



THÈSE

Présentée par Hassen TRABELSI

pour l'obtention du
GRADE DE DOCTEUR

École Doctorale : École Centrale Paris (ED287) \ École Nationale d'ingénieur de Sfax

Spécialité : Sciences pour l'ingénieur

Laboratoire d'accueil : LISMMA (EA2336) \ U2MP

Contribution à la prise en compte d'exigences dynamiques en conception préliminaire de systèmes complexes

Soutenue le : 16/01/2014

Devant un jury composé de :

M. YANNOU Bernard	Professeur des Universités	ECP	Président de jury
M. SEBASTIAN Patrick	Maître de conférences HDR	Université de Bordeaux	Rapporteur
M. CHELBI Anis	Professeur des Universités	ESSTT	Rapporteur
M. YVARS Pierre-Alain	Maître de conférences HDR	SUPMECA	Directeur de thèse
M. HADDAR Mohamed	Professeur des Universités	ENIS	Directeur de thèse
M. LOUATI Jamel	Professeur des Universités	ENIS	Co-encadrant
M. ZIMMER Laurent	Ingénieur	Dassault Aviation	Invité
M. ABBES Mohamed Slim	Professeur des Universités	ENIS	Invité

N° 2014ECAP0006

Remerciements

Ce mémoire présente les travaux de recherche effectués au cours de ma thèse de doctorat en co-tutelle entre l'école nationale d'ingénieur de Sfax au sein de l'unité de recherche de Mécanique, Modélisation et Productique(U2MP) et l'institut supérieur de mécanique de Paris (SupMeca) au sein du Laboratoire d'ingénierie des Systèmes mécaniques et des matériaux(LISMMA). C'est avec un grand plaisir que je réserve ces quelques lignes en signe de gratitude et de reconnaissance à tous ceux qui ont contribué à l'élaboration de cette thèse de doctorat.

Je remercie dans un premier temps, M. Mohamed HADDAR ainsi que tous les membres de l'unité de mécanique, modélisation et production. Je lui exprime ma profonde gratitude pour sa haute compétence, il m'a initié à la recherche et m'a appris la rigueur scientifique. Je remercie chaleureusement mon directeur de thèse, M. Pierre-Alain YVARS de m'avoir accueilli dans son équipe de recherche. Je lui témoigne toute ma reconnaissance pour les conseils qu'il m'a prodigués au cours de ces trois années, pour les nombreuses et fructueuses discussions que nous avons eues et pour m'avoir accordé sa confiance pour travailler à ses côtés. Je tiens également à remercier sincèrement mon encadreur de thèse, Monsieur Jamel LOUATI, pour m'avoir soutenu et encouragé durant l'ensemble de mes travaux de recherche. En outre, je tiens à les remercier tous les trois pour la qualité et l'intensité de leur encadrement.

Je remercie également M. Jean-Yves CHOLEY et M. Alain RIVIERE de m'avoir accueilli dans le laboratoire LISMMA. J'adresse également mes chaleureux remerciements à Mme Christel COMPAGNON et aux membres de LISMMA, qui ont contribué chacun à sa façon, et toujours dans la bonne humeur au bon déroulement de cette thèse. Comme je tiens à remercier mes amis, parmi lesquels je remercierai plus particulièrement Hanen JRAD, Ayedi MOHAMED, Fathi DJAMEL, Hammadi MONCEF, Vincent LARROUDE et Patrice LECLAIRE.

Je remercie M. Bernard YANNOU, Professeur des Universités à l'École Centrale de Paris, qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

J'adresse aussi mes remerciements à M. Patrick SEBASTIAN, Maître de conférence *HDR*, à l'université Bordeaux1 et M. Anis CHELBI, Professeur de l'enseignement supérieur à l'école nationale supérieure des ingénieurs de Tunis d'avoir accepté la lourde tâche de rapporteur.

Je tiens à remercier et exprimer mon profond respect aux autres membres du jury, à sa-

voir : M. Mohamed Slim ABBES et M, Laurent ZIMMER qui ont bien voulu accepter d'évaluer ce travail.

Enfin, je tiens à remercier profondément ma famille pour l'énorme amour qu'elle me porte. Mon cher père, était et restera pour toujours mon honorable exemple dans la vie. Ma mère, qui ne cesse de m'offrir tant d'affection et de dévouement, a su m'apporter tout le courage dont j'avais besoin. J'espère que ce travail sera pour elle la preuve de mon amour.

Table des matières

Remerciments

Publications de l'auteur

Introduction générale	1
1. Chapitre 1 : État de l'art sur la conception de systèmes	8
1.1 Introduction	8
1.2 Système technique complexe	9
1.3 Exigences	10
1.3.1 Exigences statiques	11
1.3.2 Exigences dynamiques	12
1.4 Méthodes conventionnelles de conception	15
1.4.1 Conception ascendante (Bottom-up)	19
1.4.2 Conception descendante (Top-down)	20
1.5 Méthodes de dimensionnement	21
1.5.1 Dimensionnement d'un système dynamique	22
1.6 Langages de modélisation et de vérification d'exigences	25
1.6.1 SysML	25
1.6.2 Modelica	26
1.6.3 Simulink	27
1.6.4 Comsol	28
1.6.5 Bond-Graph	28
1.7 Optimisation de la conception d'un système	29
1.8 Conclusion	29
2. Chapitre 2 : Méthode de conception par intervalles	32
2.1 Introduction	32
2.2 Calcul par intervalles	33
2.2.1 Intervalles	34
2.2.2 Opérations arithmétiques	35
2.2.3 Phénomène de dépendance	36
2.2.4 Fonctions d'inclusion	36
2.2.5 Fonction d'inclusion naturelle	37
2.2.6 Fonction d'inclusion centrée	37
2.2.7 Fonctions d'inclusion de Taylor	38

2.3	Les CSP numériques (NCSP)	38
2.3.1	Consistance	39
2.3.2	Stratégies et algorithmes de Branch and Prune	42
2.3.3	Optimisation et problème de satisfaction de contraintes	43
2.4	Méthode de conception par intervalles	44
2.5	Conclusion	48
3.	Chapitre 3 : Simulation par intervalles des systèmes techniques complexes	50
3.1	Introduction	50
3.2	Représentation de la structure d'un système dynamique	52
3.3	Problématique de résolution des équations différentielles linéaires par intervalles	53
3.3.1	Simulation par intervalles d'un système technique	54
3.3.2	Méthodes de Taylor par intervalles	55
3.4	Intégration garantie d'équations différentielles linéaires ordinaires basée sur l'approche de <i>Goldsztein</i>	57
3.4.1	Série de Taylor	57
3.4.2	Exponentielle de Horner	59
3.4.3	Exponentielle de Horner avec réduction	59
3.5	Exemples de simulation dynamique par intervalles d'un système de suspension de véhicule	60
3.5.1	Système de suspension linéaire passif de véhicule	61
3.5.2	Comportement dynamique d'une suspension linéaire passive	63
3.5.3	Système de suspension MacPherson non-linéaire-linéarisé de type passif	67
3.5.4	Comportement dynamique d'une suspension MacPherson non-linéaire-linéarisée de type passive	73
3.5.5	Système de suspension MacPherson non-linéaire-linéarisé de type active	76
3.5.6	Comportement dynamique d'une suspension MacPherson non-linéaire-linéarisée de type active	79
3.6	Conclusion	84
4.	Chapitre 4 : Prise en compte des exigences dynamiques par contraintes	86
4.1	Introduction	86
4.2	Méthode ensembliste de conception globale	87
4.3	Prise en compte des exigences dynamiques	89
4.3.1	Exigences dynamiques fonctionnelles	89
4.3.2	Exigences dynamiques de performances	94
4.4	Exemple d'application au dimensionnement d'un ressort de compression intégré dans un système de suspension	100
4.4.1	Problème d'un ressort de compression intégré dans un système de suspension	100
4.4.2	Formalisation des contraintes et résolution par intervalles	112
4.4.3	Résultats numériques de la conception du ressort de compression	114

TABLE DES MATIÈRES

4.5 Conclusion	119
Chapitre 5 : Étude de cas : conception préliminaire d'un système de suspension MacPherson active	122
5.1 Introduction	122
5.2 Exigences de dimensionnement de la suspension MacPherson	122
5.2.1 Exigences de dimensionnement statiques	122
5.2.2 Exigences de dimensionnement dynamiques	127
5.3 Conclusion	136
Conclusion générale	138
Annexe	142
Bibliographie	148

Table des figures

1.1	Composition d'un système complexe.	9
1.2	Analyse des besoins « La bête à cornes ».	10
1.3	Processus de conception d'un produit [1].	11
1.4	Vérification de la résistance à la rupture d'un système de suspension par calcul par éléments finis	12
1.5	Stabilité d'un système.	13
1.6	Effondrement du pont de TACOMA (U.S.A.) le 7 novembre 1940 causé par un phénomène de résonance dû aux oscillations en torsion provoquées par le vent.	14
1.7	Structure d'un système automatisé commandable.	15
1.8	Conception de forme «embodiment design».	16
1.9	Processus de conception d'un système technique complexe [2].	17
1.10	Cycle de vie d'un produit en cascade.	18
1.11	Cycle de vie d'un produit en spirale [3].	19
1.12	Modèle d'un cycle en V de la conception (norme EIA 632) [4].	20
1.13	Processus général de conception d'un produit.	22
1.14	Méthode conventionnelle pour le dimensionnement d'un système.	23
1.15	Les diagrammes SysML.	25
1.16	Interface graphique de Simulink.	27
1.17	Modélisation d'un système masse-ressort par Bond-graph.	28
2.1	Exemple de fonctions d'inclusion.	36
2.2	Hull-consistance - évaluation avant	39
2.3	Hull consistance - propagation arrière	41
2.4	Approche de conception par intervalles	45
2.5	Schéma explicatif résumant l'approche de conception par intervalles	46
3.1	Approche de conception par intervalles.	51
3.2	Système de suspension linéaire.	61
3.3	Réponse dynamique d'une suspension de véhicule excitée par un déplacement instantané.	64
3.4	Réponse dynamique d'une suspension de véhicule excitée par un déplacement instantané (application de l'exponentielle de Taylor et de l'exponentielle de Horner).	66
3.5	Réponse dynamique d'une suspension de véhicule excitée par un déplacement instantané (application de l'exponentielle de Horner avec réduction).	67
3.6	Système de suspension MacPherson.	68

TABLE DES FIGURES

3.7	Modèle dynamique de la suspension MacPherson d'un quart de véhicule.	69
3.8	Réponse dynamique d'une suspension MacPherson passive excitée par une force sinusoïdale (application de l'exponentielle de Horner avec réduction).	75
3.9	Modèle quart de contrôle Skyhook.	77
3.10	Schéma bloc d'une fonction de transfert.	78
3.11	Diagramme bloc d'un système commandé par la méthode de placement de pôles.	78
3.12	Comparaison entre la réponse active et passive d'une suspension MacPherson excitée par un déplacement instantané.	81
3.13	Réponse dynamique d'une suspension MacPherson active excitée par un déplacement instantané (application de l'exponentielle de Horner avec réduction).	82
3.14	Réponse dynamique d'une suspension MacPherson active excitée par une force sinusoïdale (application de l'exponentielle de Horner avec réduction).	83
4.1	Démarche de conception basée sur les exigences.	88
4.2	Exemple de l'allure d'une dérivée d'une variable d'état critique.	94
4.3	Ressort de compression.	101
4.4	Systèmes de suspension [5, 6].	106
4.5	Modèle linéaire d'un système de suspension d'un quart de véhicule en mode vertical.	107
4.6	Diagramme de Bode pour la fonction de transfert de suspension du véhicule.	110
4.7	Réponse du système de suspension d'un véhicule excité par un déplacement instantané.	110
4.8	Réponse du système de suspension d'un véhicule excité par une force sinusoïdale.	111
4.9	Extrait du modèle CSP du problème de dimensionnement du ressort de compression	113
5.1	Modèle cinématique du système de suspension MacPherson.	123
5.2	Projection du schéma cinématique du système de suspension MacPherson sur le plan (OXZ)	124
5.3	Modèle dynamique de la suspension MacPherson d'un quart de véhicule.	128

Liste des tableaux

2.1	Comparaison entre les méthodes de conception classiques et les méthodes de conception par intervalles.	47
3.1	Les paramètres de conception du système de suspension	63
4.1	Propriétés mécaniques des matériaux des ressorts de compression.	103
4.2	Coefficient de sécurité en fonction du type de matériau	105
4.3	Valeur de $\tau_d(N)$ en fonction du nombre de cycles avant rupture N	105
4.4	Valeurs de τ_{kc}^s selon le type d'affaissement choisi.	106
4.5	Tableau de contraintes 1 - transformation du tableau 4.1 et 4.2	114
4.6	Tableau de contraintes 2 - transformation du tableau 4.4	114
4.7	Tableau de constantes	114
4.8	Valeurs initiales des valeurs des paramètres de conception du ressort de compression	115
4.9	Comparaison entre la méthode du gradient conjugué et la méthode de conception basée sur les NCSP	115
4.10	Résultats numériques des caractéristiques du ressort de compression intégré dans la suspension	117
5.1	Résultats numériques des paramètres de conception de la suspension MacPherson	133

Publications de l'auteur

Communications dans des congrès internationaux avec actes et comité de lecture

Hassen Trabelsi, Pierre-Alain Yvars, Jamel Louati, Mohamed Haddar, « Effectiveness of an interval computation approach to the dynamic simulation of a MacPherson Suspension System». Mechatronics 2012, 9th France-Japan & 7th Europe-Asia Congress on and Research and Education in Mechatronics (REM), 2012 13th Int'l Workshop on, 21-23 November 2012, Paris, France.

Hassen Trabelsi, Pierre-Alain Yvars, Jamel Louati, Mohamed Haddar, « Application of the CSP approach and the interval computation for the optimal sizing of a compression spring ». 5ème Congrès International (CMSM) : Conception et Modélisation des Systèmes Mécaniques, 25-27 Mars 2013, Djerba, Tunisie.

Article publié

Hassen Trabelsi, Pierre-Alain Yvars, Jamel Louati, Mohamed Haddar, « CSP Approach and Interval Computation for the coupling between static and dynamic requirements in the preliminary design of a compression spring», European Journal of Computational Mechanics. Volume 22, Issue 2-4, 2013.

Articles soumis à des revues internationales

Article soumis au Journal Mathematics and Computers in Simulation (ELSEVIER). Hassen Trabelsi, Pierre-Alain Yvars, Jamel Louati, Mohamed Haddar, « Interval Based Simulation to integrate dynamic behavior in preliminary design : Application to the optimal sizing of a MacPherson suspension system ».

Article soumis au Journal Engineering Applications of Artificial Intelligence (ELSEVIER). Hassen Trabelsi, Pierre-Alain Yvars, Jamel Louati, Mohamed Haddar, « Interval computation and constraint propagation for the optimal design of a compression spring : static and dynamic aspects ». (Révisions et réponses aux reviewers soumises)

Article soumis au International Journal on Interactive Design and Manufacturing (Springer). Hassen Trabelsi, Pierre-Alain Yvars, Jamel Louati, Mohamed Haddar, « Evaluation of the effectiveness of the interval computation method to simulate the dynamic behavior of

subdefinite system. Application on an active suspension system ».

Introduction générale

1 Problématique et Objectifs de la thèse

De nos jours, l'innovation intensive constitue un nouveau régime de compétition entre les industries. Les entreprises qui possèdent une capacité d'innovation sont celles qui disposent d'un processus de conception robuste et des méthodes et outils d'ingénierie structurants et fiables. Cette compétitivité pousse toujours les entreprises à développer et à améliorer les méthodologies de conception pour qu'elles soient plus adaptées à leur activité de conception.

Malgré toutes les innovations et les recherches scientifiques au niveau outils et démarches de conception, la plupart des industries continuent à travailler avec des méthodes de conception basiques de type « conception-simulation-retour à l'étape initial en cas d'échec ». Ces méthodes classiques de type itératif sont plus adaptées à la validation d'un concept initiale qu'à l'exploration et la recherche des domaines de solution. Ainsi, avec l'augmentation de la complexité au niveau conceptuel des systèmes, ces méthodes s'avèrent, de plus, en plus obsolètes.

Dans la vie quotidienne, la majorité des systèmes que nous utilisons (smartphone, automobile, ...) sont des systèmes techniques complexes. L'amélioration de notre confort amène les concepteurs à intégrer plus de composants et de sous-systèmes dans un même concept pour fournir plus de fonctionnalités et mieux satisfaire les besoins du client. Cela engendre l'accroissement du niveau de complexité des systèmes utilisés.

Un système technique complexe est un système composé de plusieurs parties (sous-systèmes) agissant ensemble et permettent de remplir une ou plusieurs fonctionnalités technologiques de type complexe (c'est-à-dire que leur fonctionnement nécessite plusieurs opérations). Au niveau ingénierie, la complexité et l'hybridation des systèmes imposent plusieurs types d'exigences (statiques, dynamiques, géométriques, ...) à satisfaire ce qui crée plusieurs difficultés dans les différentes phases de leur cycle de conception. En effet, dans le contexte des méthodologies de conception classiques, la phase d'optimisation d'un système technique complexe est une tâche énorme vue que les composants sont multidisciplinaires et vue que les méthodes conventionnelles de conception se basent sur des boucles itératives successives. L'enjeu est très important pour déterminer les dimensions et les architectures optimales qui répondent à l'ensemble des exigences critiques imposées.

En phase initiale du processus de conception, les exigences [7–10] représentent les besoins et les idées de ce que le client souhaite avoir dans son produit. À ce niveau, les exigences

sont à l'état brut, mais elles permettent l'élaboration du cahier des charges entre le concepteur et l'utilisateur afin de bien préciser le besoin et le contexte d'utilisation du système. Ensuite, suivant le niveau de progression dans le cycle de conception, ces exigences sont formées et traduites sous forme de contraintes et de propriétés techniques que le produit doit respecter et satisfaire. Suivant le niveau et la phase de conception, on trouve différents types d'exigences. Dans ce travail, nous nous concentrons plus sur les exigences statiques et dynamiques.

Les exigences statiques [7, 9], sont des exigences qui décrivent les propriétés statiques (dureté, déformations, résistance à la rupture...) que le système doit avoir et la manière dont il exécute ses fonctions. Ainsi, les exigences structurelles qui concernent les propriétés structurelles du système (masse, encombrement, forme) appartiennent au type d'exigences statiques.

Les exigences dynamiques [7, 9], sont des exigences qui décrivent les caractéristiques de performances du système et le processus de fonctionnement que le système doit exécuter. On trouve dans cette catégorie les règles métiers, et les exigences comportementales qui spécifient les propriétés comportementales que le système doit respecter.

- Les exigences métiers décrivent ce qui doit être fourni ou réalisé par le système à concevoir (c'est-à-dire les fonctionnalités que le système doit réaliser). On les appelle également spécifications fonctionnelles.
- Les exigences comportementales définissent le domaine de définition, la précision, les critères de stabilité, le seuil de sensibilité en fonction des données fournies, la réponse à des sources d'excitation caractéristiques (rampe, sinusoïde, ...), la commandabilité, la transmittance. Ces exigences permettent de supprimer ou de réduire les risques liés aux phénomènes dangereux (pics de résonance, instabilité, ...) en modifiant l'architecture ou les caractéristiques de fonctionnement du système. Dans certains cas, pour diminuer ou supprimer le risque des phénomènes dangereux cité précédemment, il suffit de changer la forme ou la disposition des composants du système en mouvement, de réduire les masses, les forces appliquées, les vitesses de fonctionnement ou encore de recalculer le dimensionnement de certains éléments.

Dans l'approche classique de l'ingénierie, les exigences sont considérées comme des pré-requis pour les étapes de conception et de développement d'un produit. La plupart de ces exigences doivent être vérifiables par des tests pour assurer la validation de la conception.

L'optimisation de la conception d'un produit est liée à l'optimisation du dimensionnement et de l'architecture du système considéré. Avant le choix définitif des dimensions des variables et des composants du système, les concepteurs s'appuient essentiellement sur les exigences imposées, la modélisation physique, l'expertise et divers retours d'expérience. Dans une démarche de conception conventionnelle, le dimensionnement d'un système se fait en deux étapes :

- Le dimensionnement statique : au début le concepteur part d'un modèle statique puis il affecte les variables du modèle par des dimensions initiales, le choix de ces valeurs est fonction de l'expertise et des règles métier. Ensuite, il vérifie la satisfaction des exi-

gences statiques par différents tests (méthode des éléments finis, calcul de résistance, ...) et suivant le résultat du test, les variables proposées sont prises comme solution sinon il doit les redéfinir et le cycle de validation statique recommence. Enfin pour cette étape, le concepteur fixe les coefficients de sécurité¹ suivant le niveau de qualités des exigences statiques imposés.

- Le dimensionnement dynamique : dans cette étape, l'architecture statique définie précédemment dans le dimensionnement statique est intégrée dans un modèle dynamique pour déterminer le comportement dynamique du système. Ainsi, suivant les résultats d'évaluation, on trouve différentes décisions : Dans le cas de la non-satisfaction des exigences dynamiques, le concepteur peut réduire les coefficients de sécurité (si le cas le permet sinon il retourne directement à la phase de dimensionnement) ce qui revient à changer les dimensions du système, puis, il réévalue le comportement dynamique et si les exigences dynamiques ne sont pas encore remplies, il doit retourner à la première étape de dimensionnement statique pour redéfinir les valeurs du modèle statique et le cycle de dimensionnement recommence. Dans le cas contraire, ces valeurs sont retenues comme solution. Ce processus est répété jusqu'à l'obtention des valeurs satisfaisant l'ensemble des exigences.

L'inconvénient de ce processus est que le dimensionnement statique est traité séparément du dimensionnement dynamique ce qui entraîne le sur-dimensionnement du produit dans la plupart des cas, vu que les exigences dynamiques n'interviennent pas au moment du choix des coefficients de sécurité. En outre, dans le cas où le système à concevoir est un système automatisé², le fait de traiter son dimensionnement statique sans tenir compte dans la même phase de conception des exigences dynamiques peut engendrer le problème de conception d'un système non-commandable puisque les propriétés et les contraintes de commandabilités ne sont pas intégrées dans cette phase de conception.

Ainsi, l'objectif est de chercher et d'outiller un processus de conception qui prend en compte les différents types d'exigences statiques et dynamiques de manière globale, et qui permet de concevoir de manière optimale des systèmes techniques complexes.

Ces dernières années, la notion de set-based design est apparue. Elle autorise l'intégration des exigences et est étudiée comme solution pour optimiser le processus de dimensionnement d'un produit [11, 12]. Plusieurs travaux ont été développés sur l'intégration des exigences statiques dans les phases initiales d'un processus de conception.

Le principe de cette méthode est simple, le concepteur se base essentiellement sur les exi-

1. Les coefficients de sécurité sont des paramètres permettant de dimensionner des dispositifs. Lorsque l'on conçoit un dispositif, il faut s'assurer qu'il remplisse ses fonctions en toute sécurité pour l'utilisateur. Il faut pour cela connaître la charge à laquelle il sera soumis. Mais la connaissance des charges normales en utilisation ne sont pas suffisantes : il faut prévoir la possibilité d'une utilisation inadaptée : imprudence de l'utilisateur, surcharge accidentelle ou prévue, défaillance d'une pièce, événement extérieur imprévu, ... On utilise pour cela un coefficient de sécurité, noté habituellement s .

2. Un système automatisé est un système composé d'une partie commande et d'une partie opérative.

gences pour faire la conception, contrairement aux méthodes de conception classique dans lesquelles le concepteur part d'un ensemble de dimensions initiales puis vérifie la satisfaction des exigences. Alors qu'avec la méthode d'intégration des exigences, il utilise les exigences pour chercher l'ensemble des solutions possibles. Ainsi, il n'est pas nécessaire de vérifier si les solutions déterminées respectent ou non les exigences imposées puisque ces derniers représentent le point de départ dans la recherche des solutions admissibles du problème de conception posé. Les travaux existants dans la littérature s'attachent à intégrer au plus tôt des exigences de type statiques et environnementales [13, 14].

Les exigences dynamiques quant à elles, sont plus difficiles à prendre en compte dans les phases amont du processus de conception. Leur validité est évaluée après la définition statique de l'architecture du système, c'est-à-dire après la fixation des variables de conception. Dans les démarches de conception conventionnelles, la validation de ces exigences se fait par simulation en évaluant les performances dynamiques du système technique étudié. Par exemple pour un système mécanique asservi les exigences dynamiques sont représentées par les fréquences propres par lesquelles le système ne doit pas être excité pour éviter les pics de résonance, les déplacements maximaux ce qui revient à éviter sa destruction, le seuil de sensibilité, les critères de stabilité, comandabilité, transmittance ...

Après avoir présenté la problématique, nous décrivons une solution qui permet de répondre mieux aux exigences de la conception et de surmonter les limites et les difficultés rencontrées dans une démarche de conception classique. Dans le but de rendre ce processus de conception plus robuste, en évitant les boucles de redimensionnement d'un produit, nous proposons dans ce travail de thèse un couplage fort entre la prise en compte des exigences statiques et dynamiques dans la même phase de conception préliminaire du système. Les méthodes auxquelles nous nous intéressons dans le cadre de cette thèse sont celles à base d'intervalles, permettant d'assurer une prise en compte globale des relations de définition du système, d'architecture, de fonctionnement et des exigences associées.

Ce travail de thèse constitue une contribution dans l'optimisation du processus de conception des systèmes techniques complexes par la prise en compte des exigences dynamiques en phase de conception préliminaire. En effet, nous fournissons une approche de conception basée sur des outils informatiques par intervalles adaptée à l'intégration des exigences dynamiques au plus tôt en phase préliminaire de conception des systèmes techniques complexes ce qui permet d'éviter les boucles de redimensionnement en cas d'échec.

Dans un premier temps, la méthode de calcul par intervalles est utilisée comme méthode garantie de résolution des équations différentielles ordinaires et pour simuler dynamiquement les systèmes techniques complexes linéaires et non-linéaires linéarisables afin de minimiser le nombre de simulations. L'idée est d'appliquer cette méthode pour avoir un encadrement du domaine de solutions sous forme d'un produit cartésien d'intervalles et/ou d'ensembles au lieu d'une seule évaluation. Les variables exprimées par intervalles représentent les domaines de valeurs possibles des paramètres de conception du système à concevoir. Ainsi, le modèle paramétré du système est résolu par intervalles. Cela évite de lancer n simulations avec n valeurs pour chaque paramètre de conception.

Dans un second temps, nous proposons une démarche de conception dans laquelle, les exigences dynamiques sont prises en compte au plus tôt en phase de conception préliminaire des systèmes. Un premier objectif est de pré-dimensionner un système simultanément de manière statique et dynamique de telle sorte que les valeurs des paramètres de conception générées par cette méthode vérifient l'ensemble des exigences statiques et dynamiques. Un second objectif est de minimiser le nombre de boucles de redimensionnement de type : « Dimensionnement, simulation, retour à l'étape initiale en cas d'échec ».

La méthode proposée a été évaluée par plusieurs tests sur un exemple numérique évolutif. Elle a été appliquée à la conception d'un système de suspension active MacPherson. Le modèle dynamique de la suspension MacPherson est non linéaire, mais linéarisable.

2 Organisation du mémoire

Le mémoire de thèse est constitué de cinq chapitres :

Le premier chapitre est dédié à un tour d'horizon des méthodes conventionnelles de conception et plus précisément sur la phase de dimensionnement en mettant l'accent sur les qualités et les limites de ces méthodes. L'organisation de ce chapitre est la suivante : d'abord, les notions de système technique complexe et exigence sont définies (dans cette partie, on s'intéresse uniquement aux exigences statiques et dynamiques). Puis, le processus d'une méthode de conception conventionnelle est détaillé suivant les deux approches ascendante et descendante. Ensuite, la méthode de dimensionnement classique est exposée et le cas de dimensionnement d'un système dynamique est présenté. Après, quelques outils et langages de modélisation et de simulation sont présentés. Enfin les enjeux d'optimisation sont discutés.

Le deuxième chapitre présente la démarche de conception récemment utilisée pour la prise en compte des exigences statiques en phase de conception préliminaire de systèmes. Cette méthode se base sur le calcul par intervalles et la programmation par contraintes en domaine continu ou mixte. Par rapport aux méthodes de conception classiques dans lesquelles la vérification des exigences s'effectue après l'étape de dimensionnement d'une architecture initiale, la conception par intervalles s'appuie essentiellement sur les exigences dès les phases amonts de conception pour la recherche d'un concept valide. On peut dire que la vérification est incluse d'une manière garantie dans le processus de recherche d'une solution valide grâce aux exigences qui sont implémentées dans les algorithmes de recherche, ce qui permet d'éviter les boucles de redimensionnement. Le processus de conception par intervalles se base fortement sur la méthode de calcul par intervalles et sur les algorithmes de programmation par contraintes. La structuration de ce chapitre est la suivante : d'abord, nous présentons la démarche de conception par intervalles avec des détails sur ses qualités et ses limites. Puis, nous détaillons la technique de calcul par intervalles et la technique de programmation par contraintes avec des exemples simples d'application. Enfin, une comparaison entre l'approche de conception par intervalles et l'approche de conception conventionnelle est exposée à la fin de ce chapitre.

Dans le troisième chapitre, nous présentons notre première contribution dans la problématique de prise en compte des exigences dynamiques. Les modèles dynamiques manipulés en conception de systèmes techniques sont très souvent des représentations à base d'équation différentielles ordinaires. Nous nous sommes donc intéressés à la prise en compte d'équations différentielles par intervalles. En effet nous avons testé la capacité de la méthode de conception par intervalles pour la prise en compte du comportement dynamique d'un système par l'insertion des simulations par intervalles en phases amonts. L'évaluation effectuée est basée sur l'approche développée par *Goldsztejn* [15] que nous appliquons à la simulation du comportement dynamique d'un système réel (un système de suspension). Cette approche est limitée pour le cas d'un système d'équations différentielles ordinaire (EDO) linéaire et non-linéaire-linéarisable sous forme d'équation d'état. Les autres approches de résolution d'un problème (EDO) utilisent la forme directe de la série de Taylor, puis, ils recourent à la technique de (Prédiction/Correction) pour avoir un encadrement de l'espace des solutions. Alors que l'approche de *Goldsztejn* s'appuie sur la factorisation polynomiale d'Horner de la série de Taylor. La formulation d'exponentielle de Horner avec réduction [15] déterminée par *Goldsztejn* permet d'obtenir une approximation numérique garantie de l'espace atteignable d'une équation différentielle ordinaire en réduisant le pessimisme. La composition de ce chapitre est la suivante : d'abord, le problème d'intégration des équations différentielles est exposé, puis, la méthode de résolution basée sur la série de Taylor est discutée. Ensuite l'approche de résolution de *Goldsztejn* est détaillée. Enfin cette dernière est testée sur le cas du système de suspension pour déterminer son comportement dynamique par intervalles.

Le quatrième chapitre est consacré à la présentation de la démarche de conception finalement proposée. Dans cette démarche, nous prenons en compte les exigences dynamiques et statiques de manière simultanée dès la phase de conception préliminaire d'un système. Cette démarche est applicable pour le cas des systèmes dynamiques décrits par des équations différentielles ordinaires sous forme d'équation d'état. Ce chapitre est composé de trois parties : en première partie, nous présentons les étapes de la démarche de conception proposée, en deuxième partie, nous détaillons les différents critères d'exigences dynamiques et en parallèle, nous développons l'aspect mathématique pour chaque critère. Dans la troisième partie, le processus de conception proposé est évalué pour dimensionner un composant de type ressort de compression intégrée dans une suspension automobile.

Enfin, le cinquième chapitre est dédié à la validation de notre démarche de conception proposée par application sur un cas industriel de dimensionnement global d'un système de suspension active MacPherson. On présente les résultats et les interprétations de dimensionnement global de la suspension MacPherson. Le modèle dynamique développé est basé sur le modèle de *Sohn.et.al* [16].

Chapitre 1 : État de l'art sur la conception de systèmes

Chapitre 1

État de l'art sur la conception de systèmes

1.1 Introduction

En ingénierie, une méthode de conception est un procédé qui a pour but de formaliser les étapes préliminaires d'invention ou de développement d'un système suivant un cahier des charges bien défini afin de rendre ce développement plus convenable aux besoins du client.

La phase de conception permet de décrire de manière non-ambiguë, le plus souvent en utilisant un langage de modélisation, toutes les exigences et les spécifications fonctionnelles et non-fonctionnelles définies dans le cahier des charges pour le fonctionnement futur du système, afin de faciliter la réalisation [17–20]. En fonction du niveau de conception, ces exigences prennent différentes formes jusqu'à la phase finale de conception (dans la phase de modélisation, les exigences se décrivent par des relations mathématiques, puis, elles se traduisent par des composants mécaniques et électriques en phase de simulation).

Actuellement, les systèmes les plus utilisés dans les différents usages généraux sont des systèmes techniques complexes. Les développements technologiques, la convergence des sciences et de l'hybridation des domaines disciplinaires traditionnels (mécanique et électronique, télécommunications et informatique, ...) rendent difficile la conception correcte des systèmes complexes, et créent le besoin d'outils de validation et d'exploration des domaines de solutions. Plusieurs niveaux d'analyse doivent être pris en compte afin de mieux traiter la complexité de la conception. Pour réduire les coûts et le temps de calcul d'un produit à concevoir, il est important de mener un grand effort dès les premières phases du processus de conception.

Le chapitre 1 a pour objet la description des méthodes conventionnelles de conception en mettant l'accent sur les aspects qui peuvent être en corrélation avec nos travaux. Ce chapitre est structuré comme suit : d'abord, les notions de système technique complexe et des exigences sont définies, puis, les méthodes conventionnelles de conception avec leurs différentes étapes sont exposées, ensuite, puisque nous nous intéressons plus à la phase de dimensionnement, la démarche classique de dimensionnement est détaillée, puis, quelques outils de modélisation et de vérification d'exigences sont présentés. Enfin, les enjeux d'optimisation sont discutés.

1.2 Système technique complexe

Un système technique complexe (smartphone, automobile, ...) est un ensemble cohérent de sous-systèmes et de composants (figure 1.1) qui permettent de fournir une ou plusieurs fonctionnalités technologiques de types complexes. L'interaction locale et simultanée de ces parties multi-domaines empêche l'observateur de prévoir sa rétroaction et son comportement par le calcul [21–24].

La complexité d'un système technique complexe provient principalement de deux aspects :

- Ses composants sont multi-disciplinaires et appartiennent à des domaines différents.
- L'intégration de ses composants : il y a de nombreuses interrelations entre un nombre important de composants, donc il est difficile de garder une vision unifiée de ce système et de gérer sa conception.

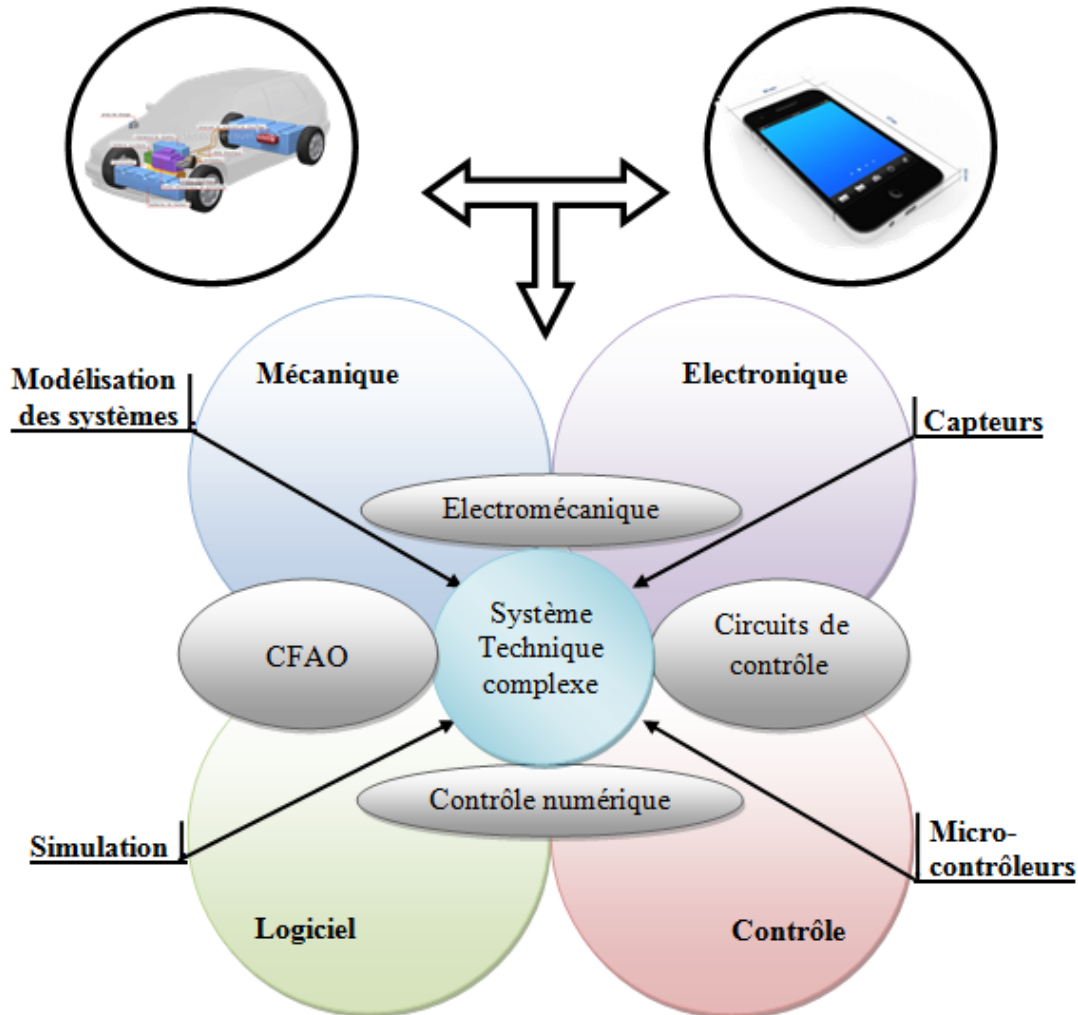


FIGURE 1.1 – Composition d'un système complexe.

D'une autre façon, pour modéliser un système, on développe un certain nombre de règles d'évolution, puis on simule le système suivant ces règles jusqu'à l'obtention du résultat de son comportement. Un système technique complexe est un système dont le résultat final de son comportement n'est pas toujours prédictible directement même en connaissant ses règles d'évolution. Cette restriction est due à la difficulté de mettre le système en équations solvables et prédictives. Pour prévoir ce comportement, il est souvent nécessaire d'effectuer une simulation du système étudié. Généralement, un systèmes technique complexe présente la majorité des caractéristiques suivantes :

- Les interactions entre ses composants forment des "groupes" de composants fortement liés, chaque "groupe" étant en interaction avec les autres, ce qui permet de modéliser le système complexe par niveaux : chaque composant interagit "localement" avec un nombre limité de composants.
- Les boucles de rétroaction sont une des raisons de la non-linéarité du comportement du système.

1.3 Exigences

La conception d'un système technique complexe est un processus délicat et complexe dû au nombre important de contraintes traitées et à la multidisciplinarité des exigences imposées vu que ses composants appartiennent à différents domaines. Généralement, la conception d'un système s'appuie sur les exigences.

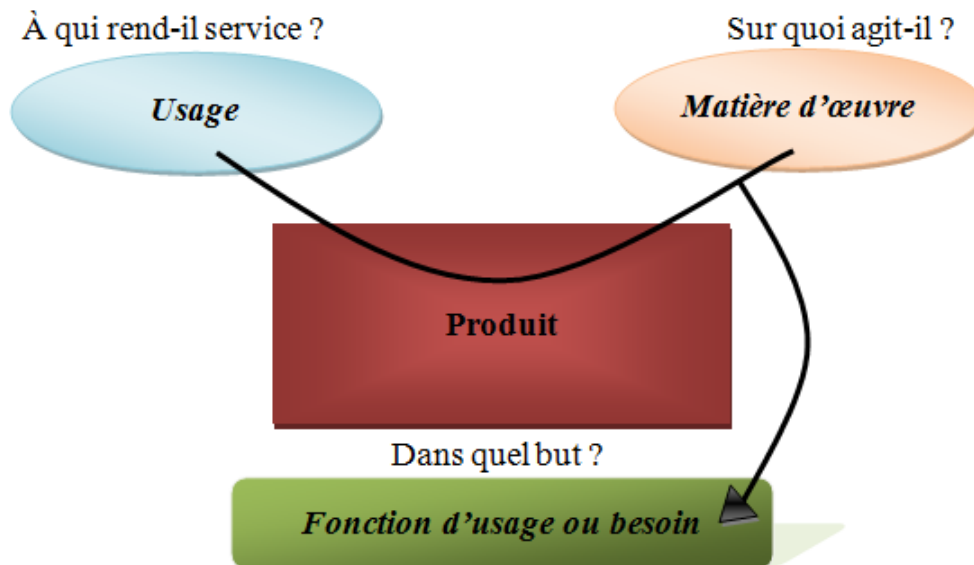


FIGURE 1.2 – Analyse des besoins « La bête à cornes ».

Les exigences [7–10] représentent les besoins (cf figure 1.2) et les spécifications d'un client en termes de fonctions à assurer et d'objectifs à atteindre pour un tel produit. Les exigences permettent l'élaboration du cahier des charges entre le concepteur et l'utilisateur afin

de bien préciser ce qu'un système doit faire, les propriétés, les caractéristiques et le contexte d'utilisation de ce système. Suivant le niveau de progression dans le cycle de conception (cf figure 1.3), ces exigences sont traduites sous forme de contraintes techniques que le produit doit satisfaire. En fonction du niveau de conception, on distingue différents types d'exigences :

- Présentation du produit et son utilisation.
- Phases d'emploi et limites du produit.
- Caractéristiques fonctionnelles : performances, ...
- Caractéristiques opérationnelles : fiabilité, sécurité, ...
- Exigences concernant l'utilisation : facilité d'emploi, ...
- Conditions d'ambiance.
- Interfaces.

