Université de Poitiers

THÈSE

Pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS
UFR des sciences fondamentales et appliquées
Laboratoire de mathématiques et applications - LMA (Poitiers)
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École doctorale : Sciences et ingénierie pour l'information, mathématiques - S2IM (Poitiers)
Secteur de recherche : Mathématiques et leurs interactions

Présentée par :
Florent Nguema Ndong

Étude de la dynamique symbolique des développements en base négative, système de Lyndon

Directeur(s) de Thèse :
Anne Bertrand Mathis

Soutenue le 26 septembre 2013 devant le jury

Jury :

Président	**Anne Siegel**	Directeur de recherche CNRS, INRIA Rennes
Rapporteur	**Taizo Sadahiro**	Professor, Tsuda College, Tokyo
Rapporteur	**Yann Bugeaud**	Professeur des Universités, Université de Strasbourg
Membre	**Anne Bertrand Mathis**	Professeur des Universités, Université de Poitiers
Membre	**Julien Michel**	Professeur des Universités, Université de Poitiers
Membre	**Lingmin Liao**	Maître de conférences, Université de Créteil
Membre	**Marc Peigné**	Professeur des Universités, Université de Tours

Pour citer cette thèse :
Florent Nguema Ndong. *Étude de la dynamique symbolique des développements en base négative, système de Lyndon* [En ligne]. Thèse Mathématiques et leurs interactions. Poitiers : Université de Poitiers, 2013. Disponible sur Internet <http://theses.univ-poitiers.fr>

THÈSE

pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)

(Diplôme National-Arrêté du 7 août 2006)

Ecole Doctorale **Sciences et Ingénierie pour l'Information et Mathématiques**

Secteur de Recherche: **Mathématiques et leurs Intéractions**

présentée par

Florent NGUEMA NDONG

****

Etude de la Dynamique Symbolique des Développements en Base Négative, Système de Lyndon

****

Directeur de thèse : **Anne BERTRAND MATHIS**

Soutenue le 26 septembre 2013

devant la Commission d'Examen

Jury

M. BUGEAUD Yann	Professeur, Université de Strasbourg	Rapporteur
M. SADAHIRO Taizo	Professeur, Tsuda College Tokyo	Rapporteur
Mme SIEGEL Anne	Directeur de Recherches CNRS, INRIA Rennes	Examinateur
M. MICHEL Julien	Professeur, Université de Poitiers	Examinateur
M. PEIGNÉ Marc	Professeur, Université de Tour	Examinateur
M. LIAO Lingmin	Maître de Conférence, Université Paris-Est Créteil	Examinateur
Mme BERTRAND Anne	Professeur, Université de Poitiers	Directeur

Remerciement

Je voudrais profiter de cette occasion pour exprimer ma profonde gratitude à l'égard de ceux qui m'ont accompagné tout au long de ces années de thèse. Il me manque d'épithète afin de qualifier toute l'émotion qui m'anime. Ces quelques lignes ne sauraient suffire pour extérioriser ma reconnaissance.

Je tiens tout d'abord à remercier de tout mon cœur Anne Bertrand Mathis qui a accepté de m'encadrer et ce, depuis le mémoire de master 2. Je lui exprime la profonde reconnaissance de m'avoir fait partager ses compétences et expériences avec beaucoup de patience.

C'est un honneur que me font Taizo Sadahiro et Yann Bugeaud d'accepter d'être rapporteurs de ce mémoire malgré leurs occupations. Qu'ils trouvent en ces quelques mots l'expression de ma profonde considération.

Je tiens aussi à remercier Anne Siegel, Julien Michel, Marc Peigné, Lingmin Liao pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'être membres de mon jury.

J'adresse mes vifs remerciements à l'ensemble du Laboratoire de Mathématiques et Applications de l'université de Poitiers. J'exprime en particuliers ma gratitude à l'égard de Pierre Torasso qui m'a offert l'opportunité de poursuivre mes études à l'université de Poitiers, à Pol Vanhaeck grâce à qui j'ai intégré le LMA et je ne saurais oublier le personnel ITA/IATOSS : Brigitte Brault, Nathalie Mongin, Benoît Métrot, Nathalie Marlet et Jocelyne Attab.

Je saisis cette occasion pour remercier tout le personnel du SCD de l'université de Poitiers, en particulier Hélène, Armelle, Louise, Nadia (de la bibliothèque du futuroscope) et Frédéric Duton.

Mes chaleureux remerciements à Jean Chrétien et son épouse Brigitte. Dieu sait combien vos conseils m'ont toujours été précieux. Merci pour les encouragements et le soutien.

J'ai une pensé amicale à l'ensemble des doctorants du LMA : Appolinaire et Frédéric (avec qui j'ai partagé une bonne partie de mon cursus), Jules, Daniel, Kais, Hélène, Haidy, Claire, Anis, Guilnard, Paola, Hussein, Jasmine, Kevin, Ali, Caroline, Brice.

Je ne saurai achever cet exercice sans penser à l'État le Gabonais (qui a financé mes études) et au corps enseignant de l'Université de Masuku à qui je tiens à remercier. J'ai une pensée toute particulière à Guy Martial Nkiet, Octave Moutsinga, Bah Souleyman, Mba Yebe, Akiola, Mavoungou, Ngnigone, Nguema Pamphile, Abiale Abi et Alain Ondo.

J'adresse mes remerciements à la communauté gabonaise de Poitiers et au groupe Marie Reine des Cœurs (que je porterai toujours dans mon cœur) pour l'ambiance conviviale et fraternelle. En vous, j'ai trouvé deux nouvelles familles.

Sam et Lucie, Yoan et Sity, Joël et Chloé, Appo et Charlie, Francis et Ornélla, Christian, Pradel, Galiciat et Maillis, je me souviendrai toujours de vos visites au CHU et à mon domicile pendant ma convalescence. Des moments difficiles que je n'oublierai jamais.

Enfin, j'exprime ma profonde reconnaissance à l'égard de toute ma famille : mon défunt père Joseph, ma mère Émilienne, Maman Jacqui, Hélène, Marcel, Jean, Madeleine, Priscillia, Dany, Augustine et à toi Amaelle. Vous avez largement contribué à l'aboutissement de ce travail. Je dis Merci à Kevin More, Modeste Ndong (grand Mo), Christian Zuè Assoumou et à toute l'association AKAM'AYONG pour le soutien que vous m'avez toujours apporté.

Table des matières

Introduction

La question sur la représentation des nombres réels en base positive non entière a été introduite dans les années cinquante par Rényi (voire [Rén57]) et a longuement été développée aussi bien du point de vue de la théorie de mesure que de la théorie des nombres. Considérant un réel $\beta > 1$ (une base), tout nombre positif ou nul x peut s'écrire comme :

$$\sum_{i \geq n} \frac{x_i}{\beta^i}, \text{ avec } n \in \mathbb{Z}$$

où x_i est dans l'alphabet fini $\{0, 1, \cdots, \lfloor \beta \rfloor\}$. La suite $(x_i)_{i \geq n} = x_n x_{n+1} \cdots$ est alors une représentation de x en base β. Cependant, pour rendre effective la représentabilité de $\mathbb{R}$, il devient nécessaire d'introduire les bases négatives. C'est dans cette optique que Vittorio Grünwald introduisit les bases numériques négatives. Il y a par exemple le très connu **système négabinaire** (base - 2) utilisé par les polonais pour l'élaboration expérimentale de l'ordinateur BINEG. Plus récemment, Ito et Sadahiro dans [IS09] ont étendu l'approche de Vittorio Grünwald (dont le raisonnement se limitait aux seuls cas des bases entières) à toute base $-\beta < -1$ non entière : étant donné un réel $-\beta < -1$, tout nombre réel y peut se mettre sous la forme

$$\sum_{i \geq n} \frac{y_i}{(-\beta)^i}, \ n \in \mathbb{Z}$$

où $(y_i)_{i \geq n}$ est une suite sur l'alphabet $\{0, 1, \cdots, \lfloor \beta \rfloor\}$ (qui n'est pas à chiffre manquant, c'est-à-dire que si $q \neq 0$ est dans l'alphabet, $q - 1$ y est aussi). La suite $(y_i)_{i \geq n}$ est alors une représentation de y en base $-\beta$. Une façon classique de le montrer est d'utiliser un algorithme glouton. La représentation gloutonne ou algorithmique d'un nombre est unique et est appelée $(-\beta)$-développement ou développement en base

$-\beta$ (avec β strictement plus grand que 1).

Cette thèse est consacrée à l'étude des développements des nombres en base négative aussi bien du le point de vue de la dynamique symbolique que de la théorie ergodique. Pour conserver le concept de monotonie dans l'écriture des mots, on introduit une nouvelle relation d'ordre appelée *relation d'ordre alterné* et noté "$\prec$" . Pour $\beta > 1$ fixé, l'ordre alterné apparaît comme un outil de contrôlabilité des représentations en base négative. En effet, pour $\beta > 1$, il existe une suite $(d_i)_{i\geq 1}$ telle que pour toute représentation $(x_i)_{i\geq n}$ en base $-\beta$, on a

$$(d_i)_{i\geq 1} \preceq (x_i)_{i\geq k},\ n \in \mathbb{Z} \text{ et } \forall\ k \geq n\ .$$

En particulier,

$$(d_i)_{i\geq 1} \preceq (d_i)_{i\geq k},\ \forall k \geq 2\ .$$

Une telle suite $(d_i)_{i\geq 1}$ sera appelée mot de Lyndon pour la relation d'ordre alterné. Au chapitre I, nous accordons une attention particulière à ces mots. Nous faisons par exemple une étude détaillée des ensembles de suites dont toute sous-suite est contrôlée par un mot de Lyndon. On verra que l'ensemble des $(-\beta)$-développements s'obtient au moyen d'un mot de Lyndon qui n'est rien d'autre que le $(-\beta)$-développement de $-\frac{\beta}{\beta+1}$. Munissons $\{0, 1, \cdots, \lfloor\beta\rfloor\}^{\mathbb{Z}}$ de la topologie induite par la topologie discrète sur $\{0, 1, \cdots, \lfloor\beta\rfloor\}$. L'ensemble des $(-\beta)$-développements n'est pas fermé, sa fermeture est appelée $(-\beta)$-shift et n'en diffère que très peu. Muni du décalage, il sera notre principal cadre d'étude de la dynamique symbolique.

Dans le chapitre II, s'inspirant des travaux de F. Blanchard et G. Hansel dans [BH86, Bla89] et Anne Bertrand-Mathis ([BM88]), nous étudions l'unicité de la mesure ergodique d'entropie maximale sur le $(-\beta)$-shift. Celle-ci s'obtient grâce à l'existence d'un code préfixe récurrent positif (qui est construit selon la valeur de β). On voit notamment que le système est codé si le $(-\beta)$-développement de $-\frac{\beta}{\beta+1}$ est non périodique de période impaire et si $\beta \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Lorsque le $(-\beta)$-développement est périodique de période impaire, le système est réunion de deux ensembles dont l'un est engendré par un mot (ce sous-système ne peut donc porter une mesure invariante d'entropie non nulle) et l'autre éventuellement codé par un code préfixe récurrent positif. La périodicité n'a donc pas une grande incidence sur le $(-\beta)$-shift. Pour β strictement plus petit que le nombre d'or, le langage associé au $(-\beta)$-shift admet des mots intransitifs. Ils génèrent dans le système des cylindres de mesure nulle. Cet état de fait n'est pas sans répercussion sur l'intervalle $I_\beta = [-\frac{\beta}{\beta+1}, \frac{1}{\beta+1})$, image du $(-\beta)$-shift unilatéral par une certaine application continue f_β : le support de la mesure image par f_β de la mesure ergodique sur le $(-\beta)$-shift (unilatéral) n'est pas I_β. Ceci fait l'objet du chapitre III.

Le chapitre III, inspiré de [IS09] et [LS12], étudie le support de la mesure ergodique sur I_β. Pour β plus petit que le nombre d'or, les cylindres portés par les mots intransitifs sur le $(-\beta)$-shift engendrent sur I_β des intervalles de mesure nulle : c'est le phénomène de trous.

En 1965, M. Artin et B. Mazur ont introduit la notion de fonction zêta dynamique. Lépold Flatto et Jeffrey Lagarias (voir [Lag99]) ont appliqué ces résultats au cas de la β-transformation : $x \mapsto -\beta x - \lfloor x\beta \rfloor$ et au β-shift. Nous déterminons la fonction zêta du $-\beta$-shift à l'aide des codes préfixes récurrents positifs définis au chapitre II. Le résultat est une formule très simple.

Au chapitre V, nous étudions les systèmes de numérations des entiers relatifs en base négative. Nous montrons qu'un système de numération (alterné) raisonnable est attaché à un mot de Lyndon et qu'à certains $\beta > 1$ correspond un seul système, qu'aux β associés aux Lyndon périodiques correspondent une infinité de système.

Chapitre I

Présentation du bêta-shift négatif

1 système dynamique

1.1 Système dynamique topologique

1.1.1 Définition

Un **système dynamique topologique** est un couple (X, T) où X est un espace topologique et T une application continue de X dans lui-même.

Une partie A de X sera dite invariante par T ou T-invariante si $T^{-1}(A) = A$.

Soient (X, T), $(X^{'}, T^{'})$ deux systèmes dynamiques topologiques. On suppose qu'il existe une transformation surjective et continue ϕ de (X, T) dans $(X^{'}, T^{'})$ telle que $\phi \circ T = T^{'} \circ \phi$. On dit que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\phi"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\ X^{'} \arrow[r, "T^{'}"'] & X^{'} \end{tikzcd}$$

L'application ϕ est appelée *homomorphisme topologique* .

1.1.2 Entropie topologique

L'entropie topologique noté $h_{top}(T)$ est un invariant de conjugaison topologique qui a été introduit par R. L. Adler, A. G. Konheim et M. H. McAndrew pour les systèmes dynamiques sur un espace métrique compact. Elle compte le nombre d'orbites distinctes du système dynamique (X, T). Plus précisément, le nombre d'orbites de longueur n que l'on peut différencier à l'échelle ε est de l'ordre de $e^{nh_{top}(T)}$ pour des échelles ε arbitrairement petites.

Définition 1. *On appelle* **recouvrement ouvert** *de X une famille finie d'ensembles ouverts de X dont la réunion est X.*

Soit U un recouvrement ouvert fini. On pose

$$U^n := \{U_0 \bigcap T^{-1}U_1 \bigcap \cdots \bigcap T^{-(n-1)}U_{n-1} | U_0, \cdots, U_{n-1} \in U\}.$$

Définition 2. *Soit U un recouvrement ouvert de X. La quantité*

$$h_{top}(T, U) := \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \min\{\sharp W | W \subset U^n \ et\ W\ recouvre\ X\ \}.$$

L'entropie topologique $h_{top}(T)$ de T est alors le sup pris tous les recouvrements ouverts de X de $h_{top}(T, U)$.

$$h_{top}(T) = \sup_U h_{top}(T, U).$$

1.2 Système dynamique mesurable

1.2.1 Définition

Un **système dynamique mesurable** (respectivement mesuré) est la donnée d'un triplet (X, Γ, T) (respectivement, quadruplet (X, Γ, μ, T)) où (X, Γ) est un espace mesurable (respectivement, (X, Γ, μ) un espace mesuré).

Soient (X_1, Γ_1, μ_1) et (X_2, Γ_2, μ_2) deux espaces mesurés (X_i un ensemble, Γ_i une tribu de partie de X, μ_i une mesure sur (X_i, Γ_i)) et T une application mesurable de (X_1, Γ_1, μ_1) dans (X_2, Γ_2, μ_2). On dit que T préserve la mesure si

$$\forall B \in \Gamma_2,\ \mu_1(T^{-1}B) = \mu_2(B).$$

1.2.2 Entropie métrique

L'entropie métrique est un invariant de conjugaison mesurable. Cet invariant, inspiré des travaux de Shannon sur la théorie de l'information, a été introduit par Kolmogorov et Sinai dans l'optique d'étudier la conjugaison des décalages de Bernoulli.

Commençons par présenter le cadre mathématique dans lequel nous nous situons. Soit $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ un espace de probabilité et T une application mesurable μ-invariante représentant la loi d'évolution d'un système dynamique à temps discret sur l'espace des phases X. Partant d'un point x de X, on définit la suite des itérés par : x, $T(x)$, $T^2(x), \cdots, T^n(x), \cdots$. L'ensemble $\{T^n(x)|n \geq 0\}$ s'appelle *orbite de* x. Étant donné une partition finie α mesurable de X, et A un sous-ensemble mesurable de X. On appelle *information donnée par* A le réel :

$$I(A) = -\log \mu(A).$$

L'entropie correspond à la quantité moyenne d'information apportée. On définit de X dans $[0, +\infty]$ la fonction information $I(\alpha)$ par rapport à une partition α par :

$$\forall x \in X, I(\alpha)(x) = -\sum_{A \in \alpha} \log \mu(A) \chi_A(x)$$

où χ_A désigne l'indicatrice sur A et on suppose que $0 \log 0 = 0$. L'entropie métrique de la partition α est alors :

$$\mathcal{H}_\mu(\alpha) = \int_X I(\alpha)(x) d\mu(x) = -\sum_{A \in \alpha} \mu(A) \log \mu(A).$$

Soient α et δ deux partitions mesurables de X. On définit la partition jointe $\alpha \vee \delta$ de α et δ par :

$$\alpha \vee \delta = \{A \cap B | A \in \alpha \text{ et } B \in \delta\}.$$

On appelle entropie de T relative à la partition α la quantité $h_\mu(T, \alpha)$ définie par :

$$h_\mu(T,\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathcal{H}_\mu\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}(\alpha)\right).$$

L'entropie métrique du système dynamique $(X, \mathfrak{M}, \mu, T)$ est alors la borne supérieure des entropies de T relativement aux partitions finies mesurables de X.

$$h_\mu(T) = \sup_\alpha h_\mu(T,\alpha).$$

Entre les deux définitions d'entropies énoncées, un théorème dit *du principe variationnel* permet de faire un rapprochement. Notons $\mathcal{M}_T(X)$ l'ensemble des mesures T-invariantes sur X. Alors :

$$h_{top}(T) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_T(X)} h_\mu(T).$$

1.3 Système dynamique symbolique

1.3.1 Définition

Soit $\mathcal{A} = \{0, 1, \cdots, d_1\}$ un alphabet (ensemble) fini. On note $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des suites d'éléments de $\mathcal{A}$. On munit $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ de la topologie produit de la topologie produit sur $\mathcal{A}$. Ajoutons que c'est un espace métrisable par la distance d définie, pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, par :

$$d(u,w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{d(u_n,w_n)}{2^{|n|}}, \text{ avec}$$

$$d(u_n,w_n) = \begin{cases} 0 \text{ si } u_n = w_n \\ 1 \text{ si } u_n \neq w_n \end{cases}$$

Soit σ l'application de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ définie par $\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$. Les sous-ensembles fermés σ-invariants de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ sont appelés *sous-shifts*.

Définition 3. *Soit Λ un sous-ensemble fermé de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Le couple (Λ, σ) est appelé* ***système dynamique symbolique****. S'il n'y a pas d' ambiguïté, on pourra toujours noter Λ plutôt que (Λ, σ).*

Définition 4. 1. *Une séquence finie (mot fini) de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est appelée bloc ou mot. Étant donné un mot u sur S, on appelle longueur de u et on note $|u|$ le nombre de lettres qu'il contient.*

2. *On note $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des suites finies de $\mathcal{A}$. On appelle **langage** toute partie de $\mathcal{A}^*$.*
3. *Étant donné Λ un système dynamique symbolique, le **langage associé** à Λ est l'ensemble des blocs apparaissant dans les mots de Λ.*
4. *Pour tout m dans $\mathbb{Z}$ et tout bloc $A = a_1 a_2 \cdots a_n$ dans $S^{\mathbb{Z}}$, ${}_m[a_1 a_2 \cdots a_n] =_m [A]$ dénote l'ensemble de tous les mots x dans $S^{\mathbb{Z}}$ tels que si $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, on a*

$$x_m x_{m+1} \cdots x_{m+n-1} = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

On appellera ${}_m[A]$ cylindre de support A en m. Les cylindres du type ${}_{-m}[a_{-m} \cdots a_m]$ sont dits centrés.

Les cylindres sont des sous-ensembles ouverts et fermés de $S^{\mathbb{Z}}$. En outre, pour tout $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et $m \in \mathbb{N}$, ${}_{-m}[x_{-m} \cdots x_m]$ forment une bases de voisinages de x.

Soit $\mu \in \mathfrak{M}_\sigma(S^{\mathbb{Z}})$. Alors on a les propriétés suivantes :

1. $\sum\limits_{a_0 \in S} \mu({}_0[a_0]) = 1$, et pour tout bloc $a_0 a_1 \cdots a_k$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,
2. $\mu({}_n[a_0 a_1 \cdots a_k]) \geq 0$;
3. $\mu({}_n[a_0 a_1 \cdots a_k]) = \sum\limits_{a_{k+1} \in S} \mu({}_n[a_0 a_1 \cdots a_k a_{k+1}])$;
4. $\mu({}_n[a_0 a_1 \cdots a_k]) = \sum\limits_{a_{-1} \in S} \mu({}_{n-1}[a_{-1} a_0 a_1 \cdots a_k])$

Ces propriétés suffisent à définir une mesure invariante sur $S^{\mathbb{Z}}$. La partition $\{{}_0[a_0] | a_0 \in S\}$ est génératrice pour le système $(S^{\mathbb{Z}}, \sigma)$. Ceci justifie la relation donnée en 1. La relation 3 vient de :

$${}_n[a_0 a_1 \cdots a_k] = \bigcup_{a_{k+1} \in S} ({}_n[a_0 a_1 \cdots a_k a_{k+1}]).$$

La relation 4 vient quant à elle de la σ-invariance de μ. En outre, une fonction sur les cylindres de $S^{\mathbb{Z}}$ satisfaisant les conditions (1)-(4) coïncide avec une mesure dans $\mathfrak{M}_\sigma(S^{\mathbb{Z}})$ sur les cylindres.

Par ailleurs, on peut définir le système dynamique symbolique S sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Il est alors dit unilatéral.

1.3.2 Entropie topologique d'un système dynamique symbolique

Étant donné L le langage sur un alphabet $\mathcal{A}$, on appelle entropie de L et on note $h(L)$, la quantité :

$$h(L) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log Card(L \cap \mathcal{A}^n). \tag{I.1}$$

Soit S un système dynamique symbolique sur $\mathcal{A}$. Son entropie topologique est l'entropie du langage associé. Les systèmes bilatéraux et unilatéraux qui se correspondent ont la même entropie.

Dans les lignes à suivre, on s'intéresse à une catégorie bien spécifique de systèmes dynamiques symboliques d'entropie non nulles qui seront construites moyennant une relation d'ordre à définir sur l'ensemble des suites d'un certain alphabet.

Considérant un alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1, \cdots, d\}$, et x un mot fini sur $\mathcal{A}$, dans toute la suite, nous noterons $|x|$ la longueur de x et $\overline{x} = x^\infty = xxxx\cdots$ (x est répété une infinité de fois).

2 Relation d'ordre alterné

Soit $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, \cdots, d\}$ un alphabet fini ordonné. On note $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des concaténations des éléments de $\mathcal{A}$ ou mieux l'ensemble des suites d'éléments de $\mathcal{A}$. On définit sur $\mathcal{A}^*$ la relation $\prec$ comme suit : soient $.x_1x_2\cdots$ et $.y_1y_2\cdots$ deux éléments de $\mathcal{A}^*$,

$$(x_i)_{i\geq 1} \prec (y_i)_{i\geq 1} \Leftrightarrow \exists k, x_i = y_i \forall i < k \text{ et } (-1)^k(x_k - y_k) < 0 \tag{I.2}$$

Il en découle que :

$$(x_i)_{i\geq 1} \preceq (y_i)_{i\geq 1} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_n)_{n\geq 1} \prec (y_n)_{n\geq 1} \\ \text{ou} \\ (x_n)_{n\geq 1} = (y_n)_{n\geq 1} \ (x_n = y_n \text{ pour tout } n) \end{cases}$$

Ainsi définie, on vérifie très facilement que la relation "$\preceq$" est une relation d'ordre total sur l'ensemble des suites de $\mathcal{A}$ appelée *relation d'ordre alterné* . Cette définition s'étend sans ambiguïté aux suites finies. En fait, comparer deux suites finies $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ revient à comparer $(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots)$ et $(y_1, y_2, \cdots, y_n, 0, 0, \cdots)$.

$$(x_1, \cdots, x_n) \preceq (y_1, \cdots, y_n) \Rightarrow (x_1, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots) \preceq (y_1, \cdots, y_n, 0, 0, \cdots)$$

Remarque 1. *Soient u un mot de longueur finie et $x_1x_2\cdots$, $y_1y_2\cdots$ deux mots infinis.*

1. *Si $|u|$ est paire et $x_1x_2x_3\cdots \prec y_1y_2y_3\cdots$ alors $ux_1x_2x_3\cdots \prec uy_1y_2y_3\cdots$.*
2. *Si $|u|$ est impaire et $x_1x_2x_3\cdots \prec y_1y_2y_3\cdots$ alors $uy_1y_2y_3\cdots \prec ux_1x_2x_3\cdots$.*
3. *Soit v un mot fini tel que $u \prec v$. Alors $ux_1x_2x_3\cdots \prec vy_1y_2y_3\cdots$.*

3 Systèmes de Lyndon

3.1 Définitions et généralité

Définition 5. *On se donne un alphabet $\mathcal{A}$ totalement ordonné de k lettres et un ordre " $<$" sur les mots finis (et infinis) sur $\mathcal{A}$; on appelle mot Lyndon de longueur n un mot strictement plus petit que ses suffixes propres pour cet ordre.*

On appelle mot de Lyndon (fort) infini tout mot (strictement) inférieur (au sens de la relation d'ordre sur les mots) à tous ses suffixes. Les Lyndon faibles désigneront cependant les suites $(x_i)_{i\geq 1}$ de Lyndon pour lesquels il existe $n > 1$ tel que :

$$x_1x_2x_3x_4\cdots = x_nx_{n+1}x_{n+2}\cdots .$$

Les Lyndon faibles sont alors les mots de Lyndon (pour la relation d'ordre alterné) périodiques.

Un exemple classique est celui des informaticiens : $\mathcal{A} = \{0, 1, \cdots, d\}$ muni de l'ordre habituel ; l'ensemble des mots est alors muni de l'ordre lexicographique.

Définition 6. *Étant donné un mot infini de Lyndon (fort ou faible) $(d_i)_{i\geq 1}$, on appellera système dynamique de Lyndon associé à $(d_i)_{i\geq 1}$ l'ensemble des mots infinis $(x_i)_{i\geq 1}$ sur l'alphabet $\mathcal{A}$ tels que :*

$$\forall k \geq 1 \ d_1 d_2 d_3 \cdots \leq x_k x_{k+1} \cdots \ .$$

Un tel système est un fermé non vide σ-invariant de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

Exemple 1. *Soit $\mathcal{A} = \{0, 1, \cdots d\}$ un alphabet muni de l'ordre usuel. On munit $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ de la relation d'ordre alterné. Soit $(x_i)_{i\geq 1}$ une suite sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ vérifiant pour tout k :*

$$x_1 x_2 x_3 \cdots \preceq x_k x_{k+1} \cdots \ . \tag{I.3}$$

Une telle suite est appelée mot de Lyndon pour la relation d'ordre alterné ou tout simplement mot de Lyndon alterné.

Étant donné un mot de Lyndon alterné $(d_i)_{i\geq 1}$, on appellera système de Lyndon attaché à $(d_i)_{i\geq 1}$ l'ensemble des suites $(x_i)_{i\geq 1}$ sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$d_1 d_2 d_3 \cdots \preceq x_k x_{k+1} \cdots \ \textit{pour tout } k \geq 1 \ . \tag{I.4}$$

Si $(x_i)_{i\geq 1}$ est un mot de Lyndon pour la relation d'ordre alterné, alors pour tout k, $x_k \leq x_1$. On peut alors se limiter aux alphabets finis.

Remarque 2. *Soit $(d_i)_{i\geq 1}$ un mot de Lyndon pour la relation d'ordre alterné sur un alphabet fini $\{0, 1, \cdots, d\}$ muni de l'ordre usuel. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

– *Pour une suite $(x_i)_{i\geq 1}$ sur $\mathcal{A}$, et pour tout $k \geq 1$,*

$$d_1 d_2 d_3 \cdots \preceq x_k x_{k+1} \cdots \ .$$

– *Pour tout* $k \geq 1$

$$d_1 d_2 d_3 \cdots \preceq x_k x_{k+1} \cdots \preceq 0 d_1 d_2 \cdots . \tag{I.5}$$

Exemple 2. *Dans cet exemple, on regarde le cas des* β*-shifts. Soit* $\mathcal{A} = \{0, 1, \cdots, \lfloor \beta \rfloor\}$ *muni de l'ordre usuel et* $(a_i)_{i\geq 1}$ *le* β*-développement de 1. On sait pour tout* k *:*

$$a_k a_{k+1} \cdots \leq_{lex} a_1 a_2 a_3 \cdots$$

Il s'agit d'un mot de Lyndon si on considère la relation d'ordre :

$$(x_n)_{n\geq 1} \leq_L (y_n)_{n\geq 1} \Leftrightarrow (y_n)_{n\geq 1} \leq_{lex} (x_n)_{n\geq 1}$$

pour l'ordre lexicographique usuel.

A chaque nombre $\beta > 1$ *correspond un unique mot de Lyndon infini et donc un unique système de Lyndon*

$$X_\beta = \{x_1 x_2 \cdots ; \forall k \ x_1 x_2 \cdots \leq_{lex} a_1 a_2 \cdots \}$$

sauf si β *est un* β*-nombre simple (on dit aussi nombre de Parry) :*

$$1 = \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{a_k}{\beta^k}$$

c'est-à-dire si la suite $(a_i)_{i\geq 1}$ *finit par des zéros. Comme*

$$1 = \frac{a_1}{\beta} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{\beta^{k-1}} + \frac{a_k - 1}{\beta^k} + \frac{a_1}{\beta^{k+1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{\beta^{2k-1}} + \frac{a_k - 1}{\beta^{2k}} + \cdots ,$$

$\overline{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}(a_k - 1)}$ *est un mot de Lyndon faible. On a donc deux systèmes de Lyndon associés emboîtés, celui généré par* $\overline{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}(a_k - 1)}$ *étant le plus petit. C'est ce dernier qui permet de définir le* β*-shift.*

Il y a une bijection monotone entre les Lyndon forts pour l'ordre lexicographique et les réels plus grands que 1 qui ne sont pas des nombres de Parry simple. Par contre, à un nombre de Parry simple correspondent deux mots de Lyndon, un Lyndon faible et un fort. Le nombre dont on fait correspondre le mot de Lyndon n'est rien d'autre que l'exponentielle de l'entropie du système de Lyndon associé. La situation est un peu plus complexe dans le cas des mots de Lyndon pour la relation d'ordre alterné.

Proposition 1. *Étant donné un alphabet ordonné $\mathcal{A}$ fini ou dénombrable, l'ensemble des mots de Lyndon pour la relation d'ordre alterné est totalement ordonné.*

Preuve Soient $(a_i)_{i\geq 1}$ et $(b_i)_{i\geq 1}$ deux mots infinis de Lyndon. On suppose $(a_i)_{i\geq 1} \neq (b_i)_{i\geq 1}$. Alors, il existe un entier k tel que $a_i = b_i$ pour tout $i < k$ et $a_k \neq b_k$. Ceci implique $a_k < b_k$ ou $b_k < a_k$ qui entraîne que $(-1)^k(a_k - b_k) < 0$ ou $(-1)^k(b_k - a_k) < 0$. C'est-à-dire $(a_i)_{i\geq 1} \prec (b_i)_{i\geq 1}$ ou alors $(b_i)_{i\geq 1} \prec (a_i)_{i\geq 1}$. Donc, l'ensemble des mots de Lyndon pour la relation d'ordre alterné est totalement ordonné. ■

La proposition 1 reste vraie pour l'ordre défini dans l'exemple 2.

Soit $(d_i)_{i\geq 1}$ un mot infini de Lyndon pour la relation d'ordre alterné. On note $M = M((d_i)_{i\geq 1})$ le système de Lyndon associé et L_M son langage. C'est-à-dire que L_M est l'ensemble des séquences finies ou mots apparaissant dans les suites de M. Un mot $x_1x_2\cdots x_n$ de L_M vérifie donc :

$$d_1d_2\cdots d_{n-j+1} \preceq x_jx_{j+1}\cdots x_n \preceq 0d_1d_2\cdots d_{n-j}, \text{ avec } 1 \leq j \leq n \ . \tag{I.6}$$

La relation ci-dessus implique que la suite $(x_i)_{i\geq 1}$ est bornée. En effet, la relation I.6 signifie que pour tout j, $(-1)(d_1 - x_j) \leq 0$ et $(-1)(x_j - 0) \leq 0$. Et donc $0 \leq x_j \leq d_1$. En particulier, la suite $(d_i)_{i\geq 1}$ est telle que pour tout i, $d_i \leq d_1$. Les mots de M sont donc définis sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1, \cdots, d_1\}$. M est invariant par le shift σ. Muni du shift, c'est alors un système dynamique symbolique.

On note H_n le nombre de mots de longueur n du langage L_M. Alors :

Proposition 2. *Soit $\mathcal{A} = \{0, 1, \cdots, d_1\}$ un alphabet ; on munit $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ de l'ordre alterné. Étant donné un mot infini de Lyndon $(d_i)_{i\geq 1}$, M le système dynamique associé et H_n le nombre de mots de longueur n du langage de M ; $H_0 = 1$ et pour tout $n \leq 1$, on a :*

$$H_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k(d_{k-1} - d_k)H_{n-k} + 1 \tag{I.7}$$

avec $d_0 = 0$.

Preuve

Pour $n = 1$

Soit x dans L_M de longueur 1. $(-1)(d_1 - x) \leq 0$. Donc, x peut prendre $d_1 + 1$ valeurs. C'est-à-dire $H_1 = d_1 H_0 + 1$. La formule est vérifiée pour $n = 1$.

Pour $n = 2$: Les mots de longueur 2 de L_M sont ij avec $0 \leq i < d_1$ et $0 \leq j \leq d_1$ et $d_1 k$ avec $d_2 \leq k \leq d_1$. Donc H_2 vaut $d_1(d_1+1)+d_1-d_2+1 = d_1 H_1+(d_1-d_2)H_0+1$. La propriété est aussi vérifiée pour $n = 2$. Supposons-la vraie jusqu'à un ordre k.

Pour $n = k + 1$.

On note Γ_1 et Γ_2 les ensembles définis par :

$$\Gamma_1 = \{\varepsilon, d_1, d_1 d_2 d_3, d_1 d_2 d_3 d_4 d_5, \cdots, d_1 d_2 d_3 \cdots d_{2k+1}, \cdots\} \tag{I.8}$$

$$\Gamma_2 = \{A_1 A_2 \cdots A_m d_1 \cdots d_{n-1} j; n \in \mathbb{N}^*, (-1)^n (d_n - j) < 0, j \neq d_1, A_i \in \Gamma_1\} \tag{I.9}$$

$$\Gamma_3 = \{A_1 A_2 \cdots A_m d_1 d_2 \cdots d_{k-1} d_k, A_i \in \Gamma_1, k \in \mathbb{N}^*\} \tag{I.10}$$

où ε est le mot vide sur $\mathcal{A}$. Γ_1 et Γ_2 nous permettent de caractériser l'ensemble des mots du langage L_M. En effet, soit $y_1 y_2 \cdots y_n$ un mot de L_M de taille n. Alors $d_1 d_2 \cdots d_n \preceq y_1 y_2 \cdots y_n$. Si y est différent de $d_1 d_2 \cdots d_n$, il existe k tel que $y_i = d_i$ pour tout $i < k$ et $(-1)^k (d_k - y_k) < 0$. Comme L_M est stable par le shift, $y_{k+1} y_{k+2} \cdots y_n$ est un mot de longueur $n - k$ de L_M. Par ailleurs, $y_1 y_2 \cdots y_k = d_1 d_2 \cdots d_{k-1} y_k$ est dans Γ_2 si $y_k \neq d_1$. Si non, $k - 1$ est impair et le même principe s'applique à $y_k \cdots y_n$. Si $y_k \cdots y_n = d_1 \cdots d_{n-k+1}$ alors $y_1 \cdots y_{k-1} y_k \cdots y_n = d_1 \cdots d_{k-1} d_1 \cdots d_{n-k+1}$ est dans Γ_3. Si $y_k \cdots y_n \neq d_1 \cdots d_{n-k+1}$ alors il va exister un entier k_2 tel que $y_1 \cdots y_{k-1} y_k \cdots y_{k_2-1} y_{k_2} \in \Gamma_2$ et $y_{k_2+1} \cdots y_n \in L_M$. Si non cette sequence est égale à $d_1 d_2 \cdots d_{k-1} d_1 \cdots d_{k_2-k}$ avec k et $k_2 - k$ impair et on continue le processus sur $y_{k_2} \ldots y_n$. Ainsi, on a $y_1 \cdots y_n = d_1 \cdots d_n$ ou $y_1 \cdots y_n$ est dans Γ_3 ou alors il existe k tel que $y_1 y_2 \cdots y_k \in \Gamma_2$ et $y_{k+1} y_{k+2} \cdots y_n \in L_M \bigcap \mathcal{A}^{n-k}$. Ainsi,

$$L_M \bigcap \mathcal{A}^n = \left(\bigcup_{\substack{x \in \Gamma_2 \\ |x| \leq n}} x \left(L_M \bigcap \mathcal{A}^{n-|x|} \right) \right) \bigcup \left(\Gamma_3 \bigcap \mathcal{A}^n \right) \tag{I.11}$$

Par construction, on a :

$$\Gamma_2 \bigcap \mathcal{A}^n = \left(\bigcup_{\substack{x_i \in \Gamma_1 \\ |x_i| = i}} x_i \left(\Gamma_2 \bigcap \mathcal{A}^{n-i} \right) \right) \bigcup \{d_1 d_2 \cdots d_{n-1} j | (-1)^n (d_n - j) < 0, j \neq d_1\} \tag{I.12}$$

et

$$\Gamma_3 \bigcap \mathcal{A}^n = \left(\bigcup_{\substack{x_i \in \Gamma_1 \\ |x_i| = i}} x_i \left(\Gamma_3 \bigcap \mathcal{A}^{n-i} \right) \right) \bigcup \{d_1 d_2 \cdots d_n\} . \tag{I.13}$$

On note c_n, et m_n les nombres de mots de longueur n de Γ_2 et Γ_3 respectivement. Alors c_n et m_n sont donnés par les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned} c_n &= c_{n-1} + c_{n-3} + \cdots + c_{n-2n_k-1} + \sharp \{d_1 d_2 \cdots d_{n-1} j | (-1)^n (d_n - j) < 0, j \neq d_1\} \\ m_n &= m_{n-1} + m_{n-3} + \cdots + m_{n-2n_k-1} + 1. \end{aligned} \tag{I.14}$$

le nombre $2n_k + 1$ étant le plus grand entier impair inférieur à n. Il est aisé de remarquer que

$$\sharp \{d_1 \cdots d_{n-1} j | (-1)^n (d_n - j) < 0, j \neq d_1\} - \sharp \left\{d_1 \cdots d_{n-3} j | (-1)^{n-2} (d_{n-2} - j) < 0, j \neq d_1\right\}$$

vaut $(-1)^n (d_{n-2} - d_n)$. Les relations de récurrence donnent alors

$$\begin{aligned} c_n &= c_{n-1} + c_{n-2} + (-1)^n (d_{n-2} - d_n), \\ m_n &= m_{n-1} + m_{n-2}. \end{aligned} \tag{I.15}$$

Compte-tenu de (I.10),

$$\begin{aligned}
H_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} c_i H_{n+1-i} + m_{n+1} \\
&= c_1 H_n + c_2 H_{n-1} + \sum_{i=3}^{n+1} (c_{i-1} + c_{i-2}) H_{n+1-i} + \sum_{i=3}^{n+1} (-1)^i (d_{i-2} - d_i) H_{n+1-i} + m_{n+1} \\
&= c_1 H_n + c_2 H_{n-1} - c_1 H_{n-1} + H_n + H_{n-1} - \sum_{i=2}^{n} (-1)^i (d_{i-1} - d_i) H_{n-i} + \\
&+ \sum_{i=3}^{n+1} (-1)^i (d_{i-1} - d_i) H_{n+1-i}.
\end{aligned}$$

Comme $c_1 = d_1, c_2 = d_1 - d_2 - 1$ et $H_n^{'} - 1 - d_1 H_{n-1} = \sum_{n=2}^{n} (-1)^i (d_{i-1} - d_i) H_{n-i}$, on obtient donc

$$\begin{aligned}
H_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (d_{i-1} - d_i) H_{n+1-i} - H_{n-1} + H_n - d_1 H_{n-1} + H_{n-1} - H_n + d_1 H_{n-1} + 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (d_{i-1} - d_i) H_{n+1-i} + 1.
\end{aligned}$$

■

Définition 7. *Un langage L sur un alphabet A est factoriel s'il contient les sous-mots de ses mots. Il est prolongeable si pour tout mot $x_1 x_2 \cdots x_n$ dans L il existe a et b dans $\mathcal{A}$ tels que $a x_1 x_2 \cdots x_n b$ est encore dans L.*

Par construction, L_M est un langage factoriel et prolongeable. En effet, soit $x = x_1 x_2 \cdots x_n$ mot du langage. Alors $d_1 \cdots d_{n-i} \preceq x_{i+1} \cdots x_n$, pour tout i plus petit que n. Soit $j < d_1$ une lettre de l'alphabet $\mathcal{A}$. Alors $d_1 d_2 \cdots d_{n+1} \preceq j x_1 x_2 \cdots x_n$. Donc, L_M est prolongeable à gauche. Par ailleurs, on peut écrire $x_1 \cdots x_n$ sous la forme $x_1 \cdots x_{n-k} d_1 \cdots d_k$. Si x ne fini pas par le début de la suite $(d_i)_{i \geq 1}$ alors on prend $k = 0$. Soit $b \in \mathcal{A}$ tel que $(-1)^{k+1}(d_{k+1} - b) \leq 0$. On voit que axb est dans L_M. C'est donc le langage d'un système dynamique. On pose

$$h(L_M) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \sharp (L_M \cap \mathcal{A}^n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log H_n. \tag{I.16}$$

$h(L_M)$ est positive ou nul. Comme L_M est factoriel, d'après [BH86], la limite $h(L_M)$ existe. Elle définit l'entropie du système. Soit β tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \sharp(L_M \cap \mathcal{A}^n) = \log \beta.$$

Remarque 3. *Le réel β défini ci dessus est tel que $d_1 < \beta \leq d_1 + 1$. En effet, Le système de Lyndon associé à β est contenu dans le full-shift $\{0, 1, \cdots, d_1\}^{\mathbb{Z}}$ qui, muni du décalage est d'entropie $\log(d_1 + 1)$. De même, le système de Lyndon associé à β contient strictement le full-shift $\{0, 1, \cdots, d_1 - 1\}^{\mathbb{Z}}$. En munissant ce dernier du décalage σ, on a un système dynamique d'entropie $\log d_1$.*

Proposition 3. *Soient $(a_i)_{i\geq 1}$ et $(d_i)_{i\geq 1}$ deux mots infinis de Lyndon pour la relation d'ordre alterné sur un alphabet $\mathcal{A}$ fini tels que :*

$$d_1 d_2 d_3 \cdots \prec a_1 a_2 a_3 \cdots .$$

Notons $M^{'}$ le système de Lyndon associé à $(a_i)_{i\geq}$ et M celui associé à $(d_i)_{i\geq 1}$. Alors, M contient $M^{'}$ et donc $h(L_{M^{'}}) \leq h(L_M)$.

Preuve Soit $(x_i)_{i\geq 1}$ dans $M^{'}$.

$$\begin{aligned} (x_i)_{i\geq 1} \in M^{'} &\Rightarrow (d_i)_{i\geq 1} \prec (a_i)_{i\geq 1} \preceq (x_i)_{i\geq n} \\ &\Rightarrow (d_i)_{i\geq 1} \prec (x_i)_{i\geq n} \ \forall n \\ &\Rightarrow (x_i)_{i\geq 1} \in M. \end{aligned}$$

Donc, tout mot de $M^{'}$ est dans M. Il en découle aussi que le langage associé à $M^{'}$ est contenu dans celui de M. Il s'en suit que $H_n^{'} \leq H_n$. En appliquant le logarithme et en prenant la limite sur n, on a le résultat ■

Nous avons jusque là prouvé l'existence de l'entropie de M. Toutefois, celle-ci peut être nulle. Le paragraphe suivant détermine les systèmes dynamiques du type M d'entropie nulle. Autrement dit, on se demande pour quelle suite $(d_i)_{i\geq 1}$, β est strictement plus grand que 1.

