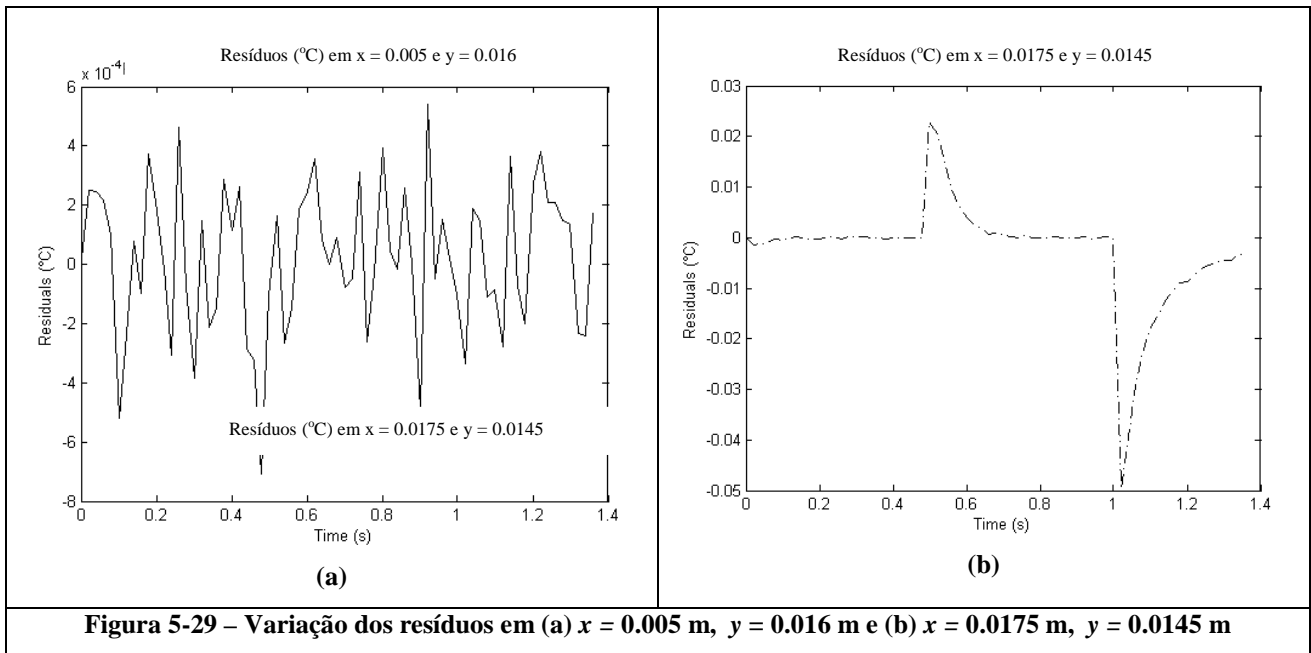
Para os resultados apresentados, assume-se que os erros nas medidas de temperatura são aditivos, não correlacionados, com distribuição normal, com média zero e desvio padrão de 0.02 °C. Os valores de  $G_m^0$  em  $t = 0$  s são considerados como tendo uma distribuição Gaussiana, com média conhecida e com desvio padrão de 4% da média. O desvio padrão para o modelo de evolução para  $G_m^{k+1}$  (que é considerado seguindo um passeio aleatório, Equação (4.62)) foi considerado como 4% da média do parâmetro estimado no passo de tempo anterior, isto é,  $0.04G_m^k$ , e as variâncias do modelo de evolução para  $T_m^{k+1}$  foram calculadas de acordo com a Equação (4.61).

As Figuras 5-28-a-b apresentam a comparação das temperaturas exata e estimada, nas posições ( $i = 10, j = 32$ ) e ( $i = 35, j = 29$ ), que correspondem a ( $x=0.005$  m,  $y=0.016$  m) e ( $x=0.0175$  m,  $y=0.0145$  m), respectivamente. As temperaturas estimadas foram obtidas com o filtro de Kalman. Os intervalos de confiança de 99% também estão representados nessas figuras. Como o desvio padrão para os erros experimentais foi de 0.02 °C, a melhora na estimativa da temperatura comparada com as medidas não pôde ser observada.



**Figura 5-28 – (a) Variações de temperatura em (a)  $x=0.005$  m,  $y = 0.016$  m e (b)  $x = 0.0175$  m,  $y = 0.0145$  m**

As Figuras 5-29-a-b apresentam os resíduos entre as temperaturas medidas e estimadas nos mesmo pontos escolhidos para as Figuras 5-28-a-b. As Figuras 5-29-a-b mostram que as temperaturas estimadas estão com excelente concordância com a temperatura exata. As discontinuidades na Figura 5-28b são devidos aos passos de tempo necessários para que o Filtro de Kalman alcance o valor de referência, como será apresentado posteriormente.



As Figuras 5-30-a-b apresentam a estimação do termo fonte obtido com o filtro de Kalman, assim como o perfil exato ao longo das linhas  $i = 20$  ( $x=0.01$  m) e  $i = 40$  ( $y=0.02$  m), respectivamente, ambos no passo de tempo 47 ( $t = 0.96$  s). O intervalo de confiança de 99% para a estimação do termo fonte está também apresentado nessas figuras. A Figura 5-31 apresenta a distribuição espacial da estimação do termo fonte para o passo de tempo 47 ( $t = 0.96$ s), mostrando uma boa concordância com o termo fonte de referência (Figura 5-24-a).

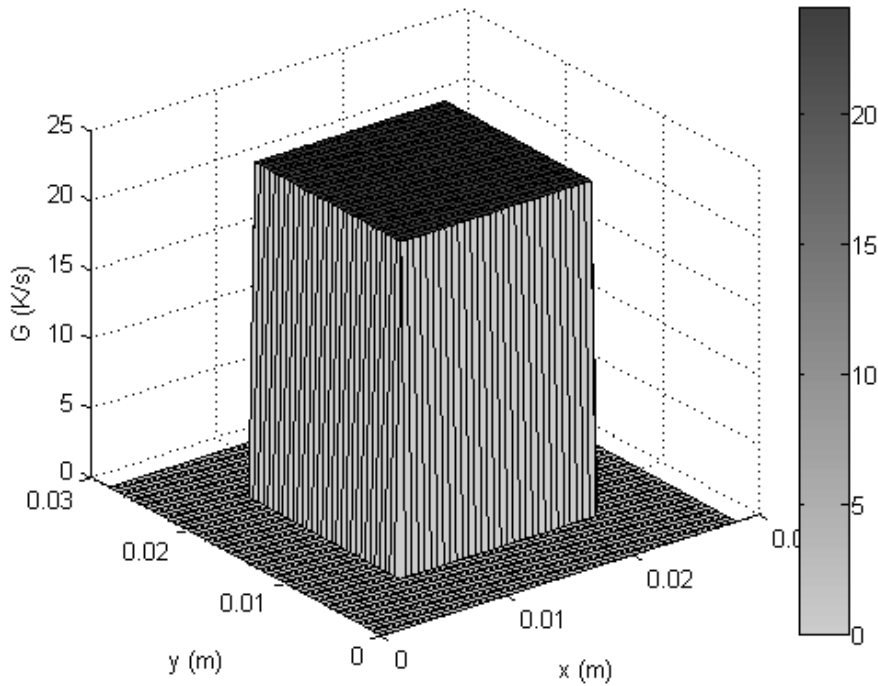


Figura 5-31 – Termo fonte estimado em todo o meio no tempo  $t=0.96s$

As Figuras 5-32-a-b apresentam a evolução no tempo do termo fonte obtido com o filtro de Kalman nas posições  $(i = 44, j = 30)$  e  $(i = 35, j = 29)$ , que correspondem a  $(x = 0.022 \text{ m}, y = 0.015 \text{ m})$  e  $(x = 0.0175 \text{ m}, y = 0.0145 \text{ m})$ , respectivamente. Estas figuras mostram que o termo fonte obtido com o filtro de Kalman necessita de aproximadamente 15 passos de tempo (0.3 segundos) para alcançar o valor de referência, após mudanças bruscas na função degrau analisada.

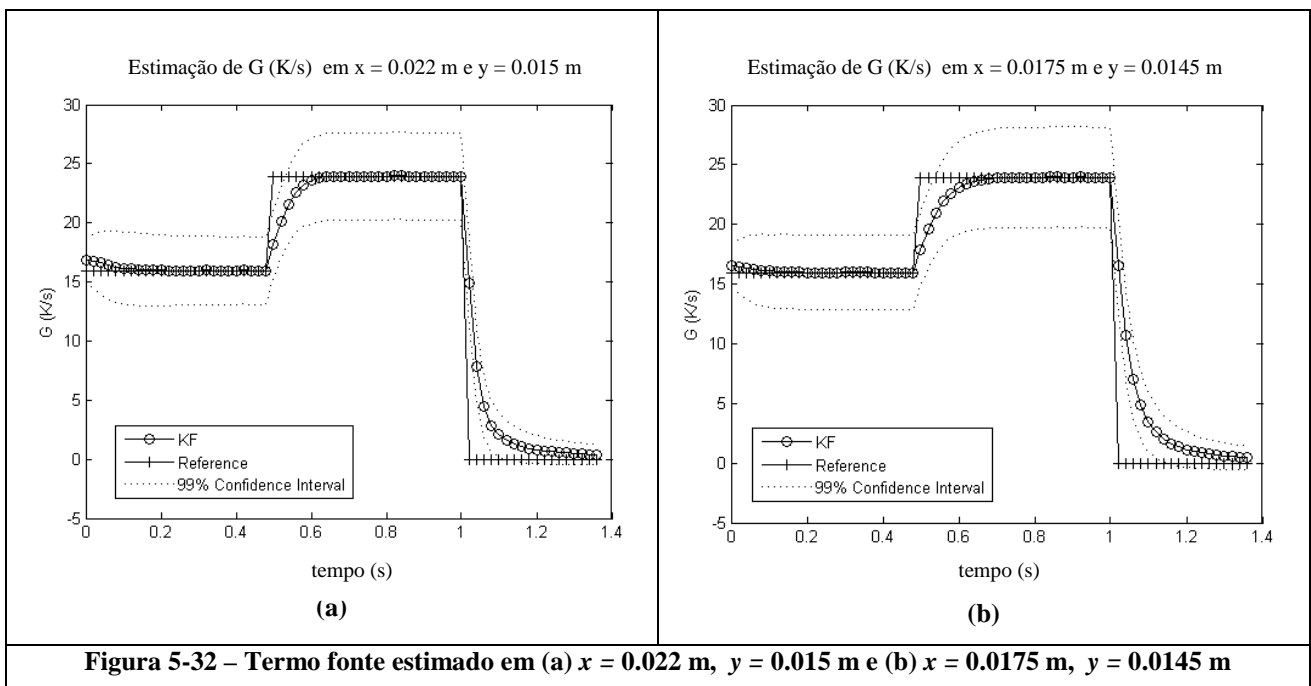


Figura 5-32 – Termo fonte estimado em (a)  $x = 0.022 \text{ m}, y = 0.015 \text{ m}$  e (b)  $x = 0.0175 \text{ m}, y = 0.0145 \text{ m}$

Para o passo espacial de 500  $\mu\text{m}$  utilizado nesta verificação, observa-se que para todos os casos analisados as propriedades termofísicas e termos-fonte foram estimados de forma satisfatória. Assim como no caso do problema inverso do tipo I, verifica-se a possibilidade do presente modelo matemático e do problema inverso estudado em estimar propriedades termofísicas e termos-fonte variando no tempo em micro-escala.

A etapa de verificação é de extrema importância para que se tenha certeza de não haverem erros cometidos na implementação computacional dos métodos. Uma vez verificados os algoritmos utilizados para a estimação dos parâmetros de interesse, estes foram aplicados a problemas com medidas reais de temperatura. As medidas foram efetuadas em um corpo de provas com propriedades térmicas constantes, na qual foi feito seu aquecimento por duas diferentes maneiras, a saber: um aquecimento com um laser-diodo e um aquecimento com uma resistência elétrica. As seções 5.4 e 5.5 apresentam o resultado da estimação dos parâmetros usando medidas reais de temperatura. Os experimentos realizados foram descritos nas seções 4.8.1 e 4.8.2. O desvio padrão da medida, de acordo com a Figura 4-12-a é de 0.03  $^{\circ}\text{C}$  para o tempo de integração de 1000  $\mu\text{s}$  (utilizado no experimento). Porém, como ocorre a filtragem do campo de temperaturas, é necessário calcular o desvio padrão resultante desse processamento. Isto é feito da mesma maneira descrita na seção 4.7.1, mas usando o campo de temperatura filtrado ao invés de usar o campo de temperatura original. Com isso, o desvio padrão da medida foi de 0.006  $^{\circ}\text{C}$ . Este resultado pode ser observado na Figura 5-33, que apresenta a imagem onde cada pixel é o resultado do desvio padrão no tempo de 400 imagens deste pixel. Estas imagens são previamente filtradas e foram feitas em um corpo negro à temperatura constante. A temperatura ambiente para os experimento foi de aproximadamente 20.0  $^{\circ}\text{C}$ .

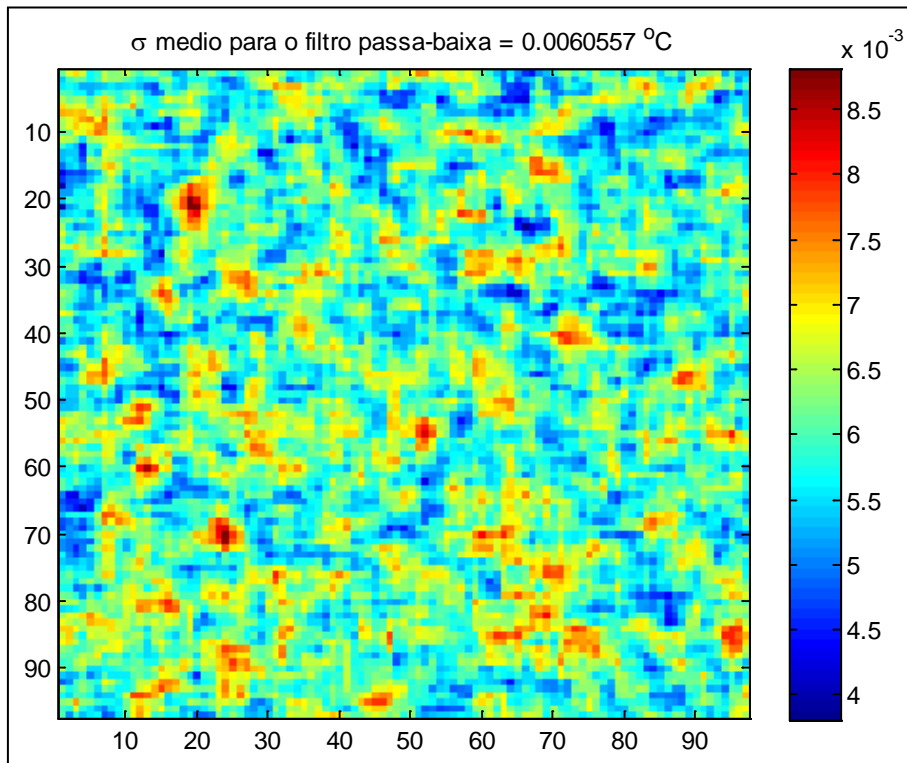


Figura 5-33 – Desvio padrão médio para a imagem filtrada.

As Figuras 5-34 e 5-35 apresentam as imagens da câmera de termografia por infravermelho no instante inicial de aquecimento, nos experimentos com aquecimento com a resistência elétrica e para o laser diodo, respectivamente. Os gráficos gerados pelo software Altair® são também apresentados para alguns pixels selecionados nestas figuras.

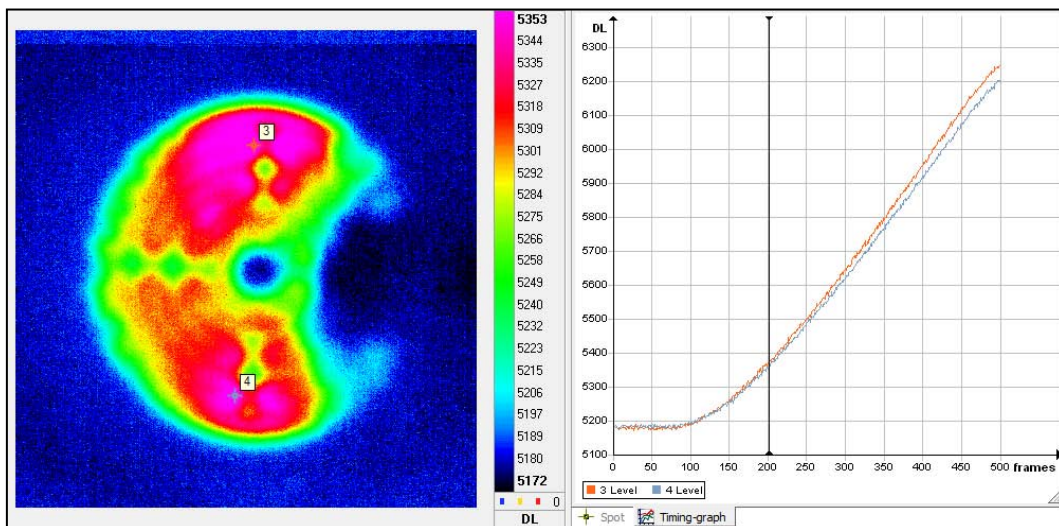
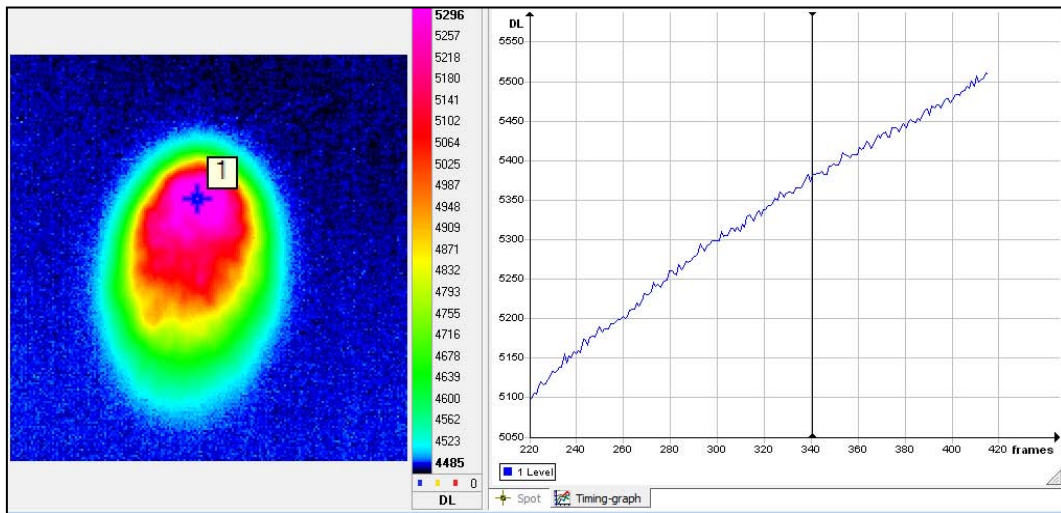


Figura 5-34 – Aquecimento pela resistência elétrica



**Figura 5-35 – Aquecimento pelo laser-diodo**

Os dados experimentais são carregados nos programas desenvolvidos na plataforma MATLAB para as soluções dos problemas inversos dos tipos I e II. Os resultados estão apresentados nas seções a seguir. Em todos os casos, o corpo de prova utilizado tem espessura de  $e=0.0011$  m e propriedades termofísicas apresentadas na seção 4.8. Além disso, em todos os experimentos todos os pontos de temperatura foram subtraídos da temperatura em  $t = 0$ . Isto é feito para que os termos  $W_{refl}$  e  $W_{atm}$ , que são a parcela da radiação que chega à câmera pela reflexão da vizinhança e a emissão da atmosfera (ver Equação (4.71)) sejam eliminados. Desta forma, todos os gráficos apresentados mostram diretamente em suas escalas o aumento de temperatura sofrido pelo corpo de prova.

#### **5.4 Solução do problema inverso do tipo I com medidas reais**

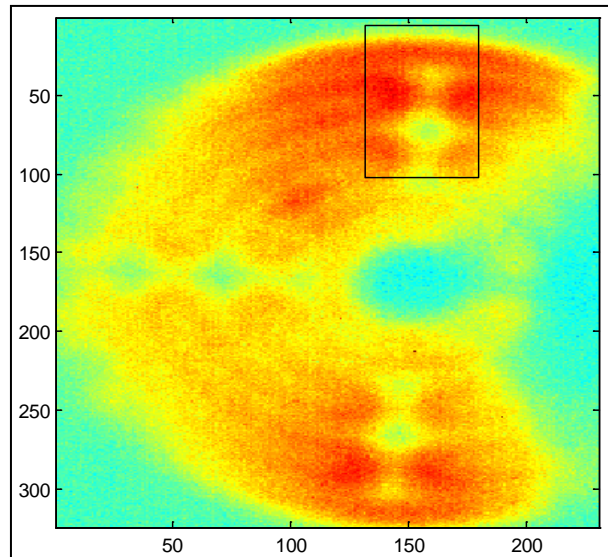
Para os experimentos relativos à solução do problema inverso do tipo I, o laser diodo ou a resistência elétrica impõe um fluxo de calor na amostra de forma contínua. Como o termo fonte é constante e o corpo de prova é composto de um material cujas propriedades termofísicas não variam no tempo, a metodologia utilizada para a estimação dos parâmetros foi o algoritmo de Monte Carlo via Cadeias de Markov e o método de Mínimos Quadrados.

##### **5.4.1 Experimento com a resistência elétrica**

Para o caso do experimento com a resistência elétrica uma voltagem de 10 V foi aplicada resultando em um aumento máximo de 4 °C em toda a amostra.

Para a presente análise, foi considerada apenas uma parte do meio, devido ao elevado custo computacional de se realizar a estimação em toda a matriz de medidas de temperatura (conforme será apresentado a seguir). Este corte foi realizado na área apresentada na Figura 5-36, reduzindo o tamanho da imagem de 440 x 440 pixels para 98 x 98 pixels. Este corte é realizado em um local que apresente uma parte aquecida e outra não aquecida, de forma que o termo fonte estimado deve

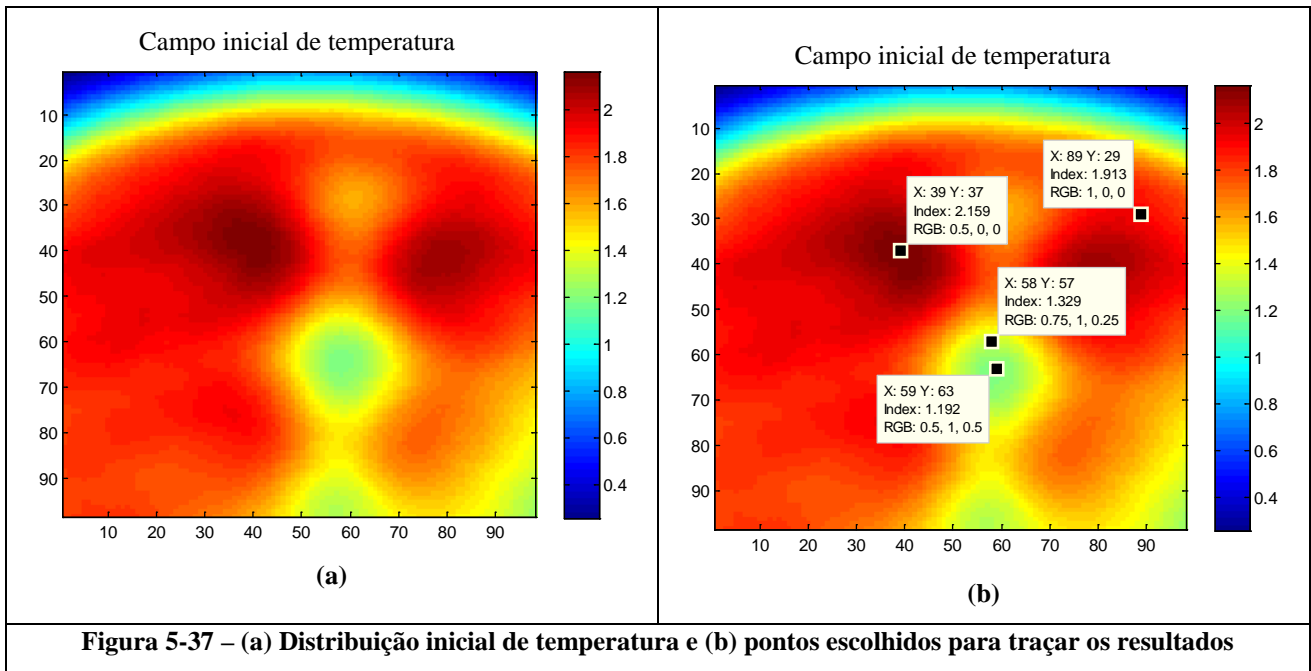
apresentar uma distribuição espacial equivalente ao campo de temperatura observado, isto é, nulo nos locais onde o meio não foi aquecido e não nulo nos locais onde o meio é aquecido.



**Figura 5-36 – Área escolhida para o corte na imagem**

Como consequência desse corte, na solução do problema inverso a placa é discretizada em  $a_i = a_j = 98$  nós internos e 101 passos de tempo. Os valores do parâmetro  $\alpha_{i,j}$ ,  $H_{i,j}$  e  $G_{i,j}$  foram então estimados para cada um desses nós. Cada pixel representa uma área de  $76.9 \times 76.9 \mu\text{m}$ , medido conforme apresentado na seção 4.10.3, de maneira que as dimensões da parte cortada na imagem da placa (Figura 5-36) são  $L_x = L_y = 0.00754 \text{ m}$ . O tempo de experimento foi de 1.01s, e o passo de tempo foi de 0.01s, que satisfaz o critério de estabilidade do método de diferenças finitas usado na estratégia nodal. O início do experimento foi em 100 passos de tempo após a resistência ter sido ligada. Dessa maneira, o tempo inicial é considerado como sendo 1 segundo após o momento na qual a imagem obtida pela câmera acuse o início do aquecimento. Espera-se que assim os transientes iniciais, como o aquecimento da própria resistência elétrica tenham sido ultrapassados.

As Figuras 5-37-a-b apresentam a distribuição inicial de temperatura, e os pontos na figura escolhidos para serem analisados, respectivamente. Para as figuras que apresentam os resultados em pixels particulares, estes foram escolhidos de acordo com a Figura 5-37-b.



Para o algoritmo de Metropolis-Hastings (MH), a distribuição a priori para o campo de difusividade térmica  $\alpha(x,y)$  é assumida como sendo uniforme no intervalo  $[8 \cdot 10^{-8}, 9 \cdot 10^{-7}] \text{ m}^2/\text{s}$ . Tal intervalo compreende a maioria dos materiais isolantes, e não fornece nenhuma informação prática aos valores dos parâmetros a serem estimados. A informação a priori para  $G_{i,j}$  é assumida como sendo uniforme no intervalo  $[0, 5] \text{ K}/(\text{ms})$ , que corresponde ao intervalo  $[0, 10081.5] \text{ W}/\text{m}^2$  para o fluxo de calor imposto pela resistência. A informação a priori para  $H_{i,j}$  é assumida como sendo uniforme no intervalo  $[0.002, 0.2] \text{ 1/s}$ , que corresponde ao intervalo  $[4.03, 403] \text{ W}/(\text{m}^2\text{C})$  para  $h$ .

A cadeia de Markov para cada pixel consistiu em 6000 estados, onde os 1000 primeiros foram desconsiderados para o cálculo dos parâmetros estatísticos.

A taxa de aceitação do algoritmo de MH foi da ordem de 60%, conforme ilustra a Figura 5-38. A amplitude de movimento dos parâmetros foi de 2% para a difusividade térmica e  $G_{i,j}$ , 0.2% para a matriz de sensibilidade e 10% para  $H_{i,j}$ .

As Figuras 5-39-a-b apresentam o resultado da estimação da difusividade térmica com o método de Mínimos Quadrados Ordinários (OLS) e pelo método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) respectivamente. Observa-se pelas figuras abaixo um valor médio de  $0.259 \text{ mm}^2/\text{s}$  para a média de todos os pixels no caso da estimação feita pelo método de OLS e  $0.253$  pelo método de MCMC com o algoritmo de Metropolis Hastings (MH). Estes valores são em média 4.5 e 7 % maiores do que a média dos valores de referência respectivamente. Esta diferença está dentro da incerteza da medida para os métodos apresentados na seção 4.9. Em ambos os casos, observa-se que o desvio padrão para a dispersão dos resultados em toda a matriz de medidas é da ordem de  $10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$  demonstrando que a estimação para cada pixel pode ser feita com uma dispersão aceitável, isto



é, não existe uma grande variação entre os pixels, o que levaria a crer que o valor médio de toda a matriz, próximo do valor de referência, se deu de forma aleatória.