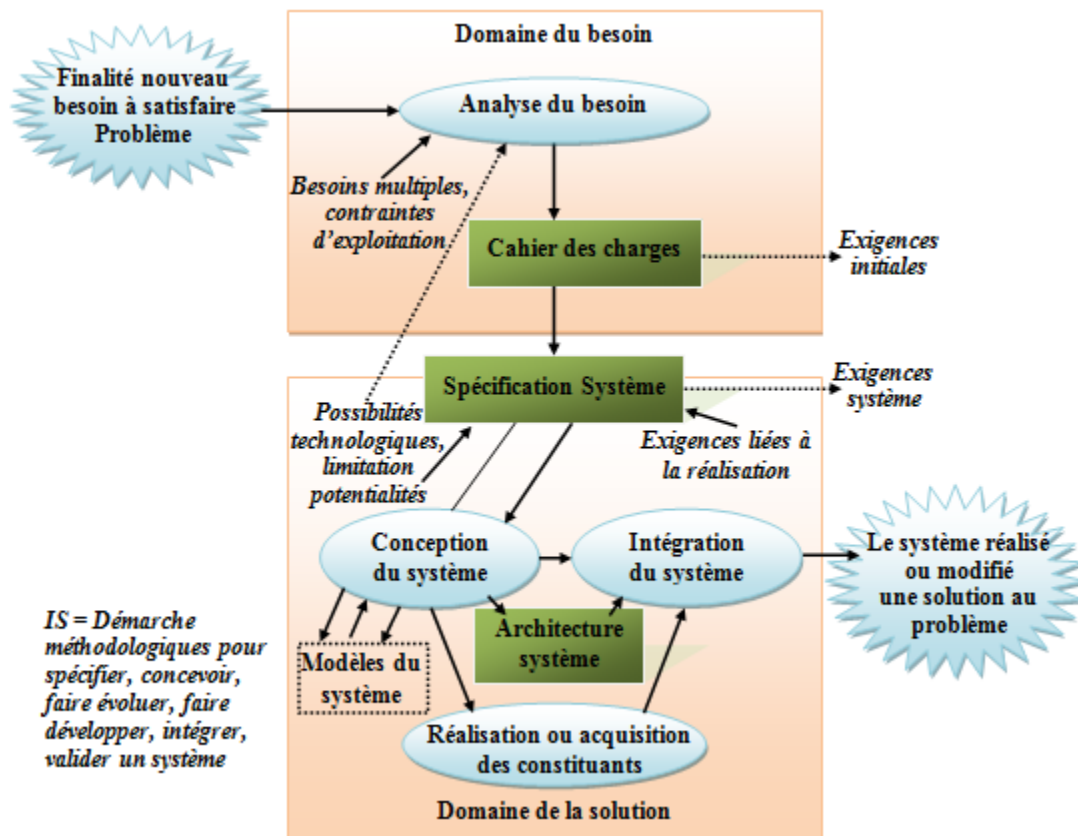


FIGURE 1.3 – Processus de conception d'un produit [1].

Dans cette partie, nous nous concentrons sur les deux catégories d'exigences suivantes :

- Les exigences dites statiques.
- Les exigences dites dynamiques.

1.3.1 Exigences statiques

Les exigences statiques [7, 9], sont des exigences qui décrivent les propriétés statiques (dureté, déformations, résistance à la rupture, température, humidité, ...) que le système doit avoir et la manière dont il exécute ses fonctions. Ainsi, les exigences structurelles qui concernent les propriétés structurelles du système (masse, encombrement, forme) appartiennent au type d'exigences statiques. La validation de ces exigences statiques se vérifie par calcul analytique ou par l'utilisation d'un logiciel de calcul à base d'éléments finis (pour déterminer les contraintes ou les déplacements pour chaque partie du système) (cf figure 1.4) dans le cas où le concepteur cherche à valider la résistance du système sous les charges statiques définies dans le cahier des charges.

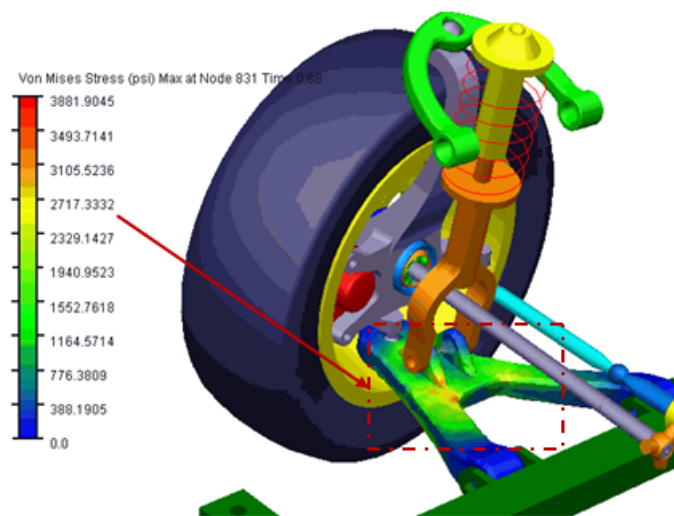


FIGURE 1.4 – Vérification de la résistance à la rupture d'un système de suspension par calcul par éléments finis .

1.3.2 Exigences dynamiques

Les exigences dynamiques [7, 9], sont des exigences qui décrivent les caractéristiques de performance du système et le processus de fonctionnement que le système doit exécuter. On trouve dans cette catégorie les règles métiers, et les exigences comportementales qui spécifient les propriétés comportementales que le système doit respecter.

Parmi les exigences dynamiques, on s'intéresse aux exigences suivantes :

La stabilité

La notion de stabilité est fondamentale dans l'étude et la conception des systèmes. Ainsi, les systèmes qui ne vérifient pas cette qualité sont inutilisables voire dangereux. Un système stable (cf figure 1.5.a) au sens physique est celui qui revient à son état d'équilibre¹ après dis-

1. Un système se trouve dans un état d'équilibre si cet état n'est pas modifié lorsque le système est aban-

parition de la perturbation [25,26], par contre un système est instable (cf figure 1.5.b) s'il n'y revient pas à son état d'équilibre ou s'il s'en écarte. On dit aussi que le système est stable au sens BIBO (de l'acronyme anglais Bounded Input Bounded output) si pour une entrée bornée, la sortie reste bornée quelles que soient les perturbations.

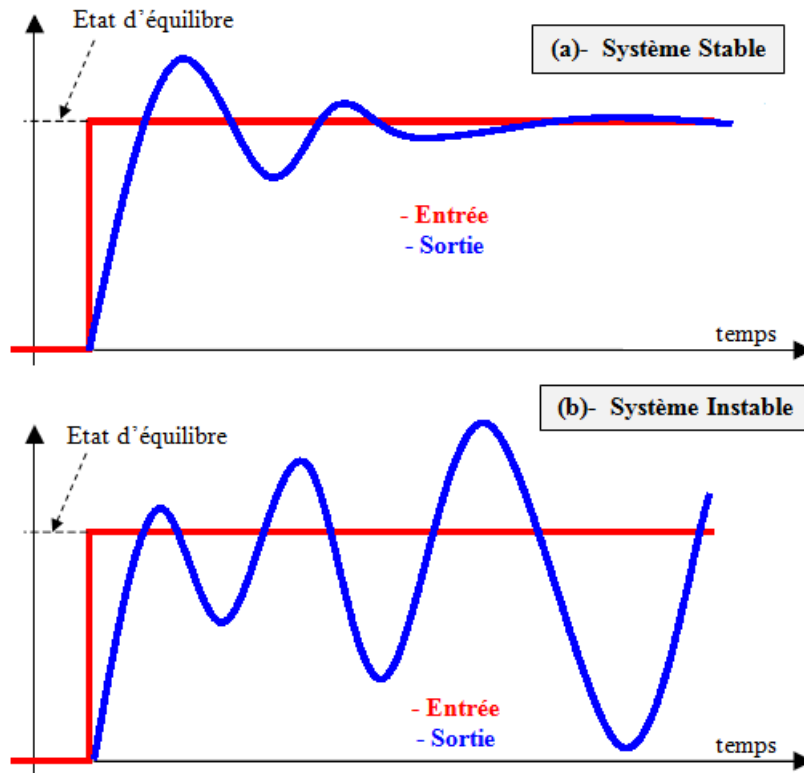


FIGURE 1.5 – Stabilité d'un système.

Analyser la stabilité d'un système revient à rechercher ses états d'équilibre et à déterminer leur stabilité. Pour ce faire, il faut disposer de critères de stabilité. Nous trouvons plusieurs critères (critère algébrique de Routh, critères graphiques, critère de Nyquist, ...) pour la détermination de la stabilité d'un système à partir de sa fonction de transfert ; le critère de Routh est le critère le plus utilisé pour vérifier la stabilité des systèmes linéaires continus. L'évaluation de performance d'un système suivant le critère de stabilité est insuffisante. Généralement les automaticiens, lorsqu'ils traitent le problème de stabilité, regardent aussi les critères de rapidité et de précision. Optimiser les performances du système revient à trouver un bon compromis entre ces trois critères.

La résonance

La résonance est un phénomène physique [26] qui concerne plusieurs types de systèmes de différents domaines (mécaniques ou acoustiques, voire même optiques ou électriques). Ce phénomène entraîne l'augmentation de l'amplitude d'oscillation d'un système physique donné à lui-même.

lorsque celui-ci est excité au voisinage de l'une de ses fréquences propres. Un système résonnant peut accumuler une énergie, si celle-ci est appliquée sous forme périodique, et proche d'une fréquence dite «fréquence de résonance ou fréquence naturelle ou fréquence propre». Soumis à une telle excitation, le système va être le siège d'oscillations de plus en plus importantes, jusqu'à atteindre un régime d'équilibre qui dépend des éléments dissipatifs du système, ou bien jusqu'à une rupture d'un composant du système. La résonance peut avoir des effets catastrophiques. En effet, dans le domaine du génie civil, nous pouvons observer les conséquences dangereuses de ce phénomène comme pour le cas du pont de TACOMA en 1940 (cf figure 1.6).



FIGURE 1.6 – Effondrement du pont de TACOMA (U.S.A.) le 7 novembre 1940 causé par un phénomène de résonance dû aux oscillations en torsion provoquées par le vent.

En mécanique, tout système possède une rigidité et une inertie qui lui sont propres. À partir de ces propriétés nous pouvons déterminer les fréquences et les modes propres de vibration de ce système. Dans le cas où ce système est relié à une source d'énergie vibratoire, ce système pourra entrer en résonance à une fréquence proche de la fréquence naturelle. Dans ce cas, l'amplitude d'oscillation dépend des mécanismes de dissipation d'énergie. Plus l'amortissement est faible, plus il conserve l'énergie qui lui est fournie et plus son amplitude de résonance en régime stationnaire est importante. En s'éloignant de cette fréquence, le mouvement perd de son ampleur.

Pour éviter le phénomène de résonance d'un système il faut tenir compte des fréquences d'excitation dans le processus de conception pour que ses fréquences propres soient différentes des fréquences d'excitation.

La commandabilité

La commandabilité [27] est une exigence qui concerne les systèmes automatisés² (cf figure

2. Un système automatisé est un système technique qui effectue un travail de façon autonome. Il est composé de deux parties : la partie commande qui donne les ordres et reçoit les informations de l'extérieur, et la partie opérative qui reçoit les ordres de la partie commande et effectue le travail.

1.7). Elle permet à l'utilisateur d'exiger une réponse du système utilisé. La commandabilité d'un système caractérise sa capacité à voir son comportement dynamique évoluer sous l'action du signal de commande. Un système est commandable s'il est possible de le conduire, en appliquant un signal d'entrée admissible pendant un intervalle de temps fini. Nous trouvons différents types de commandabilité (la commande par retour d'état, la commande par retour de sortie, ...).

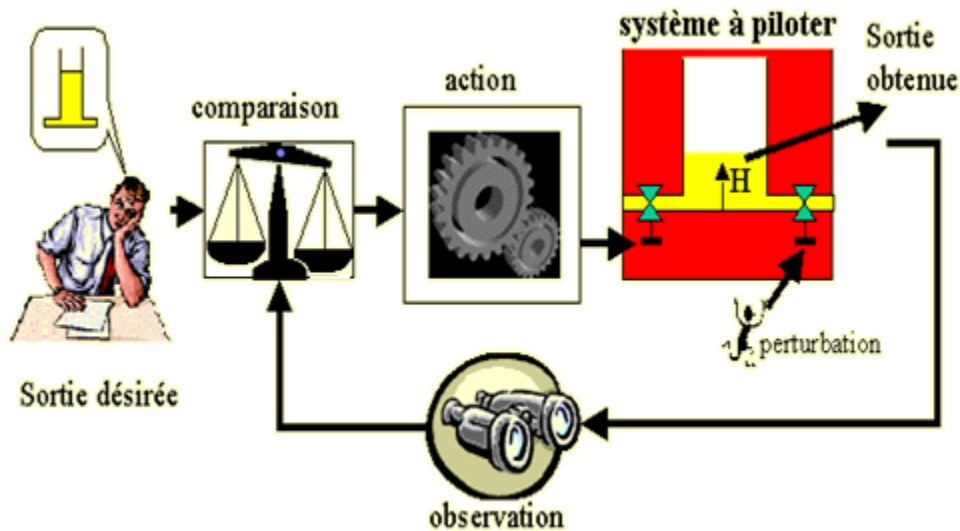


FIGURE 1.7 – Structure d'un système automatisé commandable.

La transmittance

La transmittance, en général, est le rapport caractérisant la transmission d'une grandeur dans un système. Elle se calcule par le rapport entre la grandeur en sortie et celle la grandeur en entrée. Pour certains systèmes, comme les filtres, l'augmentation de la transmittance permet d'améliorer la performance du système.

Dans une démarche de conception, le niveau d'implémentation des exigences diffère d'un processus à un autre. Il est donc nécessaire de voir les différentes démarches de conception pour déduire celles qui sont adaptées à la conception d'un système technique complexe.

1.4 Méthodes conventionnelles de conception

La conception est un processus de développement d'un produit [28, 29], selon lequel un ensemble de spécifications fonctionnelles est transformé à travers une série d'activités de conception et de décisions en une description complète d'un produit physique ou un système satisfaisant les exigences du marché. D'après *Pahl et al.* [30], le processus de conception comprend au moins les phases suivantes : Identification des besoins du marché, analyse du problème et formulation de l'énoncé de projet, définition des spécifications du produit à

concevoir , développement conceptuel, conception de forme (embodiment design), conception préliminaire, conception détaillée, conception de l’assemblage, analyse du cycle de vie et l’évaluation. *Pahl et al* dans [31] font la différence entre «preliminary design» et «embodiment design». En effet, dans un processus de conception, l’étape de conception de forme «embodiment design » est généralement l’étape qui consiste à passer de l’idée à la forme réalisation telle que la conception du corps et de l’architecture du système sont établies et le choix du matériau est défini. Un exemple pratique qui explique cette étape de conception est présenté sur la figure 1.8. Dans cet exemple, l’acier est utilisé pour construire le produit. Ainsi, il doit prendre la forme du ressort définie sur cette figure en considérant les exigences géométriques imposées.

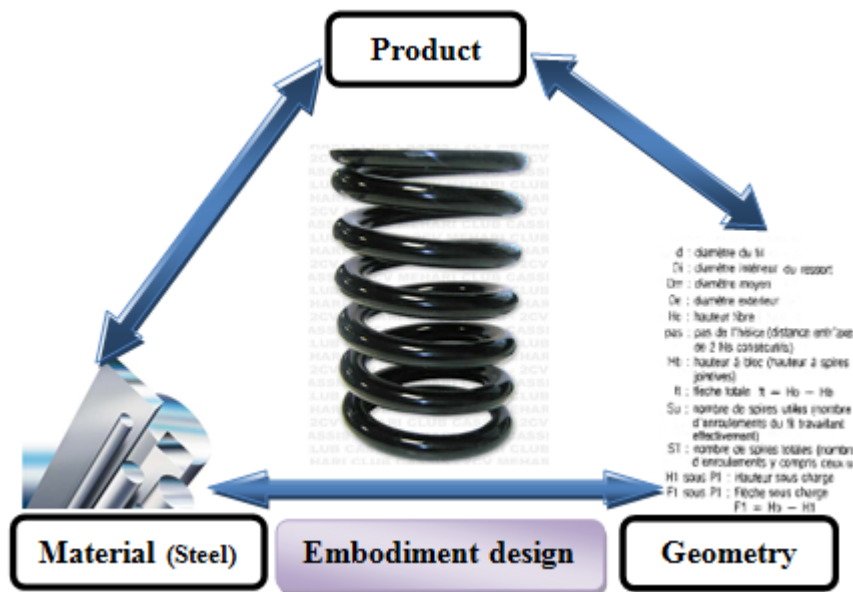


FIGURE 1.8 – Conception de forme «embodiment design».

Alors que, la conception préliminaire «preliminary design», est la phase où la structure du système technique est dimensionnée (cf figure 1.9) suivant les spécifications déterminées à partir de son analyse fonctionnelle. Ces dimensions ne sont pas finales et l’architecture du système est modifiable. En effet, dans cette étape de conception, il y a un manque important de connaissances [32] au niveau du comportement du système ce qui empêche d’attribuer des valeurs précises aux variables [33, 34]. Généralement, à cette étape, le système à concevoir est sur-dimensionné. Cela est dû au fait que le concepteur cherche à ce niveau une solution admissible qui remplit toutes les exigences définies.

Dans ce travail, nous nous intéressons aux phases de conception préliminaire et de conception de forme «embodiment design» d’un système technique complexe.

Actuellement, la conception d’un système doit le plus souvent prendre en compte les aspects de plusieurs disciplines (aérodynamique, thermique, crash, vibratoire, ...). Elle se base ainsi sur l’art du compromis, c’est-à-dire sur l’accommodation d’un grand nombre de contraintes. Cet aspect multidisciplinaire fait intervenir plusieurs compétences dans divers

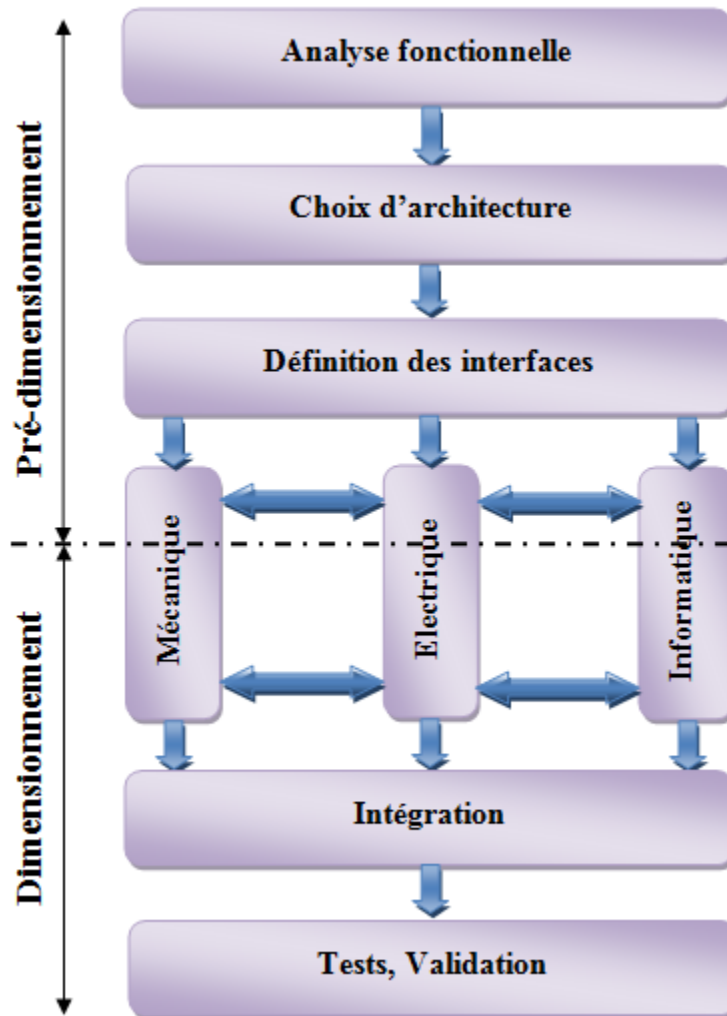


FIGURE 1.9 – Processus de conception d'un système technique complexe [2].

domaines, ce qui implique la nécessité de faire dialoguer différents métiers dans le but de traduire convenablement leurs cahiers des charges respectifs en exigences et pour que les solutions générées respectent les exigences de toutes les physiques mises en jeu.

La vie d'un produit peut être décrite suivant un cycle [35] depuis l'étape de spécifications jusqu'à l'étape de destruction. Les démarches de conception s'appuient généralement sur cette notion. Les cycles de vie les plus connues sont au nombre de trois : le cycle en cascade (cf figure 1.10), le cycle en spirale (cf figure 1.11) et le cycle en V (cf figure 1.12). Selon le cycle de développement choisi, on distingue deux types de processus de conception.

Le cycle de vie en cascade (cf figure 1.10) a été mis au point dès 1966 [36] par l'industrie du Bâtiment et Travaux Publics (BTP). Les phases de développement sont effectuées simplement les unes après les autres, avec un retour sur les précédentes, pour en vérifier la conformité avant de passer à la suivante (symbolisées dans le schéma par des flèches vers le

haut).

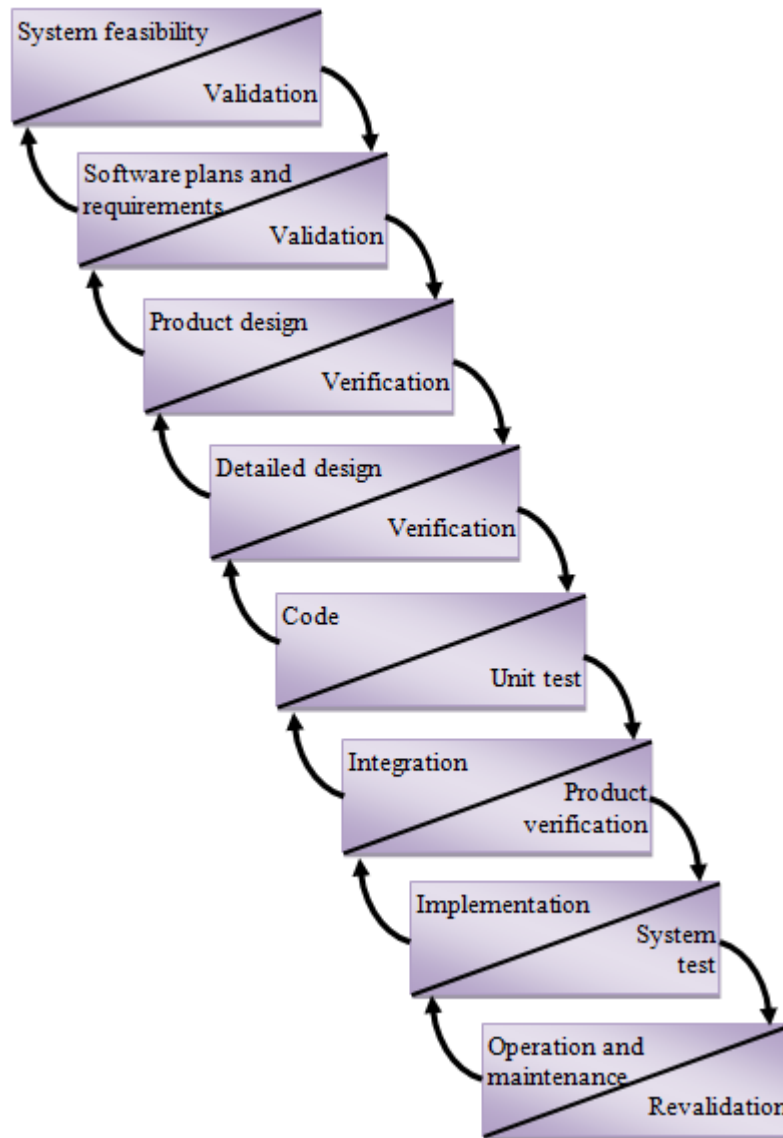


FIGURE 1.10 – Cycle de vie d’un produit en cascade.

Le cycle de vie en spirale (cf figure 1.11) est un modèle générique de cycle de vie évolutif qui a été proposé par *Barry W. Boehm* en 1988 [3]. Le modèle de développement en spirale [37] se compose de quatre phases : d’abord, il faut déterminer les objectifs, les alternatives et les contraintes, ensuite, analyser les risques, et évaluer les alternatives, puis, développer et vérifier la solution retenue, enfin, les résultats sont revus et le cycle suivant est vérifié. Le cycle en spirale reprend les différentes étapes du cycle en V (cf figure 1.12).

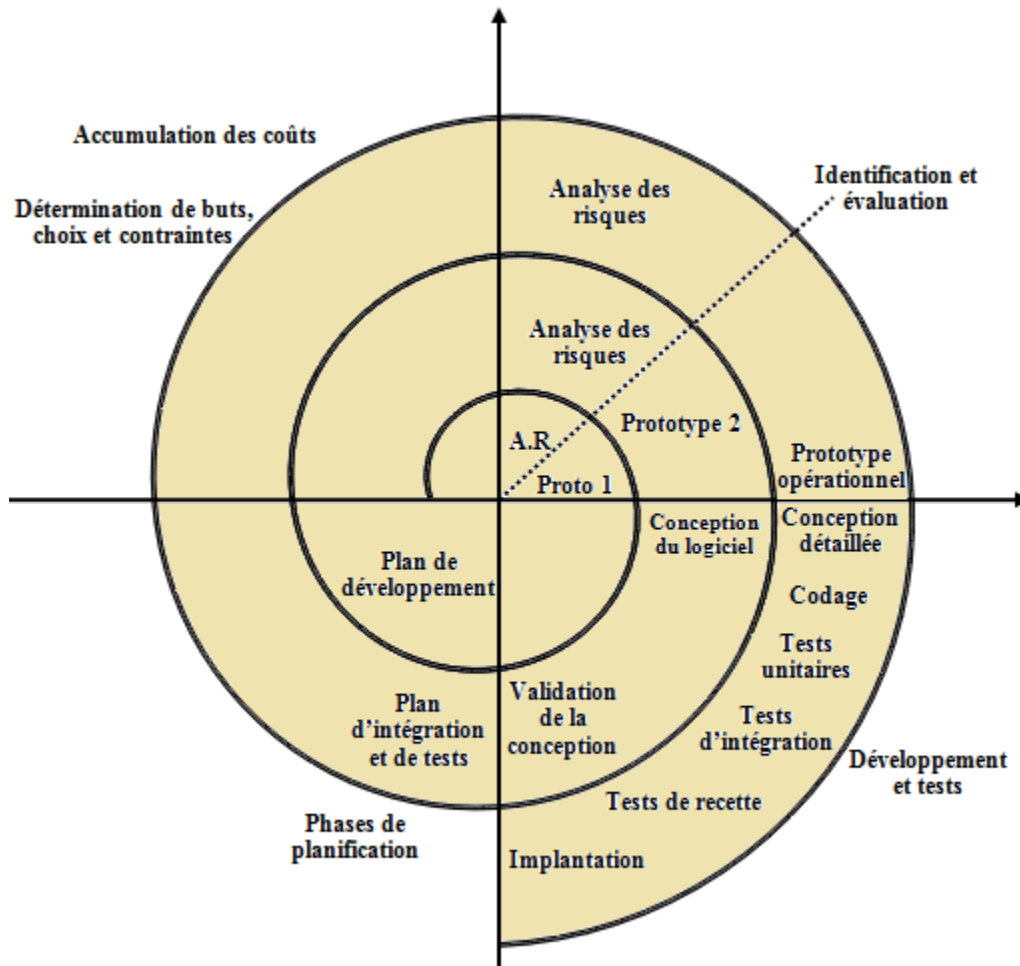


FIGURE 1.11 – Cycle de vie d’un produit en spirale [3].

Le cycle de vie en V [38] est un modèle conceptuel de gestion de projet développé suite au problème de réactivité du modèle en cascade. Il permet de limiter le retour aux étapes précédentes en cas d’anomalie. Les phases de la partie montante doivent renvoyer de l’information sur les phases en vis-à-vis lorsque des défauts sont détectés, afin d’améliorer le logiciel. Le cycle en V est devenu un standard de l’ingénierie numérique depuis les années 1980 et depuis l’apparition de l’Ingénierie des Systèmes, est devenu un standard conceptuel dans tous les domaines de l’Industrie.

1.4.1 Conception ascendante (Bottom-up)

La conception ascendante [2, 39] est la méthode traditionnelle pour la conception d’un système. Dans cette démarche de conception, les spécifications fonctionnelles du système à concevoir représentent le point de départ, puis ces spécifications se traduisent dans le plan de modélisation par des composants de base de type : masse, ressort, résistances, condensateur, Ces composants sont ajoutés et liés successivement pour constituer des sous-systèmes et des ensembles plus compliqués. Cette technique est souvent utilisée pour la conception des

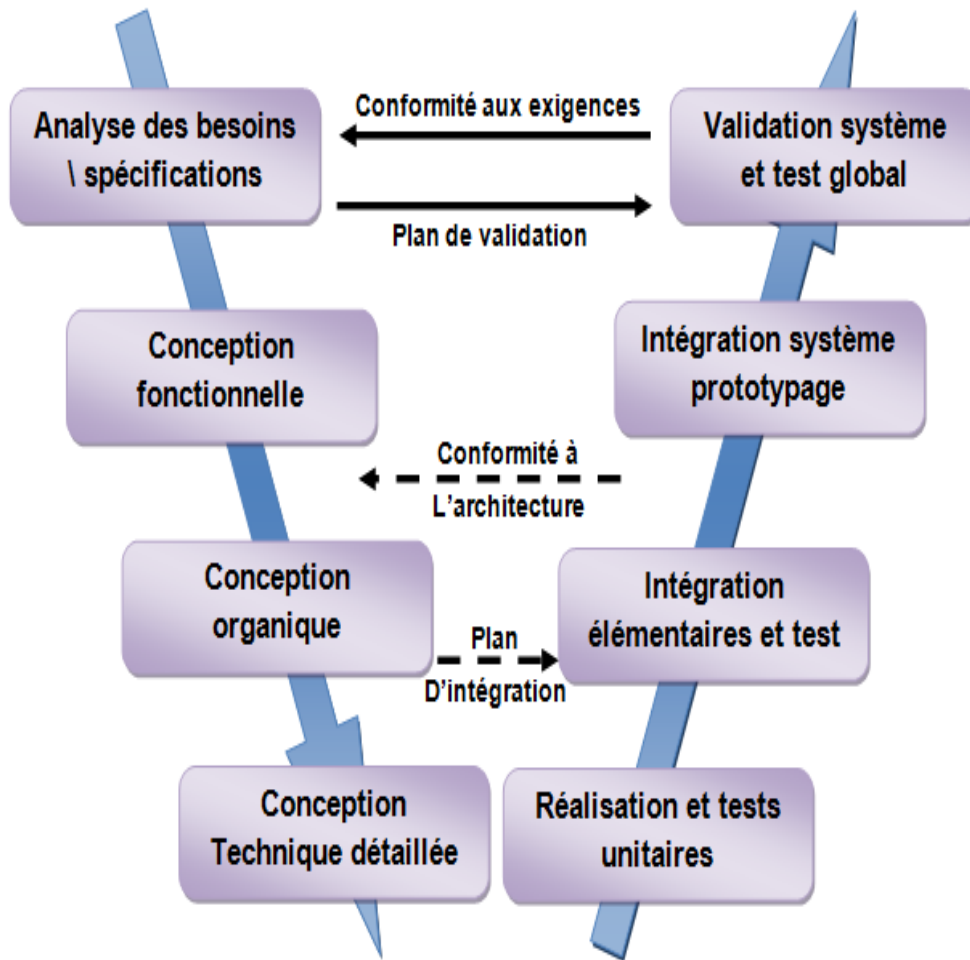


FIGURE 1.12 – Modèle d'un cycle en V de la conception (norme EIA 632) [4].

systèmes mécaniques multi-corps ainsi que pour les cartes électroniques.

Cette méthode présente les avantages suivants :

- elle représente la technique la plus adéquate pour la conception des pièces standard,
- elle est simple et progressive,
- chaque partie modélisée est vérifiée avant de la coupler avec d'autres parties du système, ce qui permet de cibler facilement les erreurs de conception.

Pendant, le système total est validé à la fin de la conception, lorsque toutes ses parties seront reliées. Ceci a pour conséquence de ne détecter les faiblesses et les fautes de conception que très tardivement, après avoir dépensé un temps considérable en étude et modélisation.

1.4.2 Conception descendante (Top-down)

Le point de départ dans la conception descendante [2, 39] est un cahier des charges qui décrit les besoins du client. Ces besoins sont ensuite traduits en un modèle de fonction qui

couvre les exigences et les spécifications du système. Le modèle est ainsi successivement partitionné jusqu'à aboutir à sa définition détaillée.

Les outils de modélisation qui se basent sur cette approche permettent de valider chaque niveau d'abstraction avant de passer au niveau suivant plus détaillé.

En conception descendante, les erreurs et les faiblesses du modèle sont découvertes au plus tôt, ce qui aide à optimiser le temps de conception. Dans cette méthode, l'emploi d'un outil informatique spécifique de modélisation des systèmes est nécessaire. De plus, avec ce type de conception, le niveau de modélisation des composants est moins détaillé. À cause de cet inconvénient, le développement des composants de certains systèmes est effectué suivant une approche ascendante et non pas descendante.

La conception descendante est la méthode la plus adoptée en ingénierie des systèmes pour le développement de produits.

1.5 Méthodes de dimensionnement

Attachons-nous maintenant au problème de dimensionnement d'un système. Il est couramment admis que le dimensionnement d'un produit fiable et robuste n'est pas un processus purement algorithmique, mais qu'il requiert l'incorporation d'heuristiques, c'est-à-dire d'un ensemble de règles basées sur l'expérience. Pour avoir les mêmes performances et fonctionnalités, il existe souvent plusieurs méthodes de conception susceptibles de répondre de manière optimale à un problème de dimensionnement en fonction des exigences demandées et de toutes les contraintes imposées. La plupart de ces méthodes s'appuient sur le processus de dimensionnement décrit sur la figure 1.13. Ce processus se base essentiellement sur une boucle de type «dimensionnement-simulation-retour à l'étape initiale en cas d'échec» [40, 41]. Par exemple, pour le cas de dimensionnement d'une clavette, le concepteur se réfère au abaques pour déterminer la forme (A, B, C) et les dimensions initiales (a : largeur de clavette, L : longueur de la clavette, ...), puis il définit la valeur du coefficient de sécurité pour déterminer la résistance pratique élastique au glissement (ou cisaillement) ensuite il procède à un calcul analytique pour vérifier la satisfaction des exigences statiques qui comprend la résistivité au cisaillement et la résistivité au matage. Dans le cas où les exigences sont remplies, les dimensions choisies sont retenues comme solution sinon il doit re-dimensionner la clavette système.

Les coefficients de sécurité sont des paramètres de dimensionnement des systèmes [42]. Ils permettent d'assurer la sécurité de fonctionnement d'un système. Les charges auxquelles le système est soumis sont données par un cahier des charges. Elles sont déterminées à partir de l'utilisation normale prévue du système. À partir de ces valeurs nominales, le concepteur doit estimer les valeurs maximales dans le cas le plus défavorable (solicitation maximale). En effet, lors des phases de transition du système telles que le changement de régime et de direction, et particulièrement lors du démarrage et de l'arrêt, la charge fluctue. Ainsi, les concepteurs visent à prendre en compte ces effets par l'introduction des coefficients de sécurité dans le calcul de la charge maximale pour garantir le bon fonctionnement du système lors d'un événement extérieur imprévu.

Pour bien comprendre le processus classique de conception, et déduire ses qualités et

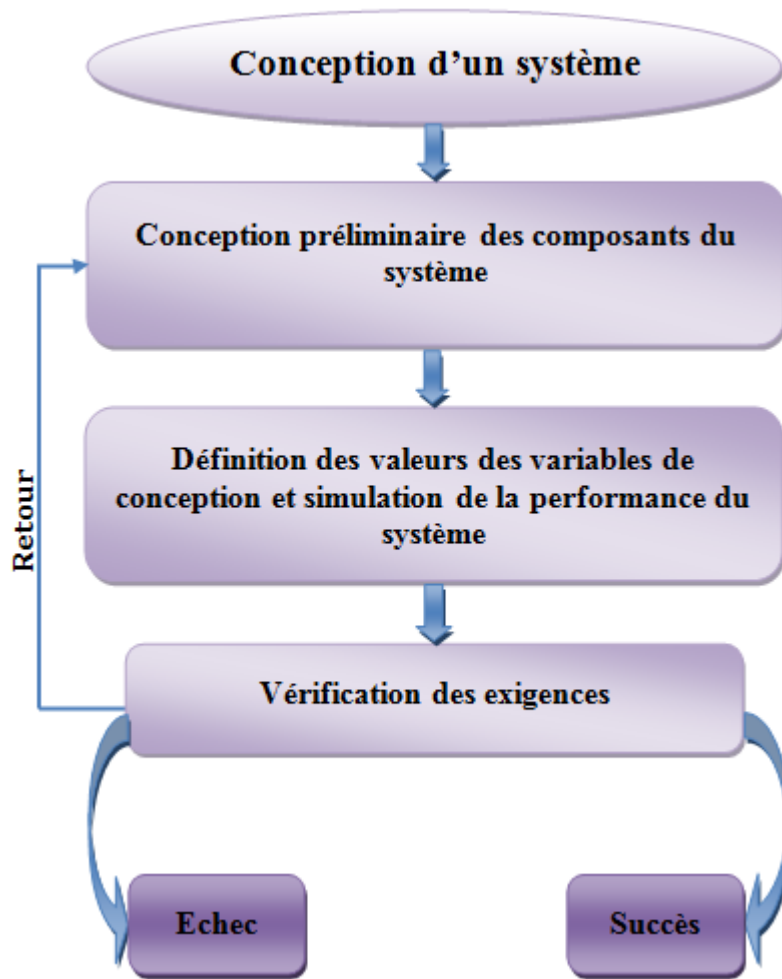


FIGURE 1.13 – Processus général de conception d'un produit.

ses limites, nous détaillons dans la partie suivante le cas de dimensionnement d'un système dynamique.

1.5.1 Dimensionnement d'un système dynamique

Plusieurs outils et logiciels [43–46] sont disponibles pour le dimensionnement des systèmes dynamiques. Dans la plupart des cas, il s'agit soit de logiciels de validation d'un dimensionnement donné soit d'outils n'autorisant qu'une très faible variabilité de cahier des charges (choix prédéfinis des variables de conception).

Généralement la méthode utilisée dans ces outils est basée sur le processus de conception décrit en figure 1.14. Dans cette approche, on trouve généralement trois étapes principales :

- La première étape est le pré-dimensionnement. Elle consiste à fixer les valeurs initiales des variables de conception. Cette étape nécessite beaucoup d'expertise pour déterminer les dimensions initiales dans le but de satisfaire les exigences statiques imposées

à partir d'un cahier des charges précis. Au cours de cette étape, les différentes spécifications de fonctionnement que le produit doit remplir, sont décrites par des modèles analytiques. Cette étape permet de fixer l'architecture initiale du système et son paramétrage.

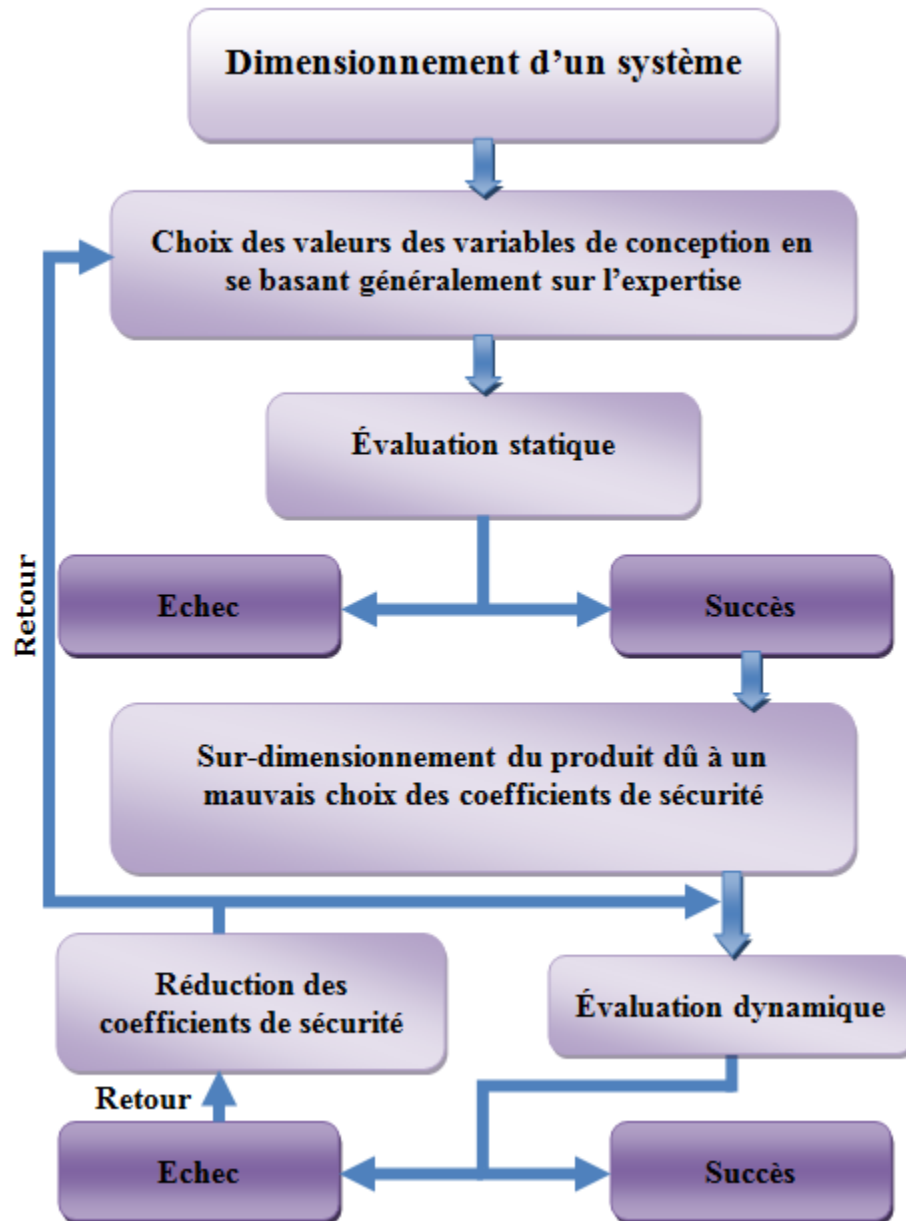


FIGURE 1.14 – Méthode conventionnelle pour le dimensionnement d'un système.

- Après la fixation des valeurs des variables de conception du produit (définition des dimensions des éléments constituant le système étudié), le concepteur évalue les performances statiques du système par simulation à l'aide de logiciels tels que Abaqus [47] ou Cosmosworks [48]. Puis, il fixe les coefficients de sécurité selon les qualités des exigences imposées. À ce niveau, les valeurs des variables ne sont pas encore figées et

l'architecture peut encore évoluer.

- Dans la troisième étape l'architecture statique définie dans l'étape précédente est intégrée dans un modèle dynamique. Ce modèle tient compte des fonctionnalités système et de tous les phénomènes physiques d'interaction du système avec son environnement. Ensuite, le concepteur évalue les performances dynamiques, ce qui revient à simuler le comportement du système.

De nombreux outils et méthodologies, provenant de différents domaines permettent de simuler le comportement d'un produit [31, 49–53]. Citons pour l'électronique, les langages de description matérielle (VHDL, Verilog) [54] qui permettent de représenter et de simuler le comportement ainsi que l'architecture d'un système électronique numérique, Modelica [44] pour la simulation multi-physique voire géométrique dans Dymola, CATIA [55], Cosmosworks [48] pour calculer la résistivité du système en se basant sur la méthode des éléments finis.