3.2 Systèmes de Lyndon alternés d'entropie non nulle

Proposition 4. *Étant donné un système de Lyndon pour la relation d'ordre alterné* $M((d_i)_{i\geq 1}) = M$, H_n *le nombre de mots de longueur* n *du langage. On suppose son entropie* $\log \beta > 0$ *; alors*

$$1 = \sum_{i\geq 1} \frac{d_{i-1} - d_i}{(-\beta)^i} \text{ avec } d_0 = 0 \text{ et } 1 + \sum_{i\geq 1} \frac{d_i + 1}{(-\beta)^i} = 0, \tag{I.17}$$

soit donc

$$-\frac{\beta}{\beta+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{d_n}{(-\beta)^n} \text{ et } \frac{1}{\beta+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{d_n}{(-\beta)^{n+1}}. \tag{I.18}$$

Preuve Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n^{1/n}$ vaut β, $\frac{1}{\beta}$ est le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} H_n z^n$. Dans la boule ouverte de centre 0 et de rayon $1/\beta$, par (I.7), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} H_n z^n &= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k (d_{k-1} - d_k) z^k \right) H_{n-k} z^{n-k} + \sum_{n\geq 0} z^n \\
&= \sum_{n\geq 0} H_n z^n \left(\sum_{n\geq 1} (-1)^n (d_{n-1} - d_n) z^n \right) + \sum_{n\geq 0} z^n.
\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{n\geq 0} H_n z^n = \frac{\sum\limits_{n\geq 0} z^n}{1 - \sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n (d_{n-1} - d_n) z^n}. \tag{I.19}$$

Le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} H_n z^n$ est $\frac{1}{\beta}$ et comme les coefficients $(-1)^n(d_{n-1} - d_n)$ sont bornés, $\frac{\sum_{n\geq 0} z^n}{1 - \sum_{n\geq 1} (-1)^n (d_{n-1} - d_n) z^n}$ admet un pôle de module inférieur à 1. Soit $1/\theta$ son plus petit pôle en module. Il existe donc un entier r et un polynôme P tels que

$$\frac{\sum\limits_{n\geq 0} z^n}{1 - \sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n (d_{n-1} - d_n) z^n} = \frac{P(z)}{(1-\theta z)^r} + \sum_{n\geq 0} a_n z^n \tag{I.20}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\theta^n} = 0$. En développant en série $\frac{P(z)}{(1-\theta z)^r}$ on trouve un polynôme Q tel que

$$\frac{P(z)}{(1-\theta z)^r} = \sum_{n\geq 0} Q(n)\theta^n z^n \tag{I.21}$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{\sum\limits_{n\geq 0} z^n}{1-\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n(d_{n-1}-d_n)z^n} &= \sum_{n\geq 0} Q(n)\theta^n z^n + \sum_{n\geq 0} a_n z^n \\ &= \sum_{n\geq 0} H_n z^n.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{\log Q(n)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 &\Longrightarrow \sqrt[n]{Q(n)\theta^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \theta \\ &\Longrightarrow \theta = \beta.\end{aligned}$$

On obtient le résultat du fait que $\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\beta}$ est un zéro pour $1 - \sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n(d_{n-1}-d_n)z^n$ c'est-à-dire un pôle pour $\sum\limits_{n\geq 0} H_n z^n$. ■

On définit sur l'alphabet $\{0,1\}$ le morphisme ϕ par : $\phi(0) = 1$ et $\phi(1) = 100$. On pose $\phi^\infty(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \phi^n(1)$.

$$\phi^\infty(1) = 100111001001001110011100111001001001110010 0\cdots. \tag{I.22}$$

En remplaçant 1 par 2 et 0 par 1, on obtient :

$$s = 2112221121121122211222112221121121122211211\cdots.$$

Le mot $w = 1s$ est la suite A026465 de l'encyclopédie de Sloane. Les termes de la suite w comptent le nombre de symboles identiques consécutifs dans la suite de

Thue-Morse t définie par :

$$t = (t_i)_{i\geq 1} = 0110100110010110\cdots.$$

Elle s'obtient par la relation de récurrence $t_0 = 0$, $t_{2n} = t_n$ et $t_{2n+1} = 1 - t_n$, ou alors par itération successive du morphisme sur l'alphabet $\{0,1\}$ défini par $0 \mapsto 01$ et $1 \mapsto 10$.

On pose $u_n = \phi^n(1)$, $v_0 = 00$ et pour tout n, $v_n = u_{n-1}u_{n-1}$. On a donc $u_n = u_{n-1}v_{n-1}$.

Lemme 1. *Pour tout n dans $\mathbb{N}$, u_n est un mot sur $\{0,1\}$ de longueur impaire.*

Preuve La preuve peut se faire par récurrence sur n. $u_0 = 1$ donc de longueur 1. Si u_n est de longueur impaire alors,

$$|u_{n+1}| = |u_n| + |v_n| = |u_n| + 2|u_{n-1}|$$

est impaire.

Il est clair que v_n est de longueur paire, pour tout n. ■

Proposition 5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n\overline{v_n}$ est un mot de Lyndon pour la relation d'ordre alterné.*

Preuve Il suffit de voir que pour tout n, $u_n \prec v_n$. En effet,

– Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $v_0 = 00$. On a bien $u_0 \prec v_0$. Supposons-le jusqu'à l'ordre n.
– Pour $u_{n+1} = u_n v_n$ et $v_{n+1} = u_n u_n$. Mais, par hypothèse de récurrence, $u_n \prec v_n$. D'où, en ajoutant u_n à droite de chaque séquence, on a

$$u_n v_n \prec u_n u_n$$

puisque u_n est de longueur impaire. Comme pour tout k dans $\mathbb{N}$,

$$u_k = u_0 v_0 v_1 v_2 \cdots v_{k-2} v_{k-1},$$

il vient alors que pour tout i,

$$u_n\overline{v_n} \prec \sigma^i(u_n\overline{v_n}),$$

d'où le résultat. ■

Par ailleurs, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $|u_k| = 2|u_{k-1}| - (-1)^k$. Ceci se vérifie par récurrence sur k.

Posons $u_{-1} = 0$. $u_0 = 1$ et $u_1 = 100$. Ainsi, $|u_1| = 2|u_0| + 1$. C'est alors vrai pour $k = 1$. Supposons-le à l'ordre k et montrons-le pour $k + 1$. $u_{k+1} = u_k u_{k-1} u_{k-1}$ et donc $|u_{k+1}| = |u_k| + 2|u_{k-1}|$. Selon l'hypothèse de récurrence, $|u_k| = 2|u_{k-1}| - (-1)^k$. On revient à l'expression de $|u_{k+1}|$ et on ajoute $|u_k|$ au membre de droite puis, on le retranche et remplaçant $|u_k| - 2|u_{k-1}|$ par $-(-1)^k$, on a :

$$|u_{k+1}| = 2|u_k| + (-1)^k.$$

On remarque que $|u_n|$ et $|v_n|$ sont des entiers consécutifs.

Proposition 6. *(1) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, le système de Lyndon associé au mot de Lyndon $u_n\overline{v_n}$ est d'entropie non nulle.*

(2) Le système de Lyndon $M(\phi^\infty(1))$ associé au mot de Lyndon $\phi^\infty(1)$ pour la relation d'ordre alterné $\phi^\infty(1)$ est d'entropie nulle.

Preuve

(1) $M(u_n\overline{v_n})$ est d'entropie non nulle :

Nous verrons plus tard que la partie transitive de $M(u_n\overline{v_n})$ (qui fournit l'entropie maximale) est codée par un code récurrent positif $\{u_n, v_n\}$. On en déduit alors que $\log \gamma_n$ est l'entropie du système, avec :

$$1 = \frac{1}{\gamma_n^{|u_n|}} + \frac{1}{\gamma_n^{|v_n|}},$$

soit donc

$$\gamma_n^{l_n} = \gamma_n + 1 \text{ avec } l_n = \max(|u_n|, |v_n|) \ ,$$

ce qui implique que $\log \gamma_n > 0$.

(2) $M(\phi^\infty(1))$ est d'entropie nulle :

La suite $(u_n\overline{v_n})_{n\geq 1}$ est croissante au sens de la relation d'ordre alterné.

$$u_n\overline{v_n} \prec u_{n+1}\overline{v_{n+1}} \prec \cdots \prec \phi^\infty(1).$$

En effet, $u_n\overline{v_n} = u_{n+1}\overline{v_n}$ et $\overline{v_{n+1}} \prec \overline{v_n}$ puisque $v_{n+1} = u_n u_n \prec v_n v_n$. Il suffit donc d'ajouter u_{n+1} à gauche de chaque membre, ce qui fait changer le sens de l'inégalité vu que c'est une séquence de longueur impaire. Notons M_{γ_n} le système associé au mot $u_n\overline{v_n}$, $\log \gamma_n$ étant l'entropie. On a une suite d'ensemble de Lyndon $(M_{\gamma_n})_{n\geq 1}$ tels que :

$$M(\phi^\infty) \subsetneq \cdots \subsetneq M_{\gamma_{n+1}} \subsetneq M_{\gamma_n} \subsetneq \cdots \subsetneq M_{\gamma_0} \text{ et } \gamma_{n+1} < \gamma_n < \cdots < \gamma_0 \ .$$

et

$$\gamma_n^{l_n} = \gamma_n + 1$$

où $l_n = \max(|u_n|, |v_n|)$.

Les longueurs $|u_n|$ et $|v_n|$ tendent vers l'infini. Il en est donc de même pour l_n. Il vient alors que γ_n tend vers 1. Donc, $M(\phi^\infty)$ est d'entropie nulle. ■

Comme conséquence à cette proposition, on a le corollaire suivant :

Corollaire 1. *Un système M associé à un mot de Lyndon pour la relation d'ordre alterné $(d_i)_{i\geq 1}$ est d'entropie strictement positive si et seulement si :*

$$(d_i)_{i\geq 1} \prec \phi^\infty(1). \tag{I.23}$$

Preuve

(a) Supposons M d'entropie non nulle. Dans ce cas, on a nécessairement $(d_i)_{i\geq 1} \neq \lim_{n\to+\infty} \phi^n(1)$. Compte tenu de la proposition 3, on a : $(d_i)_{i\geq 1} \prec \lim_{n\to+\infty} \phi^n(1)$.

(b) Soit maintenant $(d_i)_{i\geq 1} \prec \lim_{n\to+\infty} \phi^n(1)$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \phi^n(1) = \lim_{k\to+\infty} \phi^k(1)\overline{\phi^{k-1}(1)}$, il existe un entier m tel que $d_1d_2d_3\cdots \prec \phi^m(1)\overline{\phi^{m-1}(1)}$. Ainsi, M contient le système associé au mot de Lyndon pour la relation d'ordre alterné $u_m\overline{v_m}$ qui est d'entropie $\log \gamma_m$ non nulle. Donc, M est aussi d'entropie non nulle ■

3.3 Systèmes de Lyndon alterné d'entropie nulle

Le mot de Lyndon pour la relation d'ordre alterné $\overline{10}$ est associé à 2. Le système associé est alors d'entropie $\log 2 > 0$. Il vient de ce fait que les systèmes d'entropie nulle sont associés aux mots de Lyndon sur l'alphabet $\{0, 1\}$.

Remarque 4. *1.* $1111 \cdots = \overline{1}$ *est le mots de Lyndon non nul (différent de* $\overline{0}$*) pour la relation d'ordre alterné générant le plus petit système de Lyndon. C'est-à-dire,*

$$d_1 d_2 d_3 \cdots \preceq 111111 \cdots , \ (d_i)_{i \geq 1} \text{ mot de Lyndon non nul .}$$

2. Soit u un mot fini de longueur impaire. Il est facile de montrer que si $(d_i)_{i\geq 1}$ *débute par uu, alors* $(d_i)_{i\geq 1} = \overline{u}$.

Proposition 7. *Les systèmes de Lyndon pour la relation d'ordre alterné d'entropie nulle sont associés aux mots de Lyndon faibles* $\overline{u_n} = \overline{\phi^n(1)}$, *n parcourant* $\mathbb{N}$.

Preuve Soit $M \neq M(\phi^\infty(1))$ un système de Lyndon pour la relation d'ordre alterné et $(d_i)_{i\geq 1}$ le mot de Lyndon dont il est associé. Alors,

$$\phi^\infty(1) \prec (d_i)_{i\geq 1}.$$

Il existe donc un entier n tel que :

$$u_n = d_1 d_2 \cdots d_{|u_n|} \text{ et } u_n \prec d_{|u_n|+1} \cdots d_{|u_n|+|v_n|} \prec v_n \ .$$

Remarquons que :

$$u_{2k} = u_{2k-1} u_{2k-2} \cdots u_1 u_0 u_0 \text{ et } v_{2k} = u_{2k-1} \cdots u_1 u_0 00.$$

De même

$$u_{2k+1} = u_{2k} u_{2k-1} \cdots u_1 u_0 00 \text{ et } v_{2k+1} = u_{2k} u_{2k-1} \cdots u_1 u_0 u_0.$$

Dans tous les cas, u_n et v_n débute par la même séquence : $u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_1u_0$. Posons

$$W = d_{|u_n|+1}\cdots d_{|u_n|+|v_n|}.$$

Alors W débute par $u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_1u_0$.

– Si n est pair, $(-1)^{|u_n|}w_{|u_n|} < 0$ où $w_{|u_n|}$ est la $|u_n|$-ième lettre de W. En fait, à l'indice $|u_n|$ de v_n, il y a 0. Il vient que $w_{|u_n|} = 1 = u_0$. D'où, W débute par

$$u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_1u_0u_0 = u_n.$$

Ainsi, $(d_i)_{i\geq 1}$ débute par u_nu_n. Compte tenu de la remarque précédente, $(d_i)_{i\geq 1} = \overline{u_n}$.

– De même, si est n impair, $w_{|v_n|} = 0$. Donc $W = u_{n-1}\cdots u_1u_0 0$. Mais u_0 est toujours suivi de 00. Il vient alors que

$$d_{|u_n|+1}\cdots d_{2|u_n|} = u_n.$$

D'après la remarque, $(d_i)_{i\geq 1} = \overline{u_n}$. ∎

Une conséquence directe de la proposition précédente est un résultat de Lingmin Liao et Wolfgang Steiner donné dans [LS12] : $\phi^\infty(1)$ est le plus grand mot (au sens de la relation d'ordre alterné) de Lyndon non-périodique. Autrement dit, $M(\phi^\infty(1))$ est le plus petit système de Lyndon associé à un mot de Lyndon (pour la relation d'ordre alterné) non-périodique. En outre $M(\phi^\infty(1))$ est aussi le plus grand système de Lyndon pour la relation d'ordre alterné d'entropie nulle.

Dans la suite, on ne s'intéresse qu'aux systèmes de Lyndon pour la relation d'ordre alterné d'entropie non nulle. Autrement dit, on considérera toujours que $(d_i)_{i\geq 1} \prec \lim\limits_{n\to+\infty} \phi^n(1)$.

3.4 Une application croissante

On note $f_{-\beta}$ l'application qui à une suite $(x_i)_{i\geq 1}$ de M on associe le nombre $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x_n}{(-\beta)^n}$.

Lemme 2. *Soient $(a_i)_{i\geq 1}$ et $(d_i)_{i\geq 1}$ deux mots infinis de Lyndon pour la relation* *d'ordre alterné sur un alphabet $\mathcal{A}$ fini tels que :*

$$d_1d_2d_3\cdots \prec a_1a_2a_3\cdots$$

Soit $\log\beta$ *l'entropie du système de Lyndon associé à* $(d_i)_{i\geq 1}$ *que l'on note* M. *Alors :*

$$\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{(-\beta)^n} \geq -\frac{\beta}{\beta+1} \tag{I.24}$$

Preuve La fonction $x \mapsto -\frac{x}{x+1}$ sur $[1,+\infty)$ décroit jusqu'à -1. On note β,le plus grand réel tel que $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{d_n}{(-\beta)^n} = -\dfrac{\beta}{\beta+1}$. Soit M' le système associé à $(a_i)_{i\geq 1}$ et $\log\alpha$ son entropie. α est le plus grand réel vérifiant $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{a_n}{(-\alpha)^n} = -\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$. Et d'après la **proposition 3**.

- Si la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n\geq 1}\frac{a_n}{(-x)^n}$ est au dessus de celle de $x \mapsto -\frac{x}{x+1}$ avant α, alors elle la coupe en α et reste en dessous puis que α est la plus grande valeur pour laquelle deux se coupent. Cette situation ne peut être envisageable car :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{(-x)^n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$-\frac{x}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -1.$$

- La courbe de $x \mapsto \sum\limits_{n\geq 1}\frac{a_n}{(-x)^n}$ est donc en dessous avant α, passe au dessus en α et y demeure au risque de couper à nouveau la courbe de $x \mapsto -\frac{x}{x+1}$. Donc pour $x = \beta$ elle reste au dessus. C'est-à-dire :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{(-\beta)^n} \geq -\frac{\beta}{\beta+1};$$

d'où le résultat ■

Proposition 8. *Soit* $x_1x_2\cdots x_n$ *et* $y_1y_2\cdots y_n$ *deux mots finis du langage de* M. *Alors,*

$$x_1x_2\cdots x_n \prec y_1y_2\cdots y_n \Rightarrow f_{-\beta}(x_1x_2\cdots x_n) < f_{-\beta}(y_1y_2\cdots y_n).$$

.

Preuve

Commençons par remarquer qu'au sens de la relation d'ordre alterné, le minimum des suites $(-\beta)$-admissibles de taille n est $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ et le maximum est $b = (0, d_1, d_2, \cdots, d_{n-1})$. Pour toute suite finie $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ appartenant au langage de M, on a

$$(d_1, d_2, \cdots, d_n) \preceq (x_1, x_2, \cdots, x_n) \preceq (0, d_1, d_2, \cdots, d_{n-1})$$

Soient $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ deux suites finies de L_M telles que

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \prec (y_1, y_2, \cdots, y_n).$$

Le but est de démontrer que $f_{-\beta}(x_1, x_2, \cdots, x_n) < f_{-\beta}(y_1, y_2, \cdots, y_n)$.

1. Pour $n = 1$

$$\begin{aligned}(x_1) \prec (y_1) &\Rightarrow -x_1 < -y_1 \\ &\Rightarrow -\frac{x_1}{\beta} < -\frac{y_1}{\beta}.\end{aligned}$$

   La propriété est vérifiée pour $n = 1$. Supposons qu'elle reste vraie jusqu'à l'ordre k.

2. Pour $k + 1$.

   Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}) \prec (y_1, y_2, \cdots, y_{k+1})$. Donc il existe j tel que $x_i = y_i$ pour tout $i < j$ et $(-1)^j(x_j - y_j) < 0$.

   (i) Si $j \geq 2$, alors $(x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{k+1})$ et $(y_j, y_{j+1}, \cdots, y_{k+1})$ sont de longueur inférieure ou égale à k.
   $(x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{k+1}) \prec (y_j, y_{j+1}, \cdots, y_{k+1})$ si j est impair et dans ce cas $f_{-\beta}(x_j \cdots x_{k+1}) < f_{-\beta}(y_j \cdots y_{k+1})$ par hypothèse de récurrence. Ceci implique que

$$\frac{1}{(-\beta)^{j-1}} f_{-\beta}(x_j \cdots x_{k+1}) < \frac{1}{(-\beta)^{j-1}} f_{-\beta}(y_j \cdots y_{k+1}) \text{ puis que } j-1 \text{ est pair.}$$

De même, si j est pair, $(y_j, y_{j+1}, \cdots, y_{k+1}) \prec (x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{k+1})$. Donc,

$$f_{-\beta}(y_j \cdots y_{k+1}) < f_{-\beta}(x_j \cdots x_{k+1}).$$

Là encore, on a

$$\frac{1}{(-\beta)^{j-1}} f_{-\beta}(x_j \cdots x_{k+1}) < \frac{1}{(-\beta)^{j-1}} f_{-\beta}(y_j \cdots y_{k+1}) \text{ car } j-1 \text{ impair}$$

Comme $x_i = y_i$ pour tout $i < j$, il s'en suit que

$$f_{-\beta}(x_1 \cdots x_{k+1}) < f_{-\beta}(y_1 \cdots y_{k+1}).$$

(ii) Si $j = 1$,

Si $j = 1$, alors $x_1 \geq y_1 + 1$ et ainsi, $x_1 d_1 d_2 \cdots d_k$ et $y_1 0 d_1 d_2 \cdots d_{k-1}$ sont dans le langage de M. Le plus grand mot (au sens de la relation d'ordre alterné) de longueur $n+1$ commençant par x_1 est $x_1 d_1 d_2 \cdots d_k$ et le plus petit (au sens de la relation d'ordre alterné) de longueur $n+1$ commençant par y_1 est $y_1 0 d_1 d_2 \cdots d_{k-1}$. On a donc

$$x_1 \cdots x_{k+1} \prec x_1 d_1 \cdots d_k \prec (x_1 - 1) 0 d_1 \cdots d_{k-1} \prec y_1 0 d_1 \cdots d_{k-1} \prec y_1 \cdots y_{k+1}.$$

Compte tenu du cas $j \geq 2$,

$$f_{-\beta}(x_1 x_2 \cdots x_{k+1}) \leq f_{-\beta}(x_1 d_1 \cdots d_k) \text{ et } f_{-\beta}(y_1 0 d_1 \cdots d_{k-1}) \leq f_{-\beta}(y_1 \cdots y_{k+1}).$$

Il est aussi aisé de voir que $f_{-\beta}((x_1 - 1) 0 d_1 \cdots d_{k-1}) \leq f_{-\beta}(y_1 0 d_1 \cdots d_{k-1})$.
Il reste alors à montrer que $(x_1 d_1 \cdots d_k)_{-\beta} < ((x_1 - 1) 0 d_1 \cdots d_{k-1})_{-\beta}$.

On pose :

$$\Delta = f_{-\beta}(x_1 d_1 \cdots d_k) - f_{-\beta}((x_1-1)0d_1 \cdots d_{k-1}).$$

Si $d_1 \cdots d_k = d_1 \cdots d_{2m-1} d_1 \cdots d_p$ on arrive facilement au résultat. En effet, pour ce cas précis, Δ vaut :

$$\begin{aligned} & f_{-\beta}(x_1 d_1 \cdots d_{2m-1}) - f_{-\beta}((x_1-1)0d_1 \cdots d_{2m-2}) \\ & + \frac{1}{\beta^{2m}} \left(f_{-\beta}(d_1 \cdots d_p) - f_{-\beta}(d_{2m-1} d_1 \cdots d_{p-1}) \right). \end{aligned}$$

Mais $d_1 \cdots d_p \prec d_{2m-1} d_1 \cdots d_{p-1}$ et par hypothèse de récurrence

$$f_{-\beta}(d_1 \cdots d_p) - f_{-\beta}(d_{2m-1} d_1 \cdots d_{p-1}) < 0.$$

Donc :

$$\Delta < f_{-\beta}(x_1 d_1 \cdots d_{2m-1}) - f_{-\beta}((x_1-1)0d_1 \cdots d_{2m-2}).$$

Cette différence à droite de l'inégalité est bien négative par hypothèse de récurrence.
De même si k est impair et $d_k = 0$ alors,

$$\begin{aligned} \Delta &= f_{-\beta}(x_1 d_1 \cdots d_{k-1}) - f_{-\beta}((x_1-1)0d_1 \cdots d_{k-2}) - \frac{d_k - 1}{\beta^{k+1}} \\ \Rightarrow &\leq f_{-\beta}(x_1 d_1 \cdots d_{k-1}) - f_{-\beta}((x_1-1)0d_1 \cdots d_{k-2}) \\ \Rightarrow \Delta &< 0 \end{aligned}$$

Nous considérons maintenant le cas où $d_1 d_2 \cdots d_k$ n'est pas sous la forme

$$d_1 \cdots d_{2m-1} d_1 \cdots d_p \text{ avec } d_k \neq 0 \text{ pour } k \text{ impair}$$

Montrons que dans ce cas Δ reste négatif. Pour ce faire, nous allons regarder les successeur et prédécesseur de longueur $k+1$ de $(x_1-1)0d_1 \cdots d_{k-1}$ et

$x_1 d_1 \cdots d_k$ respectivement dans le langage associé à M. Il s'agit respectivement des mots :

$$(x_1 - 1)0d_1 \cdots d_{k-2}(d_{n-1} + (-1)^{k-1}) \text{ et } x_1 d_1 \cdots d_{k-1}(d_k + (-1)^k).$$

Donc, $f_{-\beta}(x_1 d_1 \cdots d_k)$ et $f_{-\beta}(x_1 d_1 \cdots d_{k-1}(d_k + (-1)^k))$ sont consécutifs dans l'ensemble des images par $f_{-\beta}$ des mots du langage de longueur $n+1$. Il en est de même pour $f_{-\beta}((x_1 - 1)0d_1 \cdots d_{k-1})$ et $f_{-\beta}((x_1 - 1)0d_1 \cdots d_{k-2}(d_{k-1} + (-1)^{k-1}))$.

Si $f_{-\beta}((x_1 - 1)0d_1 \cdots d_{k-1}) < f_{-\beta}(x_1 d_1 \cdots d_k)$, on aurait alors :

$$f_{-\beta}((x_1 - 1)0d_1 \cdots d_{k-2}(d_{k-1} + (-1)^{k-1})) < f_{-\beta}(x_1 d_1 \cdots d_{k-1}(d_k + (-1)^k))$$

Mais les suites

$$(d_1, d_2, \cdots, d_{k-2}, d_{k-1} + (-1)^{k-1}, 0, \cdots) \text{ et } (d_1, d_2, \cdots, d_{k-1}, d_k + (-1)^k, 0, \cdots)$$

sont des mots de Lyndon pour la relation d'ordre alterné. En outre, on a :

$$\begin{cases} d_1 d_2 d_3 \cdots \prec d_1 d_2 \cdots d_{k-2}(d_{k-1} + (-1)^{k-1})000 \cdots \\ d_1 d_2 d_3 \cdots \prec d_1 d_2 \cdots d_{k-1}(d_k + (-1)^k)000 \cdots \end{cases}$$

D'après le lemme 2,

$$\begin{cases} (d_1 d_2 \cdots d_{k-2}(d_{k-1} + (-1)^{k-1}))_{-\beta} \geq -\frac{\beta}{\beta+1} \\ (d_1 d_2 \cdots d_{k-1}(d_k + (-1)^k))_{-\beta} \geq -\frac{\beta}{\beta+1} \end{cases}$$

Il s'en suit que

$$f_{-\beta}((x_1 - 1)0d_1 \cdots d_{n-2}(d_{k-1} + (-1)^{k-1}) \geq f_{-\beta}(x_1 d_1 \cdots d_{k-1}(d_k + (-1)^k))$$

L'égalité survient si

$$\begin{cases} f_{-\beta}(d_1d_2\cdots d_{k-2}(d_{k-1}+(-1)^{k-1})) & = -\frac{\beta}{\beta+1} \\ f_{-\beta}(d_1d_2\cdots d_{k-2}d_{k-1}(d_k+(-1)^{k})) & = -\frac{\beta}{\beta+1} \end{cases}$$

Dans ce cas $\beta = (-1)^k d_k + 1$. C'est-à-dire

$$\beta = \begin{cases} d_k + 1 & \text{si } k \text{ pair} \\ -d_k + 1 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

Et donc

$$\begin{cases} \beta = d_1 + 1 & \text{et } d_k = d_1 \text{ pour } k \text{ pair} \\ \beta = 1 & \text{et } d_k = 0 \text{ pour } k \text{ impair} \end{cases}$$

Mais ces deux cas ne sont pas envisageable puisque $d_1 \cdots d_k$ ne se met pas sous la forme $d_1 \cdots d_{2m-1} d_1 \cdots d_p$ et $d_k \neq$ si k est impair. Il vient alors que :

$$f_{-\beta}((x_1-1)0d_1\cdots d_{k-2}(d_{k-1}+(-1)^{k-1}) > f_{-\beta}(x_1d_1\cdots d_{k-1}(d_k+(-1)^{k}))$$

Ceci achève la preuve de la proposition ■

Théorème 1. *Soit $(d_i)_{i\geq 1}$ un mot infini de Lyndon pour la relation d'ordre alterné, $M = M((d_i)_{i\geq 1})$ le système dynamique unilatéral gauche associé. On suppose que $\log\beta$ est l'entropie du système. Alors,*

- *$f_{-\beta}$ est croissante au sens large sur M.*
- *$f_{-\beta}$ est continue sur M.*
- *L'image par $f_{-\beta}$ de M est l'intervalle $\overline{I}_\beta = [-\frac{\beta}{\beta+1}, \frac{1}{\beta+1}]$.*

Preuve

Le premier point du théorème est une conséquence de la proposition précédente. La croissance large sur les mots infinis s'obtient par passage à la limite sur le résultat de cette proposition (les mots sont pris sur un alphabet fini).

Montrons la continuité de $f_{-\beta}$. Soient $(x_i)_{i\geq 1}$ et $(y_i)_{i\geq 1}$ deux suites de M. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un unique entier n tel que :

$$-\frac{\log \epsilon}{\log \beta} \leq n < -\frac{\log \epsilon}{\log \beta} + 1, \tag{I.25}$$

c'est-à-dire qu'il existe un unique entier n tel que :

$$n = \lfloor -\frac{\log \epsilon}{\log \beta} \rfloor.$$

Pour un tel n, supposons

$$d((x_i)_{i\geq 1}, (y_i)_{i\geq 1}) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Cette relation signifie que pour tout $i < n$, $x_i = y_i$. Ainsi,

$$|f_{-\beta}((x_i)_{i\geq 1}) - f_{-\beta}((y_i)_{i\geq 1})| = \frac{1}{\beta^n} |f_{-\beta}((x_{n+i})_{i\geq 1}) - f_{-\beta}((y_{n+i})_{i\geq 1})|.$$

Comme $f_{-\beta}$ est croissante, il vient que $|f_{-\beta}((x_{n+i})_{i\geq 1}) - f_{-\beta}((y_{n+i})_{i\geq 1})| \leq 1$ et donc

$$|f_{-\beta}((x_i)_{i\geq 1}) - f_{-\beta}((y_i)_{i\geq 1})| \leq \frac{1}{\beta^n}.$$

La relation I.25 implique que $\frac{1}{\beta^n} \leq \epsilon < \frac{1}{\beta^{n-1}}$. Par conséquent,

$$|f_{-\beta}((x_i)_{i\geq 1}) - f_{-\beta}((y_i)_{i\geq 1})| \leq \epsilon.$$

Nous venons de montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta(\epsilon) = \dfrac{1}{2^{\lfloor -\frac{\log \epsilon}{\log \beta} \rfloor}}$ tel que

$$d((x_i)_{i\geq 1} - (y_i)_{i\geq 1}) \leq \eta \Rightarrow |f_{-\beta}((x_i)_{i\geq 1}) - f_{-\beta}((y_i)_{i\geq 1})| \leq \epsilon.$$

D'où la continuité de $f_{-\beta}$.

Montrons que l'image par $f_{-\beta}$ de M est l'intervalle $\overline{I}_\beta$ dont les bornes sont $f_{-\beta}(d_1 d_2 \cdots) = -\dfrac{\beta}{\beta+1}$ et $f_{-\beta}(0 d_1 d_2 \cdots) = \dfrac{1}{\beta+1}$. En fait, la continuité de l'application $f_{-\beta}$ permet d'avoir $f_{-\beta}(M) = \overline{I}_\beta$. En effet, M est un fermé compact, donc son image par $f_{-\beta}$ l'est aussi. Ainsi, $f_{-\beta}(M)$ est une réunion d'intervalles fermés tous contenus dans $\overline{I}_\beta$ (croissance de $f_{-\beta}$). Il suffit alors de montrer que le passage d'un intervalle à l'autre ne peut se faire par un "saut". Autrement dit, la borne supérieure d'un intervalle est une borne inférieure pour un autre intervalle. Pour se faire, on pose :

$$f_{-\beta}(M) = \bigcup_k [r_k, t_k], \ r_k \text{ et } t_k \text{ tels que } r_0 = -\frac{\beta}{\beta+1} < t_0 \leq r_1 < t_1 \leq r_2 < t_2 \cdots \ .$$

Il existe deux suites $(x_i)_{i\geq 1}$ et $(y_i)_{i\geq 1}$ dans M telles que :

$$f_{-\beta}(x_1x_2\cdots) = t_{k-1} \text{ et } f_{-\beta}(y_1y_2\cdots) = r_k.$$

Compte tenu des propriétés de la relation d'ordre alterné, $x_1x_2\cdots \preceq y_1y_2\cdots$. Si r_k et t_k sont différents, alors l'égalité entre les deux suites ne peut arriver. Il existerait alors un entier n tel que $x_i = y_i$ pour $i < n$ et $(-1)^n(x_n - y_n) < 0$. Si $(-1)^n(x_n - y_n) \leq -2$, alors il y a autant d'éléments dans M qu'entre l'intervalle de mots $x_1x_2\cdots$ et $y_1y_2\cdots$. En effet, toute concaténation de $x_1x_2\cdots x_{n-1}(x_n + (-1)^n)$ et un mot u parcourant M est telle que :

$$x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}\cdots \prec x_1x_2\cdots x_{n-1}(x_n+(-1)^n)u \prec y_1y_2\cdots \ .$$

Comme u parcourt M, l'image par $f_{-\beta}$ de cet ensemble de mots est $\gamma + \frac{1}{(-\beta)^n} f_{-\beta}(M)$, avec

$$\gamma = f_{-\beta}(x_1x_2 \cdot x_{n-1}(x_n + (-1)^n).$$

Ceci contredit le fait que t_{k-1} et r_k sont consécutifs dans $f_{-\beta}(M)$. Prenons maintenant $(-1)^n(x_n - y_n) = -1$. Ainsi,

$$t_{k-1} - r_k = \frac{1}{(-\beta)^n} \left(-(-1)^n + f_{-\beta}(x_{n+1}x_{k+2}\cdots) - f_{-\beta}(y_{n+1}y_{k+2}\cdots)\right).$$

Donc, $t_{k-1} \neq r_k$ signifie :

$$\begin{cases} (x_{n+1}x_{n+2}\cdots)_{-\beta} - (y_{n+1}y_{n+2}\cdots)_{-\beta} \neq 1 & \text{si } n \text{ est pair ,} \\ (x_{n+1}x_{n+2}\cdots)_{-\beta} - (y_{n+1}y_{n+2}\cdots)_{-\beta} \neq -1 & \text{si } n \text{ est impair .} \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} ((x_{n+1}x_{n+2}\cdots)_{-\beta}, (y_{n+1}y_{n+2}\cdots)_{-\beta}) \neq (\frac{1}{\beta+1}, -\frac{\beta}{\beta+1}) & \text{si } n \text{ est pair ,} \\ ((x_{n+1}x_{n+2}\cdots)_{-\beta}, (y_{n+1}y_{n+2}\cdots)_{-\beta}) \neq (-\frac{\beta}{\beta+1}, \frac{1}{\beta+1}) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Le sous-shift M est stable par le décalage. Donc $x_{n+1}x_{n+2}\cdots$ et $y_{n+1}y_{n+2}\cdots$ sont dans M. Ainsi, tout mot v commençant par $x_1x_2\cdots x_n$ est tel que :

$$\begin{cases} x_1x_2\cdots x_n0d_1d_2\cdots \preceq v \preceq x_1x_2\cdots x_nd_1d_2\cdots & \text{si } n \text{ est impair ,} \\ x_1x_2\cdots x_nd_1d_2\cdots \preceq v \preceq x_1x_2\cdots x_n0d_1d_2\cdots & \text{si } n \text{ est pair .} \end{cases}$$

Soit $(d_i^*)_{i\geq 1}$ la suite maximale, au sens de la relation d'ordre alterné, dans M telle que :

$$f_{-\beta}(d_1^*d_2^*d_3^*d_4^*\cdots) = -\frac{\beta}{\beta+1}.$$

Nous choisissons de regarder le cas n pair, le cas impair se traitant de façon similaire. Si $(x_1x_2\cdots)_{-\beta} \neq \dfrac{1}{\beta+1}$, alors

$$x_1x_2\cdots \prec x_1x_2\cdots x_n0d_1^*d_2^*\cdots \prec x_1x_2\cdots x_{n-1}(x_n+1)d_1d_2\cdots \preceq y_1y_2\cdots .$$

Il existe un entier m tel que $x_{n+1}\cdots x_{n+m-1} = 0d_1^*d_2^*\cdots d_{m-2}^*$ et $(-1)^m(x_{m+n} - d_{m-1}^*) < 0$. Tous les mots commençant par $x_1x_2\cdots x_n0d_1^*d_2^*\cdots d_{m-1}^*$ sont supérieurs à $x_1x_2x_3\cdots$ au sens de la relation d'ordre alterné. Il suffit alors de considérer un i convenable plus grand que m et provoquer une perturbation en cet indice. Il s'agit des mots $x_1\cdots x_n0d_1^*\cdots d_{i-1}^*ju$ avec $(-1)^i(d_i^* - j) < 0$ et u parcourt M. L'image par $(\cdot)_{-\beta}$ de ces mots contient autant d'éléments que $f_{-\beta}(M)$. Donc, une infinité d'entre elles sont inférieures à $f_{-\beta}(y_1y_2y_3\cdots)$. Ce qui contredit le fait que t_{k-1} et r_k sont consécutifs dans $f_{-\beta}(M)$. ■

Vu la **proposition 8** et la surjectivité de l'application $f_{-\beta}$, il vient que :

Proposition 9. *Soit $(d_n)_{n\geq 1}$ un mot de Lyndon associé à $\beta > 1$, les images par $f_{-\beta}$*

de deux cylindres ${}_0[x_1 \cdots x_n]$ *et* ${}_0[y_1 \cdots y_n]$ *de même longueur sont deux intervalles disjoints ou contigus d'intersection réduite à un point. Si ces images ont en commun un point* z *et si*

$$x_1 \cdots x_n \prec y_1 y_2 \cdots y_n \text{ et } x_1 x_2 \cdots x_{n-1} = y_1 y_2 \cdots y_{n-1}.$$

Alors

$$y_1 y_2 \cdots y_n = x_1 x_2 \cdots x_{n-1}(x_n + (-1)^n)$$

et

$$z = f_{-\beta}(x_1 x_2 \cdots x_n d_1 d_2 \cdots) = f_{-\beta}(x_1 \cdots x_{n-1}(x_n + (-1)^n) 0 d_1 d_2 \cdots).$$

3.5 Réels associés à plusieurs Lyndon alternés

On considère un alphabet ordonné fini $\mathcal{A}$. Le but de cette section est de déterminer pour quels réels sont associés plusieurs mots de Lyndon (pour la relation d'ordre alterné).

Proposition 10. *Soit* $\beta \geq 1$ *un réel associé à au moins deux mots de Lyndon pour la relation d'ordre alterné. Alors, il existe un mot de Lyndon faible (un mot de Lyndon périodique) pour la relation d'ordre alterné associé à* β.

Preuve On considère deux mots de Lyndon pour la relation d'ordre alterné sur $\mathcal{A}$, $(a_i)_{i\geq 1}$ et $(d_i)_{i\geq 1}$. On suppose que $(d_i)_{i\geq 1}$ est la plus grand mot associé à β. Alors

$$a_1 a_2 a_3 \cdots \prec d_1 d_2 d_3 \cdots$$

ceci implique qu'il existe un entier n tel que $a_i = d_i$ pour tout $i < n$ et $(-1)^n(a_n - d_n) < 0$. Par ailleurs,

$$\sum_{k\geq 1} \frac{a_k}{(-\beta)^k} = \sum_{k\geq 1} \frac{d_k}{(-\beta)^k}.$$

Donc :

$$a_n - d_n + \sum_{k\geq 1} \frac{a_{n+k}}{(-\beta)^k} - \sum_{k\geq 1} \frac{d_{n+k}}{(-\beta)^k} = 0.$$

Comme $(a_{k+n})_{k\geq 1}$ et $(d_{k+n})_{k\geq 1}$ sont dans les systèmes de Lyndon associés aux mots $(a_i)_{i\geq 1}$ et $(d_i)_{i\geq 1}$, et compte tenu du théorème précédent, il vient que :

$$|\sum_{k\geq 1} \frac{a_{n+k}}{(-\beta)^k} - \sum_{k\geq 1} \frac{d_{n+k}}{(-\beta)^k}| \leq 1.$$

Mais $|a_n - d_n| \geq 1$. D'où :

$$\begin{cases} a_n - d_n = 1 \\ \sum_{k\geq 1} \frac{a_{n+k}}{(-\beta)^k} - \sum_{k\geq 1} \frac{d_{n+k}}{(-\beta)^k} = -1 \end{cases}$$

ou alors

$$\begin{cases} a_n - d_n = -1 \\ \sum_{k\geq 1} \frac{a_{n+k}}{(-\beta)^k} - \sum_{k\geq 1} \frac{d_{n+k}}{(-\beta)^k} = 1. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} a_n - d_n & = 1 \text{ avec } n \text{ impair} \\ \sum_{i\geq 1} \frac{a_{n+i}}{(-\beta)^i} & = -\frac{\beta}{\beta+1} \\ \sum_{i\geq 1} \frac{d_{n+i}}{(-\beta)^i} & = \frac{1}{\beta+1} \end{cases} \quad (\text{I.26}) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_n - d_n & = -1 \text{ avec } n \text{ pair} \\ \sum_{i\geq 1} \frac{a_{n+i}}{(-\beta)^i} & = \frac{1}{\beta+1} \\ \sum_{i\geq 1} \frac{d_{n+i}}{(-\beta)^i} & = -\frac{\beta}{\beta+1}. \end{cases} \quad (\text{I.27})$$

Soit u le mot tel que

$$u = \begin{cases} \overline{d_1 d_2 \cdots d_n 0} & \text{si } n \text{ est impair ,} \\ \overline{d_1 d_2 \cdots d_n} \cdots & \text{si } n \text{ est pair .} \end{cases}$$

Comme $(-1)^n(a_n - d_n) < 0$ et pour tout i, $0 \leq d_i \leq d_1$, il vient que $(a_i)_{i\geq 1} \prec u \preceq (d_i)_{i\geq 1}$. Par ailleurs, u est un mot de Lyndon puisque $d_1 \cdots d_n 0 \preceq d_1 d_2 \cdots d_n d_{n+1}$ si n est impair et $d_1 d_2 \cdots d_n d_1 \preceq d_1 \cdots d_{n+1}$ si n est pair. D'après la proposition 3, u est associé à β. Donc, $\overline{(d_1, d_2, \cdots, d_n, 0)}$ est un Lyndon faible associé à β pour n

impair tout comme $\overline{(d_1, \cdots, d_n)}$ pour n pair ■

Dans les sections **3.2** et **3.3**, nous avons vu que les mots de Lyndon pour la relation d'ordre alterné associés à 1 sont les termes de la suite $(\overline{\phi^n(1)})_{n\geq 1}$ la limite incluse. De plus si un mot de Lyndon $(d_i)_{i\geq 1}$ pour la relation d'ordre alterné est tel que :

$$(d_i)_{i\geq 1} \prec \lim_{n\to+\infty} \phi^n(1)$$

alors, il est associé à un réel β strictement plus grand que 1. Pour un tel β on se propose de déterminer l'ensemble des Lyndon (pour la relation d'ordre alterné) qui lui sont associés.

Proposition 11. *Soit $\overline{(d_1, d_2, \cdots, d_n)}$ un mot de Lyndon faible pour la relation d'ordre alterné associé à un réel $\beta > 1$ (avec n est minimal). Alors tout mot de Lyndon alterné tel que :*

$$d_1 d_2 \cdots d_{n-1}(d_n - 1)0\overline{d_1 \cdots d_n} \preceq a_1 a_2 \cdots \preceq \overline{d_1 d_2 \cdots d_n} \text{ si } n \text{ est pair} \tag{I.28}$$

$$d_1 d_2 \cdots d_n \overline{d_1 \cdots d_{n-1}(d_n - 1)0} \preceq a_1 a_2 \cdots \preceq \overline{d_1 \cdots d_{n-1}(d_n - 1)0} \text{ si } n \text{ impair} \tag{I.29}$$

est associé à β.

Preuve On note **Lyn**(β) l'ensemble des mots de Lyndon pour la relation d'ordre alterné associé à β, max et min deux mots de **Lyn**(β) tels que pour tout $(a_i)_{i\geq 1} \in$ **Lyn**(β),

$$min \preceq (a_i)_{i\geq 1} \preceq max.$$

De la proposition 10, on sait qu'il existe un mot de Lyndon périodique associé à β, disons $\overline{(d_1, d_2, \cdots, d_n)}$ (avec n minimal). max et min débutent alors par $d_1 d_2 \cdots d_{n-1}$.

- Si n est pair

$$min = d_1 d_2 \cdots d_{n-1}(d_n - 1)0max \text{ puisque } |d_1 d_2 \cdots d_{n-1}(d_n - 1)0| \text{ est impair .}$$

Et

$$max = d_1 d_2 \cdots d_n max \text{ puisque } |d_1 d_2 \cdots d_n| \text{ est pair .}$$

Donc, max est périodique de période n.

$$max = \overline{d_1 d_2 \cdots d_n}.$$

Et

$$min = d_1 d_2 \cdots d_{n-1}(d_n - 1)0\overline{d_1 d_2 \cdots d_n}.$$

– Si n est impair,

$$min = d_1 d_2 \cdots d_n max \text{ puisque } |d_1 \cdots d_n| \text{ est impair .}$$

Et

$$max = d_1 d_2 \cdots d_{n-1}(d_n - 1)0 max \text{ puisque } |d_1 \cdots d_{n-1}(d_n - 1)0| \text{ est pair .}$$

Donc max est périodique de période $n + 1$.

$$max = \overline{d_1 d_2 \cdots d_{n-1}(d_n - 1)0}.$$

Et

$$min = d_1 d_2 \cdots d_n \overline{d_1 \cdots d_{n-1}(d_n - 1)0}$$

Ainsi, $\mathbf{Lyn}(\beta)$ est l'ensemble des mots de Lyndon $(a_i)_{i \geq 1}$ pour la relation d'ordre alterné tels que :

$$d_1 d_2 \cdots d_{n-1}(d_n - 1)0\overline{d_1 \cdots d_n} \preceq a_1 a_2 \cdots \preceq \overline{d_1 d_2 \cdots d_n} \text{ si } n \text{ est pair ,}$$
$$d_1 d_2 \cdots d_n \overline{d_1 \cdots d_{n-1}(d_n - 1)0} \preceq a_1 a_2 \cdots \preceq \overline{d_1 \cdots d_{n-1}(d_n - 1)0} \text{ si } n \text{ impair .}$$

Ce qui achève la preuve ■

Dans la proposition précédente, il est sous-entendu que $max \prec \lim_{n \to +\infty} \phi^n(1)$.

Définition 8. *Dans la suite, soit donné un réel $\beta > 1$ associé à un mot de Lyndon $(d_i)_{i \geq 1}$ pour $\preceq$, nous noterons $(d_i^*)_{i \geq 1}$ le plus grand mot de Lyndon pour la relation d'ordre alterné associé à β, c'est-à-dire :*

$$(d_i^*)_{i\geq 1} = \begin{cases} \overline{(d_1, \cdots, d_{2p}, d_{2p+1} - 1, 0)} & \textit{si } \overline{(d_1, \cdots, d_{2p+1})} \textit{ est un Lyndon associé à } \beta \\ (d_1, d_2, \cdots) & \textit{si } (d_i)_{i\geq 1} \textit{ est l'unique mot de Lyndon associé à } \beta \end{cases} \tag{I.30}$$

Dans la relation ci-dessus, on considère $2p+1$ *minimal.*

$$(d_i^*)_{i\geq 1} \prec \lim_{n\to+\infty} \phi^n(1)$$

Il est à noter que dans le premier cas, on a toujours $d_{2p+1} \neq 0$. En effet, si $\overline{(d_1, \cdots, d_{2p}, 0)}$ est un mot de Lyndon associé à β, alors le plus grand mot de Lyndon (pour la relation d'ordre alterné) associé à β est $\overline{(d_1, \cdots, d_{2p-1}, d_{2p} + 1)}$.

Proposition 12. *L'ensemble des réels associés aux mots de Lyndon faibles est dense dans* $[1, +\infty)$.

Le résultat précédent vient du fait qu'entre deux mots de Lyndon pour la relation d'ordre alterné, aussi proches soient-ils, on peut toujours trouver un mot de Lyndon faible.