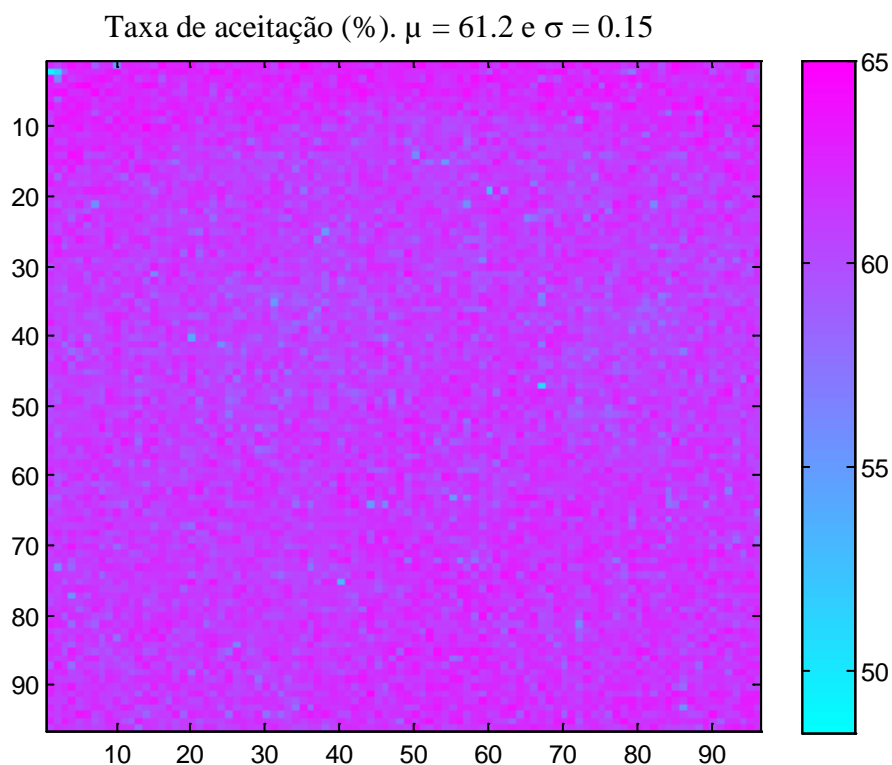
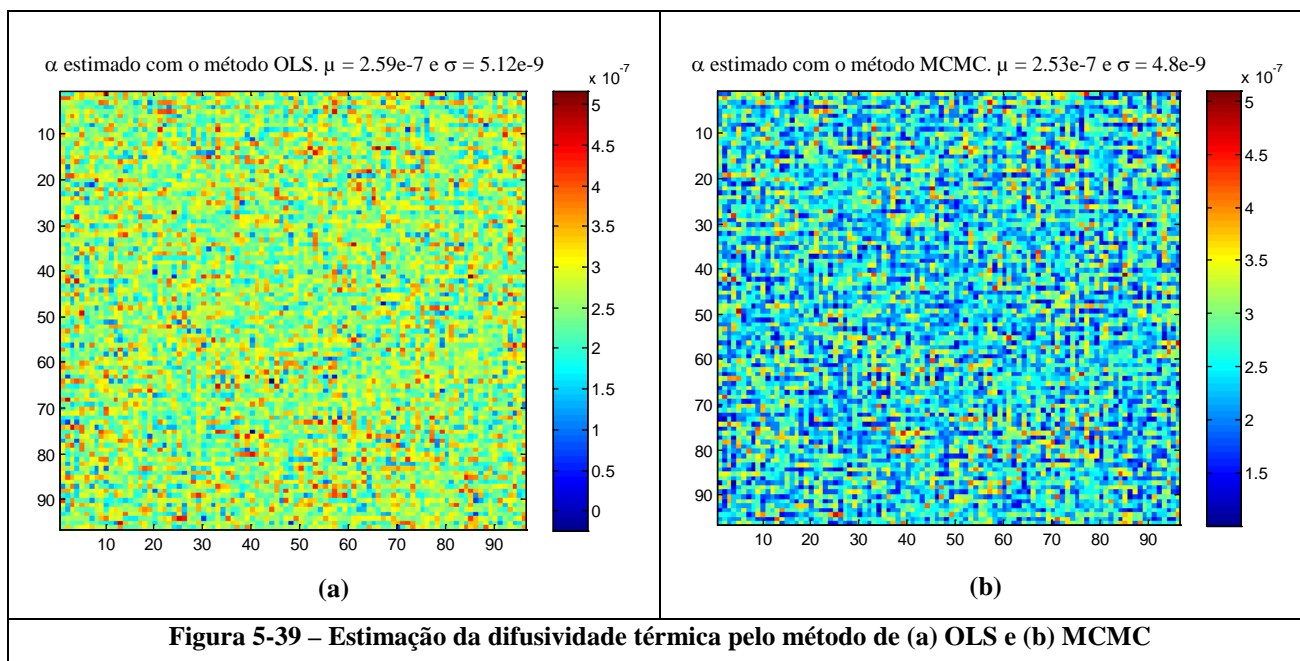
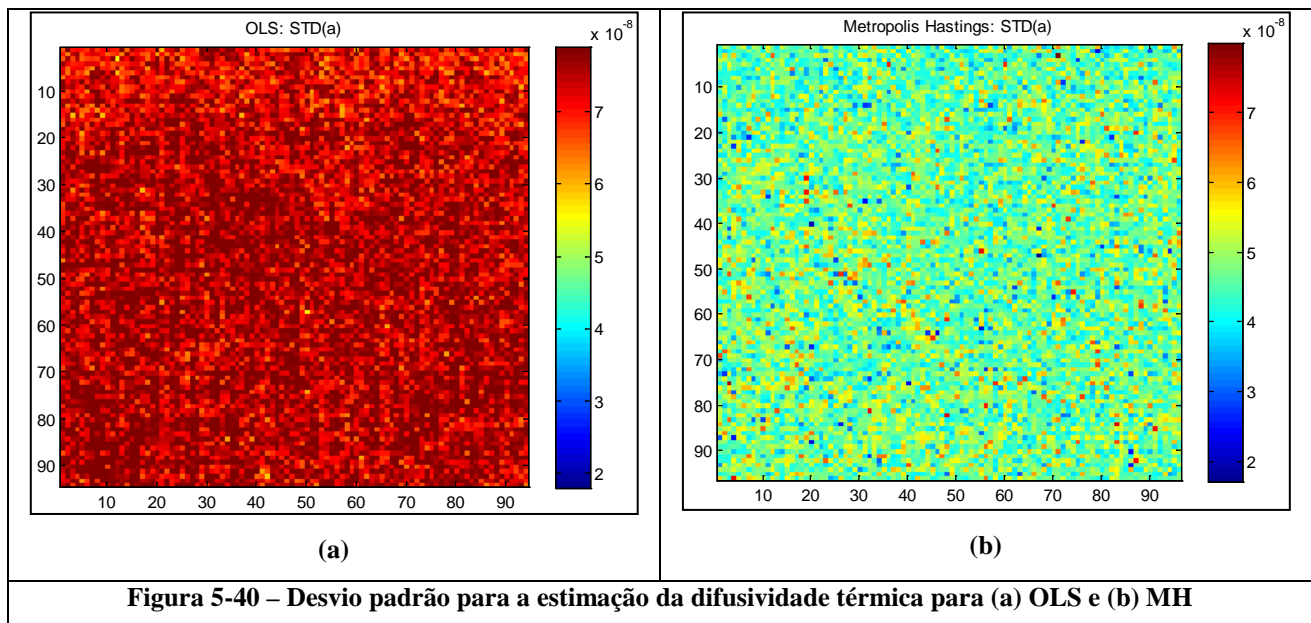


Figura 5-38 – Taxa de aceitação para o algoritmo de MH.

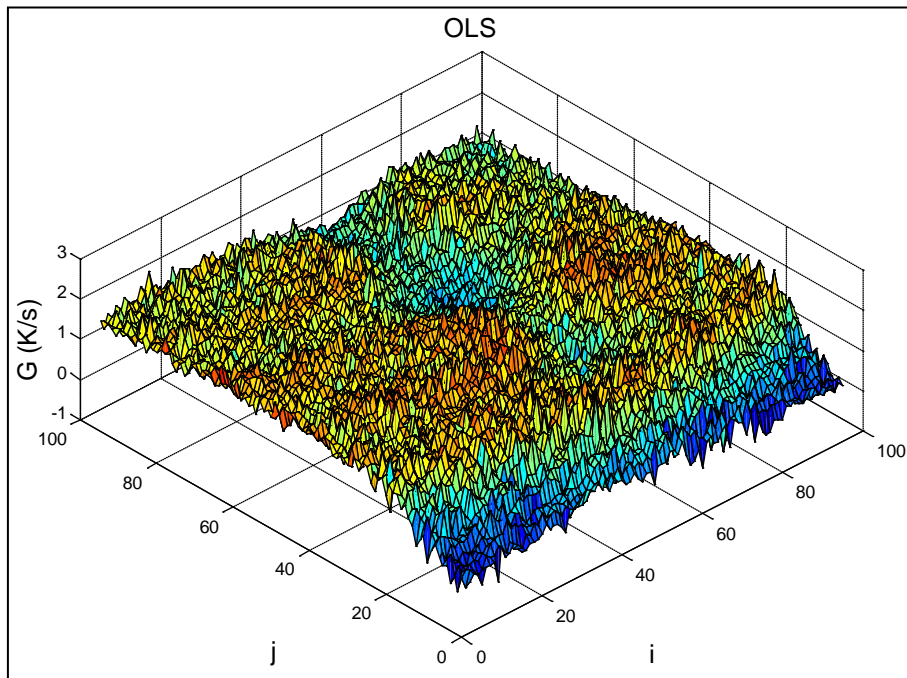


O desvio padrão da estimação pelo método OLS (dado pela Equação (4.30)), bem como o desvio padrão da evolução dos estados da cadeia pelo algoritmo de MH obtidos para a estimação em cada pixel estão apresentados nas Figuras 5-40-a-b, respectivamente. Observa-se nestas figuras que o

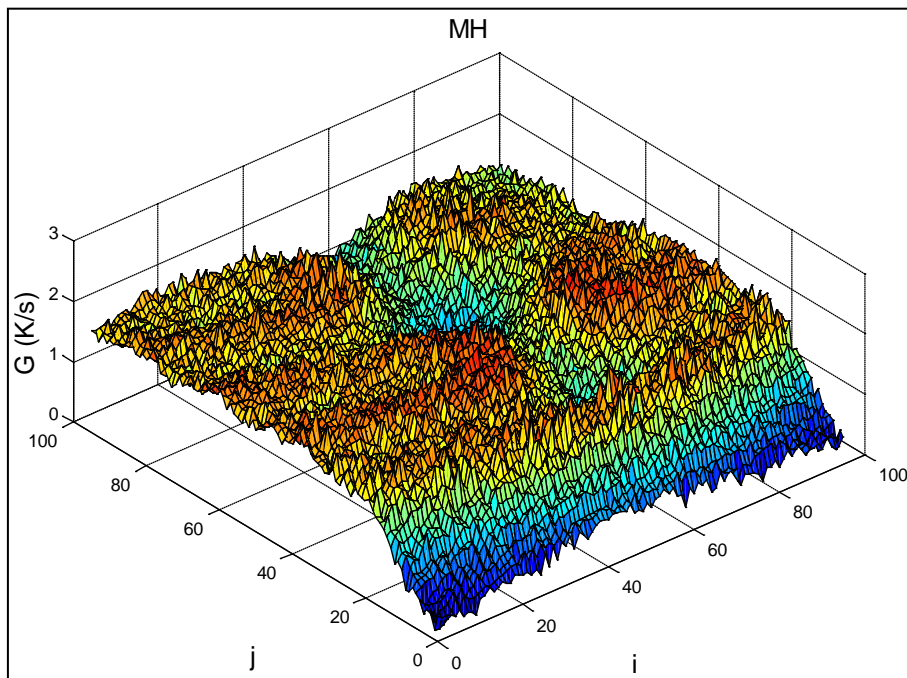
método de MCMC via algoritmo de MH apresenta uma incerteza menor para o parâmetro estimado, fornecendo um resultado com maior precisão que o método OLS.



As Figuras 5-41 e 5-42 apresentam a cartografia da estimação de  $G_{i,j}$  com o método OLS e MCMC, respectivamente. A comparação desses resultados mostra que os métodos de MCMC e OLS apresentam resultados similares. Porém com o método de MCMC é obtido um perfil mais suave e detalhado já que nenhuma regularização é usada no método de OLS. Ambos os métodos conseguem reconstruir a forma funcional do termo fonte, conforme mostrado nas Figuras 5-41 e 5-42. Observa-se também por essas figuras que a magnitude do valor estimado para  $G_{i,j}$  está próximo do valor de referência, calculado na seção 4.8.1.

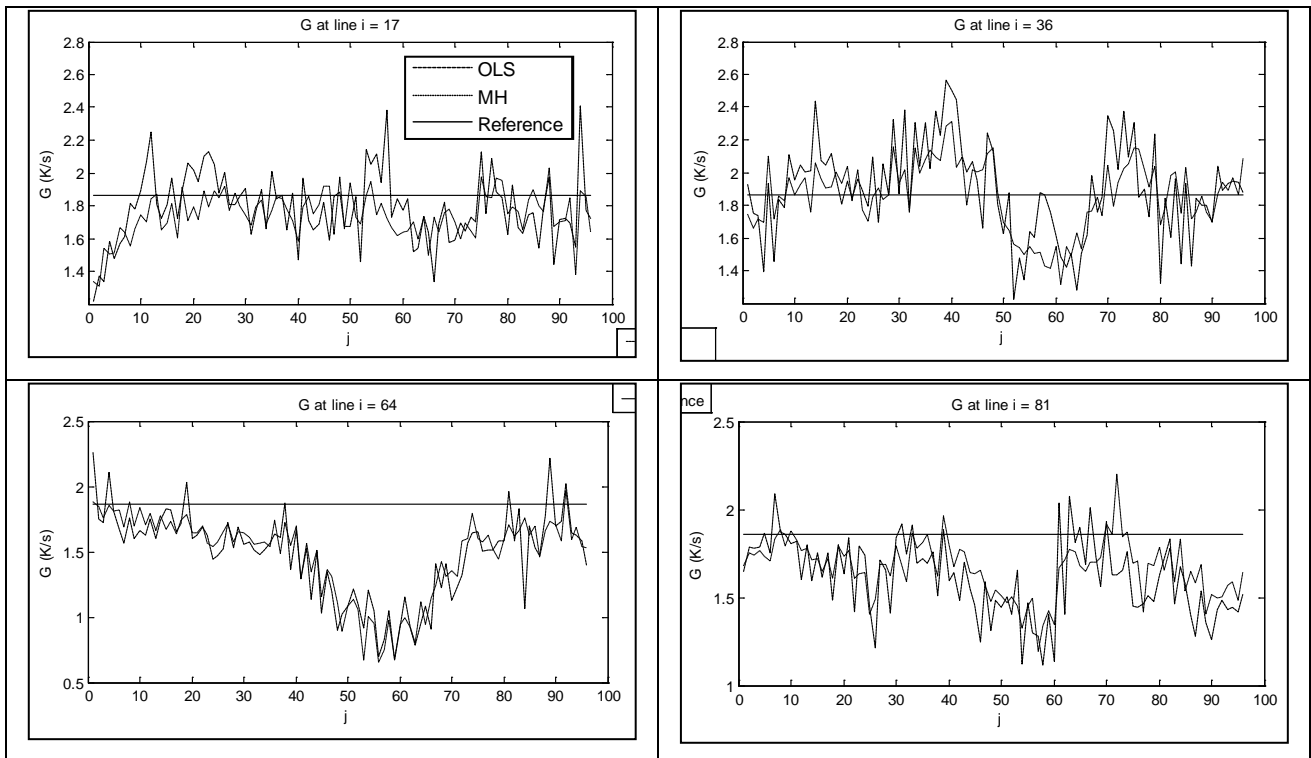


**Figura 5-41 – Estimação de  $G_{ij}$  para o método de OLS**



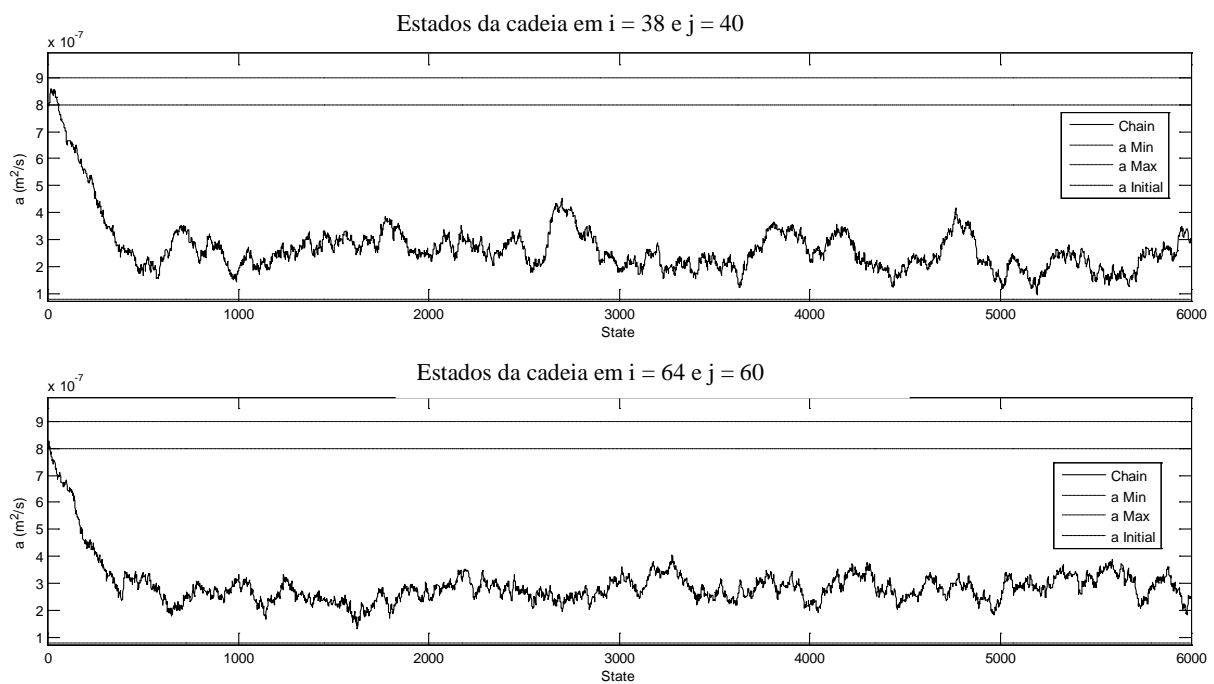
**Figura 5-42 – Estimação de  $G_{ij}$  para o método MCMC.**

As Figuras 5-43 apresentam a comparação da estimação de  $G_{i,j}$  para o método de OLS e MCMC nas linhas  $i = 17$ ,  $i = 36$ ,  $i = 64$  e  $i = 81$  que equivalem a  $x = 0.00131$  m,  $x = 0.00277$  m,  $x = 0.00492$  e  $x = 0.00623$  respectivamente. Observa-se por essas figuras que o valor estimado está próximo do valor calculado para a potência dissipada pela resistência (ver seção 4.8.1). Os valores de  $G_{i,j}$  apresentam uma variação mais suave ao longos das linhas supracitadas para o método de MCMC do que o método de OLS, o que confirma o resultado mostrado na Figura 5-42.

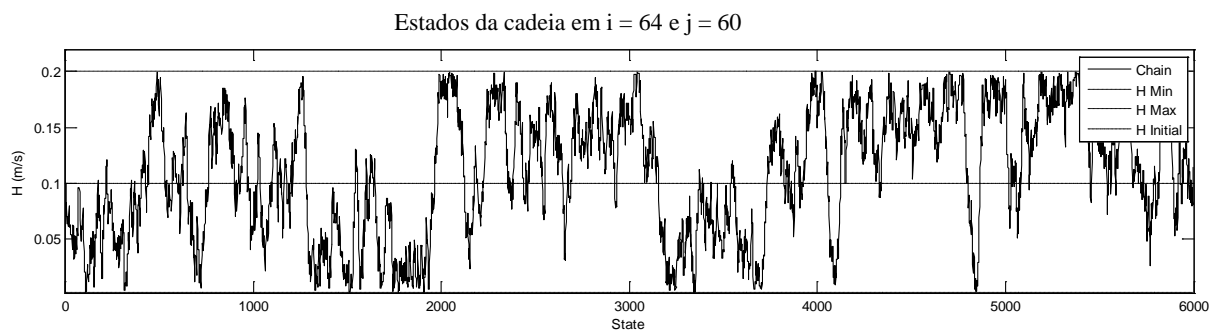
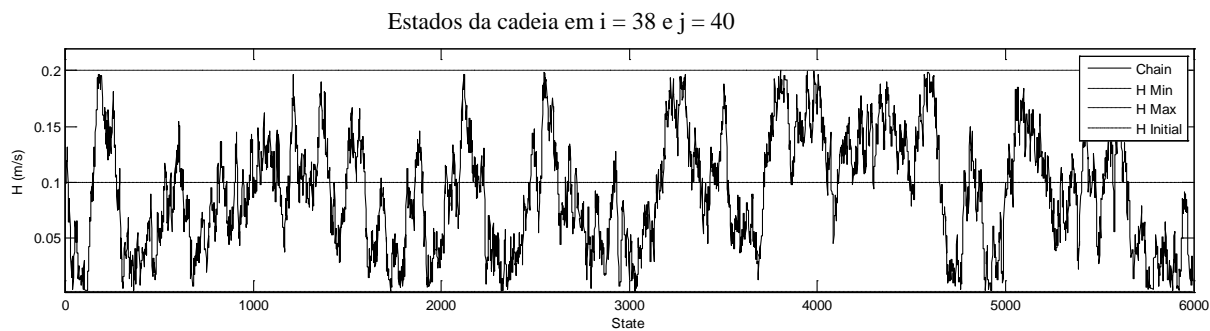


**Figura 5-43- Comparação da estimação do parâmetro  $G$  para o método de OLS e MH**

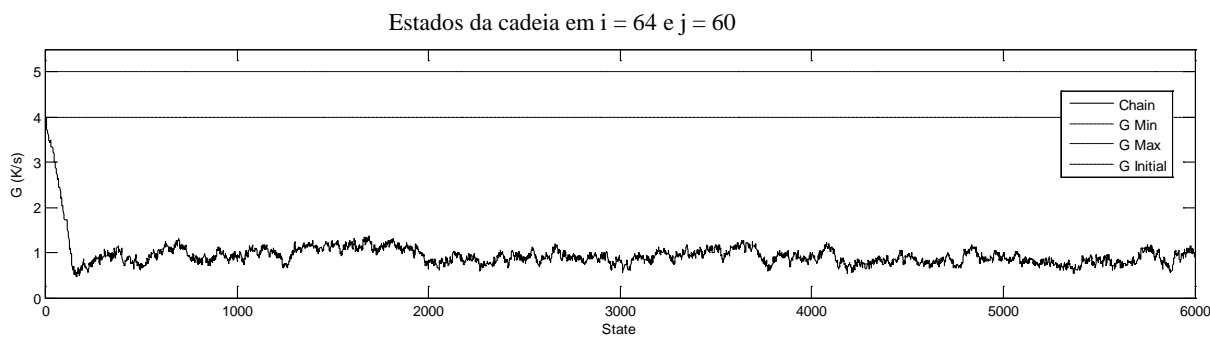
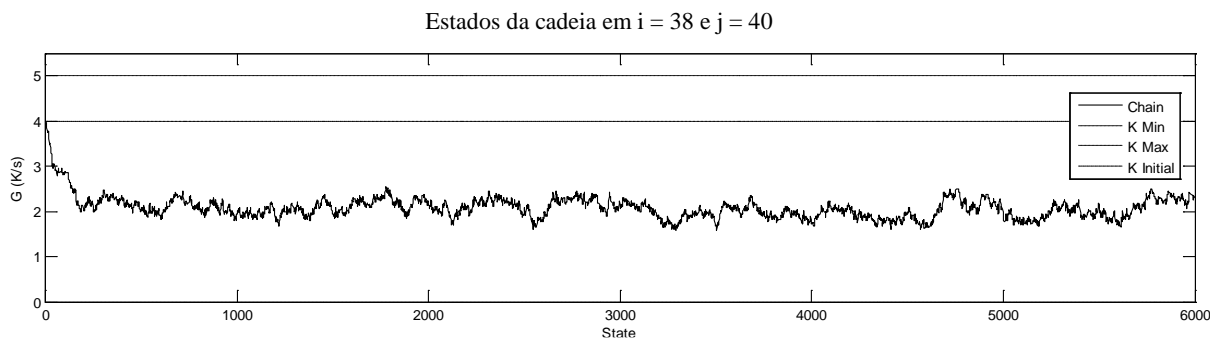
As Figuras 5-44, 5-45 e 5-46 apresentam a convergência das cadeias de Markov para 6000 estados da difusividade térmica,  $H_{i,j}$  e  $G_{i,j}$  respectivamente, todos nos pixels ( $i=38, j=40$ ) e ( $i=64, j=60$ ) que correspondem a ( $x = 0.00292, y = 0.00307$ ) e ( $x = 0.00492, y = 0.00461$ ). Pode-se observar por essas figuras que após os estados de aquecimento, a cadeia atingiu a convergência rapidamente. A exceção é feita ao parâmetro  $H$ , uma vez que seu coeficiente de sensibilidade é muito baixo, como demonstrado na análise de sensibilidade.



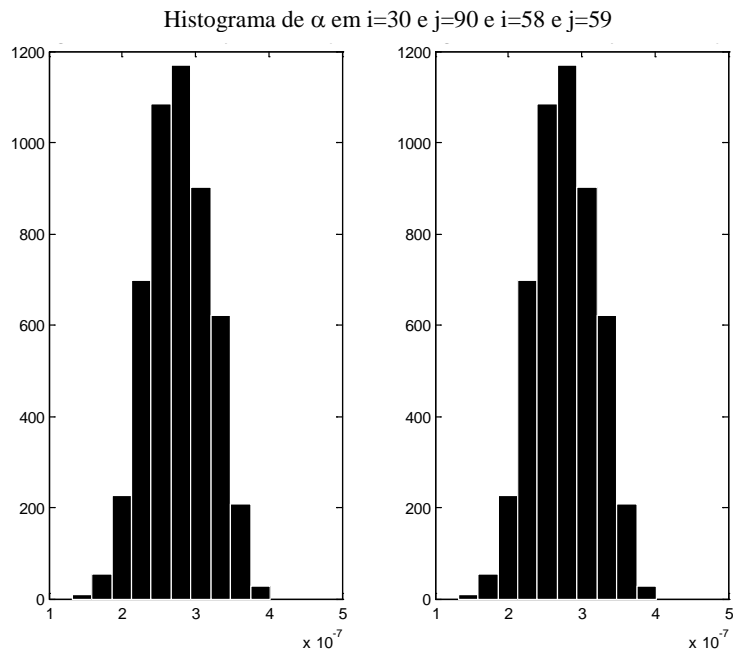
**Figura 5-44 – Evolução das cadeias de Markov para  $\alpha_{38,40}$  e  $\alpha_{64,60}$**



**Figura 5-45 – Evolução das cadeias de Markov para  $H_{38,40}$  e  $H_{64,60}$**



**Figura 5-46 - Evolução das cadeias de Markov para  $G_{38,40}$  e  $G_{64,60}$**



**Figura 5-47 – Distribuição posteriori nos pixels (30,90) e (58,59)**

A Figura 5-47 apresenta a distribuição marginal posteriori obtida por amostragens pelo algoritmo de MH para a difusividade térmica nos pixels ( $i = 30, j = 90$ ) e ( $i = 58, j = 59$ ) que correspondem a ( $x = 0.00231$  m,  $y = 0.00692$  m) e ( $x = 0.00460$  m,  $y = 0.00454$  m). Pode-se observar que as distribuições posteriori obtidas seguem uma distribuição Gaussiana, conforme esperado pela verossimilhança Gaussiana e a distribuição priori uniforme assumidas neste trabalho. A escolha da priori Gaussiana foi também testada, porém com resultado idêntico à priori uniforme.

As Figuras 5-48 apresentam a variação da difusividade térmica ao longo de linhas particulares (linhas  $i = 17, i = 36, i = 64$  e  $i = 81$ ), que corresponde a ( $x = 0.00134$  m,  $x = 0.00277$  m,  $x = 0.00492$  m e  $x = 0.00623$  m), obtidas pelos métodos de OLS e MCMC e comparados com o valor de referência. Em ambos os casos, os valores estimados para cada pixel oscilam em torno do valor médio obtido como referência para o corpo de prova, porém levemente mais suaves para o método de MCMC.