En fonction des résultats de simulation, le concepteur se situe dans l'une des deux situations suivantes :

- si le comportement obtenu du système à concevoir a rempli les exigences imposées dans le cahier des charges, les paramètres de conception utilisés dans la simulation sont retenus comme solution,
- sinon, il peut soit réduire les coefficients de sécurité choisis, soit passer directement à la modification des paramètres de conception du système en tenant compte de la simulation précédente et réitérer la totalité du processus de conception.

Ce processus est répété jusqu'à l'obtention des valeurs admissibles satisfaisant l'ensemble des exigences.

L'obtention d'une solution admissible par l'utilisation d'un processus de dimensionnement classique, se base fortement sur des boucles itératives successives de type dimensionnement -simulation-retour à l'étape initiale en cas d'échec. Le couplage entre le dimensionnement statique et dynamique reste faible dans cette démarche de conception. Le passage successif à travers ces deux étapes de dimensionnement (statique et dynamique) conduit au sur-dimensionnement du système à dimensionner, particulièrement lorsque le concepteur prend des coefficients de sécurité énormes après le dimensionnement statique ce qui conduit à des problèmes dynamiques au niveau du système complet. Le concepteur doit exécuter plusieurs simulations afin de déterminer une solution admissible ce qui entraîne l'augmentation du coût de la conception.

Dans la suite de ce chapitre, nous présentons les outils de conception les plus fréquemment utilisés en ingénierie système.

1.6 Langages de modélisation et de vérification d'exigences

La conception d'un système technique complexe est un processus long et délicat, nous trouvons plusieurs langages et outils de modélisation qui existent actuellement sur le marché et qui permettent la conception et la validation de la conception de ce type de système. L'objectif de cette partie est de présenter quelques outils et langages de modélisation de système et de prise en compte d'exigences pour déduire les qualités et les limites de chaque outil.

1.6.1 SysML

SysML (Systems Modeling Language) [39, 43] est un langage standard de description utilisé dans le domaine de l'ingénierie système, qui permet de couvrir les différentes phases de conception des systèmes complexes. Il est développé par un groupe piloté par International Council on Systems Engineering (INCOSE).

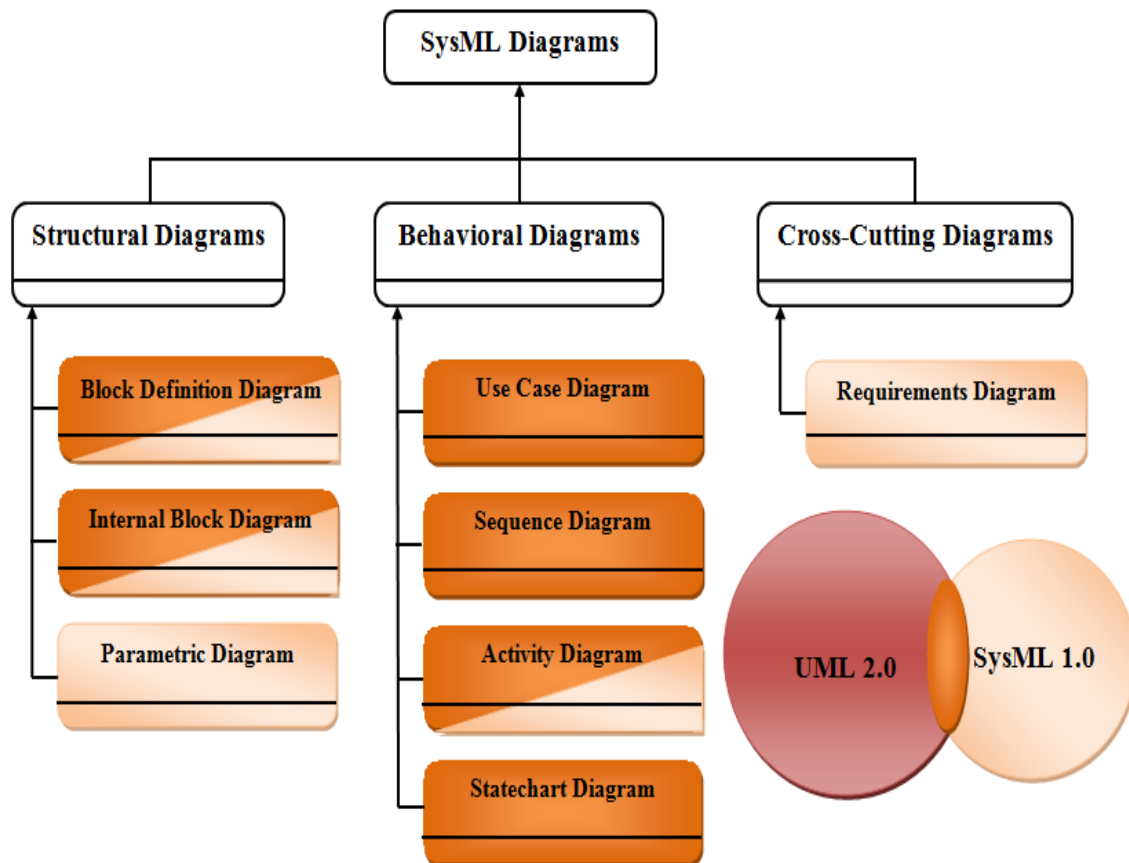


FIGURE 1.15 – Les diagrammes SysML.

La modélisation par SysML est basée sur une approche graphique utilisant trois catégories de diagrammes :

- des diagrammes pour la description architecturale ou structurelle,
- des diagrammes pour la description du comportement,

- des diagrammes pour la spécification des exigences.

Une comparaison entre des diagrammes SysML par rapport aux diagrammes UML est montrée dans la figure 1.15.

SysML représente un langage de description de système qui permet de gérer une grande partie des activités de conception. Ainsi, dans le développement des produits, *Christophe et al* [56] ont montré la capacité de SysML à intégrer au niveau conceptuel des modèles de connaissance. En termes d'exigences, SysML permet de transcrire, à partir du cahier des charges, les exigences sous forme de blocs et de diagrammes ce qui aide à définir les concepts du système et à tracer les modèles déployés avec les exigences correspondantes. En modélisation logique, SysML sert à décrire les architectures du système suivant les exigences et de décrire des diagrammes de spécification des liens entre les concepts.

En modélisation physique, SysML permet de décrire l'architecture physique du système. Il permet également de décrire les lois physiques à associer aux composants et sous-systèmes en définissant les attributs physiques (masse, surface, ...) et les flux échangés (énergies, signaux, ...). Par contre, SysML ne permet pas de raffiner les architectures physiques OD avec une modélisation géométrique 2D ou 3D. Il ne permet pas également la vérification des architectures physiques par simulation en vue d'une validation.

Pour surmonter ces limitations, plusieurs auteurs [57,58] ont proposé de coupler et interopérer SysML avec d'autres langages et outils de simulation pour étendre ses possibilités. Par exemple *Turki* [59] a proposé dans sa thèse d'étendre SysML avec les Bond-Graphs pour pouvoir générer des modèles de Bond-Graphs dans le but de les analyser avec des outils adéquats.

Malgré les limitations de SysML pour analyser des systèmes dynamiques physiques, il peut être couplé en aval avec des outils de modélisation et simulation [60] tels que les langages (Bond-Graph, VHDL-AMS, Modelica, Simulink, ...). Néanmoins, SysML reste un langage de description de systèmes dont l'utilisation actuelle reste calquée sur une démarche classique de conception de type : Description, Simulation, Retour à l'étape initiale en cas d'échec.

1.6.2 Modelica

Modelica [39, 44, 61] est un langage de modélisation et de simulation des systèmes physiques. Il permet la modélisation graphique et multi-physique (mécanique, électrique, thermique, hydraulique, ...) des systèmes à partir des diagrammes blocs ensuite la simulation en fonction des modèles décrits mathématiquement. La technique de modélisation est multi-ports et peut être acausale (ou non-causale).

Les modèles créés sont réutilisables, ce qui aide à créer des bibliothèques de composants. Les outils implémentant Modelica [44] permettent de simuler les modèles à l'aide de solveur itératifs de systèmes d'équations différentielles.

Par rapport à SysML, Modelica ne supporte pas la modélisation fonctionnelle. Le niveau de détail est limité dans certains domaines tels que l'électronique comparativement aux pos-

sibilités offertes par VHDL-AMS [54]. Il a été intégré dans l'environnement de CAO-Product Lifecycle Management (PLM) CATIA V6 [55].

1.6.3 Simulink

Simulink [39, 45] est un logiciel de simulation et de modélisation des systèmes multi-physiques. Il se base sur une approche graphique et utilise un ensemble de bibliothèques contenant des diagrammes blocs de modélisation (cf figure 1.16). Il est très connu dans le domaine de la simulation de systèmes de contrôle, ainsi que pour la simulation de l'ensemble système (structure + contrôle). Simulink est intégré à MATLAB [62] ce qui permet l'accès aux nombreux outils de développement, de visualisation et d'analyse des données de MATLAB.

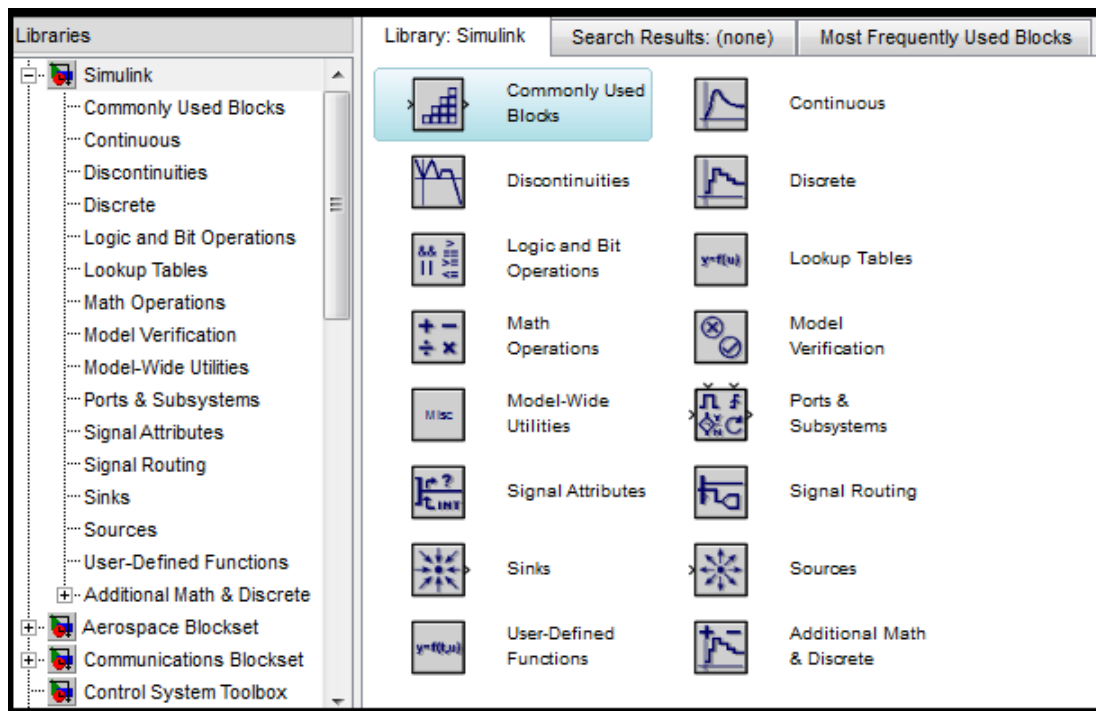


FIGURE 1.16 – Interface graphique de Simulink.

Simulink ne supporte pas la modélisation fonctionnelle et les analyses multi-physiques 3D. Il permet de simuler des problèmes physiques de type : équations algébriques (AE), équations différentielles ordinaires (ODE) et équations algèbro-différentielles (DAE). Mais, il est limité devant des problèmes définis par des équations aux dérivées partielles (PDE). D'autres outils tels que Comsol ou Ansys sont mieux adaptés dans ce cas.

1.6.4 Comsol

Comsol [39] est un logiciel de résolution des problèmes définis par des équations aux dérivées partielles (PDEs) par éléments finis. Il permet de coupler différentes PDE, de façon à relier différents phénomènes multi-physiques. Comme tout logiciel de calcul par éléments finis, et quand le modèle implémenté est de grande taille, Comsol est contraint par le coût de calcul.

1.6.5 Bond-Graph

L'outil Bond-Graph, appelé aussi graphe à liens, est une méthode de représentation graphique d'un système dynamique physique (mécanique, électrique...), qui a été introduit par Paynter [46]. Les Bond-Graphs peuvent représenter des transferts des flux d'énergie ou d'information dans le système.

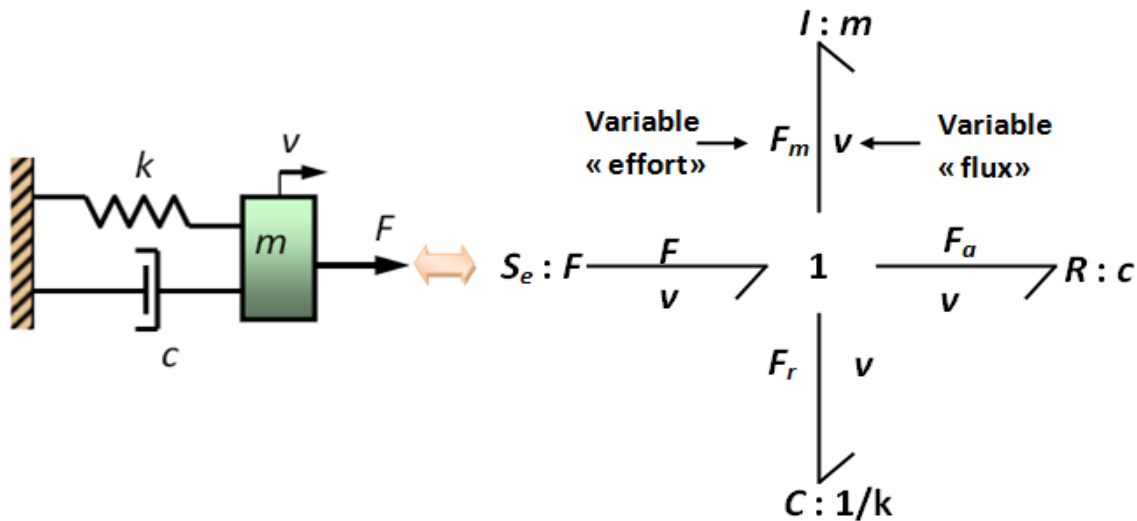


FIGURE 1.17 – Modélisation d'un système masse-ressort par Bond-graph.

Le Bond-Graph est un outil mathématique utilisé en ingénierie des systèmes. Il permet de modéliser un système afin d'optimiser son dimensionnement et la conception de sa partie de commande. Parmi les avantages de cet outil, on cite :

- La distinction entre les flux d'énergie et les flux d'information ;
- La mise en évidence de la causalité entre les efforts et les flux. Ceci qui permet de détecter des phénomènes non-physiques modélisés.

Par contre, l'inconvénient majeur des Bond-Graphs est que cette méthode au niveau représentation est un peu délicate et reste difficile d'accès du fait de son formalisme. La figure 1.17 montre un exemple de modélisation d'un système masse-ressort avec la technique Bond-Graph.

1.7 Optimisation de la conception d'un système

Les ingénieurs sont confrontés quotidiennement à des problèmes de complexité grandissante, qui surgissent dans divers secteurs techniques et plus particulièrement sur la conception de systèmes techniques. Le problème de conception peut souvent s'exprimer comme un problème d'optimisation : on définit une fonction objectif (coût, masse, volume, ...) que l'on cherche à optimiser (à maximiser ou à minimiser) suivant un critère défini [63], et tous les paramètres de la solution retenue doivent respecter les exigences et les contraintes imposées. En ingénierie système, l'optimisation d'un système technique complexe fait partie du processus de conception aux différents niveaux de modélisation et représente une étape importante pour la validation conceptuelle. Lorsque l'on parle de l'optimisation de la conception d'un système, il faut distinguer entre l'optimisation de la démarche de conception et l'optimisation des paramètres de conception d'un système.

L'optimisation de la démarche de conception consiste à chercher le chemin optimal qui permet d'obtenir les solutions admissibles en un temps minimal. En revanche, l'optimisation des paramètres de conception d'un système consiste à déterminer la valeur d'une ou de plusieurs variables de conception d'un produit par rapport à un critère scalaire ou vectoriel que l'on veut minimiser ou maximiser.

Suivant le niveau de modélisation, l'optimisation permet de déterminer l'architecture la plus satisfaisante à toutes les exigences et les contraintes imposées et qui répondent mieux aux objectifs définis dans le cahier des charges. Par exemple, au niveau structurelle d'un système à concevoir, l'optimisation géométrique permet de déterminer la forme, les dimensions optimale et la topologie convenables des composants en tenant compte des contraintes multi-physiques.

Le type d'optimisation (local, global) d'un système s'effectue en fonction de l'algorithme d'optimisation (recuit simulé, algorithme génétique,...) [63] utilisé. Le critère de choix de ces algorithmes dépend de la précision désirée et du temps de calcul permis pour obtenir une solution optimale. Une étude détaillée des différents algorithmes d'optimisation est présentée par *Touya* [64].

Enfin, l'enjeu de l'optimisation dans le processus de conception des systèmes complexes est étroitement lié à l'interaction entre le processus de conception et les outils de modélisation et de résolution. En effet, le bon choix de l'outil le plus adéquat pour chaque niveau de conception et pour chaque type de système permet de raffiner la phase d'optimisation.

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les notions de système technique complexe et d'exigences, ainsi que les méthodes conventionnelles de conception. Par la suite, nous avons détaillé la démarche de dimensionnement d'un système dynamique, puis quelques langages de modélisation et de simulation ont été présentés. Enfin les enjeux d'optimisation ont été dis-

cutés.

L'augmentation de la complexité des systèmes crée plus de difficultés dans le processus de conception, ce qui mène à l'augmentation du coût de conception. Avec l'utilisation des méthodologies de dimensionnement conventionnelles de type «dimensionnement-simulation-retour à l'étape initiale en cas échec», l'optimisation est généralement locale et la probabilité de sur-dimensionnement du système à concevoir est élevée. Aussi, le découplage entre les différentes phases de dimensionnement pour les différentes disciplines entraîne le sur-dimensionnement du produit.

Les difficultés d'optimisation incitent les industrielles à mener un grand effort dans les premières phases du cycle de conception afin d'intégrer au plus tôt les exigences et de structurer le processus de conception pour que la solution générée soit conforme aux spécifications, et ainsi, éviter de re-dimensionner le produit. Pour cela, nous présentons dans le chapitre suivant les méthodes de conception par intervalles permettant l'intégration des exigences dans les phases de conception préliminaire voire d'embodiment design.

Chapitre 2 : Méthode de conception par intervalles

Chapitre 2

Méthode de conception par intervalles

2.1 Introduction

La conception d'un système technique complexe doit, le plus souvent, prendre en compte les aspects de plusieurs disciplines. Dans de tels cas, le raisonnement humain seul n'est plus suffisant, car il devient difficile de percevoir tous les couplages multi-physiques et de comprendre comment agir pour améliorer les objectifs choisis. Cette complexité du problème conduit naturellement à l'utilisation de techniques de conception robustes destinées à faciliter la détermination des meilleures solutions qui répondent bien aux différents types d'exigences (statiques, dynamiques, ...) imposées.

Nous présentons dans ce chapitre l'approche par intervalles qui peut fournir une alternative intéressante aux méthodes de conception usuelles notamment dans le cadre de systèmes techniques complexes où une prise en compte globale des contraintes et exigences est nécessaire.

Dans le contexte de conception par intervalles, on s'intéresse dans ce chapitre aux méthodes de résolution ensemblistes et à la sous-catégorie des méthodes par intervalles. Ces méthodes sont basées essentiellement sur des ensembles et des opérations mathématiques ensemblistes. Elles sont initialement introduites par *Moore* [65] en 1966 pour modéliser l'imprécision et l'incertitude et pour prendre en compte des erreurs numériques dues à la représentation finie des nombres réels sur un ordinateur. Puis, elles sont développées et intégrées dans la conception de systèmes comme un moyen garanti de recherche des solutions [2, 12, 51, 66–68]. Généralement, le processus de conception par intervalles s'appuie sur la méthode de calcul par intervalles. Cette dernière représente un cas d'application des méthodes ensemblistes de résolution, où les ensembles sont remplacés par des intervalles.

L'avantage du calcul par intervalles est que le comportement du système à concevoir ne peut pas être évalué de façon unique ; une enveloppe de performance est obtenue. En effet, le calcul par intervalles permet de propager les domaines d'incertitudes introduits dans les variables de conception afin d'obtenir une enveloppe contenant l'ensemble des trajectoires qui représente le comportement du système étudié d'une manière garantie.

Durant ces dernières années, et dans le cadre de résolution des problèmes industriels complexes, plusieurs algorithmes qui se basent sur le calcul par intervalles ont été développés. Parmi les algorithmes qui nous intéressent, et qui ont été appliqués récemment dans la conception des systèmes multi-disciplinaires, nous nous concentrerons sur les NCSP (Numerical Constraint Satisfaction Problem).

La technique de modélisation et de résolution à base de NCSP est une approche prometteuse pour la résolution de systèmes de contraintes sur des domaines réels ou mixtes. Elle a été développée dans le cadre de la caractérisation d'ensembles par contraction, et est basée sur des méthodes de consistance permettant de réduire les domaines des variables tout en limitant le recours aux bisections. L'emploi de la propagation de contraintes garantit la complétude des résultats et l'efficacité des méthodes de filtrage par le calcul de consistances.

Dans ce chapitre, nous commençons par une présentation du calcul par intervalles. Ensuite, nous présentons la programmation par contraintes sur intervalles et nous détaillons les algorithmes et techniques de consistance utilisés dans cette méthode. Enfin, une comparaison entre la méthode de conception par intervalles et une méthode de conception classique est présentée.

2.2 Calcul par intervalles

La méthode de calcul par intervalles est un outil de résolution numérique garantie. Elle a été développée dans l'objectif de prendre en compte l'incertitude et de fournir un support mathématique pour la résolution des problèmes ensemblistes [69–71].

La représentation concrète d'un nombre réel est en général impossible [69], même si différentes représentations ont été utilisées pour le calcul numérique. Ces représentations travaillent avec un nombre fini de chiffres, ce qui permet de calculer rapidement les résultats, mais nécessite de les arrondir, ce qui implique une erreur d'approximation entre le nombre réel et le nombre représenté. La précision dépend du nombre de chiffres significatifs retenus [70]. Alors, si on désire avoir un résultat valide et un calcul exact, on utilise l'arithmétique des intervalles qui est une méthode pratique permettant de réaliser des opérations dont le résultat obtenu est toujours certain. De nombreuses applications ont été développées depuis son introduction [65, 72], comme l'optimisation linéaire, les méthodes d'estimation dans le cas non-linéaire, la résolution d'équations différentielles ordinaires, le traitement d'incertitudes, etc. L'arithmétique par intervalles est utilisée pour résoudre les problèmes d'incertitudes [69, 70, 73], car elle permet par exemple, de représenter l'incertitude de mesure en remplaçant une valeur x mesurée avec imprécision ε par l'intervalle $[x - \varepsilon ; x + \varepsilon]$. L'objectif de l'arithmétique par intervalles est de fournir des résultats qui contiennent à coup sûr la valeur ou l'ensemble cherché en se basant sur la représentation par intervalles ; on parle alors de résultats garantis ou validés.

2.2.1 Intervalles

Les intervalles sont des ensembles convexes [69, 74], c'est-à-dire que si x et y appartiennent à l'intervalle I , pour tout z réel tel que $x \leq z \leq y$ alors z appartient à l'intervalle I .

Soient x et y deux nombres réels. On définit les intervalles de la façon suivante [70, 74] :

$$]x ; y[= \{z \mid x < z < y\} \quad (2.1)$$

$$[x ; y[= \{z \mid x \leq z < y\} \quad (2.2)$$

$$]x ; y] = \{z \mid x < z \leq y\} \quad (2.3)$$

$$[x ; y] = \{z \mid x \leq z \leq y\} \quad (2.4)$$

$$]x ; +\infty[= \{z \mid x < z\} \quad (2.5)$$

$$[x ; +\infty[= \{z \mid x \leq z\} \quad (2.6)$$

$$]-\infty ; y[= \{z \mid z < y\} \quad (2.7)$$

$$]-\infty ; y] = \{z \mid z \leq y\} \quad (2.8)$$

$$]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R} \quad (2.9)$$

La borne supérieure :

$$Sup[x ; y] = y \quad (2.10)$$

La borne inférieure :

$$Inf[x ; y] = x \quad (2.11)$$

La largeur :

$$W([x ; y]) = y - x \geq 0 \quad (2.12)$$

Le milieu :

$$mid([x ; y]) = \frac{y+x}{2} \quad (2.13)$$

Le rayon :

$$rad([x ; y]) = \frac{y-x}{2} \quad (2.14)$$

On appelle :

- Intervalles fermés, les intervalles, $[x ; y]$, $[x ; +\infty[$, $]-\infty ; y]$, $]-\infty ; +\infty[$,
- Intervalle fermé borné, l'intervalle $[x ; y]$,
- Intervalles ouverts, les intervalles $]x ; y[$, $]x ; +\infty[$, $]-\infty ; y[$, $]-\infty ; +\infty[$,
- Intervalles semi-ouverts ou intervalles semi-fermés, les intervalles $]x ; y]$, $[x ; y[$, $]-\infty ; +\infty[$.

Si \mathbf{x} est un intervalle, on note \underline{x} sa borne inférieure et \bar{x} sa borne supérieure. On parle d'intervalle dégénéré lorsque $\underline{x} = \bar{x}$ [74]. La représentation des nombres réels sur un processeur à précision finie est effectuée par l'utilisation des intervalles dégénérés [74].

2.2.2 Opérations arithmétiques

Les opérations entre intervalles [69, 75–77] sont basées sur les opérations mathématiques élémentaires entre des valeurs réelles et les opérations entre ensembles (voir Annexe A). Le calcul entre intervalles revient à appliquer l'opération mathématique sur leurs bornes en fonction de la définition et des règles suivantes.

Définition : Le résultat d'une opération entre deux intervalles de bornes finies : $\mathbf{x} \odot \mathbf{y}$, d'une fonction $f(z)$, est le plus petit intervalle au sens de l'inclusion (ou vecteur intervalle) contenant [69] :

$$\{x \odot y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \longrightarrow \{f(z) \mid z \in \mathbf{z}\} \quad (2.15)$$

C'est-à-dire le plus petit intervalle contenant tous les résultats possibles de l'opération appliquée sur tous les éléments x de \mathbf{x} et tous les éléments y de \mathbf{y} , tous les résultats possibles de f sont représentées par les éléments z de \mathbf{z} .

La relation précédente est valable pour toutes les opérations à l'exception de la division lorsque $0 \in [\underline{y}; \bar{y}]$. Dans ce dernier cas, le résultat n'est pas un intervalle mais l'union de deux intervalles.

Soient \mathbf{x} et \mathbf{y} des intervalles fermés bornés et c un scalaire, les opérations de base de l'arithmétique par intervalles peuvent être calculés en utilisant leur monotonie, ce qui permet de les exprimer en utilisant les bornes des intervalles. Dans l'arithmétique par intervalles, on ne manipule plus des nombres, mais des intervalles. Voici les quatre opérations basiques de calcul par intervalles :

Pour l'addition

$$[\underline{x}; \bar{x}] + [\underline{y}; \bar{y}] = [\underline{x+y}; \bar{x+y}] \quad (2.16)$$

Pour la soustraction

$$[\underline{x}; \bar{x}] - [\underline{y}; \bar{y}] = [\underline{x-\bar{y}}; \bar{x-y}] \quad (2.17)$$

Pour la multiplication par un scalaire c positif

$$c \cdot [\underline{x}; \bar{x}] = [c \cdot \underline{x}; c \cdot \bar{x}] \quad (2.18)$$

Pour la multiplication

$$[\underline{x}; \bar{x}] \times [\underline{y}; \bar{y}] = [\min(\underline{x} \times \underline{y}; \underline{x} \times \bar{y}; \bar{x} \times \underline{y}; \bar{x} \times \bar{y}); \max(\underline{x} \times \underline{y}; \underline{x} \times \bar{y}; \bar{x} \times \underline{y}; \bar{x} \times \bar{y})] \quad (2.19)$$

Pour l'inverse, si $0 \notin [\underline{x}; \bar{x}]$

$$\frac{1}{[\underline{x}; \bar{x}]} = \left[\frac{1}{\bar{x}}; \frac{1}{\underline{x}} \right] \quad (2.20)$$

Pour la division, si $0 \notin [\underline{y}; \bar{y}]$

$$\frac{[\underline{x}; \bar{x}]}{[\underline{y}; \bar{y}]} = \left[\min\left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}; \frac{\underline{x}}{\bar{y}}; \frac{\bar{x}}{\underline{y}}; \frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right), \max\left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}; \frac{\underline{x}}{\bar{y}}; \frac{\bar{x}}{\underline{y}}; \frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right) \right] \quad (2.21)$$

Lorsque $\mathbf{y} = [0; 0]$, alors, on se base sur la définition [71] :

$$\frac{[\underline{x}; \bar{x}]}{[\underline{y}; \bar{y}]} = \emptyset \text{ si } \mathbf{y} = [0; 0] \quad (2.22)$$

$$\frac{[\underline{x}; \bar{x}]}{[\underline{y}; \bar{y}]} = [\underline{x}; \bar{x}] \times \left[\frac{1}{\bar{y}}; +\infty \right] \text{ si } \underline{y} = 0 \text{ et } \bar{y} > 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{[\underline{x}; \bar{x}]}{[\underline{y}; \bar{y}]} = [\underline{x}; \bar{x}] \times \left[-\infty; \frac{1}{\underline{y}} \right] \text{ si } \underline{y} < 0 \text{ et } \bar{y} = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{[\underline{x}; \bar{x}]}{[\underline{y}; \bar{y}]} =]-\infty; +\infty[\text{ si } \underline{y} < 0 \text{ et } \bar{y} > 0 \quad (2.25)$$

L'arithmétique par intervalles continue à se développer, mais avec des objectifs différents. C'est par exemple un des rares outils déterministes permettant de déterminer l'optimum global d'une fonction continue sans condition de différentiabilité [78], ou encore tous les zéros d'une fonction en prouvant leur existence et éventuellement l'unicité et aussi l'image directe ou inverse d'un ensemble par une fonction.

2.2.3 Phénomène de dépendance

On considère un intervalle $\mathbf{a} = [a; \bar{a}]$ non dégénéré, et une opération $o \in \{+, -, \times, /\}$. En calculant par exemple le milieu, ou le rayon de l'intervalle $[a]$ suivant les relations 2.13, 2.14, on obtient :

$$\mathbf{a} o \mathbf{a} = \{a o b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{a}\} \quad (2.26)$$

Bien que l'opération "o" s'applique sur le même intervalle \mathbf{a} , les variables a et b sont considérées comme indépendantes ; c'est le phénomène de dépendance [65, 74].

2.2.4 Fonctions d'inclusion

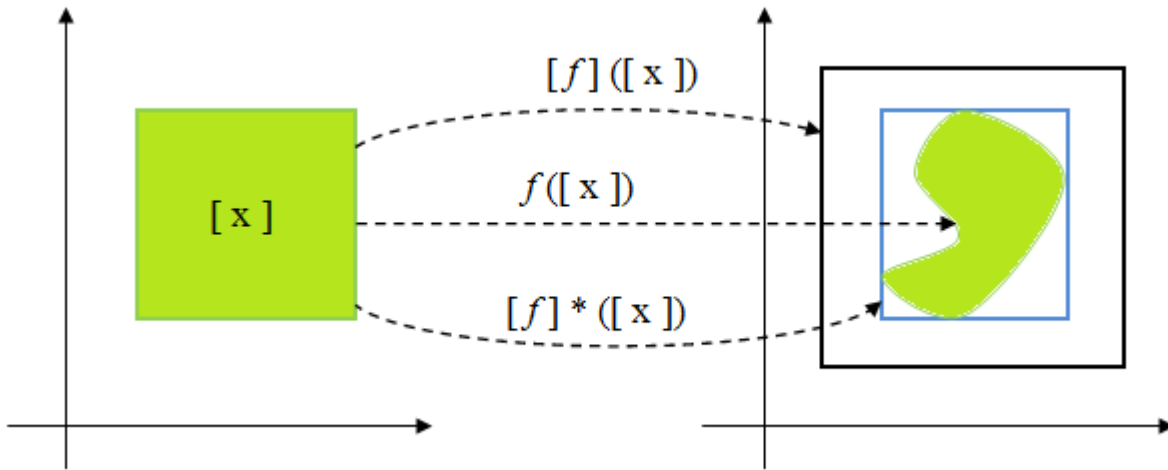


FIGURE 2.1 – Exemple de fonctions d'inclusion.

On considère une fonction vectorielle f contenant un certain nombre d'opérations arithmétiques et de fonctions élémentaires $\{\cos, \exp, \dots\}$ telle que :

$$f : \mathbb{D} \in \mathbb{R}^{nx} \longrightarrow \mathbb{R}^{ny}$$

Toute fonction de \mathbb{R}^{nx} dans \mathbb{R}^{ny} et vérifiant la propriété suivante est une fonction d'inclusion de f notée $[f]$:

$$f([x]) = \{f(x) \mid x \in [x]\} \subseteq [f]([x]) \quad (2.27)$$

Généralement, la fonction d'inclusion [74, 77, 79, 80] n'est pas unique et dépend de l'écriture mathématique de f . L'analyse par intervalles permet d'utiliser des fonctions d'inclusion peu pessimistes dans le sens où la taille de $([f]([x]) - f([x]))$ est assez petite.

Une fonction f d'inclusion est minimale si pour tout $[x]$, le plus petit pavé qui contient $f([x])$ est $[f]([x])$.

La fonction f possède une seule fonction d'inclusion minimale noté $[f]^*$. Cette propriété est décrite sur la figure 2.1 pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Selon cette figure, la fonction d'inclusion minimale $[f]^*$ est définie par le pavé en trait bleu. Alors que le pavé en trait noir est une fonction d'inclusion non-minimale.

2.2.5 Fonction d'inclusion naturelle

Une fonction d'inclusion naturelle $[f]$ de f (tel que f est une fonction définie comme suite : $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{nx} \rightarrow \mathbb{R}^{ny}$) est obtenue en substituant chaque variable réelle x_i par son domaine $[x_i]$ et chaque opération arithmétique par son extension intervalle [74, 77]. La fonction d'inclusion naturelle est minimale si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $ny = 1$.
- f est composée de fonctions continues.
- Toutes les variables sont monooccurrences.

2.2.6 Fonction d'inclusion centrée

La fonction d'inclusion centrée [74, 77], est une méthode de calcul de fonction d'inclusion qui permet de réduire le pessimisme¹ dû au phénomène de dépendance. L'application de la fonction d'inclusion centrée sur les fonction différentiables $f : \mathbb{R}^{nx} \rightarrow \mathbb{R}^{ny}$ sur un pavé $[x] \subset \mathbb{R}^{nx}$ se base sur le théorème de la valeur moyenne,

$$\forall x \in [x], \exists y \in [x] \mid f(x) = f(m([x]) + J(y)(x - m([x]))) \quad (2.28)$$

Avec : m la valeur moyenne et J le Jacobien de la fonction f de dimensions $nx \times ny$.

Ainsi, $[J]$ est la fonction d'inclusion naturelle de J et on a la propriété suivante :

$$\forall x \in [x], f(x) \in f(m([x])) + [J]([x])(x - m([x])) \quad (2.29)$$

Tel que

$$f([x]) \subseteq f(m([x])) + [J]([x])([x] - m([x])) \quad (2.30)$$

D'où, la fonction d'inclusion centrée f_c de f est de la forme suivante :

$$f_c([x]) \equiv f(m([x])) + [J]([x])([x] - m([x])) \quad (2.31)$$

1. Parfois, le résultat d'une suite d'opérations entre deux ou plusieurs intervalles n'est pas minimal, l'intervalle obtenu est donc pessimiste et l'opération est dite conservatrice. Ce problème majeur de l'algèbre des intervalles est dû principalement à deux phénomènes : la dépendance et l'enveloppement [77].

2.2.7 Fonctions d'inclusion de Taylor

Les fonctions d'inclusion de Taylor [74, 77] sont applicables sur les fonctions à ordre de dérivation plus élevé [78, 81]. Elles se basent sur les développements de Taylor et permettent d'obtenir de meilleures approximations d'une fonction $f : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ sur un pavé $[x]$. A titre d'exemple, nous présentons ci-dessus la fonction d'inclusion de Taylor limitée à l'ordre deux :

$$[f_T]([x]) = f(\hat{x}) + J(\hat{x})([x] - \hat{x}) + \frac{1}{2}([x] - \hat{x})^T [H]([x])([x] - \hat{x}) \quad (2.32)$$

où $\hat{x} = m([x])$, J est le gradient de f et $[H]([x])$ est la matrice Hessienne par intervalles de f . L'avantage des fonctions d'inclusion de Taylor est leur capacité à réduire le pessimisme.

Dans le cadre de la caractérisation d'ensembles par contraction, plusieurs algorithmes basés sur la méthode de calcul par intervalles sont développés pour résoudre des problèmes de satisfaction de contraintes en variables réelles ou mixtes (NCSP).

2.3 Les CSP numériques (NCSP)

La programmation par contraintes est un paradigme de programmation apparu dans les années 1980, permettant de résoudre des problèmes combinatoires de grandes tailles tels que les problèmes de planification et d'ordonnancement. Un problème de satisfaction de contraintes (Constraint Satisfaction Problem, CSP) [11, 65, 82–87] est un problème mathématique où l'on cherche des états ou des objets satisfaisant un certain nombre de contraintes ou de propriétés. Il est défini par un triplet (X, D, C) où :

- $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ est un ensemble fini de variables qui nous appelons variables contraintes, n étant le nombre entier des variables du problème à résoudre.
- $D = \{d_1, d_2, d_3, \dots, d_n\}$ est l'ensemble des domaines des variables X tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \ x_i \in d_i \quad (2.33)$$

- $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_p\}$ est un ensemble de contraintes, p étant un nombre entier représentant le nombre de contraintes du problème.

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \exists X_i \subseteq X \mid c_i(X_i) \quad (2.34)$$

Résoudre un CSP revient à instancier chacune des variables de X tout en satisfaisant l'ensemble C des contraintes du problème.

Une contrainte est une relation entre une ou plusieurs variables qui limite les valeurs que peuvent prendre simultanément chacune des variables liées par la contrainte. Elle peut être de n'importe quel type de relation mathématique (linéaire, quadratique, non-linéaire, booléenne ...) couvrant les valeurs d'un ensemble de variables. Une solution est une instantiation des variables du problème satisfaisant toutes les contraintes de C .

On appelle propagation de contraintes, l'opération qui consiste à appliquer récursivement l'ensemble des contracteurs d'un problème de manière à procéder à une réduction exhaustive des intervalles. Cette technique de filtrage permet de réduire la taille de l'espace des solutions à parcourir (on parle de propagation de contraintes enchaînée sur les CSP numériques).

2.3.1 Consistance

Plusieurs techniques de consistance existent dans la littérature [12, 67]. On présente les deux grandes catégories :

- **Hull-consistance** : Soient (X, D, C) , un problème de satisfaction de contraintes impliquant un vecteur X de n variables, et soit $[x]$ le domaine de x .

(X, D, C) est dit Hull-consistant, si pour toute contrainte c dans C et pour tout $i \mid (1 \leq i \leq n)$, il existe deux points dans $[x]$ satisfaisant c et dont les i^{mes} coordonnées sont respectivement \underline{x}_i et \bar{x}_i . La propriété clé de l'uniformité de la Hull-consistance se situe entre la combinaison de raisonnement locale et la représentation par intervalle des domaines. Ce concept a apporté une amélioration décisive pour les solveurs traditionnels numériques de Newton qui sont basiquement capables de contracter globalement les domaines.

Un exemple explicatif sur la Hull-consistance qui comprend deux variables et une contrainte, est détaillé ci-dessous :

$$y = x^2 - 3 \text{ avec } (x, y) \in [0 ; 4] \times [0 ; 4] \quad (2.35)$$

Le processus de Hull-consistance commence par :

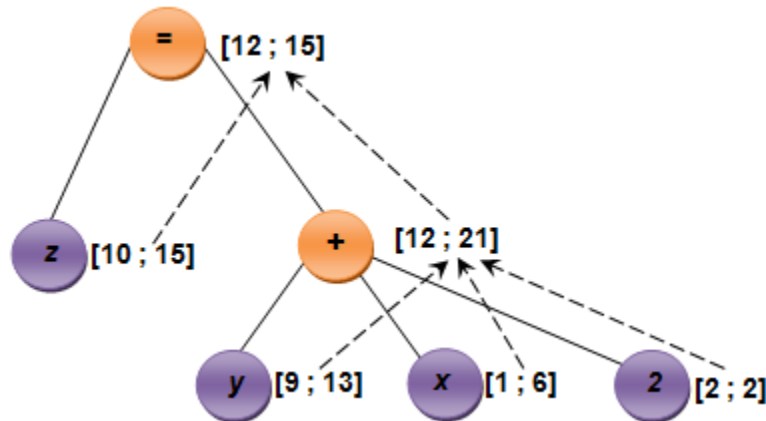


FIGURE 2.2 – Hull-consistance - évaluation avant

$$x^2 \in [0 ; 4] + 3 = [3 ; 7]$$

Ce qui implique :

$$x \in [-2.6458 ; 2.6458] \cap [0 ; 4].$$

Et finalement,

$$x \in [0 ; 2.6458]$$

Le nouveau produit cartésien $[0 ; 2.6458] \times [0 ; 4]$ est Hull-consistant avec la contrainte, et l'intervalle de x est réduit. La Hull consistance utilise le mécanisme de l'évaluation avant et de propagation arrière en se basant sur un arbre binaire. Le CSP non-Hull-consistant suivant est considéré pour illustrer ce processus :

$$(x = [1 ; 6], y = [9 ; 13], z = [10 ; 15], z = x + y + 2) \quad (2.36)$$

Les figures 2.2 et 2.3 illustrent le mécanisme de propagation appliquée à l'équation 2.36. Le processus commence par un arbre de parcours ascendant appelé évaluation avant. L'expression $(x + y + 2)$ est évaluée par application de l'addition par intervalle.

$$[1 ; 6] + [9 ; 13] + 2 = [12 ; 21].$$

La racine de l'arbre correspond à l'intersection :

$$[10 ; 15] \cap [12 ; 21] = [12 ; 15]$$

La propagation arrière est exécutée à la fin de l'évaluation avant. La contrainte est projetée sur un arbre de parcours descendant. Commenant par la racine de l'arbre, l'intervalle $[12 ; 15]$ est entrecoupé avec ses nœuds enfants. Les deux enfants deviennent $[12 ; 15]$ et la Hull-consistance du domaine de z est obtenue. Ensuite la Hull-consistance du domaine de y est calculée dans l'équation 2.37. Le même principe est appliqué pour traiter le domaine de x dans l'équation 2.38.

$$y \in [9 ; 13] \cap ([12 ; 15] - [1 ; 6] - 2) = [9 ; 13] \cap [4 ; 12] = [9 ; 12], \quad (2.37)$$

$$x \in [1 ; 6] \cap ([12 ; 15] - [9 ; 13] - 2) = [1 ; 6] \cap [-3 ; 4] = [1 ; 4]. \quad (2.38)$$

La propriété de contraction est vérifiée (i.e. $[12 ; 17] \subset [10 ; 17], [9 ; 12] \subset [9 ; 13], [1 ; 4] \subset [1 ; 6]$).