4 Développements en base négative

Les développements en base négative ont été introduits par Ito et Sadahiro dans [IS09]. Étant donné $\beta > 1$, à chaque réel x de l'intervalle $I_\beta = [-\frac{\beta}{\beta+1}, \frac{1}{\beta+1})$ est attachée une écriture unique obtenue moyennant un algorithme spécifique. On sait que $-\frac{\beta}{\beta+1}$ est l'image par $f_{-\beta}$ d'au moins un mot de Lyndon pour la relation d'ordre alterné. Il existe un mot de Lyndon obtenu par cet algorithme qui est associé à β. L'ensemble de ces écritures est un sous-ensemble du système de Lyndon (pour la relation d'ordre alterné) associé à ce mot. Cette représentation, comme dans le cas des β-développements de Rényi et Parry (voir [Par60]) s'étend à tous les réels de $\mathbb{R}$. Il convient de ce fait de faire un bref aperçu sur la β-représentation de Rényi et Parry.

4.1 Représentation des nombres en base positive

Soit un réel $\beta > 1$. On définit l'application T_β de $[0,\ 1)$ dans lui-même par $T_\beta(x) = \beta x - \lfloor \beta x \rfloor$. Tout nombre x de l'intervalle $[0, 1[$ s'écrit de façon unique comme :

$$x = \sum_{i \geq 1} \frac{x_i}{\beta^i} \text{ avec } 0 \leq x < 1 \ ,$$

où $x_i = \lfloor \beta T_\beta^{i-1}(x) \rfloor$. Ceci équivaut à dire que pour tout k,

$$\sum_{i \geq 1} \frac{x_{k+i}}{\beta^i} < 1.$$

Si $x \geq 1$, on note n le plus petit entier tel que $\frac{x}{\beta^n} < 1$. Alors :

$$x = x_{-n+1}\beta^{n-1} + x_{-n+2}\beta^{n-2} + \cdots + x_{-1}\beta + x_0 + \frac{x_1}{\beta} + \cdots \ ,$$

avec $x_{-n+i} = \lfloor \beta T_\beta^i(\frac{x}{\beta^n}) \rfloor$.

L' écriture $\cdot x_1 x_2 \cdots$ ou $x_{-n+1}x_{-n+2} \cdots x_{-1}x_0 \cdot x_1 \cdots$ est appelée β-développement de x en base β et on note $d_\beta(x) = \cdot x_1 x_2 \cdots$ ou alors $d_\beta(x) = x_{-n+1}x_{-n+2} \cdots x_0 \cdot x_1 x_2 \cdots$. Ito et Sadahiro dans [IS09] étendent cette idée à des réels $-\beta$ inférieurs à -1. D'abord, commençons par nous munir des outils nécessaires pour établir ces développements dits en bases négatives.

4.2 La $(-\beta)$-transformation

Soit β un réel strictement plus grand que 1. On pose $l_\beta = -\dfrac{\beta}{\beta+1}$, $r_\beta = \dfrac{1}{\beta+1}$. On définit sur l'intervalle $I_\beta = [l_\beta, r_\beta)$ la transformation $T_{-\beta}$ qui à un point x associe l'unique y congru à $-\beta x$ qui se trouve dans I_β. Ainsi donc, il existe un entier $k(x)$ tel que $-\beta x - k(x)$ est dans I_β.

$$\begin{aligned} l_\beta \leq -\beta x - k(x) < r_\beta \Rightarrow k(x) &\leq -\beta x - l_\beta < k(x) + 1 \\ &\Rightarrow k(x) = \lfloor -\beta x - l_\beta \rfloor. \end{aligned}$$

Nous avons donc la définition équivalente suivante :

$$T_{-\beta} : I_\beta \longrightarrow I_\beta$$
$$x \longmapsto -\beta x - \lfloor -\beta x - l_\beta \rfloor \tag{I.31}$$

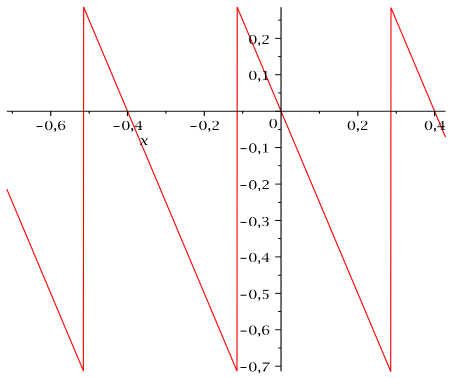


FIGURE I.1 – $(-\beta)$-transformation pour $\beta = 2.5$

La transformation $T_{-\beta}$ est appelée $(-\beta)$-transformation. Par construction, elle est surjective.

L'intervalle I_β étant de longueur 1, il n'existe qu'un seul entier x_1 tel que $-\beta x = x_1 + y_1$ et y_1 est dans I_β. Ce dernier n'est rien d'autre que l'image par $T_{-\beta}$ de x. En appliquant ce même raisonnement sur y_1, on obtient le couple (x_2, y_2) tel que $-\beta y_1 = x_2 + y_2$ avec x_2 entier et y_2 dans $I_{-\beta}$. En continuant le processus, on obtient l'algorithme :

$$-\beta y_n = x_{n+1} + y_{n+1} \tag{I.32}$$

y_n est l'image de x par la n-ième itérée de $T_{-\beta}$. Donc,

$$-\beta T^n_{-\beta}(x) = x_{n+1} + T^{n+1}_{-\beta}(x) \text{ avec } x_{n+1} = \lfloor -\beta T^n_{-\beta}(x) - l_\beta \rfloor \tag{I.33}$$

La suite $(x_i)_{i\geq 1}$ est bornée par la partie entière de β. En effet, il suffit de remarquer que :

$$y_i \in I_\beta \Longrightarrow 0 < -\beta y_i - l_\beta \leq \beta$$
$$\Longrightarrow 0 \leq \lfloor -\beta y_i - l_\beta \rfloor \leq \lfloor \beta \rfloor$$

Ceci nous permet d'affirmer que les séries $\sum\limits_{m\geq 1}\frac{x_{m+a}}{(-\beta)^m}$ sont toutes absolument convergentes. De la relation (I.33), on a :

$$(-\beta)^{n+1}\left(x+\frac{x_1}{\beta}-\frac{x_2}{\beta^2}+\frac{x_3}{\beta^3}+\cdots-\frac{x_{n+1}}{(-\beta)^{n+1}}\right)=y_{n+1}. \tag{I.34}$$

En faisant tendre n vers l'infini et comme $(y_n)_{n\geq 1}$ est bornée, on obtient :

$$x=\sum_{n\geq 1}\frac{x_n}{(-\beta)^n}. \tag{I.35}$$

Et plus généralement, d'après (I.34) et (I.35) (puisque y_n vaut $T^n_{-\beta}(x)$)

$$T^n_{-\beta}(x)=\sum_{i\geq 1}\frac{x_{n+i}}{(-\beta)^i} \tag{I.36}$$

La suite $(x_i)_{i\geq 1}$ permet de donner une nouvelle écriture de x. Ceci fait l'objet de la définition suivante :

Définition 9. *Soit x dans I_β, $(x_i)_{i\geq 1}$ la suite définie par :*

$$x_i=\lfloor -\beta T^{i-1}_{-\beta}(x)-l_\beta\rfloor.$$

L'écriture $.x_1x_2x_3\cdots$ est appelée $(-\beta)$-développement ou développement en base $-\beta$ de x et on note

$$d(x,-\beta)=.x_1x_2x_3x_4\cdots. \tag{I.37}$$

De plus, $(x_i)_{i\geq 1}$ est l'unique suite telle que pour tout k,

$$\sum_{i\geq 1}\frac{x_{k+i}}{(-\beta)^i}\in[l_\beta,r_\beta) \tag{I.38}$$

La relation I.38 se traduit par

$$.d_1d_2d_3\cdots\preceq .x_kx_{k+1}\cdots\prec .0d_1^*d_2^*\cdots.$$

où $(d_i^*)_{i\geq 1}$ est le plus grand mot de Lyndon (pour la relation d'ordre alterné) associé à β.

Cette écriture concerne uniquement les réels de l'intervalle I_β. Toutefois, on peut étendre le concept sur $\mathbb{R}$ tout entier. En effet, si x n'appartient pas à I_β, on trouve le plus petit entier m tel que $\frac{x}{(-\beta)^m}$ se trouve dans I_β et on détermine son développement que l'on note encore $x_1x_2\cdots$. Le développement en base $-\beta$ est alors $x_1x_2\cdots x_{m-1}x_m.x_{m+1}\cdots$. Ceci revient à décaler m termes à gauche du point.

Définition 10. *([IS09])*

Une suite infinie $(x_i)_{i\geq 1}$ est dite $(-\beta)-$admissible s'il existe un réel x dans I_β tel que $d(x,-\beta) = .x_1x_2x_3\cdots$. En outre, une séquence finie sera dite $(-\beta)$-admissible si elle apparaît dans une suite infinie $(-\beta)-$admissible.

5 Le $(-\beta)$-shift

Nous avons vu la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ qui est le $(-\beta)$-développement d'un nombre x de I_β est obtenue par itération de la $(-\beta)$-transformation. Si $y = T_{-\beta}(x)$ alors, le développement de y en base $-\beta$ est $(y_n)_{n\geq 1} = (x_{n+1})_{n\geq 1}$. Notons $X_{-\beta}$ l'ensemble des développements en base $-\beta$. Alors, $X_{-\beta}$ est invariant par le shift (décalage) : $(y_n)_{n\geq 1} \mapsto (y_{n+1})_{n\geq 1}$.

L'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1, \cdots, \lfloor\beta\rfloor\}$ étant fini, pour k fixé dans $\mathbb{N}$, il existe un nombre fini de suites $(-\beta)$-admissible de taille k. Dans les lignes à suivre, nous utiliserons le terme mots pour désigner les suites finies et nous les noterons sans parenthèses et virgule entre les chiffres. Si celle-ci sont admissibles, nous dirons mots admissibles. Munissons $X_{-\beta}$ de la relation d'ordre alterné. Il existe donc un "plus petit" et un "plus grand " mot de longueur k au sens de cette relation d'ordre qui soient $(-\beta)$-admissibles. Notons-les $d_1^kd_2^k\cdots d_k^k$ pour le minimum et $c_1^kc_2^k\cdots c_k^k$ pour le maximum.

Lemme 3. *Le minimum $(-\beta)$-admissible de taille k est le début du minimum de $k+1$. De même, le maximum de taille k apparaît en début du maximum $(-\beta)$-admissible de taille $k+1$.*

Preuve

D'abord, il est à noter que pour tout k entier positif, $d_1^kd_2^k\cdots d_k^k$ et $c_1^kc_2^k\cdots c_k^k$ peut être prolonger à droite puisqu'ils constituent les débuts de certains développements en base $-\beta$. Il existe a et b tels que $d_1^k d_2^k \cdots d_k^k a$ et $c_1^k c_2^k \cdots c_k^k b$ sont $(-\beta)$-admissibles. On a :

$$d_1^{k+1} d_2^{k+1} \cdots d_k^{k+1} d_{k+1}^{k+1} \preceq d_1^k d_2^k \cdots d_k^k a.$$

Si $d_1^{k+1} d_2^{k+1} \cdots d_k^{k+1} = d_1^k d_2^k \cdots d_k$, c'est fini. Supposons-les différents. On aurait donc

$$d_1^{k+1} d_2^{k+1} \cdots d_k^{k+1} d_{k+1}^{k+1} \prec d_1^k d_2^k \cdots d_k^k a$$

Il existerait un entier j entre 1 et k tel $d_i^{k+1} = d_i^k$ pour tout $i < j$ et $(-1)^j (d_j^{k+1} - d_j^k) < 0$. Ce qui signifierait aussi que $d_1^{k+1} d_2^{k+1} \cdots d_k^{k+1} \prec d_1^k d_2^k \cdots d_k^k$. Ce qui est absurde puis que $d_1^k d_2^k \cdots d_k^k$ est le minimum alterné des mots $(-\beta)$-admissibles de longueur k au sens de la relation d'ordre. Donc $d_1^{k+1} d_2^{k+1} \cdots d_k^{k+1}$ et $d_1^k d_2^k \cdots d_k^k$ sont nécessairement égaux.

Par un raisonnement analogue, on montre de même que $c_1^{k+1} c_2^{k+2} \cdots c_k^{k+1} = c_1^k c_2^k \cdots c_k^k$. ■

Nous avons ainsi défini deux suites $(d_i)_{i \geq 1}$ et $(c_i)_{i \geq 1}$ telles que $d_1 d_2 \cdots d_k$ et $c_1 c_2 \cdots c_k$ sont le minimum et le maximum des mots $(-\beta)$-admissibles de longueur k. Par ailleurs, comme $X_{-\beta}$ est stable par le shift, $c_2 c_3 \cdots c_k$ est $(-\beta)$-admissible. Ainsi, $d_1 d_2 \cdots d_{k-1} \preceq c_2 c_3 \cdots c_k$. Donc, $c_1 c_2 c_3 \cdots c_k \preceq 0 d_1 d_2 \cdots d_{k-1}$. On ne peut pas à priori dire que ces deux mots sont égaux. Par ailleurs, une conséquence du lemme précédent est que la suite $(d_i)_{i \geq 1}$ apparaît naturellement, au sens de la relation d'ordre alterné, comme la borne inférieure de l'ensemble des $(-\beta)$-développements.

Théorème 2. *([IS09])*

Soient u et v deux nombres réels dans I_β. Alors, il y a équivalence entre $u < v$ et $d(u, -\beta) \prec d(v, -\beta)$.

Preuve

Soient $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ les $(-\beta)$-développements de u et de v respectivement.

u et v sont différents signifie que leurs développements en base $-\beta$ le sont aussi. Ainsi donc, il existe un entier $k \geq 1$ tel que $u_i = v_i$ pour tout i inférieur à k et $(-1)^k (u_n - v_n)$ non nul. Notons $f_{-\beta}$ l'application de l'ensemble des suites sur A dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_{-\beta} : (z_i)_{i\geq 1} \longmapsto \sum_{i\geq 1} \frac{z_i}{(-\beta)^i}. \tag{I.39}$$

Alors, u et v sont respectivement les images de $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ par $(\cdot)_{-\beta}$. De (I.34), on a

$$T^k_{-\beta}(u) = \sum_{i\geq 1} \frac{u_{k+i}}{(-\beta)^i} \qquad \text{et} \qquad T^k_{-\beta}(v) = \sum_{i\geq 1} \frac{v_{k+i}}{(-\beta)^i} \qquad \text{Donc,}$$
$$= (u_{k+1}, u_{k+2}, \cdots)_{-\beta} \qquad\qquad = (v_{k+1}, v_{k+2}, \cdots)_{-\beta}.$$

$$f_{-\beta}(u_1, u_2, \cdots) - f_{-\beta}(v_1, v_2, \cdots) = \frac{(-1)^k}{\beta^k} \left(u_k - v_k + T^k_{-\beta}(u) - T^k_{-\beta}(v)\right).$$

Mais $T^k_{-\beta}(u)$ et $T^k_{-\beta}(v)$ sont dans I_β. Ce qui implique que $|T^k_{-\beta}(u) - T^k_{-\beta}(v)|$ est inférieur à la longueur de I_β.

$$|T^k_{-\beta}(u) - T^k_{-\beta}(v)| < 1.$$

Ainsi, $(-1)^k \left(u_k - v_k + T^k_{-\beta}(u) - T^k_{-\beta}(v)\right)$ est du signe de $(-1)^k(u_k - v_k)$. c'est-à-dire $u - v$ et $(-1)^k(u_k - v_k)$ sont de même signe. D'où le résultat. ■

Le nombre réel $l_\beta = -\frac{\beta}{\beta+1}$ est dans I_β. Compte tenu du théorème précédent, son développement en base $-\beta$ est alors le minimum des $(-\beta)$-développements des réels de cet intervalle et ne peut être différent de $(d_i)_{i\geq 1}$.

Corollaire 2. *([IS09])*

Soit $(x_1, x_2, x_3, \cdots)$ une suite $(-\beta)$-admissible. Alors, pour tout entier n non nul

$$(d_1, d_2, d_3, \cdots) \preceq (x_n, x_{n+1}, \cdots) \prec (0, d_1, d_2, \cdots) \tag{I.40}$$

En particulier

$$(d_1, d_2, d_3, \cdots) \preceq (d_n, d_{n+1}, \cdots) \prec (0, d_1, d_2, \cdots) \tag{I.41}$$

Preuve La preuve de la première inégalité de (I.41) découle du théorème 1 en remarquant que l_β dont le $(-\beta)$-développement est $.d_1 d_2 \cdots$ est le minimum de I_β

ajouté à cela les relations (I.35) et (I.38) qui traduisent le fait que si $(x_i)_{i\geq 1}$ est le développement en base $-\beta$ de x dans I_β, alors $(x_i)_{i\geq n+1}$ est celui de $T^n_{-\beta}(x)$.

Montrons la deuxième inégalité de (I.41). Remarquons tout d'abord que

$$(x_i)_{i\geq n} \neq (0, d_1, d_2, \cdots)$$

puisque

$$\begin{aligned} f_{-\beta}(0, d_1, d_2, \cdots) &= \frac{1}{-\beta} f_{-\beta}(d_1, d_2, \cdots) \\ &= r_\beta \text{ et } r_\beta \notin I_\beta \end{aligned}$$

Si $x_n \neq 0$ alors $(x_i)_{i\geq n} \prec (0, d_1, d_2, \cdots)$. Si $x_n = 0$, la sous-suite $(x_i)_{i\geq n+1}$ étant aussi un développement et compte tenu de ce qui précède , $(d_i)_{i\geq 1} \prec (x_i)_{i\geq n+1}$. Il existe donc un entier k tel que $x_{n+i} = d_i$, $i < k$ et $(-1)^k(d_k - x_{n+k}) < 0$. Et donc $(-1)^{k+1}(x_{n+k} - d_k) < 0$. C'est-à-dire $(0, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots) \prec (0, d_1, d_2, \cdots)$.

La relation (I.41) s'obtient en remplaçant $(x_i)_{i\geq 1}$ par la suite $(d_i)_{i\geq 1}$. Ce qui achève la preuve du corollaire. ■

La réciproque du corollaire ci-dessus est en générale fausse. En effet, $d_1 d_1 d_1 \cdots$ est le $(-d_1)$-développement de $\frac{d_1}{d_1+1}$. $f_{-\beta}(d_1, d_1, d_1, \cdots) = -\frac{d_1}{d_1+1}$. On vérifie facilement que $f_{-\beta}(d_1 - 1, 0, d_1 - 1, 0, \cdots) = -\frac{d_1}{d_1+1}$. Et la suite $(d_1 - 1, 0, d_1 - 1, 0, \cdots)$ vérifie bien les conditions données en (I.41). En fait, (I.41) implique que le $(-\beta)$-développement de l_β est un mot de Lyndon (pour la relation d'ordre alterné) associé à β. Une situation similaire se produit pour les bases positives.

Nous avons vu que $f_{-\beta}$ est croissante sur les suites infinies $(-\beta)$-admissibles. On complète ce résultat sur les suites finies $(-\beta)$-admissibles. Ceci fait l'objet du théorème suivant :

Théorème 3. *Soient $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ et $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ deux mots finis admissibles. Alors,*

$$(x_1, x_2, \cdots x_n) \prec (y_1, y_2, \cdots, y_n) \Rightarrow f_{-\beta}(x_1, x_2, \cdots, x_n) < f_{-\beta}(y_1, y_2, \cdots, y_n). \tag{I.42}$$

Lemme 4. *Pour toute suite finie $(-\beta)$-admissible $u_1 \cdots u_n$ on a*

$$-1 < f_{-\beta}(u_1, u_2, \cdots, u_n) < 1. \tag{I.43}$$

En particulier,

$$-1 < f_{-\beta}(d_1, d_2, \cdots, d_n) \leq 0 \;\; et \;\; 0 \leq f_{-\beta}(0, d_1, d_2, \cdots, d_n) < 1. \tag{I.44}$$

Preuve La suite finie $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est $(-\beta)$-admissible signifie qu'il existe $(u_{n+1}, u_{n+2}, \cdots)$ telle que $(u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \cdots)$ soit un développement en base $-\beta$. Compte tenu du fait que $(u_{n+1}, u_{n+2}, \cdots)$ est lui aussi un $(-\beta)$-développement, on a

$$-\frac{\beta}{\beta+1} \leq f_{-\beta}(u_{n+1}, u_{n+2}, \cdots) < \frac{1}{\beta+1}.$$

De plus,

$$f_{-\beta}(u_1, \cdots, u_n) = f_{-\beta}(u_1, u_2, \cdots) - \frac{1}{(-\beta)^n} f_{-\beta}(u_{n+1}, u_{n+2}, \cdots), \text{ d'où}$$

$$-\frac{\beta}{\beta+1} - \frac{1}{\beta^{n-1}(\beta+1)} < f_{-\beta}(u_1, u_2, \cdots, u_n) < \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta^{n-1}(\beta+1)}.$$

On obtient le résultat escompté en minorant $-\frac{1}{\beta^{n-1}(\beta+1)}$ par $-\frac{1}{\beta+1}$ et on majore $\frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta^{n-1}(\beta+1)}$ par $\frac{\beta}{\beta+1}$.

Dans le cas particulier de $(u_1, u_2, \cdots, u_n) = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$, on a

$$\begin{aligned} f_{-\beta}(d_1, d_2, \cdots, d_n) &= f_{-\beta}(d_1, d_2, \cdots) - \frac{1}{(-\beta)^n} f_{-\beta}(d_{n+1}, d_{n+2}, d_{n+3}, \cdots) \\ &= -\frac{\beta}{\beta+1} - \frac{1}{(-\beta)^n} f_{-\beta}(d_{n+1}, d_{n+2}, \cdots), \text{ d'où} \end{aligned}$$

$$-\frac{\beta}{\beta+1} - \frac{1}{\beta^{n-1}(\beta+1)} < f_{-\beta}(d_1, d_2, \cdots, d_n) < -\frac{\beta}{\beta+1} + \frac{1}{\beta^{n-1}(\beta+1)} \text{ et donc}$$

$$-1 < f_{-\beta}(d_1, d_2, \cdots, d_n) < 0.$$

Pour l'encadrement de $f_{-\beta}(0, d_1, d_2, \cdots, d_n)$, on applique un raisonnement analogue ■

Nous avons vu qu'il existe des suites $(x_i)_{i\geq 1}$ telle que pour tout entier strictement positif n

$$(d_1, d_2, d_3, \cdots) \preceq (x_n, x_{n+1}, \cdots) \prec (0, d_1, d_2, \cdots). \tag{I.45}$$

Appelons S l'ensemble des suites qui vérifient (I.45). Au sens de la relation d'ordre alterné, l'application $f_{-\beta}$ reste croissante sur S par passage à la limite du résultat du théorème 2.

Définition 11. *Soit x un nombre réel. Dans la suite nous appellerons représentation de x en base $-\beta$ ou $(-\beta)$-représentation de x, toute suite $(x_i)_{i\geq 1}$ vérifiant la relation (I.45) telle que :*

$$f_{-\beta}(x_1, x_2, x_3, \cdots) = x$$

Il est donc intéressant de caractériser les $(-\beta)$-représentations de nombres de l'intervalle I_β. Pour ce faire, prenons $(y_i)_{i\geq 1}$ et $(z_i)_{i\geq 1}$ deux $(-\beta)$-représentations d'un réel y de cet intervalle. Sans perte de généralité, on choisit (y_i) comme la représentation correspondant au $(-\beta)$-développement. On a donc :

$$f_{-\beta}(y_1, y_2, y_3, \cdots) = f_{-\beta}(z_1, z_2, z_3, \cdots) = y$$

Il existe un entier $k \geq 1$ tel que $y_i = z_i$ pour tout i plus petit que k et $(-1)^k(y_k - z_k) \neq 0$. Ainsi donc,

$$y_k - z_k + f_{-\beta}(y_{k+1}, y_{k+2}, \cdots) - f_{-\beta}(z_{k+1}, z_{k+2}, \cdots) = 0 \tag{I.46}$$

Mais $f_{-\beta}$ est croissante de sur S. Donc $f_{-\beta}(y_{k+1}, y_{k+2}, \cdots)$ et $f_{-\beta}(z_{k+1}, z_{k+2}, \cdots)$ sont dans I_β. Autrement dit

$$|f_{-\beta}(y_{k+1}, y_{k+2}, \cdots) - f_{-\beta}(z_{k+1}, z_{k+2}, \cdots)| \leq 1.$$

Nous pouvons alors résoudre (I.46) :

$$\begin{cases} y_k - z_k = 1 \\ \sum_{i\geq 1} \frac{y_{k+i}}{(-\beta)^i} - \sum_{i\geq 1} \frac{z_{k+i}}{(-\beta)^i} = -1 \end{cases} \quad (\text{I.47}) \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} y_k - z_k = -1 \\ \sum_{i\geq 1} \frac{y_{k+i}}{(-\beta)^i} - \sum_{i\geq 1} \frac{z_{k+i}}{(-\beta)^i} = 1 \end{cases} \quad (\text{I.48})$$

(i) Dans le cas (I.47), $\sum_{i\geq 1} \frac{y_{k+i}}{(-\beta)^i} = l_\beta$ et $\sum_{i\geq 1} \frac{z_{k+i}}{(-\beta)^i} = r_\beta$. Comme $(y_i)_{i\geq 1}$ est un $(-\beta)$-développement, $(y_{i+k})_{i\geq 1} = (d_i)_{i\geq 1}$ et $(z_{i+k})_{i\geq 1}$ est une représentation de r_β.

(ii) Dans le cas (I.48), il n'y a pas de solution sinon $(y_{i+k})_{i\geq 1}$ serait une représentation de r_β.

Si $(y_i)_{i\geq 1}$ n'était qu'une représentation de y, dans le cas (I.47), $(y_{i+k})_{i\geq 1}$ aurait été une représentation de l_β et aussi, le cas (I.48) admettrait de solution et les rôles de $(y_{i+k})_{i\geq 1}$ et $(z_{i+k})_{i\geq 1}$ auraient été tout simplement inversés. En d'autres mots, (i) et (ii) seraient la même et unique chose.

Regardons en particulier le cas $y = l_\beta$. Si l_β admet plus d'une $(-\beta)$-représentation alors son $(-\beta)$-développement $(d_i)_{i\geq 1}$ finit par $(d_i)_{i\geq 1}$, c'est-à-dire qu'il est périodique. Ceci nous permet de regarder sous quelles conditions une suite $(d_i)_{i\geq 1}$ est le $(-\beta)$-développement de l_β pour un certain $\beta > 1$. Cette question avait déjà été abordée par Wolfgang Steiner dans [Ste13]. On donne une autre résolution à ce problème.

On pose :

$$\mathbf{Lyn} = \{(d_i)_{i\geq 1} | min_k \preceq (d_i)_{i\geq 1} \preceq max_k \prec \phi^\infty(1) \text{ et } (d_i)_{i\geq 1} \neq \overline{a_1 \cdots a_k}\} \tag{I.49}$$

avec :

$$min_k = \begin{cases} a_1 a_2 \cdots a_{k-1}(a_k - 1)0\overline{a_1 a_2 \cdots a_k} & \text{si } k \text{ pair} \\ a_1 a_2 \cdots a_k \overline{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}(a_k - 1)0} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases} \tag{I.50}$$

$$max_k = \begin{cases} \overline{a_1 a_2 \cdots a_k} & \text{si } k \text{ pair} \\ \overline{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}(a_k - 1)0} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases} \tag{I.51}$$

Théorème 4. *Une suite $(d_i)_{i\geq 1}$ sur un alphabet $\mathcal{A}$ est le $(-\beta)$-développement de $-\frac{\beta}{\beta+1}$ pour un certain $\beta > 1$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(a) Pour tout $n \geq 1$, $(d_i)_{i\geq 1} \preceq (d_i)_{i\geq n} \prec (d^*_{i-1})_{i\geq 1}$, $d^*_0 = 0$

*(b) $(d_i)_{i\geq 1} \notin$ **Lyn***

(c) $(d_i)_{i\geq 1} \prec \phi^\infty(1)$

Avant de passer à la preuve, éclaircissons les hypothèses de ce théorème. S'il existe $\beta > 1$ tel que $(d_i)_{i\geq 1}$ est le $(-\beta)$-développement de $-\frac{\beta}{\beta+1}$ alors il ne peut exister un entier n pour lequel on a $f_{-\beta}(d_n d_{n+1}\cdots) = \frac{1}{\beta+1}$.

Le deuxième point signifie que si le mot de Lyndon $(d_i)_{i\geq 1}$ est associé à un réel β qui, lui est associé à d'autres de Lyndon, alors $(d_i)_{i\geq 1}$ est périodique (c'est alors la suite $\overline{a_1 a_2 \cdots a_k}$ qui n'appartient pas **Lyn**).

La condition (c) quant à elle traduit tout simplement le fait que l'entropie du système associé à $(d_i)_{i\geq 1}$ est positive.

Preuve

– Soient $\beta > 1$ et $(d_i)_{i\geq 1}$ le $(-\beta)$-développement de $-\frac{\beta}{\beta+1}$ en base $-\beta$. Par définition, le premier point est automatiquement vérifié. Par ailleurs, $(d_i)_{i\geq 1}$ est un mot de Lyndon pour la relation d'ordre alterné et génère un système de Lyndon d'entropie non nulle. Il contient alors le système de Lyndon associé au mot $\lim\limits_{n\to+\infty} \phi^n(1)$. Ceci entraîne le troisième point. En outre, nous avons vu que l_β admet plusieurs $(-\beta)$-représentation si $(d_i)_{i\geq 1}$ est périodique. Ainsi donc, si $(d_i)_{i\geq 1}$ non périodique de période impaire, $(d_i)_{i\geq 1}$ est le max des mots de Lyndon associé à β pour la relation d'ordre alterné qui n'appartient pas **Lyn**. Le point (b) du théorème est alors vérifié. Si par contre, $(d_i)_{i\geq 1}$ est périodique de période impaire, à la proposition 11, nous avons vu que les systèmes associés aux mots de Lyndon pour la relation d'ordre alterné $(d_i)_{i\geq 1}$ et $(d^*)_{i\geq 1}$ ont même entropie. Donc,

$$(d^*)_{i\geq 1} \prec \lim_{n\to+\infty} \phi^n(1)$$

D'où la condition (b)

– Considérons une suite $(d_i)_{i\geq 1}$ vérifiant (a), (b) et (c). D'après (a), $(d_i)_{i\geq 1}$ est associé à un réel β et un système dynamique d'entropie $\log\beta$. Soit donc $(a_i)_{i\geq 1}$

le $(-\beta)$-développement de $-\frac{\beta}{\beta+1}$. $(a_i)_{i\geq 1}$ est alors un mot de Lyndon associé à β.

Si **Lyn** est vide, alors $(a_i)_{i\geq 1} = (d_i)_{i\geq 1}$.

Si **Lyn** est non vide, l_β admet plusieurs $(-\beta)$-représentations. On aurait alors $(a_i)_{i\geq 1}$ périodique. Il n'est donc pas dans **Lyn**. C'est d'ailleurs l'unique mot de Lyndon pour la relation d'ordre alterné n'appartenant pas à **Lyn**. Donc $(a_i)_{i\geq} = (d_i)_{i\geq 1}$.

Ce qui achève la preuve du théorème. ■

Définition 12. *([IS09])*

On appelle $(-\beta)$-shift et on note $S_{-\beta}$, la fermeture de l'ensemble des $(-\beta)$-développements pour la topologie induite sur $A^{\mathbb{Z}}$ par la topologie discrète. On note $S^d_{-\beta}$ le $(-\beta)$-shift unilatéral, fermeture de l'ensemble des $(-\beta)$-développements des nombres réels de l'intervalle I_β.

Lorsque β est entier, le $(-\beta)$-développement de l_β donné par l'algorithme (I.36) est $\beta\beta\beta\cdots$. Par convention les $(-\beta)$-développements sont déterminés non pas en utilisant la suite $\overline{\beta}$ (qui est périodique de période impaire 1), mais plutôt au moyen de la suite $\overline{(\beta-1)0}$, c'est-à-dire le mot Lyndon max associé à β. En fait, lorsque $d(l_\beta, -\beta)$ est périodique de période impaire, le plus grand mot de Lyndon associé à β est dans le $(-\beta)$-shift tel qu'il est défini dans [IS09]. Il contiendrait alors un plus petit système dynamique d'entropie maximale : le système de Lyndon associé au plus grand mot Lyndon pour la relation d'ordre alterné. On pourrait alors désigner par $(-\beta)$-shift le plus petit système de Lyndon pour la relation d'ordre alterné d'entropie $\log\beta$. Il s'agit de l'ensemble des mots $(x_i)_{i\geq 1}$ sur l'alphabet $\{0, 1, \cdots, \lfloor\beta\rfloor\}$ tels que :

$$(d_i^*)_{i\geq 1} \preceq (x_i)_{i\geq n} \text{ pour tout } n$$

avec

$$(d_i^*)_{i\geq 1} = \begin{cases} \overline{(d_1, d_2, \cdots, d_{2n}, (d_{2n+1}-1), 0)} & \text{si } d(l_\beta, -\beta) \text{ périodique de période } 2n+1 \\ (d_i)_{i\geq 1} & \text{si non .} \end{cases}$$

On retrouve des situations similaires sur le β-shift à l'instar du cas du nombre d'or :

$\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Le développement en base β de 1 est 11. Mais la suite $\overline{10}$ est la suite qui permet de caractériser le β-shift. Les développements en base β sont alors les suites s telles que

$$\sigma^n(s) <_{lex} \overline{10} \text{ pour tout entier } p \ ,$$

et le β-shift est alors l'ensemble des suites s telles que

$$\sigma^n(s) \leq_{lex} \overline{10} \text{ pour tout entier } p \ .$$

On note $\tilde{S}_{-\beta}$ le plus petit système de Lyndon dans $S_{-\beta}$ d'entropie $\log\beta$. Le système $\tilde{S}_{-\beta}$ est alors associé au mot $(d_i^*)_{i\geq 1}$. En base $-\beta$, certains nombres n'ont pas leurs $(-\beta)$-développements dans $\tilde{S}_{-\beta}$ si $(d_i)_{i\geq 1}$ diffère de $(d_i^*)_{i\geq 1}$. Dans ce cas, le $(-\beta)$-shift ne sera pas transitif.

Chapitre II

Codes Préfixes et Mesure Invariante

De Krylov et Bogoliubov, il est bien connu que l'ensemble des mesures invariantes sur un système dynamique est non vide. Le but de ce chapitre est de munir du sous-shift $S_{-\beta}$ d'un outil supplémentaire : une mesure invariante d'entropie maximale. Une telle mesure est ergodique. Pour un réel $\beta > 1$, on étudie l'intrinsèque ergodicité du $(-\beta)$-shift. Cette notion fut pour la première fois explorée par William Parry en 1960. Il est à noter que les mesures ergodiques sur des systèmes dynamiques représentent des outils d'étude de leurs indécomposabilité en sous-systèmes d'entropies non nulles. On utilise des résultats connus sur les systèmes codés, inspirés des travaux de G. Hansel et F. Blanchard dans [BH86] puis Anne Bertand-Mathis (voir [BM88]). Dans les lignes à suivre, on commencera par donner un bref aperçu des systèmes codés, et on finira par une application au cas des $(-\beta)$-shifts.

1 Quelques notions essentielles

1.1 Système Codé

Soient $\mathcal{A}$ un alphabet, (X, T) un système dynamique symbolique sur un alphabet $\mathcal{A}$. On note L le langage associé. On rappelle quelques définitions données dans [BH86].

Définition 13. *On dit que le langage L est transitif si pour tout couple de mots (u, v) de L, il existe w dans $\mathcal{A}^*$ tel que uwv est dans L.*

Un système dynamique (symbolique) sera alors dit transitif si le langage associé est transitif. Dans [Sig74], Manfred Denker, Christian Grillenberger et Karl Sigmund parlent de *transitivité topologique* : considérant (X, T) un système dynamique topologique ; pour tout ouverts U et V de X, on a $U \cap T^{-n}V \neq \varnothing$ pour un certain n dans $\mathbb{Z}$. Ceci équivaut à dire que l'orbite $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} T^nU$ de tout ouvert non vide U de X est dense dans X.

Définition 14. *Soit $\mathcal{A}$ un alphabet, $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des mots sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^* \backslash \{\varepsilon\}$ où ε désigne le mot vide. Une partie Y de $\mathcal{A}^+$ est un code si elle engendre un sous-monoïde libre de $\mathcal{A}^*$, c'est-à-dire, si tout $u \in Y^+$ admet une décomposition unique en mots de Y.*

Une partie $\mathfrak{C}$ de $\mathcal{A}^*$ est un code préfixe (respectivement suffixe) si aucun de ses mots n'est préfixe (respectivement suffixe) d'un autre. En d'autres termes, aucun mot de $\mathfrak{C}$ n'est facteur gauche (respectivement facteur droit) d'un autre mot de $\mathfrak{C}$. C'est-à-dire,

$$\forall u, v \in \mathfrak{C}, u = vw \Rightarrow u = v \text{ et } w = \varepsilon$$

où ε est le mot vide.

Définition 15. *Un langage L est dit codé s'il existe un code préfixe $\mathfrak{C}$ tel que L est l'ensemble des facteurs des concaténations des mots de $\mathfrak{C}$. Un sous-système de $\mathcal{A}^*$ est codé si le langage associé est codé. Il est alors transitif.*

On appelle rayon de convergence d'un langage L et note ρ_L le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} Card(L \cap \mathcal{A}^n)z^n$.

Définition 16. *Soit $\mathfrak{C}$ un code préfixe, c_n le nombre de mots de longueur n de $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}^*$ le monoïde engendré. On dit que $\mathfrak{C}$ est récurrent positif si :*

$$\sum_{x\in\mathfrak{C}} \rho_{\mathfrak{C}^*}^{|x|} = 1 \ et \ \sum_{x\in\mathfrak{C}} |x|\rho_{\mathfrak{C}^*}^{|x|} < +\infty \tag{II.1}$$

Si l'on pose $\rho_{\mathfrak{C}^*} = \frac{1}{\beta}$, cela donne $1 = \sum_{n\geq 1} \frac{c_n}{\beta^n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{nc_n}{\beta^n} < +\infty$ où c_n désigne le nombre de mots de longueur n dans $\mathfrak{C}$.

En fait, $\mathfrak{C}^*$ désigne l'ensemble des mots du système qui se décomposent en produits de mots du code $\mathfrak{C}$.

Théorème 5. *(Proposition 2.15, [BH86])*

Soit $\mathfrak{C}$ un code préfixe, μ une mesure invariante sur $\mathfrak{C}^{\mathbb{Z}}$ muni du décalage et $h(\mu)$ son entropie. Alors :

(1) On a l'inégalité

$$h(\mu) \leq -l(\mathfrak{C}, \mu) \log \rho_{\mathfrak{C}^*} \tag{II.2}$$

où

$$l(\mathfrak{C}, \mu) = \sum_{x \in \mathfrak{C}} |x| \mu([x]).$$

(2) Dans l'inégalité ci-dessus, l'égalité est atteinte si on a les deux conditions suivantes :

(a) $\sum_{x \in \mathfrak{C}} \rho_{\mathfrak{C}^*}^{|x|} = 1,$

(b) μ est une probabilité de Bernoulli sur $\mathfrak{C}^*$ définie par $\mu([x]) = \rho_{\mathfrak{C}^*}^{|x|}$, $x \in \mathfrak{C}$

1.2 Tour associée au code préfixe

On note Ω le sous-ensemble de $\mathfrak{C}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{N}$ tel que :

$$((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}, i) \in \Omega \Rightarrow 1 \leq i \leq |x_0|$$

On peut tout simplement identifier $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ à un élément x de $\mathfrak{C}^{\mathbb{Z}}$ produit des mots x_i du code $\mathfrak{C}$.

On définit l'application T de Ω dans lui-même par :

$$T((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}, i) = \begin{cases} ((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}, i+1) & \text{si } i < |x_0| \\ ((x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}, 1) & \text{si } i = |x_0| \end{cases}$$

Le couple (Ω, T) est appelé **tour associée** à $\mathfrak{C}$.

Définition 17. *Un système dynamique topologique mesurable (X, m, g) est dit ergodique si pour tout ensemble mesurable g-invariant $B \subset X$, on a $m(B) = 0$ ou $m(B) = 1$.*

On dit aussi que m est une mesure ergodique par rapport à g ou que g est ergodique par rapport à m.

Il est dit mélangeant si pour A et B mesurables,

$$\lim_{n \to \to +\infty} m(g^{-n}(A) \cap B) = m(A)m(B)$$

Théorème 6. *(Voire proposition 2.16 de [BH86]) Soit $\mathfrak{C}$ un code préfixe, (Ω, T) la tour associée.*

- *Lorsque $\overline{\mu}$ parcourt $\mathfrak{M}_T(\Omega)$, $\sup_{\overline{\mu}} h(\overline{\mu}) = -\log \rho_{\mathfrak{C}^*}$*
- *Il existe une probabilité invariante sur Ω, $\overline{\mu}$ et une seule telle que $h(\overline{\mu}) = -\log \rho_{\mathfrak{C}^*}$ si et seulement si $\mathfrak{C}$ est récurrent positif. Dans ce cas $\overline{\mu}$ est l'unique probabilité invariante (donc ergodique) sur Ω induisant sur $\mathfrak{C}^{\mathbb{Z}}$ la probabilité μ de Bernoulli définie par :*

$$\mu([x]) = \rho_{\mathfrak{C}^*}^{|x|}, \ x \in \mathfrak{C} \ .$$

Preuve Pour la preuve, on se réfère à [BH86]. Le premier volet du théorème traduit tout simplement le principe variationnel ■

On définit sur la tour (Ω, T) l'application f par :

$$f((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, i) = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \tag{II.3}$$

où l'entier y_0 dénote la i-ième composante de x_0. Il s'agit là de déplier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. En fait, les x_k sont les mots du code et y_k les lettres de l'alphabet $\mathcal{A}$ et

$$\cdots y_{-n}y_{-n+1}\cdots y_{-1}y_0y_1\cdots y_n\cdots = \cdots x_{-m}x_{-m+1}\cdots x_{-1}x_0.x_1x_2\cdots x_m\cdots .$$

Lorsqu'un système dynamique est codé par un code récurrent positif $\mathfrak{C}$, l'ensemble des points périodiques est dense. On dit que deux mots u et v du langage L sont dans la même classe du monoïde syntaxique si pour tout couple de mots (a, b),

$$aub \in L \Longleftrightarrow avb \in L$$

Un système S est dit rationnel (ou sofique) si le nombre de classes du langage associé est fini, il est alors codé par un code récurrent positif.

La mesure $\overset{\bullet}{\mu}$ induite sur le système codé par la mesure μ sur la tour est particulièrement simple : si $u_1 u_2 \cdots u_r$ est mot de L,

$$\overset{\bullet}{\mu}([u_1 u_2 \cdots u_2]) = \sum_m \mu([m]) = \frac{1}{\sum_{n\geq 1} \frac{n.c_n}{\beta^n}} \sum_m \frac{1}{\beta^{|m|}}$$

où les sommes sont prises sur l'ensemble des mots $m = au_1 u_2 \cdots u_k b$, a étant préfixe propre d'un mot du code et b un suffixe propre ou le mot vide.

A chaque classe du monoïde syntaxique est associé une constante λ strictement positive telle que si u se trouve dans cette classe, le cylindre $[u]$ a pour mesure

$$\overset{\bullet}{\mu}([u]) = \frac{\lambda}{\beta^{|u|}}.$$

Ainsi, la mesure d'un cylindre dépend de sa classe et de sa longueur. S'il existe deux nombres positifs ϵ et M tels que pour toute classe, $0 < \epsilon < \lambda < M$, on dit que la mesure est homogène (le rapport entre les mesures de deux cylindres de même longueur est compris entre $\frac{\epsilon}{M}$ et $\frac{M}{\epsilon}$). Si le P.G.C.D des longueurs des mots du code est 1, alors la mesure est mélangeante. On l'appelle **mesure de Champernowne**
.

2 Application au bêta-shift négatif

L'application ne peut se faire de façon simple. On verra que les mots du $(-\beta)$-shift ne peuvent pas toujours s'écrire comme produit des mots d'un code préfixe. Un tel cas aurait été idéal. Toutefois, la difficulté peut être contournée si l'ensemble des suites de $S_{-\beta}$ qui ne se décomposent pas en produit des mots du code n'est pas d'entropie maximale.

Dans la suite, $(d_i)_{i\geq 1}$ désigne le développement de $l_\beta = -\frac{\beta}{\beta+1}$ en base $-\beta$. On oriente l'étude des mesures invariantes vers deux axes. Le premier est le cas où β est supérieur au nombre d'or que l'on traitera en deux volets selon le développement de

l_β : d'abord $d_{2i} < d_1$ pour tout i, le code préfixe est relativement simple à obtenir ; le cas pour lequel il existe un certain i tel que $d_{2i} = d_1$, le code est un peu plus complexe. Le dernier cas concerne les bases $-\beta$ où β est plus petit que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2.1 Bêta supérieur au nombre d'or

Dans cette partie, on considère une base $-\beta$ telle que β est strictement supérieur au nombre d'or, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On note $(d_i)_{i\geq 1}$ le $(-\beta)$-développement de $l_\beta = -\frac{\beta}{\beta+1}$. Deux cas se présentent : soit pour tout i, $d_{2i} < d_1$ ou alors il existe au moins un indice pair $2i$ en lequel on a : $d_{2i} = d_1$.

2.1.1 Cas $d_{2i} < d_1$ pour tout i

Il est à remarquer que si pour tout i, $d_{2i} < d_1$, alors la suite $(d_n)_{n\geq 1}$ ne peut être périodique de période impaire. De plus, cette condition implique que β est plus grand que le nombre d'or pour lequel $(d_n)_{n\geq 1} = 1\overline{0}$. En résumé :

$$\forall i \geq 1,\ d_{2i} < d_1 \Rightarrow \begin{cases} (d_i)_{i\geq 1} \neq \overline{(d_1, d_2, \cdots, d_{2n+1})} & \text{pour tout } n \geq 1 \\ \beta \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Ainsi, lorsque $d_{2i} < d_1$ pour tout i, soit la suite $(d_i)_{i\geq 1}$ est non périodique, soit elle est périodique de période paire.