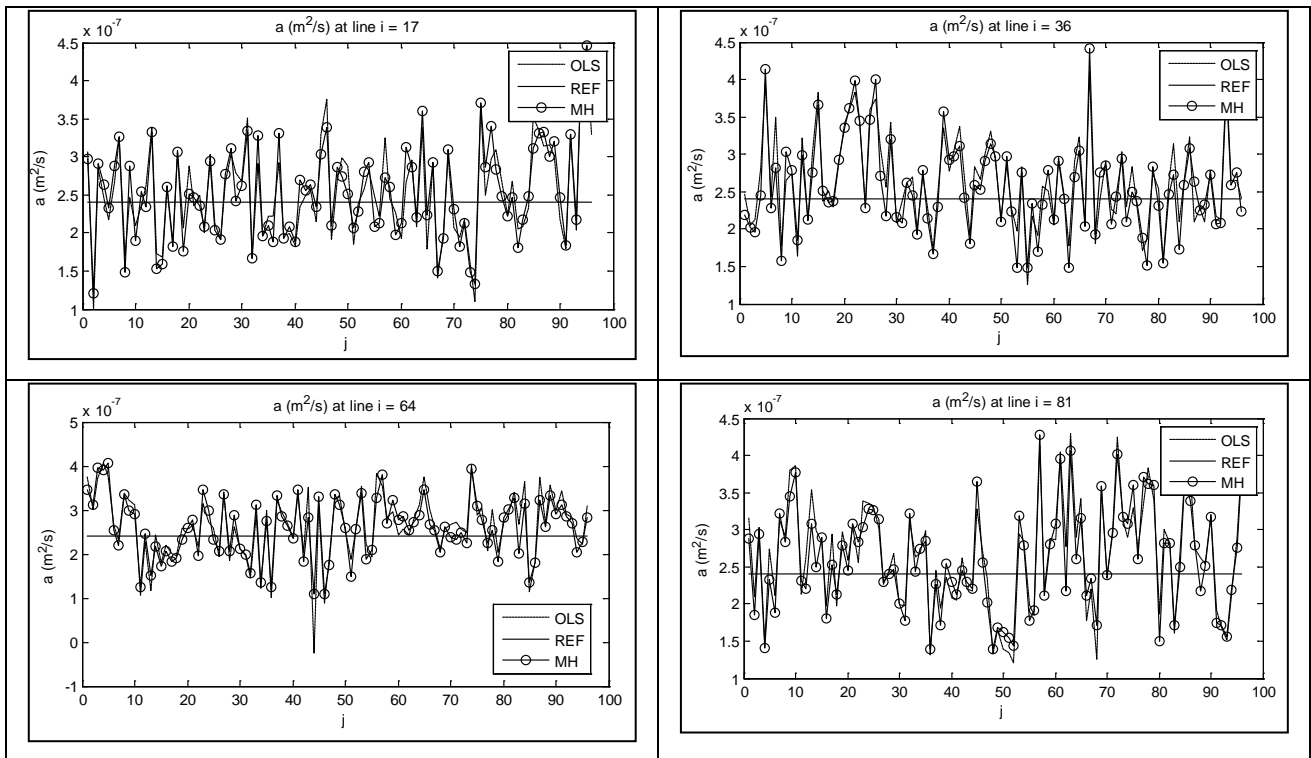
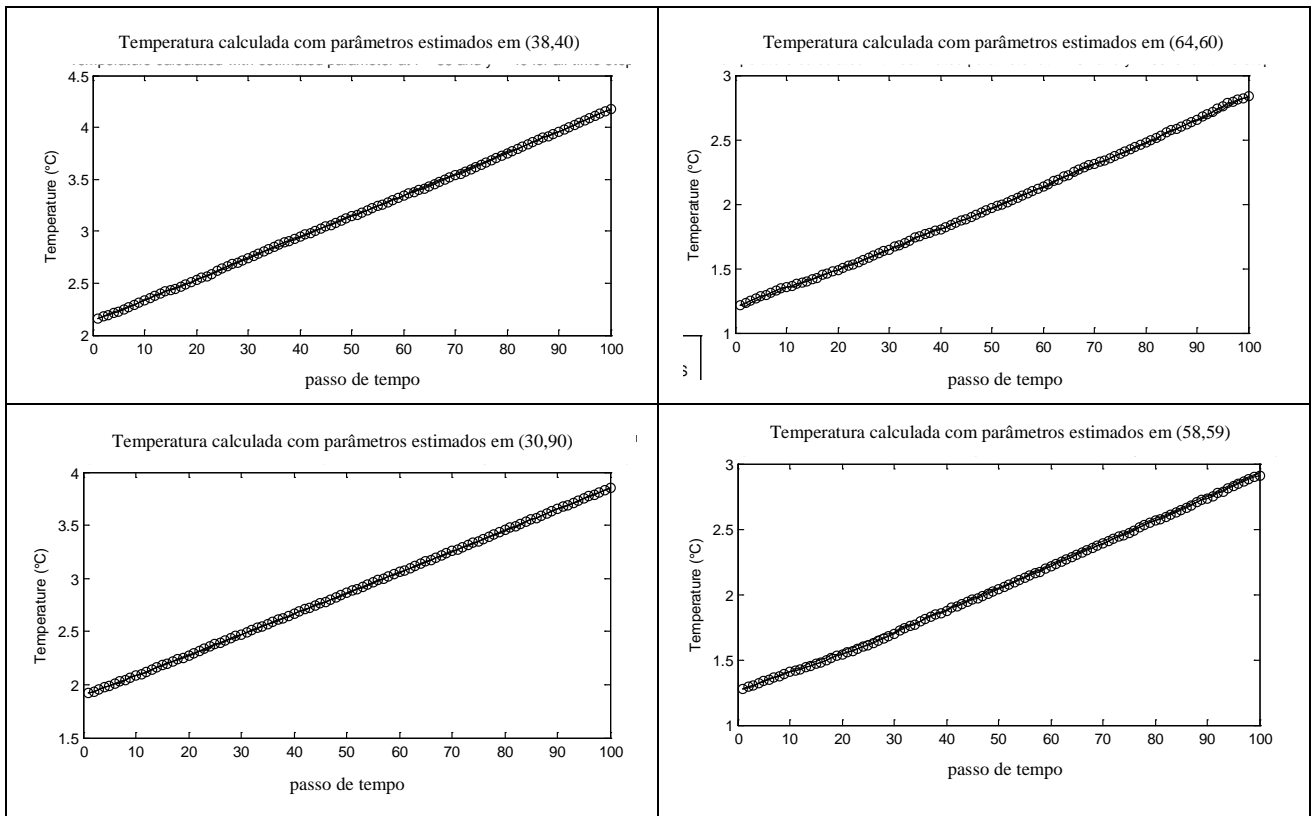
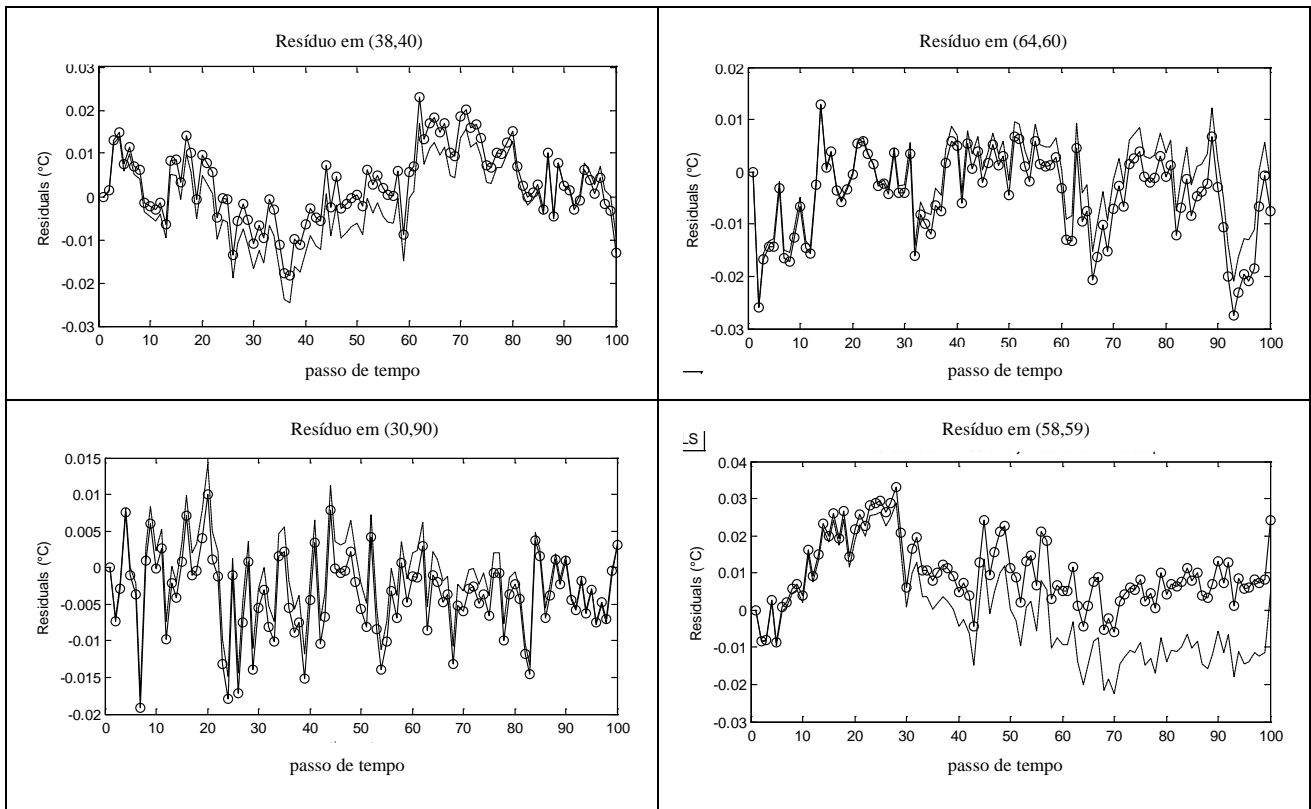


Figura 5-48 – Comparação da estimação de  $\alpha_{i,j}$  ao longo de linhas particulares.

As Figuras 5-49 apresentam as temperaturas calculadas com os parâmetros estimados pelo método de OLS e MCMC, e comparadas com as temperaturas medidas pela câmera de termografia por infravermelho para os pixels  $(i = 38, j = 40)$  e  $(i = 64, j = 60)$ ,  $(i = 30, j = 90)$  e  $(i = 58, j = 59)$  que correspondem a  $(x = 0.00292 \text{ m}, y = 0.00308 \text{ m})$ ,  $(x = 0.00492 \text{ m}, y = 0.00461 \text{ m})$ ,  $(x = 0.00231 \text{ m}, y = 0.00692 \text{ m})$  e  $(x = 0.00446 \text{ m}, y = 0.00454 \text{ m})$ . Observa-se que, para ambos os métodos, as temperaturas estão em excelente concordância com a temperatura calculada na escala usada para traçar o gráfico. Os resíduos foram também calculados e estão apresentados nas Figuras 5-50. Observa-se por essas figuras que o método de MCMC apresenta o valor dos resíduos sensivelmente melhores que o método de OLS. Este fato confirma a melhora na estimação dos parâmetros pela adição de uma informação a priori, mesmo que esta não seja precisa. Os resíduos apresentam uma diferença percentual com relação à temperatura medida de no máximo 1%, e apresentam um comportamento não correlacionado.



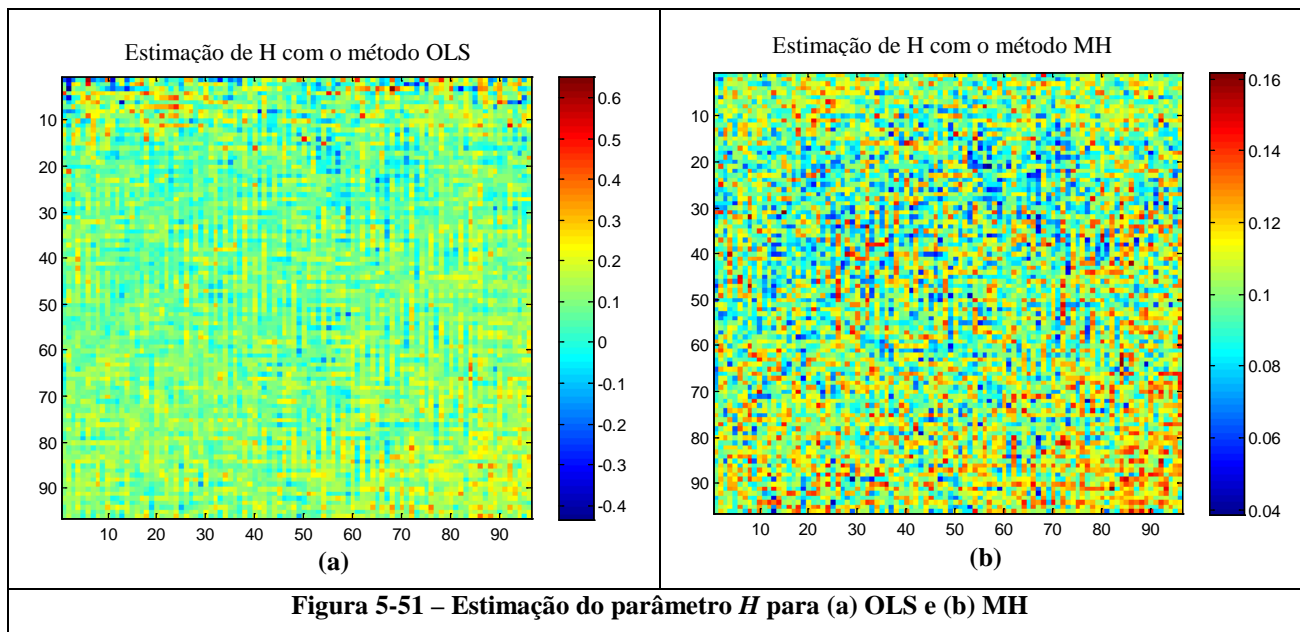
**Figura 5-49 – Comparação da temperatura calculada com os parâmetros estimados e a temperatura medida.**



**Figura 5-50 – Resíduos entre a temperatura medida e a calculada com os parâmetros estimados em pixels particulares.**



Para a estimação do parâmetro  $H_{i,j}$ , o método de MCMC via MH apresentou resultados melhores do que os valores estimados pelo método OLS e com sentido físico mais realista. As Figuras 5-51-a-b apresentam os resultados para a estimação com o método OLS e MCMC respectivamente. Observa-se por essas figuras que os valores estimados com o método de OLS apresentam valores de  $H_{i,j}$  de até 0.6, o que correspondem a um valor de  $h$  de 1209 W/(m<sup>2</sup>C), além de valores negativos.



O tempo computacional para a estimação dos parâmetros com OLS foram da ordem de 1 segundo. Para a estimação com o algoritmo de MH esse tempo foi de 40 minutos, devido ao procedimento de amostragem para a geração da cadeia de Markov. Se as dimensões originais da matriz fossem preservadas, esse tempo seria de 11 horas, o que tornaria extremamente custoso o processo de estimação. Esses tempos computacionais, bem como todos os apresentados ao longo dos resultados foram obtidos em um código desenvolvido na plataforma MATLAB, rodando em um Intel Core i7 2.8 GHz com 8 GB de memória RAM.

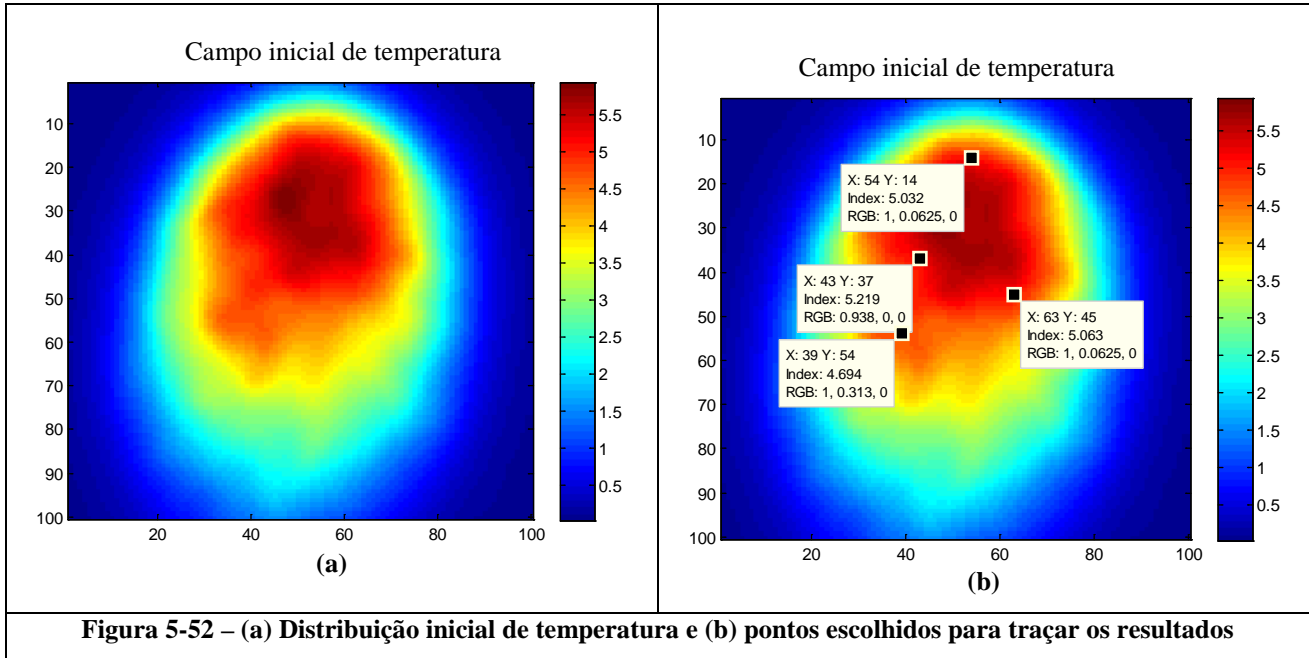
#### 5.4.2 Experimento com o laser-diodo

Para o caso do experimento com o laser diodo uma corrente de 500 mA foi usada, resultando em um aumento máximo de 7 °C em toda a amostra. O laser agiu durante um período de 3.6 segundos sobre o corpo de prova.

Para a solução do problema inverso, a placa foi discretizada em  $a_i = a_j = 100$  nós internos e 201 passos de tempo. Os valores do parâmetro  $\alpha_{i,j}$ ,  $H_{i,j}$  e  $G_{i,j}$  foram então estimados para cada um desses nós. Cada pixel representa uma área de 78.1 x 78.1  $\mu\text{m}$ , de maneira que as dimensões da parte cortada na imagem da placa são  $L_x = L_y = 0.0078$  m. A duração do experimento foi de 1s, e o passo de tempo foi de 0.005 s, que satisfaz o critério de estabilidade do método de diferenças finitas usado na estratégia nodal. O início do experimento foi escolhido com sendo 500 passos de tempo à

frente do primeiro passo de tempo na qual o laser incidiu na amostra, que é controlado pelo gerador de função. Dessa maneira, o tempo inicial do experimento foi em  $t = 2.5$  segundos. Isto garante com uma margem de segurança que os gradientes iniciais de temperatura tenham sido ultrapassados.

As Figuras 5-52-a-b apresentam a distribuição inicial de temperatura, e os pontos na figura escolhidos para serem representativos do meio respectivamente.



Para o algoritmo de Metropolis-Hastings (MH), a distribuição a priori para o campo de difusividade térmica  $\alpha(x,y)$  é assumida como sendo uniforme no intervalo  $[5 \times 10^{-10}, 9 \times 10^{-7}]$  m<sup>2</sup>/s. A informação a priori para  $G_{i,j}$  é assumida como sendo uniforme no intervalo  $[0, 20]$  K/(ms), que corresponde ao intervalo  $[0, 40326]$  W/m<sup>2</sup> para o fluxo de calor imposto pelo laser. A informação a priori para  $H_{i,j}$  é assumida como sendo uniforme no intervalo  $[0.002, 0.2]$  1/s, que corresponde ao intervalo  $[4.03, 403]$  W/(m<sup>2</sup>°C) para o coeficiente de transferência de calor.

A cadeia de Markov para cada pixel consistiu em 6000 estados, onde os 1000 primeiros foram desconsiderados para o cálculo dos parâmetros estatísticos.

A taxa da aceitação do algoritmo de MH foi da ordem de 37 % conforme ilustra a Figura 5-53. A amplitude de movimento dos parâmetros foi de 6% para a difusividade térmica e 1% para  $G_{i,j}$ ,  $H_{i,j}$  e para a matriz de sensibilidade.

Taxa de aceitação (%).  $\mu = 37.1$  e  $\sigma = 1.8$

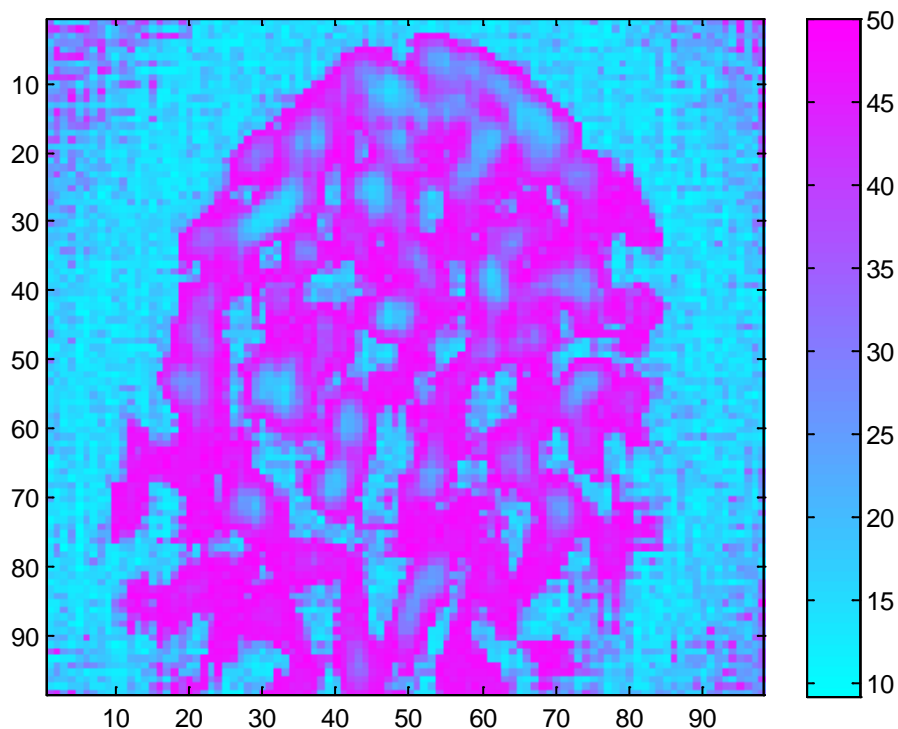
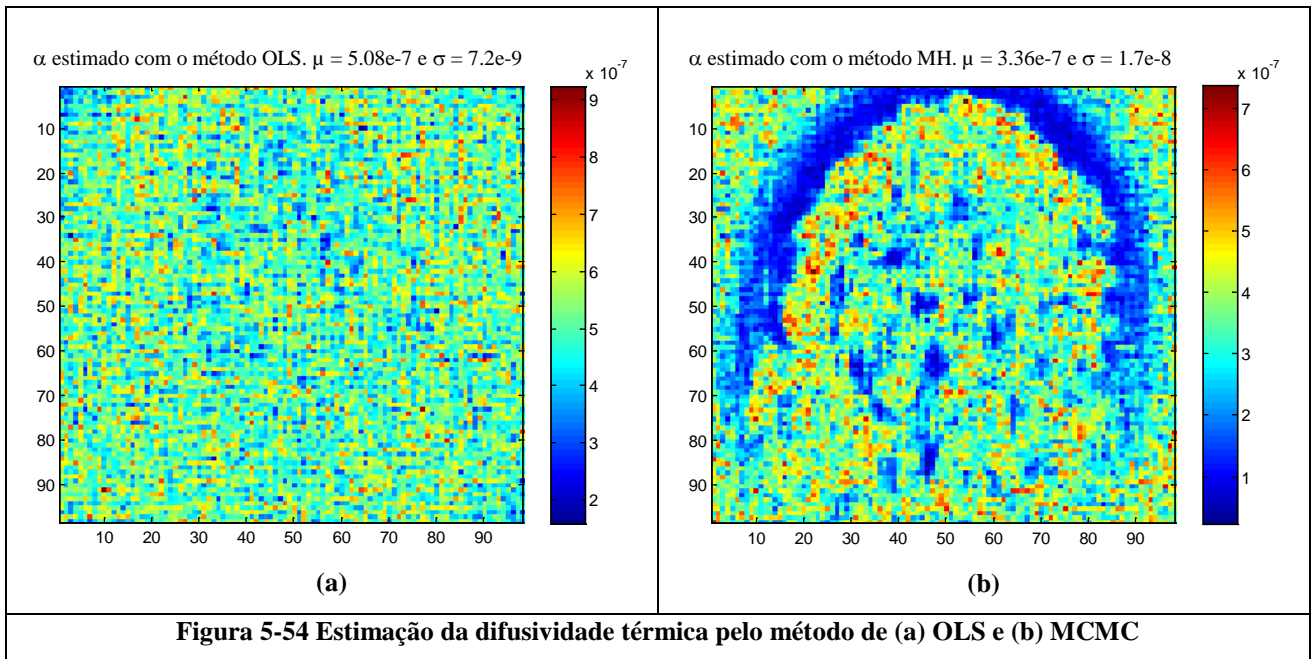
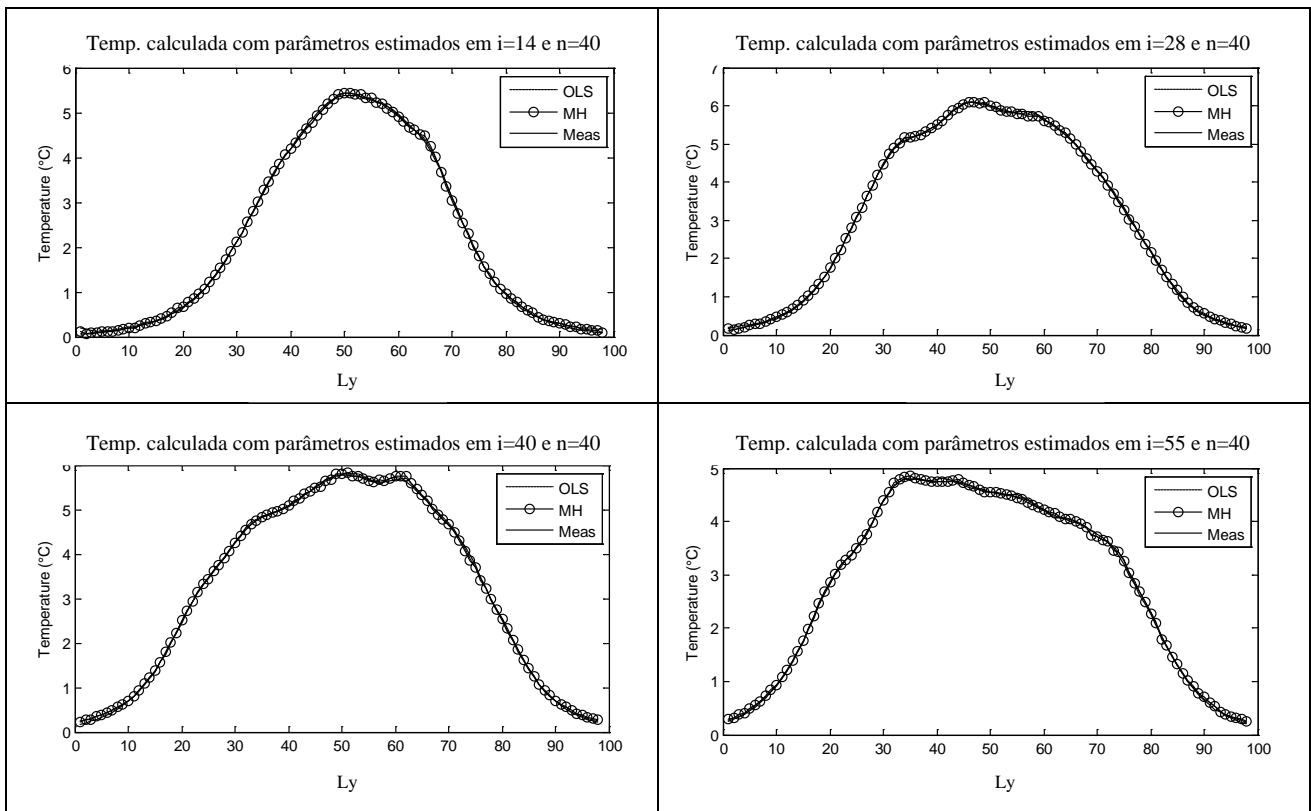


Figura 5-53 - Taxa de aceitação para o algoritmo de MH.

As Figuras 5-54-a-b apresentam o resultado da estimação da difusividade térmica com o método de Mínimos Quadrados Ordinários (OLS) e pelo método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) respectivamente. Observa-se pelas figuras abaixo um valor médio de  $0.508 \text{ mm}^2/\text{s}$  para a média de todos os pixels no caso da estimação feita pelo método de OLS e  $0.336 \text{ mm}^2/\text{s}$  pelo método de MCMC com o algoritmo de Metropolis Hastings (MH). Estes valores são em média 2.1 e 1.4 vezes maiores do que a média dos valores de referência respectivamente. Observa-se que o desvio padrão para a dispersão dos resultados em toda a matriz de medidas para o método de OLS é da ordem de  $10^{-9}$  e de  $10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$  para o método de MCMC.