Ce processus est appliqué de manière récursive à chaque contrainte du NCSP jusqu'à atteindre un point fixe.

Comme exemple avec deux contraintes, on considère le NCSP continu suivant :

$$x \in [0 ; 10] \text{ et } y \in [-10 ; 10] \quad (2.39)$$

Les contraintes imposées sont :

$$(C_1) : x - y = 0 \quad (2.40)$$

$$(C_2) : x + 2y = 3 \quad (2.41)$$

La propagation des contraintes permet de générer le processus suivant :

$$(C_1) \Rightarrow y \in [0 ; 10] \quad (2.42)$$

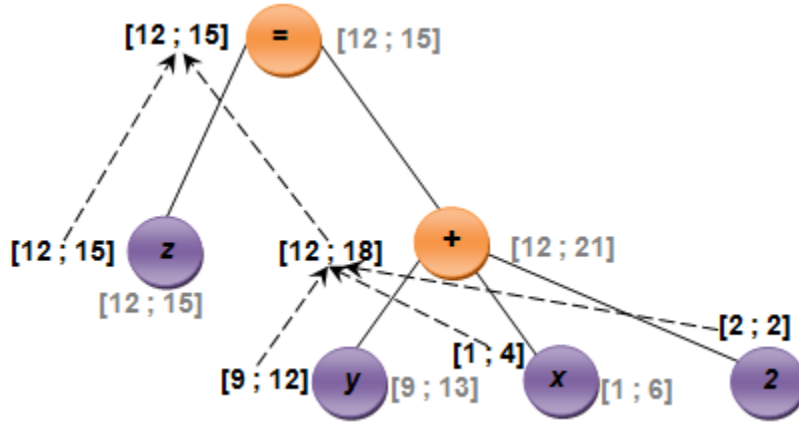


FIGURE 2.3 – Hull consistence - propagation arrière

$$(C_2) \Rightarrow x \in [0; 10] \cap (3 - 2 [0; 10]), x \in [0; 10] \cap ([-27; 3]) \Rightarrow x \in [0; 3] \quad (2.43)$$

$$(C_2) \Rightarrow y \in [0; 10] \cap \left(\frac{3 - [0; 3]}{2}\right), y \in [0; 10] \cap \left(\frac{[0; 3]}{2}\right) \Rightarrow y = [0; 1.5] \quad (2.44)$$

$$(C_1) \Rightarrow x \in [0; 3] \cap [0; 1.5] = [0; 1.5] \quad (2.45)$$

$$(C_2) \Rightarrow y \in [0; 1.5] \cap \left(\frac{3 - [0; 1.5]}{2}\right) \Rightarrow y \in [0.75; 1.5] \quad (2.46)$$

$$(C_1) \Rightarrow x \in [0; 1.5] \cap [0.75; 1.5] = [0.75; 1.5] \quad (2.47)$$

$$(C_2) \Rightarrow y \in [0.75; 1.5] \cap \left(\frac{3 - [0.75; 1.5]}{2}\right) \Rightarrow y \in [0.75; 1.125] \quad (2.48)$$

$$(C_1) \Rightarrow x \in [0.75; 1.5] \cap [0.75; 1.125] = [0.75; 1.125] \quad (2.49)$$

$$(C_2) \Rightarrow y \in [0.75; 1.125] \cap \left(\frac{3 - [0.75; 1.125]}{2}\right) \Rightarrow y \in [0.9375; 1.125] \quad (2.50)$$

⋮
⋮
⋮

Le processus se poursuit jusqu'à ce que :

$$x = y = 1 \quad (2.51)$$

- **Box-consistance** : La Box-consistance est une relaxation de la Hull-consistance [86]. Le principe, est de remplacer le test de satisfaction de contraintes dans le domaine réel par une procédure de réfutation sur le domaine de l'intervalle. Plus précisément, la définition de l'arc consistence est évaluée.

Une valeur $v_k \in D_k$ est consistante pour une contrainte c si,

$$\forall v_1 \in D_1, \dots, v_k \in D_k, \dots, v_n \in D_n, c(v_1, \dots, v_k, \dots, v_n) \neq 0.$$

Une proposition équivalente à la précédente est que la plage de c sur le domaine $(D_1 \times D_2 \times \dots \times D_{k-1} \times v_k \times D_{k+1} \times \dots \times D_n)$ est différent de zéro. Dans ce cas, une valeur peut être éliminée si tout ensemble de la plage est non nul. Alors, la définition de la box-consistance est la suivante :

Si x_k est un variable CSP et D_k est le domaine de x_k et $\forall v_k \in D_k, 0 \in c(D_1, \dots, D_{k-1}, \{v_k\}, D_{k+1}, \dots, D_n)$, alors, le domaine de x_k est Box-consistant. Le but est de trouver les valeurs extrêmes dans D_k qui sont compatibles. L'implémentation usuelle, utilise une procédure de recherche dichotomique, qui exploite la propriété de monotonie de l'évaluation par intervalle.

Comme exemple on considère la contrainte $y - x^2 = 0$ et les variables suivantes :

$$(x, y) \in [0 ; 1] \times [0 ; 6]$$

La limite gauche de y est box-consistante puisque 0 appartient à l'intervalle $0 - [0; 1]^2 = [-1; 0]$. Par contre, la limite droite est non consistante. Alors le domaine de y peut être divisé pour trouver la valeur consistante la plus à droite, comme suit :

$$[3 ; 6] - [0 ; 1]^2 = [2 ; 6] \text{ alors } [3 ; 6] \text{ est éliminé} \quad (2.52)$$

$$[0 ; 3] - [0 ; 1]^2 = [-1 ; 3] \quad (2.53)$$

$$[1.5 ; 3] - [0 ; 1]^2 = [0.5 ; 3] \text{ alors } [1.5 ; 3] \text{ est éliminé} \quad (2.54)$$

$$[0 ; 1.5] - [0 ; 1]^2 = [-1 ; 1.5] \quad (2.55)$$

.

.

.

Le domaine final calculé pour y est l'intervalle $[0 ; 1]$. Cependant, il est clair que la recherche converge lentement. Une méthode de Newton par intervalles peut être utilisée pour accélérer la convergence [86]. L'avantage principal de la Box-consistance est la possibilité de gérer le problème de l'élimination des calculs par ensemble. En effet, lorsque la variable considérée n'apparaît qu'une seule fois dans la contrainte, la Hull-consistance est équivalente à la Box-consistance et moins chère au niveau temps de calcul. La propriété principale d'un CSP numérique dans le cas où il existe une solution d'intervalle, et qu'elle est à l'intérieur des intervalles retournés par l'algorithme de Hull- ou de Box- consistance. Dans la pratique, cette condition est nécessaire mais pas suffisante et il faut un algorithme complémentaire pour trouver les véritables intervalles de solutions.

2.3.2 Stratégies et algorithmes de Branch and Prune

Les algorithmes de Branch and Prune [12] sont utilisés pour trouver les intervalles de solutions d'un CSP numérique comme montré dans l'algorithme 1. L'objectif est d'obtenir pour chaque variable une valeur supérieure et une valeur inférieure les plus proches possibles pour chaque solution du CSP numérique (X, D, C) . Pour atteindre cet objectif, l'algorithme de Branch and Prune applique de manière récursive un opérateur d'élagage (opérateur de Hull-

ou de Box- consistance). Le processus commence par un CSP donné (X, D, C) tel que la liste de solutions L est vide ($\{\emptyset\}$). À chaque étape, une variable est choisie (par l'intermédiaire de la fonction *ChooseVariable*) et son intervalle D est coupé en deux sous-intervalles D_1 et D_2 . Ensuite, l'opérateur Prune est appliqué à chacun des deux sous-intervalles sur toutes les contraintes de C . Il réduit les intervalles des autres variables du CSP. Si une bonne précision est obtenue sur D (c'est-à-dire une solution est obtenue), l'ensemble des intervalles résultant est ajouté à l'ensemble des intervalle de solutions, L . Sinon, le processus de séparation se poursuit jusqu'à ce qu'un intervalle soit vide. Le test de précision est effectué par la fonction *OKPrecise*. À la fin du processus, l'algorithme retourne L qui est la liste des solutions d'intervalle du CSP numérique donné (X, D, C) .

Algorithme 1 : Algorithme de Branch and Prune

BP(CSP(X, C, D), $\{\}$)

```

 $D \leftarrow \text{Prune}(C, D)$ 
if notEmpty( $D$ ) then
  if OkPrecise( $D$ ) then
    Insert( $D, L$ )
  else
    ( $D_1, D_2$ )  $\leftarrow$  Split( $D, \text{ChooseVariable}(X)$ )
    BP(CSP( $X, D_1, C$ ),  $L$ )
    BP(CSP( $X, D_2, C$ ),  $L$ )
  end if
end if
return  $L$ 

```

Les algorithmes de recherche comme les algorithmes de Branch and Prune commencent le processus en sélectionnant une variable à bissecter. L'ordre dans lequel la sélection des variables est effectuée, est défini comme l'ordre de référence des variables. Le choix d'un ordre correct peut être crucial pour avoir un processus de résolution efficace dans le cas de problèmes réels. Plusieurs heuristiques existent pour sélectionner l'ordre des variables à bissecter. Après avoir sélectionné la variable à bissecter, les algorithmes doivent sélectionner des sous-intervalles du domaine de la variable. Cette sélection peut également avoir un impact important sur la durée du processus de résolution. En pratique, l'efficacité d'un algorithme de Branch and Prune sur un problème donné est fortement liée à l'ordre des variables à découper. Cet ordre, qui dépend en général du problème, est appelé stratégie de résolution.

2.3.3 Optimisation et problème de satisfaction de contraintes

Le principe d'optimisation mono-objectif utilisé pour minimiser la valeur d'une variable CSP réel f [12] est décrit sur l'algorithme 2. En pratique, f devrait être une variable égale à une expression contrainte représentant le critère à minimiser. Le point clé est de résoudre par dichotomie une séquence de CSP où l'ensemble des contraintes augmente d'un CSP à un autre. Chaque CSP est résolu par la procédure de Branch and Prune. Pour chaque étape, on

Algorithme 2 Algorithme de minimisation d'une valeur de fonction utilisant le NCSP

OptimNCSP(X, C, D)

```
 $f \in [f_{min}, f_{max}]$   
 $CSP \leftarrow (X, C, D)$   
while  $f_{max} - f_{min} > \varepsilon$  do  
   $C \leftarrow C \cup \{f < \frac{f_{max} + f_{min}}{2}\}$   
  if find a solution for  $CSP$  then  
     $f_{max} \leftarrow f_{val}$   
  else  
     $C \leftarrow C - \{f < \frac{f_{max} + f_{min}}{2}\}$   
     $f_{min} = \frac{f_{max} + f_{min}}{2}$   
  end if  
end while  
return  $[f_{min}, f_{max}]$ 
```

ajoute une contrainte exprimant que le prochain NCSP doit être meilleur que l'actuel selon la minimisation imposée par la variable f . Le processus s'arrête sur le NCSP qui minimise la valeur du variable f lorsque la précision exigée ε est atteinte. On note que la solution obtenue par cet algorithme est un optimum global sans aucune condition de différentiabilité sur f .

2.4 Méthode de conception par intervalles

Dans le contexte évolutif de l'activité de conception, cette partie a pour objectif de traiter le développement des méthodes d'ingénierie. Nous aborderons la méthode de conception par intervalles. Cette méthode couvre un spectre disciplinaire très large et fait l'objet de nombreux travaux de la part de la communauté scientifique depuis quelques années (voir par exemple [2, 12, 51, 66–68]).

Le principe des méthodes de conception par intervalles est basé sur l'intégration d'exigences avant l'étape de simulation. Plusieurs études sur l'intégration de différents types d'exigences (statiques, environnementales, ...) [13, 14] ont été effectuées, mais jusqu'à maintenant le couplage entre les exigences statiques et dynamiques n'est pas encore étudié d'une manière satisfaisante.

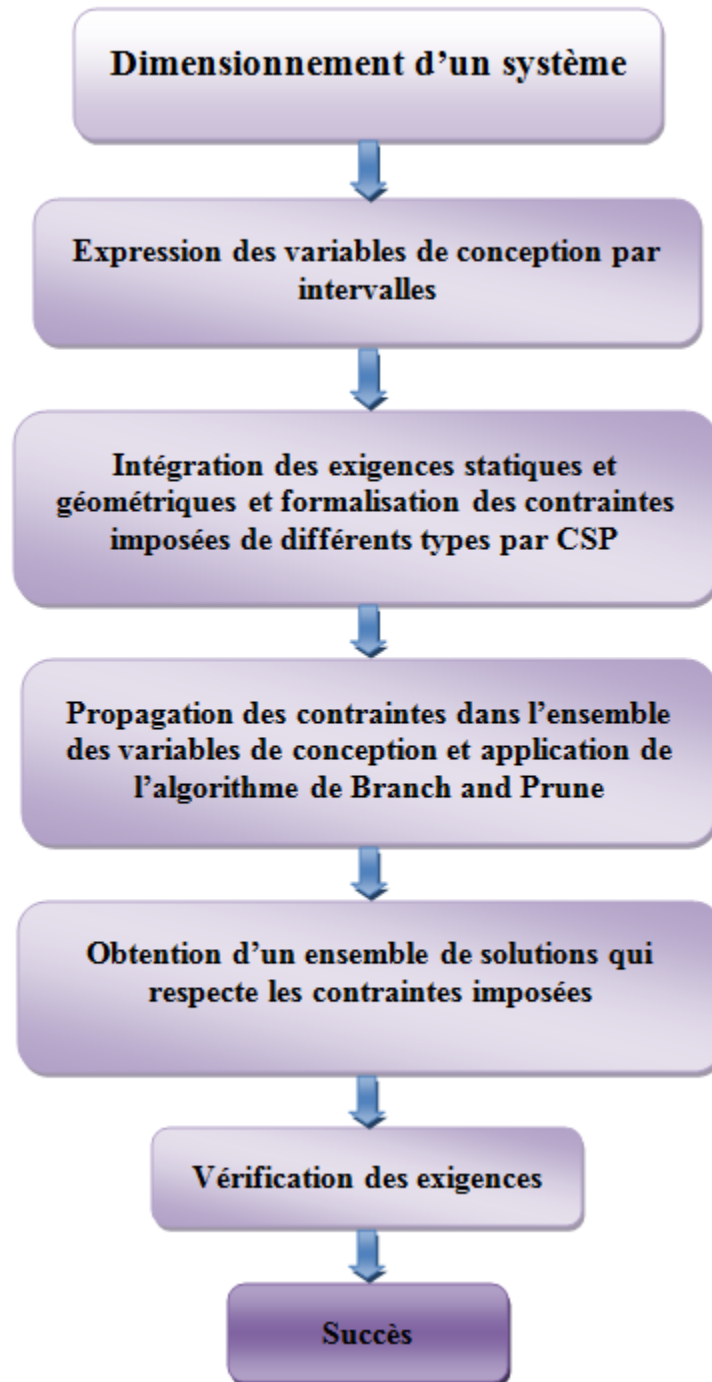


FIGURE 2.4 – Approche de conception par intervalles

La démarche de conception par intervalles avec ses différentes étapes est présentée sur la figure 2.4. Les exigences à respecter sont traduites sous forme de contraintes. Ainsi, ces contraintes sont représentées dans un modèle NCSP dont les entrées sont les variables de conception. Les variables du problème sont exprimées par intervalles. Le processus de réso-

lution fait propager les contraintes à partir du modèle NCSP et avec l'utilisation des algorithmes de Branch and Prune sur les domaines initiaux des variables de conception. A l'arrêt du processus de résolution, le résultat obtenu représente une combinaison possible des valeurs des paramètres du système à concevoir qui vérifient les exigences imposées. La solution obtenue pour chaque paramètre de conception peut être une valeur ou un intervalle de valeurs. L'optimisation d'une solution se fait par l'addition du critère d'optimisation (prix, masse, volume, ...) sous la forme d'une contrainte mathématique dans le modèle NCSP de résolution.

Un autre schéma explicatif qui décrit l'approche de conception par intervalles de manière plus simple, est présenté sur la figure 2.5. Le but de cette approche est d'obtenir les valeurs des variables de conception qui respectent les exigences imposées en se basant sur le calcul par intervalles et sur les NCPSs.

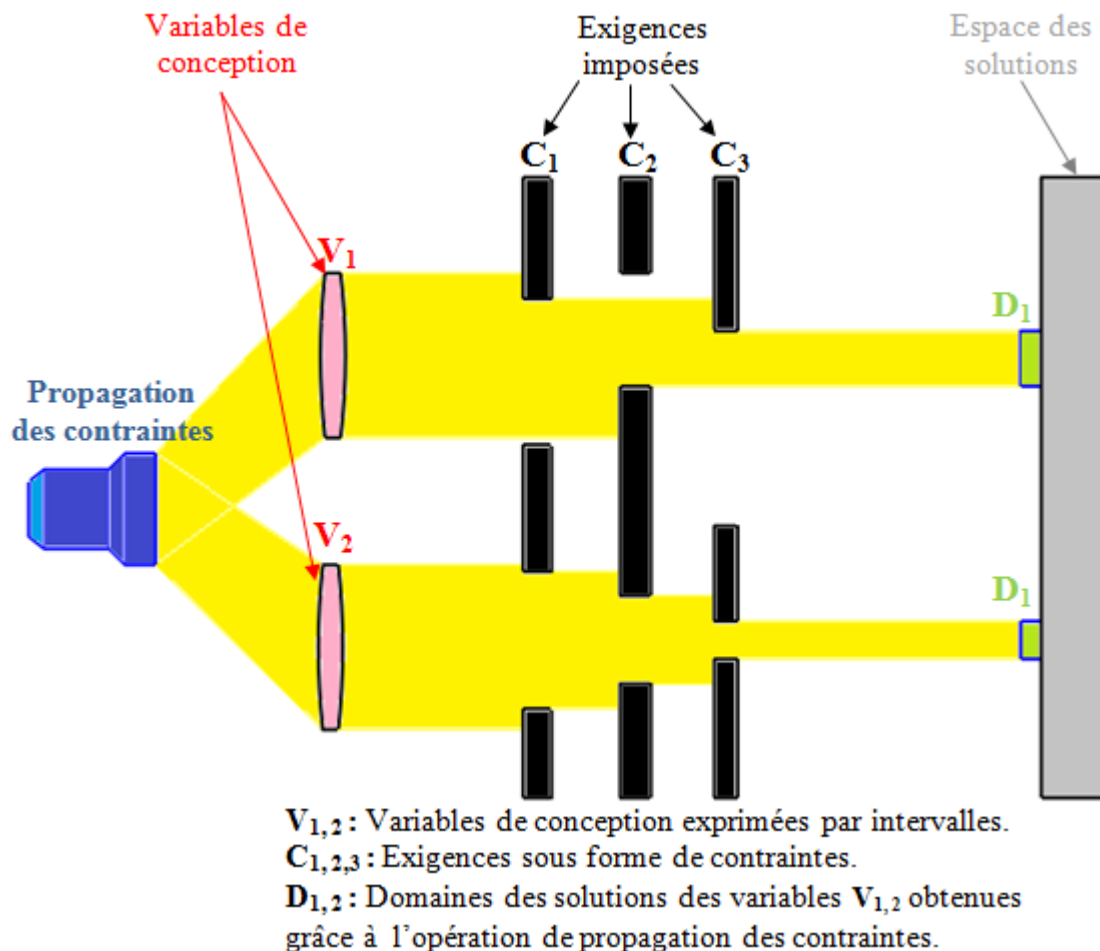


FIGURE 2.5 – Schéma explicatif résumant l'approche de conception par intervalles

Dans cette approche, les variables de conception sont exprimées par intervalles. Les limites de l'intervalle (bornes inférieure et supérieure) sont définies en fonction des règles métiers et de l'expérience dans l'activité de conception du produit, sinon, le concepteur peut

utiliser des intervalles avec des limites infinies (ex : $[a; +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$). Ces limites représentent les valeurs initiales attribuées aux variables du système à concevoir et dans lesquelles les valeurs solutions peuvent résider. Alors l'objectif est d'encadrer les valeurs solutions en se basant sur les exigences. Ces dernières sont traduites et implémentées sous forme de contraintes dans un modèle NCSP. Ainsi, pour simplifier la compréhension du mécanisme de résolution NCSP, nous considérons que l'intervalle initial pour chaque variable est l'objet et que le mécanisme de propagation des contraintes permet de projeter l'image de ces objets dans l'espace des solutions suivant la trajectoire imposée par les contraintes. Ici, chaque contrainte joue le rôle d'un filtre qui laisse passer les valeurs satisfaisant un certain type d'exigence et bloque les autres valeurs. Enfin, l'image projetée pour chaque objet (intervalle d'une variable) représente l'ensemble des solutions admissibles.

Dans le tableau 2.4, nous montrons les intérêts de la méthode de conception par intervalles à partir d'une comparaison avec une méthode de conception conventionnelle.

Méthodes de conception classiques	Méthode de conception par intervalles
<ul style="list-style-type: none"> - Les variables de conception sont exprimées par valeurs. - Évaluation unique du système. - Obtention d'une seule solution après l'étape de simulation. - Les exigences sont implémentées progressivement au fur et à mesure du niveau de conception. - Possibilité d'échec et de succès de la conception pour chaque solution proposée. - Re-concevoir le système en cas d'échec. - Problème d'optimisation locale. → surdimensionnement du système. - Nécessité d'effectuer plusieurs simulations ce qui implique un temps de calcul important. - Coût de conception élevé. 	<ul style="list-style-type: none"> - Les variables de conception sont exprimées par Intervalles. - Une enveloppe de performance du système. - Obtention d'un ensemble de solutions après l'étape de simulation. - Les exigences sont intégrées dans les phases initiales avant la simulation. - Toutes les solutions générées par cette méthode satisfont les contraintes imposées dans le cahier des charges puisque toutes les exigences sont intégrées dès le début. - Les boucles de conception type (Conception-Simulation-Retour à l'étape initiale en cas d'échec) sont évitées. - Grâce à la méthode de calcul par intervalles l'optimisation d'une solution est globale. - Optimisation du temps de calcul puisque la simulation par intervalles permet de générer un enveloppe de performance. - Optimisation du coût de de conception.

Tableau 2.1 – Comparaison entre les méthodes de conception classiques et les méthodes de conception par intervalles.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode de calcul par intervalles, puis, la méthode de programmation par contraintes. Ces deux méthodes sont les méthodes de base utilisées dans l'approche de conception par intervalles. Ensuite, nous avons détaillé les différentes phases de conception par intervalles. Cette approche est un moyen efficace, global et garanti pour la conception des systèmes multi-physiques. Elle se base essentiellement sur l'intégration des exigences. Dans la plupart des travaux scientifiques, nous trouvons que la majorité des exigences traitées dans la conception des systèmes par cette approche sont des exigences statiques et environnementales. Les exigences dynamiques sont peut traitées et de manière insatisfaisante par rapport aux autres types d'exigences de telle sorte que dans ces travaux, seuls quelques critères dynamiques (simulation par intervalles) sont considérés par rapport aux autres (stabilité, résonance,...).

Dans le chapitre suivant nous évaluons la capacité de la méthode de conception par intervalles à intégrer quelques critères d'exigences dynamiques. Ces derniers sont définis par des équations différentielles de type ordinaire qui décrivent le comportement dynamique d'un système. Cette évaluation est effectuée par l'insertion des simulations par intervalles en phases amont du processus de conception.

Chapitre 3 : Simulation par intervalles des systèmes techniques complexes

Chapitre 3

Simulation par intervalles des systèmes techniques complexes

3.1 Introduction

L'approche de conception par intervalles (cf figure 3.1) est basée sur l'intégration des exigences dans la phase préliminaire de conception. Elle permet de déterminer les solutions possibles et acceptables qui remplissent les exigences intégrées. Dans ce contexte, nous citons les travaux récents de [12, 67] sur l'intégration des exigences fonctionnelles statiques et les travaux de [13, 14] sur l'intégration des exigences environnementales. Nous constatons que malgré la diversité et la richesse des travaux scientifiques concernant les différents types d'exigences traitées, il n'y a pas d'étude satisfaisante sur la prise en compte d'exigences dynamiques et des différents critères de performance associés (stabilité, résonance, commandabilité, ...).

Dans ce travail, nous proposons une démarche de conception dans laquelle la prise en compte des exigences statiques et dynamiques est faite de manière globale et simultanée dans la même phase de conception. Ainsi, avant de passer à l'élaboration de la démarche proposée (qui se base fortement sur l'approche de conception par intervalles), nous évaluons dans ce chapitre la capacité de l'approche de conception par intervalles à prendre en compte le comportement dynamique d'un système en phase amont. L'expérimentation de cette étape initiale est primordiale pour la validation de la démarche totale de conception proposée. En effet, l'intégration de la simulation dynamique nous permet d'évaluer le comportement du système et de contrôler sa réponse en fonction des paramètres dynamiques de conception. Il est ainsi possible de filtrer les solutions et les comportements souhaités qui respectent les exigences définies dans le cahier des charges. Nous mentionnons que les systèmes étudiés dans ce travail sont de types linéaires ou non-linéaires-linéarisables.

Généralement, les systèmes linéaires sont des systèmes continus à coefficients constants. Leur comportement peut être modélisé sous forme d'équations différentielles. Ces équations différentielles sont présentées sous forme d'équations d'état. L'étude du comportement dynamique d'un système revient à résoudre ces équations différentielles.

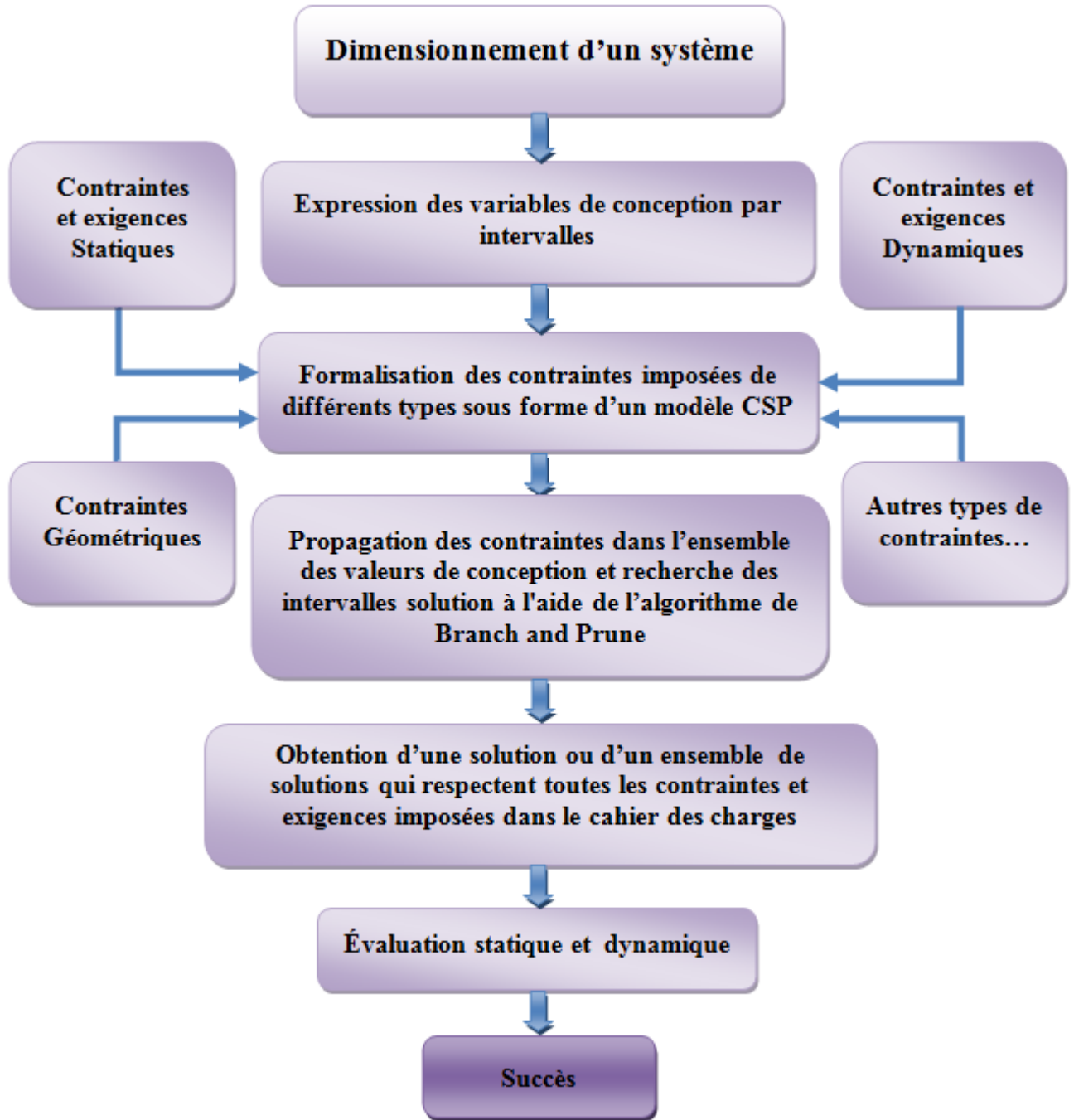


FIGURE 3.1 – Approche de conception par intervalles.

L'organisation du chapitre trois est la suivante. D'abord nous exposons les différentes présentations d'un système dynamique. Puis, nous présentons la problématique de résolution des équations différentielles par intervalles. Ensuite, nous détaillons les différentes méthodes de résolution pour ce problème.

Après avoir mise en évidence la problématique de résolution des équations différentielles par intervalles, nous appliquons l'approche de résolution établie par *Goldsztein* [15] qui se base sur l'exponentielle d'une matrice (voir annexe B) sur deux cas de système de suspension :

- Linéaire simple avec deux degrés de liberté.
- Non-linéaire-linéarisable de type MacPherson. La simulation du comportement dynamique est faite pour le cas actif et passif.

La validation de cette approche sur un cas de système technique réel est indispensable pour l'élaboration de l'approche de conception proposée. Nous mentionnons que le contenu de ce chapitre a fait l'objet d'un papier de conférence [88] et d'une proposition soumise et en cours de relecture à la revue "Journal Mathematics and Computers in Simulation" .

3.2 Représentation de la structure d'un système dynamique

Tout système dont le comportement évolue au cours du temps est un système dynamique [89–91]. La variation du comportement d'un système dynamique s'explique par l'évolution au cours du temps de ses sorties en fonction des entrées appliquées. Les entrées et les sorties d'un système dynamique représentent des grandeurs physiques quantifiables qui fournissent un caractère informationnel sur son évolution [89, 91]. Généralement, les systèmes dynamiques sont représentés par trois types de modèles linéaires :

- **La forme différentielle entrée-sortie** : Le fonctionnement d'un système se décrit mathématiquement par l'ensemble des relations algébriques et différentielles qui relient les m variables d'entrées représentées par un vecteur noté $u(t)$, les l variables de sorties représentées par un vecteur noté $y(t)$ et les variables internes du système [91]. La méthode des graphes de fluence permet d'éliminer des relations mathématiques définies, les variables internes et ainsi obtenir des relations algébriques et différentielles entre les variables de sortie et d'entrée. La relation liant les entrées et les sorties d'un système dynamique est alors la suivante :

$$L(p).y(t) = M(p).u(t) \tag{3.1}$$

Où (p est l'opérateur de dérivation ($p = \frac{d}{dt}$)).

- **La matrice de transfert entrée-sortie** : L'évolution de la sortie $y(t)$ en fonction de l'entrée $u(t)$ peut être décrit de la manière suivante en fonction de la matrice de transfert entrée-sortie [91], notée $F(p)$:

$$y(t) = F(p).u(t) \tag{3.2}$$

- **La forme d'état** : L'évolution de la sortie d'un système en fonction des entrées, auxquelles il est soumis, peut être représentée sous forme d'un modèle d'état [90,91]. Un modèle d'état d'un système est constitué d'équations d'état qui comprennent les équations différentielles d'ordre 1. Pour le cas des systèmes linéaires à coefficients constants, le modèle d'état est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) &= C.x(t) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Où $\forall t \in \mathbb{R}$:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état.
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée.
- $y(t) \in \mathbb{R}^l$ est le vecteur de sortie du système.

Où, les matrices du système $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ sont appelées respectivement : matrice d'état ou d'évolution (matrice dynamique), vecteur d'entrée ou de commande et enfin, C est le vecteur de sortie, d'observation ou de mesure. Ces matrices sont calculées à partir des équations de fonctionnement du système.

Dans ce travail, pour la simulation du comportement d'un système dynamique par intervalles, nous retiendrons la forme de représentation par équations d'état qui représente la forme la plus adaptée pour évaluer l'approche de résolution de équations différentielles ordinaires linéaires.

3.3 Problématique de résolution des équations différentielles linéaires par intervalles

Le problème de résolution des équations différentielles ordinaires (EDO) par intervalles est très souvent rencontré lors de l'étude du comportement dynamique des systèmes techniques. Dans certains cas, les paramètres et/ou l'état initial des équations différentielles sont mal définis ; la meilleure façon de prendre en compte ces incertitudes est alors de les représenter par des intervalles bornés [74, 77, 79]. Cependant, il est important de pouvoir calculer un encadrement de toutes les solutions de ces EDO sur un intervalle de temps fini. Dans ce contexte, l'application des méthodes classiques d'intégration numérique des EDO n'est pas pratique [77], car il faudrait intégrer les EDO par intervalles une infinité de fois pour déterminer l'ensemble de solutions possibles, ce qui est irréalisable.

D'un autre côté, nous trouvons la méthode de calcul par intervalles qui permet de résoudre ce problème. En effet, elle représente une méthode d'intégration numérique garantie qui permet d'effectuer le calcul avec incertitudes d'une manière garantie et simultanée.

Plusieurs travaux ont été développés sur le problème d'encadrement de l'espace atteignable des EDO sous forme d'équation d'état à l'aide de l'outil de calcul par intervalles. Parmi ces travaux, nous citons les travaux de [92–95] concernant les méthodes d'estimation d'état avec incertitudes. Elles sont applicables seulement sur des modèles linéaires tels que l'ensemble des solutions peut être exactement déterminé lorsque le vecteur d'état est de dimension réduite.

En revanche pour le cas des modèles non-linéaires, d'autres estimateurs [71, 96, 97] basés principalement sur le calcul par intervalles et la propagation par contraintes sont utilisés [77]. Ces estimateurs ont été développés pour des systèmes à temps discret. Pour l'estimation d'état

des systèmes à temps continu, on distingue trois méthodes principales [77] :

- La première méthode [98, 99] peut être appliquée sur une large classe de systèmes non-linéaires. Elle se base sur le mécanisme du filtre de Kalman de type prédiction/correction. Elle est efficace uniquement pour de faibles incertitudes à cause de l'effet d'enveloppement. En phase de prédiction, la résolution numérique garantie d'une équation différentielle ordinaire (EDO) [100] permet d'obtenir le domaine admissible de l'état à l'instant t_{j+1} et ayant un encadrement à t_j . Ensuite dans la phase de correction, la contraction de l'ensemble prédit entraîne la suppression de l'ensemble de valeurs du vecteur d'état incohérentes avec les mesures prélevées à l'instant t_{j+1} [74].
- Pour la deuxième méthode [101, 102], le mécanisme de prédiction/correction est réalisé sur la base du théorème de comparaison [103]. Cependant, l'encadrement du modèle incertain est effectué par l'utilisation de deux modèles déterministes ne contenant aucune incertitude. Ainsi, la résolution d'une équation différentielle se fait sans usage du calcul par intervalles. L'inconvénient de cette approche est la difficulté de construction des modèles minorant et majorant [74].
- La troisième méthode [104–106] est basée sur une approche en boucle fermée dont les mesures sont présumées à temps continu. Le gain de l'observateur dans cette méthode est choisi de telle manière que l'erreur d'estimation garde une dynamique coopérative [74]. Ainsi, la détermination des bornes inférieures et supérieures du domaine d'état peut être effectuée sans conservatisme dû au calcul par intervalles. Enfin, cette méthode a été étendue par *Bernard* [105] qui a proposé de construire un ensemble d'observateurs par intervalles au lieu d'un seul et récemment par *Moisan* [106] qui a ajouté un critère d'optimalité.

Les méthodes qui s'appuient sur le développement de série de Taylor par rapport au temps [65, 107–109] et par rapport aux variables [110, 111] constituent une grande contribution dans la problématique de résolution d'EDO par intervalles.

Nous présentons dans la suite de ce chapitre les méthodes de résolution des EDO qui se basent sur les modèles de Taylor par intervalles par rapport au temps.

3.3.1 Simulation par intervalles d'un système technique

Étant donné un système d'équations différentielles qui décrit les lois de comportement d'un système technique :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), p) \quad (3.4)$$

Avec :

- f est une fonction de classe $C^Y(\mathbb{D})$ définie sur : $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{nx+nu+np} \rightarrow \mathbb{R}^{nx}$.
- $x(t) = (x_1, \dots, x_{nx})^T$ est le vecteur d'état.
- $u(t) = (u_1, \dots, u_{nu})^T$ est le vecteur d'entrée.

- $p = (p_1, \dots, p_{np})^T$ sont des paramètres inconnus. Dans notre cas, il pourra s'agir des paramètres de conception de notre système.

Généralement, dans un problème de résolution des EDO incertaines, l'état initial et les paramètres sont exprimés par incertitudes. Ainsi, la solution de l'EDO admet non seulement une trajectoire unique, mais un ensemble de trajectoires admissibles appelé espace atteignable [74, 77, 99]. Le calcul et la caractérisation de l'espace atteignable peut se faire par approximation basée sur des simulations de type Monte-Carlo. La caractérisation de l'espace atteignable par cette technique n'est pas totale, puisque, seulement quelques valeurs du domaine initial choisies par des tirages aléatoires sont simulées [74, 77, 99].

Par ailleurs, les méthodes d'intégration numérique basées sur la développement en série de Taylor étendu aux intervalles, permettent de caractériser toutes les solutions admissibles du problème (3.4) pour chaque instant t d'un intervalle de temps borné. En effet, elles permettent d'obtenir un encadrement extérieur $[x(t)]$ de l'espace atteignable $\mathbb{X}(t)$ [74, 99], tel que :

$$[x(t)] \supset \mathbb{X}(t) = \{x(t) \mid x(t_0) \in \mathbb{X}_0, p \in P, \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), p)\} \quad (3.5)$$

3.3.2 Méthodes de Taylor par intervalles

Les méthodes de Taylor par intervalles comportent deux algorithmes principaux qui sont exécutés l'un après l'autre [99, 102, 107]. On peut les considérer comme les étapes de prédiction et de correction des méthodes classiques d'intégration. En effet :

- **Le premier algorithme** consiste à vérifier l'existence et l'unicité de la solution de l'EDO pour tout instant t entre t_j et t_{j+1} (avec $t_{j+1} = t_j + h$ et h est le pas d'intégration qui n'est pas nécessairement constant). La vérification utilise l'opérateur de Picard-Lindelöf et le théorème du point fixe. Si l'existence est prouvée, un pavé à priori englobant toutes les trajectoires de l'état entre t_j et t_{j+1} est calculé.

L'opérateur de Picard-Lindelöf [99] est défini par la relation suivante :

$$T(x(t)) = x_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x(s)) ds \quad (3.6)$$

Le théorème du point fixe ou de Banach est le suivant : étant donné une application continue $\psi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ définie dans un espace métrique complet (non vide) et $d(\cdot, \cdot)$ une distance métrique, et $\phi \in \mathbb{E}$ tel que $0 \leq \phi < 1$, alors pour tout x et $y \in \mathbb{E}$ et si : $d(\psi(x), \psi(y)) \leq \phi d(x, y)$ alors ψ possède un seul point fixe noté x^* qui appartient à \mathbb{E} .

Le principe de cette première étape est décrit dans l'algorithme 1 [99] :

Algorithme 1 [99] :

1. Estimer une solution a priori $[x_j]_0$ et un pas d'intégration h_j ;
2. $[x_j]_1 := [\psi]([x_j]_0)$;

3. SI $[x_j]_1 \subseteq [x_j]_0$ FIN.
4. SINON Réessayer une autre fois en réduisant $h - j$ ou en élargissant $[x_j]_0$;
5. FIN.

Cette étape constitue une approximation conservative de la vraie solution à l'instant t_{j+1} [102].

- **Le deuxième algorithme** est basé sur un développement de Taylor d'ordre élevé [99, 102]. Il consiste à réduire cet ensemble à priori pour déterminer un encadrement extérieur du domaine de l'état à l'instant t_{j+1} .

Après l'obtention d'une solution à priori $[x_j]_0$ à partir de l'exécution de l'algorithme 1, le principe de l'algorithme 2 consiste à déterminer un pavé $[x_{j+1}] \subseteq [x_j]$ dans lequel l'inclusion (\subseteq) de $x(t_{j+1}, t_0, [x_0])$ dans $[x_{j+1}]$ doit être vérifiée. Pour ce faire, on utilise le développement en série de Taylor :

$$[x_{j+1}] = [x_j] + \sum_{i=1}^{k-1} h_j^i f^{[i]}([x_j]) + h_j^k f^{[k]}([x_j]_1) \quad (3.7)$$

On obtient des encadrements garantis de toutes les solutions possibles de problème 3.4.

Algorithme 2 [99] :

1. Entrées : $[x_j], h_j, [x_j], x_j$;
2. $[Z_{j+1}] := h_j^k f^{[k]}([x_j])$.
3. $[V_{j+1}] := [x_j] + \sum_{i=1}^{k-1} h_j^i f^{[i]}(x_j) + [Z_{j+1}]$;
4. $[S_j] := I + \sum_{i=1}^{k-1} h_j^i J(f^{[i]}; [x_j])$;
5. $[x_{j+1}] := [v_{j+1}] + [S_j]([x_j] - x_j)$;
6. $x_{j+1} := m([v_{j+1}])$ (le pavé $[s_j]([x_j] - x_j)$ est symétrique) ;
7. Sorties : $[x_j + 1], x_{j+1}$.

Dans le contexte d'une EDO incertaine, le développement en série de Taylor étendu aux intervalles présente les avantages suivants :

- Il permet de réduire de manière efficace le pessimisme dû au phénomène de dépendance lié au calcul par intervalles.
- L'erreur de troncature est exprimée par une expression, ce qui permet de la borner d'une façon garantie grâce au calcul par intervalles.

Néanmoins, les méthodes de Taylor sont très pessimistes et divergent en général lorsque le temps avance.