Remarque 5. *Pour $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, les mots du $(-\beta)$-shift sont tels que entre deux 1 il ne peux y avoir qu'un nombre pair de zéros. Le système est alors codé par $\{1, 00\}$ qui est récurrent positif de rayon $\frac{1}{\beta}$.*

Développement non périodique avec $d_{2i} < d_1$

Pour déterminer un code préfixe, on reprend les constructions de Γ_1 et Γ_2 faites dans le chapitre précédent en remplaçant Γ_1 et Γ_2 par Γ et $\mathfrak{C}$ respectivement.

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{\varepsilon, d_1, d_1d_2d_3, d_1d_2d_3d_4d_5, \cdots, d_1d_2d_3\cdots d_{2k+1}, \cdots\} \\ \mathfrak{C} &= \{A_1A_2\cdots A_m d_1\cdots d_{n-1}j; n\in\mathbb{N}^*, (-1)^n(d_n - j) < 0, j\neq d_1, m\geq 1, A_i\in\Gamma\} \end{aligned} \tag{II.4}$$

L'ensemble $\mathfrak{C}$ est un code préfixe. Tout produit infini de mots de Γ est admissible et peut être considéré comme limite d'une suite de mots du code. En effet, le code préfixe $\mathfrak{C}$ est infini. Si $A_1A_2\cdots A_m d_1\cdots d_{n-1}j$ est dans $\mathfrak{C}$, $A_i\in\Gamma$, lorsque m devient de plus en plus grand, la queue $d_1d_2\cdots d_{n-1}j$ tend à disparaître et pour céder la place à la concaténation d'un grand nombre de A_i de Γ. Le $(-\beta)$-shift est alors scindé en trois partie disjointes : l'ensemble des produits finis et infinis des mots du code, le sous-ensemble de $S_{-\beta}$ des suites qui finissent par le $(-\beta)$-développement $(d_i)_{i\geq 1}$ de l_β et les mots dont la queue est un produit infini de séquences de Γ.

Théorème 7. *Soit $\beta > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $(d_i)_{i\geq 1}$ le développement en base $-\beta$ de l_β. On suppose $(d_i)_{i\geq 1}$ non périodique tel que pour tout i, $d_{2i} < d_1$ et on note $\mathfrak{C}$ le code préfixe défini en (II.4). Alors le $(-\beta)$-shift $S_{-\beta}$ est codé par $\mathfrak{C}$, c'est-à-dire $L_\beta = L_{\mathfrak{C}^*}$ où L_β désigne le langage associé à $S_{-\beta}$. En outre, le code préfixe $\mathfrak{C}$ est récurrent positif.*

Preuve

(a) **Montrons que $L_\beta = L_{\mathfrak{C}^*}$.**

Soit $n\in\mathbb{N}-\{0\}$. Le plus petit mot (au sens de la relation d'ordre alterné) de longueur n dans le langage L_β est $d_1d_2\cdots d_n$ et le plus grand est $0d_1d_2\cdots d_{n-1}$. La première séquence est le début d'un certain nombre de mots du code $\mathfrak{C}$. La deuxième est le produit d'un mot du code (le mot 0 de longueur 1) et du début d'un mot du code (la séquence $d_1d_2\cdots d_{n-1}$). Ils sont donc dans $L_{\mathfrak{C}^*}$.

Soit $x_1x_2\cdots x_n\in L_{\mathfrak{C}^*}$. Alors, on a

$$d_1d_2\cdots d_n \preceq x_1\cdots x_n \preceq 0d_1d_2\cdots d_{n-1}.$$

Il y a deux situations possibles, soit $x_1x_2\cdots x_n$ est un produit de mots du code (dans ce cas, il finit sous la forme $d_1d_2\cdots d_{k-1}i$) ou alors il finit par le début d'un mot du code (il finit sous la forme $d_1d_2\cdots d_k$).

Montrons que tout successeur et prédécesseur dans L_β d'un mot de $L_{\mathfrak{C}^*}$ est dans $L_{\mathfrak{C}^*}$. Il suffit de le montrer pour les mots du type $d_1\cdots d_{k-1}i$, $d_1\cdots d_{2p-1}d_1\cdots d_k$ et $jd_1d_2\cdots d_k$ avec $(-1)^k(d_k-i)<0$, $i\neq d_1$. Il s'agit de différents types de fin de mots du langage $L_{\mathfrak{C}^*}$:

– Pour $i\neq d_1$,

$$d_1d_2\cdots d_{k-1}(i-(-1)^k)\prec d_1d_2\cdots d_{k-1}i\prec d_1d_2\cdots d_{k-1}(i+(-1)^k) \text{ avec } i\neq 0\ .$$

Il est clair que ces trois mots sont consécutifs dans L_β et appartiennent à $L_{\mathfrak{C}^*}$. Si $i=0$, on a

$$\begin{cases} d_1\cdots d_{k-1}1\prec d_1d_2\cdots d_{k-1}0\prec d_1d_2\cdots d_{k-2}(d_{k-1}+1)d_1 & \text{si } k \text{ est impair },\\ d_1\cdots d_{k-2}(d_{k-1}-1)d_1\prec d_1d_2\cdots d_{k-1}0\prec d_1d_2\cdots d_{k-1}1 & \text{si } k \text{ est pair }.\end{cases}$$

– On considère maintenant la séquence $d_1d_2\cdots d_{2m+1}d_1d_2\cdots d_n$.

$$d_1\cdots d_{2m+1}d_1\cdots d_{p-1}(d_p+(-1)^p)\prec d_1d_2\cdots d_{2m+1}d_1\cdots d_p.$$

Ces mots sont consécutifs et appartiennent à $L_{\mathfrak{C}^*}$.
En outre,

$$d_1\cdots d_{2m+1}d_1\cdots d_p\prec d_1\cdots d_{2m}(d_{2m+1}-1)0d_1\cdots d_{p-1}.$$

Soit X_1X_2 un mot de L_β tel que

$$d_1\cdots d_{2m+1}d_1\cdots d_p\preceq X_1X_2\preceq d_1\cdots d_{2m}(d_{2m+1}-1)0d_1\cdots d_{p-1}$$

avec X_1 et X_2 de longueurs $2m+1$ et p respectivement. On a $X_1=d_1\cdots d_{2m+1}$ ou $X_1=d_1\cdots d_{2m}(d_{2m+1}-1)$.

$$d_1 d_2 \cdots d_p \preceq X_2 \preceq 0 d_1 d_2 \cdots d_{p-1}.$$

D'où,

$$d_1 \cdots d_{2m+1} X_2 \preceq d_1 \cdots d_{2m+1} d_1 \cdots d_p \Rightarrow X_2 = d_1 \cdots d_p$$

ou alors

$$d_1 \cdots d_{2m}(d_{2m-1}-1) 0 d_1 \cdots d_{p-1} \preceq d_1 \cdots d_{2m}(d_{2m+1}-1) X_2 \Rightarrow X_2 = 0 d_1 \cdots d_{p-1}.$$

Donc $d_1 \cdots d_{2m}(d_{2m-1}-1) 0 d_1 \cdots d_{p-1}$ et $d_1 \cdots d_{2m-1} d_1 \cdots d_p$ sont consécutifs et appartiennent à $L_{\mathfrak{C}^*}$.

– Il ne reste plus qu'à déterminer le successeur et le prédécesseur de $j d_1 \cdots d_k$.

$$j d_1 \cdots d_{k-1}(d_k + (-1)^k) \prec j d_1 d_2 \cdots d_k \prec (j-1) 0 d_1 \cdots d_{k-1}.$$

Ces mots sont consécutifs dans L_β et ils appartiennent à $L_{\mathfrak{C}^*}$.

Le résultat découle du fait si on considère trois mots consécutifs u, v et w, en leur ajoutant un même mots à droite, le caractère consécutif est conservé. (pour tout n le langage $L_{\mathfrak{C}^*}$ contient les plus grand et plus petit mot de longueur n de L_β, il vient alors que tout mot de longueur n, u de L_β tel que $d_1 \cdots d_n \preceq u \preceq 0 d_1 \cdots d_{n-1}$ est dans $L_{\mathfrak{C}^*}$; ce qui implique que $L_\beta = L_{\mathfrak{C}^*}$)

(b) **Montrons que le code $\mathfrak{C}$ est récurrent positif**.

Le code préfixe $\mathfrak{C}$ est de rayon de convergence $\frac{1}{\beta}$ puisque $S_{-\beta}$ est codé par $\mathfrak{C}$. On note c_n le nombre de mots de longueur n du code. D'après la relation (I.14) du premier chapitre, on sait que :

$$c_1 = d_1, c_2 = d_1 - d_2 - 1 \text{ et pour } n \geq 3,\ c_n = c_{n-1} + c_{n-2} + (-1)^n (d_{n-2} - d_n).$$

Soit $S(z)$ la série définie par $S(z) = \sum\limits_{n \geq 1} c_n z^n = \sum\limits_{x \in \mathfrak{C}} z^{|x|}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} c_n z^n &= d_1 z + (d_1 - d_2)z^2 - z^2 + \sum_{n\geq 3}(c_{n-1} + c_{n-2})z^n + \sum_{n\geq 3}(-1)^n(d_{n-2} - d_n)z^n \\ &= -z^2 + (z + z^2)\sum_{n\geq 1} c_n z^n + (1-z)\sum_{n\geq 1}(-1)^n(d_{n-1} - d_n)z^n.\end{aligned}$$

Ce qui implique,

$$(1 - z - z^2)(1 - \sum_{n\geq 1} c_n z^n) = (1-z)(1 - \sum_{n\geq 1}(-1)^n(d_{n-1} - d_n)z^n). \tag{II.5}$$

- Montrons que $\sum_{n\geq 1} \frac{c_n}{\beta^n} = 1$

  La série de droite est nulle en $\frac{1}{\beta} = \rho_{\mathfrak{C}^*}$. Dans le cas présentement étudié, $\beta > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et $1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^2}$ est non nul. Alors $1 - \sum_{n\geq 1} c_n z^n$ est nulle en $\frac{1}{\beta}$. D'où

$$\sum_{n\geq 1} \frac{c_n}{\beta^n} = 1$$

- Montrons que $\sum_{x\in\mathfrak{C}} \frac{|x|}{\beta^{|x|}} = \sum_{n\geq 1} \frac{nc_n}{\beta^n} < +\infty$.

  En multipliant la dérivée en $\frac{1}{\beta}$ de $S(z)$ par $\frac{1}{\beta}$, on a

$$(1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^2})\sum_{n\geq 1} \frac{nc_n}{\beta^n} = (1 - \frac{1}{\beta})\sum_{n\geq 1} n\frac{d_{n-1} - d_n}{(-\beta)^n}.$$

  La suite $(d_i)_{i\geq 1}$ étant bornée, le membre de droite est alors fini, ce qui implique que $\sum_{n\geq 1} \frac{nc_n}{\beta^n} < +\infty$.

On en déduit que le code $\mathfrak{C}$ est récurrent positif ■

Cas des développements périodiques de période paire avec $d_{2i} < d_1$

On sait que, dans ce cas, le $(-\beta)$-shift est sofique et transitif donc codé. Étudions tout de même le code. On reprend les notations du paragraphe précédent et on suppose dans celui-ci que l_β a un développement périodique de période paire en base $-\beta$, disons $2n$.

$$d(l_\beta, -\beta) = \overline{d_1 d_2 \cdots d_{2n}}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \left\{d_1 \cdots d_{k-1} j; 1 \leq k \leq 2n, (-1)^k (d_k - j) < 0, j \neq d_1\right\} \cup \{d_1 d_2 \cdots d_{2n}\} \\
\Gamma &= \{d_1, d_1 d_2 d_3, d_1 d_2 d_3 d_4 d_5, \cdots, d_1 d_2 d_3 \cdots d_{2n-1}\} \\
\mathfrak{C} &= \{x_1 x_2 \cdots x_m u; m \in \mathbb{N}, x_i \in \Gamma \text{ et } u \in \Gamma_1\}
\end{aligned} \tag{II.6}$$

Par construction, $\mathfrak{C}$ est un code préfixe. Par un raisonnement analogue à celui mené à la preuve du **théorème 7** précédent, on montre facilement que $L_\beta = L_{\mathfrak{C}^*}$.

Théorème 8. *Soit $\beta > 1$, $(d_i)_{i \geq 1}$ le $(-\beta)$-développement de l_β. On suppose $(d_i)_{i \geq 1}$ périodique de périodique paire $2n$ et on note $\mathfrak{C}$ le code préfixe de $S_{-\beta}$ défini en II.6. Alors, $\mathfrak{C}$ est récurrent positif.*

Preuve

$$\mathfrak{C} = \Gamma \cup (d_1 \Gamma) \cup (d_1 d_2 d_3 \Gamma) \cup \cdots \cup (d_1 \cdots d_{2n-1} \Gamma).$$

Soit c_k le nombre de mots de longueur k du code. Alors, $c_1 = d_1$, $c_2 = d_1 - d_2 - 1$ et pour $3 \leq k \leq 2n - 1$

$$\begin{aligned}
c_k &= c_{k-1} + c_{k-3} + \cdots + c_2 + d_k && \text{si } k \text{ est impair,} \\
c_k &= c_{k-1} + c_{k-3} + \cdots + c_3 + d_1 - d_k - 1 && \text{si } k \text{ est pair .}
\end{aligned}$$

Et pour $k \geq 2n + 1$, on a

$$c_k = c_{k-1} + c_{k-3} + \cdots + c_{k-2n+1}.$$

Le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n \geq 1} c_n z^n$ est supérieur à celui de $\sum\limits_{n \geq 1} Card(\mathfrak{C}^* \cap \mathcal{A}^n) z^n$ qui vaut $\frac{1}{\beta}$ puisque $L_{-\beta} = L_{\mathfrak{C}^*}$. Dans la boule de centre 0 et de rayon $\frac{1}{\beta}$, on a :

$$\sum_{n\geq 1} c_n z^n = -\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k d_k z^k - \sum_{k=1}^{n-1} z^{2k} + \left(\sum_{k=0}^{n-1} z^{2k+1}\right)\sum_{k\geq 1} c_k z^k.$$

D'où

$$(1-\sum_{k=0}^{n-1} z^{2k+1})(\sum_{k\geq 1} c_k z^k - 1) = -1 - \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k (d_k+1) z^k + z^{2n}.$$

Ceci implique que $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{c_k}{\beta^k} < +\infty$. Par ailleurs, $(d_i)_{i\geq 1}$ étant périodique de période $2n$,

$$(1-z^{2n})(\sum_{k\geq 1}(-1)^k (d_k+1) z^k - 1) = -1 - \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k (d_k+1) z^k + z^{2n}.$$

Donc, $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{c_k}{\beta^k} = 1$. Par conséquent, $\mathfrak{C}$ est récurrent positif ■

Nous avons vu que pour $\beta > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ avec $(d_i)_{i\geq 1}$, le $(-\beta)$-développement de l_β, tel que $d_{2i} < d_1$, le $(-\beta)$-shift est codé par un codé préfixe récurrent positif. Les lignes à suivre étudient le cas pour lequel d_1 apparaît en indice pair dans la suite $(d_i)_{i\geq 1}$. C'est le cas par exemple des développements périodiques de périodes impaires.

2.1.2 Cas $d_{2i} = d_1$ pour un certain i et β plus grand que le nombre d'or

Comme dans les paragraphes précédents, il existe un sous-ensemble Δ^* de $S_{-\beta}$ composé des suites qui sont produits des débuts (de longueurs impaires) de la suite $(d_i)_{i\geq 1}$. Par analogie à Γ, on va déterminer un sous-ensemble du langage $L_{-\beta}$ que l'on note Δ tel que les suites de Δ^* soient admissibles.

Dans ce paragraphe, nous allons supposer qu'il existe deux suites (finies ou infinies) $(n_i)_{i\geq 1}$ et $(p_i)_{i\geq 1}$ telles que :

$$d(l_\beta, -\beta) = d_1 d_2 \cdots d_{2n_1-1} d_1 \cdots d_{p_1} d_{2n_1+p_1} \cdots d_{2n_2-1} d_1 \cdots d_{p_2} d_{2n_2+p_2} \cdots d_{2n_3-1} \cdots \tag{II.7}$$

d_{2n_i-1} est suivi de $d_1 \cdots d_{p_i} d_{2n_i+p_i} \cdots d_{2n_{i+1}-1}$. La relation II.5 traduit l'existence d'un entier i pour lequel d_{2i} vaut d_1. La suite $(n_i)_{i\geq 0}$ est croissante et $(p_i)_{i\geq 0}$ est telle que $2n_i - 1 > p_i$. Si $2n_i - 1 = p_i$, le $(-\beta)$-développement de l_β est périodique de période $2n_i - 1$. La nécessité de regarder ce cas vient du fait que dans le paragraphe précédent, nous considérions que les produits infinis des mots de Γ_1 étaient admissibles. Toutefois, ceci n'est vrai que pour $d_{2i} < d_1$ pour tout i. Les sous-ensembles de mots de $S_{-\beta}$ définis par $\{d_1 d_2 \cdots d_{k-1} j | (-1)^k (d_k - j) < 0\}$ sont vides pour $2n_i < k \leq 2n_i + p_i - 1$. Ceci nous amène donc à modifier un tout petit peu le code préfixe établi dans le paragraphe précédent.

Caractérisons Δ. Par analogie aux mots de Γ, ceux de Δ finissent par un début de longueur impaire de $(d_i)_{i\geq 1}$. Δ sera l'ensemble des mots :

$$\begin{array}{ll}
d_1 \cdots d_{2k-1}, & \text{avec } 2n_i + p_i \leq 2k-1 < 2n_{i+1} - 1 \text{ et } n \in \mathbb{N} \\
d_1 \cdots d_{2n_i - 1} d_1 \cdots d_{2k-1}, & \text{avec } 2n_j + p_j \leq 2k-1 < 2n_{j+1} - 1 \text{ et } n_j \geq n_i \\
d_1 \cdots d_{2n_i - 1} d_1 \cdots d_{2k-1}, & \text{avec } p_i + 1 \leq 2k-1 < 2n_i - 1 \\
\vdots &
\end{array}$$

Posons $B_{k_i} = d_1 d_2 \cdots d_{2n_{k_i} - 1}$, et avec $k_i \leq k_{i+1}$, de façon plus générale, les mots de Δ sont de la forme :

$$B_{k_1} B_{k_2} \cdots B_{k_m} d_1 d_2 \cdots d_{2k-1} \tag{II.8}$$

où $2n_{k_m} + p_{k_m} \leq 2k-1 < 2n_{k_m+1} - 1$ ou alors $p_{k_m} + 1 \leq 2k-1 < 2n_{k_m} - 1$. On a donc le code préfixe explicité ci-dessous :

Le code préfixe

Nous avons vu que Δ est défini comme suit :

$$\Delta = \{B_{k_1} \cdots B_{k_m} d_1 \cdots d_{2k-1} \text{ défini en (II.6) avec } k_m \in \mathbb{N}\ \}$$

Considérons l'ensemble Γ des mots $B_{k_1} \cdots B_{k_m} d_1 \cdots d_{k-1} j$ tels qu'on ait les conditions suivantes :

– $(-1)^k (d_k - j) < 0$

- $j \neq d_1$
- $2n_{k_m} + p_{k_m} < k \leq 2n_{k_m+1} - 1$ ou $p_{k_m} + 1 < k \leq 2n_{k_m} - 1$
- $(-1)^{p_{k_m}}(d_{p_{k_m}+1} - j) > 0$ et $(-1)^{p_{k_m}}(d_{p_{k_m}+2n_{k_m}} - j) < 0$

$$\Gamma = \{B_{k_1} \cdots B_{k_m} d_1 \cdots d_{k-1} j | k > 0, k_m \geq 0\}$$

Soit $\mathfrak{C} = \Gamma \cup \{x_1 x_2 \cdots x_k u | x_i \in \Delta, u \in \Gamma \text{ et } |u| > 1\}$.

On peut réécrire $\mathfrak{C}$ sous la forme :

$$\mathfrak{C} = \Gamma \cup \left(\bigcup_{\substack{x \in \Delta \\ |x|=1}} x\mathfrak{C}^1 \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{x \in \Delta \\ |x|=2}} x\mathfrak{C}^1 \right) \cup \cdots \cup \left(\bigcup_{\substack{x \in \Delta \\ |x|=n}} x\mathfrak{C}^1 \right) \cup \cdots \tag{II.9}$$

où $\mathfrak{C}^1 = \{y \in \mathfrak{C} : |y| > 1\}$, est un code préfixe. En fait, c'est le sous-ensemble de $S_{-\beta}$ qui engendre les mots périodiques. Ce sont les mots admissibles de la forme $x_1 x_2 \cdots x_k d_1 d_2 \cdots d_{k-1} j$ ou chaque x_i est un début du $(-\beta)$-développement de l_β et $d_1 d_2 \cdots d_{k-1} j \overline{0}$ admissible.

Il est à noter que si $(d_i)_{i \geq 1}$ est périodique de période impaire, le langage $L_{\mathfrak{C}^*}$ est distinct L_β, celui du $(-\beta)$-shift.

Proposition 13. *Étant donné $\beta \geq 1$ et $(d_i)_{i \geq 1}$ le $(-\beta)$-développement de l_β, si $(d_i)_{i \geq 1}$ est périodique de période impaire alors le $(-\beta)$-shift n'est pas un système codé.*

Preuve On suppose $d(l_\beta, -\beta)$ périodique de période $2n+1$. Il suffit de voir que dans ce cas, la séquence $d_1 d_2 \cdots d_{2n+1}$ ne peut être suivie que par un début du développement. En effet, soit $d_1 d_2 \cdots d_{2n+1} X$ un mot de $L_{-\beta}$. Alors

$$d_1 d_2 \cdots d_{2n+1} d_1 \cdots d_{|X|} \preceq d_1 d_2 \cdots d_{2n+1} X.$$

Par ailleurs, $d_1 d_2 \cdots d_{2n+1} X$ est admissible implique que $d_1 \cdots d_{|X|} \preceq X$

$$d_1 \cdots d_{|X|} \preceq X \Rightarrow d_1 \cdots d_{2n+1} X \preceq d_1 d_2 \cdots d_{2n+1} d_1 \cdots d_{|X|}.$$

Il vient alors que $X = d_1 d_2 \cdots d_{|X|}$. Le système dynamique $S_{-\beta}$ n'est donc pas transitif. D'après [BH86], tout système codé est transitif. Donc si $d(l_\beta, -\beta)$ est périodique de période impaire, $S_{-\beta}$ ne peut être codé ■

Remarque 6. *Notons $\tilde{S}_{-\beta}$ le plus petit système de Lyndon d'entropie maximale contenu dans le $(-\beta)$-shift $S_{-\beta}$. Si $d(l_\beta, -\beta)$ non périodique de période impaire, $\tilde{S}_{-\beta} = S_{-\beta}$. Si $d(l_\beta, -\beta) = (d_i)_{i\geq 1}$ périodique de période impaire $2n+1$, alors $\tilde{S}_{-\beta}$ est associé au mot $(d_i^*)_{i\geq 1} = \overline{(d_1, d_2, \cdots, d_{2n}, d_{2n+1} - 1, 0)}$ et est codé par $\mathfrak{C}$ défini en II.9. $S_{-\beta} \backslash \tilde{S}_{-\beta}$ est l'ensemble des suites qui finissent par $\overline{d_1 d_2 \cdots d_{2n+1}}$.*

Théorème 9. *Soit $\beta > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $d(l_\beta, -\beta) = (d_i)_{i\geq 1}$. S'il existe un entier i tel que $d_{2i} = d_1$, alors le code préfixe $\mathfrak{C}$ défini en II.9 est récurrent positif. Le $(-\beta)$-shift est le système codé associé (sauf si $(d_i)_{i\geq 1}$ est périodique de période impaire, dans ce cas $\tilde{S}_{-\beta}$ est le système codé associé).*

Preuve Notons c_n, δ_n et a_n les nombres de mots de longueur n dans $\mathfrak{C}$, Γ et Δ respectivement. De la relation (II.7), on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} c_n z^n &= \sum_{n\geq 1} \delta_n z^n + \sum_{n\geq 2} a_1 z^{n+1} + \sum_{n\geq 2} a_2 c_n z^{n+2} + \sum_{n\geq 2} a_3 c_n z^{n+3} + \cdots \\ &= \sum_{n\geq 1} \delta_n z^n + (\sum_{n\geq 1} a_n z^n)(\sum_{n\geq 1} c_n z^n) - c_1 \sum_{n\geq 1} a_n z^{n+1}.\end{aligned}$$

D'où

$$(1 - \sum_{n\geq 1} a_n z^n)\sum_{n\geq 1} c_n z^n = \sum_{n\geq 1} \delta_n z^n - c_1 \sum_{n\geq 1} a_n z^{n+1} \text{ et donc}$$
$$(1 - \sum_{n\geq 1} a_n z^n)(1 - \sum_{n\geq 1} c_n z^n) = 1 - \sum_{n\geq 1} a_n z^n - \sum_{n\geq 1} \delta_n z^n + \sum_{n\geq 1} d_1 a_n z^{n+1}.$$

Soit $\epsilon_n^{'}$ tel que :

$$\epsilon_n^{'} = \begin{cases} 0 \text{ si n pair ,} \\ 0 \text{ si } 2n_i \leq n \leq 2n_i + p_i - 1 \text{ pour un certain } i \text{ ,} \\ 1 \text{ si } 2n_i + p_i \leq n \leq 2n_{i+1} - 3 \text{ et } n \text{ impair .} \end{cases}$$

Ainsi défini, $\epsilon_n^{'}$ compte le nombre de "mauvais mots" de la forme $d_1 d_2 \cdots d_n$ avec n entre $2n_i + p_i$ et $2n_{i+1} - 3$. Si $\Delta^{'}$ est l'ensemble de ses mots, notons Δ_i l'ensemble des "mauvais mots" commençant par $d_1 \cdots d_{2n_i - 1} d_1 \cdots d_{p_i + 1}$. On a :

$$\Delta = \Delta^{'} \cup \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cdots . \tag{II.10}$$

Ainsi, on a :

$$\sum_{n \geq 1} a_n z^n = \sum_{n \geq 1} \epsilon_n^{'} z^n + \sum_{k_1 \geq 1} \left(\sum_{n \geq p_{k_1 + 1}} a_{k_1, n} z^n \right)$$

où $a_{i,n}$ est le nombre de mots de longueur n dans Δ_i. Appelons J_k l'ensemble des indices i_k tels que $2n_{i_k} - 1 < p_k$. Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq p_{k_1 + 1}} a_{k_1, n} z^n = & \sum_{n \geq 1} a_n z^{n + 2n_{k_1} - 1} - \sum_{n \leq p_{k_1}} \epsilon_n^{'} z^{n + 2n_{k_1} - 1} \\ & - \sum_{k_2 \in J_{k_1}} \left(\sum_{n \geq p_{k_2 + 1}} a_{k_2, n} z^{n + 2n_{k_1} - 1} \right). \end{aligned}$$

On applique le même principe à la somme sur les n plus grands que $p_{k_2} + 1$ et ainsi de suite jusqu'à atteindre p_1. On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} a_n z^n = & (\sum_{n \geq 1} a_n z^n)(\sum_{k_1 \geq 1} z^{2n_{k_1} - 1}(1 - \sum_{k_2 \in J_{k_1}} z^{2n_{k_2} - 1}(1 - \sum_{k_3 \in J_{k_2}} z^{2n_{k_3} - 1}(1 - \cdots \\ & \cdots (1 - z^{2n_1 - 1}) \cdots)))) + \sum_{n \geq 1} \epsilon_n^{'} z^n - \\ & \sum_{k_1 \geq 1} \sum_{n \leq p_{k_1}} \epsilon_n^{'} z^{n + 2n_{k_1} - 1} + \sum_{k_1 \geq 1} \sum_{k_2 \in J_{k_1}} \sum_{n \leq p_{k_1}} \epsilon_n^{'} z^{n + 2n_{k_1} + 2n_{k_2} - 2} - \\ & \sum_{k_1 \geq 1} \sum_{k_2 \in J_{k_1}} \sum_{k_3 \in J_{k_2}} \sum_{n \leq p_{k_1}} \epsilon_n^{'} z^{n + 2n_{k_1} + 2n_{k_2} + 2n_{k_3} - 3} \cdots . \end{aligned} \tag{II.11}$$

Pour une simplification d'écriture, on pose

$$A_{(n_i)} = \sum_{k_1 \geq 1} z^{2n_{k_1} - 1}(1 - \sum_{k_2 \leq p_{k_1}} z^{2n_{k_2} - 1}(1 - \sum_{k_3 \leq p_{k_2}} z^{2n_{k_3} - 1}(\cdots))).$$

Les mots $d_1 \cdots d_{2n_i-1}$ sont admissibles contrairement à certains de leurs produits. Les coefficients de la série $A_{(n_i)}$ permettent de compter les mots admissibles produits des séquences de la forme $d_1 d_2 \cdots d_{2n_i-1}$. Les produits de deux pièces $d_1 \cdots d_{2n_i-1} d_1 \cdots d_{2n_j-1} d_1 d_2 \cdots$ ne sont pas admissibles si $2n_j - 1$ est inférieur à p_i. Ceci justifie le signe " - " devant la somme sur $k_2 \in J_{k_2}$. Toutefois, la concaténation de ces produits bannis avec $d_1 \cdots d_{2n_k-1}$ donne des pièces admissibles pour certains k tel que $2n_k - 1$ plus petit que p_j (somme sur k_3 dans J_{k_2}), etc. Plus généralement, si $X_{k_i} = d_1 \cdots d_{2n_{k_i}-1}$ et $2n_{k_i} - 1 < p_{k_{i-1}}$, $X_{k_1} X_{k_2} \cdots X_{k_n}$ n'est pas périodique (respectivement $X_{k_1} X_{k_2} \cdots X_{k_n}$ est périodique) si n paire (respectivement n impair) mais $X_{k_1} X_{k_2} \cdots X_{k_n} X_{k_{n+1}}$ l'est (respectivement ne l'est pas) pour $2n_{k_{n+1}} < p_{k_n}$.

$$
\begin{aligned}
(1 - A_{(n_i)}) \sum_{n \geq 1} a_n z^n = & \sum_{n \geq 1} \epsilon_n^{'} z^n - \sum_{k_1 \geq 1} \sum_{n \leq p_{k_1}} \epsilon_n^{'} z^{n+2n_{k_1}-1} \\
& + \sum_{k_1 \geq 1} \sum_{k_2 \in J_{k_1}} \sum_{n \leq p_{k_1}} \epsilon_n^{'} z^{n+2(n_{k_1}+n_{k_2}-1)} \\
& - \sum_{k_1 \geq 1} \sum_{k_2 \in J_{k_1}} \sum_{k_3 \in J_{k_2}} \sum_{n \leq p_{k_1}} \epsilon_n^{'} z^{n+2n_{k_1}+2n_{k_2}+2n_{k_3}-3} \cdots .
\end{aligned}
\tag{II.12}
$$

En remplaçant $\epsilon_n^{'}$ par sa valeur, on a :

$$
\begin{aligned}
(1 - A_{(n_i)})(1 - \sum_{n \geq 1} a_n z^n) = & 1 - \sum_{i \geq 0} \left(\sum_{2n+1 = 2n_i + p_i}^{2n_{i+1}-1} z^{2n+1} \right) \\
& + \sum_{k_1 \geq 1} \sum_{i \geq 0} \left(\sum_{\substack{2n+1 = 2n_i + p_i \\ 2n+1 \leq p_{k_1}}}^{2n_{i+1}-1} z^{2n_{k_1}+2n} \right) - \cdots
\end{aligned}
\tag{II.13}
$$

et

$$
\begin{aligned}
(1-A_{(n_i)})\sum_{n\geq 1} d_1 a_n z^{n+1} =& 1-\sum_{i\geq 0}\left(\sum_{2n=2n_i+p_i+1}^{2n_{i+1}-2} d_1 z^{2n}\right)\\
&+\sum_{k_1\geq 1}\sum_{i\geq 0}\left(\sum_{\substack{2n=2n_i+p_i+1\\ 2n\leq p_{k_1}+1}}^{2n_{i+1}-2} d_1 z^{2n_{k_1}-1+2n}\right)-\cdots .
\end{aligned}
\tag{II.14}
$$

Il ne reste plus qu'à évaluer la somme $\sum_{n\geq 1}\delta_n z^n$. Pour ce faire, soit $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$
\epsilon_n=\begin{cases} d_1-d_n-1 & \text{si } n \text{ pair et } 2n_i+p_i<n\leq 2n_{i+1}-2\ ,\\ d_n & \text{si } 2n_i+p_i<n\leq 2n_{i+1}-1 \text{ et } n \text{ impair}\ ,\\ (-1)^{p_i+1}(d_{2n_i+p_i}-d_{p_i+1})-1 & \text{si } n=2n_i+p_i\ . \end{cases}
\tag{II.15}
$$

ϵ_n compte le nombre de mots de longueur n de la forme $d_1d_2\cdots d_{n-1}i$ où $(-1)^n(d_n-i)<0$ et i différent de d_1. Notons Γ' l'ensemble de ces mots. On peut alors mettre Γ sous la forme :

$$
\Gamma=\Gamma'\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cdots \tag{II.16}
$$

où Γ_i désigne l'ensemble des mots de la forme $d_1d_2\cdots d_{2n_i-1}d_1\cdots d_{p_i}d_{p_i+1}\cdots d_kj$, avec $(-1)^{k+1}(d_{k+1}-j)<0$ et j différent de d_1. Désignons par δ_{i_n} le nombre de mots de longueur n dans Γ_i. Nous avons donc :

$$
\sum_{n\geq 1}\delta_n z^n=\sum_{n\geq 1}\epsilon_n z^n+\sum_{k_1\geq 1}\left(\sum_{n\geq p_{k_1}+2}\delta_{k_1,n}z^n\right) \tag{II.17}
$$

Mais

$$\sum_{n\geq p_{k_1}+2}\delta_{k_1,n}z^n = \sum_{n\geq 1}\delta_n z^{n+2n_{k_1}-1} - \sum_{n\leq p_{k_1}+1}\epsilon_n z^{n+2n_{k_1}-1} - \sum_{k_2\in J_{k_1}}\left(\sum_{n\geq p_{k_2}+2}\delta_{k_2,n}z^{n+2n_k-1}\right)$$

En appliquant le même principe à la série $\sum\limits_{n\geq p_{k_2}+2}\delta_{k_2,n}z^{n+2n_k-1}$ et en continuant le processus jusqu'à p_1, la série (II.17) donne alors :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\delta_n z^n = &\sum_{n\geq 1}\delta_n z^n A_{(n_i)} + \sum_{n\geq 1}\epsilon_n z^n - \sum_{k_1\geq 1} z^{2n_{k_1}-1}\sum_{n\leq p_{k_1}+1}\epsilon_n z^n \\ &+ \sum_{k_1\geq 1} z^{2n_{k_1}-1}\sum_{k_2\in J_{k_1}} z^{2n_{k_2}-1}\sum_{n\leq p_{k_2}+1}\epsilon_n z^n \cdots .\end{aligned} \tag{II.18}$$

Compte-tenu de (II.15), on a :

$$\begin{aligned}(1-A_{(n_i)})\sum_{n\geq 1}\delta_n z^n = &-\sum_{i\geq 0}\sum_{2n=2n_i+p_i}^{2n_{i+1}-1}(d_{2n}+1)z^{2n} \\ &+\sum_{k_1\geq 1}\sum_{i\geq 0}\sum_{\substack{2n=2n_i+p_i\\ 2n\leq p_{k_1}}}^{2n_{i+1}-1}(d_{2n}+1)z^{2n+2n_{k_1}-1} \\ &-\sum_{k_1\geq 1}\sum_{k_2\in J_{k_1}}\sum_{i\geq 0}\sum_{\substack{2n=2n_i+p_i\\ 2n\leq p_{k_2}}}^{2n_{i+1}-1}(d_{2n}+1)z^{2n+2n_{k_1}+2n_{k_2}-2}+\cdots \\ &+\sum_{i\geq 0}\sum_{2n+1=2n_i+p_i}^{2n_{i+1}-1}d_{2n+1}z^{2n+1} \\ &-\sum_{k_1\geq 1}\sum_{i\geq 0}\sum_{\substack{2n=2n_i+p_i\\ 2n+1\leq p_{k_1}}}^{2n_{i+1}-1}d_{2n+1}z^{2n+2n_{k_1}}+\cdots \\ &+\sum_{i\geq 0}\sum_{2n=2n_i+p_i}^{2n_{i+1}-2}d_1 z^{2n} \\ &-\sum_{k_1\geq 1}\sum_{i\geq 0}\sum_{2n=2n_i+p_i}^{2n_{i+1}-1}d_1 z^{2n+2n_{k_1}-1}+\cdots\end{aligned} \tag{II.19}$$

D'après (II.13), (II.14) et (II.19), $(1 - \sum_{n\geq 1} a_n z^n)(1 - A_{(n_i)}) \sum_{n\geq 1} c_n z^n$ vaut alors

$$1 + \sum_{i\geq 0} \sum_{n=2n_i+p_i}^{2n_{i+1}-1} (-1)^n (d_n+1) z^n + \sum_{k_1\geq 1} \sum_{i\geq 0} \sum_{\substack{n=2n_i+p_i \\ n\leq p_{k_1}}}^{2n_{i+1}-1} (-1)^n (d_n+1) z^{n+2n_{k_1}-1}$$

$$+ \sum_{k_1\geq 1} \sum_{k_2\in J_{k_1}} \sum_{i\geq 0} \sum_{\substack{n=2n_i+p_i \\ n\leq p_{k_2}}}^{2n_{i+1}-1} (-1)^n (d_n+1) z^{n+2n_{k_1}+2n_{k_2}-2} + \cdots .$$

Pour un certain couple d'entiers (i, n), fixons k_i. Remarquons tout d'abord que $d_n = d_{n+2n_{k_i}-1}$ tant que n reste inférieur ou égal à p_{k_i}. Ceci nous amène à conclure que :

$$(1 - \sum_{n\geq 1} a_n z^n)(1 - \sum_{n\geq 1} c_n z^n)(1 - A_{(n_i)}) = 1 + \sum_{n\geq 1} (-1)^n (d_n+1) z^n. \tag{II.20}$$

La série de droite est nulle en $\frac{1}{\beta}$. Donc, le membre de gauche l'est aussi. Les plus petits zéros en module de $1 - \sum_{n\geq 1} a_n z^n$ et $1 - A_{(n_i)}$ sont plus grands que $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$. Donc :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{c_n}{\beta^n} = 1$$

La suite $(d_i)_{i\geq 1}$ étant bornée, il suit que $\sum_{n\geq 1} \frac{n(d_{n-1}-d_n)}{(-\beta)^n} < +\infty$. Ceci implique que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n c_n}{\beta^n} < +\infty.$$

On en déduit alors que le code $\mathfrak{C}$ est récurrent positif ■

Remarque 7. *Le P.G.C.D. des longueurs des mots de chacun des différents codes construits aux paragraphes 2.1.1 et 2.1.2 est 1. En effet, il suffit de voir que dans chaque cas, le code admet au moins un mots de longueur 1.*

2.2 Bêta plus petit que le nombre d'or

Code préfixe

On aurait pu inclure ce paragraphe dans le cas $d_{2i} = d_1$ pour un certain i. En effet, pour $\beta \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, le développement en base $-\beta$ est tel que 1 est suivi d'un nombre pair de zéros, la plus longue séquence de zéro possible étant celle donnée entre le premier 1 du développement et le second.

$$d(l_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = 1\overline{0}.$$

$\beta < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ implique que :

$$1\overline{0} \prec (d_i)_{i\geq 1}$$

Donc, il existe un entier n tel que $d_1 d_2 \cdots d_{n-1} = 10\cdots 0$ et $(-1)^{n+1} d_n < 0$. C'est-à-dire que n est pair et $d_n = 1$. Ainsi, dans ce paragraphe, nous supposerons toujours qu'il existe une suite $(n_i)_{i\geq 1}$ telle que :

$$d(l_\beta, -\beta) = 1\overline{0}^{2n_1} 1\overline{0}^{2n_2} 1\overline{0}^{2n_3} 1 \cdots, \text{ avec } n_i \leq n_1 \tag{II.21}$$

On voit donc que $(d_i)_{i\geq 1}$ est un produit de ses débuts de longueurs impaires (il y a une infinité de $1 = d_1$ en des indices pairs car $n_i \leq n_1$). Ce qui distingue ce cas de celui précédemment étudié pour $d_{2i} = d_1$ est que l'ensemble $\mathfrak{C}$ qui servait de code préfixe est réduit au singleton $\{0\}$. Le sous-ensemble $\mathfrak{C}^*$ serait alors d'entropie topologique nulle et ne peut donc porter la mesure d'entropie maximale.

Par ailleurs, d'après la relation II.21, 1 ne peut être suivi de plus de $2n_1$ zéros sauf si n_1 est infini (dans ce cas $\beta = \gamma_0$). La conséquence est que si β est strictement plus petit que le nombre d'or, alors les systèmes $S_{-\beta}$ et $\tilde{S}_{-\beta}$ ne sont pas transitifs donc pas du tout codés. On reprend certaines notations du chapitre précédent. On note γ_n le réel strictement plus grand que 1 tel que :

$$\begin{aligned} d(l_{\gamma_n}, -\gamma_n) &= u_n \overline{u_{n-1}} \\ &= \phi^n(1\overline{0}) \\ d(l_{\gamma_n}, -\gamma_n) &= \phi^n(d(l_{\gamma_0}, -\gamma_0)) \end{aligned}$$

Un code préfixe du $(-\gamma_n)$-shift $S_{-\gamma_n}$ est $\{u_n, u_{n-1}u_{n-1}\}$. Cet ensemble est l'image par ϕ^n de $\{1, 00\}$, un code préfixe de S_{γ_0} ($\gamma_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$). La recherche de code préfixe récurrent positif peut donc se réduire au cas où β est dans l'intervalle $[\gamma_1, \gamma_0[$.

Proposition 14. *Soit $\beta \in [\gamma_{n+1}, \gamma_n)$, $d(l_\beta, -\beta)$ est l'image par ϕ^n du développement de l_x en base $-x$ pour un certain x vérifiant $\gamma_1 \leq x < \gamma_0$.*

Preuve Soit $\beta \in]\gamma_{n+1}, \gamma_n[$, alors $d(l_{\gamma_n}, -\gamma_n) \prec d(l_\beta, -\beta) \prec d(l_{\gamma_{n+1}}, -\gamma_{n+1})$. Donc, il existe n_1 tel que $d(l_\beta, -\beta)$ débute par $u_n(u_{n-1})^{2n_1}u_n$. Le mot $(u_{n-1})^{2n_1}$ est la plus longue séquence de u_{n-1}. Mais toute séquence de longueur $|u_n(u_{n-1})^{2n_1}u_n|$ est plus grande que $u_n(u_{n-1})^{2n_1}u_n$ (au sens de la relation d'ordre alterné) et après u_n on ne peut avoir qu'un nombre pair (ou nul) de u_{n-1}. D'où, il existe une suite $(n_i)_{i\geq 1}$ bornée, $n_i \leq n_1$ tel quel

$$d(l_\beta, -\beta) = u_n(u_{n-1})^{2n_1}u_n(u_{n-1})^{2n_2}u_n(u_{n-1})^{2n_3} \cdots = \phi^n(1(0)^{2n_1}1(0)^{2n_2} \cdots).$$

D'où le résultat ■

L'image par ϕ^n d'un code préfixe de S_{-x} est un code préfixe de $S_{-\beta}$ à condition qu'aucun mot du code de S_{-x} ne débute par l'image par ϕ d'un autre.

Exemple 3. *L'ensemble $\{0, 100\}$ est un code préfixe sur S_{γ_0} mais, $\{\phi^k(0), \phi^k(100)\}$ n'en est pas un pour S_{γ_k} car $\phi(0) = 1$ qui est le début de 100. En effet, $\phi^k(0) = \phi^{k-1}(1)$ et*

$$\begin{aligned}
\phi^k(100) &= \phi^k(1)\phi^{k-1}(1)\phi^{k-1}(1) \\
&= \phi^{k-1}(1)\phi^{k-2}(1)\phi^{k-2}(1)\phi^{k-1}(1)\phi^{k-1}(1) \\
&= \phi^k(0)\phi^{k-2}(1)\phi^{k-2}(1)\phi^{k-1}(1)\phi^{k-1}(1)
\end{aligned}$$

Soit $\beta \in]\gamma_1, \gamma_0[$. Revenons à la relation (II.20) :

$$(1 - \sum_{n\geq 1} a_n z^n)(1 - \sum_{n\geq 1} c_n z^n)(1 - A_{(n_i)}) = 1 + \sum_{n\geq 1}(-1)^n(d_n + 1)z^n.$$

Dans la série $1 - A_{(n_i)}$, les exposants sont les longueurs des produits de séquences B_i qui apparaissent dans $d_1 \cdots d_{2n_i}d_1d_2 \cdots d_{p_i}$. Chaque monôme a un coefficient -1 ou 1 selon que l'exposant est pair ou impair.

Supposons par exemple :

$$d_1 d_2 \cdots d_{p_i} = d_1 d_2 \cdots d_{2n_1-1} d_1 \cdots d_{p_1} d_{p_1+2n_1} \cdots d_{2n_2-1} \cdots d_{p_i}$$

avec $p_i < 2n_3 - 1$ alors, on verra apparaître $z^{2n_i+2n_1-2}$ et $z^{2n_i+2n_2-2}$.

Par ailleurs, les mots de Δ ont été caractérisé en (II.8). Soit x dans Δ tel que $x = B_{k_1} B_{k_2} \cdots B_{k_m} d_1 d_2 \cdots d_{2k-1}$.

$$B_{k_1} B_{k_2} \cdots B_{k_m} d_1 d_2 \cdots d_{2k-1} = d_1 d_2 \cdots d_{2n_{k_1}-1} B_{k_2} \cdots B_{k_m} d_1 d_2 \cdots d_{2k-1}.$$

Ces mots sont construits de sorte que leurs produits soient admissibles. Ainsi, $\overline{x}$ est un mot périodique du $(-\beta)$-shift. Mais, $\overline{x}$ périodique implique que $\sigma(\overline{x})$ l'est aussi.

$$\sigma(\overline{x}) = \overline{d_2 \cdots d_{2n_{k_1}-1} B_{k_2} \cdots B_{k_m} d_1 \cdots d_{2k-1} d_1}.$$

Notons Δ' le sous-ensemble de $L_{-\beta}$ constitué des mots :

$$d_2 d_3 \cdots d_{2n_{k_1}-1} B_{k_2} \cdots B_{k_m} d_1 \cdots d_{2k-1} d_1. \tag{II.22}$$

Si $\beta < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors la séquence $d_2 \cdots d_{2n_{k_1}-1}$ s'identifie à $\overline{0}^{2n_{k_1}-2}$. Dans Δ', on trouve alors les mots : 1, 001, 00001 , $\cdots$, $\overline{0}^{2n_1-2}1$, $\cdots$. C'est un code préfixe et le nombre de mots de longueur n de Δ' est le même que celui de Δ.