Observa-se na Figura 5-54-b uma região bem caracterizada em torno do pulso de energia, onde a estimação da difusividade térmica foi sistematicamente mais baixa do que o resto da matriz. Este fato deve-se provavelmente a uma difusão tridimensional na amostra, já que esta região está aparentemente entre uma região não perturbada pelo laser e uma região de forte gradiente de temperatura bidimensional em  $x$  e  $y$ , conforme apresentado nas Figuras 5-55. Estas figuras apresentam o perfil de temperatura no meio ao longo das linhas  $i = 14$ ,  $i = 28$ ,  $i = 40$  e  $i = 55$ , que correspondem a  $x = 0.0011$  m,  $x = 0.0022$  m,  $x = 0.0031$  m e  $x = 0.0043$  m, todas no passo de tempo 40 ( $t = 0.2$  s).



**Figura 5-55 – Temperatura calculada com os métodos de OLS e MCMC ao longo de linhas particulares do meio.**

O mesmo comportamento não é observado na Figura 5-54-a, pois o método de OLS não apresenta nenhuma restrição quanto ao valor do parâmetro a serem estimados. Desta maneira, valores negativos e extremamente elevados para  $H_{i,j}$  por exemplo são estimados, o que pode ser interpretado como a compensação da derivada em  $z$  da temperatura ter sido substituída matematicamente por valores sem significado físico. Como o método de MCMC apresenta a restrição de valores positivos e não maiores que um determinado valor crítico para  $H_{i,j}$  e  $G_{i,j}$ , a maneira de compensar esse provável erro nas regiões onde o fenômeno físico não corresponde ao modelo matemático é a estimação de parâmetros com valores diferentes de onde o modelo matemático governa o fenômeno em estudo. Diante do exposto, foi escolhida uma área conforme apresentado na Figura 5-56 que foi assumida como sendo representativa do meio. Esta área tem 39 pixels (0.0030 m) na horizontal e 43 pixels (0.0033 m) na vertical, perfazendo um total de 1677 pixels. Todos os valores médios apresentados nas legendas das Figura 5-53 para o valor médio da taxa de aceitação (37.6%) e Figura 5-54-a-b (para os valores médios da difusividade térmica estimadas com os métodos de OLS e MCMC, de  $0.508 \text{ mm}^2/\text{s}$  e  $0.336 \text{ mm}^2/\text{s}$ , respectivamente) foram calculadas nesta área.

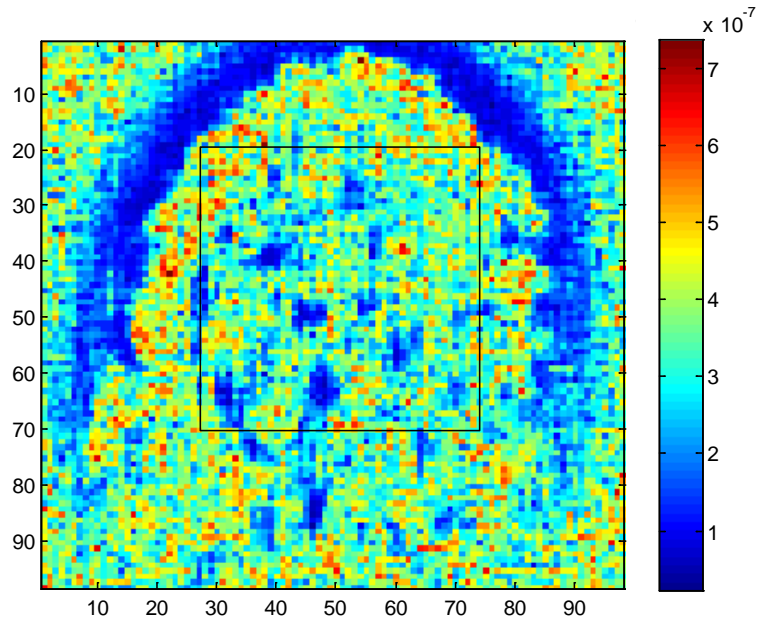


Figura 5-56 – Área escolhida para o cálculo do valor médio dos parâmetros.

O desvio padrão da evolução dos estados da cadeia pelo algoritmo de MH, bem como o desvio padrão da estimação pelo método OLS obtidos para a estimação em cada pixel, estão apresentados nas Figuras 5-57-b-a respectivamente.

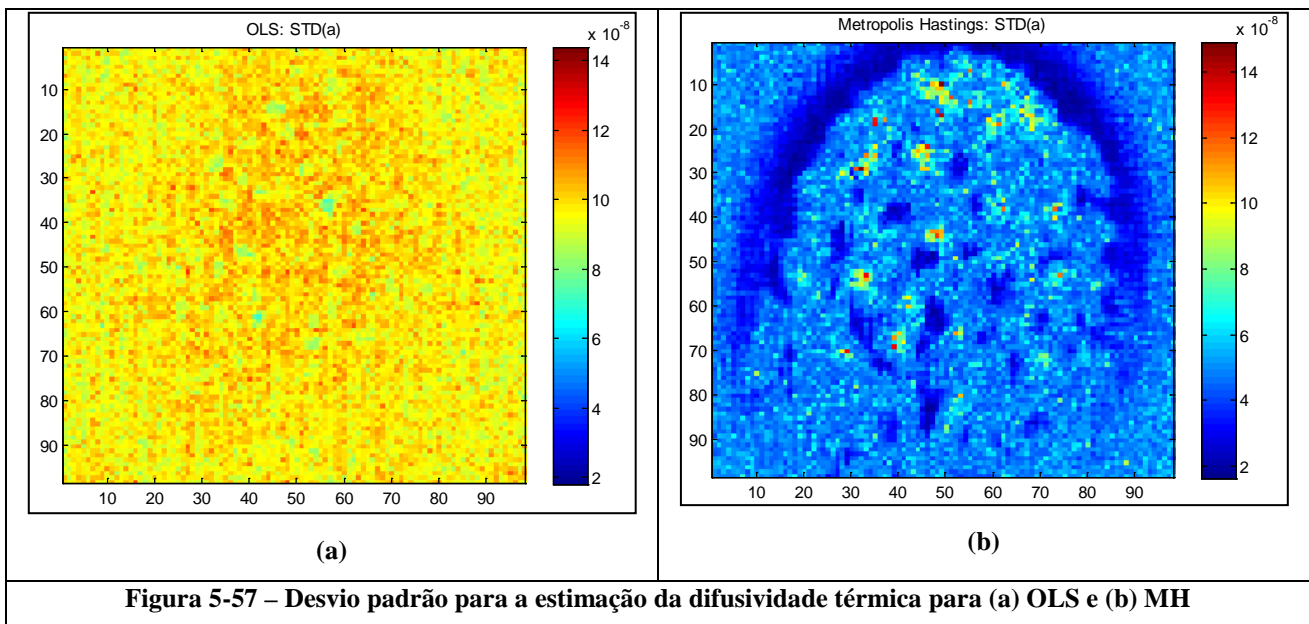


Figura 5-57 – Desvio padrão para a estimação da difusividade térmica para (a) OLS e (b) MH

Observa-se nestas figuras que o método de MCMC via algoritmo de MH apresenta uma incerteza menor para o parâmetro estimado, fornecendo um resultado com um menor intervalo de confiança.

As Figuras 5-58 e 5-59 apresentam a estimação de  $G_{i,j}$  com o método de OLS e MCMC respectivamente. Estas figuras apresentam uma cartografia não homogênea para o termo fonte em todo o meio, apesar deste ser homogêneo. Este fenômeno pode ter se dado por eventuais variações de emissividade do corpo que não são percebidas macroscopicamente, mas que se tornam evidentes

para o tipo de aquecimento usado neste trabalho. Entretanto, a região que recebe a energia do laser pode ser bem definida em ambas as figuras.

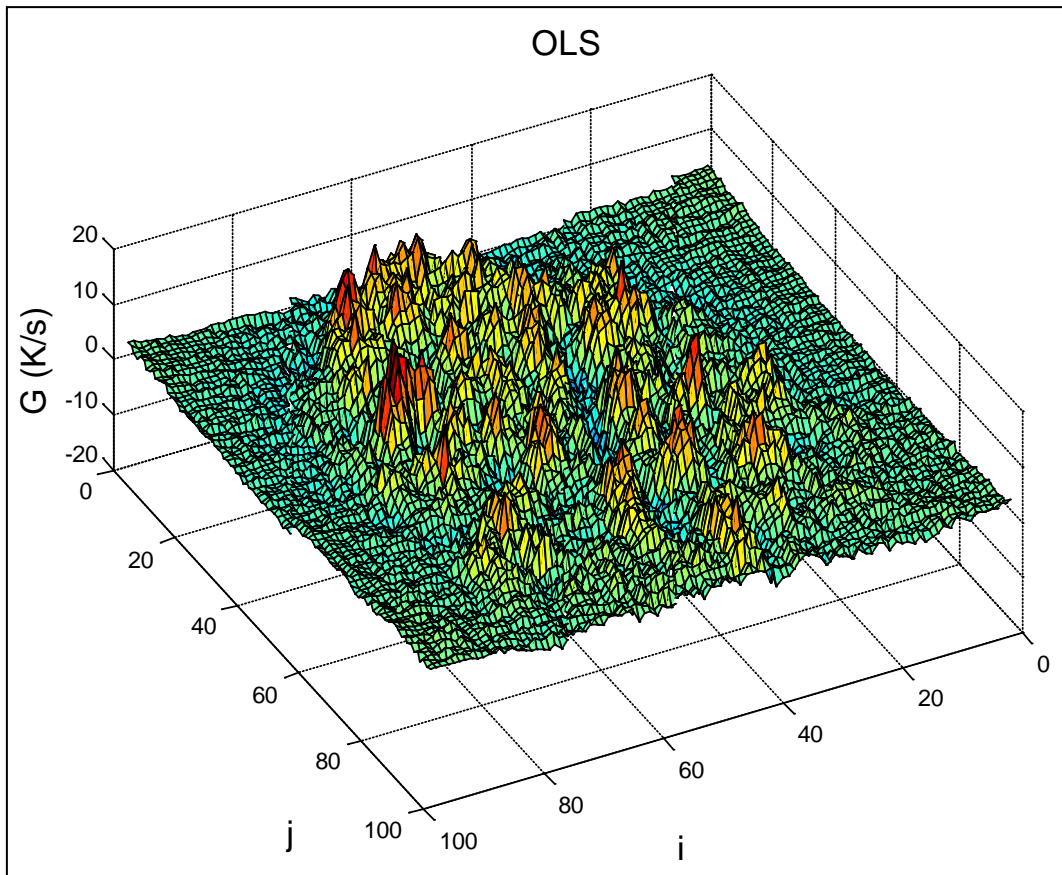


Figura 5-58 – Estimação de  $G_{i,j}$  para OLS.

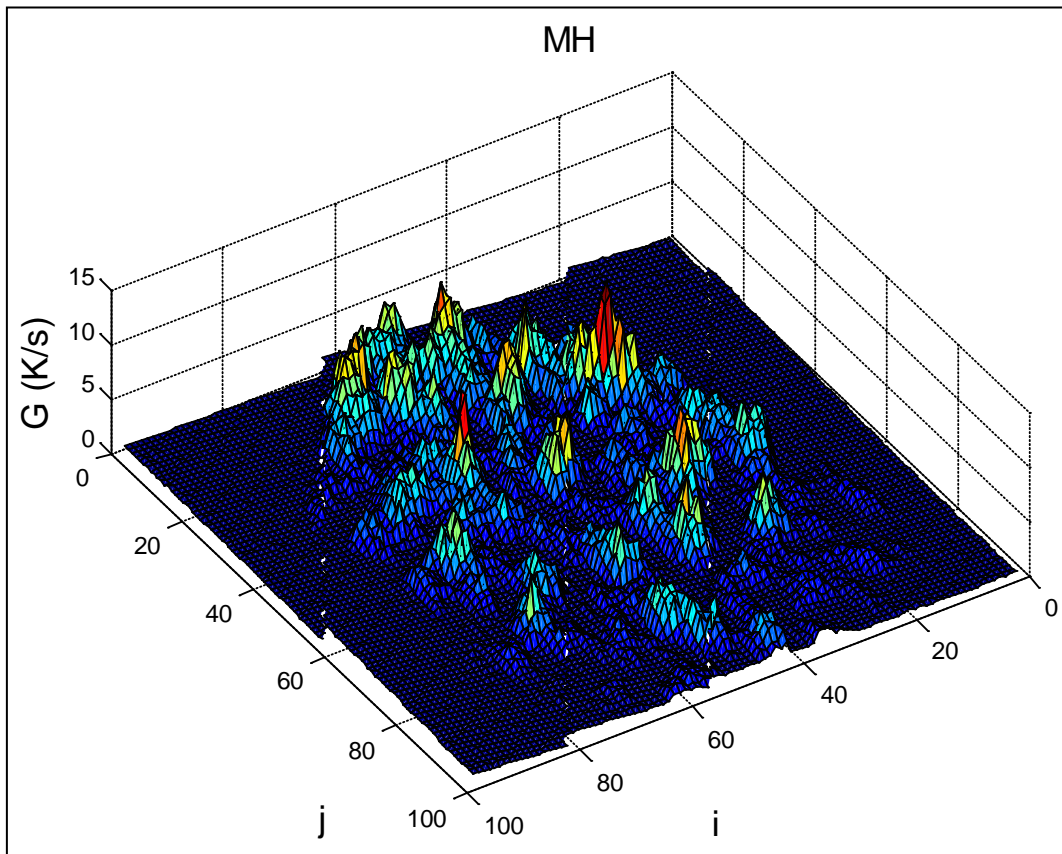


Figura 5-59 - Estimação de  $G_{i,j}$  para o algoritmo de MH.

As Figuras 5-60, 5-61 e 5-62 apresentam a convergência das cadeias de Markov para 6000 estados de  $\alpha_{i,j}$ ,  $H_{i,j}$  e  $G_{i,j}$  respectivamente. Pode-se observar por essas figuras que após os estados de aquecimento, as cadeias atingiram a convergência rapidamente. A exceção é feita ao parâmetro  $H_{i,j}$ , que como demonstrado acima, seu coeficiente de sensibilidade é muito baixo.

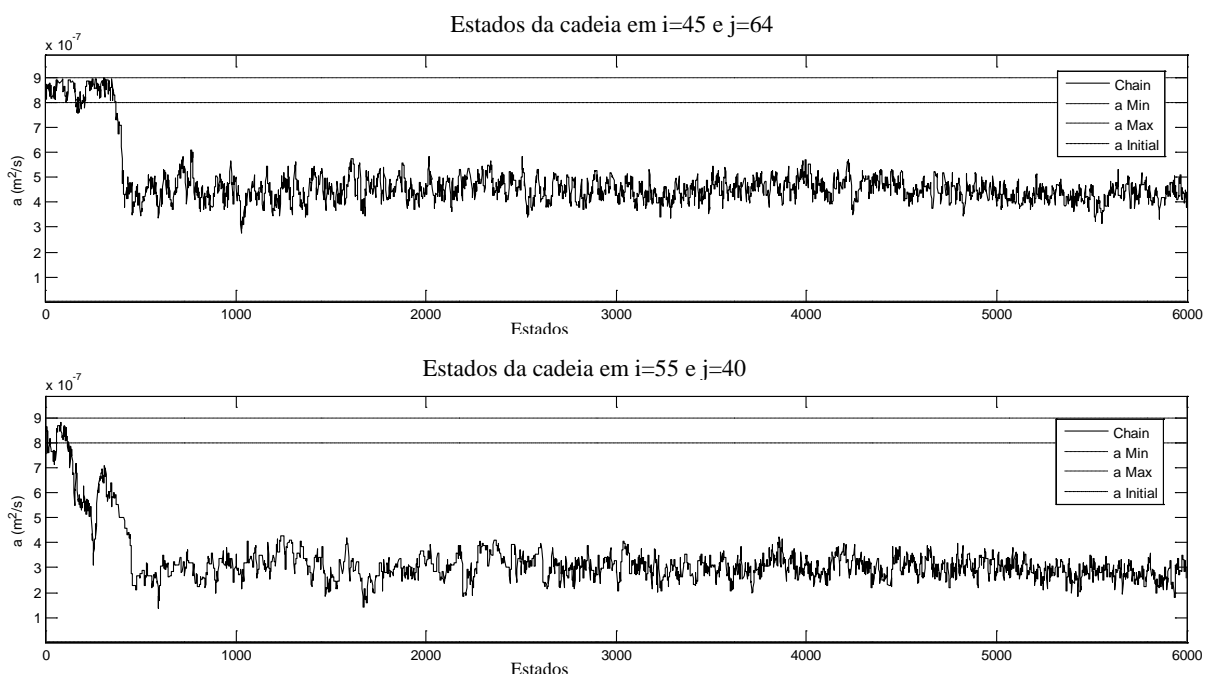
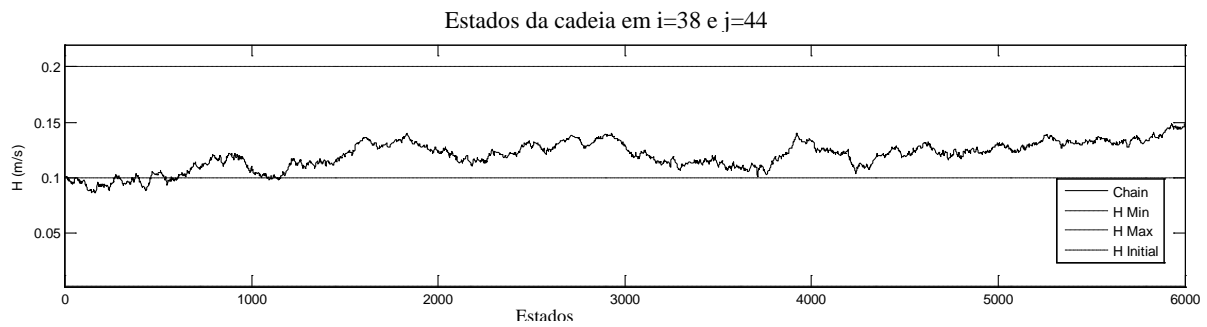
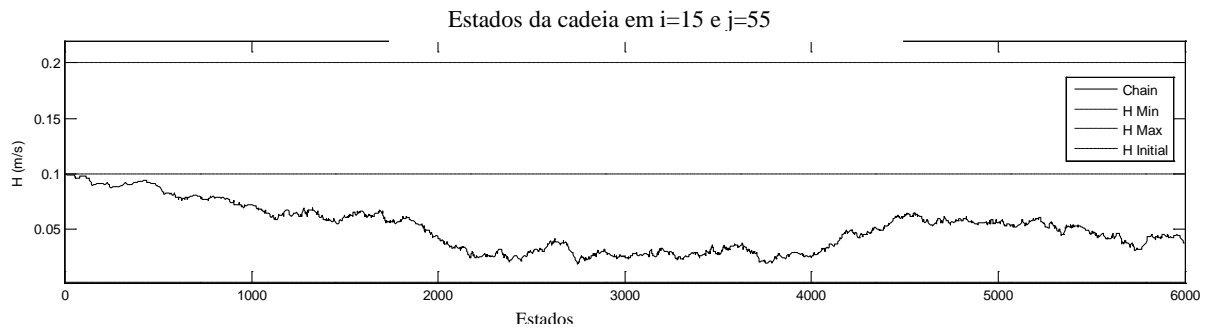
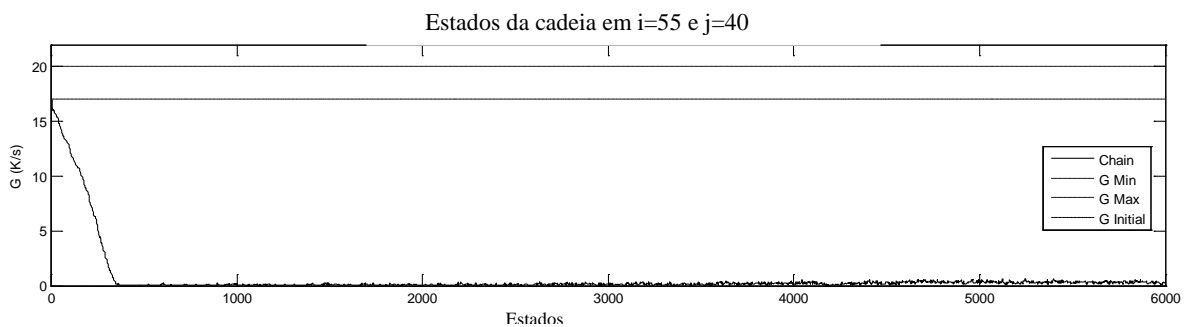
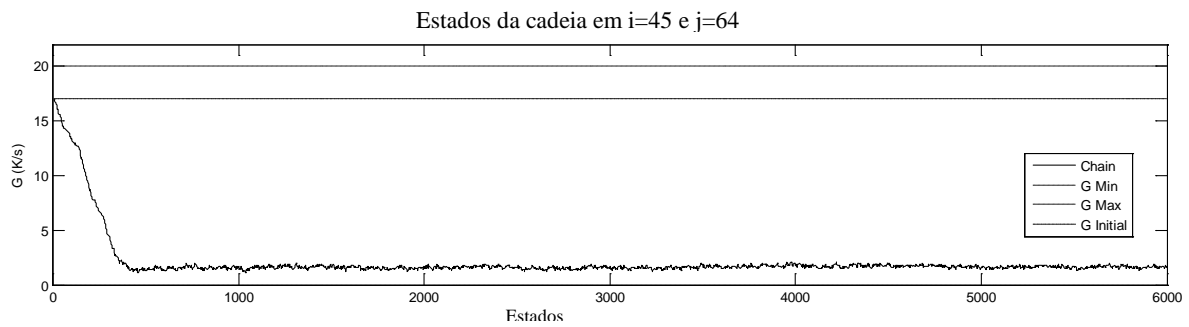


Figura 5-60 - Evolução das cadeias de Markov para  $a_{45,64}$  e  $a_{55,40}$



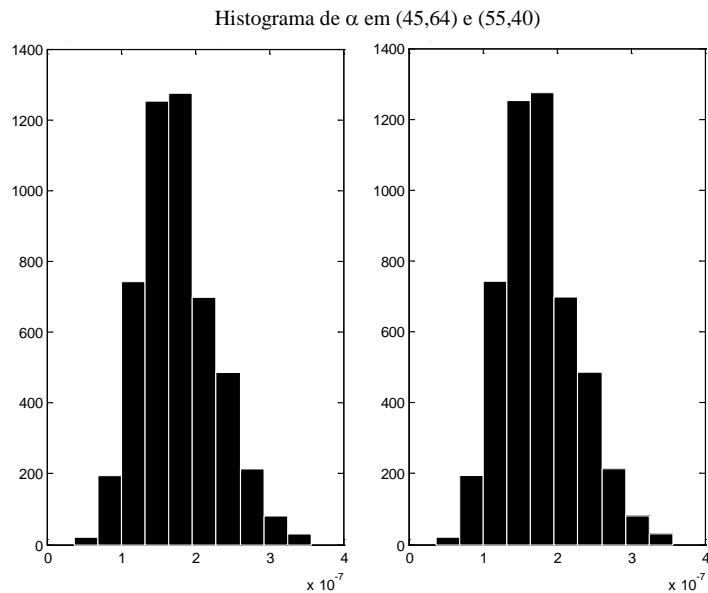


**Figura 5-61 - Evolução das cadeias de Markov para  $H_{15,55}$  e  $H_{38,44}$**



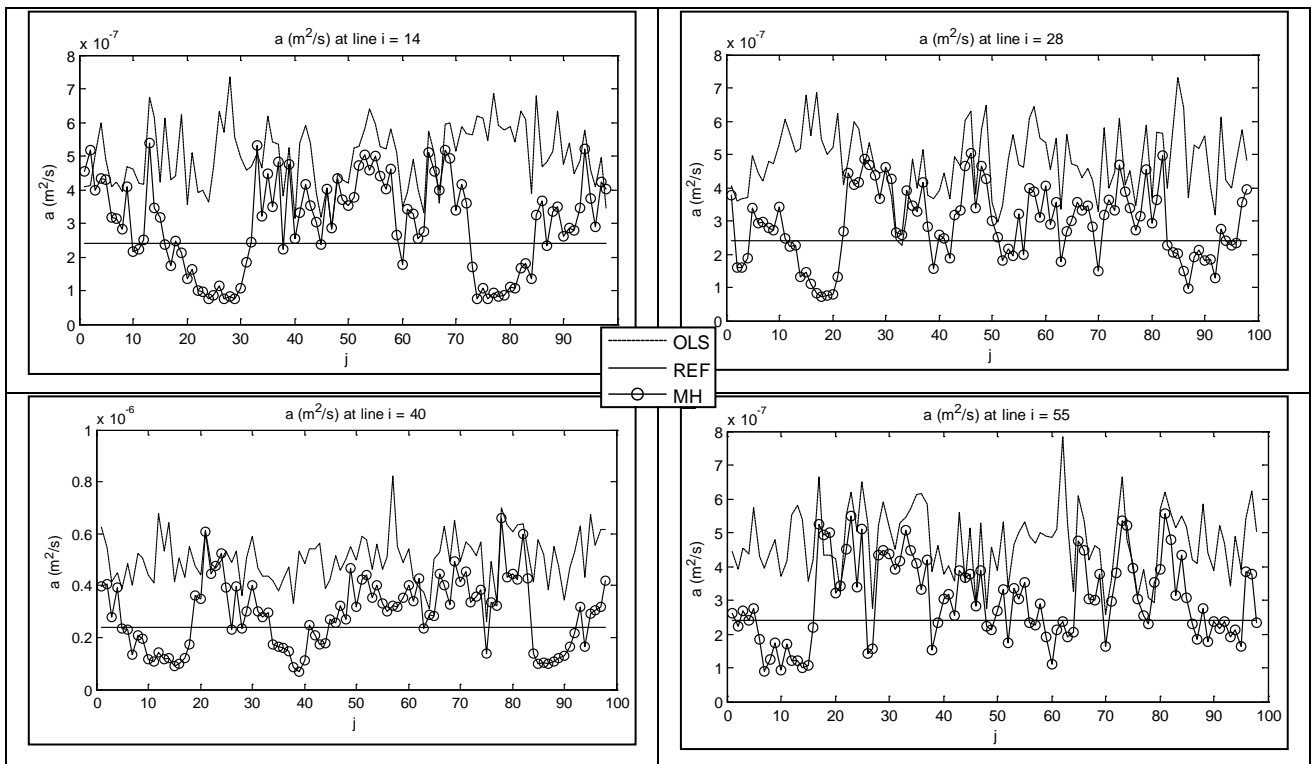
**Figura 5-62 - Evolução das cadeias de Markov para  $G_{45,64}$  e  $G_{55,40}$**

A Figura 5-63 apresenta a distribuição marginal posteriori obtida por amostragens pelo algoritmo de MH para a difusividade térmica nos pixels ( $i = 45, j = 64$ ), ou ( $x = 0.0035$  m,  $y = 0.005$  m) e ( $i = 55, j = 40$ ) ou ( $x = 0.0043$  m,  $y = 0.0031$  m). Pode-se observar que a distribuição a posteriori obtida segue uma distribuição Gaussiana.



**Figura 5-63 - Distribuição posteriori nos pixels (45,64) e (55,40)**

As Figuras 5-64 apresentam a variação da difusividade térmica ao longo das linhas  $i = 14$  ( $x = 0.00109$  m),  $i = 28$  ( $x = 0.00219$  m),  $i = 40$  ( $x = 0.00312$  m) e  $i = 55$  ( $x = 0.00429$  m), obtidas pelos métodos de OLS e MCMC e comparados com o valor de referência. Observa-se por essas figuras que o método de MCMC é mais eficiente para a estimação da difusividade térmica. Os valores estimados com o algoritmo de MH estão mais próximos do valor médio para o corpo de prova em todos os pontos apresentados nestas figuras.



**Figura 5-64 - Comparação da estimação de  $\alpha_{ij}$  ao longo de linhas particulares.**

As Figuras 5-65 apresentam as temperaturas calculadas com os parâmetros estimados pelo método de OLS e MCMC e comparadas com as temperaturas medidas pela câmera, para os pixels ( $i = 15, j = 55$ ), ou ( $x = 0.0011 \text{ m}, y = 0.0043 \text{ m}$ ), ( $i = 38, j = 44$ ), ou ( $x = 0.003 \text{ m}, y = 0.0034 \text{ m}$ ), ( $i = 45, j = 64$ ), ou ( $x = 0.0035, y = 0.005$ ) e ( $i = 55, j = 40$ ), ou ( $x = 0.0043 \text{ m}, y = 0.0031 \text{ m}$ ). Observe-se que para ambos os métodos as temperaturas medidas estão em excelente concordância com as temperaturas calculadas na escala usada para traçar o gráfico. Os resíduos foram também calculados e estão apresentados nas Figuras 5-66. Observa-se por essas figuras que o método de MCMC apresenta o valor dos resíduos sensivelmente melhores que o método de OLS. Os resíduos em ambos os métodos apresentam uma diferença percentual com relação à temperatura medida de no máximo 1%, e apresentam comportamento levemente correlacionado nos pixels ( $i = 38, j = 44$ ) e ( $i = 55, j = 40$ ). Para os pixels ( $i = 15, j = 55$ ) e ( $i = 45, j = 64$ ) os resíduos apresentam um comportamento não-correlacionado.