3.4 Intégration garantie d'équations différentielles linéaires ordinaires basée sur l'approche de *Goldsztejn*

On considère le système d'équations différentielles linéaires défini par :

$$\{\dot{y}(t) = A.y(t) \text{ et } y(0) = y_0 \mid A \in \mathbb{R}^{n \times n}\}. \quad (3.8)$$

La solution de ce système différentiel est :

$$y(t) = \exp(t.A).y_0 \quad (3.9)$$

L'exponentielle d'une matrice réelle permet de résoudre les problèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires (EDO) avec valeur initiale. Le calcul numérique de l'exponentielle d'une matrice a été intensivement étudié [112–114] pour avoir des résultats plus précis et proches de la réalité. En effet, si un calcul approximatif de la relation précédente (3.9) conduit à une solution approchée pour un système différentiel linéaire ordinaire, le calcul par intervalles nous offre un cadre plus rigoureux. Ensuite, la solution est obtenue par le calcul par intervalles de la matrice sous forme d'enveloppe entourant l'exponentielle des intervalles de la matrice A .

La façon la plus évidente pour obtenir une approximation par intervalles de l'exponentielle de la matrice A est d'évaluer la série tronquée de Taylor en utilisant le calcul par intervalles et de borner le reste. Dans la suite, trois exponentielles sont décrites et évaluées :

- Exponentielle de Taylor,
- Exponentielle d'Horner,
- Exponentielle d'Horner avec réduction.

Ces travaux ont été effectués par *Goldsztejn* dans [15] pour des cas de systèmes de petites dimensions et nous proposons de les évaluer dans des systèmes de dimensions plus grandes correspondant à nos systèmes technique complexes.

L'évaluation de ces trois exponentielles a été faite sous MATLAB avec la bibliothèque de calcul par intervalles IntLab [115]. Le but est de déterminer les avantages habituels de chaque forme d'exponentielle [15], ainsi que leur utilisation en conjonction avec l'analyse par intervalles. Cela nous permettra d'avoir une idée sur le contrôle des erreurs d'arrondi.

Nous utilisons dans le calcul par intervalles la bibliothèque de calcul par intervalles INTLAB qui a été développée par *Rump* [116]. *Rump* [117] a utilisé ses découvertes pour produire la boîte à outils MATLAB INTLAB. Elle utilise uniquement des intervalles fermés bornés dont les bornes sont des nombres rationnels.

3.4.1 Série de Taylor

La série de Taylor n'est applicable que lorsque la matrice a des valeurs fixes (comme toute matrice est diagonalisable dans \mathbb{C} et que l'exponentielle d'un complexe est connue, cette méthode est très facile à mettre en œuvre). Malheureusement lorsqu'il s'agit d'intervalle,

cette définition n'est plus valable (on ne peut pas définir un intervalle de valeur propre du fait de leur caractère discontinue). Le plus simple est donc de passer par la série de Taylor :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \quad (3.10)$$

Donnons un exemple pour évaluer sa précision et montrer que la troncature de la série de Taylor n'est pas bien adaptée à l'évaluation par intervalles, même si aucune troncature de la série n'est effectuée.

Nous faisons le calcul de l'expression formelle de l'exponentielle de la matrice $A(t)$ pour tout $t \in [-9 ; -7]$ avec la méthode des valeurs propres pour sa borne supérieure et sa borne inférieure. Nous trouvons alors un résultat décevant puisque les bornes inférieures et supérieures ne peuvent pas être améliorées, c'est à dire $[\underline{\exp(A)} ; \overline{\exp(A)}]$ étant l'optimal de l'encadrement de $\exp(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \exp(A) = \begin{bmatrix} [0.0001234 ; 0.0009119] & 1 \\ 2.7183 & 7.3891 \end{bmatrix}$$

Puis on effectue le calcul de la série de Taylor tronquée à 14 termes avec un reste pratiquement négligeable qu'on peut l'estimer inférieur à :

$$\rho(\|A\|, n) \times [-9 ; -7] = \frac{\|A\|^{n+1}}{(n+1)! \times (1 - \frac{\|A\|}{n+2})} \times [-9 ; -7] \quad (3.11)$$

On obtient des résultats décevants comme nous pouvons le voir ci-dessous :

$$\exp(A) = \begin{bmatrix} [-5103.560 ; 5105.246] & 0 \\ [-486.589 ; 487.898] & 7.3891 \end{bmatrix}$$

Comme le montre l'exemple précédent, même avec un ordre assez élevé pour l'expansion de la matrice A , l'influence du reste est insignifiante. Donc l'évaluation de l'exponentielle de Taylor par intervalles montre qu'il fait grossir les limites d'intervalle d'une matrice. La raison de ce mauvais comportement de l'évaluation de la série de Taylor par intervalle est la perte de la dépendance entre les différentes occurrences des variables qui se produit au cours de toute évaluation par intervalles d'une expression. Deux techniques bien connues peuvent aider à diminuer le pessimisme dans l'évaluation de la série de Taylor par intervalles.

D'abord, une matrice dont les intervalles sont de formes centrées peut donner des résultats surtout pour des intervalles d'entrée très petits. Une telle forme centrée pour l'exponentielle d'une matrice a été proposée dans [118–120]. Toutefois, cette évaluation centrée dédiée à l'exponentiation par intervalles de matrices est très complexe et très difficile à suivre ou à mettre en œuvre.

La deuxième technique consiste à réécrire l'expression formelle de façon à obtenir une formule plus adaptée à l'évaluation par intervalle (généralement en diminuant le nombre des occurrences des variables). Par exemple, l'évaluation d'un polynôme dans sa forme de Horner est connue pour améliorer l'évaluation par intervalle [121]. Il peut être naturellement appliqué

à la série de Taylor dans l'exponentielle d'une matrice, et a été effectivement utilisé [118] pour calculer l'exponentielle d'une matrice centrée. Une preuve de la meilleure adaptation de l'exponentielle d'Horner est fournie au paragraphe suivant. Donc on peut conclure que l'exponentielle de Taylor est à utiliser lorsqu'il y a une certaine homogénéité dans les termes de la matrice et que sa norme n'est pas très importante. On choisit le nombre de termes dans la série à partir de la relation 3.12.

$$n + 2 > \| A \| \quad (3.12)$$

Ce mauvais comportement est attribué à un nombre d'opérations élevé lors de l'évaluation par intervalles.

3.4.2 Exponentielle de Horner

Pour réduire le nombre d'opérations, on applique à la série de Taylor la factorisation polynomiale de Horner. Cette méthode consiste à évaluer l'image du polynôme en un point en effectuant plusieurs divisions euclidiennes. Concrètement, au lieu d'avoir une somme avec des puissances à évaluer, nous aurons un produit de termes simples qui permet de réduire le nombre d'occurrences des termes de la matrice. Nous réduisons ainsi le temps de calcul et minimisons le coût en opérations de calcul. Le schéma d'exponentielle de Horner est le suivant :

$$\exp(A) = I + A \cdot \left(I + \frac{A}{2} \cdot \left(I + \frac{A}{3} \cdot \left(\dots \left(I + \frac{A}{n} \right) \right) \right) \right) \quad (3.13)$$

Cependant le reste est le même que celui de l'exponentielle de Taylor (ce qu'on pouvait attendre vu que cette écriture est issue de cette dernière). Si on reprend l'exemple de la partie précédente, on trouve pour $n = 16$ (et donc un reste inférieur à 10^{-6}) :

$$\exp(A) = \begin{bmatrix} [-474.602 ; 476.288] & 0 \\ [-67.172 ; 68.481] & 7.3891 \end{bmatrix}$$

On constate qu'il y a un meilleur encadrement puisque on passe pour la composante 2.1 de $[-486.589; 487.898]$ à $[-67.172; 68.481]$. Cela constitue une amélioration dans le calcul de l'exponentielle. En outre, il est démontré que la perte de dépendance due à l'évaluation d'intervalles est améliorée de façon considérable, offrant ainsi plus de précision et des calculs moins coûteux. Comme expliqué précédemment, l'évaluation centrée proposée fournit des enceintes plus nettes mais pour la résolution de notre problème ce n'est pas encore précis. C'est pourquoi *Goldsztein* dans [15] a proposé une astuce numérique réduisant le pessimisme des résultats.

3.4.3 Exponentielle de Horner avec réduction

L'objectif ici est de réduire les intervalles pour avoir une meilleure précision dans les calculs. L'astuce numérique consiste à écrire l'exponentielle sous la forme suivante :

$$\exp(A) = \left[\exp \left(\frac{A}{2^s} \right) \right]^{2^s} \quad (3.14)$$

De cette façon, nous réduisons à la fois la norme de la matrice, à la valeur qu'on souhaite, ainsi que les intervalles. Le nombre de termes à choisir est conditionné par la relation (3.15) et peut donc être diminué suivant la valeur, sans pour autant dégrader de façon significative le résultat.

$$(n + 2).2s > \| A \| \quad (3.15)$$

Cependant il faut faire attention à ne pas choisir un 's' trop grand car au moment du calcul de la puissance, l'ordinateur peut interpréter cette valeur comme l'infini, faussant irrémédiablement le résultat. Si on reprend l'exemple de la matrice A, on obtient pour $n=14$ et $s=10$ un résultat très satisfaisant comme nous pouvons le voir ci-dessous :

$$\exp(A) = \begin{bmatrix} [-0.000241 ; 1.000912] & 0 \\ [2.656588 ; 2.821840] & 7.3891 \end{bmatrix}$$

On obtient pour un même nombre de termes et un nombre d'opérations réduit, de meilleurs résultats que les deux méthodes précédentes. Il semble donc « a priori » que l'exponentielle de Horner avec réduction soit une méthode adaptée pour la résolution d'équation différentielle linéaire. Mais à ce jour, cette approche, développée par *Goldsztein* dans [15], a été testée uniquement sur des petites matrices (taille = 2×2). Un de nos objectifs est d'évaluer cette approche sur le cas d'un système dynamique réel. Cependant, pour confirmer ces résultats, nous allons tester les trois types d'exponentielle sur un cas simple bidimensionnel d'un système de suspension de type MacPherson [88].

Pour bien critiquer et faire l'évaluation des résultats obtenus par chaque exponentielle, ces trois dernières exponentielles sont appliquées sur les exemples du système de suspension exposées dans la partie suivante. Le but est de déterminer le comportement dynamique par la résolution des équations différentielles par intervalles. Deux modèles dynamiques de suspension sont utilisés : un modèle linéaire de suspension simple et un modèle non-linéaire-linéarisable de suspension MacPherson. Ils sont mis sous forme d'équation paramétrée d'état par intervalles. La solution de l'équation d'état est donnée sous la forme d'une matrice exponentielle. Ainsi, les trois formulations d'exponentielles ont été testées sur les deux modèles de suspension afin d'obtenir des résultats convergents.

3.5 Exemples de simulation dynamique par intervalles d'un système de suspension de véhicule

L'un des principaux objectifs de cette étude est d'appliquer la méthode de calcul par intervalles sur un système technique réel pour les cas linéaire et non-linéaire. La simulation dynamique par intervalles permet de déterminer un enveloppe de solution, ce qui offre la possibilité de choisir la solution admissible parmi l'ensemble des solutions existantes qui répondent bien à toutes les contraintes imposées. Le résultat de cette étude est une évaluation rigoureuse de la méthode de conception par intervalles à intégrer un type d'exigences dynamiques sous forme de simulation comportementale d'un système.

3.5.1 Système de suspension linéaire passif de véhicule

Les systèmes de suspension couvrent plusieurs domaines d'applications. Cela implique différents environnements d'exploitation, allant de l'usage domestique (chaises de bureau, ...) jusqu'à des applications de haute fiabilité et d'exigence (véhicule). Selon l'application à laquelle est dédié le système de suspension, un ou plusieurs objectifs de dimensionnement sont souvent spécifiés et doivent être optimisés. Dans l'industrie automobile d'aujourd'hui, l'optimisation d'un véhicule [122, 123] en termes de confort et de sécurité joue un rôle actif. Cela implique la réalisation d'un grand nombre de simulations pour trouver des solutions plus pratiques et innovantes, en tenant compte de la contrainte temps. Ainsi, la simulation par intervalles (résolution des équations différentielles par intervalles) représente un moyen efficace pour l'optimisation du nombre des simulations.

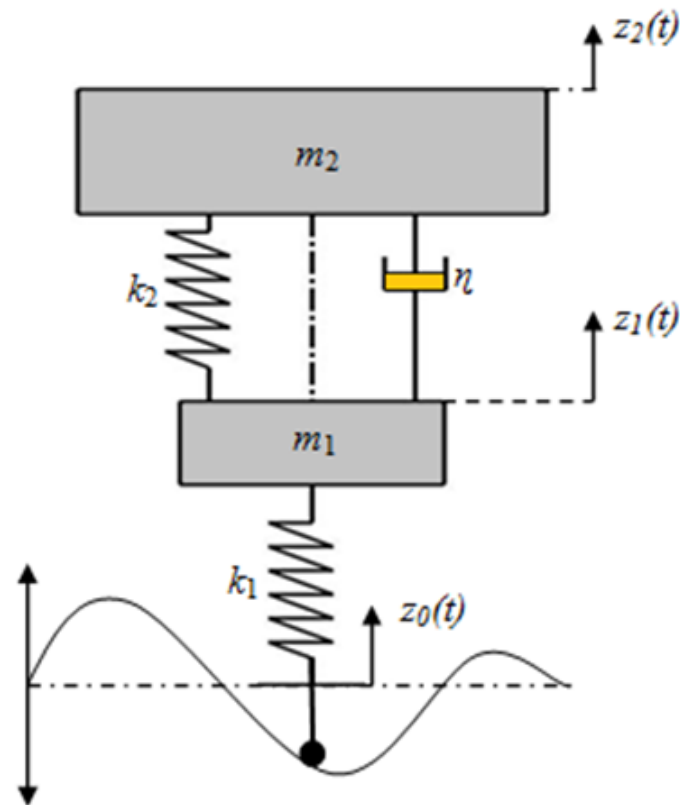


FIGURE 3.2 – Système de suspension linéaire.

L'utilisation de la suspension (cf figure 3.2) est imposée par les irrégularités de la surface sur laquelle le véhicule se déplace. Le sol n'étant jamais parfaitement plan, les imperfections font rebondir les roues de façon d'autant plus dangereuse que la vitesse est élevée. La suspension d'un véhicule a donc pour fonction de :

- Diminuer l'impact sur le support.
- Éviter l'usure excessive et la rupture.

- Améliorer le confort de conduite.
- Maintenir le contact entre les roues et le sol malgré les irrégularités.

La suspension d'un véhicule (cf figure 3.6) est composée de ressorts, d'amortisseurs et de liaisons mécaniques qui connectent la masse suspendue (châssis, caisse, moteur, passagers, ...) aux masses non-suspendues (roues, moyeux, freins, ...) qui assurent la liaison véhicule/route.

L'amortisseur joue le rôle central dans une suspension en répondant à un double objectif : il contraint l'élasticité du ressort de suspension et, par conséquent, limite les mouvements oscillatoires du véhicule (confort) ; d'autre part, il freine le rebond des roues sur les obstacles et maintient celles-ci en contact avec le sol (sécurité).

Modèle dynamique linéaire

Le modèle dynamique de la suspension étudiée est un modèle simple linéaire en mouvement plan avec un seul degré de liberté. En effet, on présente sur la figure 3.6, un système de suspension d'un quart de véhicule en mode vertical. Il est constitué du châssis m_2 qui est relié à la roue m_1 par un ressort linéaire de raideur k_2 , et en parallèle à un amortisseur linéaire visqueux muni d'un coefficient d'amortissement η . Le contact roue-sol est modélisé par un ressort linéaire de raideur k_1 (qui représente la rigidité du pneu et de la jante).

En appliquant le Principe fondamental de la dynamique, l'isolement de chaque masse donne :

$$m_2 \cdot \ddot{z}_2 + \eta \cdot (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + k_2 \cdot (z_2 - z_1) = 0 \quad (3.16)$$

$$m_1 \cdot \ddot{z}_1 + \eta \cdot (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_2 \cdot (z_1 - z_2) + k_1 \cdot (z_1 - z_0) = 0 \quad (3.17)$$

Le système à résoudre est mis sous la forme d'équation d'état suivante :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bz_0(t), \quad x(0) = x_0 \quad (3.18)$$

Avec :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} z_2 - z_1 \\ \dot{z}_2 \\ z_1 - z_0 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{\eta}{m_2} & 0 & \frac{\eta}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{\eta}{m_1} & -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{\eta}{m_1} \end{bmatrix}$$

et

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.5.2 Comportement dynamique d'une suspension linéaire passive

Nous traitons le cas où nous imposons un déplacement de 10cm sur la roue (les équations différentielles sont sans second terme puisque $\dot{z}_0 = 0$), donc le système est écrit comme suit :

$$\dot{x} = A.x(t) \quad (3.19)$$

Le système est prêt pour appliquer la matrice exponentielle. Ainsi, sans introduire d'incertitude dans les valeurs des paramètres de suspension (le système est résolu par la méthode d'exponentielle des valeurs propres).

3.5.2.1 Simulation avec des valeurs fixes

Les valeurs numériques des variables de conception du système de suspension utilisées pour la simulation de son comportement dynamique sont représentées dans le tableau 3.1. On obtient les courbes de référence indiquées sur la figure 3.3.

Tableau 3.1 – Les paramètres de conception du système de suspension

m_1	Masse de la roue	25kg
m_2	Masse du véhicule	500kg
k_1	Raideur du pneu	200000N/m
k_2	Raideur de l'amortisseur	20000N/m
η	Coefficient d'amortissement	2000N.s/m

Le comportement dynamique du système de suspension lorsqu'il est excité par un déplacement de 10cm appliqué sur la roue est représenté à la figure 3.3. Le déplacement z_2 converge vers zéro, ce qui est normal puisque le rôle d'une suspension est d'atténuer les vibrations causées par la route en un temps minimum. Nous remarquons que le châssis prend environ 3s pour se stabiliser et pour atteindre sa position d'équilibre, ce qui n'est pas une longue période compte tenu de l'amplitude d'excitation et le fait que le type de système de suspension est une suspension passive dans ce cas. Ceci prouve que les paramètres de conception sont bien choisis et plus spécifiquement la rigidité du châssis k_2 ce qui rigidifie rapidement la structure. Nous pouvons aussi remarquer que la roue se stabilise très rapidement par rapport au châssis puisque sa rigidité k_2 est plus grande que la rigidité k_1 du châssis.

La variation de la vitesse linéaire (\dot{z}_2, \dot{z}_1) est très faible par rapport à sa position d'équilibre, ce qui implique que le coefficient d'amortissement η est bien choisi.

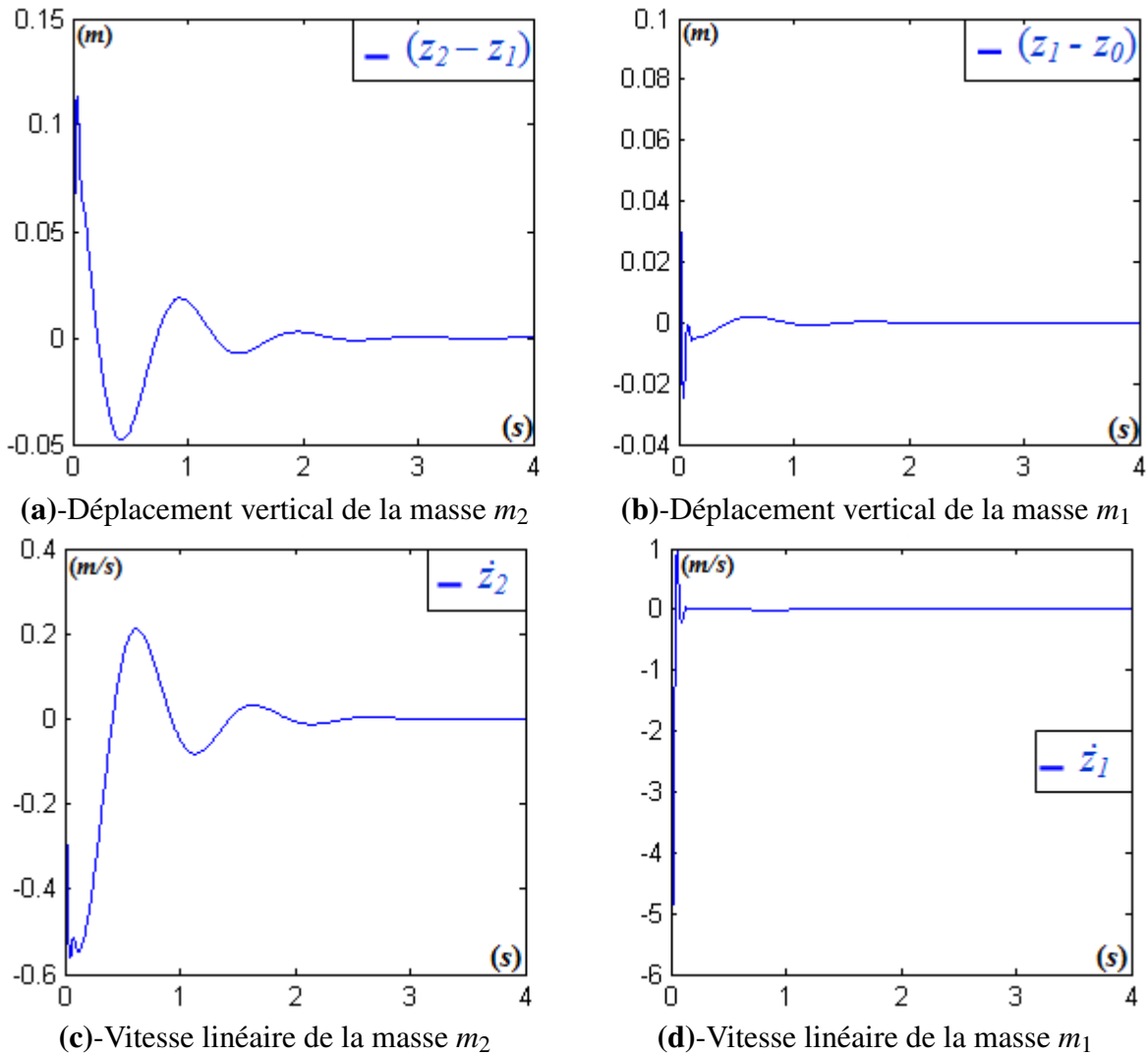


FIGURE 3.3 – Réponse dynamique d’une suspension de véhicule excitée par un déplacement instantané.

Bien que le comportement dynamique de la suspension a bien répondu aux perspectives attendues, nous cherchons d’autres comportements (s’ils existent) dans lesquels le système de suspension peut se stabiliser plus rapidement par rapport à la réponse obtenue précédemment. Nous souhaitons également étudier l’effet de la variation de la charge m_2 appliquée sur le châssis (cette charge varie en fonction du nombre et du poids des passagers du véhicule) sur le comportement de la suspension.

Ainsi, l’ensemble des solutions qui représentent les différents comportements est déterminé dans le paragraphe suivant, par l’introduction de l’incertitude dans les paramètres de conception de la suspension et par application de la méthode de calcul par intervalles.

3.5.2.2 Simulation avec incertitudes

Dans cette partie l'évaluation du comportement dynamique de la système de suspension est avec incertitude. Les incertitudes sont introduites dans les valeurs des paramètres de conception qui définissent le modèle dynamique du système de suspension. Ainsi, l'approche établie par *Goldsztejn* [15] est appliquée pour résoudre le problème d'EDO 3.19. Alors, le même calcul utilisé dans la section précédente est répété mais avec l'introduction de l'incertitude dans les valeurs de référence pour déterminer le comportement du système de suspension par intervalles.

Typiquement, pour un premier essai, une incertitude de 0,5% est appliquée sur les paramètres suivants : la rigidité k_2 , la rigidité k_1 , la masse m_2 , la masse m_1 et le coefficient d'amortissement η . Les domaines de ces paramètres de conception sont les suivants :

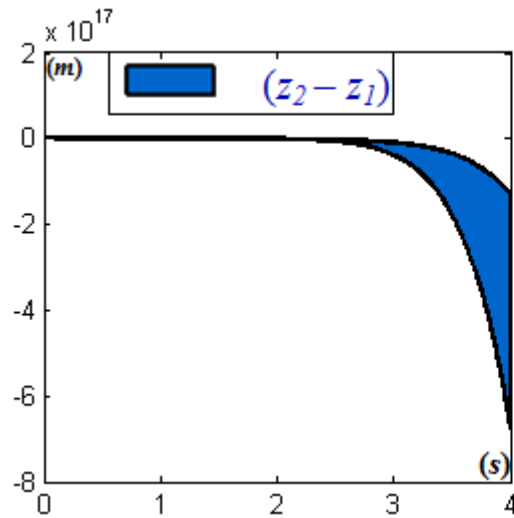
$$\begin{aligned}k_1 &= [199000 ; 201000] & m_1 &= [24.875 ; 25.125] \\ \eta &= [1990 ; 2010] \\ k_2 &= [19900 ; 20100] & m_2 &= [497.5 ; 502.5]\end{aligned}$$

Le calcul est fait sous MATLAB à l'aide de fonctions que nous avons développées sur la base de la bibliothèque de calcul par intervalles INTLAB [115] pour un nombre de termes égal à 14 pour toutes les expressions d'exponentielle (Taylor, Horner, Horner avec réduction) et un facteur de réduction égal à 45. Les résultats sont présentés sur la figure 3.4.

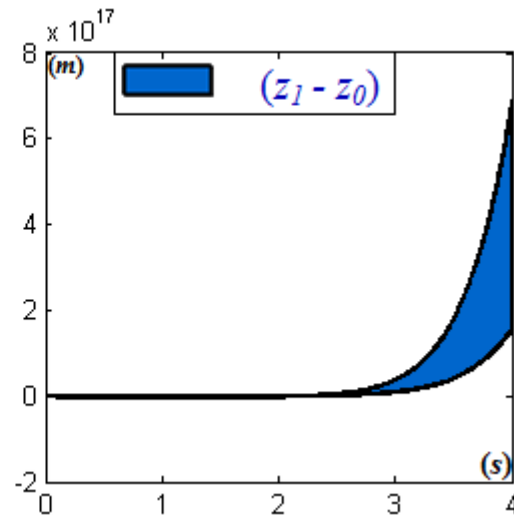
Dans la figure 3.4 le comportement du système de suspension lorsqu'il est excité par un déplacement instantané est représenté. Avec la simulation basée sur intervalles, nous pouvons déterminer une enveloppe qui comprend un ensemble de performances pour le déplacement $(z_2 - z_1)$ et le déplacement $(z_1 - z_0)$. Dans le calcul de la réponse dynamique de la suspension avec incertitude, deux types d'exponentielles ont été appliqués. Les calculs ont été faits avec Taylor (figure 3.4.a et figure 3.4.b) et l'exponentielle de Horner (figure 3.4.c et figure 3.4.d). Nous constatons que les résultats présentés dans les figures précédentes ne correspondent pas à la réalité, car une différence significative d'environ 10^{17} est identifié entre les courbes calculées avec des valeurs fixes et les courbes calculées avec incertitude.

Donc, comme mentionné dans la section 3.4.1 et la section 3.4.2, le calcul par intervalles avec l'utilisation de l'exponentielle de Taylor ou de Horner diverge ce qui confirme la divergence des courbes de déplacements $(z_2 - z_1)$ et $(z_1 - z_0)$. Cependant, nous remarquons que les courbes obtenues par Taylor divergent de manière croissante dans une seule direction alors que les courbes calculées avec l'exponentielle de Horner divergent également dans les deux sens de manière symétrique qui est proche de la réalité puisque les courbes de référence ont une forme pseudo-périodique sinusoïdale, confirmant ainsi la théorie présentée dans les section 3.4.1 et 3.4.2.

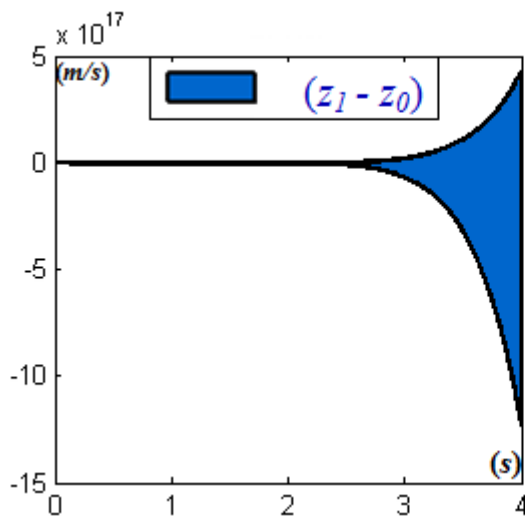
Dans la figure 3.5, l'exponentielle de Horner avec réduction est appliquée pour déterminer le comportement dynamique de la suspension. Comparant l'ensemble des solutions obtenues par simulation par intervalles avec les courbes de référence déterminées en absence d'incertitudes, nous remarquons que l'enveloppe des



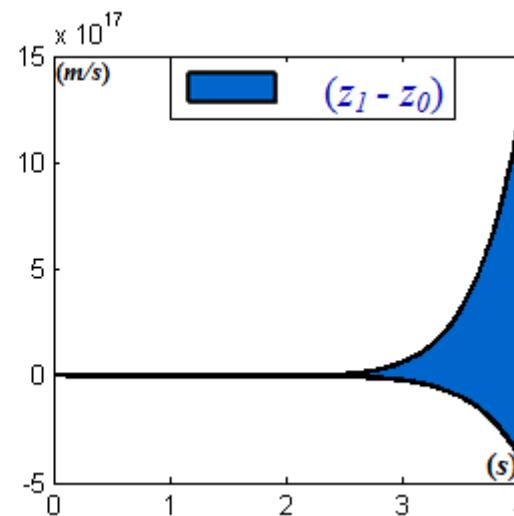
(a)-Déplacement de la masse m_2 calculé par application de l'exponentielle de Taylor



(b)-Déplacement de la masse m_1 calculé par application de l'exponentielle de Taylor



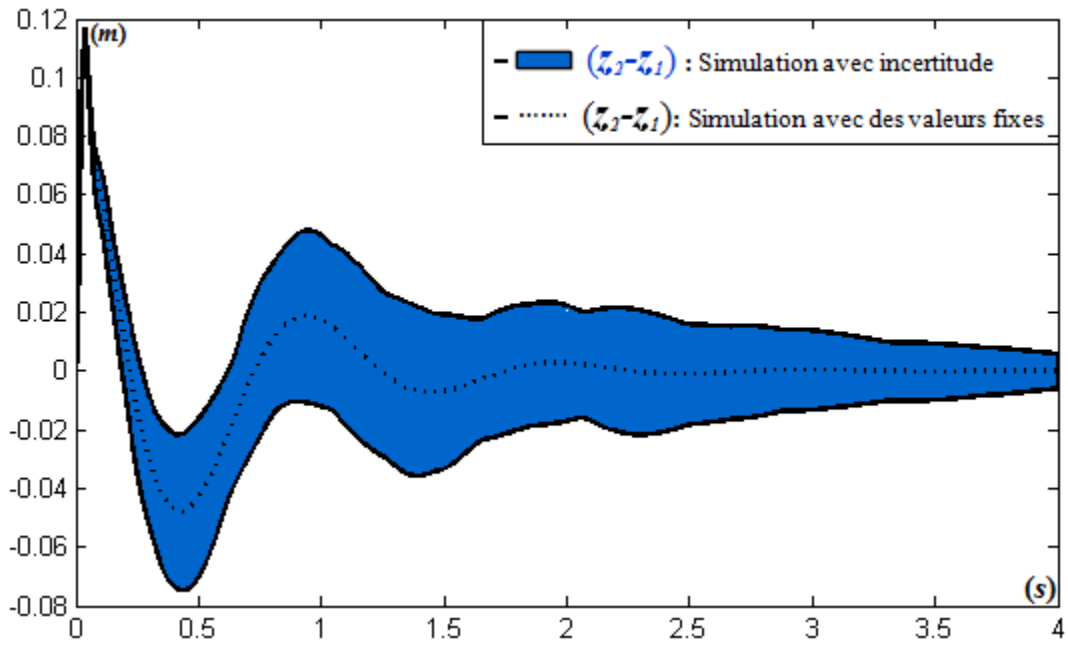
(c)-Déplacement de la masse m_2 calculé par application de l'exponentielle de Horner



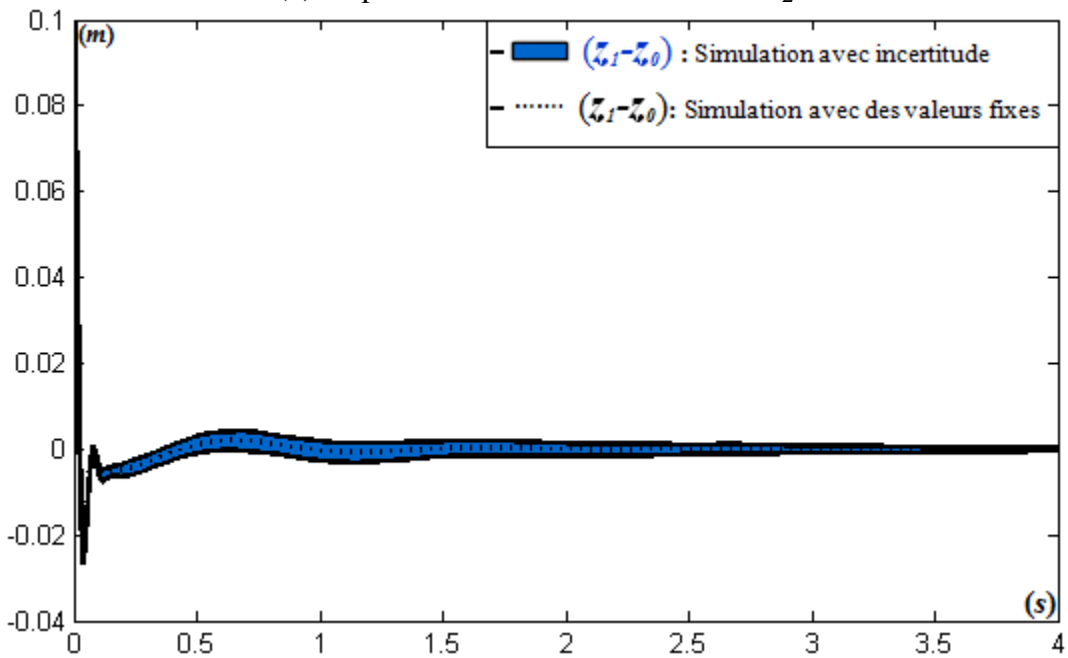
(d)-Déplacement de la masse m_1 calculé par application de l'exponentielle d'Horner

FIGURE 3.4 – Réponse dynamique d'une suspension de véhicule excitée par un déplacement instantané (application de l'exponentielle de Taylor et de l'exponentielle de Horner).

solutions obtenues est convergente, et les courbes limites de cette enveloppe ont la même apparence que les courbes calculées avec des valeurs, ce qui confirme les calculs effectués dans la section 3.4.3. Pour s'assurer de la validité de la méthode, les incertitudes ont été mises à zéro afin de vérifier que les mêmes courbes ont été bien obtenues (ce qui est le cas). Cependant, nous pouvons conclure que l'expression de l'exponentielle de Horner avec réduction est la plus adaptée pour faire le calcul de l'exponentielle d'une matrice d'intervalles.



(a)-Déplacement vertical de la masse m_2



(b)-Déplacement vertical de la masse m_1

FIGURE 3.5 – Réponse dynamique d’une suspension de véhicule excitée par un déplacement instantané (application de l’exponentielle de Horner avec réduction).

3.5.3 Système de suspension MacPherson non-linéaire-linéarisé de type passif

Le choix de ce type de système mécanique de suspension (cf, figure 3.6) s’est imposé en tant que système le plus utilisé sur les roues de l’essieu avant des véhicules récents. Il se

compose d'un seul bras de suspension transversal (ou triangle dans le type dit « pseudo MacPherson ») par côté. La jonction entre les masses suspendues et non suspendues est effectuée par une rotule côté roue et une cuvette côté châssis. L'amortisseur et le ressort hélicoïdal sont concentriques sur la jambe fixée de manière rigide au porte-fusée. La barre anti-roulis assure le guidage longitudinal du bras transversal.

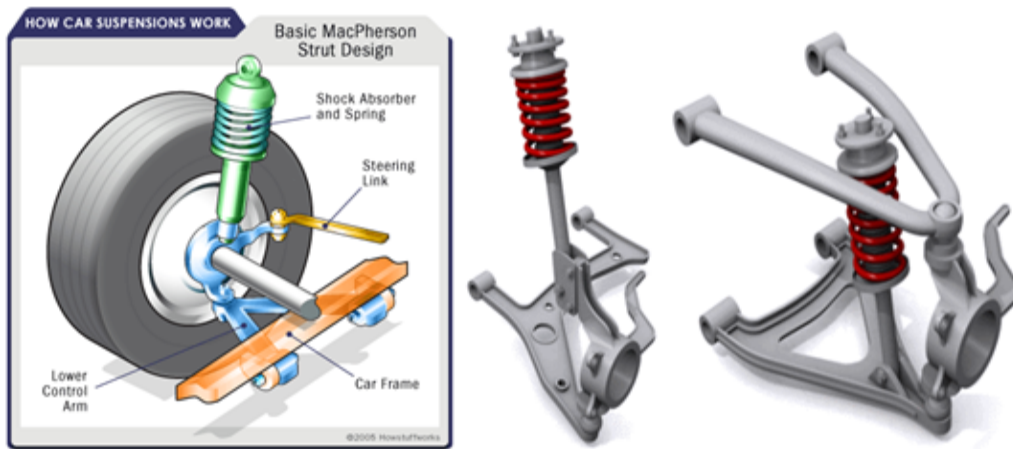


FIGURE 3.6 – Système de suspension MacPherson.

Dans le paragraphe suivant une description détaillée de l'étude du modèle dynamique de la suspension MacPherson est présentée. Le modèle utilisé est un modèle simplifié de telle sorte que les principaux éléments constituant le système de suspension sont modélisés, et qu'ils prennent en compte l'ensemble des phénomènes dynamiques.

Modèle dynamique non-linéaire

Le modèle dynamique du système de suspension MacPherson appliqué est basé sur le modèle de *Sohnetal* [16, 88, 124]. Ce dernier modélise la suspension d'un quart de véhicule. Le modèle est constitué par un essieu et un pneu, un ressort hélicoïdal, un amortisseur, un axe, un chargement de perturbation et un bras de commande. Le quart de la carrosserie du véhicule est supposé avoir seulement un mouvement vertical. Si la masse du bras de commande est ignorée et l'articulation entre le bras de commande et le corps de véhicule est supposée comme une articulation cylindrique, le degré de mouvement du carrosserie est de deux. Comme la masse du bras de commande est beaucoup plus petite que la masse suspendue et la masse non suspendue, elle peut être négligée. Sous l'hypothèse ci-dessus, le modèle du système de suspension de type MacPherson est introduit dans la figure 5.3. Le déplacement vertical z_s de la masse suspendue et l'angle de rotation θ du bras de contrôle sont choisis comme coordonnées généralisées. Les hypothèses retenues dans cette modélisation sont résumées ci-dessous :

- La masse suspendue a seulement un déplacement vertical z_s alors que le déplacement horizontal est ignoré.
- La masse non-suspendue (broche et pneu) est connectée et reliée à la carrosserie du véhicule par l'amortisseur et le ressort ainsi que le bras de commande de deux manières.
- θ désigne le déplacement angulaire du bras de commande. Les valeurs de z_s et θ sont mesurées à partir de leur point d'équilibre statique.
- La masse suspendue et la masse non-suspendue sont supposées être des particules. La masse et la rigidité du bras de commande sont négligées.
- Le débattement du ressort hélicoïdal, le débattement du pneu et les forces d'amortissement se situent dans les régions linéaires de leurs plages de fonctionnement.

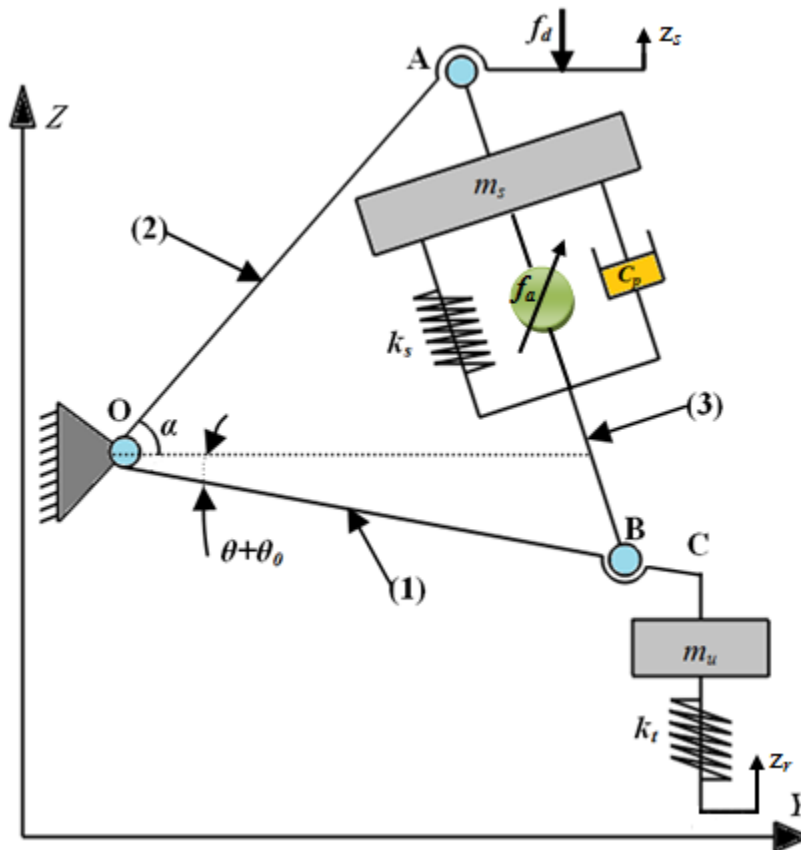


FIGURE 3.7 – Modèle dynamique de la suspension MacPherson d'un quart de véhicule.