Théorème 10. *Soit $\beta \in]\gamma_1, \gamma_0[$ et $(d_i)_{i\geq 1}$ le $(-\beta)$-développement de l_β en base $-\beta$. L'ensemble des mots définis en (II.22) est un code préfixe récurrent positif et le système codé est contenu dans $S_{-\beta}$.*

Preuve

$$|B_{k_1} B_{k_2} \cdots B_{k_m} d_1 \cdots d_{2k-1}| = |d_2 \cdots d_{2n_{k_1}-1} B_{k_2} \cdots B_{k_m} d_1 \cdots d_{2k-1} d_1|.$$

Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n z^n$ est telle que a_n désigne le nombre de mots de longueur n dans Δ'. De (II.20), pour $z = \frac{1}{\beta}$

$$(1-\sum_{n\geq 1} a_n z^n)(1-A_{(n_i)})=0.$$

Il reste alors à déterminer exactement laquelle des expressions de $1-A_{(n_i)}$ ou de $1-\sum\limits_{n\geq 1} a_n z^n$ est nulle en $\frac{1}{\beta}$.

Si on considère $1-A_{(n_i)}$ et $1-\sum\limits_{n\geq 1} a_n z^n$ comme deux fonctions sur l'intervalle $[0,1)$, $1-A_{(n_i)}$ tend vers 0 moins vite que $1-\sum\limits_{n\geq 1} a_n z^n$. C'est-à-dire que si l'on note α_0 et β_0 les plus petits zéros réels positifs de $1-A_{(n_i)}$ et $1-\sum\limits_{n\geq 1} a_n z^n$ respectivement, on a $\beta_0 \leq \alpha_0$. Nécessairement, β_0 existe et est égal à $\frac{1}{\beta}$ sinon $1+\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n(d_n+1)z^n$ admettrait un zéro à l'intérieur de la boule de centre 0 et de rayon $\frac{1}{\beta}$. Donc :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\beta^n} = 1$$

Par ailleurs, la relation (II.20) permet d'avoir :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n a_n}{\beta^n} < +\infty$$

■

Corollaire 3. *Soit* $\beta_k \in]\gamma_{k+1}, \gamma_k[$ *et* $\beta \in]\gamma_1, \gamma_0[$ *tel que* $d(l_\beta, -\beta) = 1\overline{0}^{2n_1}1\overline{0}^{2n_2}1\overline{0}^{2n_3}1\cdots$ *et*

$$d(l_{\beta_k}, -\beta_k) = \phi^k(d(l_\beta, -\beta)) = u_k\overline{u_{k-1}}^{2n_1}u_k\overline{u_{k-1}}^{2n_2}u_k\cdots$$

Alors $\phi^k(\Delta')$ *est un code préfixe pour* $S_{-\beta_k}$ *(puisqu'aucun mot de* Δ' *n'est l'image par* ϕ *d'un autre) et*

$$1 = \sum_{x\in\Delta'} \beta_k^{-|\phi^k(x)|}$$

$\phi^k(\Delta')$ *est alors l'ensemble des mots* u_k, $u_{k-1}u_{k-1}u_k$, $u_{k-1}u_{k-1}u_{k-1}u_{k-1}u_k$, *...*

$$\phi^k(\Delta') = \{u_k, u_{k-1}u_{k-1}u_k, u_{k-1}^4 u_k, \cdots\} \tag{II.23}$$

Pour $\beta = \gamma_n$ on considère le code

$$\Delta' = \{u_n, u_{n-1}u_{n-1}\}. \tag{II.24}$$

3 Intrinsèque ergodicité

Le principe variationnel énoncé au premier chapitre dit que l'entropie topologique est le sup pris sur l'ensemble des mesures invariantes par rapport à σ des entropies métriques. Dans [Sig74], une autre formulation est donnée en prenant le sup uniquement sur les mesures ergodiques.

$$h_{top}(T) = sup\{h_m(T)|m \in \mathfrak{M}_T(X) \text{ est ergodique }\}$$

Le sup est atteint pour le shift σ car il est expansif, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que pour tout x et y dans un sous-shift Λ, il existe un entier n pour lequel on a :

$$d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) \geq \epsilon$$

d étant la distance défini par :

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-|n|} d(x_n, y_n) \text{ où } x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \text{ et } y = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$$

avec

$$d(x_n, y_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_n = y_n \\ 1 & \text{si } x_n \neq y_n \end{cases}$$

Il suffira de prendre $\epsilon = \frac{1}{2}$.

Outre les propriétés du shift, l'existence de la mesure ergodique sur la tour assure que l'ensemble des mesures ergodiques sur $S_{-\beta}$ est non-vide. En effet, d'après le **théorème 6**, il existe une probabilité invariante (ergodique) $\overline{\mu}$ d'entropie $\log \beta$ sur la tour associée au code $\mathfrak{C}$ induisant la probabilité de Bernoulli μ sur l'ensemble des mots infinis qui sont produits de mots du code, définie par :

$$\mu([x]) = \frac{1}{\beta^{|x|}}, \text{ avec } x \in \mathfrak{C}$$

Étant donné un code préfixe $\mathfrak{C}$, dans la suite on note $W(\mathfrak{C})$ l'ensemble des mots qui se décomposent en produit des mots de $\mathfrak{C}$. Notons ν l'application de l'ensemble des parties de $S_{-\beta}$ dans $[0, 1]$ qui coïncide avec μ sur tout sous-ensemble de $W(\mathfrak{C})$ et nulle sur toute partie du complémentaire de $W(\mathfrak{C})$ dans $S_{-\beta}$.

$$\nu(B) = \begin{cases} \mu(B) & \text{si } B \subset W(\mathfrak{C}) \\ 0 & \text{si } B \subset S_{-\beta}/W(\mathfrak{C}) \end{cases}$$

ν est une probabilité ergodique sur $S_{-\beta}$.

Le but de ce paragraphe est d'établir l'unicité de la mesure d'entropie maximale sur le $(-\beta)$-shift $S_{-\beta}$. L'existence d'un code préfixe récurrent positif rendant codé $S_{-\beta}$ implique l'unicité de la mesure d'entropie $\log \beta$ sur la tour associée au code préfixe $\mathfrak{C}$ (**théorème 6**). Toutefois, il y a un fait dont il faut tenir compte : tout mot de $S_{-\beta}$ n'est pas produit de mots du code. En effet, d'abord les mots finissant par des produits infinis des débuts de longueur impaires du développement de $-\frac{\beta}{\beta+1}$ n'appartiennent pas $W(\mathfrak{C})$ (à l'exemple de $\overline{d_1}$, $d_1\overline{d_1d_2d_3}, \cdots$). Aussi, les mots finissant par $d(l_\beta, -\beta)$ n'y sont pas non plus (à l'instar de $d_1d_1d_2d_3\cdots$, $d_1d_2d_3d(l_\beta, -\beta), \cdots$). Dans la proposition suivante, on montre d'ailleurs que ce sous-ensemble est négligeable pour toute mesure de probabilité σ-invariante sur $S_{-\beta}$. une attention particulière est à accorder au cas où le développement $d(l_\beta, -\beta)$ est périodique de période impaire. Le choix judicieux du système dynamique symbolique est le plus petit système de Lyndon associé à β : $\tilde{S}_{-\beta}$.

Proposition 15. *Soit $\beta > 1$ et $(d_i)_{i\geq 1} = d(l_\beta, -\beta)$. On note N l'ensemble des suites de $S_{-\beta}$ qui finissent par $(d_i)_{i\geq 1}$. Si $(d_i)_{i\geq 1}$ est non périodique, alors N est négligeable par rapport à toute mesure σ-invariante sur $S_{-\beta}$.*

Preuve Soit μ une mesure invariante sur $S_{-\beta}$. On peut voir N comme réunion de toute les images réciproques des itérés de σ appliqués au singleton $\{d_1d_2d_3\cdots\} = \{d(l_\beta, -\beta)\}$.

$$N = \{d_1d_2d_3\cdots\} \cup \sigma^{-1}\{d_1d_2d_3\cdots\} \cup \sigma^{-2}\{d_1d_2d_3\cdots\} \cup \sigma^{-3}\{d_1d_2d_3\cdots\} \cup \cdots \quad \text{(II.25)}$$

Si $d(l_\beta, -\beta)$ n'est pas périodique, alors pour tout couple d'entiers (i, j) avec $i \neq j$, on a :

$$\sigma^{-i}\{d_1d_2d_3\cdots\}\cap\sigma^{-j}\{d_1d_2d_3\cdots\}=\varnothing.$$

Donc

$$\mu(N)=\sum_{n\geq 0}\mu(\{d_1d_2d_3\cdots\})$$

Ceci implique que :

$$\mu(N)=\begin{cases}+\infty & \text{si } \mu(\{d_1d_2\cdots\})\neq 0 \text{ (ce qui est absurde)}\\ 0 & \text{si } \mu(\{d_1d_2\cdots\}) \text{ est nul .}\end{cases}$$

Le seul cas possible est $\mu(N)=0$ ■

Pour $d(l_\beta,-\beta)$ périodique de période $2n$, les mots finissant par le développement en base $-\beta$ de l_β sont produits de mots du code puisque si $d(l_\beta,-\beta)=\overline{d_1d_2\cdots d_{2n}}$, alors la séquence $d_1d_2\cdots d_{2n}$ est un mot du code. Si la période est impaire, on mène l'étude sur $\tilde{S}_{-\beta}$.

Proposition 16. *Soit $\beta>1$ et $d(l_\beta,-\beta)=(d_i)_{i\geq 1}$. On note D le sous-ensemble des mots de $S_{-\beta}$ qui sont produits infinis des débuts de $d(l_\beta,-\beta)$ de longueurs impaires et m une mesure ergodique sur $S_{-\beta}$ d'entropie maximale. Si m est de support D alors :*

$$h_m(S_{-\beta})\leq\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{II.26}$$

Avant de donner une preuve à cette proposition énonçons une observation de Meir Smorodinsky dans [Smo71] concernant le théorème de Shannon-McMillan-Breiman. Soit (X,μ,T) un système dynamique et P une partition de X d'entropie finie. On pose $Q=(P)^0_{-n+1}$ avec

$$(P)^0_{-n+1}=\bigvee_{k=-n+1}^{k=0}T^{-k}P.$$

Alors, pour tout ε, $\delta>0$ on peut trouver un rang n_0 tel que pour tout n plus grand que n_0, les atomes Q_i de Q se répartissent en deux groupes : les “ mauvais atomes”, ceux dont la réunion est de mesure plus petite que δ et les autres sont “les bons”.

Alors, le nombre de “bons atomes” est compris entre $\mathbf{e}^{n(h(P,T)-\varepsilon)}$ et $\mathbf{e}^{n(h(P,T)+\varepsilon)}$.

Preuve Soit Γ_1 l'ensemble des mots sur $\{0, 1, \cdots, d_1\}$ qui se décomposent en produits des débuts de $(d_i)_{i\geq 1}$ de longueurs impaires. Alors $D \subset \Gamma_1$. Mais

$$\Gamma_1 = d_1\Gamma_1 \cup (d_1d_2d_3\Gamma_1) \cup (d_1d_2d_3d_4d_5\Gamma_1) \cup \cdots .$$

Ceci implique que le nombre f_n de mots de longueur n de Γ_1 vérifie :

$$\begin{aligned} f_n &= f_{n-1} + f_{n-3} + f_{n-5} + \cdots \\ &= f_{n-1} + f_{n-2}. \end{aligned}$$

Si m est de support D, $S_{-\beta} \setminus D$ est de mesure nulle, c'est-à-dire pour tout $\delta > 0$ la réunion des cylindres contenus dans $S_{-\beta} \setminus D$ est strictement inférieur à δ. On considère alors comme “bons” atomes, les cylindres $[x]$ tel que x est un produit admissible des débuts de $d(l_\beta, -\beta)$ de longueurs impaires. Si a_n est le nombre de “bons atomes” de taille n, il correspond aussi au nombre de mots de longueur n dans le langage de D. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ et n assez grand,

$$\mathbf{e}^{n(h_m(\sigma)-\epsilon)} \leq a_n \leq \mathbf{e}^{n(h_m(\sigma)+\epsilon)}.$$

Ceci signifie aussi que $\log(\sqrt[n]{a_n})$ converge vers $h_m(\sigma) = \log\beta$. Mais $a_n \leq f_n$ et $\frac{1}{n}\log f_n$ converge vers $\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, il vient alors que

$$h_m(S_{-\beta}) \leq \log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

■

Proposition 17. *Soit $\beta > 1$ et μ une mesure σ-invariante du $(-\beta)$-shift $S_{-\beta}$. On note D_1 l' ensemble des mots de $S_{-\beta}$ qui finissent par un produit infini de préfixes de $d(l_\beta, -\beta)$ de longueurs impaires. Alors D_1 est de mesure nulle.*

Preuve Si un mot x finit par un produit infini de préfixes de $d(l_\beta, -\beta) = (d_i)_{i\geq 1}$ on peut le diviser en deux portions : la première, celle de gauche finit par une séquence $d_1 d_2 \cdots d_{k-1} j$ avec $(-1)^k(d_k - j) < 0$ et $d_k \neq d_1$; la seconde portion se décompose dans l'alphabet $\{d_1, d_1 d_2 d_3, \cdots, \}$.

Ceci signifie que si β est supérieur au nombre d'or, la portion de gauche est produit de mot du code, et si β est plus petit que le nombre d'or, x débute alors par une suite infinie (à gauche) de zéros . Considérons le sous-ensemble U_k de D_1 constitué de mots $\cdots x_{-i} x_{i+1} \cdots x_k u$ où la suite $(x_i)_{i \leq k}$ se décompose dans $\mathfrak{C}$ si $\beta > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $(x_i)_{i \leq k} = (\cdots, 0, 0 \cdots 0)$ si $\beta < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,et u est un produit infini à droite de préfixe de $d(l_\beta, -\beta)$.

$$D_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} U_k.$$

De plus $U_{k+1} = \sigma^{-1} U_k$, $\mu(U_k) = \mu(U_{k+1})$ et $U_{k+1} \cap U_k = \varnothing$. Donc, D_1 est une réunion infinie d'ensembles disjoints ayant tous la même mesure. Donc , D_1 est de mesure nulle ■

Proposition 18. *Soit $\beta < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On note Δ' le code définit en (II.23) ou (II.24) selon le cas et D_2 l'ensemble des mots $\cdots x_{-i} x_{-i+1} \cdots x_t u$ où $(x_i)_{i \leq t}$ ne se décompose pas dans Δ' et u est un produit de mots du code (se décompose dans Δ'). Alors pour toute mesure μ, σ-invariante sur $S_{-\beta}$, D_2 est μ-négligeable.*

La preuve se fait par analogie à celle de la **proposition 16** en écrivant D_2 comme une réunion infinie d'ensembles disjoints qui sont sous la forme U_k.

Lorsque $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \gamma_0$, tout mot se décompose en produit de mot du code $\{1, 00\}$, y compris le $(-\gamma_0)$-développement de l_{γ_0} (si on considère bien sûr que les mots finis se prolongent en mots infinis par des zéros). C'est l'unique cas où le $(-\beta)$-shift est réduit à $W(\mathfrak{C})$, l'ensemble des mots du système qui se décomposent en produits de mots code $\mathfrak{C}$.

Théorème 11. *Soit $\beta > 1$ et $(d_i)_{i \geq 1}$ le $(-\beta)$-développement de l_β. Alors*

- *si $\beta > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, toute mesure ergodique d'entropie maximale sur $S_{-\beta}$ est de support $W(\mathfrak{C})$ où $\mathfrak{C}$ est le code préfixe récurrent positif défini en (II.4) si pour tout i, $d_{2i} < d_1$ et $(d_i)_{i \geq 1}$ est non périodique ou (II.6) si $d_{2i} < d_1$ et $(d_i)_{i \geq 1}$ est périodique ou alors (II.9) s'il existe i tel que $d_{2i} = d_1$;*
- *si $\beta \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, toute mesure ergodique d'entropie maximale est de support $W(\Delta')$ avec Δ' défini en (II.23) si $\beta \neq \gamma_n$ et (II.24) si non.*

Preuve

– Cas où $\beta > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Nous noterons par :

- N les mots de $S_{-\beta}$ qui finissent par $d(l_\beta, -\beta)$
- D les mots de $S_{-\beta}$ qui se décomposent en produit infini des préfixes de $d(l_\beta, -\beta)$ de longueurs impaires
- D_1 les mots de $S_{-\beta}$ qui finissent par un produit infini des préfixes de $d(l_\beta, -\beta)$ de longueurs impaires

Le $(-\beta)$-shift est alors réunion disjointe de $W(\mathfrak{C})$, N et D et D_1.

$$S_{-\beta} = W(\mathfrak{C}) \cup N \cup D \cup D_1.$$

Soit μ une mesure ergodique sur $S_{-\beta}$ d'entropie maximale. De la **proposition 14**, $\mu(N) = 0$. D'après la proposition 16, $\mu(D_1) = 0$, D et $W(\mathfrak{C})$ sont σ-invariants. On a deux situations possibles : soit $\mu(W(\mathfrak{C})) = 0$ et $\mu(D) = 1$, soit $\mu(W(\mathfrak{C})) = 1$ et $\mu(D) = 0$. D'après la **proposition 15**, D ne peut porter la mesure d'entropie maximale que si $\beta < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donc, pour $\beta > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\mu(D) = 0$ et $\mu(W(\mathfrak{C})) = 0$. Ainsi, pour $\beta > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ la mesure ergodique d'entropie maximale est de support $W(\mathfrak{C})$.

– Cas où $\beta < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On appelle "**mauvais mots**", un séquence finie qui n'appartenant pas au code Δ'. On note

- D_2 l'ensemble des mots qui débutent par un produits de mauvais mots et qui finissent pas un produit de mots du code
- D_3 l'ensemble des mots qui se décomposent en produit bi-infini de mauvais mots.

$$S_{-\beta} = W(\Delta') \cup N \cup D_2 \cup D_3.$$

$\mu(D_2) = 0$ d'après la proposition 17, un mauvais mots est $u_k u_k u_k$ avec que $k < n$ si $\gamma_{n+1} < \beta \leq \gamma_n$. Ils sont donc en nombre finis, c'est-à-dire, la mesure d'entropie maximale ne peut être portée par D_3. Donc, $\mu(W(\Delta')) = 1$ et $\mu(D_3) = 0$. ■ On déduit alors le théorème suivant :

Théorème 12. *Soit $\beta > 1$, alors $(S_{-\beta}, \sigma)$ est un système dynamique intrinsèquement ergodique.*

Preuve Soit $\mu \in \mathfrak{M}_\sigma(S_{-\beta})$ une mesure ergodique d'entropie maximale. D'après le théorème précédent, μ est de support W, ensemble des produits de mots du code. Comme la décomposition en produit de mots du code est unique, il suit que f réalise une bijection de la tour Ω dans W. Ainsi, à toute mesure σ-invariante sur W on fait correspondre une (unique) mesure de même entropie sur la tour. Notons $\overline{\mu}$ la mesure image de μ par f. Alors $\overline{\mu}$ est T-invariante et d'entropie $\log \beta$. Il s'agit donc de l'unique mesure d'entropie $\log \beta$ qui engendre sur $\mathfrak{C}^*$ la mesure ν telle :

$$\nu([x]) = \frac{1}{\beta^{|x|}} \text{ où } x \in \mathfrak{C}$$

Ceci implique l'unicité de la mesure réalisant l'entropie topologique du système ■

Après avoir prouvé l'intrinsèque ergodicité, on se propose d'évaluer la la mesure d'entropie maximale (que l'on notera dans la suite $\mu_{-\beta}$) sur les cylindres portés par les mots code.

On sait de [BH86] que $\mathfrak{C}^*$ s'identifie à la base $\mathfrak{C}^* \times \{1\}$ de Ω et que pour un borélien W de $\mathfrak{C}^*$,

$$\nu(W) = \frac{\overline{\mu}(W \times \{1\})}{\overline{\mu}(\mathfrak{C}^* \times \{1\})}.$$

Ainsi donc, pour $x \in \mathfrak{C}$,

$$\nu([x])\overline{\mu}(\mathfrak{C}^* \times \{1\}) = \overline{\mu}([x] \times \{i\}). \tag{II.27}$$

Comme $\Omega = \bigcup_{x \in \mathfrak{C}^*} \left(\bigcup_{i=1}^{|x|} [x] \times \{i\} \right)$, alors on a

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{x\in\mathfrak{C}^*}\sum_{i=1}^{|x|}\overline{\mu}\left([x]\times\{i\}\right)\\
&= \sum_{x\in\mathfrak{C}^*}\sum_{i=1}^{|x|}\overline{\mu}\left(T^{-i+1}([x]\times\{i\})\right)\\
&= \sum_{x\in\mathfrak{C}^*}\sum_{i=1}^{|x|}\overline{\mu}\left([x]\times\{1\}\right)\\
&= \sum_{x\in\mathfrak{C}^*}|x|\overline{\mu}\left([x]\times\{1\}\right)
\end{aligned} \tag{II.28}$$

Par ailleurs, la longueur moyenne de $\mathfrak{C}$ par rapport à la mesure ν vaut :

$$\begin{aligned}
l(\mathfrak{C},\nu) &= \sum_{x\in\mathfrak{C}}|x|\nu([x])\\
&= \frac{1}{\overline{\mu}(\mathfrak{C}^*\times\{1\})}\sum_{x\in\mathfrak{C}}\overline{\mu}([x]\times\{1\})\\
&= \frac{1}{\overline{\mu}(\mathfrak{C}^*\times\{1\})}\\
&= \sum_{x\in\mathfrak{C}}\frac{nc_n}{\beta^n}
\end{aligned} \tag{II.29}$$

De (II.25), (II.26) et (II.27), on a :

$$\mu_{-\beta}([x]) = \left(\beta^{|x|}\sum_{x\in\mathfrak{C}}\frac{nc_n}{\beta^n}\right)^{-1} \tag{II.30}$$

Théorème. *(Une synthèse sur les $(-\beta)$-shifts codés)*

Soit $\beta > 1$. Le $(-\beta)$-shift $S_{-\beta}$ est un système codé si et seulement si $d(l_\beta,-\beta)$ est non périodique de période impaire et $\beta \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Si $d(l_\beta,-\beta)$ est périodique de période impaire, la partie transitive est le plus petit système de Lyndon d'entropie $\log\beta$ contenu dans $S_{-\beta}$. Elle est codée si $\beta > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dans tous les cas, la mesure maximale est la mesure de Champernowne liée au code préfixe récurrent positif.

4 Propriété de spécification

Définition 18. *Soit X un espace métrique muni de la distance d et T une transformation continue de X dans X. Le système (X, d, T) possède la propriété de* ***spécification*** *(ou spécification forte) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M(\varepsilon)$ tel que pour tout $k \geq 2$, pour tout k-uplet de points $x_1, x_2, \cdots, x_k$ de X, pour tous les entiers $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \cdots < a_k \leq b_k$ avec $a_i - b_{i-1} \geq M(\varepsilon)$ pour $i = 2, 3, \cdots, k$ et pour tout entier p avec $p \geq M(\varepsilon) + b_i - a_{i-1}$, il existe un point x de X de période p tel que $d(T^s x_i, T^s x) < \varepsilon$ pour $a_i \leq s \leq b_i$, $1 \leq i \leq k$, (X, d, T) possède la propriété de* ***spécification faible*** *si :*

$$
\begin{array}{ll}
\exists M(\epsilon) & \textit{tel que} \\
\forall a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \cdots < a_k \leq b_k \in \mathbb{Z} & \textit{avec } a_i - b_{i-1} \geq M(\varepsilon), \\
\forall x_1, x_2, \cdots, x_k \in X & \\
\exists x \in X, \forall j \in [a_i, b_i], d(T^j x, T^j x_i) < \epsilon & \textit{pour } 1 \leq i \leq k
\end{array}
$$

Il existe, en dynamique symbolique une définition équivalente de la spécification.

Définition 19. *Un sous-shift S a la propriété Q si :*
$\exists k : \forall u, v \in L(S), \exists w \in L(S), |w| \leq k$ tel que $uwv \in L(S)$ où $L(S)$ est le langage associé à S.. Il est alors intrinsèque ergodique et la mesure de Champernowne est homogène : il existe ε et A tel que $\varepsilon < \frac{\mu({}_0[x_1 \cdots x_n])}{\mu({}_0[y_1 \cdots y_n])} < A$ (d'après [DGS76], tout système dynamique (X, T) satisfaisant l'expansivité et la spécification est intrinsèquement ergodique).

En dynamique symbolique il y a une équivalence entre S a la spécification et S vérifie la propriété Q. En effet, supposons que S est spécifique. Soit $\varepsilon > 0$ et $M(\varepsilon)$ l'entier postulé dans la définition. On peut toujours trouver $r \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^{r+1}} \leq \varepsilon < \dfrac{1}{2^r}$. On pose $n = M(\varepsilon) - 2r$.

Montrons comment recoller deux orbites. Soient u et v dans $L(S)$, langage associé à S. Donc, il existe y_1 et y_2 dans S tels que u et v soient respectivement des séquences de y_1 et y_2. On note σ le décalage de S dans $S, (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \longmapsto (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$. Puis

que $\sigma^n(x) \in S \forall x \in S et n \in N$ ($S\sigma$-stable), alors on peut prendre $y_1(1, \cdots, l_1) = u$ et $y_2 = (1, \cdots, l_2) = v$.
Posons $x_1 = \sigma^{l_1 - r}(y_1)$ et $x_2 = \sigma^{-M(\epsilon)+r}(y_2)$.

Construisons deux couples (a_1, b_1) et (a_2, b_2) tels que

$$a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2$$

On pose :

$$\begin{aligned}
a_1 &= inf(0, 2r + 1 - sup(l_1, l_2)) \\
b_1 &= 0 \\
a_2 &= M(\epsilon) + 1 \\
b_2 &= sup(a_2, a_2 - 2r - 1 + sup(l_1, l_2))
\end{aligned}$$

Nous avons bien $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2$. Comme S a la spécification, il existe $x \in S$ tel que :

$$\begin{aligned}
\forall j \in \{a_1, a_1 + 1, \cdots b_1\}, d(\sigma^j x_1, \sigma^j x) < \epsilon < \frac{1}{2^r} \\
\forall j \in \{a_2, a_2 + 1, \cdots b_2\}, d(\sigma^j x_2, \sigma^j x) < \epsilon < \frac{1}{2^r}
\end{aligned}$$

où d est la distance sur S définie comme suit :

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{|n|}}$$

avec

$$|x_n - y_n| = \begin{cases} 1 \text{ si } x_n \neq y_n \\ 0 \text{ si } x_n = y_n \end{cases}$$

Remarque 8. $x \in B(y, \frac{1}{2^r}) \Longrightarrow x(-r, \cdots, 0, \cdots, r) = y(-r, \cdots, 0, \cdots, r)$

En effet, si il existe $i, -r \leq i \leq r$ tel que$x_i \neq y_i$, on aurait

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{|n|}} \geq \frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{2^r}$$

et donc $x \notin B(y, \frac{1}{2^r})$. D'où $\forall j \in \{a_1, a_1+1, \cdots, b_1\}$

$$\begin{aligned}\sigma^j x_1 (-r, \cdots, 0, \cdots, r) &= \sigma^j x (-r, \cdots, 0, \cdots, r) \\ x_1 (j-r, \cdots, 0, \cdots, j+r) &= x (j-r, \cdots, 0, \cdots, j+r)\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$x_1 (a_1 - r, \cdots, 0, \cdots, b_1 + r) = x (a_1 - r, \cdots, 0, \cdots, b_1 + r)$$

De même, $\forall j \in (a_2, \cdots, b_2)$

$$\begin{aligned}\sigma^j x_2 (-r, \cdots, 0, cdots, r) &= \sigma^j x (-r, \cdots, 0, \cdots, r) \\ x_2 (j-r, \cdots, 0, \cdots, j+r) &= x (j-r, \cdots, 0, \cdots, j+r)\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$x_2 (a_2 - r, \cdots, 0, \cdots, b_2 + r) = x (a_2 - r, \cdots, 0, \cdots, b_2 + r)$$

$$\begin{aligned}x_1 (a_1 - r, \cdots, b_1 + r) &= \sigma^{l_1 - r} y_1 (a_1 - r, \cdots, b_1 + r) \\ &= y_1 (l_1 + a_1 - 2r, \cdots, l_1 + b_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 (a_1 - r, \cdots, r) &= y_1 (l_1 + a_1 - 2r, \cdots, l_1) \\ &= y_1 (l_1 + a_1 - 2r, \cdots, 0,) \, u_1 u_2 \cdots u_{l_1}\end{aligned}$$

De même, nous avons

$$\begin{aligned}x_2 (a_2 - r, \cdots, b_2 + r) &= y_2 (1, \cdots, b_2 + 2r - M(\epsilon)) \\ &= v_1 v_2 \cdots v_{l_2} y_2 (l_2 + 1, \cdots, b_2 + 2r - M(\epsilon))\end{aligned}$$

Par ailleurs, regardons $x\left(a_1 - r, \cdots, b_2 + r\right)$.

$$\begin{aligned} x\left(a_1 - r, \cdots, b_2 + r\right) &= x\left(a_1 - r, \cdots, r\right) x\left(r + 1, \cdots, b_2 + r\right) \\ &= y_1\left(l_1 + a_1 - 2r, \cdots, 0\right).u.x\left(r + 1, \cdots, a_2 - r - 1\right).v \end{aligned}$$

On pose $w = x\left(r + 1, \cdots, a_2 - r - 1\right)$. On a $|w| = M(\varepsilon) - 2r$ et de plus, $uwv \in L(S)$ puisque S est σ-invariant. Ceci se généralise à k morceaux d'orbites. Alors, S vérifie la propriété Q.

Soit β un réel strictement plus grand que 1. On pose $d(l_\beta, -\beta) = (d_i)_{i>1}$ où $l_\beta = -\frac{\beta}{\beta+1}$ et $S_{-\beta}$ le $(-\beta)$-shift. Dans ce paragraphe, nous cherchons les conditions pour lesquelles $S_{-\beta}$ possède la propriété de spécification. Pour se faire, on choisit un couple (u, v) dans $L\left(S_{-\beta}\right)$ où $L\left(S_{-\beta}\right)$ est le langage associé à $S_{-\beta}$, $u = u_1 \cdots u_k, v = v_1 \cdots v_p$. Il est claire que si $u_1, \cdots, u_k, v_1, \cdots, v_p \in \{0, \cdots, d_1 - 1\}$, on peut toujours recoller ces deux mots. Il suffirait de choisir w sous cette même forme. Dans la suite, nous allons donc poser $u = d_1 \cdots d_k$.

4.1 Étude de la spécification pour bêta plus petit que le nombre d'or

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu que pour $\beta < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 1 est toujours suivi d'une séquence finie (de longueur paire) de zéros. Mais chaque mot composé uniquement de zéros, quelque soit sa longueur est admissible. le $(-\beta)$-shift ne possède donc pas la propriété de spécification. Cet état de fait peut aussi être justifié par la non-transitivité de ces systèmes. La spécification entraîne la transitivité et donc, la non-transitivité implique l'absence de spécification.

Si $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, les mots interdits du langage associé au $(-\beta)$-shift sont ceux qui comportent un nombre impair de zéros entre deux 1 (il s'agit des mots 101, 10001, 1000001, ...). Toutefois, un mot peut finir par un nombre quelconque de zéros (1000, 1001000, 1100000, 100 sont par exemple admissibles). Le mot $v = (0)^{2n+1}1$ est admissible. Pour passer de 1 à v, il suffit d'ajouter 0.

$$10(0)^{2n+1}1 \in L_{-\beta}$$

où $L_{-\beta}$ est le langage associé à $S_{-\beta}$. Ainsi, $S_{-\beta}$ possède la spécification si $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; plus généralement un système sofique transitif possède la propriété de spécification.

Dans la suite, nous considérons des bases $-\beta$ telles que $\beta > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4.2 Étude de la spécification pour bêta plus grand que le nombre d'or

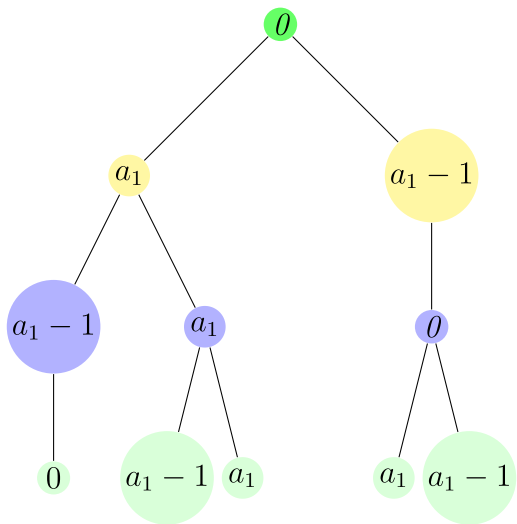
Soit β un nombre réel tel que $\beta > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On note $(d_i)_{i\geq 1}$ le $(-\beta)$-développement de $l_\beta = -\frac{\beta}{\beta+1}$.

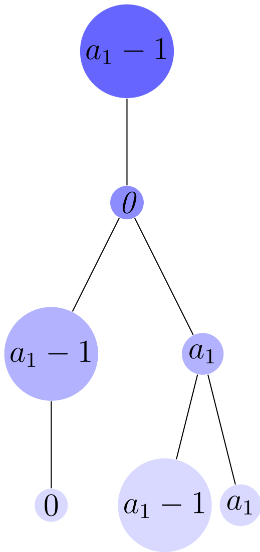
4.2.1 Cas $d_{2i} < d_1$ pour tout i

Soit $\beta > 1$ et $(d_i)_{i\geq 1}$ telle que pour tout i, $d_{2i} < d_1$.

Remarque 9. *Soit S le système de Lyndon (pour la relation d'ordre alterné) associé au mot de Lyndon $(a_i)_{i\geq 1} = a_1((a_1-1)0)^\infty$. Si $a_1 - 1 \neq 0$, alors S ne peut posséder la propriété de spécification.*

Les deux arbres ci-dessous montrent qu'après une séquence $u = a_1 \cdots a_k$, on ne peut ajouter que des mots composés uniquement des lettres $0, a_1 - 1, a_1$ rangées dans un ordre bien défini.





Pour $u = a_1 \cdots a_k$ et $v = 00 \cdots 0$ il n'existe pas de mot w tel que uwv soit dans le langage du système de Lyndon associé à $a_1\overline{(a_1-1)0}$.

Il est à noter que $d(l_\beta, -\beta) = (d_i)_{i>1} \neq d_1((d_1-1)0)^\infty$. Ceci signifie que l'ensemble

$$\{2i|d_{2i} \leq d_1 - 2, i \in \mathbb{N}^*\} \bigcup \{2i+1|d_{2i+1} > 0, i \in \mathbb{N}^*\}$$

est nécessairement non vide.

En effet, si $d_1 \geq 2$, $d_1((d_1-1)0)^\infty$ est le plus petit mot de Lyndon (pour la relation d'ordre alterné) associé à d_1 et le $(-d_1)$-développement de l_{d_1} est $(d_1)^\infty$. Ainsi, $(d_i)_{i\geq 1} \prec d_1((d_1-1)0)^\infty$. Ceci signifie qu'il existe un entier k tel que :

$$d_1 d_2 \cdots d_{2k} = d_1((d_1-1)0)^{k-1}(d_1-1) \text{ et } d_{2k+1} > 0,$$

ou alors

$$d_1 d_2 \cdots d_{2k+1} = d_1((d_1-1)0)^k \text{ et } d_{2k+2} < d_1 - 1.$$

Donc si $d_1 \geq 2$, $\{2i|d_{2i} \leq d_1 - 2, i \in \mathbb{N}^*\} \bigcup \{2i+1|d_{2i+1} > 0, i \in \mathbb{N}^*\}$ est non vide.

Si $d_1 = 1, \{2i|d_{2i} \leq d_1 - 1, i \in \mathbb{N}^*\} = \varnothing$. Mais $\{2i+1|d_{2i+1} > 0, i \in N^*\} = \varnothing$ si et seulement si $d_1 = 1$ est suivi d'un nombre pair de zéros ensuite de 1 suivi cette fois d'un nombre impaire et ainsi de suite.

$$(d_i)_{i\geq 1} = 1(0)^{2k_1}1(0)^{2k_2+1}1(0)^{2k_3}1(0)^{2k_4+1}\cdots.$$

Mais une telle suite n'est pas un mot de Lyndon. Donc, elle ne peut être, pour un certain β le $(-\beta)$-développement de l_β.

Proposition 19. *Soit $\beta > 1$ et $(d_i)_{i\geq 1}$ le $(-\beta)$-développement de l_β. Si pour tout i, $d_{2i} < d_1$, alors $S_{-\beta}$ possède la propriété de spécification.*

Preuve Soit

$$s = inf\left\{2i|d_{2i} \leq d_1 - 2, i \in \mathbb{N}^*\right\},$$
$$t = inf\left\{2i+1|d_{2i+1} > 0, i \in \mathbb{N}\right\},$$
$$r = min\left\{t, s\right\},$$

$u = d_1 ... d_k, w = w_1 \cdots w_n, v = v_1 \cdots v_p.$

$d(l_{-\beta}, -\beta) \neq d_1((d_1{-}1)0)^\infty \Rightarrow \{2i|d_{2i} \leq d_1 - 2, i \in \mathbb{N}^*\} \bigcup \{2i+1|d_{2i+1} > 0, i \in \mathbb{N}^*\} \neq \varnothing$

Ceci justifie l'existence de r et il est non nul. Construisons w comme suit :

$$\begin{aligned}
w_2 &= d_1,\\
w_3 &= d_2\\
&\vdots\\
w_r &= d_{r-1}\\
w_{r+1} &= i \qquad\qquad\qquad \text{avec } (-1)^r(d_r - i) < 0.
\end{aligned}$$

w_1 est choisi dans $\{0, d_1\}$ selon la parité de k, longueur de $u = d_1 d_2 \cdots d_k$. Si k est pair, on prend $w_1 = 0$ et $w_1 = d_1$ si non. Il est à noter que si $i = d_1$ (cas où r est pair), il existe bien une famille de v pour laquelle $uwv \in L(S_{-\beta})$. On peut se restreindre à la famille de w pour laquelle $i \neq d_1$ et obtenir les mêmes résultats. Ainsi, il existe r tel que pour tout couple de mots (u, v) dans $(L(S_{-\beta}))^2$, il existe une séquence w de longueur $r+1$ dans $L(S_{-\beta})$ tel que uwv est dans $L(S_{-\beta})$ ■

4.2.2 Cas $d_{2i} = d_1$ pour un certain i

Soit $\beta > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On suppose qu'il existe une suite $(n_i)_{i\geq 1}$ et $(p_i)_{i\geq 1}$ telles que

$$d(l_\beta, -\beta) = d_1 \cdots d_{2n_1-1} d_1 \cdots d_{p_1} d_{2n_1+p_1} \cdots d_{2n_2-1} d_1 \cdots d_{p_2} d_{2n_2+p_2} \cdots .$$

Il est à noter que pour $d\,(l_\beta, -\beta)$ périodique de période impaire, le $(-\beta)$-shift ne possède pas la propriété de spécification puisqu'il n'est pas transitif. Si $2n-1$ est la période, on voit bien que :

$$d_1 d_2 \cdots d_{2n-1} 00 \cdot 0 \notin L_{-\beta}$$

Dans la suite, on suppose donc que $p_i < 2n_i - 1$, condition de non périodicité.

Proposition 20. *Pour tout n et toute suite d'entiers $(m_i)_{i\geq 1}$, le mot*

$$d_1 \cdots d_{2n-1} d_1 \cdots d_{2m_1} d_1 \cdots d_{2m_2} \cdots , \text{ avec } 2m_1 < 2n-1$$

ne peut être le $(-\beta)$-développement de l_β pour un certain β.

Preuve On pose $y = d_1 \cdots d_{2n-1} d_1 \cdots d_{2m_1} d_1 \cdots d_{2m_2} \cdots$ et on suppose que pour tout entier j, $y \preceq \sigma^j(y)$. Il existe t tel que $d_1 \cdots d_{2m_1} d_1 \cdots d_{2m_2} \cdots d_1 \cdots d_{2m_{t-1}} X = d_1 d_2 \cdots d_{2n-1}$ avec X ne débutant pas par $d_1 \cdots d_{2m_t}$. Compte tenu du fait que $y \preceq \sigma^j(y)$, il vient que :

$$\begin{cases} d_1 \cdots d_{2m_1} d_1 \cdots d_{2m_2} \cdots d_1 \cdots d_{2m_{t-1}} X \preceq d_1 \cdots d_{2m_1} \cdots d_1 \cdots d_{2m_t} \\ d_1 \cdots d_{2m_t} \prec X. \end{cases}$$

Ceci est absurde puisque $d_1 \cdots d_{2m_1} d_1 \cdots d_{2m_2} \cdots d_1 \cdots d_{2m_{t-1}}$ est de longueur paire. Donc l'hypothèse $y \preceq \sigma^j(y)$ est fausse. Par conséquent, y n'est pas un mot de Lyndon pour la relation d'ordre alterné. Il ne peut donc définir le $(-\beta)$-développement de l_β pour un certain β. ■

Une conséquence de la proposition précédente est que si le $(-\beta)$-développement de l_β est sous la forme

$$d(l_\beta,-\beta) = d_1\cdots d_{2n_1-1}d_1\cdots d_{p_1}d_{2n_1+p_1}\cdots d_{2n_2-1}d_1\cdots d_{p_2}d_{2n_2+p_2}\cdots$$

alors à partir d'un certain rang t_0, il est impossible d'avoir pour tout $i \geq t_0$, $p_i = 2(n_{i+1}-n_i)$.

Théorème 13. *Soit β un réel supérieur à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On suppose qu'il existe deux suites $(n_i)_{i\geq 1}$ et $(p_i)_{i\geq 1}$ telles que*

$$d(l_\beta,-\beta) = d_1\cdots d_{2n_1-1}d_1\cdots d_{p_1}d_{2n_1+p_1}\cdots d_{2n_2-1}d_1\cdots d_{p_2}d_{2n_2+p_2}\cdots.$$

Alors le $(-\beta)$-shift a la propriété de spécification si et seulement si les séquences $d_1\cdots d_{p_i}$ ne deviennent pas de plus en plus longues, autrement dit, $(p_i)_{i\geq 1}$ est une suite bornée.

Preuve On considère le mot $u = d_1 d_2\cdots d_k$ du langage associé au $(-\beta)$-shift. On distingue deux cas : soit $2n_i+p_i-1 \leq k \leq 2n_{i+1}-1$ (on prend $n_0 = 1$ et $p_0 = 0$), ou alors $2n_i \leq k < 2n_i+p_i-1$.

- $2n_i+p_i-1 \leq k \leq 2n_{i+1}-1$.
  Soit j tel que $(-1)^{k+1}(d_{k+1}-j) < 0$. Alors pour tout mot v du langage $L_{-\beta}$ de $S_{-\beta}$, ujv est dans $L_{-\beta}$.
- $2n_i \leq k < 2n_i+p_i-1$.
  Si $k = 2n_i$, pour passer de u à un mot quelconque v, il faut au préalable compléter par $d_1d_2\cdots d_{p_i}$. Si $p_i = 2(n_{i+1}-n_i)$, d'après la **proposition 20**, il existe $i_0 > i$ tel que $p_{i_0} \neq 2(n_{i_0+1}-n_{i_0})$. Posons

$$W_i = d_1\cdots d_{p_i}d_1\cdots d_{p_{i+1}}\cdots d_1\cdots d_{p_{i_0}}j \text{ avec } (-1)^{2n_{i_0}+p_{i_0}}(d_{2n_{i_0}+p_{i_0}}-j) < 0. \tag{II.31}$$

  On construit ainsi un ensemble X de mots du langage tel que pour tout couple de mots, (u,v), il existe un mot w de X tel que $uwv \in {}_{-\beta}$. Mais, X est fini si et seulement si $(p_i)_{i\geq 1}$ est une suite bornée.

D'où le résultat ■

Rappelons que pour un réel $\beta > 1$, Anne Bertrand dans [Ber79] a montré que le β-shift admet la propriété de spécification si le développement de 1 en base β ne comporte pas une longue séquence de zéros. Il y a une similarité avec le $(-\beta)$-shift dans la mesure où $(0)^\infty$ est le minimum des β-développements (au sens de l'ordre lexicographique) et $d(l_\beta, -\beta)$ est le minimum des $(-\beta)$-développements (minimum cette fois au sens de la relation d'ordre alterné) des nombres de l'intervalle I_β.

En résumé, nous avons vu que pour chacun des cas étudiés, $S_{-\beta}$ (ou alors $\tilde{S}_{-\beta}$) il existe une unique mesure σ-invariante d'entropie maximale. En ne restant que sur le $(-\beta)$-shift unilatéral droit, ces résultats restent vrais. Dans le chapitre 1, nous avons défini l'application $f_{-\beta}$ du système de Lyndon associé à β dans $\overline{I}_\beta = [l_\beta, r_\beta]$ par

$$f_\beta((x_i)_{i\geq 1}) = \sum_{n\geq 1} x_n(-\beta)^{-n}$$

avec $l_\beta = -\frac{\beta}{\beta+1}$ et $r_\beta = \frac{1}{\beta+1}$.

$f_{-\beta}$ transporte la structure de $S^d_{-\beta}$ dans I_β et celle de $\mathfrak{M}_\sigma(S_{-\beta})$ à l'ensemble des mesures invariantes sur (I_β, T) où T désigne l'application qui à tout x de I_β associe $y \in I_\beta$ congru à $-\beta x$ modulo 1.

Chapitre III

Support de la mesure ergodique sur I_β

Ito et Sadahiro ont déterminé l'unique mesure $T_{-\beta}$-invariante d'entropie maximale sur $I_\beta = [-\frac{\beta}{\beta+1}, \frac{1}{\beta+1})$. Notons T_β la β-transformation de Parry et Rényi, $T_\beta(x) = \beta x - \lfloor \beta x \rfloor$. On sait que l'unique mesure T_β-invariante d'entropie maximale est équivalente à la mesure de Lebesgue sur $[0, 1)$. Pour des bases négatives, ceci n'est vérifié que pour certaines valeurs de ces bases : β est supérieur ou égal ou nombre d'or. En effet, Ito et Sadahiro ont exhibé un exemple pour lequel le support de la mesure d'entropie maximale était strictement inclus dans l'intervalle I_β. Ce phénomène de "trous" a par la suite été examiné par Lingmin Liao et Wolfgang Steiner dans [LS12]. Les lignes à suivre étudient et donnent une explication à la présence de "trou" dans l'intervalle I_β. Pour ce faire, on s'intéressera au support de l'unique mesure $T_{-\beta}$-invariante selon les valeurs prises par β.