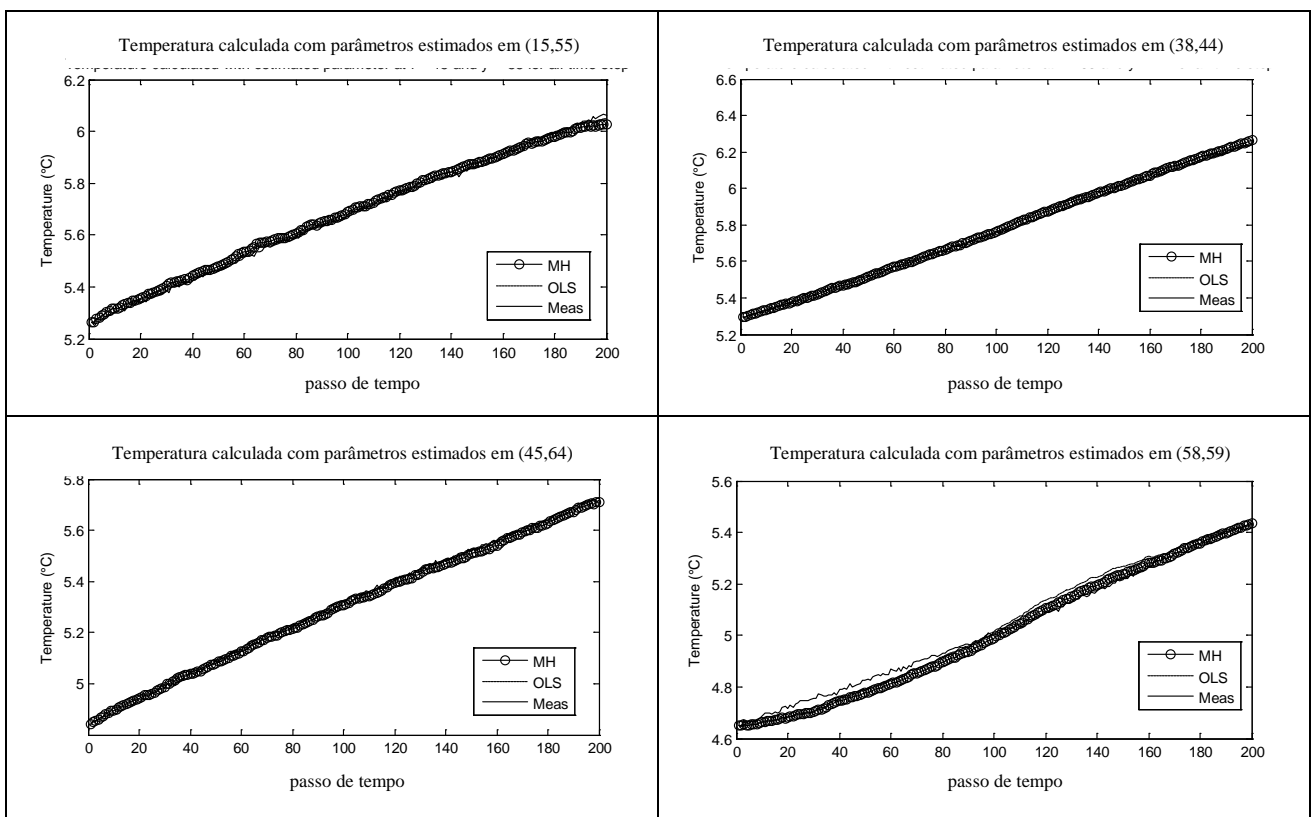
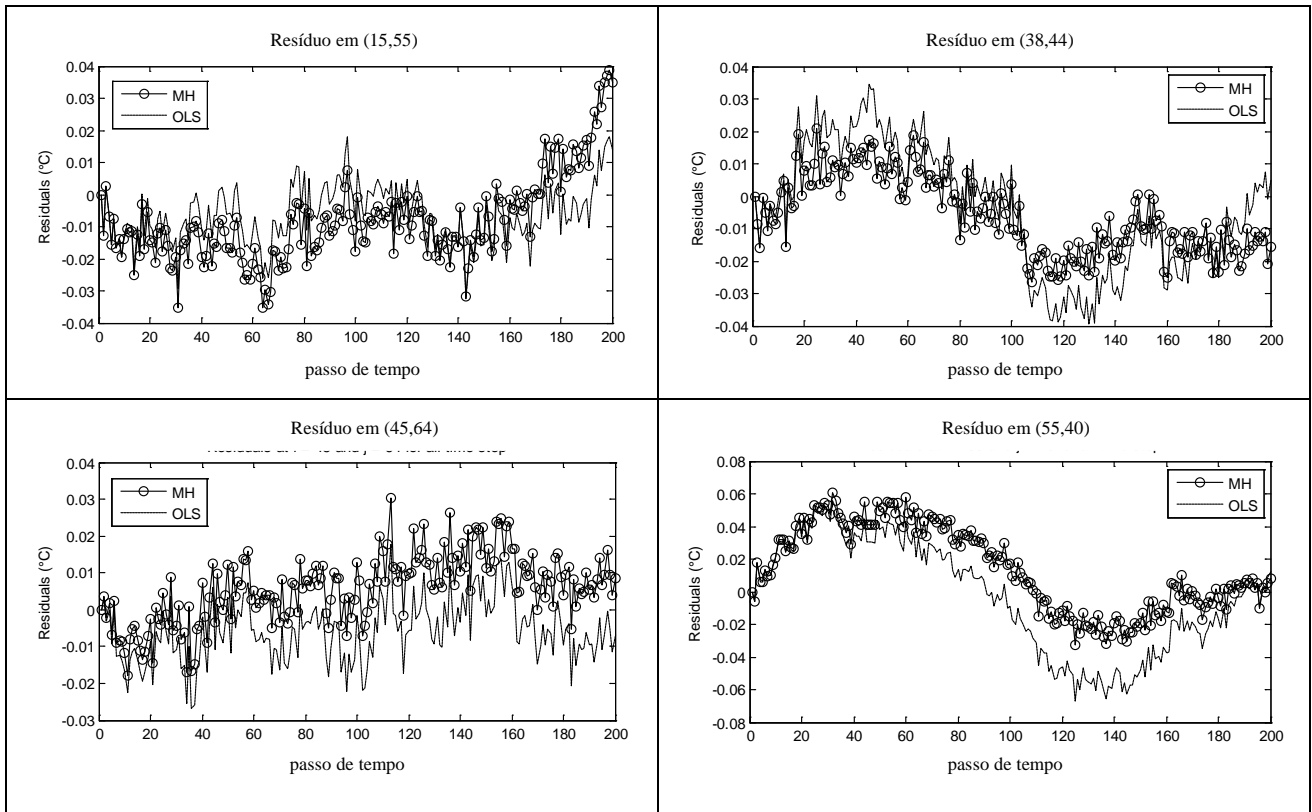
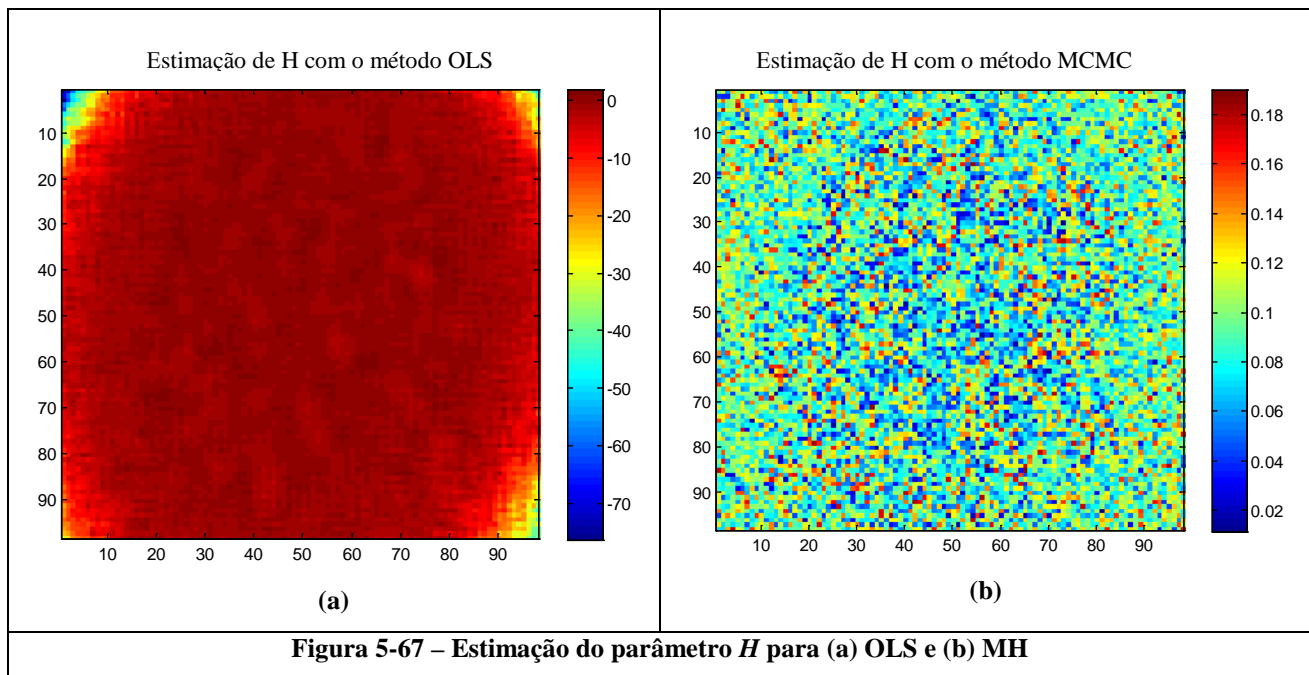


Figura 5-65 - Comparação da temperatura calculada com os parâmetros estimados e a temperatura medida.



**Figura 5-66 - Resíduos entre a temperatura medida e a calculada com os parâmetros estimados em pixels particulares.**

Para a estimação do parâmetro  $H_{i,j}$ , o método MCMC via MH apresentou resultados melhores do que os valores estimados pelo método OLS e com sentido físico mais realista. As Figuras 5-67-a-b apresentam os resultados para a estimação com o método OLS e MCMC respectivamente. Observa-se por essas figuras que os valores estimados com o método de OLS apresentam valores de  $H_{i,j}$  de até -70, o que corresponde a um valor de  $h$  de  $-141050 \text{ W}/(\text{m}^2\text{°C})$ . Por outro lado, os valores de  $H_{i,j}$  estimados com método MCMC foram positivos e com valores absolutos mais realistas.



O tempo computacional para a estimação dos parâmetros com OLS foram da ordem de 1.5 segundo. Para a estimação com o algoritmo de MH esse tempo foi de 43 minutos.

A Tabela 5-2 apresenta de forma resumida os resultados obtidos para a estimação da difusividade térmica para o problema inverso do tipo I nos experimentos com aquecimento pela resistência elétrica e laser diodo para os métodos OLS e MCMC

**Tabela 5-2 – Comparação dos valores médios de  $\alpha$  para a solução do problema inverso do tipo I**

$\alpha$ (mm <sup>2</sup> /s)			
Método	Resistência Elétrica	Laser Diodo	Referência
OLS	0.259	0.501	0.24
MCMC	0.253	0.336	

A Tabela 5-3 apresenta de forma resumida as distribuições a priori utilizadas para a estimação dos parâmetros desconhecidos, usadas no método MCMC para o problema inverso do tipo I, no caso do aquecimento ter sido realizado com a resistência elétrica ou com o laser diodo.

**Tabela 5-3 Parâmetros usados para o método MCMC para o problema inverso do tipo I**

Taxa de Aceitação	Resistência elétrica					Laser diodo				
	P	Priori	Min.	Max.	Inicial	$eps$	Min.	Max.	Inicial	$eps$
60%	$\alpha$ (mm <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	Uniforme	$8 \cdot 10^{-8}$	$9 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-7}$	0.02	$5 \cdot 10^{-10}$	$9 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-7}$	0.06
37%	$H_{i,j}$ (s <sup>-1</sup> )	Uniforme	0.002	0.2	0.1	0.1	0.002	0.2	0.1	0.01
	$G_{i,j}$ (K/m <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> )	Uniforme	0	5	4	0.02	0	20	17	0.01

A Tabela 5-4 apresenta de forma resumida os parâmetros usados para a malha espacial e os tempos de experimento, bem como o passo de tempo usado para a solução do problema inverso do tipo I para o caso dos experimentos feitos com o laser diodo e a resistência elétrica.

**Tabela 5-4 Parâmetros temporais e da malha para o problema inverso do tipo I**

	Resistência elétrica	Laser diodo
(n° de pixels), ( $L_x, L_y$ , m)	(98,98), (0.00754, 0.00754)	(100,100), (0.0078, 0.0078)
dx ( $\mu$ m)	76.9	78.1
K (passos de tempo) (s)	(101), (1.01)	(201), (1)
dt (s)	0.01	0.005

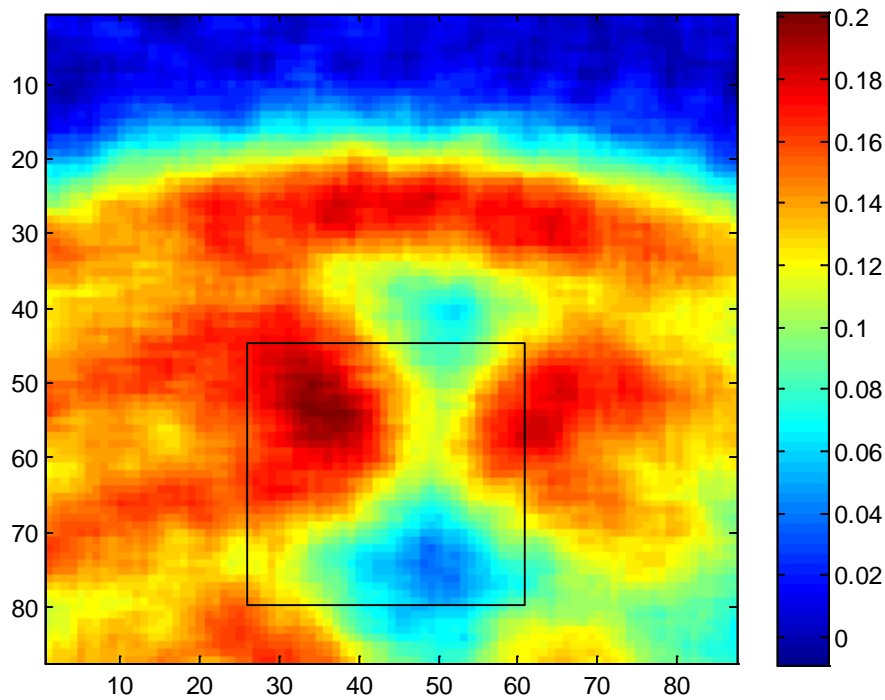
## 5.5 Solução do problema inverso do tipo 2 com medidas reais

Para o presente experimento, o laser diodo ou a resistência elétrica impõe na amostra um fluxo de calor que varia com o tempo. Como o termo fonte não é constante, a metodologia utilizada para a estimação dos parâmetros foi o filtro de Kalman, que conforme descrito na seção 4.6 é um método desenvolvido para problema de estimação de estados.

### 5.5.1 Experimento com a resistência elétrica

Para o caso do experimento com a resistência, uma tensão de 10 V foi aplicada em intervalos de tempo regulares, resultando em um aumento máximo de 15 °C em toda a amostra. Este experimento foi realizado manualmente, sem a utilização do gerador de função, uma vez que a voltagem máxima fornecida pelo gerador é de 5 V, o que é insuficiente para uma amplitude de sinal que possibilite a estimação dos parâmetros.

Para a presente análise, foi considerada apenas uma parte do meio, devido ao elevado custo computacional de se realizar a estimação em toda a matriz de temperaturas, devido às dimensões das matrizes geradas para a estimação pelo filtro de Kalman. Este corte foi realizado na área apresentada na Figura 5-68, reduzindo o tamanho da imagem de 98 x 98 pixels (a mesma usada para o problema do tipo I) para 42 x 42 pixels. Para o filtro de Kalman, o tamanho da matriz é menor, pois como pode ser visto na seção 4.6.2, o vetor de estados (Equação (4.63)) contém não somente os parâmetros, mas também a temperatura em cada pixel e em cada passo de tempo. Dessa maneira, mesmo um computador com 4 núcleos e 8 GB de memória RAM apresentou insuficiência de memória para a estimação com matrizes maiores.



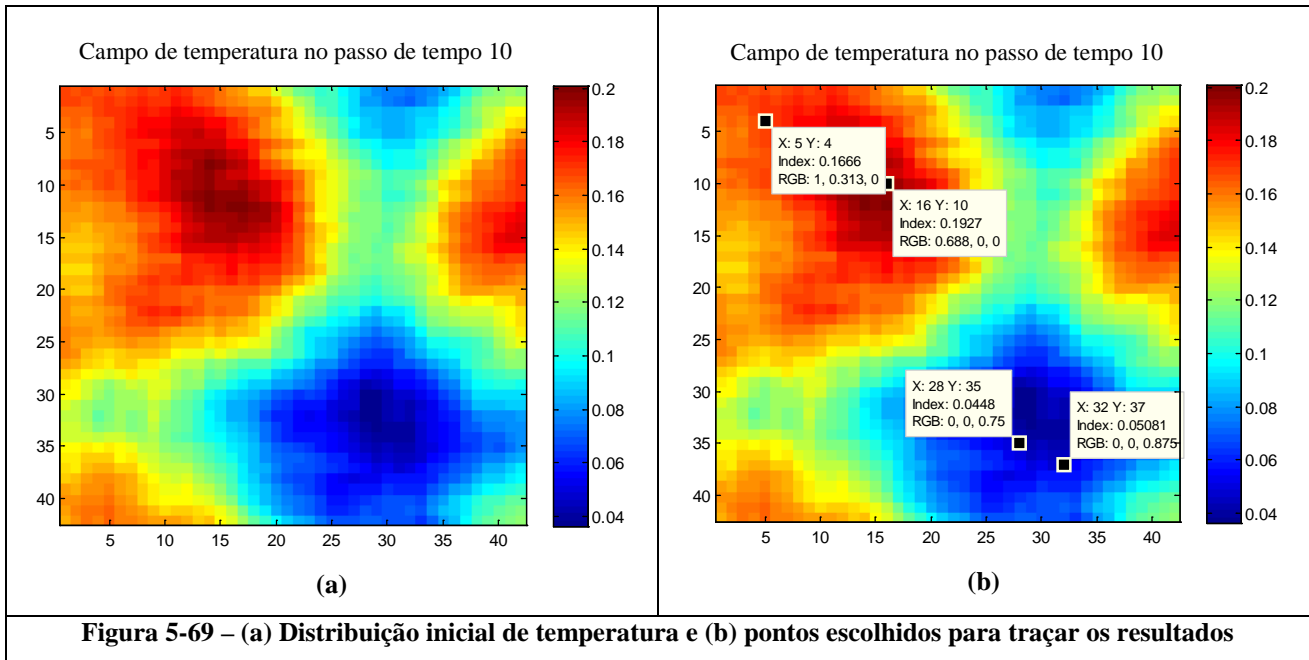
**Figura 5-68 - Área escolhida para o corte na imagem**

Como consequência desse corte, na solução do problema inverso a placa é discretizada em  $a_i = a_j = 42$  nós internos e 1912 passos de tempo. Os valores do parâmetro  $G_m^n$  foram então estimados para cada um desses nós e passos de tempo. Cada pixel representa uma área de  $78.1 \times 78.1 \mu\text{m}$ , de maneira que as dimensões da parte cortada na imagem da placa são  $L_x = L_y = 0.0033 \text{ m}$ . O tempo final foi de 19.12s, e o passo de tempo foi de 0.01s.

As Figuras 5-69-a-b apresentam a distribuição de temperatura no passo de tempo 10, em  $t = 0.1\text{s}$ , e os pontos na figura escolhidos para serem estudados respectivamente. Para as Figuras 5-70 e 5-71 que apresentam os resultados em pixels particulares, estes foram escolhidos de acordo com a Figura 5-69-b.

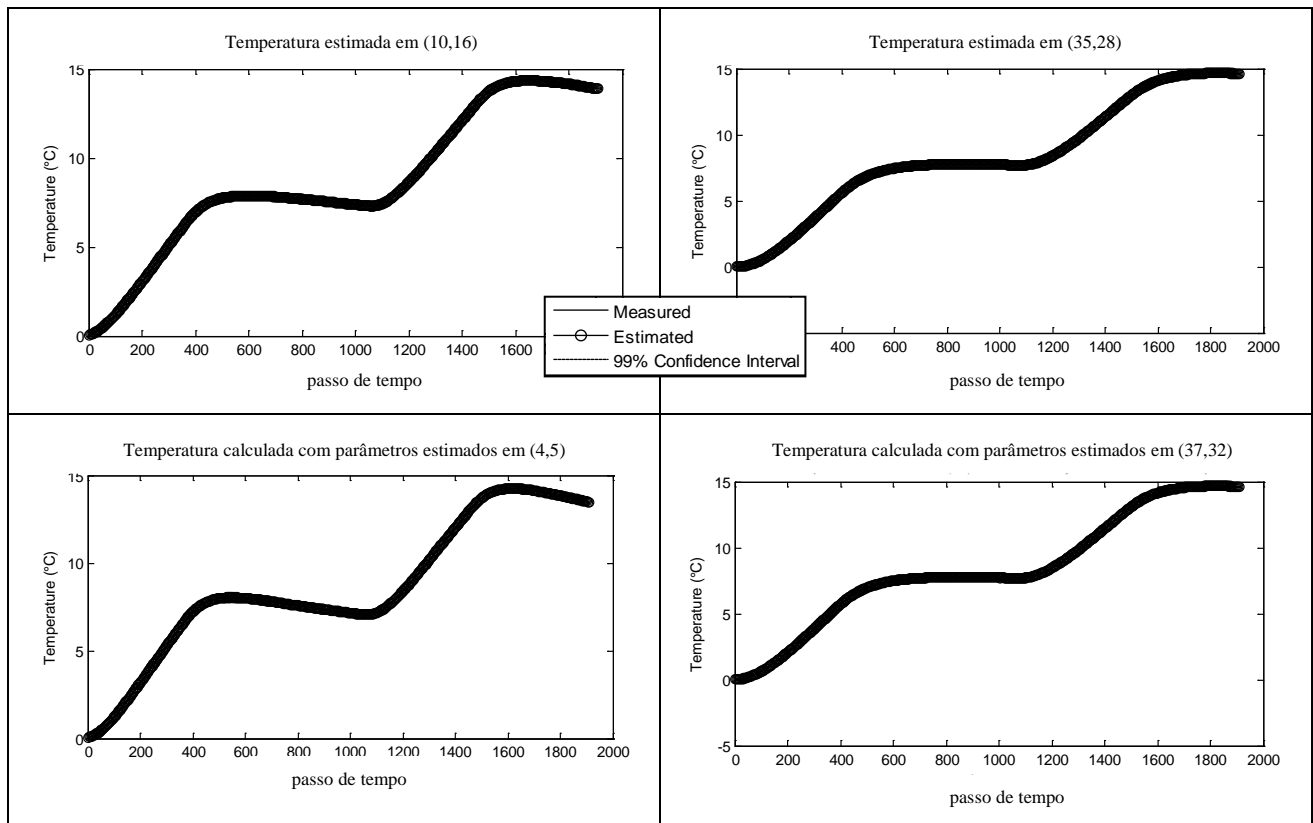
Os valores de  $G_m^0$  em  $t = 0 \text{ s}$  são considerados como tendo uma distribuição Gaussiana com média conhecida e com desvio padrão de 60% da média. O desvio padrão para o modelo de evolução para  $G_m^{k+1}$  (que é considerado seguindo um passeio aleatório, Equação (4.62)) foi considerado como 60% da média do parâmetro estimado no passo de tempo anterior, isto é,  $0.6G_m^k$ , e as variâncias do modelo de evolução para  $T_m^{k+1}$  foram calculadas de acordo com a Equação (4.61). As incertezas no conhecimento de  $H$  e  $\alpha$  são levadas em conta no modelo de evolução através da matriz  $\mathbf{Q}_p^k$  (Equação (4.61)). Os desvios-padrões de  $H$  e  $\alpha$  são considerados sendo 0.001 1/s e 0.001  $\text{m}^2/\text{s}$ , respectivamente. Estes valores representam a pequena incerteza sobre a informação a priori desses parâmetros. Para  $\alpha$ , este fato é confirmado pela informação obtida para os valores de difusividade térmica na seção 4.8, sendo considerado em todos os casos de medidas reais como

tendo uma média de  $0.24 \text{ mm}^2/\text{s}$ . Para  $H_m^k$ , espera-se que os valores sejam para um caso de convecção livre, uma vez que os testes foram realizados no laboratório em um ambiente sem corrente de ar, sendo considerado em todos os casos de medidas reais como tendo uma média de  $10 \text{ W}/(\text{m}^2\text{C})$ .



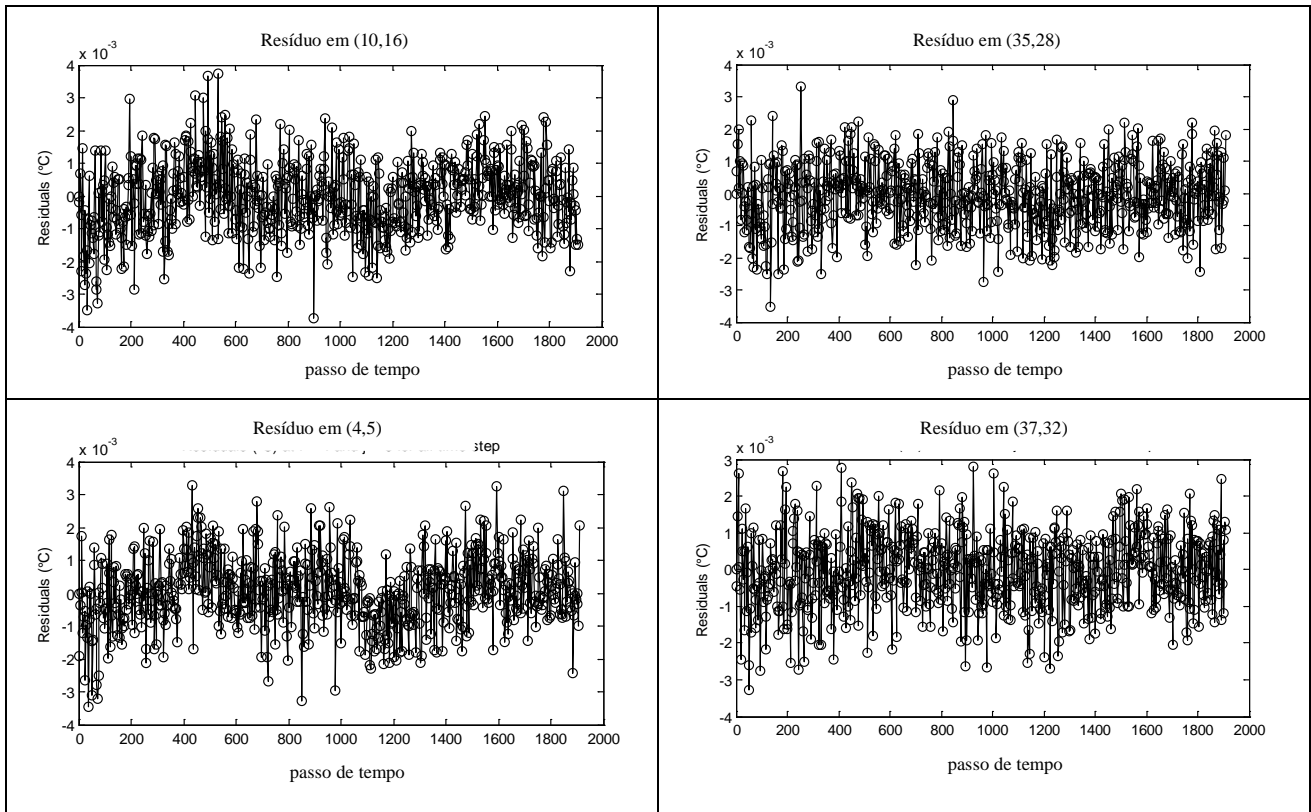
As Figuras 5-70 apresentam a comparação das temperaturas exatas e as estimadas nas posições ( $i = 10, j = 16$ ), ( $i = 35, j = 28$ ), ( $i = 4, j = 5$ ) e ( $i = 37, j = 32$ ), que correspondem a ( $x = 0.00078 \text{ m}$ ,  $y = 0.00125 \text{ m}$ ), ( $x = 0.00273 \text{ m}$ ,  $y = 0.00219 \text{ m}$ ), ( $x = 0.00031 \text{ m}$ ,  $y = 0.00039 \text{ m}$ ) e ( $x = 0.00389 \text{ m}$ ,  $y = 0.00249 \text{ m}$ ), respectivamente. As temperaturas estimadas foram obtidas com o filtro de Kalman. Os intervalos de confiança de 99% também estão representados nessas figuras. Como o desvio padrão para os erros experimentais foi da ordem de  $0.006 \text{ }^\circ\text{C}$ , a melhora na estimativa da temperatura comparada com as medidas experimentais não pôde ser observada.