Soient (y_A, z_A) , (y_B, z_B) et (y_C, z_C) respectivement les coordonnées des points A, B et C, lorsque le système de suspension est en position d'équilibre. On considère que si la masse suspendue est déplacée par un mouvement de translation z_s vers le haut, et si la masse non-suspendue est déplacée par un mouvement de rotation θ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, alors on obtient les équations suivantes :

$$y_A = 0 \tag{3.20}$$

$$z_A = z_s \quad (3.21)$$

$$y_B = l_B (\cos(\theta - \theta_0) - \cos(-\theta_0)) \quad (3.22)$$

$$z_B = z_s + l_B (\sin(\theta - \theta_0) - \sin(-\theta_0)) \quad (3.23)$$

$$y_C = l_C (\cos(\theta - \theta_0) - \cos(-\theta_0)) \quad (3.24)$$

$$z_C = z_s + l_C (\sin(\theta - \theta_0) - \sin(-\theta_0)) \quad (3.25)$$

Avec θ_0 le déplacement initial angulaire du bras de contrôle à partir de sa position d'équilibre. Soit :

$$\alpha' = \alpha + \theta_0 \quad (3.26)$$

Ensuite, les relations suivantes sont obtenues à partir du triangle OAB :

$$l = (l_A^2 + l_B^2 + 2l_A l_B \cos \alpha')^{\frac{1}{2}} \quad (3.27)$$

$$l' = (l_A^2 + l_B^2 + 2l_A l_B \cos(\alpha' - \theta))^{\frac{1}{2}} \quad (3.28)$$

Avec l la distance initiale entre A et B en position d'équilibre, et l' la nouvelle distance lorsque le bras de contrôle est déplacé par un mouvement de rotation θ . Par conséquent, la déformation du ressort, la vitesse relative de l'amortisseur et la déformation du pneu sont respectivement :

$$\begin{aligned} (\Delta l)^2 &= (l - l')^2 \\ &= 2a_l - b_l (\cos \alpha' + \cos(\alpha' - \theta)) - 2[a_l^2 - a_l b_l \cdot \\ &\quad (\cos \alpha' + \cos(\alpha' - \theta) + b_l^2 \cos \alpha' \cos(\alpha' - \theta))] \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$(\dot{\Delta l}) = \dot{l} - \dot{l}' = \frac{b_l \sin(\alpha' - \theta) \dot{\theta}}{2(a_l - b_l \cos(\alpha' - \theta))^{\frac{1}{2}}} \quad (3.30)$$

$$z_C - z_r = z_s + l_C (\sin(\theta - \theta_0) - z_r) \quad (3.31)$$

Tel que :

$$a_l = l_A^2 + l_B^2, b_l = 2l_A l_B \quad (3.32)$$

Équations du mouvement

La méthode de Lagrange est utilisée pour obtenir les équations du mouvement. On considère T , V et D représentant respectivement l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et la dissipation de l'énergie du système. Alors, on obtient :

$$T = \frac{1}{2} m_s \dot{z}_s^2 + \frac{1}{2} m_u (\dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) \quad (3.33)$$

$$V = \frac{1}{2} k_s \Delta l^2 + \frac{1}{2} k_t (z_C + z_r)^2 \quad (3.34)$$

$$D = \frac{1}{2}c_p (\Delta l)^2 \quad (3.35)$$

Substituant les dérivées des équations 3.24, 3.25, 3.29, 3.30 et 3.31 dans 3.33, 3.34 et 3.35 on obtient :

$$T = \frac{1}{2}(m_s + m_u)\dot{z}_s^2 + \frac{1}{2}m_u l_C^2 \dot{\theta}^2 + m_u l_C \cos \theta \dot{\theta} \dot{z}_s \quad (3.36)$$

$$V = \frac{1}{2}k_s [2a_l - b_l (\cos \alpha' + \cos(\alpha' - \theta)) - 2(a_l^2 - a_l b_l \cos \alpha' + \cos(\alpha' - \theta) + b_l^2 \cos(\alpha' - \theta))^{\frac{1}{2}}] \\ + \frac{1}{2}k_t [z_s + l_C (\sin(\theta - \theta_0) - \sin(-\theta_0)) - z_r]^2 \quad (3.37)$$

$$D = \frac{c_p b_l^2 \sin^2(\alpha' - \theta) \dot{\theta}}{8(a_l - b_l \cos(\alpha' - \theta))} \quad (3.38)$$

Finalement, pour les deux cordonnées généralisées $q_1 = z_s$ et $q_2 = \theta$, les équations de mouvement sont obtenues comme suit :

$$(m_s + m_u)\ddot{z}_s + m_u l_C \cos(\theta - \theta_0) \ddot{\theta} \\ - m_u l_C \sin(\theta - \theta_0) \dot{\theta}^2 + k_t [z_s - z_r \\ + l_C (\sin(\theta - \theta_0) - \sin(-\theta_0))] = -f_d \quad (3.39)$$

$$m_u l_C^2 \ddot{\theta} + m_u l_C \cos(\theta - \theta_0) \ddot{z}_s + \frac{c_p b_l^2 \sin^2(\alpha' - \theta) \dot{\theta}}{4(a_l - b_l \cos(\alpha' - \theta))} \\ - k_t l_C \cos(\theta - \theta_0) (z_s + l_C (\sin(\theta - \theta_0) - \sin(-\theta_0)) \\ - z_r) - \frac{1}{2}k_s \cos(\alpha' - \theta) \left[b_l + \frac{d_l}{(c_l - d_l \cos(\alpha' - \theta))^{\frac{1}{2}}} \right] \\ = -l_B f_a \quad (3.40)$$

Avec :

$$c_l = a_l^2 - a_l b_l \cos(\alpha + \theta_0) \quad (3.41)$$

et

$$d_l = a_l b_l - b_l^2 \cos(\alpha + \theta_0) \quad (3.42)$$

Les variables d'état telles que $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] = [z_s \ \dot{z}_s \ \theta \ \dot{\theta}]$ sont introduites. Alors les équations, 3.39 et 3.40 peuvent être écrites sous forme d'équation d'état comme suit :

$$\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, f_a, z_r, f_d) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, f_a, z_r, f_d)$$

Avec :

$$f_1 = \frac{1}{D_1} [m_u l_C^2 \sin(x_3 - \theta_0) x_4^2 + \frac{1}{2} k_s \sin(\alpha' - x_3) \cdot \cos(x_3 - \theta_0) g(x_3) + c_p h(x_3) \theta' - k_t l_C \sin^2(x_3 - \theta_0) \cdot z(\cdot) + l_B f_a \cos(x_3 - \theta_0) - l_C f_d] \quad (3.43)$$

$$f_2 = \frac{1}{D_2} [m_u^2 l_C^2 \sin(x_3 - \theta_0) \cos(x_3 - \theta_0) x_4^2 + (m_s + m_u) \cdot c_p h(x_3) x_4 - \frac{1}{2} (m_s + m_u) k_s \sin(\alpha' - x_3) g(x_3) + m_s k_t \cdot l_C \cos(x_3 - \theta_0) z(\cdot) + (m_s + m_u) l_B f_a - m_u l_C \cos(x_3 - \theta_0) f_d] \quad (3.44)$$

et

$$D_1 = m_s l_C + m_u l_C \sin^2(x_3 - \theta_0) \quad (3.45)$$

$$D_2 = m_s m_u l_C^2 + m_u^2 l_C^2 \sin^2(x_3 - \theta_0) \quad (3.46)$$

$$g(x_3) = b_l + \frac{d_l}{\text{ffl} \left(c_l - d_l \cos(\alpha' - x_3) \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.47)$$

$$h(x_3) = \frac{b_l^2 \sin^2(\alpha' - x_3)}{4(a_l - b_l \cos(\alpha' - x_3))} \quad (3.48)$$

$$z(\cdot) = z(x_1, x_2, z_r) = x_1 + l_c [\sin(x_3 - \theta_0) - \sin(-\theta_0)] - z_r \quad (3.49)$$

Linéarisation des équations du modèle dynamique

Pour simplifier la résolution des équations du système, l'équation 3.37 est linéarisée par rapport à un point d'équilibre : $x_e = (x_{1e}, x_{2e}, x_{3e}, x_{1e}) = (0, 0, 0, 0)$. Donc, l'équation d'état linéaire est :

$$\dot{x} = Ax(t) + B_1 f_a(t) + B_2 z_r(t) + B_3 f_d(t), \quad x(0) = x_0 \quad (3.50)$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial f_a} \\ 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial f_a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l_B \cos(-\theta_0)}{m_s l_C + m_u l_C \sin^2(-\theta_0)} \\ 0 \\ \frac{(m_s + m_u) l_B}{m_s m_u l_C^2 + m_u^2 l_C^2 \sin^2(-\theta_0)} \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial z_r} \\ 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_t l_C \sin^2(-\theta_0)}{m_s l_C + m_u l_C \sin^2(-\theta_0)} \\ 0 \\ \frac{m_s k_t l_C \cos(-\theta_0)}{m_s m_u l_C^2 + m_u^2 l_C^2 \sin^2(-\theta_0)} \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial f_d} \\ 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial f_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l_C}{m_s l_C + m_u l_C \sin^2(-\theta_0)} \\ 0 \\ \frac{m_u l_C \cos(-\theta_0)}{m_s m_u l_C^2 + m_u^2 l_C^2 \sin^2(-\theta_0)} \end{bmatrix}$$

tel que :

$$a_{21} = \frac{-k_t l_C \sin^2(-\theta_0)}{D_1}$$

$$a_{23} = \frac{1}{D_1^2} \left[\left[\frac{1}{2} k_s \left(b_l + \frac{d_l}{(c_l - d_l \cos \alpha')^{\frac{1}{2}}} \right) \cos(\alpha' + \theta_0) - \frac{1}{2} (k_s \sin \alpha' \cos(-\theta_0)) \right. \right. \\ \cdot \left. \left(\frac{d_l^2 \sin \alpha'}{2(c_l - d_l \cos \alpha')^{\frac{3}{2}}} \right) - k_t l_C^2 \sin^2(-\theta_0) \cos(-\theta_0) \right] \cdot [m_s l_C + m_u l_C \sin^2(-\theta_0)] \\ \left. + m_u k_s l_C \sin \alpha' \sin(-\theta_0) \cos^2(-\theta_0) \left(b_l + \frac{d_l}{(c_l - d_l \cos \alpha')^{\frac{1}{2}}} \right) \right]$$

$$a_{24} = \frac{1}{D_1} \cdot \frac{c_p b_l^2 \sin^2 \alpha'}{4(a_l - b_l \cos \alpha')}$$

$$a_{41} = -\frac{m_s k_t l_C \cos(-\theta_0)}{D_2}$$

$$a_{43} = \frac{1}{D_1^2} \left[\left[\frac{1}{2} (m_s + m_u) k_s \cos \alpha' \left(b_l + \frac{d_l}{(c_l - d_l \cos \alpha')^{\frac{1}{2}}} \right) - \frac{1}{2} (m_s + m_u) k_s \sin \alpha' \right. \right. \\ \cdot \left. \left(\frac{d_l^2 \sin \alpha'}{2(c_l - d_l \cos \alpha')^{\frac{3}{2}}} \right) - m_s k_t l_C^2 \cos(-\theta_0) \right] \cdot [m_s m_u l_C^2 + m_u^2 l_C^2 \sin^2(-\theta_0)] \\ \left. + \frac{1}{2} (m_s + m_u) m_u^2 k_s l_C^2 \sin \alpha' \sin(-\theta_0) \left(b_l + \frac{d_l}{(c_l - d_l \cos \alpha')^{\frac{1}{2}}} \right) \right]$$

$$a_{44} = -\frac{1}{D_2} \cdot \frac{(m_s + m_u) c_p b_l^2 \sin^2 \alpha'}{4(a_l - b_l \cos \alpha')}$$

3.5.4 Comportement dynamique d'une suspension MacPherson non-linéaire-linéarisée de type passive

L'étude du comportement dynamique de la suspension MacPherson est effectué pour le cas où nous imposons une force d'excitation de type sinusoïdal sur la roue. Alors, le système d'équations différentielles s'écrit comme suit :

$$\dot{x} = Ax(t) + B_1 f_a(t) + B_2 \frac{F(t)}{k_t} + B_3 f_d(t) \quad (3.51)$$

Avec :

$F(t) = 0.02.k_t.sin(10t)$ et les conditions initiales sont nulles.

De plus, les forces de contrôle et de chargement appliquées sur le véhicule sont nulles.

$$f_a = f_d = 0$$

La solution du système a la forme suivante :

$$x(t) = e^{A.t}.x_0 + \int_0^t e^{A.\lambda}.B_2.\frac{F(t-\lambda)}{k_t}.d\lambda \quad (3.52)$$

On pose

$$B = \frac{B_2}{k_t} \quad (3.53)$$

On cherche une solution de l'intégrale suivante :

$$\int_0^t e^{A.\lambda}.B.F(t-\lambda).d\lambda \quad (3.54)$$

$$\int_0^t e^{A.\lambda}.B.F(t-\lambda).d\lambda = \int_0^t e^{A.\lambda}.B.k_t \sin \omega(t-\lambda) d\lambda = B.k_t \int_0^t e^{A.\lambda}. \sin \omega(t-\lambda) d\lambda \quad (3.55)$$

On fait une première intégration par partie :

$$\begin{aligned} B.k_t \int_0^t e^{A.\lambda}. \sin \omega(t-\lambda) d\lambda &= B.k_t \left[\frac{e^{A.\lambda}}{\omega} \cos(\omega t - \lambda \omega) \right]_0^t - B.k_t \int_0^t \frac{A}{\omega} e^{A.\lambda}. \sin \omega(t-\lambda) d\lambda \\ &= B.k_t \left[\frac{e^{A.\lambda}}{\omega} \cos(\omega t - \lambda \omega) \right]_0^t - B.\frac{k_t.A}{\omega} \int_0^t e^{A.\lambda}. \cos \omega(t-\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (3.56)$$

On fait une deuxième intégration par partie :

$$\begin{aligned} B.k_t \int_0^t e^{A.\lambda}. \sin \omega(t-\lambda) d\lambda &= \\ B.k_t \left[\frac{e^{A.\lambda}}{\omega} \cos(\omega t - \lambda \omega) \right]_0^t + B.k_t \left[\frac{A.e^{A.\lambda}}{\omega^2} \sin(\omega t - \lambda \omega) \right]_0^t - B.k_t \frac{A^2}{\omega^2} \int_0^t e^{A.\lambda}. \sin \omega(t-\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\Rightarrow B.k_t \int_0^t e^{A.\lambda}. \sin \omega(t-\lambda) d\lambda = \frac{B.k_t (e^{A.t} - \cos \omega t - \frac{A}{\omega} \sin \omega t)}{\omega. \left[1 + \left(\frac{A}{\omega} \right)^2 \right]} \quad (3.58)$$

Tout calcul fait, nous trouvons la solution suivante :

$$x(t) = e^{A.t}.x_0 + \frac{B_2}{\omega \left[1 + \left(\frac{A}{\omega} \right)^2 \right]} \left(e^{A.t} - \cos \omega.t - \frac{A}{\omega} \sin \omega.t \right) \quad (3.59)$$

Simulation par incertitudes

Dans l'étude du comportement de la suspension MacPherson en régime forcé par intervalles, nous introduisons les pourcentages d'incertitudes suivants :

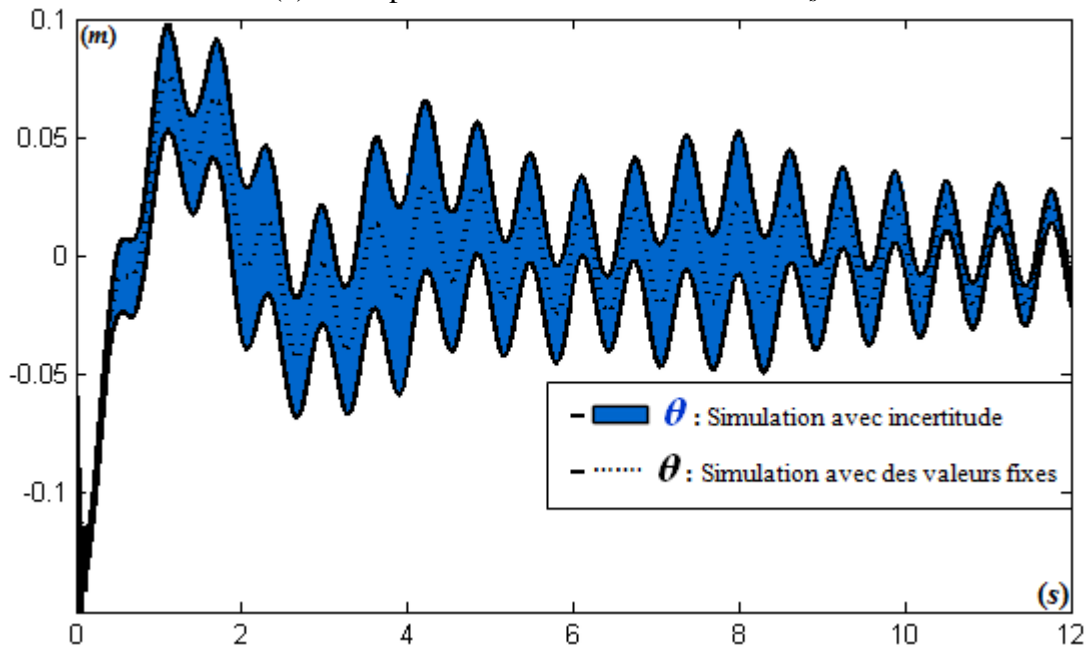
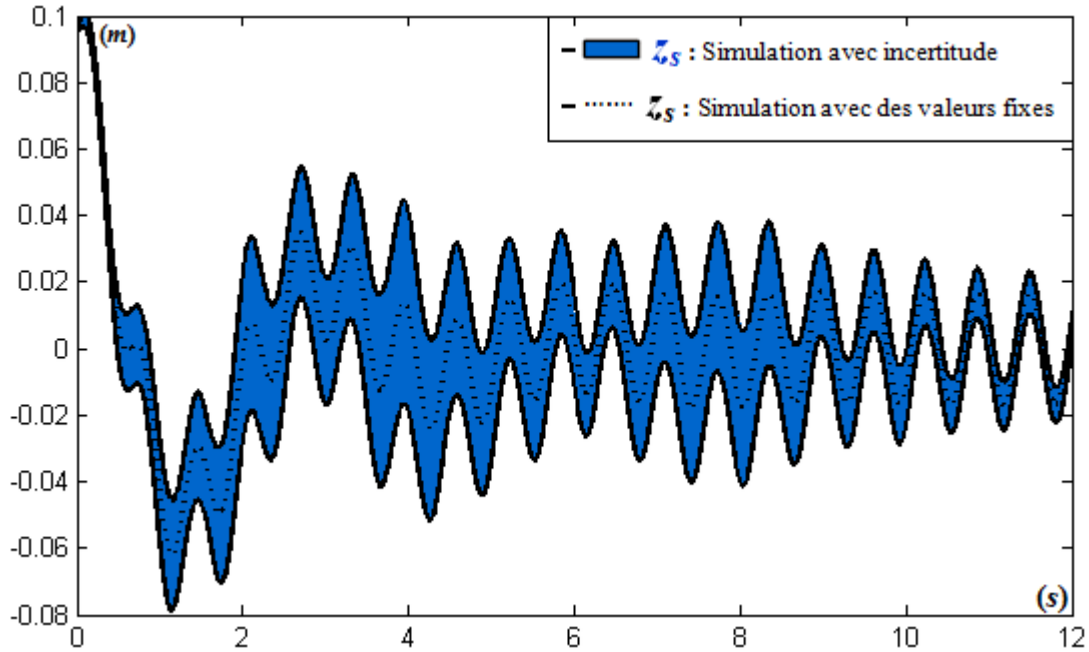


FIGURE 3.8 – Réponse dynamique d'une suspension MacPherson passive excitée par une force sinusoïdale (application de l'exponentielle de Horner avec réduction).

0,2% sur la rigidité K_s et 0,4% sur la rigidité K_t , 0,3% incertitude sur la masse m_s , 0,1% sur la masse m_u et 0,5 % sur le coefficient d'amortissement c_p .

Les domaines de ces paramètres de conception sont les suivants :

$$\begin{aligned} k_t &= [199200 ; 200800] & m_u &= [24.975 ; 25.025] \\ c_p &= [1990 ; 2010] \\ k_s &= [19960 ; 20040] & m_s &= [495.5 ; 501.5] \end{aligned}$$

D'après les résultats de la simulation de la suspension linéaire, nous appliquons seulement l'exponentielle de Horner avec réduction car les résultats obtenus par les autres expressions exponentielles divergent. Les courbes de la figure 3.8 montrent que les courbes simulées avec des valeurs fixes (courbes de référence) pour les déplacements z_s et θ sont placées entre les courbes de limites générées par incertitude. Donc, la validité de la méthode de calcul est vérifiée. On remarque que l'ensemble des trajectoires du système a une forme similaire à celle des courbes de références. Les déplacements z_s et θ sont des sinusoides qui suivent la trajectoire de la route.

Les systèmes de suspension classiques, dits passifs, sont jusqu'à nos jours les plus répandus de par leur bas coût et leur conception mécanique relativement simple. Leur fonctionnement consiste à dissiper l'énergie ou à filtrer la transmission des efforts et vibrations de la route vers le véhicule. Cependant, ces systèmes passifs ont atteint leurs limites en termes de performance.

En effet, ils nécessitent un compromis entre confort et tenue de route, l'un ne pouvant être optimisé sans dégrader l'autre. De plus, ils répondent favorablement à des sollicitations de la chaussée sur une plage de fréquences restreinte.

C'est dans l'optique de répondre à ces exigences croissantes en termes de sécurité et de confort que plusieurs solutions alternatives ont émergé. De plus, l'enjeu économique est capital car actuellement les transports routiers sont largement majoritaires tant au niveau du transport des personnes que du transport de marchandises. Ces nouvelles suspensions, dites contrôlables, ont marqué le début d'une nouvelle ère dans les transports terrestres. Elles ont ouvert la voie à de nombreuses solutions visant à réduire les vibrations et oscillations dues aux imperfections routières.

3.5.5 Système de suspension MacPherson non-linéaire-linéarisé de type active

Les nouvelles technologies pour les suspensions sont réparties en deux catégories selon la façon dont le contrôle est effectué. La première catégorie est celle des suspensions actives dans lesquelles le contrôle vise à imposer une force ou un déplacement nécessitant une source importante d'énergie externe. La seconde catégorie dite semi-active nécessite une faible source d'énergie pour modifier la réponse mécanique du dispositif contrôlé. Elle n'apporte aucune énergie au système à contrôler mais adapte ses performances instantanément

selon une stratégie de contrôle bien définie. Les suspensions à contrôle semi-actif présentent un bon compromis entre les systèmes actifs et passifs.

3.5.5.1 Les lois de contrôle

Commande Skyhook

Le modèle de contrôle Skyhook (cf figure 3.9) consiste à considérer l'existence d'un amortisseur de coefficient $C_{Skyhook}$ entre la caisse et le ciel. Ce coefficient n'est pas constant, pour une suspension donnée il va dépendre essentiellement de la fréquence d'excitation.

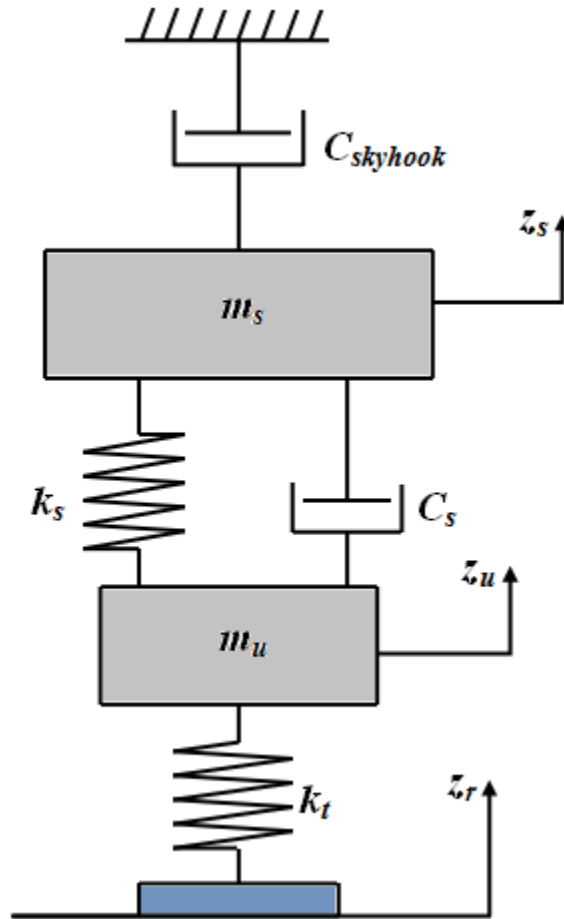


FIGURE 3.9 – Modèle quart de contrôle Skyhook.

La force générée par l'actionneur est donc :

$$U = -C_{Skyhook} \cdot \dot{z}_s \quad (3.60)$$

Ce type de contrôle est facile à mettre en place puisqu'il suffit de déterminer la valeur de $C_{Skyhook}$ en fonction de la fréquence.

Commande par placement de pôles

Le contrôle par placement de pôle permet de stabiliser le système en modifiant les pôles de la fonction de transfert en boucle ouverte. Ces pôles correspondent à des fréquences où le système va entrer en résonance, ce qui n'est pas souhaitable ici. Par exemple pour le système défini par le schéma bloc suivant (cf figure 3.10) :

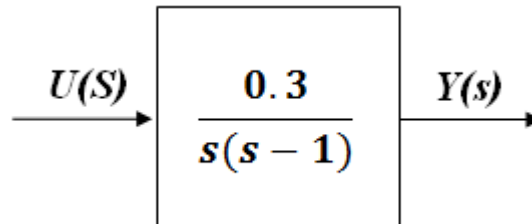


FIGURE 3.10 – Schéma bloc d'une fonction de transfert.

Les pôles sont $s_1 = 0$ et $s_2 = 1$. Si on souhaite obtenir comme pôle $s_1 = -5$ et $s_2 = -12$, il faut modifier le schéma bloc (cf figure 3.11). Ce type de contrôle est simple à mettre en place, mais le schéma bloc peut vite devenir compliqué lorsque le nombre de pôles devient important.

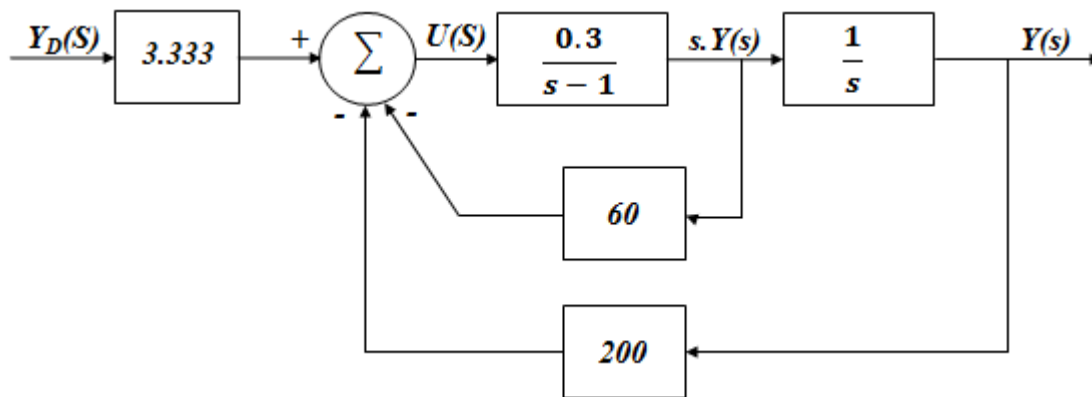


FIGURE 3.11 – Diagramme bloc d'un système commandé par la méthode de placement de pôles.

Commande LQR

Le contrôle linéaire quadratique a pour but de minimiser un facteur de performance $J(u)$. Pour un problème de la forme $\dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t)$, avec x le vecteur d'état et u la commande, le facteur de performance est de la forme

$$J(u) = \int_0^{+\infty} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt \quad (3.61)$$

Où Q et R sont des matrices de pondération définies positives.

Si on choisit de minimiser l'énergie de x , u va consommer cette énergie, on obtient donc une suspension nerveuse. Ce type de suspension est plutôt destiné à des véhicules tout terrain.

Si au contraire on choisit de minimiser l'énergie de u , cette énergie sera dissipée par x . On obtient une suspension molle, donc l'actionneur consomme peu d'énergie. Ce type de suspension sera destiné à des véhicules de tourisme.

Choix de la commande Skyhook

Le confort et la tenue de route d'une véhicule peuvent être améliorés en remplaçant la suspension passive par une suspension active à contrôle. Un grand nombre d'études [41-43] existent sur l'efficacité de la stratégie de contrôle Skyhook avec d'autres techniques de contrôle optimales. La plupart de ces études indiquent que le contrôle Skyhook est le moyen de contrôle optimal en termes de capacité à isoler la masse suspendue par les excitations de base. Donc, nous mettons en place un contrôleur de type Skyhook dans le système de suspension Macpherson. Un procédé de génération de la force d'amortissement Skyhook est d'enlever la suspension passive (c'est à dire : l'amortisseur et le ressort) et de la remplacer par un générateur de force active. Ceci peut être réalisé en utilisant un vérin hydraulique. Cependant, le système qui en résulte est assez complexe et nécessite une quantité importante d'énergie [42]. Une autre approche pour réaliser l'amortissement Skyhook est d'utiliser des amortisseurs semi-actifs. Des amortisseurs semi-actifs permettent de changer le coefficient d'amortissement, et donc la force d'amortissement, pour faire varier entre les niveaux élevés et faibles d'amortissement. Les premiers amortisseurs semi-actifs étaient réglables mécaniquement par l'ouverture ou la fermeture d'une vanne de dérivation. La seule énergie nécessaire pour l'amortisseur est relativement de faible puissance pour actionner la vanne. Un amortisseur semi-actif est donc utilisé dans cette étude. On note que la force appliquée par l'amortisseur Skyhook à la masse suspendue a la forme suivante :

$$F_{Skyhook} = -C_{Skyhook} \cdot \dot{z}_s \quad (3.62)$$

$C_{Skyhook}$ est le coefficient de contrôle d'amortissement.

3.5.6 Comportement dynamique d'une suspension MacPherson non-linéaire-linéarisée de type active

3.5.6.1 Régime transitoire

Considérons le modèle dynamique linéarisé de la suspension MacPherson décrit précédemment dans la section 3.6.3.2, sauf que l'étude du comportement de la suspension dans cette partie est pour le cas actif. Pour cela, nous appliquons un contrôleur de type Skyhook sur la suspension, ce qui revient à affecter la force f_a par la relation $F_{Skyhook}$ qui décrit la loi

de contrôle Skyhook. Le modèle du suspension MacPherson actif est présenté par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x} = Ax(t) + B_1(-C_{Skyhook} \cdot \dot{z}_s) + B_2 z_r(t) + B_3 f_d(t) \quad (3.63)$$

Après substitution de l'équation 3.62, on obtient le système suivant :

$$\dot{x} = Ax(t) \quad (3.64)$$

Tel que :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & -C_{Skyhook} \frac{l_B \cos(-\theta_0)}{m_s l_C + m_u l_C \sin^2(-\theta_0)} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & -C_{Skyhook} \frac{(m_s + m_u) l_B}{m_s m_u l_C^2 + m_u^2 l_C^2 \sin^2(-\theta_0)} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Et la force de chargement appliquée sur le véhicule est nulle :

$$f_d = 0$$

Simulation avec des valeurs fixes

Après le calcul fait sans incertitude et avec le coefficient de contrôle d'amortissement $C_{Skyhook} = 800 \text{ Ns/m}$ nous obtenons les résultats de la figure 3.12 qui montrent une comparaison de réponse à un déplacement instantané du système de suspension MacPherson entre le cas actif (avec un contrôleur Skyhook) et le cas passif.

On remarque d'après les sorties z_s , \dot{z}_s , θ et $\dot{\theta}$ que lorsque contrôleur Skyhook est actif l'amplitude de vibration diminue et le corps du véhicule reprend son état d'équilibre plus rapidement que pour le cas passif. Le corps du véhicule atteint sa position d'équilibre dans 3 s dans le cas actif au lieu de 8 s. Il s'agit d'une amélioration de la réponse du système ce qui confirme l'efficacité du contrôleur Skyhook à la réduction des vibrations causées par les routes. La variation de vitesse (figure 3.12 c, d) d'un comportement de suspension MacPherson actif est trop faible par rapport à la variation de vitesse du comportement passif ce qui reflète que l'accélération du véhicule du corps est réduite.

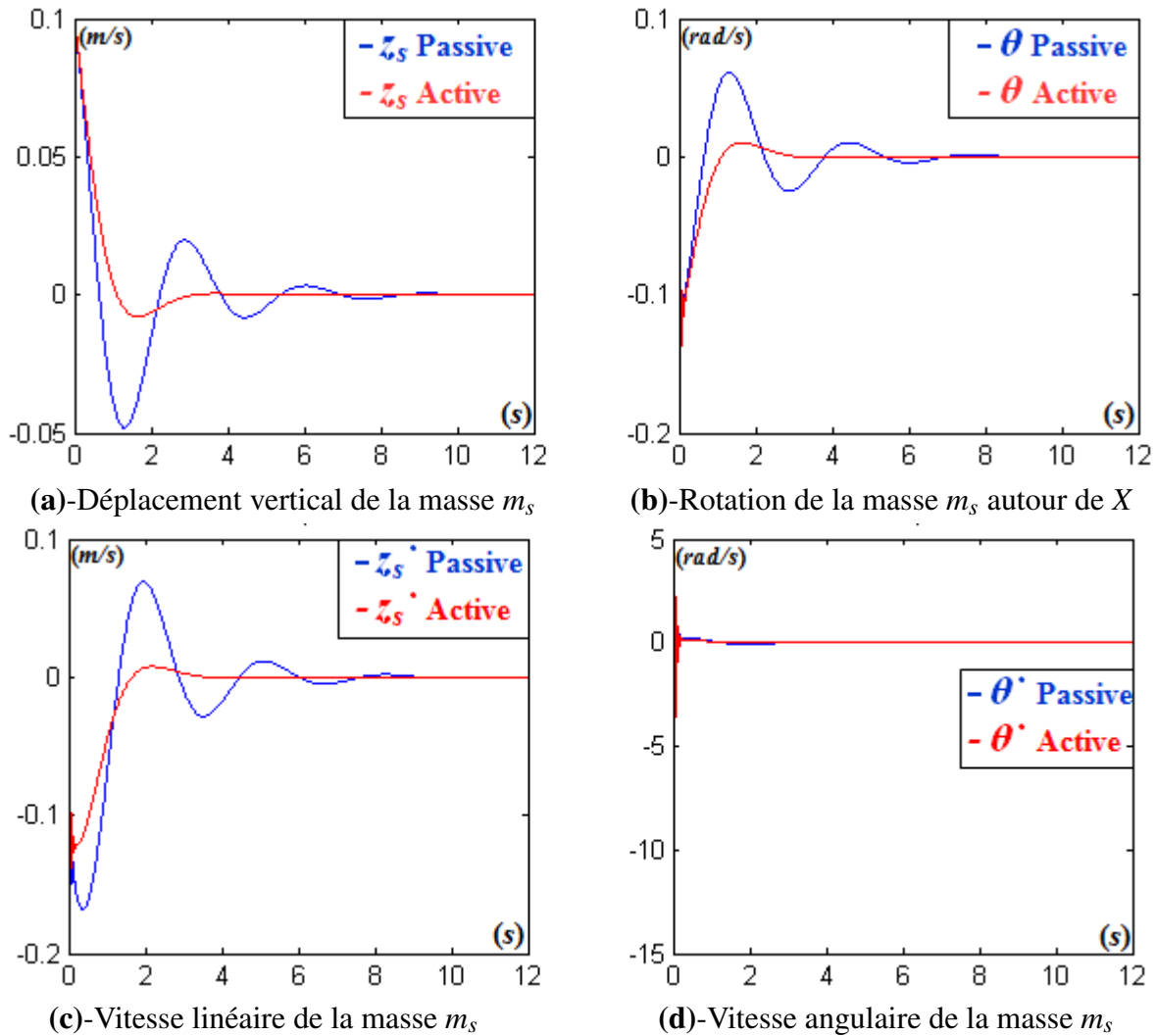
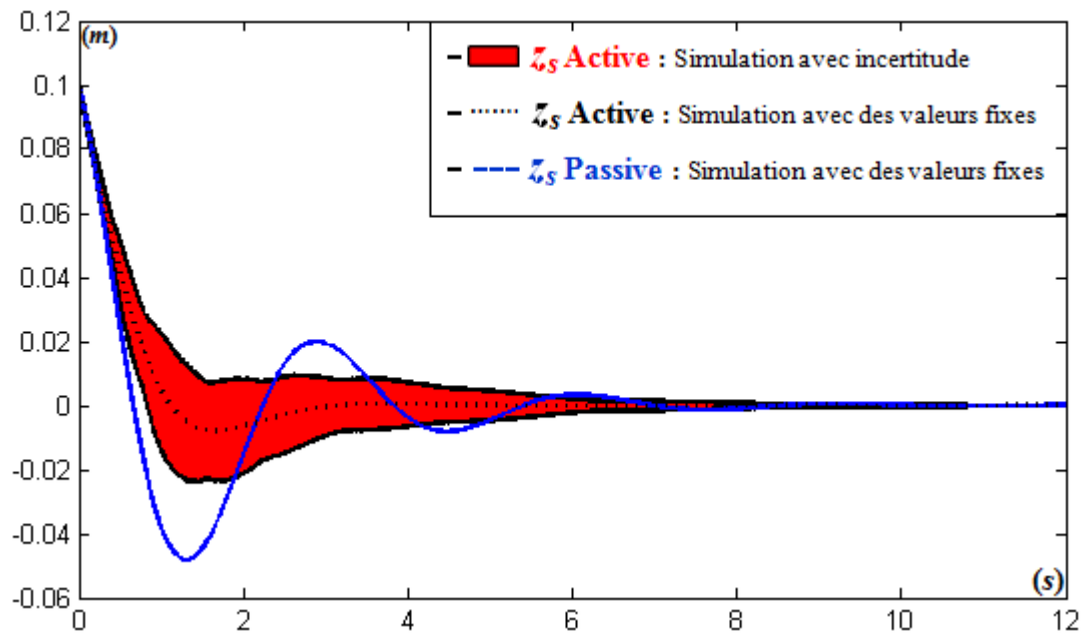


FIGURE 3.12 – Comparaison entre la réponse active et passive d’une suspension MacPherson excitée par un déplacement instantané.

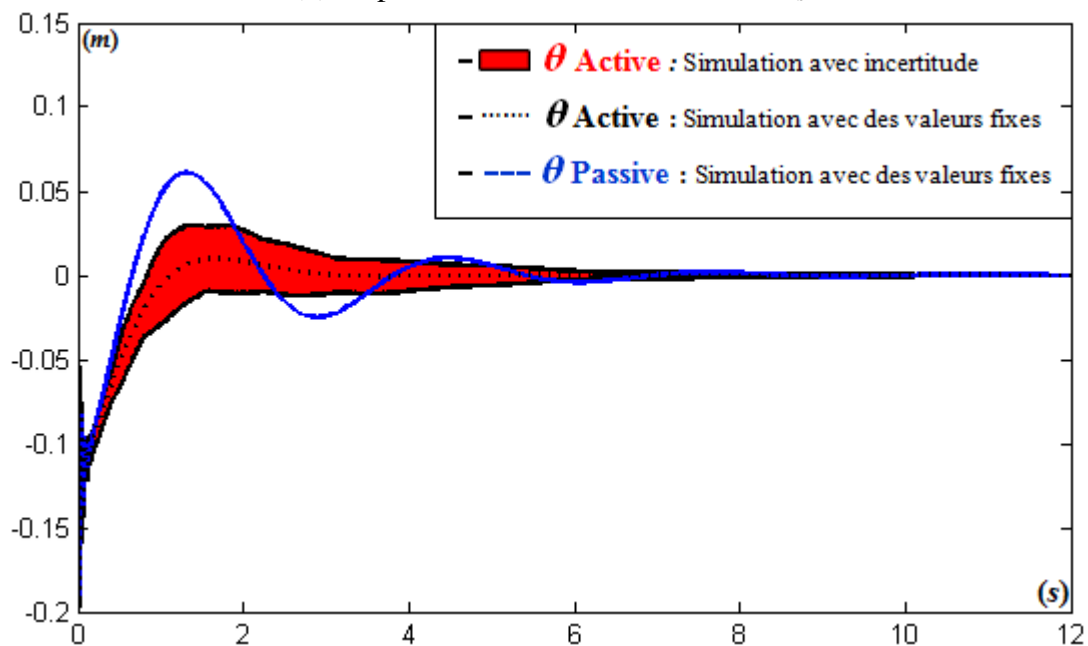
Simulation avec incertitudes

Le choix du coefficient d’amortissement Skyhook optimal est essentiel, car il détermine le comportement optimal de la suspension MacPherson. Donc, selon le type d’excitation, nous devons déterminer si le coefficient du contrôle d’amortissement est bien choisi ou non. Considérons donc le même modèle d’état de la suspension MacPherson (3.64), sauf que 2% d’incertitude est introduite dans le coefficient d’amortissement Skyhook tel que ($C_{Skyhook} = [784; 816]$) et les incertitudes sur les valeurs des paramètres de conception sont remises à zéro. Nous obtenons après simulation les courbes présentées sur la figure 3.13.

D’après ces courbes, nous remarquons que même si nous prenons un pourcentage plus élevé d’incertitude sur le coefficient d’amortissement $C_{Skyhook}$, les résultats obtenus convergent. Cela est dû au fait que l’incertitude est appliquée à une seule variable de conception $C_{Skyhook}$.



(a)-Déplacement vertical de la masse m_s

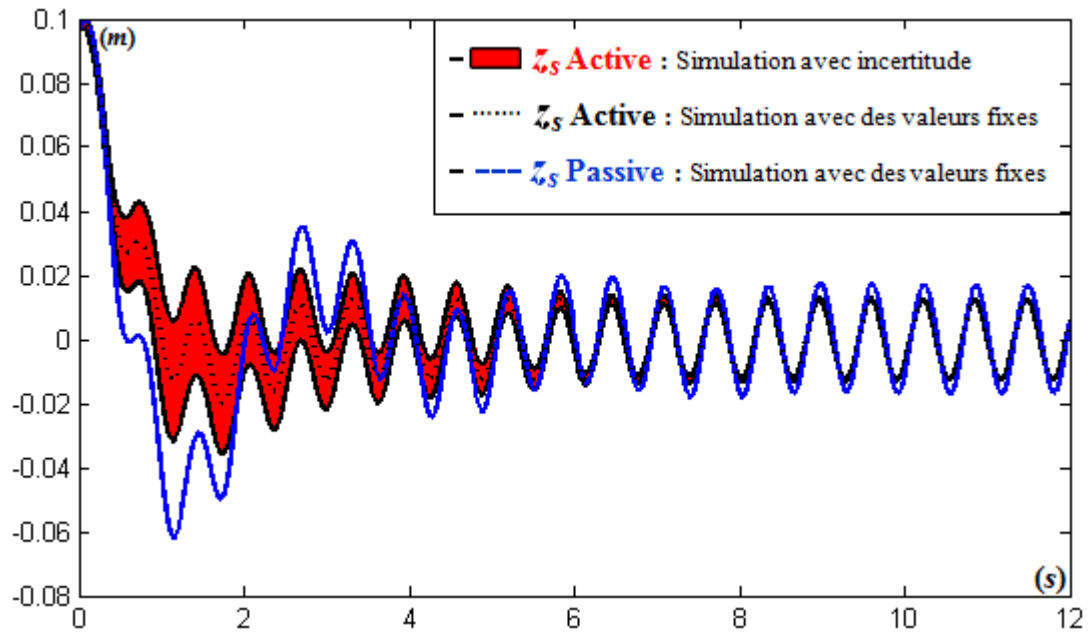


(b)-Rotation de la masse m_s autour de X

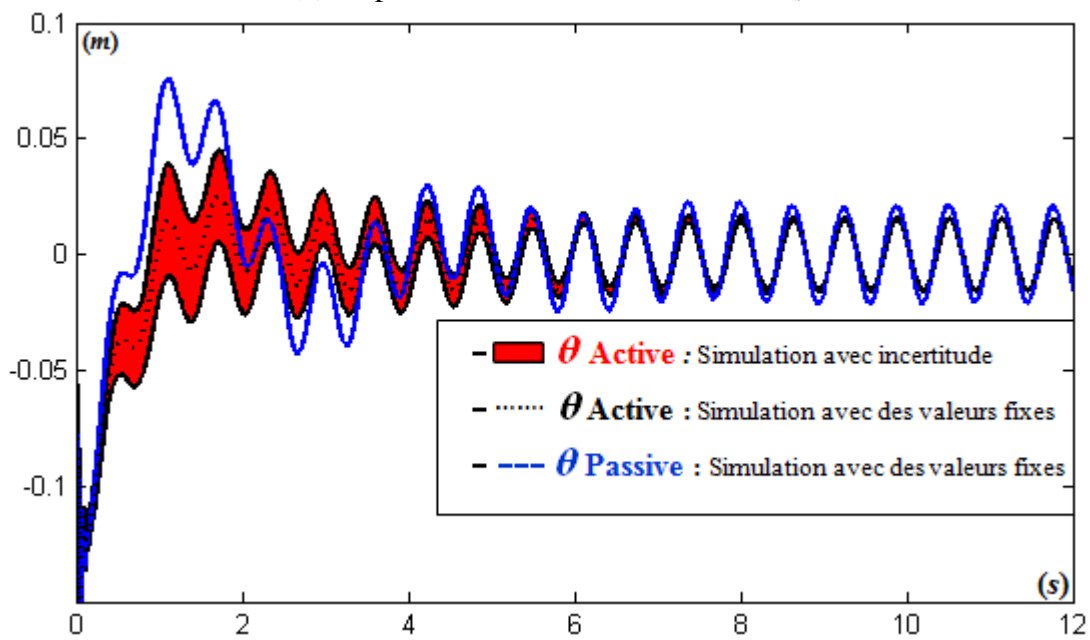
FIGURE 3.13 – Réponse dynamique d’une suspension MacPherson active excitée par un déplacement instantané (application de l’exponentielle de Horner avec réduction).