1 Mesure ergodique sur I_β

D'après [IS09], l'application $T_{-\beta}$ de I_β dans lui-même qui à x on associe $-\beta x - \lfloor -\beta x - l_\beta \rfloor$ admet une unique mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur I_β. Cette unicité entraîne donc l'ergodicité. Ceci est aussi justifié par l'intrinsèque ergodicité du $(-\beta)$-shift.

Théorème 14. *(voire [IS09]) Soit $h_{-\beta}$ la fonction de I_β dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$h_{-\beta}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\chi_n(x)}{(-\beta)^n} \tag{III.1}$$

où χ_n est l'indicatrice sur $[T^n_{-\beta}(l_\beta), r_\beta)$. On note λ la mesure de Lebesgue sur I_β. Alors, la mesure μ telle que $d\mu = h_{-\beta}d\lambda$ est $T_{-\beta}$-invariante.

On réintroduit certains outils utilisés dans les chapitres I et II. On note ϕ le morphisme défini sur $\{0, 1\}$ par $\phi(0) = 1$ et $\phi(1) = 100$, $\gamma_n > 1$ désigne le réel tel que :

$$d(l_{\gamma_n}, -\gamma_n) = \phi^n(1)\overline{(\phi^{n-1}(1))} = u_n\overline{u_{n-1}}.$$

On introduit les suites $(k_i)_{i\geq 1}$ et $(s_i)_{i\geq 1}$ telles que $(T^{k_i}_{-\beta}(l_\beta))_{i\geq 1}$ est une suite croissante et pour tout i, $s_i = T^i_{-\beta}(l_\beta)$. Enfin, $(A_i)_{i\geq 1}$ sera la suite d'intervalles :

$$A_i = [T^{k_i}_{-\beta}(l_\beta), T^{k_{i+1}}_{-\beta}(l_\beta)).$$

Nous orienterons l'étude du support de la mesure $\mu_{-\beta}$ vers deux axes : d'abord lorsque β prend la valeur d'un certain γ_n et enfin lorsqu'il est compris entre γ_{n+1} et γ_n. On supposera que $\gamma_{-1} = +\infty$.

2 Support de la mesure $\mu_{-\gamma_n}$

Pour $\beta = \gamma_n$, on a $d(l_{\gamma_n}, -\gamma_n)$ ultimement périodique. La pré-période vaut $|u_n|$ et la période $|u_{n-1}|$. On a pour tout p dans $\mathbb{N}$ et i tel que $0 \leq i < |u_{n-1}|$,

$$s_{i+|u_n|} = s_{i+|u_n|+p|u_{n-1}|}.$$

Ainsi, s_i prend $|u_n|+|u_{n-1}|$ valeurs lorsqu'on fait varier i dans $\mathbb{N}$. Notons $T^M_{-\gamma_n}(l_{\gamma_n}) = s_M$ la valeur maximale prise par s_i et $A_{\gamma_n} = [T^M_{-\gamma_n}(l_{\gamma_n}), r_{\gamma_n})$. Alors, l'ensemble

$$\mathfrak{P} = \{A_{\gamma_n}, A_i, 0 \leq i < |\phi^n(1)| + |\phi^{n-1}(1)|\}$$

est une partition de l'intervalle I_{γ_n}.

Nous avons vu dans le chapitre II que le sous-ensemble $\{u_n, u_{n-1}u_{n-1}\}$ du langage $L_{-\gamma_n}$ associé à $S_{-\gamma_n}$ est un code préfixe récurrent positif. Ceci implique que

$$\frac{1}{\gamma_n^{|u_n|}} + \frac{1}{\gamma_n^{2|u_{n-1}|}} = 1.$$

C'est d'ailleurs le plus petit code récurrent positif que l'on puisse obtenir. Ainsi, le polynôme minimal de γ_n est

$$\begin{array}{ll} x^{|u_n|} - x - 1 & \text{si } |u_n| > 2|u_{n-1}| \ , \\ x^{2|u_{n-1}|} - x - 1 & \text{si } |u_n| < 2|u_{n-1}| \end{array}$$

puisque $|u_k| = 2|u_{k-1}| - (-1)^k$ (voir chapitre II).

Remarque 10. *La densité $h_{-\gamma_n}$ ne peut s'annuler sur A_0 et A_{γ_n}. En effet, considérons un réel x dans A_0. Alors, pour tout i plus grand que 1, $x < T^i_{-\gamma_n}(l_{\gamma_n})$. Ceci implique que $\chi_i(x) = 0$ pour $i \geq 1$. Ainsi $h_{-\gamma}(x) = \chi_0(x) = 1$. De même, si x est dans A_{γ_n}, $\chi_i(x) = 1$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, $h_{-\gamma_n}(x) = \frac{\gamma_n}{\gamma_n+1}$.*

Proposition 21. *La densité $h_{-\gamma_n}$ ne peut être nulle sur deux intervalles consécutifs A_i et A_{i+1}.*

Preuve Soit i tel que la restriction $h_{-\gamma_n|_{A_i}}$ de $h_{-\gamma_n}$ à A_i soit nulle. Pour tout $p \leq i$, et tout x dans A_{i+1}, $x \geq T^{k_p}_{-\gamma_n}(l_{\gamma_n})$. D'où

$$h_{-\gamma_n|_{A_{i+1}}} = \begin{cases} h_{-\gamma_n|_{A_i}} + \dfrac{(-1)^{k_{i+1}}}{\gamma_n^{k_{i+1}}} & \text{si } k_{i+1} < |u_n| \ , \\ h_{-\gamma_n|_{A_i}} + \dfrac{(-1)^{k_{i+1}}}{\gamma_n^{k_{i+1}-|u_{n-1}|}\left(1+\gamma_n^{|u_{n-1}|}\right)} & \text{si } k_{i+1} \geq |u_n| \ . \end{cases} \tag{III.2}$$

Ainsi $h_{-\gamma_n|_{A_i}}$ nulle implique

$$h_{-\gamma_n|_{A_{i+1}}} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{k_{i+1}}}{\gamma_n^{k_{i+1}}} & \text{si } k_{i+1} < |u_n| \ , \\ \dfrac{(-1)^{k_{i+1}}}{\gamma_n^{k_{i+1}-|u_{n-1}|}\left(1+\gamma_n^{|u_{n-1}|}\right)} & \text{si } k_{i+1} \geq |u_n| \end{cases}$$

qui est clairement non nul quelque soit k_{i+1} ■

Proposition 22. *Si* $h_{-\gamma_n|_{A_{i-1}}} = 0$ *alors,* $h_{-\gamma_n|_{A_i}} \neq 0$ *et* $h_{-\gamma_n|_{A_{i+1}}} \neq 0$.

Preuve Dans la preuve de la proposition précédente, nous avons vu que :

$$h_{-\gamma_n|_{A_{i+1}}} = \begin{cases} h_{-\gamma_n|_{A_i}} + \dfrac{(-1)^{k_{i+1}}}{\gamma_n^{k_{i+1}}} & \text{si } k_{i+1} < |u_n| \ , \\ h_{-\gamma_n|_{A_i}} + \dfrac{(-1)^{k_{i+1}}}{\gamma_n^{k_{i+1}-|u_{n-1}|}\left(1+\gamma_n^{|u_{n-1}|}\right)} & \text{si } k_{i+1} \geq |u_n| \ . \end{cases}$$

En appliquant le même principe à $h_{-\gamma_n|_{A_i}}$ et en prenant $h_{-\gamma_n|_{A_{i-1}}} = 0$ on a :

$$h_{-\gamma_n|_{A_{i+1}}} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{k_{i+1}}}{\gamma_n^{k_{i+1}}} + \dfrac{(-1)^{k_i}}{\gamma_n^{k_i}} & \text{si } k_{i+1}, k_i < |u_n| \ , \\ \dfrac{(-1)^{k_{i+1}}}{\gamma_n^{k_{i+1}-|u_{n-1}|}\left(1+\gamma_n^{|u_{n-1}|}\right)} + \dfrac{(-1)^{k_i}}{\gamma_n^{k_i-|u_{n-1}|}\left(1+\gamma_n^{|u_{n-1}|}\right)} & \text{si } k_i, k_{i+1} \geq |u_n| \ , \\ \dfrac{(-1)^{k_i}}{\gamma_n^{k_i-|u_{n-1}|}\left(1+\gamma_n^{|u_{n-1}|}\right)} + \dfrac{(-1)^{k_{i+1}}}{\gamma_n^{k_{i+1}}} & \text{si } k_{i+1} < |u_n| \leq k_i \ , \\ \dfrac{(-1)^{k_i}}{\gamma_n^{k_i}} + \dfrac{(-1)^{k_{i+1}}}{\gamma_n^{k_{i+1}-|u_{n-1}|}\left(1+\gamma_n^{|u_{n-1}|}\right)} & \text{si } k_i < |u_n| \leq k_{i+1} \ . \end{cases} \tag{III.3}$$

Pour $k_{i+1}, k_i < |u_n|$ et $k_i, k_{i+1} \geq |u_n|$, $h_{-\gamma_n|_{A_{i+1}}}$ est non nul puisque γ_n est strictement supérieur à 1. Dans le troisième cas $k_i > k_{i+1}$, donc $\dfrac{1}{\gamma_n^{k_i-k_{i+1}}\left(1+\dfrac{1}{\gamma_n^{|u_{n-1}|}}\right)} < 1$.

Enfin, dans le quatrième $k_i < k_{i+1}$, donc $\dfrac{1}{\gamma_n^{k_{i+1}-k_i}\left(1+\dfrac{1}{\gamma_n^{|u_{n-1}|}}\right)} < 1$. Ainsi, pour ces deux derniers cas nous avons $h_{-\gamma_n|_{A_{i+1}}} \neq 0$.

Par analogie, en exprimant cette fois $h_{-\gamma_n|_{A_{i-1}}}$ en fonction de $h_{-\gamma_n|_{A_{i+1}}}$, on montre qu'un intervalle de mesure nulle est précédé de deux intervalles de mesure non nulle ■

Comme conséquence à cette proposition, le nombre d'intervalles de mesure nulle est maximum si sur chaque série de trois intervalles consécutifs, il y a un seul sur lequel la densité $h_{-\gamma_n}$ s'annule. Soit N le nombre de A_i tel que $\mu_{-\gamma_n}(A_i) = 0$. s_i

prend $|u_n| + |u_{n-1}|$ valeurs possibles. Donc, on a $|u_n| + |u_{n-1}| - 1$ intervalles A_i. Et $I_{-\gamma_n}$ est alors partitionné en $|u_n| + |u_{n-1}|$ intervalles. Ainsi,

$$N \leq \frac{|u_n| + |u_{n-1}|}{3}. \tag{III.4}$$

Lemme 5. *Pour tout entier positif n, le $(-\gamma_n)$-développement de l_{γ_n} est :*

$$d(l_{\gamma_n}, -\gamma_n) = u_0 00 u_0 u_0 u_1 u_1 u_2 u_2 \cdots .u_{n-2} u_{n-2} \overline{u_{n-1}}.$$

Preuve Il s'agit d'une réécriture de $d(l_{\gamma_n}, -\gamma_n)$. Le résultat découle de la récurrence sur la suite $(u_k)_{k\geq 0}$: $u_{k+1} = u_k u_{k-1} u_{k-1}$, pour tout k.

$$\begin{aligned}
d(l_{\gamma_n}, -\gamma_n) =& u_n \overline{u_{n-1}} \\
=& u_{n-1} u_{n-2} u_{n-2} \overline{u_{n-1}} \\
=& u_{n-2} u_{n-3} u_{n-3} u_{n-2} u_{n-2} \overline{u_{n-1}} \\
& \vdots \\
=& u_1 u_0 u_0 u_1 u_1 u_2 u_2 \cdots u_{n-2} u_{n-2} \overline{u_{n-1}} \\
d(l_{\gamma_n}, -\gamma_n) =& u_0 00 u_0 u_0 u_1 u_1 u_2 u_2 \cdots u_{n-2} u_{n-2} \overline{u_{n-1}}
\end{aligned}$$

■

Intéressons nous au $(-\beta)$-développements des $s_i = T^i_{-\beta}(l_\beta)$, $0 \leq i \leq |u_n| + |u_{n-1}|$. On déduit du lemme précédent que

$$d(s_{|u_k|+|u_{k-1}|}, -\gamma_n) = u_{k-1} u_k u_k \cdots u_{n-3} u_{n-3} u_{n-2} u_{n-2} \overline{u_{n-1}}, \tag{III.5}$$

et

$$d(s_{|u_k|}, -\gamma_n) = u_{k-1} u_{k-1} u_k u_k \cdots u_{n-3} u_{n-3} u_{n-2} u_{n-2} \overline{u_{n-1}}. \tag{III.6}$$

Le $(-\gamma_n)$-développement de l_{γ_n} débute par u_{k-1} qui, lui, commence par u_{k-2}. Comme le mot $u_{k-1} u_{k-1}$ est admissible, $u_k \preceq u_{k-1} u_{k-1}$. Il s'en suit que $u_k \preceq u_{k-1} u_k$. $|u_p| = |\phi^p(1)|$ étant impair pour tout p, et donc :

$$u_{k-2} u_{k-2} u_{k-1} \preceq u_{k-2} u_{k-1} \tag{III.7}$$

et donc

$$u_{k-1}u_{k-1}u_ku_k\cdots u_{n-2}u_{n-2}\overline{u_{n-1}} \preceq u_{k-1}u_ku_k\cdots u_{n-2}u_{n-2}\overline{u_{n-1}}. \tag{III.8}$$

De façon plus générale, pour $i < |u_{k-1}|$,

$$\sigma^i(u_{k-1})u_{k-1}u_ku_k\cdots u_{n-2}u_{n-2}\overline{u_{n-1}} \preceq \sigma^i(u_{k-1})u_ku_k\cdots u_{n-2}u_{n-2}\overline{u_{n-1}} \tag{III.9}$$

si i est pair, c'est-à-dire $|\sigma^i(u_{k-2})|$ impair. De même,

$$\sigma^i(u_{k-1})u_ku_k\cdots u_{n-2}u_{n-2}\overline{u_{n-1}} \preceq \sigma^i(u_{k-1})u_{k-1}u_ku_k\cdots u_{n-2}u_{n-2}\overline{u_{n-1}} \tag{III.10}$$

si i est impair, donc $|\sigma^i(u_{k-1})|$ pair. En fait,

$$\begin{aligned}\sigma^i(u_{k-1})u_{k-1}u_ku_k\cdots u_{n-2}u_{n-2}\overline{u_{n-1}} &= \sigma^i(u_{k-1}u_{k-1}u_ku_k\cdots u_{n-2}u_{n-2}\overline{u_{n-1}})\\ &= \sigma^{|u_k|+i}(u_n\overline{u_{n-1}}) \qquad\qquad (\text{III}.11)\\ \sigma^i(u_{k-1})u_{k-1}u_ku_k\cdots u_{n-2}u_{n-2}\overline{u_{n-1}} &= d(s_{|u_k|+i}, -\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^i(u_{k-1})u_ku_k\cdots u_{n-2}u_{n-2}\overline{u_{n-1}} &= \sigma^i(u_{k-1}u_ku_k\cdots u_{n-2}u_{n-2}\overline{u_{n-1}})\\ &= \sigma^{|u_k|+|u_{k-1}|+i}(u_n\overline{u_{n-1}}) \qquad\qquad (\text{III}.12)\\ \sigma^i(u_{k-1})u_ku_k\cdots u_{n-2}u_{n-2}\overline{u_{n-1}} &= d(s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i}, -\gamma_n)\end{aligned}$$

avec $k \leq n-1$ et $0 \leq i < |u_k|$. Ainsi $|u_k| + |u_{k-1}| + i$ et $|u_k| + i$ seront toujours plus petits que $|u_n|$. Si on considère deux suites v et w dans le $(-\gamma_n)$-shift, on sait que $w \preceq v$ implique que le $(-\gamma_n)$-représentant de w est plus petit ou égal à celui de v. Ainsi, pour tout k et i tels que $k \leq n-1$, $i < |u_{k-1}|$

$$s_{|u_k|+i} < s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i} \text{ si } i \text{ pair} \tag{III.13}$$

et

$$s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i} < s_{|u_k|+i} \text{ si } i \text{ impair}. \tag{III.14}$$

Proposition 23. *Pour tout $j \in \mathbb{N}$, s_j ne peut être pincé entre $s_{|u_k|+i}$ et $s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i}$.*

Preuve Soit j un entier que :

$$s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i} < s_j < s_{|u_k|+i} \text{ si } i \text{ impair },\tag{III.15}$$

$$s_{|u_k|+i} < s_j < s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i} \text{ si } i \text{ pair }.\tag{III.16}$$

Sans perte de généralité, nous allons considérer i pair, le cas impair se traitant de façon similaire. On suppose alors $s_{|u_k|+i} < s_j < s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i}$. En outre, pour tout entier k,

$$u_k = u_0 u_{-1} u_{-1} u_0 u_0 \cdots u_{k-2} u_{k-2}.$$

Donc

$$\sigma^i(u_{k-1}) u_{k-1} u_k u_k \cdots u_{n-2} u_{n-2} \overline{u_{n-1}} \preceq d(s_j, -\gamma_n) \preceq \sigma^i(u_{k-1}) u_k u_k \cdots u_{n-2} u_{n-2} \overline{u_{n-1}}.$$

Ainsi, le $(-\gamma_n)$-développement de s_j débute par $\sigma^i(u_{k-1})$ qui est suivi de u_k ou u_{k-1}. En outre, dans le $d(l_{\gamma_n}, -\gamma_n)$, toute séquence u_p est suivi de $u_{p+1}u_{p+1}$ ou de $u_p u_{p+1} u_{p+1}$ notamment si p plus petit que $n-2$. Donc,

$$d(s_j, -\gamma_n) = \begin{cases} \sigma^i(u_{k-1}) u_{k-1} u_k u_k \cdots u_p u_p \overline{u_{n-1}} \\ \text{ou} \\ \sigma^i(u_{k-1}) u_k u_k \cdots u_p u_p \overline{u_{n-1}}. \end{cases}$$

Mais si $p < n-2$, alors,

$$\sigma^i(u_{k-1}) u_{k-1} u_k u_k \cdots u_p u_p \overline{u_{n-1}} \prec \sigma^i(u_{k-1}) u_{k-1} u_k u_k \cdots u_{n-2} u_{n-2} \overline{u_{n-1}}\tag{III.17}$$

et

$$\sigma^i(u_{k-1}) u_k u_k \cdots u_{n-2} u_{n-2} \overline{u_{n-1}} \prec \sigma^i(u_{k-1}) u_k u_k \cdots u_p u_p \overline{u_{n-1}}.\tag{III.18}$$

Donc $p = n-2$ et dans ce cas $s_j = s_{|u_k|+i}$ ou $s_j = s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i}$ ■

Regardons maintenant s_m pour m supérieur ou égal à $|u_n|$. Pour ce faire, il suffira d'étudier ou mieux, de comparer leurs développements en base $-\gamma_n$.

$$\overline{u_{n-1}} = u_k u_{k-1} u_{k-1} u_k u_k \cdots u_{n-4} u_{n-4} u_{n-3} u_{n-3} \overline{u_{n-1}}. \tag{III.19}$$

En menant un raisonnement analogue, on a les résultats suivants :

$$\sigma^i(u_{k-1}) u_{k-1} u_k u_k \cdots u_{n-3} u_{n-3} \overline{u_{n-1}} \preceq \sigma^i(u_{k-1}) u_k u_k \cdots u_{n-3} u_{n-3} \overline{u_{n-1}} \text{ si } i \text{ pair,} \tag{III.20}$$

$$\sigma^i(u_{k-1}) u_k u_k \cdots u_{n-3} u_{n-3} \overline{u_{n-1}} \preceq \sigma^i(u_{k-1}) u_{k-1} u_k u_k \cdots u_{n-3} u_{n-3} \overline{u_{n-1}} \text{ si } i \text{ impair.} \tag{III.21}$$

Par ailleurs, nous avons

$$\begin{cases} \sigma^i(u_{k-1}) u_k u_k \cdots u_{n-3} u_{n-3} \overline{u_{n-1}} \prec \sigma^i(u_{k-1}) u_k u_k \cdots u_{n-2} u_{n-2} \overline{u_{n-1}} & i \text{ pair} \\ \sigma^i(u_{k-1}) u_{k-1} u_k u_k \cdots u_{n-2} u_{n-2} \overline{u_{n-1}} \prec \sigma^i(u_{k-1}) u_{k-1} u_k u_k \cdots u_{n-3} u_{n-3} \overline{u_{n-1}} & i \text{ pair} \end{cases} \tag{III.22}$$

et

$$\begin{cases} \sigma^i(u_{k-1}) u_k u_k \cdots u_{n-2} u_{n-2} \overline{u_{n-1}} \prec \sigma^i(u_{k-1}) u_k u_k \cdots u_{n-3} u_{n-3} \overline{u_{n-1}} & i \text{ impair} \\ \sigma^i(u_{k-1}) u_{k-1} u_k u_k \cdots u_{n-3} u_{n-3} \overline{u_{n-1}} \prec \sigma^i(u_{k-1}) u_{k-1} u_k u_k \cdots u_{n-2} u_{n-2} \overline{u_{n-1}} & i \text{ impair} \end{cases} \tag{III.23}$$

On a par conséquent,

$$s_{|u_n|+|u_k|+i} < s_{|u_k|+i} < s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i} < s_{|u_n|+|u_k|+|u_{k-1}|+i} \ i \text{ pair}$$

$$s_{|u_n|+|u_k|+|u_{k-1}|+i} < s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i} < s_{|u_k|+i} < s_{|s_n|+|u_k|+i} \ i \text{ impair}$$

Il est à noter que k est un entier plus petit que $n-1$. Toutefois, lorsque $k = n-1$, la relation ci-dessus donne :

$$\begin{aligned} &s_{|u_n|+|u_{n-2}|+i} < s_{|u_{n-1}|+|u_{n-2}|+i} < s_{|u_{n-1}|+i} < s_{|u_n|+i} \ i \text{ impair ,} \\ &s_{|u_n|+i} < s_{|u_{n-1}|+i} < s_{|u_{n-1}|+|u_{n-2}|+i} < s_{|u_n|+|u_{n-2}|+i} \ i \text{ pair .} \end{aligned} \tag{III.24}$$

Proposition 24. *Il n'existe pas de j tel que s_j est compris entre $s_{|u_n|+|u_k|+i}$ et $s_{|u_k|+i}$ ou entre $s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i}$ et $s_{|u_n|+|u_k|+|u_{k-1}|+i}$.*

Preuve La preuve est similaire à celle de la **Proposition 23**. En effet, supposons s_j compris entre $s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i}$ et $s_{|u_n|+|u_k|+|u_{k-1}|+i}$. Alors, $d(s_j, -\gamma_n)$ débute avec la séquence

$$\sigma^i(u_{k-1})u_k u_k \cdots u_{n-3}u_{n-3}.$$

et finit par $\overline{u_{n-1}}$. Comme souligné plus haut, dans $d(l_{\gamma_n}, -\gamma_n)$, $u_p u_p$ est toujours suivi de $u_{p+1}u_{p+1}$ ou de $\overline{u_{n-1}}$ où p est un entier plus petit que $n-2$. Ainsi, ne peut avoir que deux possibilités de $(-\gamma_n)$-développement de s_j : $\sigma^i(u_{k-1})u_k u_k \cdots u_{n-3}u_{n-3}\overline{u_{n-1}}$ ou $\sigma^i(u_{k-1})u_k u_k \cdots u_{n-2}u_{n-2}\overline{u_{n-1}}$. Mais ces derniers correspondent respectivement à $d(s_{|u_n|+|u_k|+|u_{k-1}|+i}, -\gamma_n)$ et $d(s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i}, -\gamma_n)$.

Le raisonnement reste le même pour $s_j = T^j_{-\gamma_n}(l_{\gamma_n})$ entre $s_{|u_n|+|u_k|+i}$ et $s_{|u_k|+i}$. Il suffira de voir que dans ce cas, le $(-\gamma_n)$-développement de $s_j = T^j_{-\gamma_n}(l_{\gamma_n})$ commence par

$$\sigma^i(u_{k-1}u_{k-1}u_k u_k \cdots u_{n-3}u_{n-3})$$

■

Comme conséquence à cette proposition, $s_{|u_n|+|u_k|+i}$, $s_{|u_k|+i}$, $s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i}$ et aussi $s_{|u_n|+|u_k|+|u_{k-1}|+i}$ définissent trois intervalles du type A_i consécutifs.

Théorème 15. *La valeur de la densité $h_{-\gamma_n}$ de la mesure $\mu_{-\gamma_n}$ est la même pour tous les intervalles de la forme $(s_{|u_k|+i}, s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i})$ si i est pair ou $(s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i}, s_{|u_k|+i})$ si i est impair.*

Preuve Il suffit que $h_{-\gamma_n}$ ait la même valeur sur deux intervalles d'extrémité du type $s_{|u_k|+i}$ et $s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i}$ consécutifs. Nous avons vu que $s_{|u_n|+|u_k|+i}$, $s_{|u_k|+i}$, $s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i}$ et $s_{|u_n|+|u_k|+|u_{k-1}|+i}$ sont consécutifs. Posons $j = |u_k| + i$ Ainsi, d'après III.24

$$\begin{array}{lllll} s_{|u_n|+|u_{n-2}|+j} & < s_{|u_{n-1}|+|u_{n-2}|+j} & < s_{|\phi^{n-1}(1)|+j} & < s_{|u_n|+j} & i \text{ pair ,} \\ s_{|u_n|+j} & < s_{|u_{n-1}|+j} & < s_{|u_{n-1}|+|u_{n-2}|+j} & < s_{|u_n|+|\mathbf{u}_{n-2}|+j} & i \text{ impair} \end{array} \tag{III.25}$$

puisque j est pair (respectivement impair) lorsque i est impair (respectivement pair). Nous avons donc $s_{|u_n|+|u_{n-2}|+|u_k|+i}$, $s_{|u_{n-1}|+|u_{n-2}|+|u_k|+i}$, $s_{|u_{n-1}|+|u_k|+i}$, $s_{|u_n|+|u_k|+i}$, $s_{|u_k|+i}$, $s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i}$ et $s_{|u_n|+|u_k|+|u_{k-1}|+i}$ sont consécutifs (ainsi donné, cette suite finie est croissante si i est pair et décroissante si non). Les deux intervalles concernés sont d'abord celui dont les extrémités sont $s_{|u_{n-1}|+|u_{n-2}|+|u_k|+i}$ et $s_{|u_{n-1}|+|u_k|+i}$, ensuite $s_{|u_k|+i}$ et $s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i}$. Sans perte de généralité, nous allons prendre i pair, le cas i impair se déduisant de façon similaire. Posons

$$\begin{aligned}
A_{d+1} &= [s_{|u_{n-1}|+|u_{n-2}|+|u_k|+i}, s_{|u_{n-1}|+|u_k|+i}) \\
A_{d+2} &= [s_{|u_{n-1}|+|u_k|+i}, s_{|u_n|+|u_k|+i}) \\
A_{d+3} &= [s_{|u_n|+|u_k|+i}, s_{|u_k|+i}) \\
A_{d+4} &= [s_{|u_k|+i}, s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i}).
\end{aligned}$$

De la relation III.2, nous obtenons

$$\begin{aligned}
h_{-\gamma_n}|_{A_{d+4}} &= h_{-\gamma_n}|_{A_{d+3}} - \frac{(-1)^i}{\gamma_n^{|u_k|+i}} \\
&= h_{-\gamma_n}|_{A_{d+2}} - \frac{(-1)^i}{\gamma_n^{|\phi^k(1)|+i}} + \frac{(-1)^i}{\gamma_n^{|u_n|+|u_k|+i-|u_{n-1}|}(1+\gamma_n^{|u_{n-1}|})} \\
&= h_{-\gamma_n}|_{A_{d+1}} - \frac{(-1)^i}{\gamma_n^{|u_k|+i}} + \frac{(-1)^i}{\gamma_n^{|u_n|+|u_k|+i-|u_{n-1}|}(1+\gamma_n^{|u_{n-1}|})} + \frac{(-1)^i}{\gamma_n^{|u_{n-1}|+|u_k|+i}} \\
h_{-\gamma_n}|_{A_{d+4}} &= h_{-\gamma_n}|_{A_{d+1}} - \frac{(-1)^i}{\gamma_n^{|u_n|+|u_{n-1}|+|u_k|+i}(1+\gamma_n^{|u_{n-1}|})}(\gamma_n^{|u_{n+1}|} - \gamma_n^{|u_n|} - \gamma_n^{2|u_{n-1}|}).
\end{aligned}$$

Mais γ_n annule le polynôme $x^{|u_{n+1}|} - x^{|u_n|} - x^{2|u_{n-1}|}$. Donc $h_{-\gamma_n}|_{A_{d+4}} = h_{-\gamma_n}|_{A_{d+1}}$. ■

Dans la suite $A_{k,i}$ désigne l'intervalle $\left[T_{-\beta}^{|\phi^k(1)|+|\phi^{k-1}(1)|+i}(l_\beta), T_{-\beta}^{|\phi^k(1)|+i}(l_\beta)\right)$ si i est impair ou alors $\left[T_{-\beta}^{|\phi^k(1)|+i}(l_\beta), T_{-\beta}^{|\phi^k(1)|+|\phi^{k-1}(1)|+i}(l_\beta)\right)$ si i est pair.

Théorème 16. *Soit* $\Theta = \bigcup_{\substack{k\leq n-1 \\ i<|u_{k-1}|}} A_{k,i}$ *et nous notons* $supp(\mu_{-\gamma_n})$ *le support de la mesure* $\mu_{-\gamma_n}$*. Alors,*

$$supp(\mu_{-\gamma_n}) = I_{\gamma_n} \setminus \Theta. \tag{III.26}$$

Preuve

Dans le **Théorème 15**, nous avons vu que $h_{-\gamma_n}$ est constante sur Θ. Il suffit alors que $h_{-\gamma_n}$ soit nulle sur un intervalle de type $\left[s_{|u_k|+i}, s_{|u_k|+|u_{k-1}(1)|+i}\right)$. Nous avons la relation suivante :

$$u_n\overline{u_{n-1}} \prec \overline{u_{n-1}} \prec u_{n-2}u_{n-2}\overline{u_{n-1}} \prec u_{n-2}\overline{u_{n-1}}$$

Et donc

$$l_{\gamma_n} < s_{|u_n|} < s_{|u_{n-1}|} < s_{|u_{n-1}|+|u_{n-2}|}$$

Le premier intervalle inclus dans Θ est alors $\left[s_{|u_{n-1}|}, s_{|u_{n-1}|+|u_{n-2}|}\right)$. Pour tout nombre réel x dans cet intervalle,

$$h_{-\gamma_n}(x) = 1 - \frac{1}{\gamma_n^{|u_n|}}.\frac{\gamma_n^{|u_{n-1}|}}{1+\gamma_n^{|u_{n-1}|}} - \frac{1}{\gamma_n^{|u_{n-1}|}}$$

$$(1+\gamma_n^{|u_{n-1}|})h_{-\gamma_n}(x) = 1 + \gamma_n^{|u_{n-1}|} - \frac{\gamma_n^{|u_{n-1}|}}{\gamma_n^{|u_n|}} - \frac{1+\gamma_n^{|u_{n-1}|}}{\gamma_n^{|u_{n-1}|}}$$

$$\gamma_n^{|u_n|+|u_{n-1}|}(1+\gamma_n^{|u_{n-1}|})h_{-\gamma_n}(x) = \gamma_n^{|u_{n+1}|} - \gamma_n^{2|u_{n-1}|} - \gamma_n^{|u_n|}$$

Ainsi, $\gamma_n^{|u_n|+|u_{n-1}|}(1+\gamma_n^{|u_{n-1}|})h_{-\gamma_n}(x) = 0$ et donc $h_{-\gamma_n}(x) = 0$.

La densité $h_{-\gamma_n}$ est nulle sur $\left[s_{|u_{n-1}|}, s_{|u_{n-1}|+|u_{n-2}|}\right)$. Elle l'est donc sur tout Θ. Par conséquent

$$sup(\mu_{-\gamma_n}) = I_{\gamma_n} \setminus \Theta$$

■

Soit n un entier naturel. Dans ce paragraphe, nous avons introduit le réel γ_n tel que :

$$d(l_{\gamma_n}, -\gamma_n) = u_n\overline{u_{n-1}(1)}$$

Ainsi défini, en faisant balayer n sur tout l'ensemble $\mathbb{N}$, on obtient la suite $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ et on montre aisément qu'elle est décroissante. En effet,

$$\begin{aligned} d(l_{\gamma_n}, -\gamma_n) &= u_n\overline{u_{n-1}}, \\ &= u_{n+1}\overline{u_{n-1}} \end{aligned}$$

Comme

$$d(l_{\gamma_{n+1}}, -\gamma_{n+1}) = u_{n+1}\overline{u_n}$$

$u_n \prec u_{n-1}u_{n-1}$, il suit que $\overline{u_n} \prec \overline{u_{n-1}}$ et donc $u_{n+1}\overline{u_{n-1}} \prec \phi^{n+1}(1)\overline{\phi^n(1)}$, c'est-à-dire

$$d(l_{\gamma_n}, -\gamma_n) \prec d(l_{\gamma_{n+1}}, -\gamma_{n+1})$$

Il s'en suit que $S_{-\gamma_n}$ contient donc $S_{-\gamma_{n+1}}$. L'entropie du $(-\gamma_n)$-shift est donc supérieure à celle de $S_{-\gamma_{n+1}}$. Ce qui implique que $\gamma_n > \gamma_{n+1}$. Par ailleurs, sur trois intervalles consécutifs, il existe un dont la mesure est nulle. Le nombre d'intervalles de mesure nulle est donc maximal et vaut

$$N(n) = \frac{|\phi^n(1)| + |\phi^{n-1}(1)|}{3}.$$

Ce nombre augmente avec n.

L'objet du paragraphe suivant est d'étudier le support de la mesure $\mu_{-\beta}$ pour β différent de γ_n pour tout n dans $\mathbb{N}$.

3 Support de $\mu_{-\beta}$ pour $\beta \neq \gamma_n$

Soit n dans $\mathbb{N}$ et β un réel plus grand que 1 tel que $\gamma_{n+1} < \beta < \gamma_n$. Le $(-\beta)$-développement de l_β se retrouve alors pincé entre le $(-\gamma_{n+1})$-développement de $l_{\gamma_{n+1}}$ et le $(-\gamma_n)$-développement de l_{γ_n}.

$$\phi^n(1)\overline{\phi^{n-1}(1)} \prec d(l_\beta, -\beta) \prec \phi^{n+1}(1)\overline{\phi^n(1)}. \tag{III.27}$$

Nous reprenons la notation $A_{k,i}$ de certains intervalles introduite dans la section précédente. Pour β vérifiant III.27, nous allons noter $\Gamma(\beta)$ l'ensemble des intervalles $A_{k,i}$ et $\Xi(\beta) = \{T^j_{-\beta}(l_\beta) | j < |\phi^n(1)|\}$. $\Xi(\beta)$ représente l'ensemble des extrémités des intervalles de $\Gamma(\beta)$. Pour une simplification d'écriture, on pose encore $s_i = T^i_{-\beta}(l_\beta)$.

3.1 Développement en base $-\beta$ de s_i

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que pour n fixé et β pris entre γ_{n+1} et γ_n, le $(-\beta)$-développement de l_β est de la forme :

$$d(l_\beta, -\beta) = u_n(u_{n-1})^{2n_1}u_n(u_{n-1})^{2n_2}u_n(u_{n-1})^{2n_3}u_n \cdots . \tag{III.28}$$

C'est l'image par ϕ^n du $(-x)$-développement de l_x, pour un certain x appartenant à l'intervalle $]\gamma_1, \gamma_0[$.

Proposition 25. *Soit β tel que $\gamma_{n+1} < \beta < \gamma_n$ et $d(l_\beta, -\beta)$ donné par la relation III.28. Alors, il y a équivalence entre*

(a) $d(l_\beta, -\beta) \preceq d(s_i, -\beta) \preceq d(s_{|u_n|}, -\beta)$

(b) il existe k et p, $1 \leq k$ et $0 \leq p \leq n_k$ tel que

$$i = k|u_n| + 2|u_{n-1}|(\sum_{i=0}^{k-1} n_i + p) \tag{III.29}$$

avec $n_0 = 0$.

Preuve Pour trouver le développement en base $-\beta$ de $s_i = T^i_{-\beta}(\beta)$, il suffit de retrancher à $d(l_\beta, -\beta)$ son préfixe de longueur i. Prenons β entre γ_{n+1} et γ_n et $d(l_\beta, -\beta)$ donné par III.28.

$$d(l_\beta, -\beta) = u_n(u_{n-1})^{2n_1}u_n(u_{n-1})^{2n_2}u_n(u_{n-1})^{2n_3}u_n \cdots .$$

En retranchant le préfixe de $d(l_\beta, -\beta)$ de longueur i donné dans (b), on obtient nécessairement une séquence débutant soit par u_n soit par $u_{n-1}u_{n-1}$. En outre, le plus petit mot commençant par u_n est $d(l_\beta, -\beta) = d(s_0, -\beta)$. $(u_{n-1})^{2n_1}$ est la plus longue séquence de u_{n-1} (pour tout $i > 1$, $n_i \leq n_1$) pouvant apparaître dans un mot admissible. D'où

$$(u_{n-1})^{2j}u_n \prec (u_{n-1})^{2n_1}u_n$$

et donc

$$(u_{n-1})^{2j}u_n(u_{n-1})^{2n_{k+1}}u_n(u_{n-1})^{2n_{k+2}}u_n \cdots \preceq (u_{n-1})^{2n_1}u_n(u_{n-1})^{2n_2}u_n \cdots .$$

C'est-à-dire pour $i = k|u_n| + 2|u_{n-1}| \sum_{i=0}^{k-1} n_i + 2(n_k - j)|u_{n-1}|$, on a

$$d(s_0, -\beta) \prec d(s_i, -\beta) \prec d(s_{|u_n|}, -\beta). \tag{III.30}$$

Ainsi, (b) implique (a).

Pour montrer l'implication dans l'autre sens, il suffit de voir que $s_{i+|u_{n-1}|}$ n'est pas dans $[s_0, s_{|u_n|}]$ avec i donné dans (b). En effet, en retranchant à $d(s_i, -\beta)$ (qui débute bien par u_{n-1}) le préfixe u_{n-1}, on a d'après III.29 :

$$d(s_{|u_n|+|u_{n-1}|}, -\beta) \preceq d(s_{i+|u_{n-1}|}, -\beta) \preceq d(s_{|u_{n-1}|}, -\beta).$$

L'ordre est renversé car u_{n-1} est un mot de longueur impaire. Par ailleurs, on a $u_n \prec u_{n-1}u_n$. Ceci implique que $(u_{n-1})^{2n_1}u_n \prec (u_{n-1})^{2n_1-1}u_n$. Il vient alors que

$$d(s_{|u_n|}, -\beta) \prec d(s_{|u_n|+|u_{n-1}|}, -\beta),$$

d'où le résultat. ∎

On déduit de la proposition précédente que pour tout i, k et p tels que

$$i = k|u_n| + 2|u_{n-1}|(\sum_{i=0}^{k} n_i + p)$$

avec $0 \leq k$ et $0 \leq p \leq k-1$, on a $s_0 \leq s_i \leq s_{|u_n|}$.

Proposition 26. *Soit β tel que $\gamma_{n+1} < \beta < \gamma_n$. On pose $s_i = T^i_{-\beta}(l_\beta)$. Alors, si on range les éléments de la suite $(s_i)_{i\geq 1}$, pour $k < n$, $s_{|u_k|}$ et $s_{|u_k|+|u_{k-1}|}$ sont consécutifs.*

Preuve Étant donné un entier $k < n$, $d(s_0, -\beta)$ est la plus petite (au sens de la relation d'ordre alterné) suite débutant par $u_{k+1} = u_k u_{k-1} u_{k-1}$. Si on lui retranche le préfixe u_k, on obtient alors la plus grande suite (au sens de la relation d'ordre alterné) débutant par $u_{k-1}u_{k-1}$ car u_k est de longueur impaire. De même, si on retranche à $d(s_0, -\beta)$ le préfixe $u_k u_{k-1}$, on obtient la plus petite suite (au sens de la relation d'ordre alterné) débutant par $u_{k-1}u_k$. Comme

$$u_n = u_0 00 u_0 u_0 u_1 u_1 u_2 u_2 \cdots u_{n-2} u_{n-2} = u_k u_{k-1} u_{k-1} u_k u_k \cdots u_{n-2} u_{n-2}$$

dans $d(l_\beta, -\beta) = d(s_0, -\beta)$, u_{k-1} est suivi de $u_{k-1}u_k$ ou de $u_k u_{k+1} u_{k+1}$. Ainsi, pour un certain j, $d(s_j, -\beta)$ débute par $u_{k-1}u_{k-1}$ implique que $d(s_j, -\beta) \preceq d(s_{|u_k|}, -\beta)$. Si $d(s_j, -\beta)$ débute par $u_{k-1}u_k$ alors, $d(s_{|u_k|+|u_{k-1}|}, -\beta) \preceq d(s_j, -\beta)$. D'où $d(s_{|u_k|}, -\beta)$ et $d(s_{|u_k|+|u_{k-1}|}, -\beta)$ sont consécutifs dans l'ensemble des $(-\beta)$-développements des s_i. Donc, $s_{|u_k|}$ et $s_{|u_k|+|u_{k-1}|}$ le sont aussi. Par un raisonnement analogue, on montre que $s_{|u_n|}$ et $s_{|u_n|+|u_{n-1}|}$ le sont aussi. De façon plus générale, $s_{|u_k|+j}$ et $s_{|u_k|+|u_{k-1}|+j}$ sont consécutifs dans $\{s_i : i \geq 0\}$, avec $j < |u_{k-1}|$ ■

3.2 Trous de l'intervalle

Définition 20. *Soit $\beta > 1$. On appelle "trou" tout intervalle inclus dans I_β négligeable par rapport à la mesure $\mu_{-\beta}$.*

Si $(d_i)_{i\geq 1} = d(l_\beta, -\beta)$, nous allons noter $F(x)$ la série $1 + \sum_{k\geq 1} (-1)^k (d_k + 1) x^k$ qui est convergente dans la boule ouverte $B(0,1)$ (puisque la suite $(d_i)_{i\geq 1}$ est bornée) et donc en particulier dans la boule fermée de centre 0 et de rayon $\frac{1}{\beta}$. Elle est nulle en $\frac{1}{\beta}$.

Lemme 6. *Soit $\beta > 1$ tel que $d(l_\beta, -\beta) = u_n (u_{n-1})^{2n_1} u_n (u_{n-1})^{2n_2} u_n (u_{n-1})^{2n_3} u_n \cdots = d_1 d_2 d_3 \cdots$. Alors,*

$$F(x) = (1 - x^{|0|})(1 - x^{|u_0|})(1 - x^{|u_1|}) \cdots (1 - x^{|u_{n-1}|}) \sum_{i\geq 0} \sum_{p=0}^{n_i} (-x)^{i|u_n| + 2|u_{n-1}|(\sum_{k=0}^{i-1} n_k + p)}.$$

En outre, la série

$$\sum_{i\geq 0} \sum_{p=0}^{n_i} (-x)^{i|u_n| + 2|u_{n-1}|(\sum_{k=0}^{i-1} n_k + p)} \tag{III.31}$$

est nulle en $\frac{1}{\beta}$, c'est-à-dire les racines $|u_k|$-ième de l'unité ($k \leq n-1$) sont des conjugués "pirates" de β.

Preuve

On utilise un résultat de Dubikas (voir [Dub07]) qui s'obtient par récurrence. Remarquons tout d'abord que

$$(d_i+1)_{i\geq 1} = w_n(w_{n-1})^{2n_1}w_n(w_{n-1})^{2n_2}w_n(w_{n-1})^{2n_3}\cdots$$

où $w_k = \psi^k(2)$, $\psi(1) = 2$ et $\psi(2) = 211$. Étant donné une suite $(a_i)_{i\geq 1}$, on note $((a_i)_{i\geq 1})(x)$ la série $\sum_{n\geq 1} a_n(-x)^n$. D'après [Dub07], pour tout k,

$$(1w_k)(x) = (1-x^{|0|})(1-x^{|u_0|})(1-x^{|u_1|})\cdots(1-x^{|u_{k-1}|}) - x^{|u_k|}.$$

En appliquant ceci à $(d_i+1)_{i\geq 1}$, on a le résultat escompté.

On sait que $F(x)$ est nulle en $\frac{1}{\beta}$. Comme β est strictement supérieur à 1, $F(x) = (1-x^{|0|})(1-x^{|u_0|})(1-x^{|u_1|})\cdots(1-x^{|u_{n-1}|})\sum_{i\geq 0}\sum_{p=0}^{n_i}(-x)^{i|u_n|+2|u_{n-1}|(\sum_{k=0}^{i-1}n_k+p)}$ on déduit que la série III.31 est nulle en $\frac{1}{\beta}$. ■

Les exposants de la série III.31 vérifie III.29.