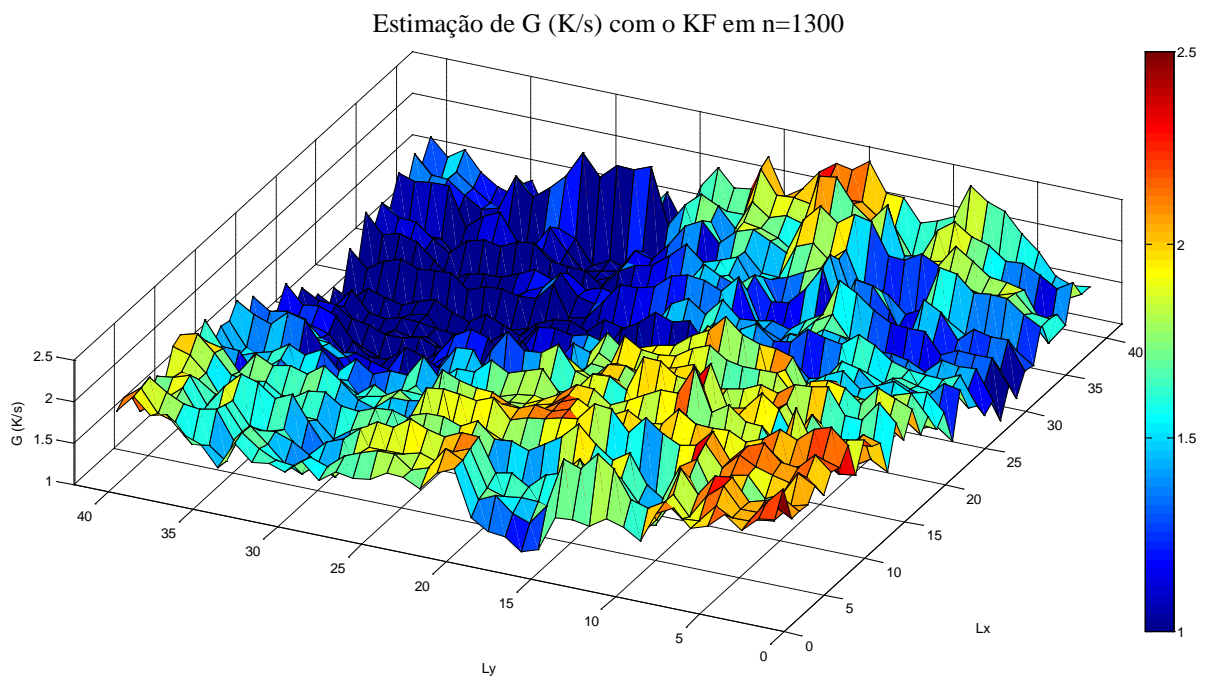
**Figura 5-70 - Variações de temperatura em pixels particulares**

As Figuras 5-71 apresentam os resíduos entre as temperaturas medidas e estimadas nos mesmos pontos escolhidos para as Figuras 5-70. As Figuras 5-71 mostra que as temperaturas estimadas estão com excelente concordância com as temperaturas exatas.

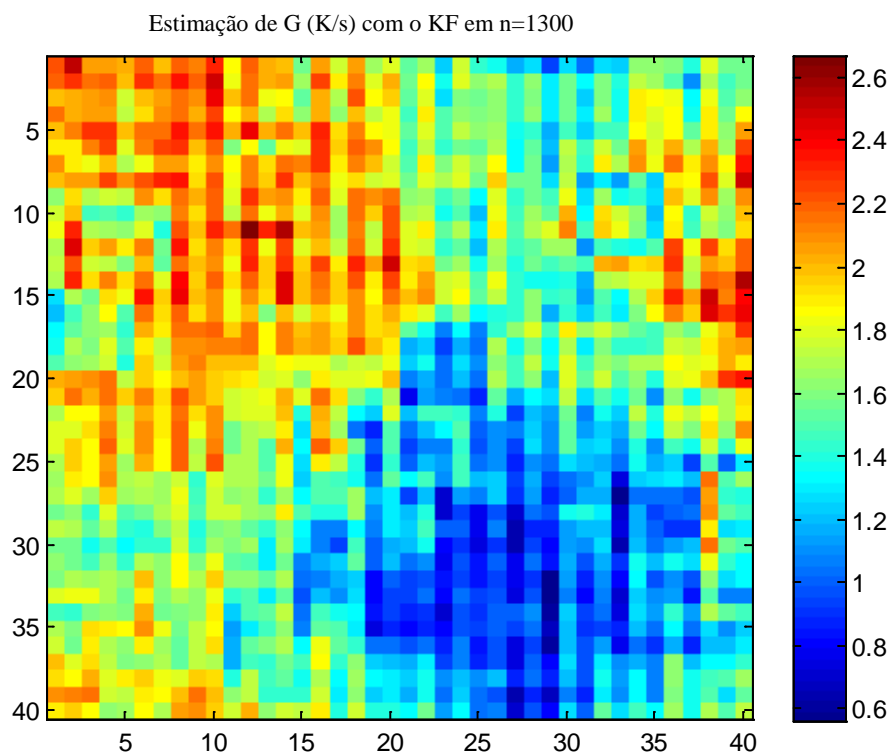


**Figura 5-71 - Variação dos resíduos em pixels particulares**

A Figura 5-72 apresenta a distribuição espacial da estimação do termo fonte para o passo de tempo 1300 ( $t = 13s$ ). Observa-se por essa figura que o termo fonte estimado está de acordo com o perfil de temperatura mostrado na Figura 5-69, onde a figura foi cortada levando em conta uma parte aquecida e uma parte não aquecida, resultado que é confirmado pela Figura 5-73.

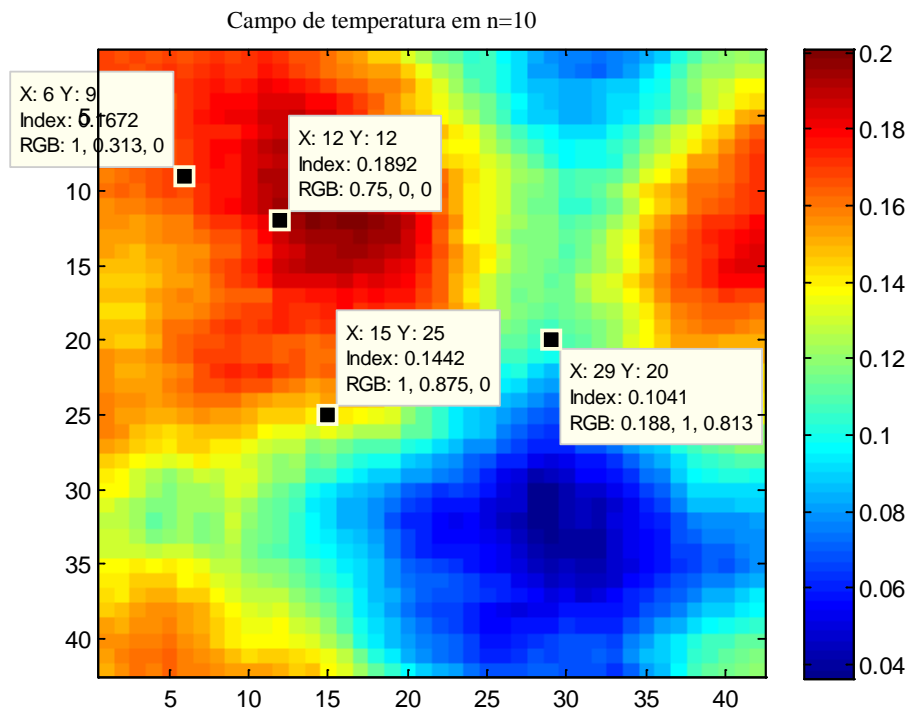


**Figura 5-72 – Termo fonte estimado em todo o meio no tempo  $t=13s$**



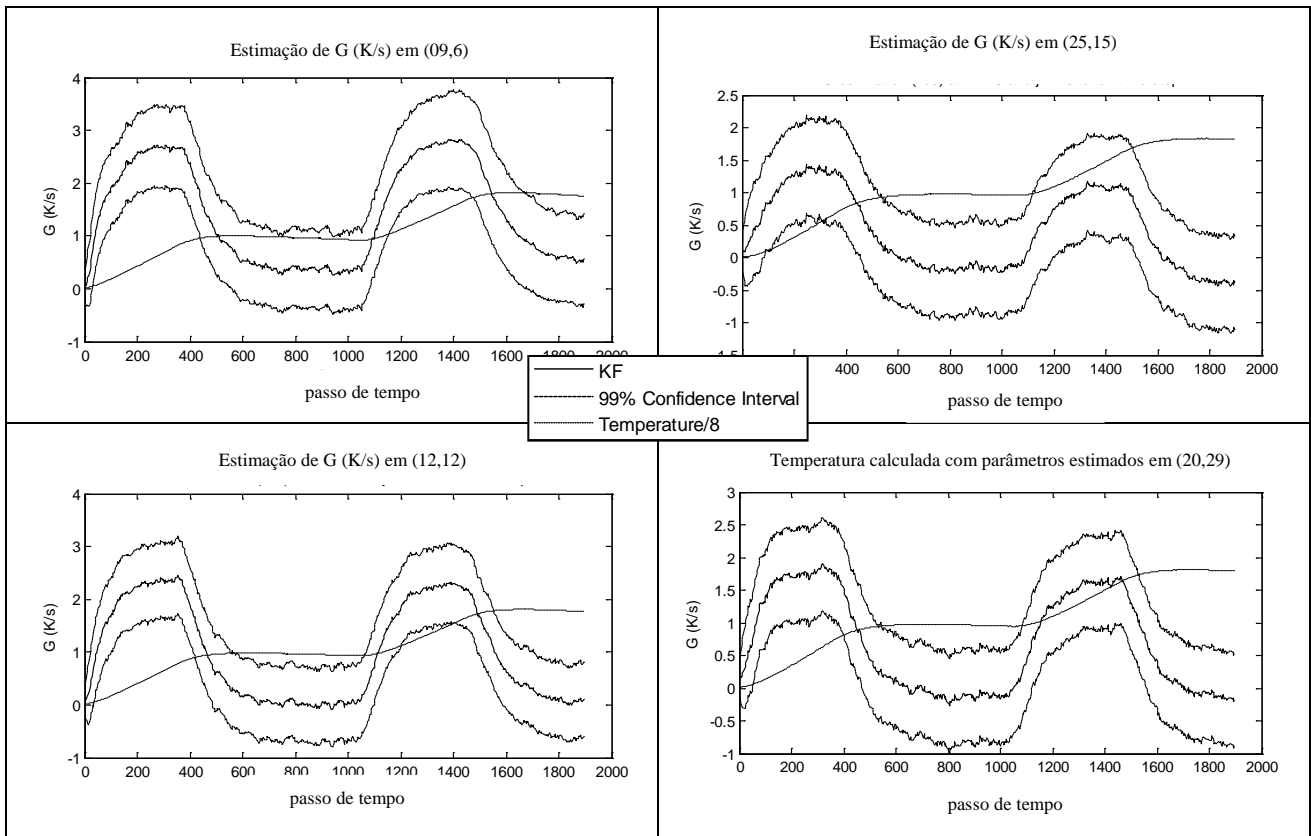
**Figura 5-73 – Cartografia do termo fonte em  $t = 13s$**

As Figuras 5-75 apresentam a evolução no tempo dos termos-fonte obtidos com o filtro de Kalman nas posições  $(i = 9, j = 6)$ ,  $(i = 25, j = 15)$ ,  $(i = 12, j = 12)$  e  $(i = 20, j = 29)$ , que correspondem a  $(x = 0.00070 \text{ m}, y = 0.00047 \text{ m})$ ,  $(x = 0.00195 \text{ m}, y = 0.00117 \text{ m})$ ,  $(x = 0.01406 \text{ m}, y = 0.01406 \text{ m})$  e  $(x = 0.02343 \text{ m}, y = 0.03397 \text{ m})$ , respectivamente. Estes pontos estão apresentados na Figura 5-74.

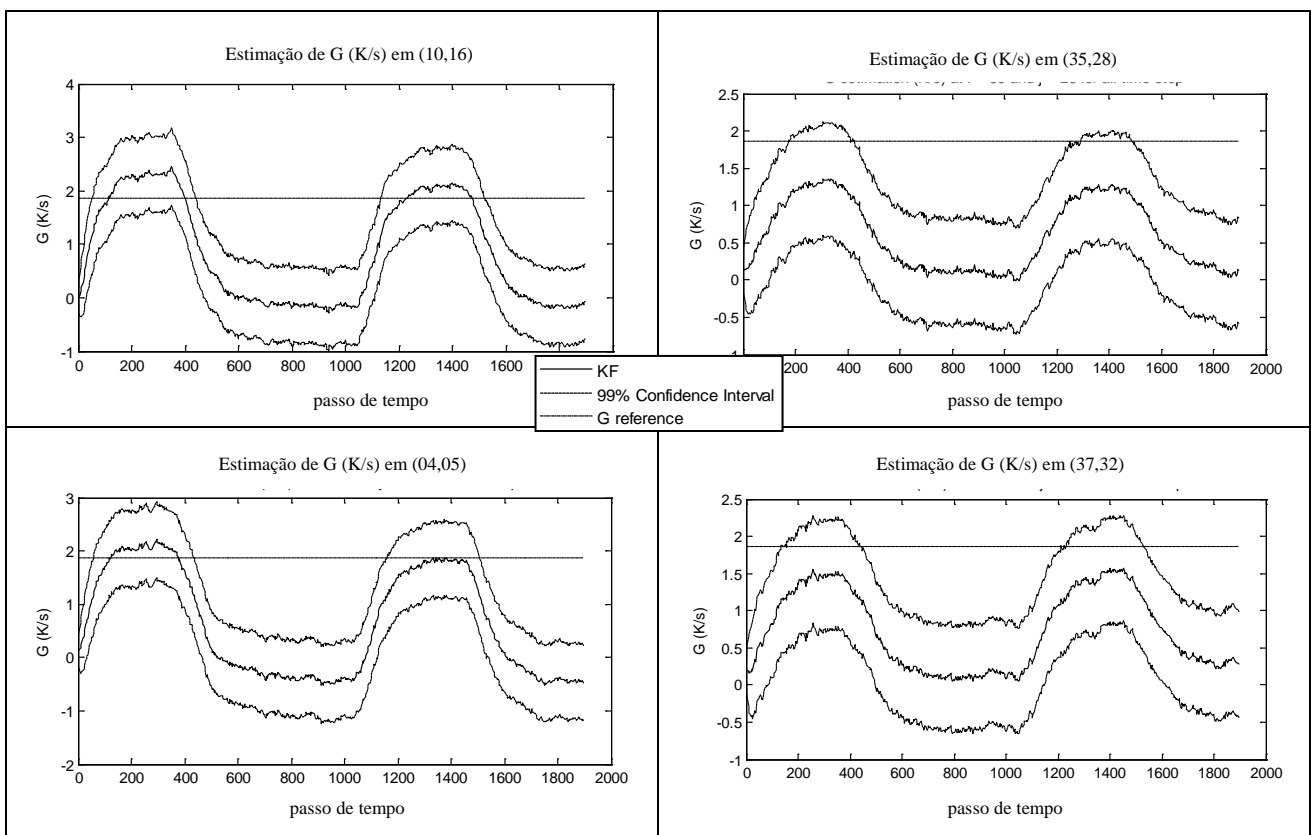


**Figura 5-74 - Pontos escolhidos para traçar os resultados de  $G_{i,j}^n$**

As Figuras 5-75 mostram que os termos-fonte obtidos com o filtro de Kalman são levemente defasados do perfil de temperatura, uma vez que o aquecimento é feito na face oposta à face que a câmera faz a medida. Dessa maneira, existe uma inércia térmica após a resistência ter sido ligada, e após ser desligada. Os valores de temperatura foram divididos por 8 para ajustar a escala de temperatura com a escala de  $G_{i,j}^n$ . As Figuras 5-76 mostram a comparação de  $G_{i,j}^n$  estimado pelo filtro de Kalman e o valor calculado para a potência dissipada pela resistência elétrica, calculada na seção 4.8.1. Os resultados estão de acordo com o valor calculado para a potência dissipada, e também para o obtido pelo método de MCMC para o problema inverso do tipo I (seção 5.4.1, Figura 5-42).



**Figura 5-75 - Termo fonte estimado em pixels particulares comparados com o perfil de temperatura.**



**Figura 5-76 - Termo fonte estimado em pixels particulares comparados com o valor da potência dissipada pela resistência.**

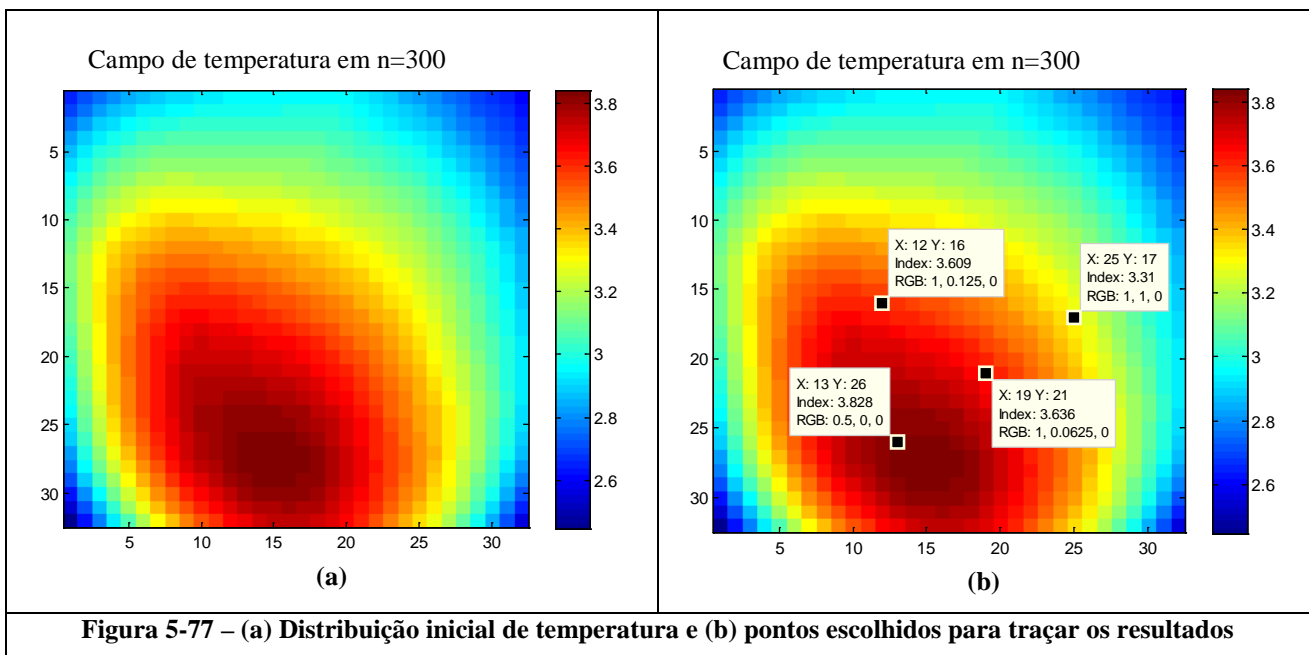
O tempo computacional para a estimação dos parâmetros com o filtro de Kalman foi da ordem de 23 minutos.

### 5.5.1 Experimento com o laser diodo

Para o caso do experimento com o laser diodo, duas formas temporais de termo fonte foram utilizadas: Um pulso e uma senóide. Para a aplicação das formas de onda, o gerador de função Agilent 33220A foi utilizado. Para a senóide, uma frequência de 1Hz foi utilizada. O pulso teve a duração de 500 ms e o tempo entre os pulsos foi de 1 segundo e uma corrente de 900 mA foi selecionada para o laser diodo. Para a senóide uma corrente de 1050 mA foi usada. Em ambos os casos, a amplitude da tensão foi de 0 a 5 V.

Para o experimento com o aquecimento senoidal a matriz de temperaturas é discretizada em  $a_i = a_j = 42$  nós internos e 604 passos de tempo. Os valores dos parâmetros  $G_m^n$  foram então estimados para cada um desses nós e passos de tempo. Cada pixel representa uma área de  $78.1 \times 78.1 \mu\text{m}$ , de maneira que as dimensões da parte cortada na imagem da placa são  $L_x = L_y = 0.0033 \text{ m}$ . O tempo final foi de 3.02s, e o passo de tempo foi de 0.005.

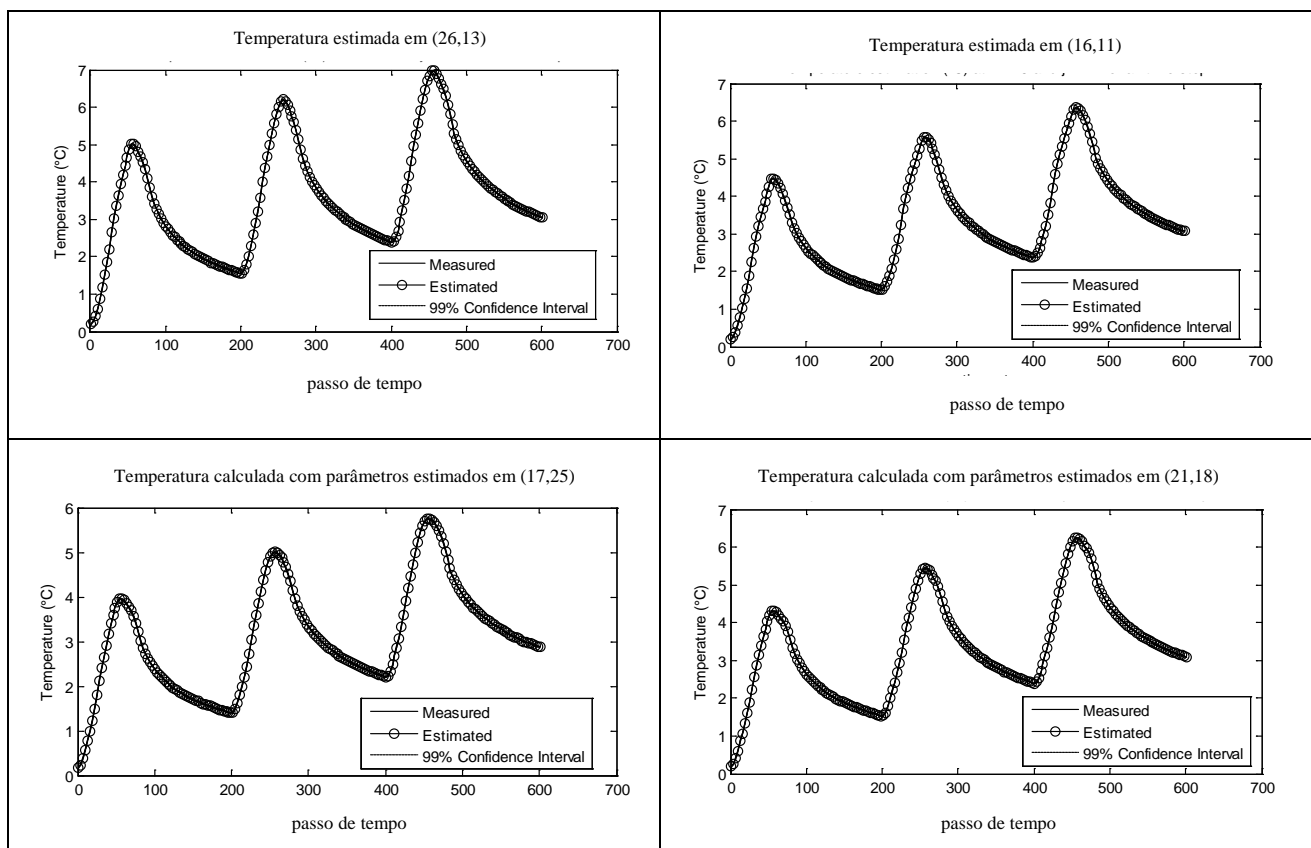
As Figuras 5-77-a-b apresentam as distribuições de temperatura nos passos de tempo 300, em  $t = 1.5\text{s}$ , e os pontos na figura escolhidos para serem estudados, respectivamente.



Os valores de  $G_m^0$  em  $t = 0 \text{ s}$  são considerados como tendo uma distribuição Gaussiana com média conhecida e com desvio padrão de 60% da média. O desvio padrão para o modelo de evolução para  $G_m^{k+1}$  (que é considerado seguindo um passeio aleatório, Equação (4.62)) foi considerado como 60% da média do parâmetro estimado no passo de tempo anterior, isto é,  $0.6G_m^k$ ,

e as variâncias do modelo de evolução para  $T_m^{k+1}$  foram calculadas de acordo com a Equação (4.61). As incertezas no conhecimento de  $H$  e  $\alpha$  são levadas em conta no modelo de evolução através da matriz  $\mathbf{Q}_p^k$  (Equação (4.61)). Os desvios-padrões de  $H$  e  $\alpha$  são considerados sendo 0.001 1/s e 0.001  $m^2/s$ , respectivamente.

As Figuras 5-78 apresentam a comparação das temperaturas exatas e estimadas nas posições ( $i = 26, j = 13$ ), ( $i = 16, j = 12$ ), ( $i = 17, j = 25$ ) e ( $i = 21, j = 19$ ), que correspondem a ( $x = 0.00203$  m,  $y = 0.00101$  m), ( $x = 0.00125$  m,  $y = 0.00086$  m), ( $x = 0.00133$  m,  $y = 0.00187$  m) e ( $x = 0.00164$  m,  $y = 0.00158$  m), respectivamente. As temperaturas estimadas foram obtidas com o filtro de Kalman. Os intervalos de confiança de 99% também estão representados nessas figuras. Como o desvio padrão para os erros experimentais foi da ordem de 0.006 °C, a melhora na estimativa da temperatura comparada com as medidas experimentais não pôde ser observado.

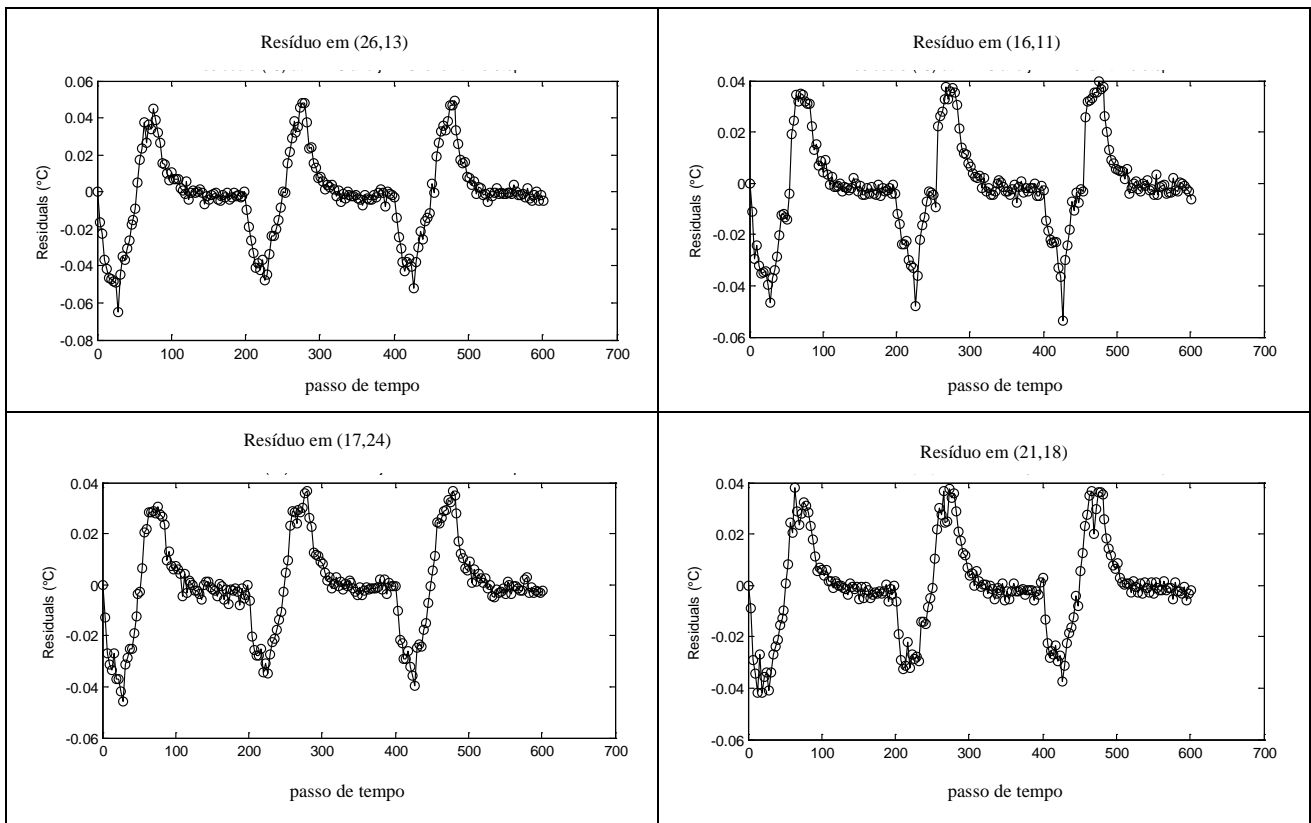


**Figura 5-78 - Variações de temperatura em pixels particulares**

As Figuras 5-79 apresentam os resíduos entre as temperaturas medidas e estimadas nos mesmo pontos escolhidos para as Figuras 5-78. As Figuras 5-79 mostram que as temperaturas estimadas estão com excelente concordância com as temperaturas exatas. As descontinuidades nas Figuras 5-79 são devidos aos passos de tempo necessários para que o Filtro de Kalman reaja às variações no termo fonte.