3.5.6.2 Régime harmonique

Avec les incertitudes introduites sur le coefficient du contrôle d’amortissement, le concepteur peut avoir une bonne idée sur l’effet de l’augmentation ou de la réduction de ce coefficient sur le comportement dynamique du système de suspension MacPherson. Ainsi, la simu-



(a)-Déplacement vertical de la masse m_s



(b)-Rotation de la masse m_s autour de X

FIGURE 3.14 – Réponse dynamique d’une suspension MacPherson active excitée par une force sinusoïdale (application de l’exponentielle de Horner avec réduction).

lation avec intervalles peut aider à prendre une bonne décision sur le choix des paramètres de conception.

Avec la méthode de simulation basée sur les intervalles, plusieurs simulations dynamiques sont générées grâce à l’incertitude imposée sur les variables du modèle dynamique. Les enve-

loppes de performance et le comportement dynamique du système sous ses valeurs nominales peuvent fournir des informations plus complètes pour le concepteur. Donc, en s'appuyant sur ces simulations, le concepteur peut déterminer la solution qui peut répondre aux exigences imposées dans le cahier des charges, ce qui rend le dimensionnement du système de suspension MacPherson plus aisé.

3.6 Conclusion

D'après l'étude précédente du comportement dynamique du système de suspension MacPherson, la validité de la méthode de simulation basée sur intervalles pour résoudre les équations différentielles a été prouvée.

Avec l'utilisation de l'exponentielle de Horner avec réduction, le problème de la divergence de l'exponentielle lorsque la simulation basée sur intervalles est appliquée a été résolu et les résultats de simulation obtenus dans ce travail sont plus réalistes. Toutefois, ce type de calcul est orienté pour résoudre des équations différentielles ordinaires linéaires pour réaliser des simulations dynamiques. En effet, la simulation basée sur intervalles par rapport à une simulation classique permet de multiples simulations simultanément ainsi que la réduction du nombre de simulations. La méthode de simulation par intervalles fournit non seulement une seule évaluation du comportement du système, mais aussi un ensemble de limites de performance. Les résultats des simulations montrent que ces limites de performance donnent une meilleure idée du comportement dynamique d'un système avec des paramètres incertains. Malgré la limitation de cette méthode avec l'utilisation de longs intervalles (problème de divergence d'exponentielle), il a été prouvé qu'il est possible de simuler un système dynamique avec des résultats convergents avec des intervalles de taille réduite.

Avec la simulation basée sur intervalles, le temps de calcul est intéressant par rapport à une simulation classique puisqu'elle nous permet de générer une enveloppe de performance dans un même temps au lieu d'une seule évaluation. D'autre part, le calcul par intervalles donne des intervalles garantis contenant le résultat.

Les résultats présentés dans cette étude représentent une étape du nouveau processus de conception proposé pour la prise en compte des exigences dynamiques. Dans le chapitre suivant, on se concentre sur l'intégration des autres types d'exigences dynamiques pour le dimensionnement d'un système technique en utilisant la technique de propagation de contraintes sur intervalles.

Chapitre 4 : Prise en compte des exigences dynamiques par contraintes

Chapitre 4

Prise en compte des exigences dynamiques par contraintes

4.1 Introduction

Le travail que nous présentons dans ce chapitre a pour but la mise au point une démarche de conception prenant en compte simultanément les exigences statiques et dynamiques en phase de conception préliminaire. Nous cherchons ainsi, une méthode de conception robuste de telle sorte que les exigences dynamiques interviennent au plus tôt dans le processus de dimensionnement statique (ce qui permet de guider le choix des coefficients de sécurité).

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la prise en compte d'exigences dynamiques sur un système technique qui concernent la stabilité, les phénomènes de résonance, la commandabilité et la transmittance.

Dans une démarche de conception classique, ces exigences sont prises en compte après l'étape de dimensionnement statique contrairement à la démarche de conception que nous proposons, et dans laquelle nous voulons implémenter les exigences dynamiques sans avoir déterminé à priori l'architecture et les dimensions du système à concevoir.

Dans la méthode de conception proposée, le problème de dimensionnement est formalisé suivant la méthode de programmation par contraintes de telle sorte que l'ensemble des exigences statiques et dynamiques est traduit sous forme de contraintes. En fonction de la complexité du système étudié, l'intégration des exigences dynamiques pose des problèmes au niveau de leur formulation en équations et/ou inéquations algébriques, et au niveau du nombre des variables traitées.

Ce chapitre est structuré comme suit : d'abord, nous présentons la méthode de conception proposée avec ses différentes étapes, puis, nous détaillons l'aspect mathématique pour chaque type d'exigence dynamique en expliquant la manière de l'intégrer sous forme de contraintes algébriques. Ensuite, un exemple de dimensionnement d'un ressort de compression intégré

dans un système de suspension de véhicule est présenté dans le but de valider et d'aider à la compréhension et à l'application du processus de conception proposé. Enfin, plusieurs conclusions sont proposées sur la base des résultats obtenus.

4.2 Méthode ensembliste de conception globale

L'activité de conception de systèmes techniques est désormais plongée dans un contexte de conception intégrée et collaborative. Elle nécessite des outils et des méthodologies adaptées tout au long du processus de conception [50, 53, 66, 125] et qui permettent de déterminer les solutions admissibles dans un minimum de temps.

Depuis les travaux précurseurs de [65, 72] où la notion d'incertitude a été introduite pour la première fois, de nombreuses techniques et méthodes ont été proposées au sein de la communauté scientifique pour développer les méthodes de conception. La famille des techniques à base d'intervalles a été largement utilisée pour l'élaboration de nouvelles méthodes de conception et de dimensionnement [2, 12, 51, 66–68].

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la possibilité d'utiliser les NCSP pour intégrer sous forme de contraintes algébriques les exigences dynamiques posées sur un système technique à concevoir, dès la phase préliminaire du processus de conception. Nous proposons une démarche de conception dans laquelle :

- le dimensionnement statique et dynamique est intégré en une seule étape dans le but d'optimiser le choix des dimensions statiques et des facteurs de sécurité,
- les variables de conception sont présentées par des intervalles au lieu des valeurs afin d'outiller une démarche de set-based design.

Nous présentons sur la figure 4.1 les différentes étapes du processus de conception proposé. Ce processus est composé de trois étapes principales :

- La première étape consiste à exprimer les variables de conception par intervalles. Ici, le choix des valeurs des variables de conception ne nécessite pas d'expertise.
- Dans la deuxième étape, le concepteur identifie les exigences qui doivent être satisfaites et traduit ces exigences (statiques et dynamiques) sous forme de contraintes (représentées par des relations mathématiques algébriques) imposées sur les variables de conception. Ces contraintes fournissent des descriptions déclaratives des exigences importantes liées aux objectifs de l'ingénierie. Ensuite, tous les types de contraintes sont implémentés de manière simultanée dans un modèle CSP. Notre contribution scientifique à travers la démarche de conception proposée se présente par le couplage entre la prise en compte des exigences statiques et dynamiques.
- La troisième étape consiste à propager les contraintes déduites à partir des exigences imposées dans un cahier des charges, dans les intervalles des variables du système à

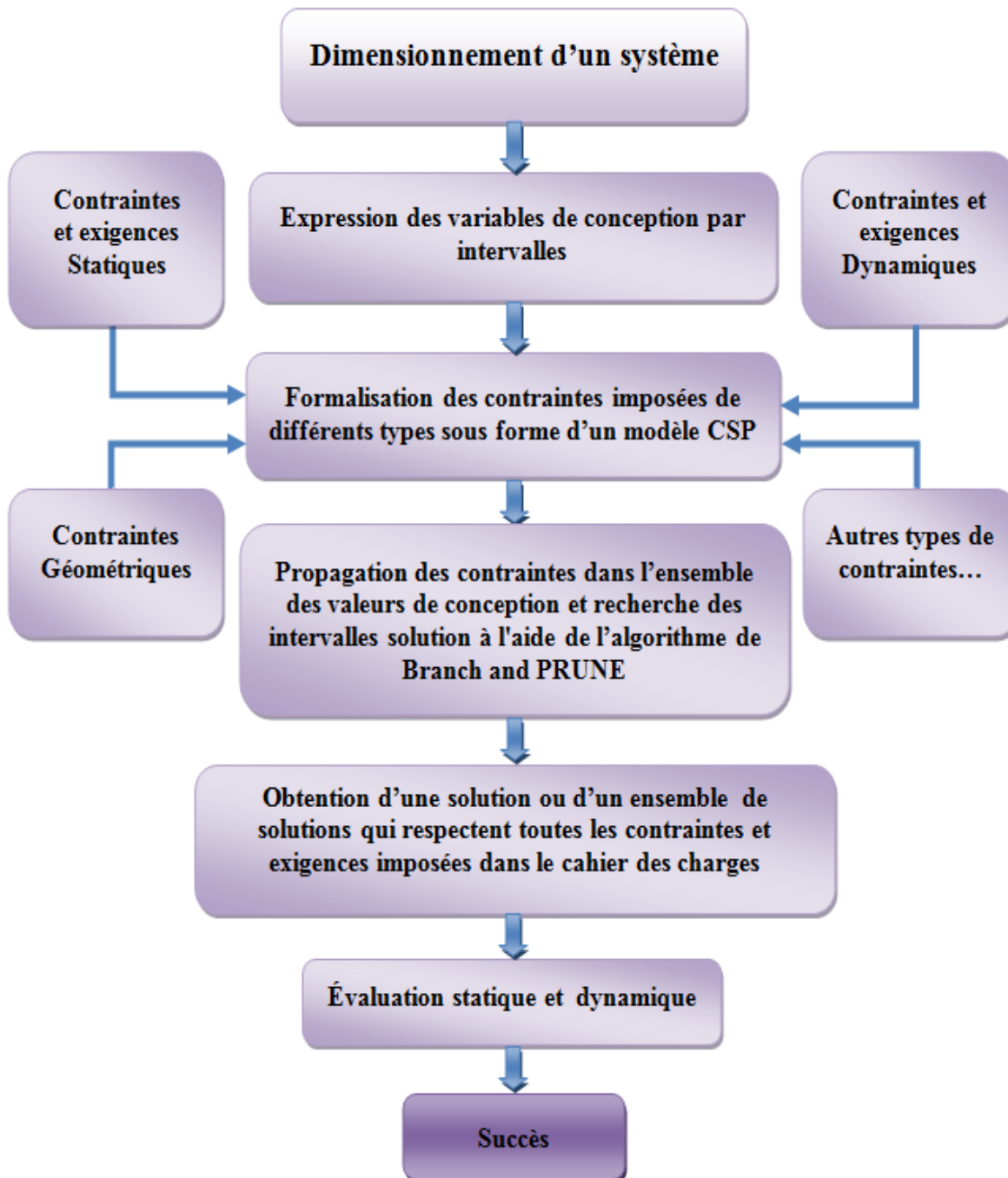


FIGURE 4.1 – Démarche de conception basée sur les exigences.

concevoir. Cette opération permet de définir les domaines de valeurs acceptables des paramètres du système. En effet, le NCSP intervient dans cette phase de conception en éliminant toutes les valeurs des variables qui ne satisfont pas de manière certaine les exigences imposées, et l'ensemble de valeurs (représenté par intervalle) pour chaque variable de conception générée à la fin de la phase de résolution représente l'ensemble

des solutions possibles. Parfois, le concepteur peut être placé dans le cas où il n'y a pas de solution. Dans ce cas, le problème doit être examiné et certaines contraintes doivent être relaxées.

Avec cette démarche, le dimensionnement d'un système peut se faire en une seule étape en tenant compte d'une manière globale et simultanée des exigences statiques et dynamiques. De plus, elle guide le choix des coefficients de sécurité ce qui permet d'éviter le sur-dimensionnement du système comme dans le cas d'une approche de conception classique. Avec cette méthode fondée sur les NCSP, il est certain que les valeurs générées satisfont les contraintes imposées et la réussite de l'évaluation statique et dynamique est garantie.

4.3 Prise en compte des exigences dynamiques

Dans l'approche classique de l'ingénierie, les exigences sont considérées comme des pré-requis pour les étapes de conception et de développement d'un système. Ils représentent l'ensemble des contraintes que le système doit respecter pour répondre aux exigences client. Un ensemble d'exigences définit les caractéristiques et les propriétés du système désiré. La question de l'intégration des exigences dynamiques sous forme de contrainte dans un NCSP est la suivante : Peut-on formaliser ces exigences sous la forme d'un ensemble d'équations ou d'inéquations algébriques ? Si c'est le cas, il sera aisé de les intégrer dans un modèle NCSP. Nous allons montrer dans ce chapitre que cela est possible.

4.3.1 Exigences dynamiques fonctionnelles

Dans l'ingénierie système, une exigence fonctionnelle peut être la description de ce qu'un système doit faire. Pour le cas d'un système technique, les exigences fonctionnelles appartiennent à la classe des exigences dynamiques ; elles décrivent son comportement et ses caractéristiques physiques en cours de fonctionnement. La plupart des exigences doivent être vérifiables par des tests pour assurer la validation du système à concevoir.

Généralement, les exigences dynamiques fonctionnelles sont présentées par des modèles mathématiques (par un jeu d'équations fréquemment de type différentielles et/ou algébriques) qui décrivent le fonctionnement dynamique du système étudié. Différents modèles qui se basent sur la structure entrées/sorties du système sont utilisés pour analyser son comportement (cf chapitre trois, paragraphe 3.2). Nous retiendrons le modèle de représentation par équations d'état. Il s'agit d'un modèle qui ne se limite pas à la description d'un comportement de type entrée/sortie, mais qui permet de prendre en compte la dynamique interne du système. De plus, il s'adapte à l'approche de résolution des EDO par intervalles [15] présentée dans le chapitre trois. Nous nous servirons aussi de cette représentation pour déterminer les contraintes qui concernent le phénomène de résonance.

De cette description mathématique, le concepteur peut analyser et commander le comportement du système à concevoir.

4.3.1.1 Représentation d'état

La représentation d'état [25, 26, 126–128] est une relation entre les entrées et les sorties d'un système qui permet de décrire son comportement et sa dynamique interne. Nous distinguons les définitions suivantes :

État d'un système : c'est le plus petit ensemble de variables tel que la connaissance de cet ensemble à un instant t , permet de déterminer le comportement du système en fonction des entrées appliquées.

Variables d'état : ce sont les variables qui constituent l'état du système [127, 128].

Vecteur d'état : c'est un vecteur qui rassemble les variables d'état, que l'on note x . Pour un système technique, le vecteur d'état n'est pas unique. Plusieurs choix sont possibles. Mais pour que x soit un vecteur d'état, il importe que chacune des variables d'état apparaissent, de manière explicite ou implicite, sous forme dérivée dans le jeu d'équations décrivant le fonctionnement du système [127, 128].

Espace d'état : c'est l'espace vectoriel dans lequel le vecteur d'état x est susceptible d'évoluer [127, 128].

La représentation d'état est une modélisation du comportement d'un système dans son espace d'état. Pour un système technique, la détermination de sa représentation d'état, peut se faire à partir d'un jeu d'équations préliminaires ou d'équations différentielles ou de sa fonction de transfert qui décrivent ses fonctions [26, 126, 127].

Cas linéaire

Dans le cas linéaire, le modèle dynamique sous forme d'équation paramétrée d'état par intervalles est comme suit [25, 126, 127].

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.x(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

Avec A la matrice d'état, dans notre cas d'étude, ses coefficients sont exprimées par intervalles tels que :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{a_{1,1}}; \overline{a_{1,1}} & \underline{a_{1,2}}; \overline{a_{1,2}} & \dots & \underline{a_{1,n}}; \overline{a_{1,n}} \\ \underline{a_{2,1}}; \overline{a_{2,1}} & \underline{a_{2,2}}; \overline{a_{2,2}} & \dots & \underline{a_{2,n}}; \overline{a_{2,n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{a_{n,1}}; \overline{a_{n,1}} & \underline{a_{n,2}}; \overline{a_{n,2}} & \dots & \underline{a_{n,n}}; \overline{a_{n,n}} \end{bmatrix}$$

B le vecteur d'entrée et C est le vecteur de sortie [25, 126, 127]. Généralement $x(t)$ représente la réponse dynamique et pour le cas mécanique il représente les déplacements du

système. Les coefficients $a_{i,j}$ représentent les variables du modèle dynamique du système et en même temps ses paramètres de conception. Les variables d'entrées appliquées sur le système sont représentées par le vecteur $u(t)$, et les variables de sorties sont représentées par le vecteur $y(t)$.

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, la solution de l'équation d'état est donnée sous la forme d'une matrice exponentielle [25].

Cas non linéaire

La plupart des systèmes qui nous entourent se modélisent par des systèmes non-linéaires. En raison des différents types de non-linéarités pouvant intervenir dans la modélisation, il est très difficile d'établir des méthodes génériques comme dans le cas des systèmes linéaires [25, 26]. Un système d'équations différentielles ordinaire linéaire, c'est-à-dire de la forme $\dot{x} = A.x$ où A est une matrice $n \times n$ (avec $n \in \mathbb{N}$), est toujours résoluble explicitement [25, 26].

Pour un système d'équation différentielle [$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$, $y(t) = g(x(t), u(t), t)$] quelconque, c'est en général impossible. Classiquement, lorsque le modèle d'un système est non-linéaire, on procède à une linéarisation [126–128]. Ainsi, on peut avoir une bonne image des trajectoires au voisinage des points d'équilibre par une technique de linéarisation. Celle-ci consiste à associer à l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ une équation linéaire $\dot{y}(t) = A_1.y(t)$, où A_1 est la matrice jacobienne de f calculée au point d'équilibre considéré. Ainsi, en supposant que ce point d'équilibre est caractérisé par les valeurs (x_e, u_e) , la représentation d'état est la suivante [126, 127] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{bmatrix} = A_1.y(t) + B_1.u(t) \\ z(t) = C_1.y(t) \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Où, la matrice jacobienne de $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$, évaluée en un point stationnaire $[y_1 \dots, y_n]$ est la suivante :

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_e, u_e, t) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_e, u_e, t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_e, u_e, t) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_e, u_e, t) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

et les matrices B_1 et C_1 sont les suivantes [126, 127] :

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(x_e, u_e, t) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u}(x_e, u_e, t) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_e, u_e, t) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_e, u_e, t) \end{bmatrix}$$

La matrice A donne une approximation linéaire du comportement du système au voisinage de ce point. Cette équation $\dot{y} = A_1 \cdot y$ est appelée le *linéarisé* [126, 127].

Le théorème de linéarisation affirme alors que, sous l'hypothèse que le point d'équilibre est hyperbolique, les trajectoires du système $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$ au voisinage du point d'équilibre seront semblables à celles du linéarisé [126, 127]. Cette démarche de linéarisation pour l'obtention du modèle d'état linéaire a été appliquée sur l'exemple de la suspension MacPherson détaillé dans le chapitre 3 [127].

Nous pouvons déterminer deux types de linéarisation : la linéarisation autour d'un point de fonctionnement et la linéarisation autour d'une trajectoire. Cette trajectoire est l'ensemble des points sur lesquels le système non-linéaire est voué à évoluer au cours de son fonctionnement [127, 128].

4.3.1.2 Résonance

La résonance d'un système technique est un phénomène dans lequel le système est sensible à certaines fréquences proches de ses fréquences propres [25–27]. En effet, lors de ce phénomène, le système résonant peut accumuler une énergie ; si celle-ci est appliquée sous forme périodique à la même fréquence que sa fréquence propre, l'amplitude des oscillations va augmenter. L'effet de ce phénomène est généralement nuisible : destruction du système, bruits parasites, des vibrations, Alors, il est préférable de l'éviter. Cela conduit à éviter que le système soit susceptible de fonctionner ou d'être excité par l'une de ses fréquences propres.

La fréquence propre d'un système est la fréquence à laquelle il oscille en évolution libre [26, 27], c'est-à-dire sans force excitatrice extérieure ni force dissipative. D'une autre manière, lorsqu'on écarte un système stable de sa position d'équilibre, il y retourne, généralement à travers des oscillations d'une fréquence spécifique. C'est la fréquence propre ou fréquence naturelle du système. Chaque système possède une ou plusieurs fréquences propres qui dépendent de ses paramètres internes (masse, raideur, ...). Cependant, pour éviter que le système étudié oscille avec l'une de ses fréquences propres, il faut que le choix des valeurs de ses paramètres internes (de conception) tienne compte des fréquences d'excitation possibles. Cela permet de concevoir un système pour lequel les fréquences propres sont différentes des fréquences d'excitation [25].

Les fréquences propres sont déterminées en calculant les pôles de la fonction de transfert $G(p)$ qui correspondent aux zéros du polynôme caractéristique $Q(p)$ de la matrice d'état A . Par conséquent, les pôles de $G(p)$ sont les valeurs propres de la matrice d'état A [25–27]. Le polynôme caractéristique $Q(p)$ est défini comme suit :

$$\det(p.I - A) = 0 \quad (4.5)$$

Où, I est la matrice identité.

Dans le cas où la détermination de formes explicites des fréquences propres est difficile, nous recourons à une autre méthode.

Le principe de cette méthode consiste à encadrer la réponse de certaines composantes du vecteur d'état (nous les appelons composantes critiques $x_{ci}(t)$ avec $i \in [1 : k]$ et k le nombre des composantes critiques) afin d'éviter que leur réponse atteigne des valeurs maximales (extremums) qui peuvent entrainer des effets nuisibles sur le fonctionnement du système. L'encadrement est effectué en imposant des valeurs ou des courbes limites ce qui permet de déterminer les valeurs admissibles des paramètres système où la réponse des composantes critiques est loin des extremums.

Pour un système donné, la solution de l'équation d'état est généralement donnée sous la forme d'une série d'exponentielle de Horner avec réduction (cf relation (5.17) et chapitre 3 de cette thèse) :

$$x(t) = \left[\exp\left(\frac{t.A}{2^s}\right) \right]^{2^s} x(t_0) \quad (4.6)$$

Où, $x(t_0)$ correspond à l'état initial du système.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{c1}(t) \\ \vdots \\ x_{ck}(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \left[\left(\frac{I + t.A \cdot \left(I + \frac{t.A}{2} \cdot \left(I + \frac{t.A}{3} \cdot \left(\dots \left(I + \frac{t.A}{n} \right) \right) \right) \right) \right)}{2^s} \right)^{2^s} \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_{c1}(t_0) \\ \vdots \\ x_{ck}(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Nous obtenons alors des polynômes par intervalles en t :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{c1}(t) \\ \vdots \\ x_{ck}(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_{c1}(t) \\ \vdots \\ P_{ck}(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Ainsi, nous posons des contraintes de type inégalité (encadrement) sur les lignes de l'exponentielle de matrice qui décrivent les variables d'état critiques :

$$\begin{cases} x_{c1-min} \leq P_{c1}(t) \leq x_{c1-max} \\ \vdots \\ x_{ck-min} \leq P_{ck}(t) \leq x_{ck-max} \end{cases} \quad (4.9)$$

Cette condition assure l'éloignement de la résonance (les déplacements maximaux) de telle sorte que le domaine de fonctionnement du système se situe en dehors des pics de résonances.

De plus, en annulant la dérivée des composantes critiques du vecteur d'état, nous pouvons déterminer leurs extrémums. Ceci revient à trouver les zéros de la dérivée des polynômes. C'est à dire résoudre une équation polynomiale par intervalle en t .

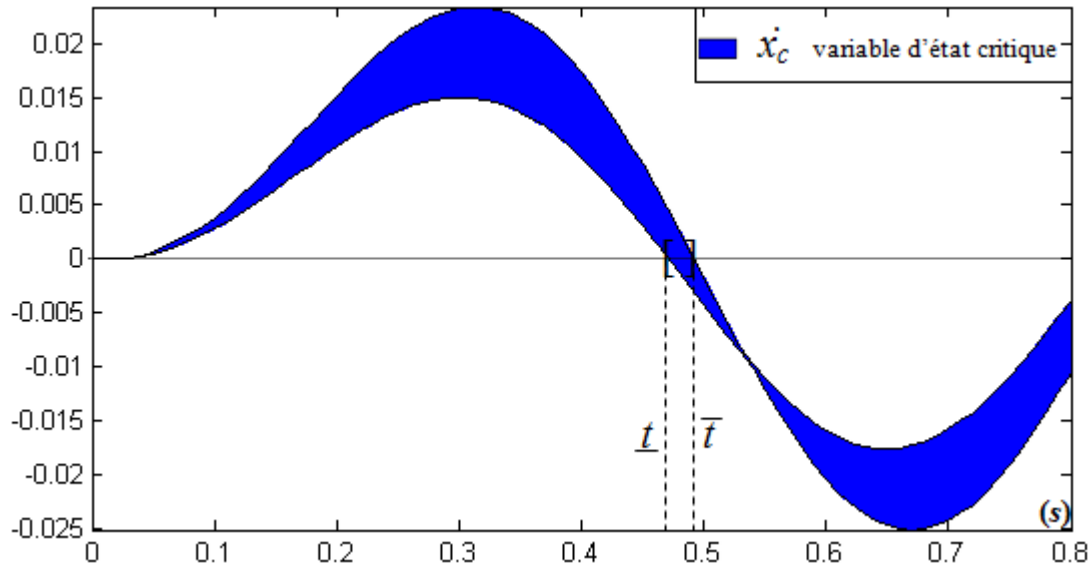


FIGURE 4.2 – Exemple de l'allure d'un dérivée d'une variable d'état critique.

En effet, prenant le cas général d'un système technique qui contient une seule variable critique. Ainsi, l'obtention des zéros de la dérivée des polynôme critiques s'effectue en imposant la contrainte suivante :

$$\dot{P}_{c1}(t) = 0 \quad (4.10)$$

La dérivée du polynôme P_{c1} est obtenue en utilisant la relation $\dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t)$ puisque $x(t)$ est déterminé par l'application de l'exponentielle de matrice (cf relation (5.18)).

La propagation de cette contrainte permet de déterminer un intervalle $[t ; \bar{t}]$ de l'ensemble des instants t (cf figure 4.2) pour lesquels la variable critique possède un extrémum (maximum ou minimum). A partir de l'intervalle des instants t , nous pouvons calculer la fréquence de résonance par intervalle en fonction de la relation suivante :

$$\omega_r = \frac{2\pi}{T} \quad (4.11)$$

4.3.2 Exigences dynamiques de performances

Fonction de transfert

La fonction de transfert [127, 128] d'un système technique linéaire ou linéarisé, est un modèle de comportement entrée/sortie qui s'obtient à partir de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants (4.12) ou en fonction du modèle d'état défini précédemment. Il s'agit de chercher à obtenir $y(t)$ en fonction de $u(t)$ [127, 128].

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \quad (4.12)$$

L'équation différentielle (4.12) est obtenue en regroupant toutes les équations en une seule de façon à faire apparaître l'entrée $u(t)$, la sortie $y(t)$ et leurs dérivées successives [26, 127].

Pour faciliter la manipulation de la fonction de transfert, on utilise un outil mathématique bien connu, la transformée de Laplace [127] qui se définit comme suit :

$$f(t) \longrightarrow \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (4.13)$$

Où, $f(t)$ est un signal temporel causal (c'est-à-dire pour lequel $f(t) = 0 \forall t < 0$)

L'application de la transformée de Laplace sur l'équation différentielle (4.12) conduit à l'expression suivante de la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad (4.14)$$

4.3.2.1 Stabilité

La stabilité [25–27, 126–128] est un critère de performance des systèmes techniques, dans lequel on évalue l'aptitude du système à retourner à son état d'équilibre après disparition de la perturbation. Ainsi, nous distinguons les différents statuts de stabilité suivants :

- Un système est dite *asymptotiquement stable* [127], si, lorsque il s'écarte de son état d'équilibre sous l'effet d'une perturbation, il y revient dans un temps infini.
- Un système est dite *instable* [127], si après perturbation, il s'éloigne davantage.
- Un système est dite *simplement stable* [127], si après perturbation, le système reste dans un voisinage du point d'équilibre.

Mathématiquement, un système est stable au sens entrée/sortie [26, 27, 127], si et seulement si lorsqu'on lui applique une entrée u bornée, la sortie y obtenue est aussi bornée quel que soit son état initial. Analyser la stabilité d'un système revient donc à rechercher ses états d'équilibre et à déterminer leur stabilité. Pour ce faire, il faut disposer de critères de stabilité. La présentation de certains de ces critères et de leur formalisation sous forme de contraintes fait l'objet de cette partie.

Condition nécessaire et suffisante de stabilité

Un système linéaire est stable [26, 128], si est seulement si tous ses pôles ont une partie réelle négative.

Critères de stabilité (Critère de *Routh*)

Plusieurs critères existent pour valider la stabilité des systèmes techniques [26, 126, 127]. Nous retiendrons le critère de *Routh* pour traduire cette exigence en contraintes algébriques.

On considère la fonction de transfert d'un système technique :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{N(p)}{D(p)} \quad (4.15)$$

Le critère de *Routh* est un critère permettant de valider la stabilité d'un système à partir du signe des racines du polynôme caractéristique de stabilité [26, 126]. Ce polynôme est obtenu comme suit : La fonction de transfert en boucle fermée est la suivante :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{N(p)}{N(p) + D(p)} \quad (4.16)$$

Alors le polynôme caractéristique de la stabilité noté $Q(p)$ est le suivant [26, 127, 128] :

$$Q(p) = N(p) + D(p) = c_m p^m + c_{m-1} p^{m-1} + \dots + c_1 p + c_0 \quad (4.17)$$

Présentation du critère de *Routh*

Créons un tableau :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} p^n & c_n & c_{n-2} & c_{n-4} & \dots \\ p^{n-1} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \dots \end{array}$$

Ces deux lignes regroupent tous les coefficients du polynôme dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF).

Créons les lignes suivantes jusqu'à p^0 :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} p^{n-2} & d_1 & d_2 & d_3 & \dots \\ p^{n-3} & e_1 & e_2 & e_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^0 & & & & \end{array}$$

Avec :

$$d_1 = \frac{-1}{c_{n-1}} \begin{vmatrix} c_n & c_{n-2} \\ c_{n-1} & c_{n-3} \end{vmatrix} \quad d_2 = \frac{-1}{c_{n-1}} \begin{vmatrix} c_n & c_{n-4} \\ c_{n-1} & c_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$e_1 = \frac{-1}{d_1} \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_{n-3} \\ d_1 & c_{n-1} \end{vmatrix} \quad e_1 = \frac{-1}{d_1} \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_{n-5} \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

La première colonne de coefficients est appelée la colonne des pivots.

Énoncé du critère de *Routh*

Le système est stable si tous les termes de la colonne des pivots sont du même signe que c_n . Il y a autant de racines à partie réelle positive que de changement de signe [26, 127]. Une ligne de zéro indique l'existence de racines imaginaires pures.

L'inconvénient du critère de *Routh* est qu'il ne permet pas de préciser les marges de stabilité du système [26, 27, 127].

Ainsi, pour intégrer l'exigence de stabilité en se basant sur le critère de *Routh*, nous rassemblons la colonne des pivots dans un vecteur nommé VP tel que :

$$VP = \begin{bmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ d_1 \\ e_1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Le système est stable dans les deux conditions suivantes :

$$VP \geq 0 \Leftrightarrow \forall i \in [1 : \text{length}(VP)] \quad VP[i] \geq 0 \quad (4.18)$$

ou,

$$VP \leq 0 \Leftrightarrow \forall i \in [1 : \text{length}(VP)] \quad VP[i] \leq 0 \quad (4.19)$$

4.3.2.2 Commandabilité et Observabilité

Commandabilité

L'avantage de notre démarche de conception est qu'on peut aussi intégrer la conception de la partie contrôle dans la même phase de conception de la structure du système au lieu de faire la conception du système dans un premier temps puis concevoir sa partie contrôle dans un deuxième temps. Ce couplage de dimensionnement entre le corps principal du système et sa partie contrôle permet d'optimiser le choix des paramètres de contrôle et de se situer dans un certain intervalle limite pour les vitesses, les accélérations, ...

Un système linéaire est commandable [26, 27, 127, 128] sur un intervalle, s'il est possible de le conduire en lui appliquant un signal de commande U défini sur un intervalle de temps fini, d'un état initial à un état final.

Pour un système linéaire à coefficients constants, la commandabilité complète est une propriété structurelle [127, 128]. Elle ne dépend pas de l'état final désiré de telle sorte que la sortie du système n'intervienne pas dans la définition de la commandabilité. La notion de commandabilité ne concerne que la partie de la représentation d'état relative à la commande, c'est-à-dire à l'équation d'état.

Critère de commandabilité

La condition nécessaire et suffisante de commandabilité ci-après (appelée Critère de *Kalman* [129] pour la commandabilité) est basée sur la représentation d'état [26, 27, 127, 128] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.x(t) \end{cases}$$

Alors, le système étudié est commandable si et seulement si :

$$\text{rang}(Q) = \text{rang}([B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]) = n \quad (4.20)$$

Avec $Q = \begin{bmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \dots & q_{1,n} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & \dots & q_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n,1} & q_{n,2} & \dots & q_{n,n} \end{bmatrix}$ la matrice de commandabilité.

Pour traduire cette relation en terme de contrainte, nous nous basons sur les propriétés d'une matrice inversible. En effet, puisque le matrice d'état A est un matrice carrée de dimension n , la dimension de la matrice Q est aussi n . Ainsi, pour prouver la propriété du commandabilité (5.22) il suffit de montrer que la matrice Q est inversible, ce qui revient à calculer son déterminant (qui doit être différent de zéro). La contrainte de commandabilité est la suivante :

$$\det(Q) \neq 0 \quad (4.21)$$

La contrainte "différence" (\neq) ne peut pas être intégrer dans un solver CSP car elle ne signifie rien. En effet deux intervalles non disjoints peuvent toujours être différents. Ainsi, nous reformulons la contrainte (4.21) de la manière suivante :

$$|\det(Q)| \geq \varepsilon \quad (4.22)$$

Avec $\varepsilon \simeq 0.0000001$ est très petit.

On peut développer le calcul du déterminant de A suivant une ligne ou une colonne. Ainsi, le développement suivant la ligne i est :

$$\det(Q) = \sum_{j=1}^n q_{i,j} (-1)^{i+j} \det(Q_{i,j}) \quad (4.23)$$

Le terme $(-1)^{i+j} \det(Q_{i,j})$ est appelé le cofacteur du terme $q_{i,j}$ et le terme $\det(Q_{i,j})$ est appelé le mineur du terme $q_{i,j}$. Cette méthode porte le nom de développement suivant une ligne (ou une colonne). Pour le calcul du déterminant d'une matrice, nous pouvons utiliser l'algorithme de Gauss suivant la première colonne (cf annexe D).

Observabilité

Un système est observable [25, 27, 127] si, quel que soit t , il existe un intervalle de temps fini $[t_0; t_1]$ tel que la connaissance de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $y(t)$ sur cet intervalle permet de déterminer $x(t)$. Cette propriété ne dépend que des matrices A et C .

Critère d'Observabilité

La condition nécessaire et suffisante d'observabilité [25, 27, 127] (appelée Critère de *Kalman* [129] pour l'observabilité) est la suivante : Le système étudié est observable si et seulement si :

$$\text{rang}(M) = \text{rang} \left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right) = n \quad (4.24)$$

Avec $M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,n} \end{bmatrix}$ la matrice d'Observabilité.

De même la dimension de la matrice M est aussi n . Ainsi, pour prouver la propriété d'Observabilité (4.24) il suffit de montrer que la matrice M est inversible. La contrainte d'Observabilité est la suivante :

$$|\det(M)| = \left| \sum_{j=1}^n m_{i,j} (-1)^{i+j} \det(M_{i,j}) \right| \geq \varepsilon \quad (4.25)$$

4.3.2.3 Transmittance

La transmittance [25, 26] est le rapport de mesure de la transmission d'une grandeur dans un système. Elle se calcule par le rapport entre la grandeur en sortie et en entrée. Il est équivalent à la fonction de transfert en mode fréquentielle, c'est-à-dire en remplaçant l'opérateur de Laplace p par " $j\omega$ ".

$$T(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0} \quad (4.26)$$

Le calcul de la transmittance [25, 26] est généralement utilisé dans la caractérisation des filtres. En effet, à partir du calcul du module et de l'argument du rapport de transmittance, nous pouvons déterminer le comportement du système en basse et haute fréquences en faisant tendre " ω " vers zéro et vers l'infini [25, 27].

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |T|; \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |T|; \lim_{\omega \rightarrow 0} \arg(T); \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg(T) \quad (4.27)$$

La caractérisation par limite permet de déterminer la marge de fréquences (hautes ou basses fréquences) où la transmission du système est maximale ou minimale. Ainsi, nous

pouvons imposer un encadrement sur les valeurs-limites de la fonction transmission sous forme d'inéquations sur le module et l'argument de la relation 4.26.

$$\begin{aligned} T_{\min} &\leq \|T(j\omega)\| \leq T_{\max} \\ \arg_{\min} &\leq \arg(T(j\omega)) \leq \arg_{\max} \end{aligned} \quad (4.28)$$

La prise en compte de ces inéquations algébriques sous forme de contraintes (4.28) permet de déterminer le domaine des fréquences qui correspondent aux valeurs de la transmission définie.

Suivant la complexité du système étudié les exigences imposées sont développées et traduites pour prendre des formes de contraintes plus simples ou plus complexes. Les contraintes dynamiques sont généralement représentées par les relations mathématiques détaillées dans le paragraphe 4.3.

4.4 Exemple d'application au dimensionnement d'un ressort de compression intégré dans un système de suspension

La démarche de conception proposée est évaluée et appliquée pour le calcul de la résistance et le dimensionnement d'un ressort de compression cylindrique à tiges de section circulaire, soumis à l'action des forces statiques et dynamiques. L'objectif principal de la partie suivante est d'évaluer cette méthode sur un exemple simple (dimensionnement d'un ressort de compression) en prenant en compte tous les types de contraintes de dimensionnements statiques et dynamiques en une seule étape de dimensionnement.

Ce travail a fait l'objet d'une publication acceptée dans "European Journal of Computational Mechanics" [130] et d'une autre proposition soumise et en cours de révision à la revue "Engineering Applications of Artificial Intelligence".

4.4.1 Problème d'un ressort de compression intégré dans un système de suspension

Notre méthode est appliquée sur un cas de dimensionnement optimal d'un ressort de compression intégré dans un système de suspension de véhicule [11, 85–87, 131]. Les ressorts sont des éléments structurels conçus pour maintenir et stocker l'énergie et le travail mécanique basé sur le principe de la déformation élastique du matériau.

Le problème de dimensionnement d'un composant de type ressort de compression a été étudié dans de nombreux travaux scientifiques [131–135] et traités par plusieurs techniques qui sont principalement basées sur des méthodes stochastiques ou de type gradient conjugué. Cependant, dans ces études, le dimensionnement statique a été étudié séparément du dimensionnement dynamique. Ainsi, nous proposons de combiner la prise en compte des exigences

statiques et dynamiques dans la même phase de conception préliminaire.

L'étude a été faite sur le type de ressort le plus utilisé qui est le ressort hélicoïdal de compression [131–133] à fil rond et de pas et diamètre extérieur constants (cf figure 4.3).

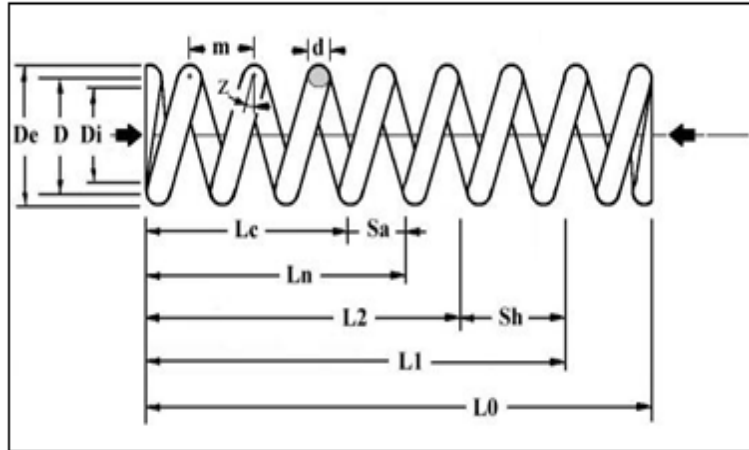


FIGURE 4.3 – Ressort de compression.

4.4.1.1 Variables de conception d'un ressort de compression

Les variables de conception d'un ressort de compression [134, 135] sont classées en trois types (cf Nomenclature en Annexe C) :

- **Les Variables caractérisant la matière** sont liées à la matière utilisée. Connaissant le type de matériau, les variables (G , E , ρ) sont bien connues. Les autres variables dépendent des valeurs des variables géométriques du ressort (tableau 4.1).
- **Les variables géométriques** (D_e , D_i , R , L_0 , L_c , D , N , Z et m) sont utilisées pour définir la géométrie d'un ressort de compression. Le ressort est un composant dont la géométrie varie de manière significative au cours de l'utilisation. Généralement, il fonctionne entre deux configurations : la première correspondant à l'état le moins comprimé, la seconde correspond à l'état le plus comprimé.
- **Les variables opérationnelles** (F_1 , F_2 , L_1 , L_2 et S_h) définissent l'usage de ressort.