Lemme 7. *La densité $h_{-\beta}$ est constante sur la réunion de tous les intervalles de l'ensemble $\Gamma(\beta)$. Autrement dit, pour tout k_1, k_2, i_1 et i_2,*

$$h_{-\beta|A_{k_1,i_1}} = h_{-\beta|A_{k_2,i_2}}.$$

Preuve

On sait que $d(l_\beta, -\beta)$ débute par u_n et donc par u_{n-1} (voir (III.28)). Mais

$$\begin{aligned} u_{n-1} &= u_{n-2}u_{n-3}u_{n-3} \\ &= u_{n-2}u_{n-3}u_{n-4}u_{n-5}u_{n-5} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$u_{n-1} = \begin{cases} u_{n-2}u_{n-3}u_{n-4}u_{n-5}\cdots u_0u_0 & \text{si } n \text{ est impair },\\ u_{n-2}u_{n-3}u_{n-4}u_{n-5}\cdots u_1u_000 & \text{si } n \text{ est pair }. \end{cases}$$

Par ailleurs nous avons aussi

$$u_{n-2}u_{n-2} = \begin{cases} u_{n-2}u_{n-3}u_{n-4}\cdots u_1u_0 00 & \text{si } n \text{ est impair ,} \\ u_{n-2}u_{n-3}u_{n-4}\cdots u_1u_0u_0 & \text{si } n \text{ est pair .} \end{cases}$$

On remarque que u_{n-1} et $u_{n-2}u_{n-2}$ ont en commun $u_{n-2}u_{n-3}\cdots u_1u_0$. D'après la proposition III.24, on a la relation suivante pour tout i vérifiant (III.29) et $j < min(|u_n|, 2|u_{n-1}|)$

$$\begin{cases} d(s_j, -\beta) \preceq d(s_{i+j}, -\beta) \preceq d(s_{|u_n|+j}, -\beta) \text{ si } j \text{ est pair ,} \\ d(s_{|u_n|+j}, -\beta) \preceq d(s_{i+j}, -\beta) \preceq d(s_j, -\beta) \text{ si } j \text{ est impair .} \end{cases} \tag{III.32}$$

Il est à noter que pour j ainsi défini, $|u_{n-1}| + j$ est strictement inférieur à $|u_n| = |u_{n-1}| + 2|u_{n-2}|$. Dans $\Xi(\beta)$, $T_{-\beta}^{|u_{n-1}|+j}(l_\beta)$ et $T_{-\beta}^{j}(l_\beta)$ sont consécutifs. Ainsi, s'ils appartiennent à des intervalles A_1 et A_2 de $\Gamma(\beta)$ différents alors,

$$h_{-\beta|A_1} = h_{-\beta|A_2} \pm \frac{1}{(-\beta)^j} \sum_{i\geq 0}\sum_{p=0}^{n_i}(-\frac{1}{\beta})^{i|u_n|+2|u_{n-1}|(\sum_{k=0}^{i-1} n_k+p)}. \tag{III.33}$$

Mais, d'après le **lemme 6**, $\sum_{i\geq 0}\sum_{p=0}^{n_i}(-\frac{1}{\beta})^{i|u_n|+2|u_{n-1}|(\sum_{k=0}^{i-1} n_k+p)}$. Par conséquent, $h_{-\beta|A_1} = h_{-\beta|A_2}$. ■

Théorème 17. *$h_{-\beta}$ est nulle sur chaque intervalle de $\Gamma(\beta)$.*

Preuve Pour démontrer ce théorème, on peut tout simplement remarquer que

$$\sum_{i\geq 0}\sum_{p=0}^{n_i}(-\frac{1}{\beta})^{i|u_n|+2|u_{n-1}|(\sum_{k=0}^{i-1} n_k+p)}$$

est la valeur de $h_{-\beta}$ sur l'intervalle $\left[T_{-\beta}^{|\phi^{n-1}(1)|}(l_\beta), T_{-\beta}^{|\phi^{n-1}(1)|+|\phi^{n-2}(1)|}(l_\beta)\right)$ qui est clairement dans $\Gamma(\beta)$.

Ce corollaire achève l'étude du support de la densité de la mesure $\mu_{-\beta}$. En fait, tout ce qui précède montre que les seuls boréliens sur lesquels $\mu_{-\beta}$ est nul sont les intervalles appartenant à $\Gamma(\beta)$.

$$A_{k,i} = \begin{cases} [s_{|u_k|+i}, s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i}) & \text{si } i \text{ est impair ,} \\ [s_{|u_k|+|u_{k-1}|+i}, s_{|u_k|+i}) & \text{si } i \text{ est pair} \end{cases}$$

avec $k \leq n$ et $i < |u_{k-1}|$. En choisissant, comme dans le **théorème 16** l'ensemble

$$\Theta = \bigcup_{\substack{k \leq n \\ i < |\phi^{k-1}(1)|}} A_{k,i},$$

on a

$$supp(\mu_{-\beta}) = I_\beta \setminus \Theta. \tag{III.34}$$

■

Remarque 11. *Pour β tel que $\gamma_{n+1} < \beta < \gamma_n$, $I_{\gamma_{n+1}}$ a le même nombre de trous que I_β.*

4 Interprétation des trous

Nous avons vu que les trous pour la mesure $\mu_{-\beta}$ (β étant un réel plus grand que 1 et plus petit que γ_n) sont les intervalles $\left[T_{-\beta}^{|u_k|+i}(l_\beta), T_{-\beta}^{|u_k|+|u_{k-1}|+i}(l_\beta)\right)$ ou $\left[T_{-\beta}^{|u_k|+|u_{k-1}|+i}(l_\beta), T_{-\beta}^{|u_k|+i}(l_\beta)\right)$ selon la parité de $i < |u_{k-1}|$. Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux intervalles de mots correspondants dans le $(-\beta)$-shift. Les $(-\beta)$-développements des extrémités du trou $\left[T_{-\beta}^{|u_k|}(l_\beta), T_{-\beta}^{|u_k|+|u_{k-1}|}(l_\beta)\right)$ débute par u_{k-1}. Il en est donc de même pour tout développement en base $-\beta$ des réels de cet intervalle. Ainsi, le trou d'extrémités $T_{-\beta}^{|u_k|+i}(l_\beta)$ et $T_{-\beta}^{|u_k|+|u_{k-1}|+i}(l_\beta)$ génère le cylindre du $(-\beta)$-shift unilatéral constitué des suites admissibles pincées entre les développements de $T_{-\beta}^{|u_k|}(l_\beta)$ et $T_{-\beta}^{|u_k|+|u_{k-1}|}(l_\beta)$ retirés de leur début de longueur i puisque i est inférieur à $|u_{k-1}|$. Ainsi, plutôt que de s'intéresser à tous les trous, on peut tout simplement regarder ceux dont les extrémités sont de la forme $T_{-\beta}^{|u_k|}(l_\beta)$ et $T_{-\beta}^{|u_k|+|u_{k-1}|}(l_\beta)$.

Soit x un réel de $\left(T_{-\beta}^{|u_k|}(l_\beta), T_{-\beta}^{|u_k|+|u_{k-1}|}(l_\beta)\right)$. Notons $(x_i)_{i\geq 1}$ une représentation de x en base $-\beta$.

$$d(T_{-\beta}^{|u_k|}(l_\beta), -\beta) \prec (x_i)_{i\geq 1} \prec d(T_{-\beta}^{|u_k|+|u_{k-1}|}(l_\beta), -\beta) \tag{III.35}$$

$$d(T_{-\beta}^{|u_k|}(l_\beta), -\beta) = u_{k-1}u_{k-1}u_k u_k \cdots u_{n-2}u_{n-2}u_{p_1}u_{p_2}\cdots, \text{ et}$$

$$d(T_{-\beta}^{|u_k|+|u_{k-1}|}(l_\beta), -\beta) = u_{k-1}u_k u_k \cdots u_{n-2}u_{n-2}u_{p_1}u_{p_2}\cdots.$$

Il existe deux situations possibles :

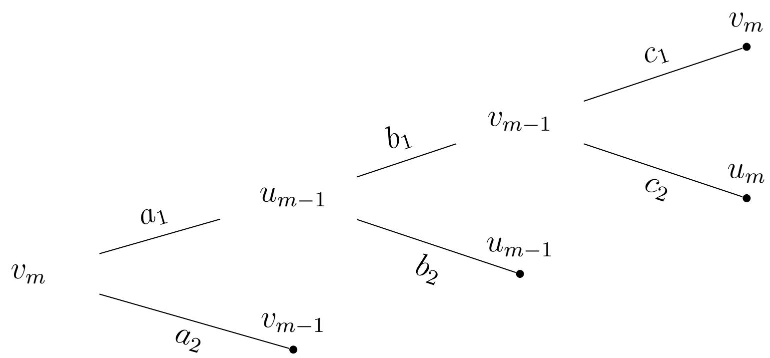
(a) D'abord l'indice pour lequel $x_1x_2x_3\cdots$ diffère de $d(T_{-\beta}^{|u_k|}(l_\beta), -\beta)$ (respectivement $d(T_{-\beta}^{|u_k|+|u_{k-1}|}(l_\beta), -\beta)$) est inférieur à $|u_n| - |u_k|$ (respectivement $|u_n| - |u_k| - |u_{k-1}|$). Et dans ce cas, la relation III.35 signifie qu'il existe un entier m tel que $(x_i)_{i\geq 1}$ débute par $u_{k-1}u_{k-1}\cdots u_{m-1}u_{m-1}$ (qui est de longueur paire) et

$$u_m u_m \prec (x_i)_{i=|u_{m+1}|-|u_k|+1}^{|u_{m+2}|-|u_k|} \tag{III.36}$$

ou alors $(x_i)_{i\geq 1}$ débute par $u_{k-1}u_k u_k \cdots u_{m-1}u_{m-1}$ et comme c'est une séquence de longueur impaire,

$$u_m u_m \prec (x_i)_{i=|u_{m+1}|-|u_k|-|u_{k-1}|+1}^{|u_{m+2}|-|u_k|-|u_{k-1}|}.$$

Dans les deux cas, $(x_i)_{i=|u_{m+1}|-|u_k|-|u_{k-1}|+1}^{|u_{m+2}|-|u_k|-|u_{k-1}|}$ doit vérifier la relation III.35.
Le mot u_{m-1} est toujours suivi de $u_{m-2}u_{m-3}\cdots u_1u_0$ et cette séquence précède u_0 ou 00. Mais $u_{m-2}u_{m-3}\cdots u_1u_0$ suivi de u_0 ou 00 donne $u_{m-2}u_{m-2}$ ou tout simplement u_{m-1}. On établit tout ceci sur l'arbre suivant en posant $v_i = u_{i-1}u_{i-1}$:



$u_{m-1}u_{m-2}u_{m-2} = u_m$. Ceci justifie la présence de $u_{m-1}u_{m-1}$ et u_m au bout des chemins c_1 et c_2 ; $u_m u_{m-1} u_{m-1} = u_{m+1}$ et $u_{m+1} \prec u_m u_m$. On abandonne alors le chemin $a_1b_1c_1$. De plus, le chemin $a_1b_1c_2$ implique que :

$$(x_i)_{i=|u_{m+1}|-|u_k|+1}^{|u_{m+2}|-|u_k|} = u_m u_m.$$

Donc, $a_1b_1c_2$ n'est lui aussi pas pris en compte. Les seuls cas pour lesquels on a

$$u_m u_m \prec (x_i)_{i=|u_{m+1}|-|u_k|-|u_{k-1}|+1}^{|u_{m+2}|-|u_k|-|u_{k-1}|}$$

sont donnés par les chemins a_1b_2 et a_2. En effet, $u_m u_m \prec u_{m-2}u_{m-2}$. Ainsi, si la séquence $(x_i)_{i=|u_{m+1}|-|u_k|-|u_{k-1}|+1}^{|u_{m+2}|-|u_k|-|u_{k-1}|}$ débute par $u_{m-2}u_{m-2}$, la relation (III.35) est vérifiée. De même, $u_m u_m \prec u_{m-1}u_{m-1}$. Il ressort alors que $(x_i)_{i\geq 1}$ comporte l'une des deux séquences $u_{m-1}u_{m-1}u_{m-1}u_{m-1}$ et $u_{m-2}u_{m-1}u_m$.

(b) L'indice pour lequel $x_1x_2x_3\cdots$ diffère de $d(T_{-\beta}^{|u_k|}(l_\beta), -\beta)$ ($d(T_{-\beta}^{|u_k|+|u_{k-1}|}(l_\beta), -\beta)$ respectivement) est supérieur ou égal à $|u_n| - |u_k|$ (respectivement $|u_n| - |u_k| - |u_{k-1}|$). On pose

$$d(l_\beta, -\beta) = u_n u_{p_1} u_{p_2} \cdots .$$

Dans ce cas, il existe un entier j tel que $u_{k-1}u_{k-1}\cdots u_{n-2}u_{n-2}u_{p_1}u_{p_2}\cdots u_{p_{2j}}$ (respectivement $u_{k-1}\cdots u_{n-2}u_{n-2}u_{p_1}u_{p_2}\cdots u_{p_{2j}}$) est le début de $.x_1x_2x_3\cdots$. On note X le mot de longueur $|u_{p_{2j+1}}| + |u_{p_{2j+2}}|$ du langage qui précédé de $u_{k-1}u_{k-1}\cdots u_{n-2}u_{n-2}u_{p_1}u_{p_2}\cdots u_{p_{2j}}$ ($u_{k-1}\cdots u_{n-2}u_{n-2}u_{p_1}u_{p_2}\cdots u_{p_{2j}}$ respectivement) dans $.x_1x_2\cdots$.

$$X = X^{(1)}X^{(2)} \text{ avec } |X^{(1)}| = |u_{p_{2j+1}}| \text{ et } |X^{(2)}| = |u_{p_{2j+2}}|$$

$$u_{p_{2j+2}} \preceq X^{(2)} \Rightarrow u_{p_{2j+1}}X^2 \preceq u_{p_{2j+1}}u_{p_{2j+2}}. \text{ Donc}$$

$$\begin{aligned} u_{p_{2j+1}}u_{p_{2j+2}} \prec X^{(1)}X^{(2)} &\Rightarrow u_{p_{2j+1}} \prec X^{(1)} \\ &\Rightarrow X^{(1)} \text{ débute par } u_{p_{2j+1}-1}u_{p_{2j+1}-1} \end{aligned}$$

ou alors $X^{(1)}$ commence par les $|u_{p_{2j+1}}|$ termes du mot $u_{p_{2j+1}-1}u_{p_{2j+1}-1}$.

Définition 21. *On dira que $v \in L_\beta$ est un mot intransitif s'il existe $u \in L_\beta$ tel que pour tout w dans L_β, $uvw \notin L_\beta$.*

Pour mieux comprendre le phénomène de trous, nous allons regarder le cas où $\beta = \gamma_n$. Commençons par une description des mots intransitifs.

Proposition 27. *Les mots intransitifs sont ceux qui comportent, pour $m \leq n-1$ et $k \in \mathbb{N}$ l'un des quatre types de mots suivants :*

$$\begin{aligned} &u_{m-2}u_{m-1}u_m && \text{avec } m > 0 \ , \\ &u_{m-1}u_{m-1}u_{m-1}u_{m-1} && \text{avec } m \geq 0 \ , \\ &u_{m-1}u_{m+1} && \text{avec } m \geq 0 \ , \\ &u_{m-1}u_{m-1}\cdots u_{n-2}u_{n-2}(u_{n-1})^{2k+1}u_n \text{ avec } m \geq 0. \end{aligned}$$

Ces mots sont précédés par des suites de la forme :

$$0^{k-1}u_0^{k_0}u_1^{k_1}\cdots u_{m-2}^{k_{m-2}}, \ k_i \in \mathbb{N} \ .$$

Ceci se montre très facilement en remarquant qu'aucun de ces mots n'est dans le langage associé à la partie codée du $(-\beta)$-shift.

L'arbre construit montre qu'il y a apparition de ces séquences dans les développements des réels appartenant aux trous.

Une suite comportant l'une de ces séquences ne peut se décomposer en produit de mots codes (un tel mot n'est pas dans le système codé par le code préfixe $\{u_n, u_{n-1}u_{n-1}\}$). Ceci reste donc en conformité avec les résultats du chapitre II. Les $(-\beta)$-développements des réels appartenant aux trous se prolongent à gauche dans le $(-\beta)$-shift bilatéral en mot de $S_{-\beta} \setminus W(\mathfrak{C})$. Mais nous avons vu au chapitre II que cette partie est négligeable par rapport l'une mesure ergodique d'entropie maximale. Il vient que sur $S^d_{-\beta}$, le $(-\beta)$-shift unilatéral, tout intervalle de mots prolongeant en mots de $S_{-\beta} \setminus W(\mathfrak{C})$ est de mesure nulle (mesure ergodique d'entropie maximale). Ainsi l'image par f_β d'un tel intervalle de mots de est négligeable par rapport à l'unique mesure ergodique sur I_β (f_β est l'application qui à un mot $(x_i)_{i\in 1}$ associe le réel $\sum\limits_{i\geq 1} \frac{x_n}{(-\beta)^n}$). Voici une autre justification de l'existence de trous.

Théorème 18. *Soit μ une mesure ergodique sur un système symbolique (X, T) de langage L.*

Soient u et t deux mots de L tels que $\forall a \in L$, $uat \notin L$ (t est un mot intransitif lorsqu'il existe un tel mot u). Alors, on a $\mu({}_0[t]) = 0$ ou $\mu({}_0[u]) = 0$.

Preuve Lorsqu'une mesure μ est ergodique, μ presque tout point est générique ; donc si $\mu({}_0[u])$ et $\mu({}_0[t])$ sont tous les deux non nuls, et si $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un point générique pour μ il existe une infinité de u et de t dans la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ et donc un mot a dans L tel que $uat \in L$ (et un mot b de L tel que $tbu \in L$). ■

On en déduit alors le théorème :

Théorème 19. *Soit μ la mesure d'entropie maximale sur le $(-\beta)$-shift ; cette mesure charge les cylindres ${}_0[x]$ dès que x est un mot du langage de l'ensemble des mots qui se décomposent en produit de mots du code préfixe récurrent positif. Soit t un mot intransitif de L_β ; alors, $\mu({}_0[t]) = 0$. L'image par f_β du cylindre ${}_0[t]$ est alors négligeable par rapport à la mesure $f_\beta(\mu)$, f_β étant l'application qui à un mot $(x_i)_{i\geq 1}$ associe $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x_n}{(-\beta)^n}$.*

Pour β plus grand que le nombre d'or, nous avons vu au chapitre II qu'il existe un code préfixe récurrent positif qui code le $(-\beta)$-shift. Les seuls ensembles de mesure nulle sont les produits infinis des préfixes de $d(l_\beta, -\beta)$ de longueurs impaires ou alors les mots qui finissent par $d(l_\beta, -\beta)$. Mais ces ensembles sont réunions de singletons (chaque mot est encadré par deux mots se décomposant en produit d'éléments du code). Ceci n'a donc aucune incidence sur I_β puisque la mesure ergodique sur I_β ne charge aucun singleton (elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue).

Chapitre IV

Fonction Zêta

La notion de fonction Zêta dynamique a été introduite par M. Artin et B. Mazur en 1965. On considère un difféomorphisme δ sur un espace compact tel que tous les itérés δ^n de δ admettent des points fixes isolés. La fonction Zêta ζ_δ associée à δ est donnée par :

$$\zeta_\delta(z) = exp(\sum_{k\geq 1} \frac{\sharp Fix(\delta^k)}{k} z^k) \tag{IV.1}$$

où $\sharp Fix(\delta^k)$ désigne le nombre de points fixes de δ^k, par analogie à la fonction zêta géométrique.

En 1994, Leopold Flatto et Jeffrey Lagarias dans [Lag99] ont introduit et développé la fonction Zêta ζ_β de la β -transformation. Ils considèrent l'application T_β de [0, 1) dans [0, 1) définie par :

$$T_\beta : x \mapsto \{\beta x\} \text{ pour } \beta > 1,$$

où $\{x\}$ dénote la partie fractionnaire de x et β un nombre réel strictement plus grand que 1.

$$\zeta_\beta(z) = exp(\sum_{k\geq 1} \frac{p_k}{k} z^k) \tag{IV.2}$$

où p_k désigne le nombre de points fixes de T_β^k. En fait, p_k correspond au nombre de mots périodiques de période k dans le β-shift. En effet, considérons un nombre réel positif x, point fixe de T_β^k dont le développement en base β est $x_1x_2x_3\cdots$.

$$x_1x_2\cdots = d_\beta(x)$$

$$T_\beta^k(x) = x \Rightarrow d_\beta(x) = d_\beta(T_\beta^k(x)).$$

Mais

$$d_\beta(T_\beta^k(x)) = x_{n+1}x_{n+2}\cdots .$$

Donc $(x_{k+i})_{i\geq 1} = (x_i)_{i\geq 1}$. C'est à dire $(x_i)_{i\geq 1}$ est périodique de période k.

Après l'introduction du développement des nombres en bases négatives par Ito et Sadahiro, dans les grandes lignes à suivre nous déterminons la fonction zêta associée au $(-\beta)-$ shift et à la $(-\beta)-$transformation.

1 Fonction zêta d'un système symbolique défini par un code préfixe exhaustif

Définition 22. *Soit X un système dynamique symbolique. On dira qu'un mot u du langage L associé à X est périodique s'il existe une orbite y dans X telle que $y = \overline{u}$. La longueur $|u|$ est alors la période. Il existe une plus petite période k_0, mais nous allons considérer que tout multiple de k_0 est aussi une période.*

Définition 23. *Un code C est dit exhaustif si tout mot périodique $P = p_1\cdots p_n$ peut être écrit de façon unique comme suit :*

$$P = a_1a_2\cdots a_s(x_{1,1}x_{1,2}\cdots x_{1,k_1})(x_{2,1}\cdots x_{2,k_2})\cdots(x_{h-1,1}\cdots x_{h-1,k_{h-1}})b_1\cdots b_r$$

où

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_{1,1} \cdots x_{1,k_1} \in C \\
x_2 &= x_{2,1} \cdots x_{2,k_2} \in C \\
&\vdots \\
x_{h-1} &= x_{h-1,1} \cdots x_{h-1,k_{h-1}} \in C \\
\textit{et enfin } x_h &= b_1 b_2 \cdots b_r a_1 a_2 \cdots a_s \in C.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, P et $x_1 \cdots x_h$ ont même orbite.

Théorème 20. *Soit X un système codé par un code préfixe exhaustif C. Alors, si on note p_n le nombre de mots périodiques de longueur n dans X, la fonction zêta associée est donnée par :*

$$\begin{aligned}
\zeta_X(t) &= exp(\sum_{n\geq 1} \frac{p_n}{n} t^n) \\
&= \frac{1}{1 - \sum\limits_{n\geq 1} b_n t^n}
\end{aligned} \tag{IV.3}$$

où b_n désigne le nombre de mots périodiques de longueur n dans C.

Preuve

Notons $(\delta_{n,k})_{n\geq k\geq 1}$ la suite d'entiers positifs tels que $\delta_{n,k}$ désigne le nombre de mots périodiques de longueur n ayant la même orbite qu'un produit de k pièces du code préfixe exhaustif C de X. Donc $p_n = \sum_{k=1}^{n} \delta_{n,k}$. Au sens des séries formelles, on réécrit la série :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} \frac{p_n}{n} t^n &= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} (\sum_{k=1}^{n} \delta_{n,k}) t^n \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{\delta_{n,1}}{n} t^n + \cdots + \sum_{n\geq k} \frac{\delta_{n,k}}{n} t^n + \cdots .
\end{aligned}$$

Soient $x_1, x_2, \cdots, x_k$, k pièces de C avec $|x_1 x_2 \cdots x_k| = n$ et p, h deux entiers positifs tels que $x_1 x_2 \cdots x_k = (x_1 x_2 \cdots x_p)^h$ où p est minimal, c'est-à-dire $x_1 x_2 \cdots x_p$ dénote le plus petit mot en taille dont l'orbite est $(x_1 x_2 \cdots x_k)^\infty$.

$$k = hp \text{ et } |x_1x_2\cdots x_k| = \sum_{i=1}^{k}|x_i| = h\sum_{i=1}^{p}|x_i|.$$

Alors

$$\begin{aligned}\delta_{n,k} &= \sum_{\substack{(i_1,i_2,\cdots i_p)\\ h\sum_{j=1}^{p} i_j=n\\ ph=k}} (\sum_{j=1}^{p} i_j)(b_{i_1}\cdots b_{i_p})^h\\ &= \sum_{\substack{(i_1,i_2,\cdots i_p)\\ h\sum_{j=1}^{p} i_j=n\\ ph=k}} \frac{n}{h}(b_{i_1}\cdots b_{i_p})^h.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq k}\frac{1}{n}\delta_{n,k}t^n &= \sum_{n\geq k}\sum_{\substack{(i_1,i_2,\cdots i_p)\\ h\sum_{j=1}^{p} i_j=n\\ ph=k}} \frac{1}{h}(b_{i_1}\cdots b_{i_p})^h t^n\\ &= \frac{1}{k}\sum_{n\geq k}\sum_{\substack{(i_1,i_2,\cdots i_p)\\ h\sum_{j=1}^{p} i_j=n\\ ph=k}} \frac{k}{h}(b_{i_1}\cdots b_{i_p})^h t^n\\ &= \frac{1}{k}\sum_{n\geq k}\sum_{\substack{(i_1,i_2,\cdots i_p)\\ h\sum_{j=1}^{p} i_j=n\\ ph=k}} p(b_{i_1}\cdots b_{i_p})^h t^n.\end{aligned}$$

p minimal, $ph = k$ et $h\sum_{j=1}^{p} i_j = n, p(b_{i_1}\cdots b_{i_p})^h$ compte les mots résultant de permutations circulaires de k pièces du code. Sans tenir compte de la commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, et au sens des séries formelles,

$$\sum_{n\geq k}\frac{1}{n}\delta_{n,k}t^n = \frac{1}{k}\sum_{n\geq k}\sum_{\sum\limits_{i=1}^{k} i_j=n} b_{i_1}\cdots b_{i_k}t^n,$$

mais

$$\sum_{n\geq k}\sum_{\sum_{i=1}^{k} i_j=n} b_{i_1}\cdots b_{i_k}t^n = (\sum_{n\geq 1} b_n t^n)^k.$$

C'est-à-dire,

$$\sum_{n\geq k}\frac{1}{n}\delta_{n,k}t^n = \frac{1}{k}(\sum_{n\geq 1} b_n t^n)^k.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\frac{p_n}{n}t^n &= \sum_{n\geq 1} b_n t^n + \frac{1}{2}(\sum_{n\geq 1} b_n t^n)^2 + \frac{1}{3}(\sum_{n\geq 1} b_n t^n)^3 + \cdots \\ &= \log\frac{1}{1-\sum_{n\geq 1} b_n t^n}\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\zeta_X(t) = \frac{1}{1-\sum_{n\geq 1} b_n t^n}.$$

■

Exemple 4. *Soient β un nombre réel, $\beta \geq 1$. On note X_β le $\beta-$shift et $(a_i)_{i\geq 1}$ le développement de 1 en base β, et $C_\beta = \{a_1\cdots a_k i | k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq i \leq a_{k+1}-1\}$.*

X_β est codé par C_β qui est un code préfixe exhaustif. a_k désigne non seulement le $k-$ième terme du développement de 1 mais aussi le nombre de mots de longueur k dans C_β. Donc, la fonction zêta associée à X_β est :

$$\zeta_{X_\beta}(z) = \frac{1}{1-\sum_{n\geq 1} a_n z^n}.$$

2 Fonction Zêta du $(-\beta)-$shift

Le but de cette section est de déterminer $\zeta_{-\beta}$, fonction zêta associée au $(-\beta)-$shift. Pour ce faire, on construit deux sous-ensembles de $S_{-\beta}$: d'abord, un sous-ensemble codé par un code préfixe exhaustif, ensuite une partie constituée de ce qu'on pourrait appeler de "mauvais mots". Ces derniers représentent une classe de mots non issus d'une permutation de pièces du code mais qui sont tout de même admissibles et engendrent bien évidemment des orbites périodiques. L'étude de la fonction zêta associée au $(-\beta)$-shift se fera dans les lignes à suivre au cas par cas selon la complexité du développement en base $-\beta$ de $l_\beta = -\frac{\beta}{\beta+1}$. Cette complexité vient du comptage des mots du code et ceux de l'ensemble des "mauvais mots".

2.1 Cas $d(l_\beta, -\beta)$ non périodique

Soit β un nombre réel strictement plus grand que 1. Notons $(d_i)_{i\geq 1}$ le développement en base $-\beta$ de $l_\beta = -\frac{\beta}{\beta+1}$.

Théorème 21. *Soient $\beta > 1$ et $d(l_\beta, -\beta) = (d_i)_{i\geq 1}$. Si $(d_i)_{i\geq 1}$ est non-périodique, alors la fonction zêta $\zeta_{-\beta}$ associée au $(-\beta)$-shift est donnée par*

$$\zeta_{-\beta}(z) = \frac{1}{1 + \sum_{n\geq 1}(-1)^n(d_n+1)z^n}. \tag{IV.4}$$

Rappelons que pour le β-shift, il existe un code exhaustif nous permettant d'avoir les mots périodiques. La difficulté avec le $(-\beta)$-shift est que certains mots périodiques sont préfixes de $d(l_\beta, -\beta)$. C'est le cas par exemple de d_1, $d_1d_2d_3$, ...Ces mots peuvent être répétés une infinité de fois tout comme leurs produit. On a par exemple $d_1d_1d_2d_3d_1d_1d_2d_3d_1d_1d_2d_3\cdots$ qui est bien admissible à condition que $d_4 \neq d_1$. Cette catégorie de mots est celle que nous avons appelé ensemble de "mauvais mots". La condition $d_4 \neq d_1$ commence un tout petit peu à mettre en exergue le caractère complexe de cet ensemble en fonction de la suite $(d_i)_{i\geq 1}$.

2.1.1 Cas où $d_{2i} < d_1$ pour tout i

On note Δ l'ensemble défini comme suit :

$$\Delta = \{d_1, d_1d_2d_3, \cdots, d_1\cdots d_{2k+1}, \cdots\}$$

et on réintroduit le sous-ensemble

$$\Gamma = \{x_1 \cdots x_k d_1 \cdots d_{n-1} j; k, n \in \mathbb{N}^*, (-1)^n (d_n - j) < 0, j \neq d_1, x_1, \cdots, x_k \in \Delta\}$$

On vérifie très facilement qu'un mot de Γ ne peut être facteur d'un autre. C'est donc un code préfixe du $(-\beta)$−shift. Toutefois, ce code n'est pas exhaustif. En effet, un mot périodique de $S_{-\beta}$ s'écrit sous la forme $a_1 \cdots a_s x_1 \cdots x_k b_1 \cdots b_r$ où

$$\begin{aligned} b_1 \cdots b_r a_1 \cdots a_s &\in \Gamma \\ x_1 &\in \Gamma \\ &\vdots \\ x_k &\in \Gamma \end{aligned} \quad \text{(IV.5)} \qquad \text{ou,} \qquad \begin{aligned} b_1 \cdots b_r a_1 \cdots a_s &\in \Delta \\ x_1 &\in \Delta \\ &\vdots \\ x_k &\in \Delta. \end{aligned} \quad \text{(IV.6)}$$

Proposition 28. *Soit β un nombre réel tel que $\beta > 1$. On note $(d_i)_{i\geq 1}$ le $(-\beta)$-développement de l_β, $S_{-\beta}$ le $(-\beta)$-shift associé et $\zeta_{-\beta}$ sa fonction zêta. On suppose que pour tout i, $d_{2i} < d_1$. Alors, si c_n est le nombre de mots de longueur n dans Γ.*

$$\zeta_{-\beta}(z) = \frac{1 - z^2}{(1 - z - z^2)(1 - \sum_{n\geq 1} c_n z^n)}, \tag{IV.7}$$

et

$$\begin{aligned} \zeta_{-\beta}(z) &= \frac{1 + z}{1 - \sum_{n\geq 1} (-1)^n (d_{n-1} - d_n) z^n} \\ &= \frac{1}{1 + \sum_{n\geq 1} (-1)^n (d_n + 1) z^n}. \end{aligned}$$

Preuve

Comme mentionné ci-dessus, les mots périodiques sont des permutations circulaires de produits de pièces contenues soit dans Δ, soit dans Γ. Notons p_n le nombre de mots périodiques de longueur n, $p_{1,n}$ et $p_{2,n}$ ceux satisfaisant IV.4 et IV.5 respectivement. Ainsi, $p_n = p_{1,n} + p_{2,n}$. D'où

$$\begin{aligned}\zeta_{-\beta}(z) &= exp(\sum_{n\geq 1}\frac{p_n}{n}z^n)\\ &= exp(\sum_{n\geq 1}\frac{p_{1,n}}{n}z^n)exp(\sum_{n\geq 1}\frac{p_{2,n}}{n}z^n).\end{aligned}$$

Du **théorème 20**,

$$exp(\sum_{n\geq 1}\frac{p_{1,n}}{n}z^n) = \frac{1}{1-\sum\limits_{n\geq 1}c_n z^n} \tag{IV.8}$$

où c_n désigne le nombre de mots de longueur n dans Γ.

$exp(\sum\limits_{n\geq 1}\frac{p_{2,n}}{n}z^n)$ s'obtient comme dans la preuve du **théorème 20** en remplaçant b_{2i+1} par 1 et b_{2i} par 0 pour tout i. En effet, réintroduisons les notations de la preuve du théorème 19. $\delta_{n,k}$ sera le nombre de mots périodiques de longueur n, permutations circulaires de k pièces appartenant à Δ. D'où,

$$\sum_{n\geq 1}\frac{p_{1,n}}{n}z^n = \sum_{n\geq 1}\frac{\delta_{n,1}}{n}z^n + \cdots + \sum_{n\geq k}\frac{\delta_{n,k}}{n}z^n + \cdots .$$

On considère deux entiers positifs h et p tels que $hp = k$ (p minimal). Ainsi,

$$\delta_{n,k} = \sum_{\substack{(i_1,i_2,\cdots i_p)\\ h\sum_{j=1}^{p} i_j = n\\ ph=k}} (\sum_{j=1}^{p} i_j)(b_{i_1}\cdots b_{i_p})^h$$

avec $b_{2m} = 0$ et $b_{2m+1} = 1$. $b_j = \sharp\Delta \cap A^j$. Comme il n'y a pas de pièce de longueur paire dans Δ et pour tout m , $\sharp\Delta \cap A^{2m+1} = 1$ on a donc

$$\sum_{n\geq k}\frac{\delta_{n,k}}{n}z^n = \frac{1}{k}(\sum_{n\geq 0}z^{2n+1})^k$$

et donc,

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\frac{p_{2,n}}{n}z^n &= \sum_{n\geq 0}z^{2n+1}+\cdots+\frac{1}{k}(\sum_{n\geq 0}z^{2n+1})^k+\cdots\\ &= ln\frac{1}{1-\sum_{n\geq 0}z^{2n+1}}.\end{aligned}$$

Au sens des séries formelles (on se situe dans la boule unité ouverte $B(0,1)$ et mieux, dans la boule fermée $\overline{B}(0,\frac{1}{\beta})$), ceci implique

$$\begin{aligned}exp(\sum_{n\geq 1}\frac{p_{1,n}}{n}z^n) &= \frac{1}{1-\sum_{n\geq 0}z^{2n+1}}\\ &= \frac{1-z^2}{1-z-z^2}.\end{aligned}\tag{IV.9}$$

De IV.8 et IV.9, on a :

$$\zeta_{-\beta}(z)=\frac{1-z^2}{(1-z-z^2)(1-\sum_{n\geq 1}c_nz^n)}.$$

Supposons maintenant $d_{2i}<d_1$ pour tout $i, \forall i\geq 2$

$$\begin{aligned}\Gamma &= \left\{x_1\cdots x_kd_1\cdots d_{n-1}j;(-1)^n(d_n-j)<0, j\neq d_1,(x_1,\cdots,x_k)\in\Delta^k\right\},\\ &= \{d_1\cdots d_{2k_1+1}\cdots d_1\cdots d_{2k_m+1}d_1\cdots d_nj|k_1,\cdots k_m,n\in\mathbb{N}, j\neq d_1\}.\end{aligned}$$

On pose $\Gamma_n=\Gamma\cap A^n$ avec $A=\{0,1,\cdots,\lfloor\beta\rfloor\}.c_n=\sharp\Gamma_n$.

$$\begin{aligned}\Gamma_{2n} &= (d_1\Gamma_{2n-1})\cup\cdots\cup(d_1\cdots d_{2n-3}\Gamma_3)\cup\{d_1\cdots d_{2n-1}j, d_{2n}<j<d_1\},\\ \Gamma_{2n+1} &= (d_1\Gamma_{2n})\cup\cdots\cup(d_1\cdots d_{2n-1}\Gamma_2)\cup\{d_1\cdots d_{2n}j, 0\leq j<d_{2n+1}\}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}c_1 &= \sharp\{j|j<d_1\}=d_1,\\ c_2 &= \sharp\{d_1j|d_2<j<d_1\}=d_1-d_2-1.\end{aligned}$$

Pour $n>1$ on a, $c_{2n}=c_{2n-1}+\cdots c_3+d_1-d_{2n}-1$ et $c_{2n+1}=c_{2n}+\cdots c_2+d_{2n+1}$

ou plus généralement

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2} + (-1)^n(d_{n-2} - d_n).$$

La série $\sum\limits_{n\geq 1} c_n z^n$ a déjà été calculée au chapitre II section 2.1. Nous avons montré (voire II.5) que

$$(1 - z - z^2)(1 - \sum_{n\geq 1} c_n z^n) = (1 - z)(1 - \sum_{n\geq 1}(-1)^n(d_{n-1} - d_n)z^n). \qquad \text{(IV.10)}$$

De IV.6 et IV.10 on obtient le résultat IV.7. ■

2.1.2 Cas où pour un certain $i, d_{2i} = d_1$

On se donne un réel $\beta > 1$ tel que $d(l_\beta, -\beta) = (d_i)_{i\geq 1}$ ne vérifie pas $d_{2i} < d_1$ pour tout i plus grand que 2. En d'autres mots, il existe deux suites $(n_i)_{i\geq 0}$ et $(p_i)_{i\geq 0}$ telles que $p_0 = 0 = n_0$ et

$$(d_i)_{i\geq 1} = d_1 \cdots d_{2n_1-1} d_1 \cdots d_{p_1} d_{2n_1+p_1} \cdots d_{2n_2-1} d_1 \cdots d_{p_2} d_{2n_2+p_2} \cdots . \qquad \text{(IV.11)}$$

Les ensembles $\{d_1 \cdots d_{n-1} j, (-1)^n(d_n - j) < 0, j \neq d_1\}$ sont vides pour $2n_i \leq n \leq 2n_i + p_i - 1$.

Comme dans le paragraphe précédent, on distingue trois types de mots périodiques : les permutations des produits des mots finis du code, les permutations des mots que nous avons appelé les " mauvais mots" et enfin les permutations circulaires de certains produit des pièces $d_1 \cdots d_{2n_i-1}$. Nous réintroduisons les ensembles $\mathfrak{C}$ et Δ (déjà mentionné au chapitre II section 2.1). Δ est l'ensemble des mots suivants :

$$
\begin{array}{ll}
d_1 \cdots d_{2k-1}, & \text{avec } 2n_i + p_i \leq 2k-1 < 2n_{i+1} - 1 \text{ et } n \in \mathbb{N}, \\
d_1 \cdots d_{2n_i-1} d_1 \cdots d_{2k-1}, & \text{avec } 2n_j + p_j \leq 2k-1 < 2n_{j+1} - 1 \text{ et } n_j \geq n_i \\
d_1 \cdots d_{2n_i-1} d_1 \cdots d_{2k-1}, & \text{avec } p_i + 1 \leq 2k-1 < 2n_i - 1 \\
\vdots &
\end{array}
$$

Γ désigne l'ensemble des mots de la forme $d_1 d_2 \cdots d_{k-1} j$ avec $(-1)^k (d_k - j) < 0$ et $j \neq d_1$. Enfin, on a $\mathfrak{C}$ tel que

$$
\mathfrak{C} = \Gamma \bigcup_{\substack{x \in \Delta \\ |x|=1}} x\mathfrak{C}^1 \bigcup_{\substack{x \in \Delta \\ |x|=2}} x\mathfrak{C}^1 \bigcup_{\substack{x \in \Delta \\ |x|=3}} x\mathfrak{C}^1 \cdots \tag{IV.12}
$$

où $\mathfrak{C}^1$ représente l'ensemble des mots du code préfixe $\mathfrak{C}$ de longueurs supérieures ou égales à 2.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{C}^1 &= \{x \in \mathfrak{C}, |x| > 1\} \\
&= \mathfrak{C} \setminus \{x \in \mathfrak{C}, |x| = 1\}.
\end{aligned}
$$

Notons c_n, δ_n et a_n les nombres de mots de longueur n dans $\mathfrak{C}$, Γ et Δ respectivement.

Nous avons posé

$$
A_{(n_i)} = \sum_{k_1 \geq 1} z^{2n_{k_1}-1} (1 - \sum_{k_2 \leq p_{k_1}} z^{2n_{k_2}-1} (1 - \sum_{k_3 \leq p_{k_2}} z^{2n_{k_3}-1} (\cdots))).
$$

Les mots $d_1 \cdots d_{2n_i-1}$ sont périodiques mais tous leurs produits ne le sont pas. Les coefficients de la série $A_{(n_i)}$ comptent les produits périodiques des les pièces de la forme $d_1 d_2 \cdots d_{2n_i-1}$. Les produits de deux pièces $d_1 \cdots d_{2n_i-1} d_1 \cdots d_{2n_j-1}$ ne sont pas périodique si $2n_j - 1$ est inférieur à p_i. Ceci justifie le signe " - " devant la somme sur $k_2 \in J_{k_2}$. Toutefois, la concaténation de ces produits bannis avec $d_1 \cdots d_{2n_k-1}$ donne des pièces périodiques pour certains k tel que $2n_k - 1$ plus petit que p_j (somme sur k_3 dans J_{k_2}), etc. Plus généralement, si $X_{k_i} = d_1 \cdots d_{2n_{k_i}-1}$ et $2n_{k_i} - 1 < p_{k_{i-1}}$,

$X_{k_1}X_{k_2}\cdots X_{k_n}$ n'est pas périodique (respectivement $X_{k_1}X_{k_2}\cdots X_{k_n}$ est périodique) si n paire (respectivement n impair) mais $X_{k_1}X_{k_2}\cdots X_{k_n}X_{k_{n+1}}$ l'est (respectivement ne l'est pas) pour $2n_{k_{n+1}} < p_{k_n}$.

Dans la preuve du **théorème 9**, nous avons montré que

$$(1-\sum_{n\geq 1} a_n z^n)(1-\sum_{n\geq 1} c_n z^n)(1-A_{(n_i)}) = 1+\sum_{n\geq 1}(-1)^n(d_n+1)z^n. \tag{IV.13}$$

- $\dfrac{1}{1-A_{(n_i)}}$ est la fonction zêta de la partie du système ayant pour mots périodiques les produits des séquences $d_1d_2\cdots d_{2n_i-1}$.
- $\dfrac{1}{1-\sum\limits_{n\geq 1} a_n z^n}$ représente la fonction zêta associée à Δ.
- $\dfrac{1}{1-\sum\limits_{n\geq 1} c_n z^n}$ est quant lui la fonction zêta associée à $\mathfrak{C}$.

La fonction zêta du $(-\beta)$-shift est donc donnée par :

$$\zeta_{-\beta}(z) = \frac{1}{1+\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n(d_n+1)z^n}. \tag{IV.14}$$

La preuve du théorème se déduit des sous-sections précédentes.

3 Cas du développement périodique de période paire

Soit β un nombre réel positif plus grand que 1 et $(d_i)_{i\geq 1}$ le $(-\beta)-$développement en $-\dfrac{\beta}{\beta+1}$. On suppose que $(d_i)_{i\geq 1} = \overline{d_1d_2\cdots d_{2p}}$, $2p$ étant la période. Dans ce cas précis nous voyons qu'en plus des mots périodiques définis plus hauts, les permutations des séquences paires $\overline{d_1\cdots d_{2p}}^k$ les sont aussi (avec k dans $\mathbb{N}^*$). Pour chaque entier k, il a $2p$ mots issus de ces permutations.

Lemme 8. *Si $d(l_\beta,-\beta)$ est périodique de période h (avec h minimal), alors $d_h \neq 0$. Donc, $(d_i^*)_{i\geq 1}$ est toujours une suite d'entiers positifs.*

Preuve Supposons $d_h = 0$. Alors, comme $(d_{h+i})_{i\geq 1} = (d_i)_{i\geq 1}$ et

$$T^n_{-\beta}(\frac{-\beta}{\beta+1}) = \sum_{i\geq 1} \frac{d_{n+i}}{(-\beta)^i} \Rightarrow \sum_{i\geq 1} \frac{d_{h+i}}{(-\beta)^i} = \frac{-\beta}{\beta+1};$$

$$\begin{aligned}
d_{h-1} &= \lfloor -\beta T^{h-2}_{-\beta}(-\frac{\beta}{\beta+1}) + \frac{\beta}{\beta+1} \rfloor \\
&= \lfloor d_{h-1} - \frac{1}{\beta} \sum_{i\geq 1} \frac{d_{h+i}}{(-\beta)^i} + \frac{\beta}{\beta+1} \rfloor \\
d_{h-1} &= d_{h-1} + 1.
\end{aligned}$$

Ce qui est absurde. Donc si $d(l_\beta, -\beta)$ est périodique de période h, alors $d_h \neq 0$. ■

La conséquence de ce lemme est que si pour un certain β, le développement en base $-\beta$ de l_β est périodique, la suite d'entiers $(d_{i-1})_{i\geq 1}$ (avec $d_0 = 0$) ne l'est pas. Nous voyons alors que dans le cas d'un développement périodique de période paire, en plus des mots périodiques définis plus hauts, les permutations des séquences de longueurs paires $(d_1 \cdots d_{2p})^k$ le sont aussi (avec k dans $\mathbb{N}^*$). Pour chaque entier k, il y a $2p$ mots issus de ces permutations. D'où le théorème :

Théorème 22. *Soit β un nombre réel strictement plus grand que 1 tel que*

$$d(\frac{-\beta}{\beta+1}, -\beta) = \overline{d_1 d_2 \cdots d_{2p}}.$$

On note $S_{-\beta}$ le $(-\beta)-$shift associé. Alors, la fonction zêta $\zeta_{-\beta}$ de $S_{-\beta}$ est donnée par :

$$\zeta_{-\beta}(z) = \frac{1}{(1-z^{2p})(1+\sum_{n\geq 1}(-1)^n(d_n+1)z^n)}. \tag{IV.15}$$

Preuve

Par rapport au paragraphe précédent, un facteur rentre en compte : les mots périodiques dont l'orbite est $\overline{d_1 d_2 \cdots d_{2p}}$. Nous avons donc :

$$p_n = \begin{cases} p_{1,n} + p_{2,n} & \text{if } 2p \not| n \\ p_{1,n} + p_{2,n} + 2p & \text{if } 2p | n \end{cases}$$

où $p_{1,n}$ et $p_{2,n}$ désigne le nombre de mots de longueur n permutations de produits de pièces du code et des “mauvais mots” respectivement. Ainsi,

$$\zeta_{-\beta}(z) = exp(\sum_{n\geq 1} \frac{p_{1,n}}{n} z^n) exp(\sum_{n\geq 1} \frac{p_{2,n}}{n} z^n) exp(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^{2pn}).$$

D’après le paragraphe précédent,

$$exp(\sum_{n\geq 1} \frac{p_{1,n}}{n} z^n) exp(\sum_{n\geq 1} \frac{p_{2,n}}{n} z^n) = \frac{1}{1 + \sum_{n\geq 1} (-1)^n (d_n + 1) z^n}.$$

Dans le disque unité, $exp(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^{2pn}) = \frac{1}{1 - z^{2p}}$, ce qui donne le résultat. ■

4 Cas d’un développement périodique de période impaire

Soit β un réel plus grand que 1. Nous savons que le $(-\beta)$-shift $S_{-\beta}$ est constitué de mots $(x_i)_{i\geq 1}$ vérifiant :

$$d_1 d_2 \cdots \preceq x_n x_{n+1} \cdots \preceq r_1^* r_2^* \cdots, \forall n \in \mathbb{Z}$$

avec

$$d^*(r_\beta, -\beta) = \begin{cases} \overline{(0, d_1, \cdots, d_{2p-2}, d_{2p-1} - 1)} & \text{si } d(l_\beta, -\beta) = \overline{(d_1, \cdots, d_{2p-1})} \\ (0, d_1, d_2, \cdots) & \text{si non.} \end{cases}$$

Nous allons noter $(d_i^*)_{i\geq 1}$ la suite définie comme suit :

$$(d_i^*)_{i\geq 1} = \begin{cases} \overline{(d_1, \cdots, d_{2p-2}, d_{2p-1} - 1, 0)} & \text{si } d(l_\beta, -\beta) = \overline{(d_1, \cdots, d_{2p-1})} \\ (d_1, d_2, \cdots) & \text{si non.} \end{cases} \tag{IV.16}$$

Cette suite n'est rien d'autre que la limite des développements en base $-\beta$ lorsque l'on tend vers $-\dfrac{\beta}{\beta+1}$ par valeur supérieure. Si $(d_i^*)_{i\geq 1}$ est différent de $(d_i)_{i\geq 1}$, le $(-\beta)$-shift est un système dynamique non-transitif. Ce cas précis est obtenu lorsque $(d_i)_{i\geq 1}$ est périodique de période impaire. On peut alors écrire $S_{-\beta}$ comme réunion de deux ensembles disjoints :

$$S_{-\beta} = S_{-\beta}^* \bigcup < d_1 d_2 \cdots d_{2p-1} >$$

où $2p-1$ est la période, $S_{-\beta}^*$ l'ensemble des mots $(x_i)_{\geq 1}$ tels que

$$d_1^* d_2^* \cdots \preceq x_n x_{n+1} \cdots \preceq 0 d_1^* d_2^* \cdots, \forall n \in \mathbb{Z}$$

et $< d_1 d_2 \cdots d_{2p-1} >$ est un ensemble de mots engendré par la séquence $d_1 \cdots d_{2p-1}$. Ils finissent sous la forme $d_1 \cdots d_{2p-1} d_1 \cdots d_n$ ajouté de leurs permutations. Seuls les produits quelconque de $d_1 \cdots d_{2p-1}$ et leurs permutations sont périodiques.