A Figura 5-80 apresenta a distribuição espacial da estimação do termo fonte para o passo de tempo 454 ( $t = 2.27s$ ). Observa-se por essa figura que o termo fonte estimado está de acordo com o perfil de temperatura mostrado na Figura 5-77, onde a figura foi cortada levando em conta uma parte aquecida e uma parte não aquecida, resultado que é confirmado pela Figura 5-81.

As Figuras 5-83 apresentam a evolução no tempo dos termos-fonte obtidos com o filtro de Kalman nas posições ( $i = 12, j = 12$ ), ( $i = 15, j = 25$ ), ( $i = 16, j = 28$ ) e ( $i = 20, j = 29$ ), que correspondem a ( $x = 0.00094$  m,  $y = 0.00094$  m), ( $x = 0.00117$  m,  $y = 0.00195$  m), ( $x = 0.01245$  m,  $y = 0.00219$  m) e ( $x = 0.02343$  m,  $y = 0.03397$  m), respectivamente. Estes pontos estão apresentados na Figura 5-82.



**Figura 5-79 - Variação dos resíduos em pixels particulares**



Estimação de G (K/s) com o KF em n=454

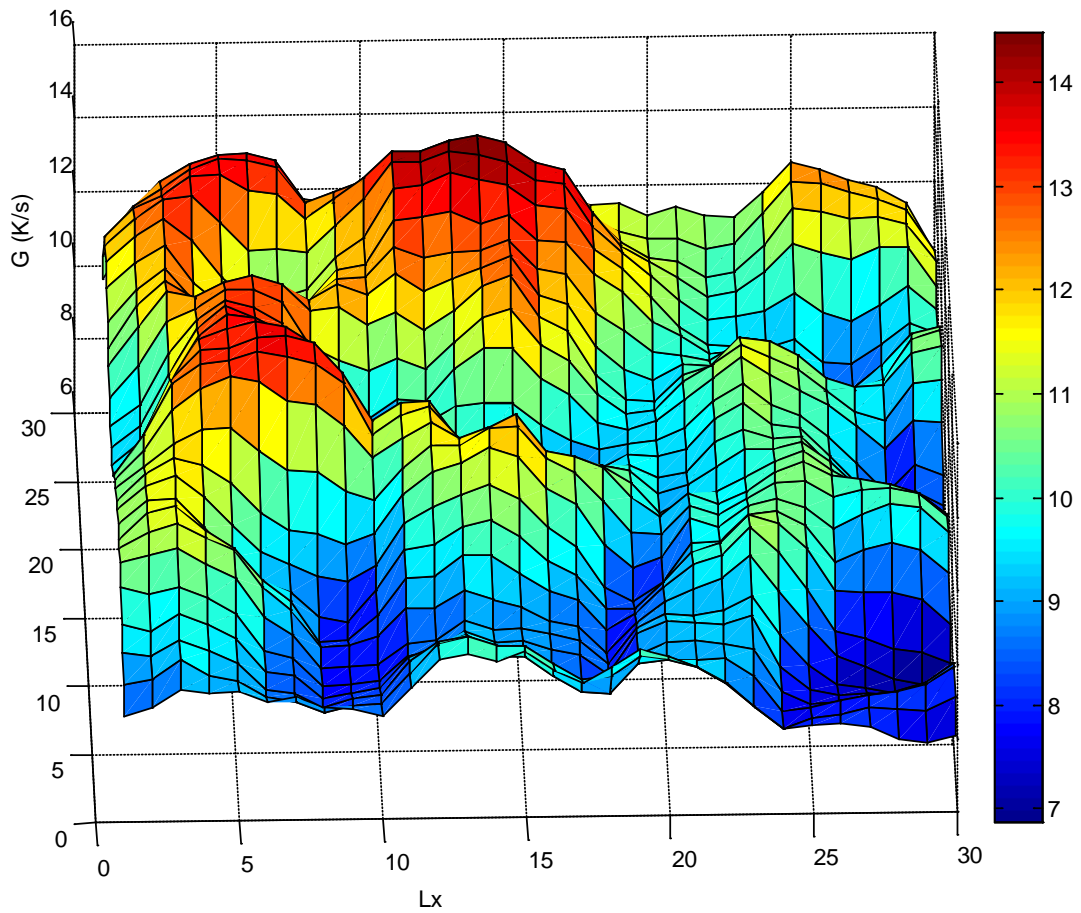


Figura 5-80 – Termo fonte estimado em todo o meio no tempo  $t=13s$

Estimação de G (K/s) com o KF em n=454

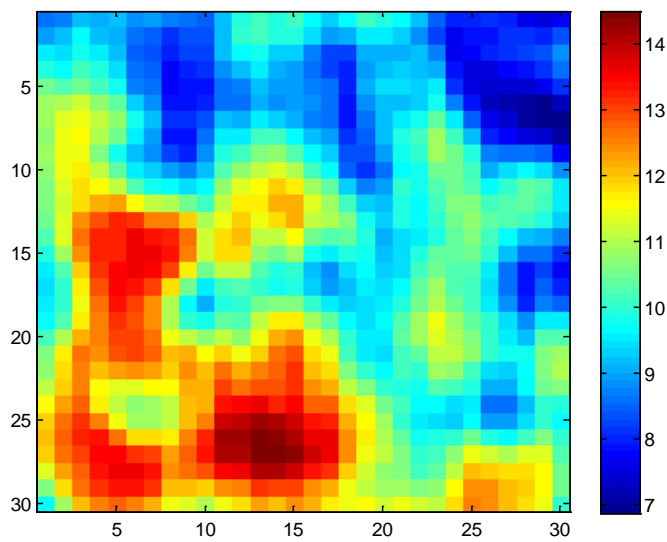


Figura 5-81 – Cartografia do termo fonte em  $t = 13s$

Campo de temperatura em n=300

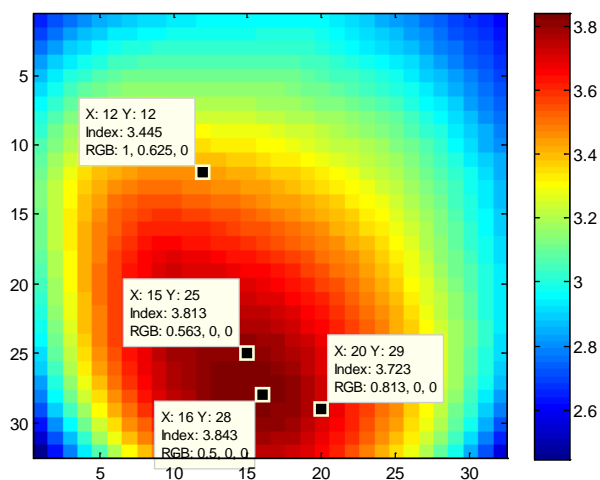
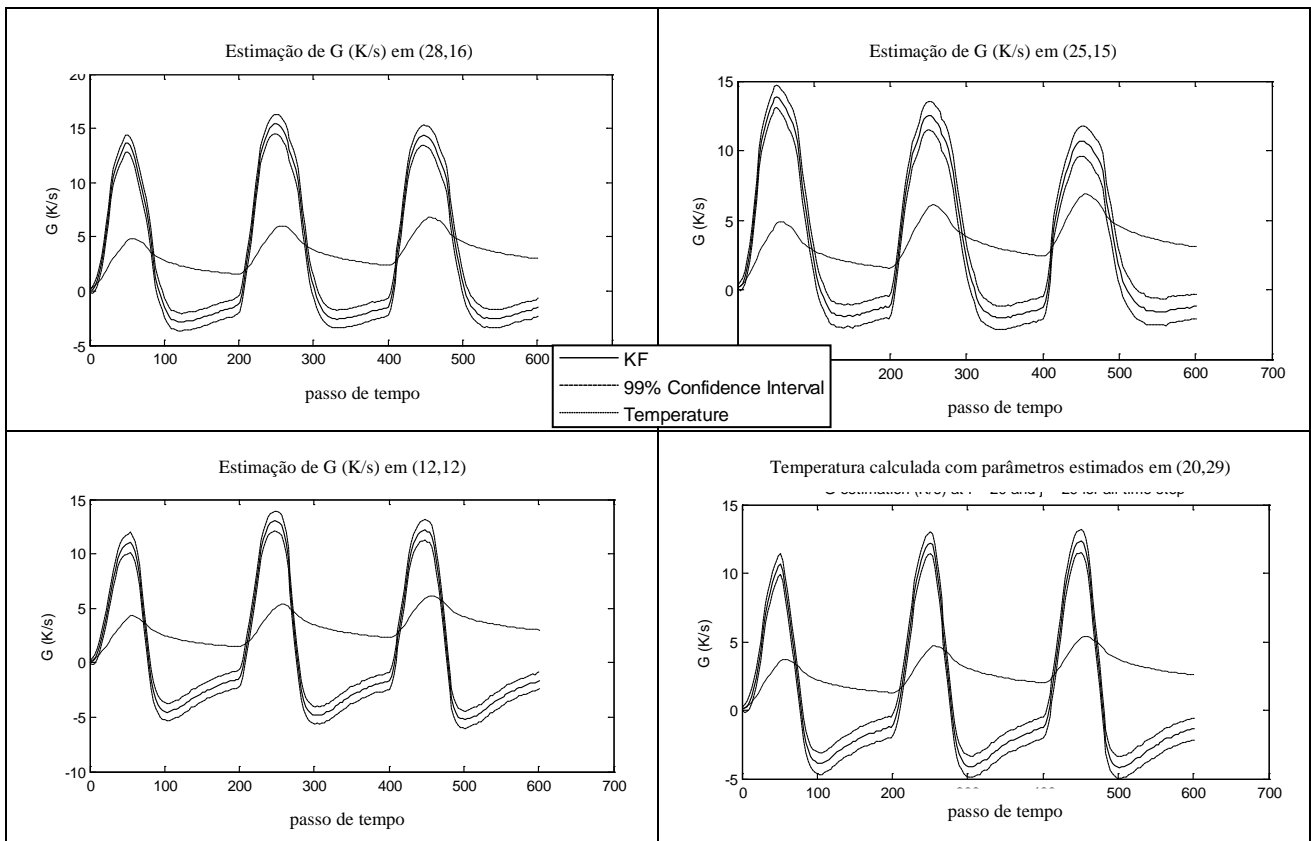


Figura 5-82 - Pontos escolhidos para traçar os resultados de  $G_{i,j}^n$

A Figura 5-83 mostra que o início e fim do tempo no qual o termo fonte incide na amostra, está com excelente concordância com o aquecimento e resfriamento do perfil de temperatura medido com a câmera. Os resultados para a magnitude do termo fonte estão de acordo com o método de MCMC para o problema inverso do tipo I (seção 5.4.2, Figura 5-59). Para o caso da forma senoidal, o vale da função não foi bem estimado, pois nesses pontos o termo fonte era nulo, o que não fornecia um sinal suficiente para a estimação.



**Figura 5-83 - Termo fonte estimado em pixels particulares comparados com o perfil de temperatura.**

O tempo computacional para a solução do problema inverso com o filtro de Kalman foi da ordem de 5 minutos.

Para o experimento com um pulso de energia a matriz de temperaturas é discretizada em  $a_i = a_j = 32$  nós internos e 881 passos de tempo. Os valores do parâmetro  $G_m^n$  foram então estimados para cada um desses nós e passos de tempo. Cada pixel representa uma área de  $78.1 \times 78.1 \mu\text{m}$ , de maneira que as dimensões da parte cortada na imagem da placa são  $L_x = L_y = 0.00249 \text{ m}$ . O tempo final foi de 4.4s, e o passo de tempo foi de 0.005 s.

As Figuras 5-84a-b apresentam as distribuições de temperatura no passo de tempo 379, em  $t = 1.9\text{s}$ , e os pontos na figura escolhidos para serem estudados, respectivamente. Para as figuras que apresentam os resultados em pixels particulares, estes foram escolhidos de acordo com a Figura 5-84b.

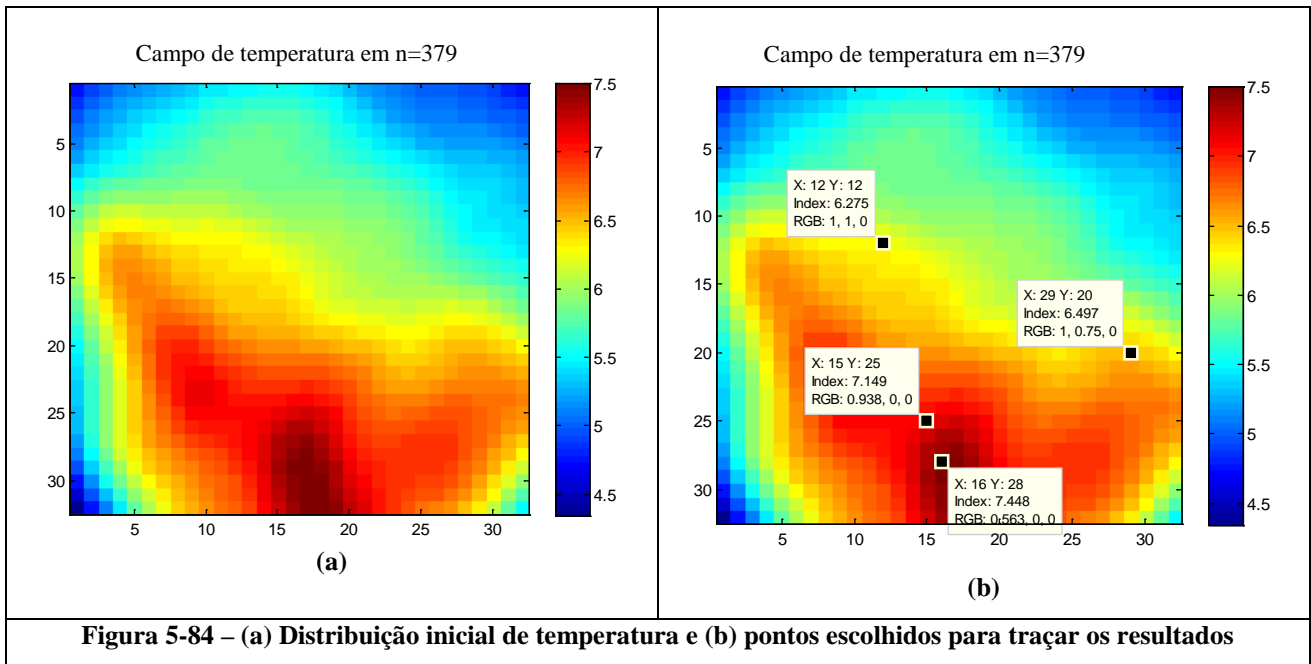
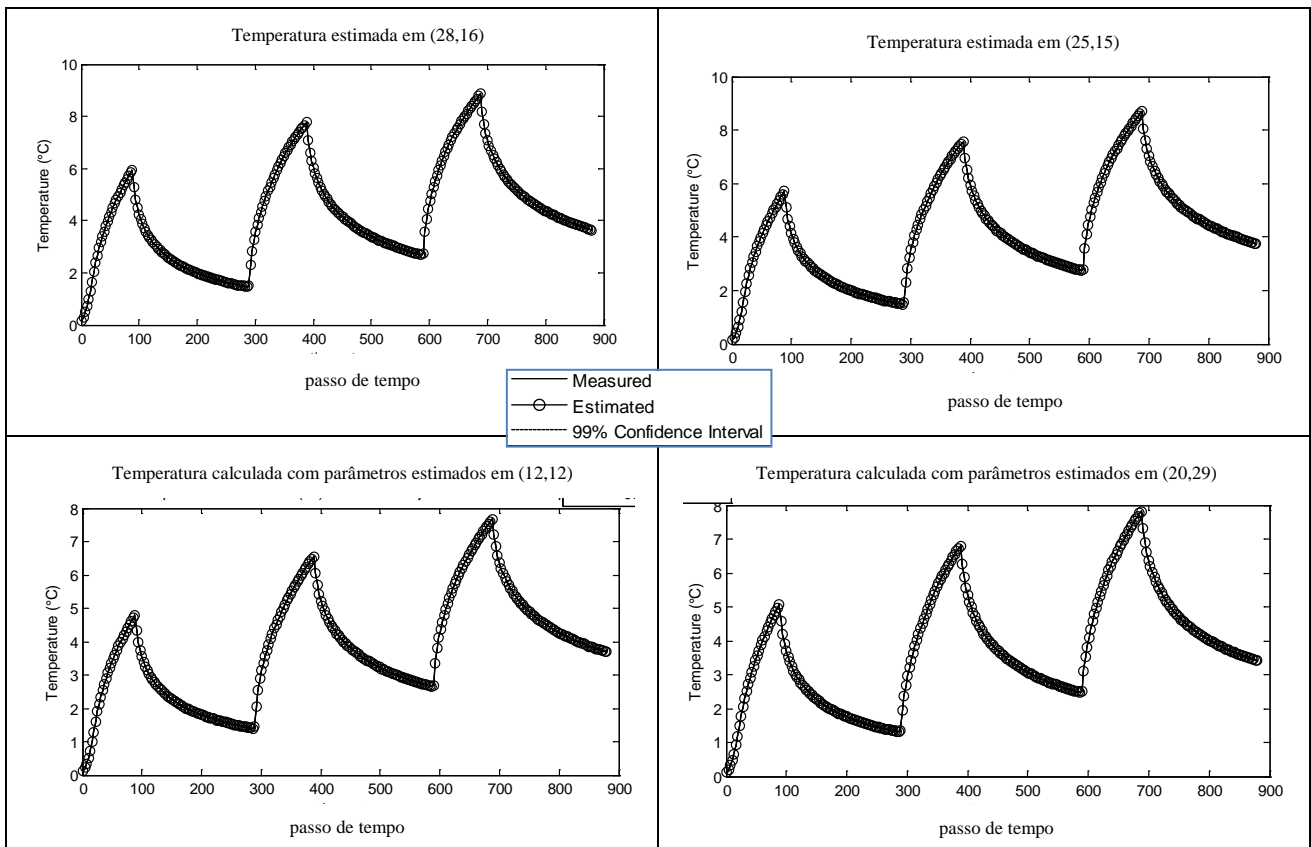


Figura 5-84 – (a) Distribuição inicial de temperatura e (b) pontos escolhidos para traçar os resultados

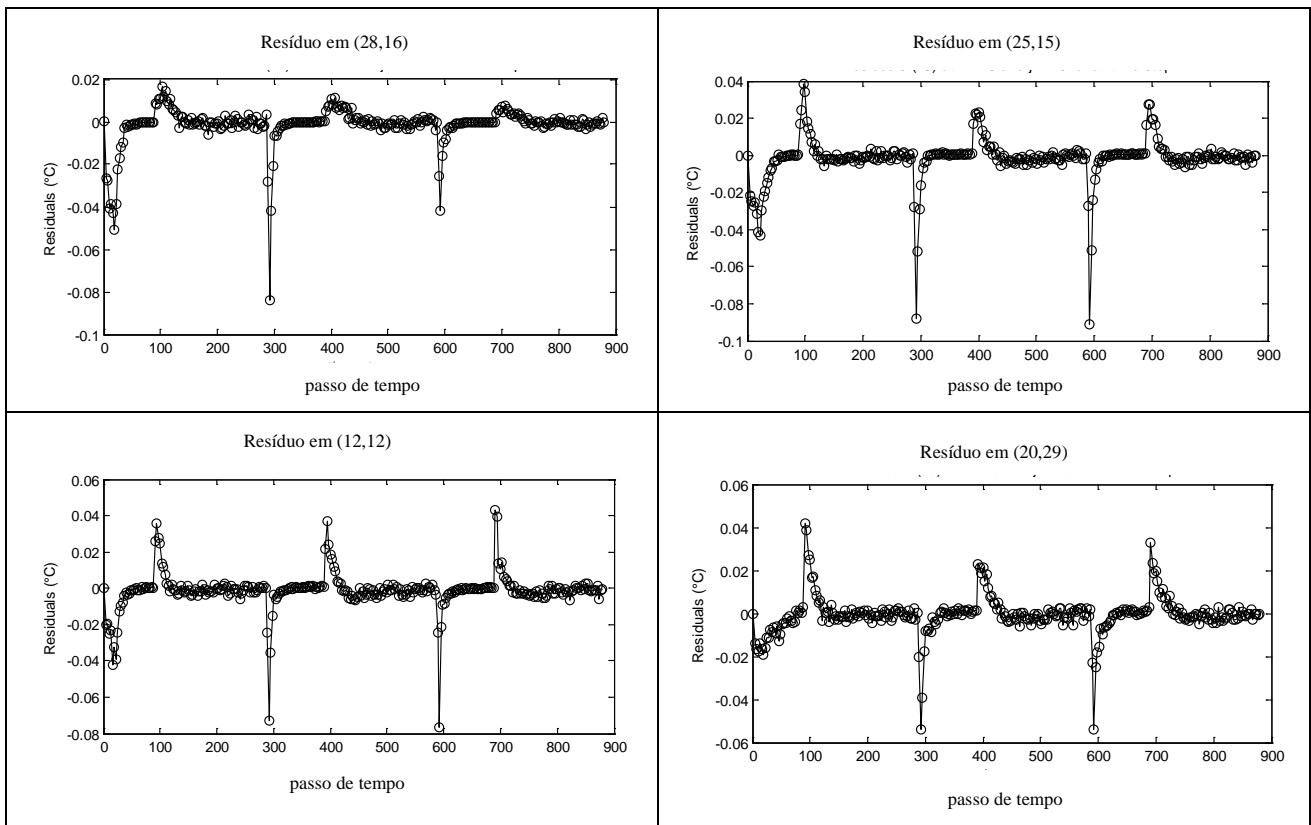
Os valores de  $G_m^0$  em  $t = 0$  s são considerados como tendo uma distribuição Gaussiana com média conhecida e com desvio padrão de 60% da média. O desvio padrão para o modelo de evolução para  $G_m^{k+1}$  (que é considerado seguindo um passeio aleatório, Equação (4.62)) foi considerado como 60% da média do parâmetro estimado no passo de tempo anterior, isto é,  $0.6G_m^k$ , e as variâncias do modelo de evolução para  $T_m^{k+1}$  foram calculadas de acordo com a Equação (4.61). As incertezas no conhecimento de  $H_{ij}$  e  $\alpha$  são levadas em conta no modelo de evolução através da matriz  $Q_p^k$  (Equação (4.61)). Os desvios-padrões de  $H$  e  $\alpha$  são considerados sendo 0.001 1/s e 0.001 m<sup>2</sup>/s, respectivamente.

As Figuras 5-85 apresentam as comparações das temperaturas exata e a estimada nas posições  $(i = 28, j = 16)$ ,  $(i = 12, j = 12)$ ,  $(i = 15, j = 25)$  e  $(i = 20, j = 29)$ , que correspondem a  $(x = 0.00219$  m,  $y = 0.00125$  m),  $(x = 0.00094$  m,  $y = 0.00094$  m),  $(x = 0.00117$  m,  $y = 0.00195$  m) e  $(x = 0.00156$  m,  $y = 0.00226$  m), respectivamente. As temperaturas estimadas foram obtidas com o filtro de Kalman. Os intervalos de confiança de 99% também estão representados nessas figuras. A melhora na estimativa da temperatura comparada com as medidas experimentais não pôde ser observada.



**Figura 5-85 - Variações de temperatura em pixels particulares**

As Figuras 5-84 apresentam os resíduos entre as temperaturas medidas e estimadas nos mesmo pontos escolhidos para as Figuras 5-85. As Figuras 5-86 mostra que as temperaturas estimadas estão com excelente concordância com a temperatura exata.



**Figura 5-86 - Variação dos resíduos em pixels particulares**

A Figura 5-87 apresenta a distribuição espacial da estimação do termo fonte para o passo de tempo 454 ( $t = 2.27s$ ). Observa-se por essa figura que o termo fonte estimado está de acordo com o perfil de temperatura mostrado na Figura 5-84, onde a figura foi cortada levando em conta uma parte aquecida e uma parte não aquecida, resultado que é confirmado pela Figura 5-88.

Estimação de G (K/s) com o KF em n=454

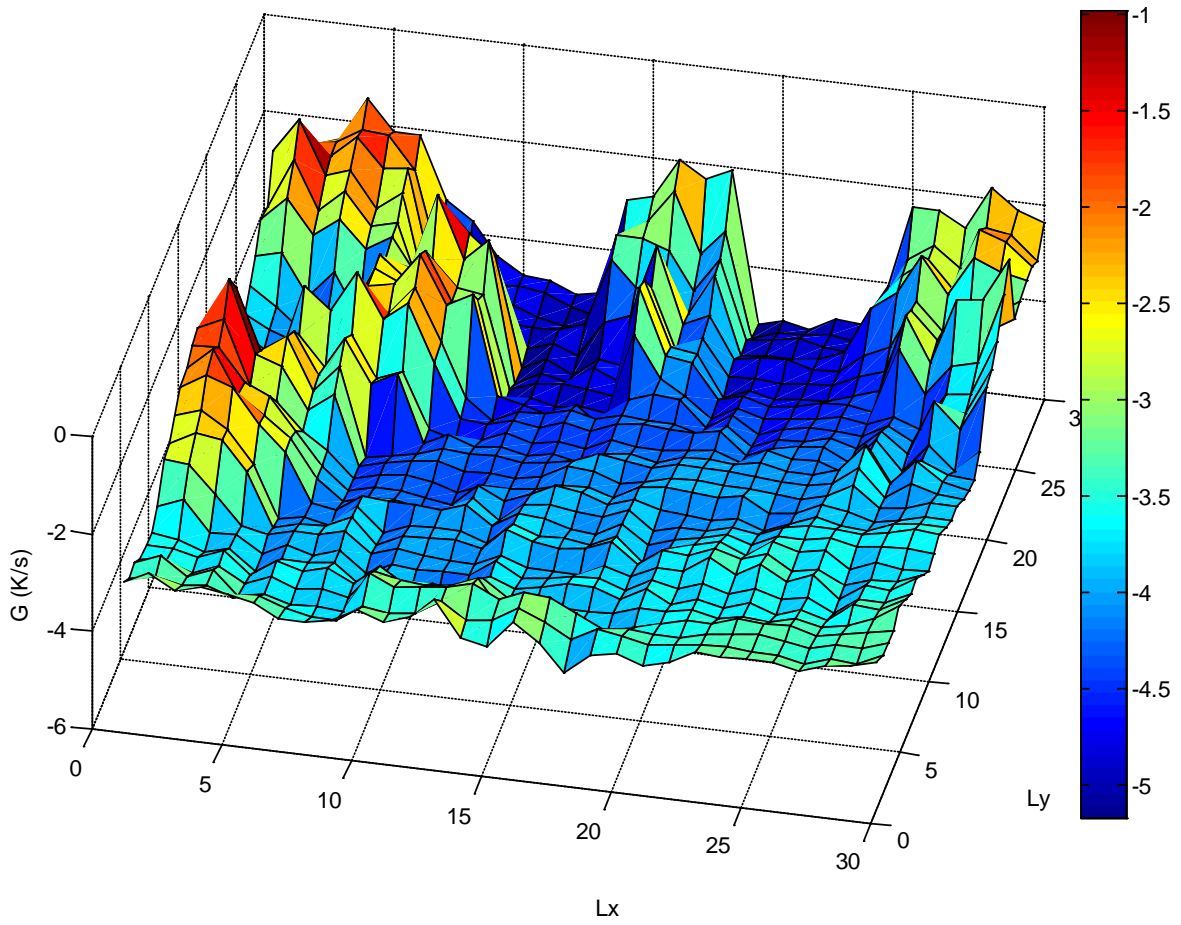


Figura 5-87 – Termo fonte estimado em todo o meio no tempo  $t=13s$

Estimação de G (K/s) com o KF em n=379

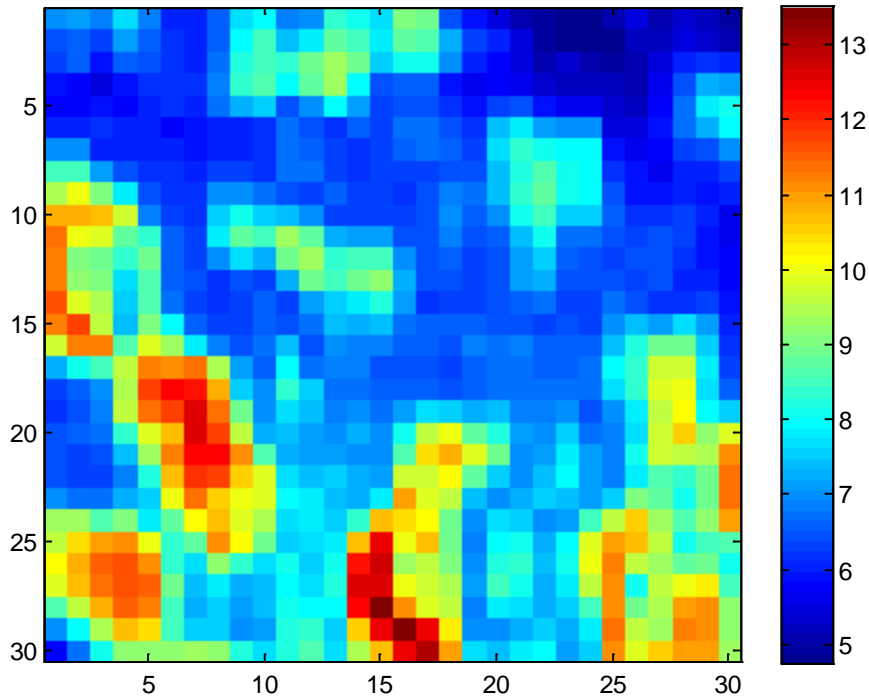


Figura 5-88 – Cartografia do termo fonte em  $t = 13s$

As Figuras 5-90 apresentam a evolução no tempo dos termos-fonte obtidos com o filtro de Kalman nas posições  $(i = 12, j = 12)$ ,  $(i = 15, j = 25)$ ,  $(i = 16, j = 28)$  e  $(i = 20, j = 29)$ , que correspondem a  $(x = 0.00094 \text{ m}, y = 0.00094 \text{ m})$ ,  $(x = 0.00117 \text{ m}, y = 0.00195 \text{ m})$ ,  $(x = 0.01245 \text{ m}, y = 0.00219 \text{ m})$  e  $(x = 0.02343 \text{ m}, y = 0.03397 \text{ m})$ , respectivamente. Estes pontos estão apresentados na Figura 5-89.

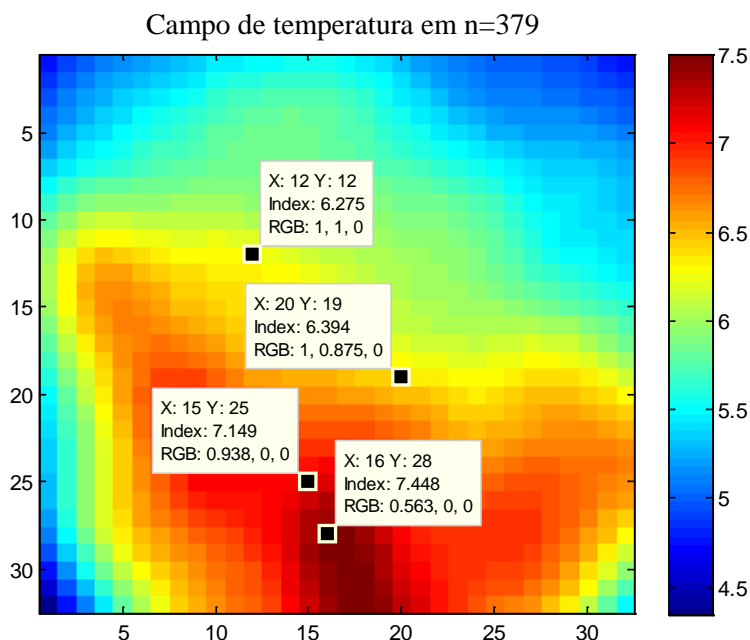
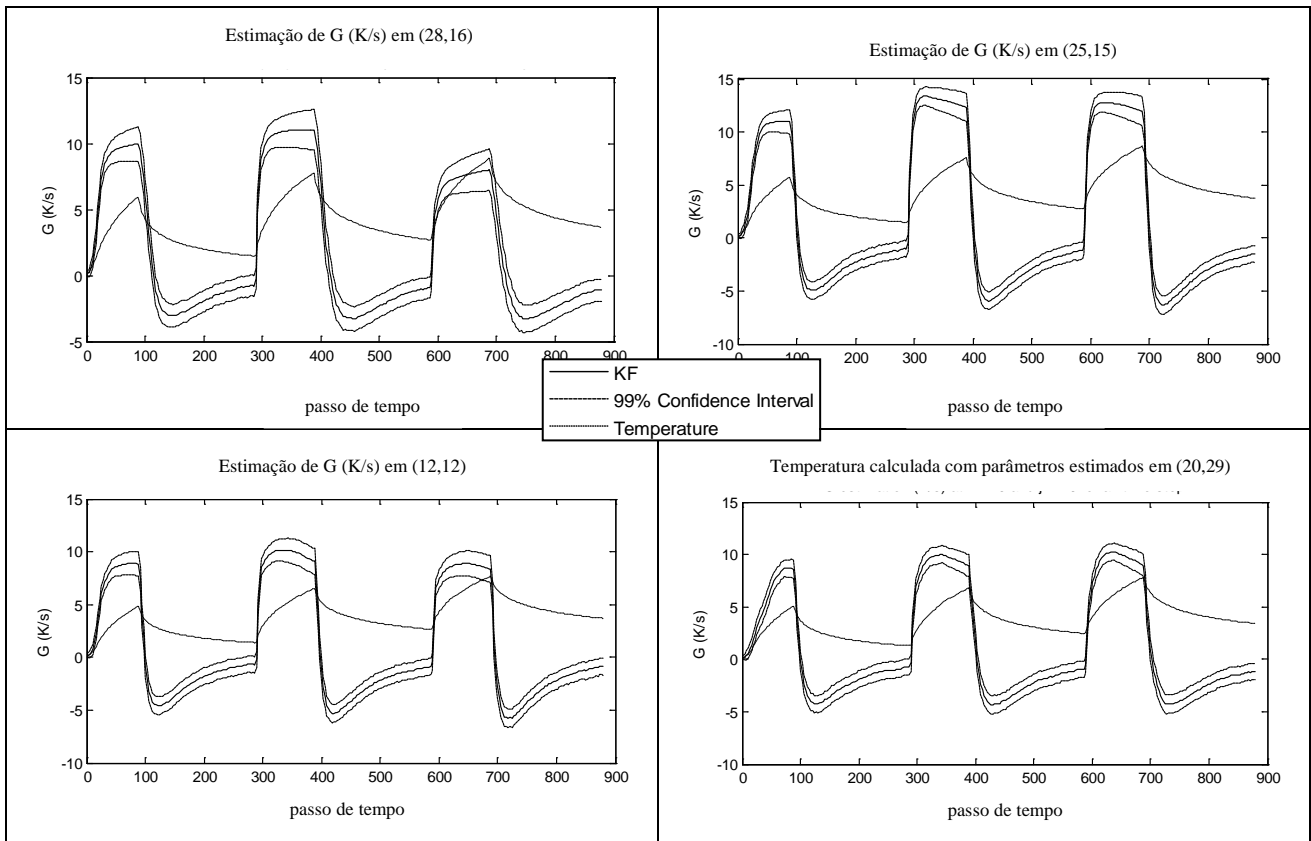


Figura 5-89 - Pontos escolhidos para traçar os resultados de  $G_{i,j}^n$

As Figuras 5-90 mostram que o início e fim do termo fonte obtido com o filtro de Kalman estão com excelente concordância com o aquecimento e resfriamento do perfil de temperatura medido com a câmera. Os resultados para a estimação do termo fonte estão de acordo com o método de MCMC para o problema inverso do tipo I (seção 5.4.2, Figura 5-59) e para o problema com o termo fonte senoidal (Figura 5-83).





**Figura 5-90 - Termo fonte estimado em pixels particulares comparados com o perfil de temperatura.**

O tempo computacional para a estimação dos parâmetros com o filtro de Kalman foi da ordem de 8 minutos.

A Tabela 5-5 apresenta de forma resumida os desvios padrões utilizados no modelo de evolução de estado para a estimação dos parâmetros desconhecidos, usadas no filtro de Kalman para o problema inverso do tipo II, no caso do aquecimento ter sido realizado com a resistência elétrica ou com o laser diodo e para os tipos de pulso impostos ao corpo de prova. Para os parâmetros  $\alpha_{i,j}$ ,  $H_{i,j}$  e  $G_{i,j}$ , o desvio padrão representa a incerteza usada no modelo de evolução de estados na forma de um passeio aleatório (Equação (4.62)), e no caso da temperatura o desvio padrão é feito pela propagação de incertezas devido às incertezas em  $\mathbf{J}^n$ ,  $\mathbf{T}^n$  e  $\mathbf{P}^n$  (Equação (4.61)).

**Tabela 5-5 Parâmetros usados para o filtro de Kalman para o problema inverso do tipo II**

Tipo de Pulso	Resistência elétrica		Laser diodo			
	Quadrado		Quadrado		Senoidal	
$\mathbf{P}$	$\sigma_{EE}$	$\sigma_{PI}$	$\sigma_{EE}$	$\sigma_{PI}$	$\sigma_{EE}$	$\sigma_{PI}$
$\alpha$ ( $\text{mm}^2\text{s}^{-1}$ )	0	0.001	0	0.001	0	0.001
$H_{i,j}$ ( $\text{s}^{-1}$ )	0	0.001	0	0.001	0	0.001
$G_{i,j}$ ( $\text{K/m}^1\text{s}^{-1}$ )	$0.6 G_{i,j}$	$0.6 G_{i,j}$	$0.6 G_{i,j}$	$0.6 G_{i,j}$	$0.6 G_{i,j}$	$0.6 G_{i,j}$

Na Tabela 5-5, o termo  $\sigma_{EE}$  representa o desvio padrão para o modelo de evolução de estado para a estimação dos parâmetros desconhecidos, e  $\sigma_{PI}$  representa o desvio padrão do parâmetro usado na propagação de incerteza para o modelo de evolução da temperatura. Estes valores não são iguais, pois neste trabalho somente o parâmetro  $G_{i,j}$  foi estimado entre os parâmetros em estudo, porém a incerteza no conhecimento de  $\alpha_{i,j}$  e  $H_{i,j}$  são levados em conta na propagação de incerteza para o modelo de evolução da temperatura. Desta forma, assume-se que existe uma incerteza associada ao conhecimento de  $\alpha_{i,j}$  e  $H_{i,j}$ , mas por outro lado, sabe-se com certeza que estes não variam no tempo.

A Tabela 5-6 apresenta de forma resumida os parâmetros usados para a malha espacial e os tempos de experimento, bem como o passo de tempo usado para a solução do problema inverso do tipo II para o caso dos experimentos feitos com o laser diodo e a resistência elétrica.

**Tabela 5-6 Parâmetros temporais e da malha para o problema inverso do tipo II**

Tipo de Pulso	Resistência elétrica	Laser diodo	
	Quadrado	Quadrado	Senoidal
( n° de pixels), ( $L_x, L_y$ , m)	(42,42), (0.0033, 0.0033)	(32,32), (0.00249, 0.00249)	(42,42), (0.0033, 0.0033)
dx ( $\mu\text{m}$ )	78.1	78.1	78.1
K (passos de tempo) (s)	(1912), (19.12)	(379), (4.4)	(604), (3.02)
dt (s)	0.01	0.005	0.005

## 6. Conclusões

O presente trabalho visou a determinação de propriedades termofísicas e termos-fonte em meios cujas propriedades variam espacialmente e um termo fonte variando também temporalmente. A solução do problema inverso foi reescrita para a aplicação com a estratégia nodal. As medidas de temperatura foram feitas com a câmera por infravermelho, e o procedimento de filtragem das imagens se mostrou indispensável para que os parâmetros fossem corretamente estimados.

A metodologia para a solução do problema direto por diferenças finitas foi devidamente verificadas através do método de volumes finitos, com erros percentuais máximos da ordem de 0.04 %.

Para a verificação da solução do problema inverso do tipo I foram testados casos de materiais heterogêneos e simulando uma falha, todos sob o efeito de um termo fonte constante no tempo. Para a verificação do problema inverso do tipo II, um termo fonte variando no tempo em um material homogêneo foi usado. Em todos os casos, as metodologias foram devidamente verificadas, com excelente concordância entre os parâmetros de referência e os estimados pelos métodos estudados.

Para o problema inverso do tipo I com o aquecimento pela resistência elétrica, os resultados experimentais com a estimação feita com o método MCMC apresentaram resultados com uma dispersão da ordem de 5% menor que o método OLS para todos os pixels. Para cada pixel estimado, o método MCMC também foi melhor, com desvios-padrão da ordem de  $8 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$  para o método OLS e da ordem de  $5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$  para o método MCMC. O método MCMC apresentou valores médios da difusividade térmica 4.5% maiores que os valores de referência para a difusividade térmica, enquanto o método OLS apresentou valores 7% maiores. Para o aquecimento com o laser diodo, a dispersão em toda a matriz de parâmetros estimados foi menor para o método de OLS. Porém, esse fato é explicado pela compensação de possíveis efeitos tridimensionais pela estimação de valores irrealistas para o parâmetros  $H_{i,j}$ . Como o método de MCMC apresenta uma restrição do valor máximo estimado, este não apresentou nem valores negativos, e nem valores com ordens de grandeza extremamente elevadas, como foi o caso do método OLS. Dessa forma, a maneira para compensar os efeitos tridimensionais para o método MCMC foi a estimativa de valores de difusividade térmica longe do valor de referência. Ainda assim o valor médio da difusividade estimada pelo método MCMC foi 1.4 vezes maior que o valor de referência, e 2.1 vezes maior para o método OLS. A estimação do termo-fonte com o método MCMC se mostrou mais suave e detalhada do que com o método OLS.

Ainda com relação ao problema inverso do tipo I, o experimento feito com a resistência elétrica apresentou resultados da difusividade estimada mais próximos da média do que o experimento com

o laser diodo. Além disso, o experimento com a resistência apresentou menores dispersões no meio e maior precisão para os parâmetros estimados em cada pixel. A melhor estimativa com a resistência elétrica deve-se à maneira como o corpo de prova é aquecido. Conforme demonstrado nas figuras para a estimativa de  $G_{i,j}$ , o aquecimento pela resistência elétrica é mais homogêneo, enquanto o aquecimento com o laser diodo apresenta diversos pontos onde o aquecimento é mais forte, provavelmente devido à variações não visíveis de emissividade do material.

Para o problema inverso do tipo II as matrizes experimentais de temperatura tiveram seu tamanho drasticamente reduzido. Isto se deve ao tamanho do vetor de estados, que inclui não somente os parâmetros, mas também as próprias temperaturas em cada pixel.

Para o aquecimento pela resistência elétrica as temperaturas estimadas pelo filtro de Kalman apresentaram excelente concordância com a temperatura medida, com resíduos da ordem de 2% da máxima temperatura atingida pelo meio. A forma do termo-fonte está coerente com o que foi aplicado. A amplitude de  $G_{i,j}^n$  está de acordo com o que foi calculado pelos dados da resistência elétrica, e também pela estimativa com o método de MCMC para o problema inverso do tipo I.

Para o aquecimento com o laser diodo as temperaturas estimadas pelo filtro de Kalman também apresentaram excelente concordância com a temperatura medida, com resíduos da ordem 1% da máxima temperatura atingida no meio. A forma do termo-fonte está coerente com o que foi aplicado, tanto para o caso da senóide, como para o caso do pulso em degrau. A amplitude está de acordo com o que foi estimado com o método de MCMC para o problema inverso do tipo I.

Em todos os casos com medidas reais, o passo no espaço foi da ordem de  $80 \mu\text{m}$ , o que confirmou a capacidade da técnica apresentada nesta tese de prover a estimativa de parâmetros e termos-fonte para sistemas em micro-escala. A maior área dentre os casos-teste apresentados foi de  $64 \text{ mm}^2$  para o problema inverso do tipo I com aquecimento por laser diodo, e a menor foi de  $6.25 \text{ mm}^2$  para o problema inverso do tipo II com aquecimento por laser diodo.

Tendo em vista a enormidade de dados experimentais gerados pela câmera a estratégia nodal mostrou-se uma ferramenta eficiente e confiável para a determinação de propriedades termofísicas e termos-fonte, acelerando de forma significativa a solução do problema inverso, por tratar de um problema de estimativa linear para cada pixel. A formulação por parâmetros concentrados permitiu uma aproximação para um problema bidimensional de solução mais rápida do que um problema tridimensional. Trabalhos futuros visam a implementação da formulação por parâmetros concentrados aperfeiçoado (*improved lumped*), onde o gradiente de temperatura em  $z$  é calculado de forma aproximada ao invés de admitir que ele seja nulo. Também foi mostrada a sua aplicação à solução de problemas inversos utilizando métodos que se enquadram dentro da teoria estatística Bayesiana, como o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov e o filtro de Kalman.



## 7. Referências Bibliográficas

BALAGESAS, D. L., “Thickness or diffusivity measurements from front-face flash experiments using the TSR (thermographic signal reconstruction) approach”, *10th International Conference on Quantitative InfraRed Thermography*, QIRT 2010-011, Quebec, 2010. Disponível em <http://qirt.gel.ulaval.ca/archives/qirt2010/papers/QIRT%202010-011.pdf>. Acessado em 07/12/2011

BAMFORD, M., 2007, Méthode Flash et Thermographie Infrarouge pour la Cartographie de Propriétés Thermophysiques : Application à la Caractérisation en Thermomécanique, Dissertação de Doutorado, Université de Bordeaux I, Bordeaux, França.

BAMFORD M., BATSALE J. C., FUDYM O., E REUNGOAT D., “Simultaneous velocity and diffusivity mapping in the case of 3-D transient heat diffusion: heat pulse thermography and IR image sequence analysis”, *Quantitative Infra Red Thermography Journal* (2008), pp. 97-126.

BAMFORD M., BATSALE J. C., E FUDYM O., 2009, “Nodal and modal strategies for longitudinal thermal diffusivity profile estimation: Application to the non destructive evaluation of SiC/SiC composites under uniaxial tensile tests”, *Infrared Physics & Technology* , pp. 1-13.

BATSALE, J.C., BATTAGLIA, J.L., FUDYM, O., 2004, “Autoregressive algorithms and spatially random flash excitation for 3D non destructive evaluation with infrared cameras”, *Quantitative InfraRed Thermography*, v.1/1, pp. 5-20.

BECK, J. V., BLACKWELL, B., e HAJI-SHEIKH, A., 1996, “Comparison of some inverse heat conduction methods using experimental data”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 39, No 17, pp. 3649-3657.

BECK, J.V., e ARNOLD K.J., *Parameter Estimation in Engineering and Science*, John Wiley & Sons, New York, 1977.

BUREL, G., *Introduction au Traitement d'Images - Simulation sous Matlab*, Hermes Sciences Publicat., Paris, 2001

CHENG, W., FU, C.L., QIAN, Z., 2007, “A modified Tikhonov regularization method for a spherical symmetric three-dimensional inverse heat conduction problem”, *Mathematics and computers in simulation* , v. 75, pp.97-112.

CHOI, S. U. S., 1998. “Nanofluid technology: Current Status and Future Research.”, *Korea-U.S. Technical Conference on Strategic Technologies*, Vienna, VA (US).

CHUDZIK, S., no prelo, “Measurement of thermal parameters of a heat insulation material using infrared thermography”, *Infrared Physics & Technologie*.

DOUCET, A., FREITAS, N. GORDON, N., *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Springer, New York, 2001.

FUDYM, O., ORLANDE, H.R.B., BAMFORD, M., BATSALE, J.C., 2008, "Bayesian approach for thermal diffusivity mapping from infrared images with spatially random heat pulse heating", *Journal of Physics: Conference Series*, pp. 012-042.

GAMERMAN, D., 1996, Simulação Estocástica via Cadeias de Markov, Associação Brasileira de Estatística, Rio de Janeiro.

GREWAL, M. S. e ANDREWS, A., 2001, Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB, John Wiley & Sons

GUSTAFSSON, S. E., 1991, "Transient plane source techniques for thermal conductivity and thermal diffusivity measurements of solid materials", *Rev. Sci. Instrum.*, vol. 62(3), pp. 797-804

HAIN, M., BARTL, J., JACKO, V., 2005, "The use of infrared radiation in measurement and non-destructive test", *Measurement science review*, vol.5, sec.3, pp.10-14.

HASTINGS, W.K., 1970, "Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their application", *Biometrika*, v. 57, pp. 97-109.

HON, Y., WEI, T., 2004, "A fundamental solution method for inverse heat conduction problem" *Engineering Analysis with boundary Elements*, v. 28, pp. 489-495.

JANG, S. S., JOSEPH, B., e MUKAI, H., 1986, "Comparison of Two Approaches to On-Line Parameter and State Estimation of Nonlinear Systems", *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, v. 25, pp. 809-814

JIU, C.C. e JANG, H. Y., 1998, "Experimental investigation in inverse heat conduction problem", *Numerical Heat Transfer, Part A*, v. 34, pp. 75-91.

KAPIO, J., e SOMERSALO, E., 2004a, Computational and Statistical Methods for Inverse Problems, Springer

KAPIO, J. e SOMERSALO, E., 2004b, Statistical and Computational Inverse Problems, *Applied Mathematical Sciences* 160, Springer-Verlag.

KAPIO, J., DUNCAN, S., SEPPANEN, A., SOMERSALO, E., AND VOUTILAINEN, A., *State Estimation*, in *Process Imaging for Automatic Control*, D. M. Scott and H. McCann eds., CRC Press, Boca Raton, 2005, pp. 207-236.

KALMAN, R.E., "A new approach to linear filtering and prediction problems", *ASME Journal of Basic Engineering* (1960), pp. 35-45.

KWON, P., SCHIEMANN, T., KOUNTANYA, R., 2001, "An inverse estimation scheme to measure steady-state tool-chip interface temperatures using an infrared camera", *Int. Journal of Machine Tools & Manufacture*, v. 41, pp. 1015-1030.

LE NILIOT, C., GALLET, P., 1998, "Infrared Thermography Applied to the Resolution of Inverse Heat Conduction Problems: Recovery of Heat Line Sources and Boundary Conditions", *Rev. Gen. Therm.*, v. 37, pp. 629-643.

- LJUNG, L., System Identification: Theory for the User, *Prentice Hall*, 1999
- MASSARD H., FUDYM O., ORLANDE H. R. B., AND BATSALE J. C., "Nodal predictive error model and Bayesian approach for thermal diffusivity and heat source mapping", *Comptes Rendus Mécanique* (2010), pp. 434-449
- MASSARD, H., ORLANDE, H.R.B., FUDYM, O., "Estimation of position-dependent transient heat source with the Kalman Filter", no prelo
- MAYBECK, P., 1979, Stochastic models, estimation and control, *Academic Press*, New York.
- MAO, L., UDAYKUMAR, H.S., KARLSSON, J. O. M., 2003, "Simulation of micro-scale interaction between ice and biological cells", *Int. J. Heat Mass Trans.*, 46, pp. 5123-5136.
- MOTA, C.A.A., 2007, "Estimativa simultânea do fluxo de calor e de propriedades termofísicas de materiais em altas temperaturas", Dissertação de D.Sc., UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
- NAVEIRA-COTTA, C.P., COTTA, R.M., ORLANDE, H.R.B., "Inverse analysis with integral transformed temperature fields: Identification of thermophysical properties in heterogeneous media", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, (2011), v. 54, pp. 1506-1519
- NOBREGA, P.H.A., ORLANDE, H.R.B., BATTAGLIA, J.L., 2011, "Bayesian estimation of thermophysical parameters of thin metal films heated by fast laser pulses", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 38, pp. 1172-1177
- ORLANDE, H.R.B., COLAÇO, M.J., DULIKRAVICH, G.S., VIANNA, F.L.V., SILVA, W.B., FONSECA, H.M, FUDYM, O., *Advanced Spring School: Thermal Measurements & Inverse Techniques 5<sup>th</sup> edition*, Roscoff, 2011a
- ORLANDE, H.R.B., COLAÇO, M.J., DULIKRAVICH, G.S., VIANNA, F.L.V., SILVA, W.B., FONSECA, H.M, FUDYM, O., 2011b, "State Estimation Problems in Heat Transfer", *International Journal for Uncertainty Quantification*, no prelo.
- ORLANDE, H.R.B., FUDYM, O., FONSECA, H.M., SEPULVEDA, F., "Kalman filtering for thermal diffusivity and transient source term mapping from infrared images", *Inverse Problems, Design and Optimization Symposium, João Pessoa*, 2010
- ORLANDE, H. R. B., "Inverse Problems In Heat Transfer: New Trends In Solution Methodologies And Applications", *ASME Journal of Heat Transfer*, no prelo
- ORLANDE, H. R. B., DULIKRAVICH, G., COLAÇO, M.J., "Application of Bayesian Filters to Heat Conduction Problems" *EngOpt 2008 - International Conference on Engineering Optimization, Rio de Janeiro, 2008*.
- OZISIK, M. N., 1990. *Heat Transfer: A Basic Approach*, 1st edition, Editora Guanabara Koogan, Rio de Janeiro.
- OZISIK, M.N., ORLANDE, H. R. B., 2000. *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*, Taylor & Francis, New York.



PARKER, W., JENKINS, R., BUTLER, et al., 1961. "Flash Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity and Thermal Conductivity", *J. Applied Physics*, vol. 32, 9, pp. 1679-1684.

PRADERE, C., JOANICOT, M., BATSALE, J.C., TOUTAIN, J., GOURDON, C., 2004, "Processing of temperature field in chemical microreactors with infrared thermography", *Quantitative InfraRed Thermography*, v.3/1, pp. 117-135.

PRADERE C., TOUTAIN J., BATSALE J. C. , MORIKAWA J., HAYAKAWA E., AND HASHIMOTO T., *9th International Conference on Quantitative Infra Red Thermography*, Krakow - Poland, 2008

RISTIC, B., ARULAMPALAM, S., e GORDON, N., *Beyond the Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications*, Artech House, 2004.

SOLÓRZANO E., REGLERO J.A., RODRÍGUEZ-PÉREZ M.A., LEHMHUS D., WICHMANN M., DE SAJA J.A., 2008, "An experimental study on the thermal conductivity of aluminium foams by using the transient plane source method" *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 51, pp.6259-6267.

SORENSEN, H. W., "Least-squares estimation: from Gauss to Kalman", *IEEE Spectrum* (1970), pp. 63-68.

SU, J., NETO, A.J.S., 2001, "Two-dimensional inverse heat conduction problem of source strength estimation in cylindrical rods", *Applied Mathematical Modeling*, v. 25, pp. 861-872.

TSAI, T. H., LIOU, D.S., KUO, L. S., CHEN, P.H., 2009, "Rapid mixing between ferro-nanofluid and water in a semi-active Y-type micromixer", *Sensor and Actuators A: Physical*, v.153, pp.267-273.

TUAN, P. C., JI, C.C., FONG, L.W., HUANG, W.T., 1996, "An input estimation approach to on-line two-dimensional inverse heat conduction problems", *Numerical Heat Transfer, Part B*, v. 29, pp. 345-363.

VOLLE, F., MAILLET, D., GRADECK, M., KOUACHI, A., LÉBOUCHÉ, M., 2009, "Practical application of inverse heat conduction for wall condition estimation on a rotatory cylinder", *Int. J. of Heat and Mass Transfer* , v. 52, pp.210-221.

WANG, J., ZABARAS, N., 2004a, "A Bayesian inference approach to the inverse heat conduction problem", *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v. 47, pp.3927-3941.

WANG, J., ZABARAS, N., 2004b, "A computational Statistics Approach to Stochastic Inverse Problems and Uncertainty Quantification in Heat Transfer", *WCCM VI/APCOM'04, sept 5-10, Beijing, China*

WANG, J., NETO, A.J.S., NETO, F. D. M., SU J., 2002, “Function estimation with Alifanov’s iterative regularization method in linear and nonlinear heat conduction problems”, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 26, pp. 1093-1111.

WANG, J., ZABARAS, N., 2005, “Hierarchical Bayesian models for inverse problems in heat conduction”, *Inverse problems*, v. 21, pp. 183-206.

WELCH, G., E BISHOP, G., “An Introduction to the Kalman Filter”, (2006). Disponível em [http://www.cs.unc.edu/~welch/media/pdf/kalman\\_intro.pdf](http://www.cs.unc.edu/~welch/media/pdf/kalman_intro.pdf).