On suppose dans la suite de ce paragraphe que $(d_i)_{i\geq 1}$ est périodique de période $2p-1$. Alors, $(d_i^*)_{i\geq 1}$ est quant à lui périodique de période $2p$.

Théorème 23. *Soit β un réel strictement plus grand que 1. Si $d(-\frac{\beta}{\beta+1}, -\beta)$ est périodique de période impaire $2p-1$, alors la fonction zêta $\zeta_{-\beta}$ associée au $(-\beta)$-shift est donnée par :*

$$\zeta(z) = \frac{1}{(1 - z^{2p-1})(1 + z^{2p-1})(1 + \sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n (d_n + 1) z^n)}. \tag{IV.17}$$

Preuve

Comme mentionné plus haut, $S_{-\beta}$ est non transitif. Il s'écrit sous forme d'une réunion de deux parties dont l'une est transitive et l'autre engendre par $d_1 \cdots d_{2p-1}$. On a donc :

$$\zeta_{-\beta}(z) = \zeta^*(z) \times \frac{1}{1 - z^{2p-1}},$$

ζ^* étant la fonction zêta de S_β^* et $\dfrac{1}{1 - z^{2p-1}}$ celle de la partie engendrée par $d_1 \cdots d_{2p-1}$. Du paragraphe 3, on a

$$\zeta^*(z) = \frac{1}{(1 - z^{2p})(1 + \sum\limits_{n \geq 1} (-1)^n (d_n^* + 1) z^n)}. \tag{IV.18}$$

Mais compte-tenu de IV.16,

$$1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n (d_n^* + 1) z^n = \frac{1 + z^{2p-1}}{1 - z^{2p}} (1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n (d_n + 1) z^n).$$

Donc

$$\zeta^*(z) = \frac{1}{(1 + z^{2p-1})(1 + \sum\limits_{n \geq 1} (-1)^n (d_n + 1) z^n)}.$$

En multipliant cette expression par $\dfrac{1}{1 - z^{2p-1}}$ on a le résultat IV.17. ■

Remarque 12. *(1) Il est à noter que si β est entier alors le $(-\beta)$-développement de $-\dfrac{\beta}{\beta+1}$ est*

$$d(-\frac{\beta}{\beta + 1}, -\beta) = .\beta\beta\beta \cdots .$$

Il est donc périodique de période impaire 1. Toutefois, le système dynamique engendré est obtenu par la suite $(d_i^*)_{i \geq 1}$ (par convention) qui est alors $\overline{(\beta - 1)0}$.

$$(x_i)_{i \geq 1} \in S_{-\beta} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \overline{(\beta - 1)0} \preceq (x_i)_{i \geq n}.$$

Ainsi, la fonction zêta du système est réduite à ζ^* définie au IV.18.

$$\zeta_{-\beta}(z) = \frac{1}{(1 + z)(1 + \sum\limits_{n \geq 1} (-1)^n (\beta + 1) z^n)}.$$

Et donc, pour β entier supérieur ou égal à 2,

$$\zeta_{-\beta}(z) = \frac{1}{1-\beta z}. \tag{IV.19}$$

(2) Pour tout les cas étudiés, on vérifie que $\frac{1}{\beta}$ est un pôle de la fonction zêta associé au $(-\beta)$-shift.

5 Fonction zêta de la $(-\beta)$-transformation

Soit β un réel strictement plus grand que 1. On rappelle que l'application $T_{-\beta}$ désigne l'application de I_β dans lui-même définie par

$$T_{-\beta} : x \longmapsto -\beta x - \lfloor -\beta x + \frac{\beta}{\beta+1} \rfloor.$$

Par analogie de la fonction zêta $\tilde{\zeta}_{-\beta}$ de la $\beta-$transformation établie par Leopold Flatto et Jeffrey Lagarias, dans cette section nous déterminons la zêta-fonction de la $(-\beta)-$transformation $T_{-\beta}$. Pour ce faire, nous comptons les points fixes des itérées de $T_{-\beta}$. Fixons k dans $\mathbb{N}$. Il est aisé de remarquer que tout points fixe de $T^k_{-\beta}$ a un développement périodique, un mot répété dans cette orbite étant de longueur k. En effet, soit x un point fixe de $T^k_{-\beta}$. Notons $(x_i)_{i\geq 1}$ le $(-\beta)$-développement de x. Il vient que $(x_i)_{i\geq k+1}$ est le développement en base $-\beta$ de $T^k_{-\beta}(x)$. On a

$$T^k_{-\beta}(x) = x \Leftrightarrow (x_i)_{i\geq k+1} = (x_i)_{i\geq 1}$$

puisque le développement est unique. Ce qui traduit la périodicité de $(x_i)_{i\geq 1}$. On l'identifie à $\overline{(x_1, x_2, \cdots x_k)}$.

Théorème 24. *Soit $\overline{(x_1, \cdots, x_k)}$ une orbite périodique du $(-\beta)$-shift $S_{-\beta}$. Alors il existe x tel $(x_i)_{i\geq 1}$ soit son développement ou alors $(x_i)_{i\geq 1}$ décrit la même orbite que $(d^*_i)_{i\geq 1}$ ($(d^*_i)_{i\geq 1}$ étant défini au IV.16).*

Preuve

Nous avons vu qu'un réel x admet plus de deux représentations dans $S_{-\beta}$ si son développement en base $-\beta$ finit par $d(-\frac{\beta}{\beta+1}, -\beta)$. Soit $\overline{(x_1, \cdots, x_k)}$ un mot périodique de $S_{-\beta}$ et x le réel tel que :

$$x = \sum_{i\geq 1} \frac{x_n}{(-\beta)^n}$$

(i) $d(-\frac{\beta}{\beta+1}, -\beta)$ non périodique de période impaire. Alors aucun mots finissant par $d(-\frac{\beta}{\beta+1}, -\beta)$ n'est périodique et ainsi x ne peut admettre qu'au plus une représentation dans $S_{-\beta}$ donc son développement en base $-\beta$.

(ii) $d(-\frac{\beta}{\beta+1}, -\beta)$ périodique de période impaire. Dans ce cas $(d_i^*)_{i\geq 1}$ est aussi périodique.

Si pour tout n, on a $(x_i)_{i\geq n} \neq (d_i)_{i\geq 1}$ et $(x_i)_{i\geq 1} \neq (d_n^*)_{i\geq 1}$ alors x ne peut admettre plus de deux représentations dans $S_{-\beta}$. Donc $(x_i)_{i\geq 1}$ est un $(-\beta)$-développement.

■

La conséquence de ce théorème est que si $d(-\frac{\beta}{\beta+1}, -\beta)$ n'est pas périodique avec une période impaire, la fonction zêta du $(-\beta)$-shift et celle de la $(-\beta)$-transformation sont confondues et vaut donc

$$\tilde{\zeta}_{-\beta}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-z^{2p})(1+\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n(d_n+1)z^n)} & \text{si } d(l_\beta, -\beta) = \overline{(d_1, \cdots, d_{2p})}, \\ \dfrac{1}{1+\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n(d_n+1)z^n} & \text{si } d(l_\beta, -\beta) \text{ non-périodique.} \end{cases} \tag{IV.20}$$

Si $d(l_\beta, -\beta)$ est périodique de période impaire $2p-1$, notons $\tilde{p}_n$ le nombre de points fixes de la n-ième itérée de la $(-\beta)$-transformation alors :

$$\tilde{p}_n = \begin{cases} p_n & \text{if } 2p \not| n, \\ p_n - 2p & \text{if } 2p | n \end{cases}$$

$2p$ désigne le nombre de mots images de $(d_i^*)_{i\geq 1} = \overline{d_1 \cdots d_{2p-2}(d_{2p-1}-1)0}$ par les itérées du décalage (le shift). Donc,

$$\begin{aligned}
\tilde{\zeta}_{-\beta}(z) &= exp(\sum_{n\geq 1}\frac{\tilde{p}_n}{n}z^n) \\
&= exp(\sum_{n\geq 1}\frac{p_n}{n}z^n)\exp(-\sum_{n\geq 1}\frac{z^{2pn}}{n}) \\
&= (1-z^{2p})\zeta_{-\beta}(z)
\end{aligned}$$

Chapitre V

Systèmes de numération

Dans ce chapitre, on étudie des systèmes de numérations associées à des échelles $(H_n)_{n\geq 1}$, où $(|H_n|)_{n\geq 1}$ est une suite strictement croissante de premier terme 1. Les lignes à suivre sont essentiellement inspirées des travaux de Anne Bertrand Mathis (dans [BM89]) et Nathalie Loraud (voire [Lor95]). On s'intéresse plus particulièrement à l'écriture des nombres relatifs au moyen d'une échelle (suite) de numération alternée. Toutefois, on débutera par quelques notions classiques sur les systèmes de numérations associées à des échelles positives.

1 Suite de numération

Soit $H = (H_i)_{i\geq 0}$ une suite strictement croissante dont le premier terme H_0 vaut 1. $(H_i)_{i\geq 0}$ est appelé suite ou echelle de numération. Il est bien connu que tout entier positif N admet un développement unique obtenu par l'algorithme glouton :

$$N = n_k H_k + n_{k-1} H_{k-1} + \cdots + n_1 H_1 + n_0 H_0 \tag{V.1}$$

où la $(n_i)_{i\geq 0}^k$ est telle que $n_k \neq 0$ et pour tout i,

$$n_i H_i + n_{i-1} H_{i-1} + \cdots + n_0 H_0 < H_{i+1}.$$

L'ensemble des suites $(n_k, n_{k-11}, \cdots, n_0)$ ainsi obtenu est appelé langage associé à la suite $(H_i)_{i\geq 0}$. On parlera de β-numération, pour un certain $\beta > 1$ si le langage associé à $(H_i)_{i\geq 1}$ est celui du β-shift. Il est d'ailleurs connu (voire [BM89]) que les conditions suivantes sont telles que (a) implique (b) et (c), (b) et (c) sont équivalentes :

(a) Il existe une base β telle que $L(H)$ est le langage du β-shift, H_n est alors le nombre de mots de longueur n du le langage du β-shift.

(b) Le langage $L(H)$ associé à $H = (H_i)_{i\geq 1}$ est invariant par le décalage σ et pour tout $m_k m_{k-1}\cdots m_0$ dans $L(H)$, $m_k m_{k-1}\cdots m_0 00\cdots 0$ est dans $L(H)$.

(c) Le langage $L(H)$ est associé à un système dynamique d'entropie positive.

Ainsi, chaque réel $\beta > 1$ est associé à une suite de numération. Toutefois, dans certains cas, celle-ci peut ne pas être unique. Ceci fait l'objet de la proposition suivante :

Proposition 29. *Soit β un nombre de Parry simple. Alors, β est associé à deux systèmes de numération.*

Preuve β est nombre de Parry simple signifie que le β-développement de 1 est fini. Soit donc $.t_1t_2\cdots t_m = d_\beta(1)$ et $d^*_\beta(1) = \overline{.t_1t_2\cdots t_{m-1}(t_m-1)}$, les langages $L(d_\beta(1))$ et $L(d^*_\beta)$ ont même entropie. Donc, si d_i et d^*_i est les nombres de mots de longueur i de $L(d_\beta(1))$ et $L(d^*_\beta)$ respectivement. Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{d^*_{n+1}}{d^*_n} = \beta.$$

■

La démonstration figurant dans [BM89] reste valide aussi bien dans le cas de $(d^*_i)_{i\geq 1}$ que $(d_i)_{i\geq 1}$.

Exemple 5. *$\beta = 2$ avec les suites $2\overline{0}$ et $\overline{1}$. Pour $2\overline{0}$, $H_n = 2^{n+1} - 1$; pour $\overline{1}$, on aura $H_n = 2^n$.*

2 Numération en base négative non-entière

2.1 Système de numération

Définition 24. *Soit β un réel strictement plus grand que 1. On appellera système de numération des entiers relatifs en base $-\beta$ la donnée d'une suite **alternée** $(w_n)_{n\geq 1}$*

telle que $w_0 = 1$, $(|w_n|)_{n\geq 1}$ *croit strictement et*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = -\beta.$$

On pose $W = (w_n)_{n\geq 1}$. Pour tout m dans $\mathbb{Z}$, il existe une suite finie d'entiers $(m_i)_{i=0}^{n}$ telle :

$$m = m_n w_n + m_{n-1} w_{n-1} + \cdots + m_0 w_0$$

où les m_i sont donnés par l'algorithme (glouton) suivant :

$$\begin{aligned}
m &= m_n w_n + r_n \text{ et } |r_n| < |w_n| \\
r_n &= m_{n-1} w_{n-1} + r_{n-1} \text{ avec } |r_{n-1}| < |w_{n-1}| \\
r_{n-1} &= m_{n-2} w_{n-2} + r_{n-2} \text{ avec } |r_{n-2}| < |w_{n-2}| \\
&\vdots \\
r_2 &= m_1 w_1 + r_1 \text{ avec } |r_1| < |w_1| \\
r_1 &= m_0 w_0.
\end{aligned}$$

On note J_n l'ensemble des nombres $m_n w_n + \cdots + m_0 w_0$. C'est alors une suite croissante de sous-ensembles de $\mathbb{Z}$.

Si n est impair, $m_n \neq 0, m_n w_n + \cdots + m_0 w_0 < 0$. Si non, $m_n \neq 0, m_n w_n + \cdots + m_1 w_1 + m_0 w_0$ est strictement positif. $J_n \setminus J_{n-1}$ est l'ensemble des nombres $m_n w_n + \cdots + m_0 w_0$ tel que $m_n \neq 0$

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (J_n \setminus J_{n-1}).$$

On appellera langage associé à W, l'ensemble $L(W)$ défini par :

$$L(W) = \{\epsilon_n \epsilon_{n-1} \cdots \epsilon_0 . | \epsilon_n w_n + \cdots + \epsilon_0 w_0 \in J_n, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

2.2 Relation d'ordre sur les mots de $L(W)$

On définit la relation d'ordre alterné sur $L(W)$ comme suit : soit $x_n x_{n-1} \cdots x_1 x_0 \cdot$ et $y_n y_{n-1} \cdots y_1 y_0 \cdot$ deux mots de $L(W)$,

$$x_n x_{n-1} \cdots x_1 x_0 . \prec y_n y_{n-1} \cdots y_1 y_0 . \Leftrightarrow \exists\ k,\ |\ x_i = y_i\ \forall i > k \text{ et } (-1)^k (x_k - y_k) < 0\ . \tag{V.2}$$

ou alors, si considère plutôt les mots $x_1 x_2 \cdots x_n .$ et $y_1 y_2 \cdots y_n \cdot$,

$$x_0 x_1 \cdots x_{n-1} x_n \cdot \prec y_0 y_1 \cdots y_{n-1} y_n \cdot \Leftrightarrow \exists\ k,\ |\ x_i = y_i\ \forall i < k \text{ et } (-1)^{n-k} (x_k - y_k) < 0\ .$$

Ceci ne change rien en la définition de la relation d'ordre alterné introduite dans le chapitre 1. En effet, dans ce chapitre, nous avons vu que pour deux suites $(x_i)_{i \geq}$ et $(y_i)_{i \geq 1}$ sur un certain alphabet, $(x_i)_{i \geq 1} \prec (y_i)_{i \geq 1}$ s'il existe un indice k tel que $x_i = y_i$ pour i plus petit que k et $(-1)^k (x_k - y_k) < 0$. Regardons plus précisément ce qui en ai des suites bi-infinies.

$$(x_{-n}, x_{-n+1}, \cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots) \prec (y_{-n}, y_{-n+1}, \cdots, y_{-1}, y_0, y_1, \cdots).$$

On suppose que l'indice à partir duquel les deux suites diffèrent est négatif, disons $-k$, alors $x_{-i} = y_{-i}$ pour $-i < -k$ et $(-1)^{-k} (x_{-k} - y_{-k}) < 0$. Changeons l'indexation en posant :

$$\begin{aligned} x' &= (x'_n, x'_{n-1}, \cdots, x'_1, x'_0, x'_{-1}, x'_{-2}, \cdots) = (x_{-n}, x_{-n+1}, \cdots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \cdots) \\ y' &= (y'_n, y'_{n-1}, \cdots, y'_1, x'_0, y'_{-1}, y'_{-2}, \cdots) = (y_{-n}, x_{-n+1}, \cdots, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \cdots). \end{aligned}$$

En comparant x' et y', on retrouve la relation d'ordre alterné sur $L(W)$ donnée en **V.1**. En fait, le langage $L(W)$ est contenu dans l'ensemble des concaténations unilatérales gauche. Ceci justifie la présence d'un point à la fin de chaque séquence finie. Dans la suite nous pouvons donc omettre cette notation s'il n'y a pas d'ambiguïté. C'est-à-dire, pour un mot $x_1 x_2 \cdots x_n \cdot$ de $L(W)$, nous écrirons $x_1 x_2 \cdots x_n$ (sans point à la fin).

On peut ainsi comparer les mots non seulement de même longueur mais aussi ceux de longueurs différentes en ajoutant un nombre de zéros convenable à gauche du mot ayant la plus petite longueur.

Exemple 6.

$$2013. \prec 1013. \prec 13. \prec 0. \prec 3. \prec 103.$$

En ajoutant des zéros à gauche, on a :

$$2013. \prec 1013. \prec 0013. \prec 0000. \prec 0003. \prec 0103.$$

2.3 Caractérisation des systèmes de numération

On note T_n l'ensemble des mots de $L(W)$ de longueur inférieure ou égale à n ne commençant pas par 0. Le cardinal de T_n est alors fini. Ainsi, au sens de la relation d'ordre alterné, T_n admet un plus petit et un plus grand élément.

Théorème 25. *Soient $\beta > 1$ et $W = (w_n)_{n\geq 0}$ un système de numération des entiers relatifs en base $-\beta$. On suppose que le langage $L(W)$ associé est celui d'un système dynamique. Il existe alors un mot de Lyndon $(a_i)_{i\geq 1}$ tel que $L(W)$ est le langage du système de Lyndon associé à $(a_i)_{i\geq 1}$. $(|w_n|)_{n\geq 0}$ est alors la suite $(H_n)_{n\geq 0}$ donnée au chapitre 1 obtenue par la récurrence :*

$$H_n = \sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k(d_{k-1} - d_k)H_{n-k} + 1.$$

Il y a donc un unique système de numération associé à $-\beta$ lorsque β n'est associé à aucun Lyndon faible (un mot de Lyndon périodique) et une infinité si non.

Proposition 30. *Si $L(W)$ est factoriel et prolongeable, alors il existe une suite bornée $(a_i)_{i\geq 1}$ telle que pour tout n, $a_1a_2\cdots a_{2n+1}$ est le plus grand mot au sens de la relation d'ordre alterné de longueur $2n+1$ et $a_1a_2\cdots a_{2n}$ est le plus petit mot de longueur $2n$.*

Preuve On pose :

$a_{2n}^{2n+1}a_{2n-1}^{2n+1}\cdots a_1^{2n+1}a_0^{2n+1}$ le plus grand mot de $L(W)$ de longueur $2n+1$,
$a_{2n-1}^{2n}a_{2n-2}^{2n}\cdots a_1^{2n}a_0^{2n}$ le plus petit mot de $L(W)$ de longueur $2n$.

Soit $x_1\cdots x_n \in L(W)$

$$L(W) \text{ factoriel } \Longrightarrow \forall x_i, x_i \in \{0\} \cup T_1$$

x_i est aussi un mot de longueur 1. C'est-à-dire $|x_i w_0| = x_i < |w_1|$. Donc, pour tout mot $x_1\cdots x_n$ de $L(W)$, la suite $(x_i)_{i=1}^n$ est bornée.

Soit $a_1 = a_0^1$ le sup de T_1. Alors, $Card(T_1) = a_1 + 1$. Ceci signifie aussi que $L(W)$ est un langage sur l'alphabet fini $\{0, 1, \cdots, a_1\}$.

$a_1^2a_0^2$ est le plus petit mot dans $L(W)$ de longueur 2.

$L(w)$ prolongeable (et $\sigma-$ invariant, où σ est le décalage) implique qu'il existe α dans l'alphabet $\{0, 1, \cdots, a_1\}$ tel que $a_1\alpha \in L(W)$.

$a_1^2a_0^2 \in L(W)$ et $a_1^2a_0^2 \preceq a_1\alpha$. D'où $(-1)(a_1^2 - a_1) \leq 0$
Mais $a_1^2 \in L(W) \Rightarrow a_1 \geq a_1^2$. Donc $a_1 = a_1^2$
On pose $a_0^2 = a_2$. On a $(-1)^2(a_2 - \alpha) \leq 0 \Rightarrow a_2 \leq \alpha$.

De même $a_1a_2 \in L(W) \Rightarrow \exists\alpha \in L(W), |\alpha| = 1$ tel que $a_1a_2\alpha \in L(W)$
$a_2^3a_1^3a_0^3$ est le plus grand mot dans $L(W)$ de longueur 3. Donc

$$a_1a_2\alpha \preceq a_2^3a_1^3a_0^3$$

$$\begin{aligned} a_2^3a_1^3 \in L(W) &\Rightarrow a_1a_2 \preceq a_2^3a_1^3 \\ &\Rightarrow a_1a_2 = a_2^3a_1^3 \end{aligned}$$

On pose $a_0^3 = a_3$

Supposons $a_1\cdots a_k$ le début du plus grand (resp. plus petit) mot de longueur k, avec k impair (resp. k pair).

Si $a_1\cdots a_k \neq a_k^{k+1}\cdots a_1^{k+1}$, alors il existe p, $1\leq p\leq k$ tel que :

$$a_i = a_{k-i+1} \text{ pour } i<p \text{ et } a_p \neq a_{k+1-p}^{k+1}$$

$$\exists \alpha \in L(W), |\alpha| = 1 \text{ tel que } a_1\cdots a_k\alpha \in L(W)$$

$a_k^{k+1}\cdots a_0^{k+1}$ est le plus petit (resp. plus grand) mot de $L(W)$ de longueur $k+1$. Donc

$$(-1)^p(a_{k+1-p}^{k+1} - a_p) < 0$$

$a_k^{k+1}\cdots a_1^{k+1} \in L(W)$ et $a_1\cdots a_k$ le plus grand (resp. plus petit) mot de longueur k. On a donc :

$$(-1)^p(a_{k+1-p}^{k+1} - a_p) > 0$$

ce qui est absurde. Donc

$$a_k^{k+1}\cdots a_1^{k+1} = a_1\cdots a_k \text{ et on pose } a_0^{k+1} = a_{k+1}.$$

On construit ainsi une suite $(a_i)_{i\geq 1}$ tel que pour tout $n, a_1\cdots a_{2n+1}$ est le plus grand mot de longueur $2n+1$ et $a_1\cdots a_{2n}$ le plus petit mot de longueur $2n$ ■

Si on note $t_{2n-1}^{2n}\cdots t_0^{2n}$ le plus grand mot de $L(W)$ de longueur $2n$ et $t_{2n}^{2n+1}\cdots t_0^{2n+1}$ le plus petit mot de $L(W)$ de longueur $2n+1$ par un raisonnement analogue à celui mené sur la suite $(a_i)_{i\geq 1}$, on montre également que $t_{n-1}^n\cdots t_0^n$ est le début du mot $t_n^{n+1}\cdots t_0^{n+1}$. On obtient une suite $(t_i)_{i\geq 1}$ telle que $t_1\cdots t_{2n}$ est le plus grand mot dans $L(W)$ de longueur $2n$ et $t_1\cdots t_{2n+1}$ est le plus petit mot dans $L(W)$ de longueur $2n+1$ avec

$$t_1\cdots t_{2n}. \preceq 0a_1\cdots a_{2n-1}. \text{ et } 0a_1\cdots a_{2n} \preceq t_1\cdots t_{2n+1}.$$

Dans la suite, f désigne l'application de $L(W)$ dans $\mathbb{Z}$ qui à un mot $x_nx_{n-1}\cdots x_0$. on associe $x_nw_n + x_{n-1}w_{n-1} + \cdots + x_0w_0$.

$$\begin{aligned} f : L(W) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x_n\cdots x_0 &\longmapsto x_nw_n + \cdots + x_0w_0. \end{aligned}$$

Proposition 31. *L'application f est croissante au sens de la relation d'ordre alterné.*

$$x_n x_{n-1} \cdots x_1 x_0. \prec y_n y_{n-1} \cdots y_1 y_0. \Rightarrow f(x_n x_{n-1} \cdots x_1 x_0.) < f(y_n y_{n-1} \cdots y_1 y_0.).$$

Preuve

- $x_0 \prec y_0 \Rightarrow x_0 w_0 < y_0 w_0$. C'est vrai pour $n = 0$. Supposons-le à l'ordre k.
- Supposons $x_{k+1} x_k \cdots x_1 x_0. \prec y_{k+1} y_k \cdots y_1 y_0$. Si $x_{k+1} = y_{k+1}$, c'est fini puisqu'on aurait $x_k \cdots x_1 x_0 \prec y_k \cdots y_1 y_0$.

  Si $(-1)^{k+1}(x_{k+1} - y_{k+1}) < 0$, on a nécessairement :

$$|f(x_k \cdots x_0) - f(y_k \cdots y_0)| \leq |f(a_1 \cdots a_{k+1}) - f(a_1 \cdots a_k)|$$

Par ailleurs,

$$1a_1 \cdots a_{k+1}. \prec 11a_1 \cdots a_k. \prec 00a_1 \cdots a_k \text{ si } k \text{ est pair}$$

cette realtion implique que :

$$f(a_1 \cdots a_{k+1}.) - f(a_1 \cdots a_k.) \leq -w_{k+1}.$$

Aussi

$$00a_1 a_2 \cdots a_k. \prec 11a_1 \cdots a_k \prec 1a_1 \cdots a_{k+1} \text{ si } k \text{ est impair}$$

ce qui implique que :

$$f(a_1 \cdots a_{k+1}.) - f(a_1 \cdots a_k.) \geq -w_{k+1}.$$

C'est-à-dire :

$$|f(a_1 \cdots a_{k+1}) - f(a_1 \cdots a_1)| \geq |w_{k+1}|.$$

D'où

$$f(x_{k+1} x_k \cdots x_1 x_0) \leq f(y_{k+1} y_k \cdots y_1 y_0)$$

■

Nous admettons la surjectivité de l'application f. Elle a été montrée par Anne Bertrand dans «How to write relative integers in a negative real bases, preprint». La preuve est valide pour n'importe quel mot de Lyndon.

Grâce à la proposition ainsi établie, on détermine w_n. Si $t_1 \cdots t_{2n}$ est le plus grand mot de $L(W)$ de longueur $2n$. $f(t_1 \cdots t_{2n}) + 1$ est l'image du plus petit mot de $T_{2n+1} \setminus T_{2n}$ et donc l'image de $1a_1 \cdots a_{2n}$. Ainsi :

$$t_1 w_{2n-1} + t_2 w_{2n-2} + \cdots + t_{2n} + 1 = w_{2n} + a_1 w_{2n-1} + \cdots + a_{2n} w_0$$

$$w_{2n} = (t_1 - a_1)w_{2n-1} + (t_2 - a_2)w_{2n-2} + \cdots + (t_{2n} - a_{2n})w_0 + 1$$
$$w_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} (t_i - a_i) w_{2n-i} + 1.$$

De même, $t_1 \cdots t_{2n+1}$ est le plus petit mot dans $L(W)$ de longueur $2n + 1$. $f(t_1 \cdots t_{2n+1}) - 1$ est l'image par f du plus grand mot dans $T_{2n+2} \setminus T_{2n}$ qui est $1a_1 \cdots a_{2n+1}$ et donc

$$t_1 w_{2n} + \cdots + t_{2n+1} w_0 - 1 = w_{2n+1} + a_1 w_{2n} + a_2 w_{2n-1} + \cdots + a_{2n+1} w_0.$$

C'est-à-dire :

$$w_{2n+1} = (t_1 - a_1)w_{2n} + (t_2 - a_2)w_{2n-1} + \cdots + (t_{2n+1} - a_{2n+1})w_0 - 1,$$

$$w_{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n+1} (t_i - a_i) w_{2n+1-i} - 1$$

ou alors, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$w_n = \sum_{i=1}^{n} (t_i - a_i) w_{n-i} + (-1)^n.$$

Comme $|w_n| = (-1)^n w_n$, on a :

$$|w_n| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (t_i - a_i)|w_{n-i}| + 1.$$

Nous avons vu que pour tout $x_1 \cdots x_{2n}$ dans $L(W)$

$$a_1 \cdots a_{2n} \preceq x_1 \cdots x_{2n} \preceq t_1 \cdots t_{2n},$$

$$\forall x_1 \cdots x_{2n+1} \in L(W), t_1 \cdots t_{2n+1} \preceq x_1 \cdots x_{2n+1} \preceq a_1 \cdots a_{2n+1}$$

Par construction, tout sous-mot d'un mot de $L(W)$ est encore $L(W)$. En particulier, toute séquence de $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est dans $L(W)$.

En considérant la relation d'ordre $\preceq$ au sens d'Ito et Sadahiro (unilatéral droit), on a

$$\forall n, (a_i)_{i \geq 1} \preceq (a_i)_{i \geq n+1} \preceq (t_i)_{i \geq 1} \preceq (0, a_1, a_2, \cdots)$$

En effet, s'il existe n tel que la relation ne soit pas vraie, on aurait :

$$(a_i)_{i \geq n+1} \prec (a_i)_{i \geq 1} \text{ ou } (t_i)_{i \geq 1} \prec (a_i)_{i \geq n+1} \text{ (au sens d'Ito et Sadahiro)}$$

Il existerait alors k tel que :

$$\forall i < k,\ a_i = a_{n+i} \text{ et } (-1)^k (a_{n+k} - a_k) < 0$$

$$\begin{aligned} \text{Mais } a_1 \cdots a_n a_{n+1} \cdots a_{n+k} \in L(W) &\Rightarrow a_{n+1} \cdots a_{n+k} \in L(W) \\ &\Rightarrow (-1)^k (a_{n+k} - a_k) < 0 \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Par un raisonnement analogue on montre qu'on ne peut avoir $(a_{i+n})_{i \geq 1} \succ (t_i)_{i \geq 1}$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (a_i)_{i \geq 1} \preceq (a_i)_{i \geq n} \preceq (t_i)_{i \geq 1} \text{ ($\preceq$ au sens d'Ito et Sadahiro)}$$

$(a_i)_{i \geq 1}$ est alors un mot de Lyndon pour la relation d'ordre alternée associé à β et $L(W)$ est le langage associé au système de Lyndon généré. Son entropie sera donc $\log \beta$.

Bibliographie

[AAB+95] Jean-Paul Allouche, André Arnold, Jean Berstel, Srečko Brlek, William Jockusch, Simon Plouffe, and Bruce E. Sagan. A relative of the Thue-Morse sequence. *Discrete Math.*, 139(1-3) :455–461, 1995. Formal power series and algebraic combinatorics (Montreal, PQ, 1992).

[AAS06] Gabrielle Allouche, Jean-Paul Allouche, and Jeffrey Shallit. Kolam indiens, dessins sur le sable aux îles Vanuatu, courbe de Sierpiński et morphismes de monoïde. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 56(7) :2115–2130, 2006. Numération, pavages, substitutions.

[ABF05] Shigeki Akiyama, Frédérique Bassino, and Christiane Frougny. Arithmetic Meyer sets and finite automata. *Inform. and Comput.*, 201(2) :199–215, 2005.

[Aki99] Shigeki Akiyama. Self affine tiling and Pisot numeration system. In *Number theory and its applications (Kyoto, 1997)*, volume 2 of *Dev. Math.*, pages 7–17. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[AM65] M. Artin and B. Mazur. On periodic points. *Ann. of Math. (2)*, 81 :82–99, 1965.

[AS98] Shigeki Akiyama and Taizo Sadahiro. A self-similar tiling generated by the minimal Pisot number. In *Proceedings of the 13th Czech and Slovak International Conference on Number Theory (Ostravice, 1997)*, volume 6, pages 9–26, 1998.

[Ber77] Anne Bertrand. Développements en base de Pisot et répartition modulo 1. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 285(6) :A419–A421, 1977.

[Ber79] Anne Bertrand. Répartition modulo 1 et développement en base θ. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 289(1) :A1–A4, 1979.

[Ber88] Anne Bertrand. Ensembles intersectifs et récurrence de Poincaré. In *Colloque de Théorie Analytique des Nombres "Jean Coquet" (Marseille, 1985)*, volume 88 of *Publ. Math. Orsay*, pages 55–72. Univ. Paris XI, Orsay, 1988.

[Ber91] Anne Bertrand. Nombres de Perron et problèmes de rationnalité. *Astérisque*, (198-200) :67–76 (1992), 1991. Journées Arithmétiques, 1989 (Luminy, 1989).

[BH86] F. Blanchard and G. Hansel. Systèmes codés. *Theoret. Comput. Sci.*, 44(1) :17–49, 1986.

[Bla89] F. Blanchard. β-expansions and symbolic dynamics. *Theoret. Comput. Sci.*, 65(2) :131–141, 1989.

[BM86] Anne Bertrand-Mathis. Développement en base θ ; répartition modulo un de la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$; langages codés et θ-shift. *Bull. Soc. Math. France*, 114(3) :271–323, 1986.

[BM88] Anne Bertrand-Mathis. Points génériques de Champernowne sur certains systèmes codes ; application aux θ-shifts. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 8(1) :35–51, 1988.

[BM89] Anne Bertrand-Mathis. Comment écrire les nombres entiers dans une base qui n'est pas entière. *Acta Math. Hungar.*, 54(3-4) :237–241, 1989.

[BM95] Anne Bertrand-Mathis. Nombres normaux dans diverses bases. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 45(5) :1205–1222, 1995.

[BM96] Anne Bertrand-Mathis. Nombres normaux. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 8(2) :397–412, 1996.

[BM97] Anne Bertrand-Mathis. Ensembles normaux relatifs à des matrices non-commutantes. *J. Number Theory*, 63(1) :180–190, 1997.

[BM98a] Anne Bertrand-Mathis. Sur les mesures simultanément invariantes pour les transformations $x \to \{\lambda x\}$ et $x \to \{\beta x\}$. *Acta Math. Hungar.*, 78(1-2) :71–78, 1998.

[BM98b] Anne Bertrand-Mathis. Sur les nombres normaux liés à des bases non équivalentes. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 18(1) :89–93, 1998.

[BM99] Anne Bertrand-Mathis. Codage des endomorphismes de Pisot du tore $[0, 1[^r$ et mesures simultanément invariantes pour deux homomorphismes du tore. *Math. Z.*, 231(2) :369–381, 1999.

[BM07] Anne Bertrand-Mathis. Traces of algebraic integers and dynamical systems. *Discrete Math.*, 307(17-18) :2176–2186, 2007.

[BM12] Anne Bertrand-Mathis. Nombres de Pisot, matrices primitives et bêta-conjugués. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 24(1) :57–72, 2012.

[BMP97] G. Brown, W. Moran, and A. D. Pollington. Normality with respect to powers of a base. *Duke Math. J.*, 88(2) :247–265, 1997.

[Bro75] Gavin Brown. Riesz products and generalized characters. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 30 :209–238, 1975.

[BS05] Valérie Berthé and Anne Siegel. Tilings associated with beta-numeration and substitutions. *Integers*, 5(3) :A2, 46, 2005.

[Cés72] Yves Césari. Sur un algorithme donnant les codes bipréfixes finis. *Math. Systems Theory*, 6 :221–225, 1972.

[CS01] Vincent Canterini and Anne Siegel. Automate des préfixes-suffixes associé à une substitution primitive. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 13(2) :353–369, 2001.

[DGS76] Manfred Denker, Christian Grillenberger, and Karl Sigmund. *Ergodic theory on compact spaces.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 527. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[DT89] Jean-Marie Dumont and Alain Thomas. Systemes de numeration et fonctions fractales relatifs aux substitutions. *Theoret. Comput. Sci.*, 65(2) :153–169, 1989.

[Dub06] Artūras Dubickas. On the distance from a rational power to the nearest integer. *J. Number Theory*, 117(1) :222–239, 2006.

[Dub07] Artūras Dubickas. On a sequence related to that of Thue-Morse and its applications. *Discrete Math.*, 307(9-10) :1082–1093, 2007.

[Fis75] Roland Fischer. Sofic systems and graphs. *Monatsh. Math.*, 80(3) :179–186, 1975.

[FL09] Christiane Frougny and Anna Chiara Lai. On negative bases. In *Developments in language theory*, volume 5583 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 252–263. Springer, Berlin, 2009.

[FLP94] Leopold Flatto, Jeffrey C. Lagarias, and Bjorn Poonen. The zeta function of the beta transformation. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 14(2) :237–266, 1994.

[Fra85] Aviezri S. Fraenkel. Systems of numeration. *Amer. Math. Monthly*, 92(2) :105–114, 1985.

[Fra98] Aviezri S. Fraenkel. Heap games, numeration systems and sequences. *Ann. Comb.*, 2(3) :197–210, 1998.

[Fro99] Christiane Frougny. On-line finite automata for addition in some numeration systems. *Theor. Inform. Appl.*, 33(1) :79–101, 1999.

[Gar62] Adriano M. Garsia. Arithmetic properties of Bernoulli convolutions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 102 :409–432, 1962.

[Gór07] Paweł Góra. Invariant densities for generalized β-maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 27(5) :1583–1598, 2007.

[HK65] H. Helson and J.-P. Kahane. A Fourier method in diophantine problems. *J. Analyse Math.*, 15 :245–262, 1965.

[Hol98] M. Hollander. Greedy numeration systems and regularity. *Theory Comput. Syst.*, 31(2) :111–133, 1998.

[IS09] Shunji Ito and Taizo Sadahiro. Beta-expansions with negative bases. *Integers*, 9 :A22, 239–259, 2009.

[KMF78] T. Kamae and M. Mendès France. van der Corput's difference theorem. *Israel J. Math.*, 31(3-4) :335–342, 1978.

[Lag99] Jeffrey C. Lagarias. Number theory zeta functions and dynamical zeta functions. In *Spectral problems in geometry and arithmetic (Iowa City, IA, 1997)*, volume 237 of *Contemp. Math.*, pages 45–86. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[Lag01] Jeffrey C. Lagarias. On the normality of arithmetical constants. *Experiment. Math.*, 10(3) :355–368, 2001.

[LM95] Douglas Lind and Brian Marcus. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Lor95] Nathalie Loraud. β-shift, systèmes de numération et automates. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 7(2) :473–498, 1995.

[LS12] Lingmin Liao and Wolfgang Steiner. Dynamical properties of the negative beta-transformation. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 32(5) :1673–1690, 2012.

[LW96] Jeffrey C. Lagarias and Yang Wang. Self-affine tiles in $\mathbf{R}^n$. *Adv. Math.*, 121(1) :21–49, 1996.

[Mey69] Yves Meyer. Nombres de Pisot, nombres de Salem et répartition modulo 1. In *Séminaire Delange-Pisot-Poitou : 1968/69, Théorie des Nombres*, pages Fasc. 1, Exp. 2, 6. Secrétariat mathématique, Paris, 1969.

[Mic76] P. Michel. Stricte ergodicité d'ensembles minimaux de substitution. In *Théorie ergodique (Actes Journées Ergodiques, Rennes, 1973/1974)*, pages 189–201. Lecture Notes in Math., Vol. 532. Springer, Berlin, 1976.

[MP97] William Moran and Andrew D. Pollington. The discrimination theorem for normality to non-integer bases. *Israel J. Math.*, 100 :339–347, 1997.

[NZ51] Ivan Niven and H. S. Zuckerman. On the definition of normal numbers. *Pacific J. Math.*, 1 :103–109, 1951.

[Par60] W. Parry. On the β-expansions of real numbers. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 11 :401–416, 1960.

[Par64] William Parry. Intrinsic Markov chains. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 112 :55–66, 1964.

[Pet89] Catherine Petuaud. Entropie topologique des systèmes spécifiés. *Theoret. Comput. Sci.*, 67(1) :121–128, 1989.

[Que79] M. Queffelec. Sur la singularité des produits de Riesz et des mesures spectrales associées à la somme des chiffres. *Israel J. Math.*, 34(4) :337–342 (1980), 1979.

[Rau82] G. Rauzy. Nombres algébriques et substitutions. *Bull. Soc. Math. France*, 110(2) :147–178, 1982.

[Rén57] A. Rényi. Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 8 :477–493, 1957.

[Sch80] Klaus Schmidt. On periodic expansions of Pisot numbers and Salem numbers. *Bull. London Math. Soc.*, 12(4) :269–278, 1980.

[Sig74] Karl Sigmund. On dynamical systems with the specification property. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 190 :285–299, 1974.

[Sig76] Karl Sigmund. Nombres normaux et théorie ergodique. In *Théorie ergodique (Actes Journées Ergodiques, Rennes, 1973/1974)*, pages 202–215. Lecture Notes in Math., Vol. 532. Springer, Berlin, 1976.

[Smo71] Meir Smorodinsky. *Ergodic theory, entropy.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 214. Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[Ste13] Wolfgang Steiner. Digital expansions with negative real bases. *Acta Math. Hungar.*, 139(1-2) :106–119, 2013.

[Tak83] Yōichirō Takahashi. Shift with orbit basis and realization of one-dimensional maps. *Osaka J. Math.*, 20(3) :599–629, 1983.

[Tak85] Yōichirō Takahashi. Correction to : "Shift with orbit basis and realization of one-dimensional maps". *Osaka J. Math.*, 22(3) :637, 1985.

Titre : Étude de la dynamique symbolique des développements en base négative, système de Lyndon

Ce travail est consacré à l'étude de systèmes de Lyndon (pour la relation d'ordre alterné) et à la dynamique symbolique des développements des nombres en base négative. Pour un réel $\beta > 1$ fixé, nous construisons un code préfixe récurrent positif permettant non seulement de montrer l'intrinsèque ergodicité du $-\beta$-shift mais aussi de déterminer la fonctions zêta qui lui est associée. Nous étudions les conditions pour lesquelles le $-\beta$-shift possède la spécification.

En outre, lorsque β est strictement plus petit que le nombre d'or, le langage du $-\beta$-shift admet des mots intransitifs. Cet état de fait engendre dans le système dynamique des cylindres négligeables par rapport à la mesure d'entropie maximale. Ces cylindres génèrent sur $I_\beta = [-\frac{\beta}{\beta+1}, \frac{1}{\beta+1}[$ de petits intervalles de mesure nulle (la mesure considérée étant l'unique mesure ergodique sur I_β). Nous en faisons une étude détaillée, en particulier nous déterminons ces intervalles " trous".

Par ailleurs, Nous étudions l'unicité des systèmes de numération des entiers relatifs en base négative et nous montrons qu'à chaque mot de Lyndon correspond un tel système.

Mots clés : Théorie ergodique, développement en base négative, systèmes dynamiques codés, fonction zêta, dynamique symbolique, système de Lyndon, numération

Title : Study of the symbolic dynamics of expansions in negative base, Lyndon system

This work deals with the study of the Lyndon systems (for alternate order) and the symbolic dynamics of the expansions of real numbers in negative base. For a given real $\beta > 1$, we show the intrinsic ergodicity of the $-\beta$-shift using a positive recurring prefix code and we determine the associated zeta function. We study the conditions for which the $-\beta$-shift admits the specification property.

Moreover, when β is less than golden ratio, the language of the $-\beta$-shift contains intransitive words. These words lead to some cylinders negligible with respect to the measure with maximal entropy. In the interval $I_\beta = [-\frac{\beta}{\beta+1}, \frac{1}{\beta+1}[$, these cylinders correspond to some gaps : small interval with measure zero (with respect to the unique ergodic measure on I_β). We make a detailed study of these gaps.

Otherwise, we study the uniqueness of the number systems of integers in negative base and we show that to each Lyndon word corresponds to a such system.

Keywords : Ergodic theory, expansion in negative base, coded dynamical systems, symbolic dynamics, Lyndon system, numeration