Relations technologiques entre les variables de conception d'un ressort

Les différentes variables de conception sont inter-reliées à travers les équations ci-dessous, [135–139] :

$$D = D_e - d \quad (4.29)$$

$$D_i = D - d \quad (4.30)$$

$$F_1 = R(L_0 - L_1) \quad (4.31)$$

$$F_2 = R(L_0 - L_2) \quad (4.32)$$

$$F_{cth} = R(L_0 - L_c) \quad (4.33)$$

$$F_n = R(L_0 - L_n) \quad (4.34)$$

$$f_e = \frac{3560d}{nD^2} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (4.35)$$

$$k = \frac{w + 0.5}{w - 0.75} \quad (4.36)$$

$$L_0 = m n + (n_i + n_m) d \quad (4.37)$$

$$L_c = d(n + n_i + n_m) \quad (4.38)$$

$$L_d = \pi D \left(2 + n_m + \frac{n}{\cos z} \right) \quad (4.39)$$

$$L_n = d(n + n_i + n_m) + S_a \quad (4.40)$$

$$L_r = L_0 - \frac{\pi d^3 \tau_{zul}}{8DRk} \quad (4.41)$$

$$M = \frac{\rho 10^{-3} L_d \pi d^2}{4} \quad (4.42)$$

$$m = \frac{L_0 - d(n_i + n_m)}{n} \quad (4.43)$$

$$n = \frac{Gd^4}{8RD^3} \quad (4.44)$$

$$n_t = n + n_m + 2 \quad (4.45)$$

$$R = \frac{Gd^4}{8nD^3} \quad (4.46)$$

$$s_h = L_1 - L_2 \quad (4.47)$$

$$V_{0l0} = \frac{\pi D_e^2 L_0}{4000} \quad (4.48)$$

$$V_{0l2} = \frac{\pi D_e^2 L_2}{4000} \quad (4.49)$$

$$W = 0.5 (F_1 + F_2) (L_1 - L_2) \quad (4.50)$$

$$w = \frac{D}{d} \quad (4.51)$$

$$\tan z = \frac{m}{\pi D} \quad (4.52)$$

$$\tau_{k2} = 8DR(L_0 - L_2)k / (\pi d^3) \quad (4.53)$$

$$\tau_{kcth} = 8DR(L_0 - L_c)k / (\pi d^3) \quad (4.54)$$

Des relations supplémentaires telles que des inéquations, tables de compatibilité, relations conditionnelles sont également à prendre en compte dans le dimensionnement du ressort de compression.

Choix du matériau

Le type de matériau choisi impose des valeurs sur certains paramètres ainsi qu'une restriction sur les bornes pour d'autres (Tableau 4.1). D'autre part, la norme DIN [140] définit le domaine d'application de ces formules pour les ressorts de compression hélicoïdaux :

$$d \leq 17 \quad (4.55)$$

$$D \leq 200 \quad (4.56)$$

$$L_0 \leq 630 \quad (4.57)$$

$$n \leq 2 \quad (4.58)$$

$$4 \leq w \leq 20 \quad (4.59)$$

<i>Matériau</i>	<i>Acier DH</i>	<i>Inox 302</i>
<i>Limites du constructeur (mm)</i>	$0.3 \leq d \leq 12$	$0.15 \leq d \leq 15$
<i>G</i>	81500	70000
<i>E</i>	206000	192000
<i>R_m</i>	$2230 - 355.94 \ln(d)$	$1919 - 255.86 \ln(d)$
<i>Contrainte maximale admissible τ_{zul} (% of <i>R_m</i>)</i>	50	48
<i>ρ</i>	7.85	7.90

Tableau 4.1 – Propriétés mécaniques des matériaux des ressorts de compression.

Choix du type d'extrémité

Ce choix détermine la valeur de la variable de n_i . Le choix de la valeur de la variable n_i est effectué parmi les valeurs de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. Dans la pratique, les extrémités qui sont simplement coupées et juste meulées ($n_i = 1$) sont rarement utilisées car elles provoquent une dispersion des forces. Il est préférable d'utiliser des extrémités étroites ($n_i = 3$) ou plus rapprochées et meulées ($n_i = 2$).

Choix du nombre de spires mortes

Il est également possible d'ajouter des spires (n_m) nommées «spires mortes» pour augmenter la longueur du ressort sans changer sa rigidité.

Rapport d'enroulement

Le rapport d'enroulement w (appelé aussi indice du ressort) est le rapport entre le diamètre moyen du ressort et le diamètre du fil. La norme *DIN* [140] indique que :

$$4 \leq w \leq 20 \quad (4.60)$$

Longueur opérationnelle minimale

La longueur L_n est la longueur minimale de fonctionnement basée sur des considérations géométriques. La norme *DIN* [140] impose de respecter une distance minimale entre les spires nommée S_a telle que :

$$s_a = n \left(0.0015 \frac{D^2}{2} + 0.1d \right) \quad (4.61)$$

De plus, lorsque le nombre de cycles avant rupture est tel que $N > 10^4$ alors on multiplie S_a par un coefficient de 1.5.

Flambage du ressort

Les ressorts de compression peuvent être sujets au flambage [141, 142]. D'une façon classique, la longueur du ressort de compression diminue sous l'effet d'une charge axiale. En dessous d'une longueur critique, certains ressorts peuvent fléchir latéralement au lieu de continuer de diminuer en longueur : c'est le flambage. La longueur en dessous de laquelle apparaît le phénomène est appelée longueur critique de flambage L_K .

$$L_1 > L_k \quad (4.62)$$

$$L_2 > L_k \quad (4.63)$$

De plus, en se référant à la norme *DIN* [140], on obtient :

$$\mu + 1 = \frac{E}{2G} \quad (4.64)$$

Et si on considère que :

$$v \frac{L_0}{D} < \pi \sqrt{\frac{2\mu + 1}{\mu + 2}} \quad (4.65)$$

Alors

$$L_K = 0 \quad (4.66)$$

sinon

$$L_K = L_0 \left(1 - \frac{(\mu + 1)}{2\mu + 1} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\mu + 1}{\mu + 2} \left(\frac{\mu D}{vL_0} \right)^2} \right) \right) \quad (4.67)$$

Contrainte statique maximale

La contrainte statique maximale est définie par l'équation suivante :

$$\tau_{K2} < \tau_{zul} \quad (4.68)$$

Matériau	Acier grenailé	Acier non grenailé	Inox
β	2	1.6	3
τ_d	$\frac{293.5}{d^{0.1786}}$	$\frac{350.8}{d^{0.1769}}$	$\frac{350.8}{d^{0.1769}}$
τ_{zul}	$0.5 (2230 - 355.94 \ln d)$	$0.5 (2230 - 355.94 \ln d)$	$0.48 (1918 - 255.8 \ln d)$

Tableau 4.2 – Coefficient de sécurité en fonction du type de matériau

Résistance à la fatigue

Il y a beaucoup de courbes pour définir la résistance à la fatigue d'un matériau [143–145]. Nous citons le diagramme de Wohler, de Goodman et de Haigh. Ce dernier sert de référence pour calculer le facteur de sécurité en fatigue β (tableaux 4.2 et 4.3).

$$\tau_m = \frac{4DR(2L_0 - L_1 - L_2)k}{\pi d^3} \quad (4.69)$$

$$\tau_a = \frac{4DR(L_1 - L_2)k}{\pi d^3} \quad (4.70)$$

$$\alpha_F = \tau_{d(N)} \frac{\beta \tau_{zul} - \tau_{d(N)}}{(\tau_a (\beta \tau_{zul} - \tau_{d(N)}) + (\beta - 1) \tau_m \tau_{d(N)})} \quad (4.71)$$

Le choix du coefficient $\tau_{d(N)}$ est effectué selon le tableau 4.3.

N	$\tau_{d(N)}$
$N \geq 10^7$	τ_d
$10^4 < N < 10^7$	$[(\tau_d - \tau_{zul}) \log N + 7\tau_{zul} - 4\tau_d]/3$
$N \leq 10^4$	τ_{zul}

Tableau 4.3 – Valeur de $\tau_{d(N)}$ en fonction du nombre de cycles avant rupture N

Contrainte à spire jointive

Elle impose une borne maximum sur la valeur de la contrainte de cisaillement théorique τ_{kc}^{sth} ajustée pour L_c qui doit être inférieure à la valeur maximale autorisée par τ_{kc}^s :

$$\tau_{kc}^{sth} < \tau_{kc}^s \quad (4.72)$$

Le choix de τ_{kc}^s est effectué suivant le tableau 4.4.

Dans la partie suivante, les autres types de contraintes externes liées directement à l'environnement du ressort de compression sont étudiées. Le système de suspension de véhicule a été choisi comme exemple d'environnement pour le ressort de compression. Ainsi, il convient de déterminer les contraintes dynamiques imposées sur le ressort de compression et de coupler les contraintes statiques et dynamiques dans le but de dimensionner le ressort de compression de manière optimale, selon l'approche de conception proposée (cf figure 4.1).

Type d'affaissement (a_{ff})	$\tau_{kc}^s \text{ Acier} \times R_m$	$\tau_{kc}^s \text{ Inox} \times R_m$
Sans affaissement ($a_{ff}=0$)	0.5	0.48
Affaissement léger ($a_{ff}=1$)	0.56	0.56
Affaissement permanent ($a_{ff}=2$)	0.75	0.70

Tableau 4.4 – Valeurs de τ_{kc}^s selon le type d'affaissement choisi.

4.4.1.2 Système de suspension de véhicule

La suspension du véhicule (cf figure 4.4), aussi appelée « liaison au sol » est l'ensemble des éléments conçus pour absorber les chocs et assurer une adhérence permanente des roues sur le sol. Le ressort est l'une des parties essentielles qui contrôle son comportement : c'est lui qui définit la fréquence d'oscillation de la masse suspendue et l'amplitude des mouvements verticaux. Il est également un élément de confort perçu par les passagers. Il existe différents types de suspension automobile, avec des caractéristiques spécifiques, les points forts et les limites, brièvement décrites ici [135]. Le ressort hélicoïdal en acier est sélectionné parmi les configurations de suspensions les plus courantes : MacPherson, double triangulation, essieu rigide (figure 4.4). Les ressorts sont enroulés en hélice d'un diamètre compris entre 120 et 200 mm et une hauteur comprise entre 150 et 300 mm environ, les spires de base sont plus petites, même décentrées, par rapport au corps du ressort, sur la base des éléments de retenue du ressort. Le diamètre de la barre d'acier utilisée pour la production peut varier entre 9 et 16 mm. Le nombre de spires "actives" (spires qui se compriment et qui se déforment au cours de l'utilisation du véhicule) de ces ressorts est compris entre 3 et 8. L'étude dynamique est faite pour obtenir les conditions dynamiques du système de suspension afin d'éviter sa destruction en cas de résonance. Le but est de déterminer certaines conditions, de sorte que, le comportement du système réagit bien et résiste en cas de phénomènes de perturbation et d'excitation.

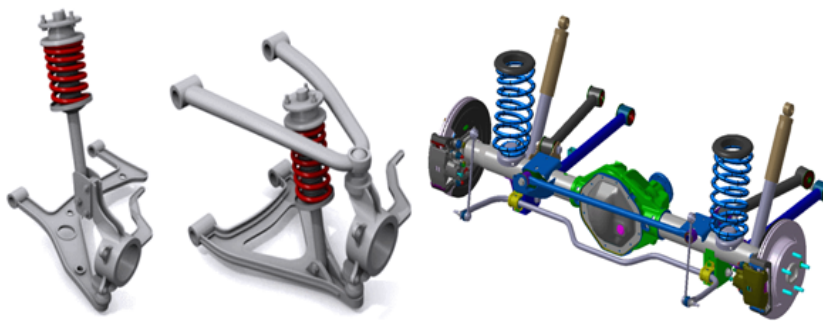


FIGURE 4.4 – Systèmes de suspension [5, 6].

La connaissance du niveau d'amortissement dans le système de suspension du véhicule est importante. Elle évite la production de mouvements nuisibles dans des conditions de résonance lorsque le système est soumis à un phénomène de perturbation. Alors la connaissance

de l'amortissement dans les dispositifs constitutifs, les composants et les structures de support est importante dans la conception et dans le but d'apporter des modifications de conception dans un système qui a échoué dans un test d'acceptation. Il est également utile en imposant des limitations environnementales dynamiques sur le système (c'est-à-dire, l'excitation dynamique maximale que le système peut supporter) dans des conditions de service.

La nature et le niveau de l'amortissement des composants sont déterminés par l'utilisation d'un modèle dynamique du système. Ainsi, une étude du comportement dynamique de la suspension du véhicule est effectuée pour déterminer les contraintes dynamiques [146] exercées par les éléments constitutif du système de suspension et liées au ressort de compression. Ces contraintes sont intégrées dans l'étape de dimensionnement de manière à avoir le meilleur fonctionnement de la suspension du véhicule.

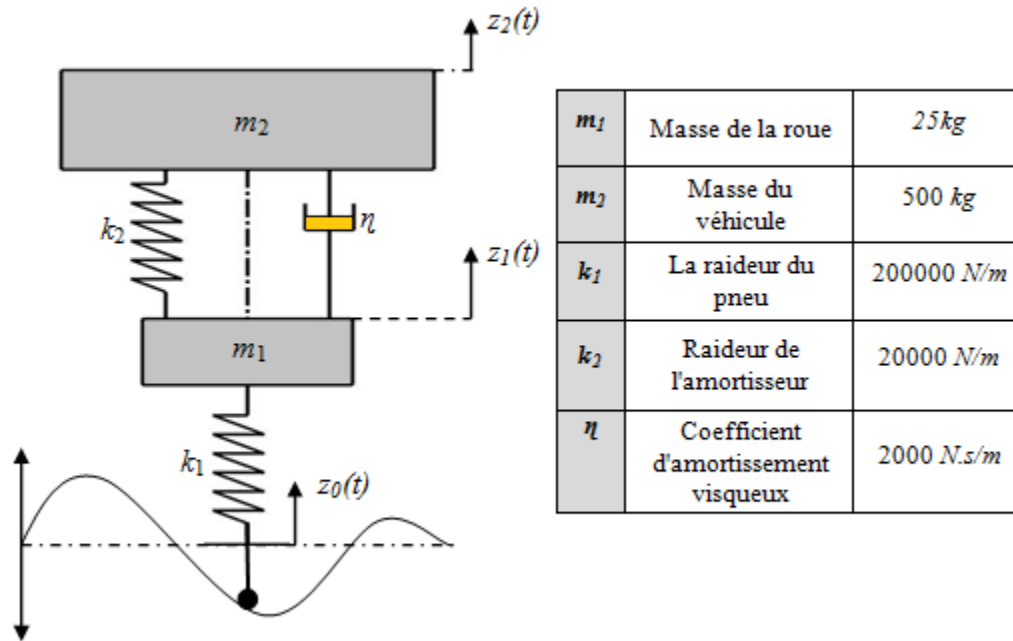


FIGURE 4.5 – Modèle linéaire d'un système de suspension d'un quart de véhicule en mode vertical.

Nous utilisons le modèle de suspension linéaire détaillé dans le chapitre 3 (cf, figure 4.5). Avec cette modélisation, deux études sont faites : dans un premier temps, en imposant un déplacement instantané (transitoire) et dans un deuxième, en imposant un déplacement de profil (le régime permanent). Cela correspond à deux modes de fonctionnement de la suspension. Les équations de mouvement sont les suivantes :

$$m_2 \cdot \ddot{z}_2 + \eta \cdot (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + k_2 \cdot (z_2 - z_1) = 0 \quad (4.73)$$

$$m_1 \cdot \ddot{z}_1 + \eta \cdot (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_2 \cdot (z_1 - z_2) + k_1 \cdot (z_1 - z_0) = 0 \quad (4.74)$$

Nous appliquons la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned} m_2.p^2.z_2 + \eta.p(z_2 - z_1) + k_2.(z_2 - z_1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (m_2.p^2 + \eta.p + k_2)z_2 - (\eta.p + k_2)z_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} m_1.p^2.z_1 + \eta.p(z_1 - z_2) + k_2.(z_1 - z_2) + k_1.(z_1 - z_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow (m_1.p^2 + \eta.p + k_1 + k_2)z_1 - (\eta.p + k_2)z_2 - k_1.z_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.76)$$

Nous obtenons les relations suivantes :

$$z_1 = \frac{m_2.p^2 + \eta.p + k_2}{\eta.p + k_2} z_2 \quad (4.77)$$

$$z_2 = \frac{k_1(\eta.p + k_2)}{(m_1.p^2 + \eta.p + k_1 + k_2)(m_2.p^2 + \eta.p + k_2) - (\eta.p + k_2)^2} z_0 \quad (4.78)$$

La fonction de transfert globale est la suivante :

$$\begin{aligned} F_t(p) &= \frac{z_2}{z_0} \\ &= \frac{(\eta.p + k_2)k_1}{m_2.m_1.p^4 + \eta.(m_2 + m_1).p^3 + [m_2(k_2 + k_1) + m_1.k_2].p^2 + \eta.k_1.p + k_2.k_1} \end{aligned} \quad (4.79)$$

La fonction de transfert harmonique est obtenue simplement en substituant "p" par "j ω ".

$$\begin{aligned} F_t(j\omega) &= \\ &= \frac{k_1.k_2 + j.\omega.k_1.\eta}{m_2.m_1.\omega^4 - [m_2(k_2 + k_1) + m_1.k_2].\omega^2 + k_2.k_1 - j[\eta.(m_2 + m_1).\omega^3 - \eta.k_1.\omega]} \end{aligned} \quad (4.80)$$

Étudier la stabilité du système de suspension revient à déterminer les racines du dénominateur (les pôles de la fonction de transfert).

$$\begin{aligned} m_2.m_1.\omega^4 - [m_2(k_2 + k_1) + m_1.k_2].\omega^2 + k_2.k_1 \\ - j[\eta.(m_2 + m_1).\omega^3 - \eta.k_1.\omega] &= 0 \\ \Leftrightarrow m_2.m_1.\omega^4 - [m_2(k_2 + k_1) + m_1.k_2].\omega^2 + k_2.k_1 &= 0 \\ \text{et } \eta.(m_2 + m_1).\omega^3 - \eta.k_1.\omega &= 0 \end{aligned} \quad (4.81)$$

Alors les racines de cette équation sont :

Pour la partie réelle

$$\omega_{1,2,3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_2.k_2 + m_2.k_1 + m_1.k_2 \mp \sqrt{\Delta}}{m_1.m_2}} \quad (4.82)$$

Avec

$$\Delta = m_2^2.(k_2 + k_1)^2 + m_1.k_2[m_1.k_2 + 2m_2.(k_2 - k_1)] \quad (4.83)$$

Pour la partie imaginaire

$$\omega_{5,6,7} = 0, \pm \frac{\sqrt{(m_2 + m_1).k_1}}{m_1 + m_2} \quad (4.84)$$

Calcul du module :

$$|F_t(j\omega)| = \sqrt{\frac{(k_1.k_2)^2 + (\omega.k_1.\eta)^2}{[m_2.m_1.\omega^4 - [m_2(k_2+k_1) + m_1.k_2].\omega^2 + k_2.k_1]^2 + [\eta.(m_2+m_1).\omega^3 - \eta.k_1.\omega]^2}} \quad (4.85)$$

Calcul de l'argument :

$$\begin{aligned} \arg(F_t(j\omega)) &= \arg(k_1.k_2 + j.\omega.k_1.\eta) \\ &- \arg\left(\frac{m_2.m_1.\omega^4 - [m_2(k_2+k_1) + m_1.k_2].\omega^2}{+k_2.k_1 - j[\eta.(m_2+m_1).\omega^3 - \eta.k_1.\omega]}\right) \end{aligned} \quad (4.86)$$

⇔

$$\begin{aligned} \arg(F_t(j\omega)) &= \arccos\left(\frac{k_1.k_2}{\sqrt{(k_1.k_2)^2 + (\omega.k_1.\eta)^2}}\right) \\ &- \arccos\left(\frac{m_2.m_1.\omega^4 - [m_2(k_2+k_1) + m_1.k_2].\omega^2 + k_2.k_1}{\sqrt{[m_2.m_1.\omega^4 - [m_2(k_2+k_1) + m_1.k_2].\omega^2 + k_2.k_1]^2 + [\eta.(m_2+m_1).\omega^3 - \eta.k_1.\omega]^2}}\right) \end{aligned} \quad (4.87)$$

Dans la partie suivante, le diagramme de Bode est représenté pour le cas où les variables $(m_2, m_1, k_2, k_1, \eta)$ sont remplacées par les valeurs numériques indiquées dans la figure 4.5. Les pôles de la fonction de transfert sont :

$$[-40.3013i, 83.0930, -40.3013 - 83.0930i, -1,6987 + 5.8851i, -1,6987 - 5.8851i]$$

L'amplitude est exprimée en décibels (dB). Elle est calculée en multipliant le \log_{10} (magnitude) par un facteur de 20.

Nous remarquons d'après la figure 4.6, que l'amplitude est maximum à la fréquence angulaire $\omega_r = 6.19rad/s$, mais le système est stable. La forme des courbes d'amplitude et de phase ressemble à la forme de réponse d'un système du second ordre.

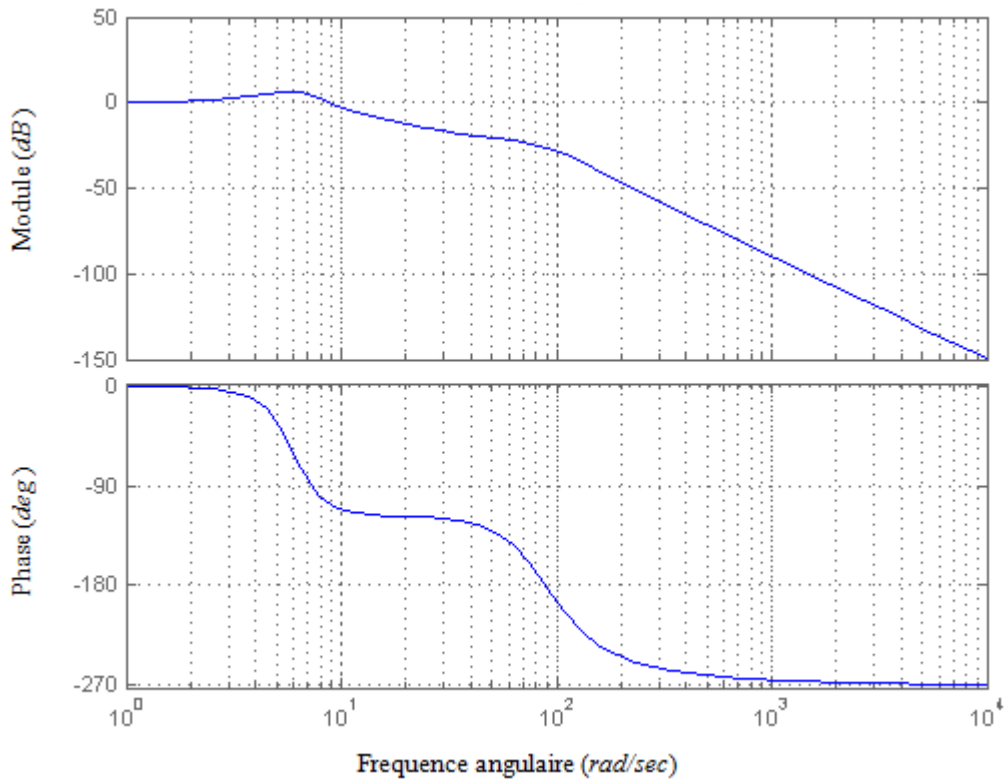


FIGURE 4.6 – Diagramme de Bode pour la fonction de transfert de suspension du véhicule.

Réponse impulsionnelle

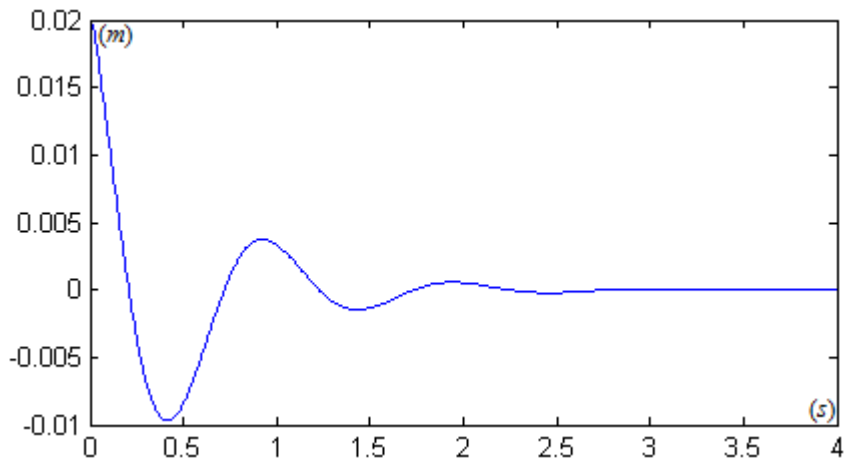


FIGURE 4.7 – Réponse du système de suspension d'un véhicule excité par un déplacement instantané.

Le comportement dynamique d'un système de suspension excité par un déplacement impulsionnelle de $2cm$ sur la roue est représenté sur la figure 4.7. Le déplacement z_2 converge vers zéro, ce qui est normal puisque le rôle d'une suspension est d'atténuer les vibrations causées par la route en un temps minimum.

Réponse sinusoïdale

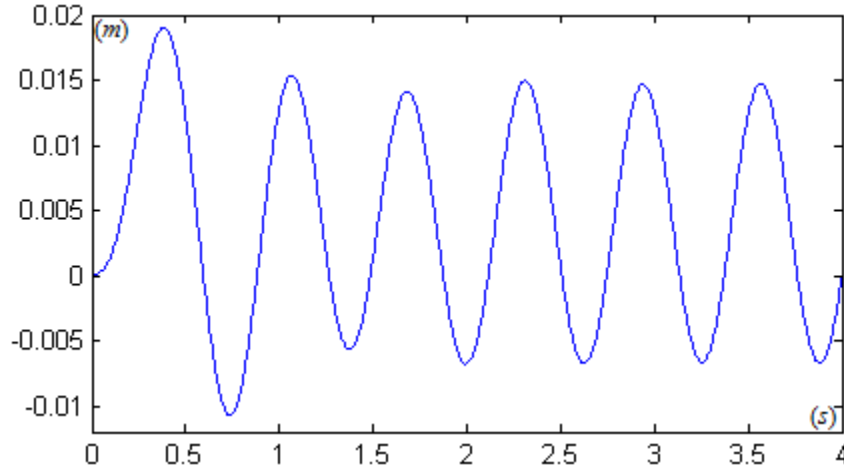


FIGURE 4.8 – Réponse du système de suspension d'un véhicule excité par un force sinusoïdale

La réponse du système de suspension d'une véhicule excité par un force sinusoïdale $F = 0.02.k_1.\sin(10.t)$ est représentée sur la figure 4.8. Suivant la courbe exposée dans cette figure, nous observons que le déplacement z_2 du châssis est sinusoïdal (mouvement harmonique) et suit la trajectoire de la route. Il est clair que la réponse du système de suspension est en avance de phase de $90deg$ par rapport à la force d'excitation due à l'amortissement visqueux. Ceci est dû au fait que la vitesse est en avance de phase de $90deg$ par rapport au déplacement.

4.4.1.3 Contraintes dynamiques

Suivant l'étude dynamique faite dans le paragraphe précédent nous pouvons intégrer les exigences dynamiques de résonance et de limitation de course. Ainsi, en termes de contraintes nous posons une encadrement sur l'amplitude de déplacement de la suspension en fonction des valeurs limites maximale z_{max} et minimale z_{min} que nous avons choisies.

$$z_{min} < z_2 = \frac{F_0}{k_1} \sqrt{\frac{(k_1.k_2)^2 + (\omega.k_1.\eta)^2}{[m_2.m_1.\omega^4 - [m_2(k_2 + k_1) + m_1.k_2].\omega^2 + k_2.k_1]^2 + [\eta.(m_2 + m_1).\omega^3 - \eta.k_1.\omega]^2}} < z_{max} \quad (4.88)$$

Ces valeurs représentent les valeurs maximale et minimale d'allongement du ressort de compression. Les valeurs appliquées pour z_{max} et z_{min} dans le modèle de résolution sont respec-

tivement 0.03 et $-0.03m$. Les contraintes utilisées pour éviter le phénomène de résonance sont :

$$\begin{aligned} & | m_2.m_1.\omega^4 - [m_2(k_2 + k_1) + m_1.k_2].\omega^2 + k_2.k_1 \\ & - j[\eta.(m_2 + m_1).\omega^3 - \eta.k_1.\omega] | \geq \varepsilon \end{aligned} \quad (4.89)$$

et

$$| \omega - \omega_i | \geq \varepsilon \quad (4.90)$$

En appliquant des intervalles sur les variables (m_2, k_1, k_2, η) , la résolution de l'équation (4.89) permet de déterminer l'ensemble des fréquences de résonance par intervalles dont il faut s'éloigner.

4.4.2 Formalisation des contraintes et résolution par intervalles

4.4.2.1 Définition des variables par CSP

Chaque variable de conception présentes dans la nomenclature du ressort de compression est naturellement considérée comme une variable dans notre CSP à laquelle on associera un intervalle initial de valeurs. On les trouvera dans la colonne « valeur initiale » du Tableau 5.1. Pour certains paramètres, comme L_d, F_1, \dots , ils sont exprimés par des longs intervalles puisque la limite supérieure n'est pas définie dans les contraintes imposées. Pour les autres variables, les limites d'intervalles sont bien définies (exemple : D, V_{ol0}, \dots), ce qui sert à minimiser le temps de calcul.

4.4.2.2 Implémentation des relations technologiques entre variables par CSP

Une contrainte est une relation entre des entités qui devrait être satisfaite d'un point de vue technologies d'ingénierie. Ainsi, les relations technologiques du ressort de compression sont modélisées comme un ensemble de contraintes sur les variables de conception. Il est possible d'ajouter dynamiquement de nouvelles contraintes au cours du processus de résolution du CSP. Ainsi, les domaines des variables sont progressivement contractés à chaque fois qu'une contrainte est ajoutée.

Les modèles statiques et dynamiques du ressort de compression décrits précédemment sont implémentés dans le même modèle CSP (cf figure 4.9). La figure 4.9 montre un extrait du modèle de résolution du problème de dimensionnement d'un ressort de compression intégré dans un système de suspension de véhicule. Ainsi, toutes les contraintes statiques et dynamiques sont écrites dans un fichier texte qui sera importé dans le logiciel de modélisation et de résolution *Constraint Explorer* par contraintes [147] utilisé dans cette étude.

```

(* Fonctionals parametres of the spring *)
F1:real = [0, inf];
F2:real = [0, inf];
L1:real = [0, 630];
L2:real = [0, 630];
Sh:real = [0, 630];
W:real = [0, inf];
Vol2:real = [0, 24000];

(* Sizing constraints *)
D= De-d;
Di=D-d;
w=D/d;
k= (w+0.5)/(w-0.75);
tan(z)=m/pi/D;
L0=m*n+(ni+nm)*d;
Lc=d*(n+ni+nm);
Ld=pi*D*(2+nm+n/cos(z));
m*n = L0-d*(ni+nm);
n=G*d^4/(8*R*D^3);
nt=n+nm+2;
R=G*d^4/(8*n*D^3);
M=1000*rho*Ld*pi*d^2/4;
fe=3560*d/n/D^2*sqrt(G/rho);
Vol0=pi*De^2*L0/4000;

(* Dynamic constraints *)
m2=500;
etha= 7000;
omegae = 10;
omega:real=[0, inf];
x0:real=[0, inf];
F0:real=[0, inf];
Alias
#alpha := etha/(R*1e3*m2)^0.5/2;
#omega = (R*1e3/m2)^0.5;
#max(L0-L1, L0-L2) >= x0;
#Ld-delta := etha/(#omegae*omegae);

(* equation (30)*)
(* equation (31)*)
(* equation (52)*)
(* equation (37)*)
(* equation(53)*)
(* equation (38)*)
(* equation (39)*)
(* equation (40) *)
(* equation (44) *)
(* equation (35) *)
(* equation (46) *)
(* equation (47) *)
(* equation (43) *)
(* equation (36) *)
(* equation (49) *)

(* Vehicle mass *)
(* The suspension damper *)
(* Excitation frequency of the suspension *)

```

FIGURE 4.9 – Extrait du modèle CSP du problème de dimensionnement du ressort de compression

4.4.2.3 Implémentation des tableaux

Le tableau des combinaisons valides des paramètres du matériau est modélisé comme un tableau contraint.

Chaque ligne du tableau est considérée comme un n-uplet contraint de valeurs cohérentes. Par exemple, sur le tableau 4.5, si lors de la résolution la valeur de G doit être inférieure à 81500, les lignes 1 et 2 sont automatiquement supprimées et seule la ligne numéro 3 reste dans ce tableau de contraintes. L'avantage d'une telle contrainte est de propager un événement à travers le tableau.

De même, le tableau 4.6 est une reformulation du tableau 4.4. Il représente toutes les combinaisons possibles de paramètres du matériau au niveau du type de l'affaissement et du paramètres τ_{kc}^s .

Tableau 4.5 – Tableau de contraintes 1 - transformation du tableau 4.1 et 4.2

<i>Matériaux</i>	<i>E</i>	<i>Coeff</i> τ_{zul}	ρ	d_{min}	d_{max}	β	<i>G</i>
1	206000	0.5	7.8510-6	0.3	12	2	81500
2	206000	0.5	7.8510-6	0.3	12	1.6	81500
3	192000	0.48	7.910-6	0.15	15	3	70000

Tableau 4.6 – Tableau de contraintes 2 - transformation du tableau 4.4

<i>Type</i> τ_{kc}^s	a_{ff}	<i>Material</i>	<i>Coeff</i> τ_{kc}^s
1	0	1	0.5
2	1	1	0.56
3	2	1	0.75
4	0	2	0.5
5	1	2	0.56
6	2	2	0.75
7	0	3	0.48
8	1	3	0.56
9	2	3	0.70

En général, toutes les variables de conception du ressort de compression sont exprimées par intervalles, comme indiqué dans le Tableau 4.10. Les paramètres et les constantes exprimées avec des valeurs sont présentées dans le tableau 4.7. L'étape de notre méthode de conception suivante consiste à propager les contraintes dans les intervalles des variables de conception et à résoudre afin de déterminer toutes les valeurs possibles qui satisfont les exigences imposées.

Tableau 4.7 – Tableau de constantes

ε	0.01
m_2	500
η	7000
Ω_e	10

4.4.3 Résultats numériques de la conception du ressort de compression

4.4.3.1 Aspect statiques

Nous présentons dans le tableau 4.9 une comparaison entre les résultats obtenus par la méthode du (Gradient Conjugué)¹ [135] et les résultats générés par la méthode basée sur les

1. Résultats récupérés à partir de la thèse de *M. Paredes*. [135]

NCSP pour l'exemple du ressort de compression. Dans ce cas, seules les exigences statiques sont prises en compte. Le calcul est fait avec les mêmes hypothèses et les mêmes valeurs initiales (tableau 4.8) que dans la thèse.

Tableau 4.8 – Valeurs initiales des valeurs des paramètres de conception du ressort de compression

<i>Variables</i>	<i>Valeurs initiales</i>
Matériau	1 (Acier inoxydable)
G	81500
R_m	1839
D	30
D_e	30
d	3
n	10
n_i	3
n_m	0
m	9.1
L_1	90
L_2	80
N	10^5
v	1
a_{ff}	0

Tableau 4.9 – Comparaison entre la méthode du gradient conjugué et la méthode de conception basée sur les NCSP

<i>Variables</i>	<i>Gradient Conjugué</i>	<i>CSP</i>	<i>Optimization par CSP</i>
$E (N/mm^2)$	206000	206000	206000
$d(mm)$	3	3	2,86
$L_n(mm)$	50,25	50,25	48,6
$R(N/mm)$	3,06	3,06	2,54
$L_k(mm)$	69,63	69,63	69
M	62,76	63	57,4
α_f	4,68	5,02	5,43

Le tableau 4.9 présente une comparaison de certains paramètres principaux de conception du ressort de compression. Selon ces résultats, nous remarquons que les valeurs obtenues après l'étape de résolution sont identiques à celles déterminées par la méthode du gradient conjugué à l'exception de la masse M et du facteur de résistance à la fatigue α_f du ressort. Dans la colonne 4 du tableau 4.9, on retrouve les valeurs des paramètres du ressort de compressions obtenues dans le cas où sa masse est optimisée. Ainsi, par rapport aux résultats de *M. Paredes* [135], nous avons de meilleurs résultats pour la plupart des paramètres de

conception du ressort, et surtout pour sa masse, ce qui confirme l'efficacité de la méthode de conception basée sur les NCSP au niveau d'optimisation. De plus, il s'agit d'un optimum global garanti.

4.4.3.2 Aspects statiques et dynamiques

Dans cette partie, toutes les exigences statiques et dynamiques sont prises en compte dans le modèle CSP. Le processus de calcul converge vers les résultats présentés dans le tableau 4.10 (colonne 3). Le temps de calcul est de 2 minutes et 30 secondes sur une machine de type (IntelCore i5-3317U CPU@1.7GHz).

La solution générée est constituée par les différents paramètres de conception représentés dans la troisième colonne du tableau 4.10. Les valeurs exposées dans cette colonne du tableau représentent les résultats obtenus à travers la méthode de conception proposée après la phase de résolution.

Les dimensions générales du ressort de compression déterminées par la méthode de conception proposée sont les suivantes :

- Le diamètre moyen D est de 50 mm et par conséquent le diamètre du fil est d'environ 12 mm , le diamètre extérieur du ressort est d'environ 62 mm .
- La longueur totale du ressort est de 200 mm ; cette valeur satisfait bien la contrainte de flambage puisqu'elle est supérieure à la longueur critique de flambage L_c calculée (143.786 mm).
- Le nombre total de spires est égal à 102. L'extrémité du ressort est meulée comme n_i égale à 2. Le pas du ressort m est 17.603 mm et l'angle d'enroulement est environ 0.111deg .
- La masse du ressort est de 1677.243 g . Selon les ressorts de suspension commercialisés, cette masse obtenue est acceptable.

Tableau 4.10 – Résultats numériques des caractéristiques du ressort de compression intégré dans la suspension

<i>Paramètres du matériau</i>		
<i>Les Variables</i>	<i>Valeurs Initiales</i>	<i>Résultats</i>
Matériaux	{1, 2, 3}	1
G	{70000, 81500}	81500
E	{192000, 206000}	206000
R_m	[0 ; 2230]	1346.049
ρ	{7.85e-06, 7.9e-06}	7.85e-06
Coeff τ_{zul}	{0.48, 0.5}	0.5
τ_{zul}	[0, 10000]	673.024
μ	{0.27, 0.30, 0.31 }	0.27
<i>Paramètres constructifs principaux du ressort</i>		
d	[0.15 ; 15]	11.982
d_{min}	{0.15, 0.3}	0.3
d_{max}	{12, 15}	12
D	[0 ; 200]	50
D_e	[0 ; 217]	61.982
D_i	[0 ; 200]	38.017
L_0	[0 ; 630]	200
L_c	[0 ; 630]	143.786
R	[0 ; 200000]	168000
n	[2 ; 2e9]	10
n_i	{1, 2, 3, 4}	2
n_m	[0 ; 2e9]	0
m	[0, 315]	17.603
z	$[-\pi/2, \pi/2]$	0.111
<i>Paramètres constructifs secondaires du ressort</i>		
L_d	[0 ; +∞]	1894.788
Vol_0	[0 ; 24000]	603.468
n_t	[4 ; 2e9]	12
w	[4 ; 20]	4.172
f_e	[0 ; +∞]	173856.88
M	[0 ; +∞]	1677.243

<i>Paramètres fonctionnels du ressort</i>		
F_1	[0 ; +∞]	[3.971 ; 3.975]
F_2	[0 ; +∞]	[5632.342 ; 5632.347]
L_1	[0 ; 630]	199.976
L_2	[0 ; 630]	166.474
S_h	[0 ; 630]	33.502
W	[0 ; +∞]	[94414.468 ; 94414.474]
Vol_2	[0 ; 24000]	502.309
<i>Paramètres de performance (rupture statique)</i>		
L_r	[0 ; 630]	160.351
F_{cth}	[0 ; +∞]	[5704.612 ; 5704.619]
k	[1 ; 2]	1.365
τ_{kc}^{th}	[0 ; +∞]	954.196
a_{ff}	{0, 1, 2}	0
τ_{kc}^s	[0 ; 2230]	[954.206 ; 2230]
τ_{k2}	[0 ; +∞]	11.381
Type τ_{kc}^s	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	1
Coeff τ_{kc}^s	{0.48, 0.5, 0.56, 0.70, 0.75}	0.5
<i>Paramètres de performance (rupture par fatigue)</i>		
N	[0 ; 2e9]	100000
β	{1.6, 2.0, 3.0}	2
S_a	[0 ; +∞]	22.667
L_n	[0 ; 630]	166.454
F_n	[0 ; +∞]	[5635.618 ; 5635.623]
τ_d	[0 ; +∞]	188.356
$\tau_d(N)$	[0 ; +∞]	511.468
τ_m	[0 ; +∞]	[288.349 ; 288.350]
τ_a	[0 ; +∞]	284.343
α_F	[1 ; +∞]	1.114
<i>Paramètres de performance (flambage)</i>		
ν	{0.5, 0.7, 1, 2}	1
L_k	[0 ; 630]	160.957
<i>Étude dynamique</i>		
ω	[0 ; +∞]	[7.039 ; 93.857]
F_0	[0 ; +∞]	4000
z_2	[0 ; +∞]	[-0.029 ; 0.029]

- La raideur du ressort est égale à 168000 N/m . La fréquence propre du ressort f_e est de 173856.88 Hz et puisque $\tau_{k2} = 11.381 N/mm^2$ est très inférieur à $\tau_{zul} = 673.024$

N/mm^2 , nous concluons que les dimensions générées par cette démarche de conception résistent bien aux sollicitations statiques.

- Pour les paramètres de fatigue, le nombre de cycles avant rupture est égal à 100.000. Nous remarquons également que l'acier *DH* est le seul matériau parmi les trois matériaux proposés à satisfaire les contraintes imposées. Ce matériau a une densité ρ égale à $7.85 \cdot 10^6 kg/dm^3$, un module de Young E égal à $206000 N/mm^2$ et un module de cisaillement G égal à $81500 N/mm^2$.
- Dynamiquement et en se basant sur les valeurs des paramètres de conception du système de suspension, la fréquence d'excitation de suspension doit être différente de ses fréquences propres ω située dans l'intervalle $[7.039 ; 93.857] rad/s$.
Les limites de l'intervalle de la pulsation propre sont obtenues selon les valeurs des paramètres de conception exprimées par intervalles ($m_1 = 25$, $m_2 = [200 ; 500]$, $k_1 = 200000$, $k_2 = [19000 ; 21000]$ et $\eta = [0 ; 2000]$).
- Selon le type de la force d'excitation imposée, la course de déplacement du ressort de compression est dans l'intervalle $[-0.029 ; 0.029] m$.

Nous avons déterminé les dimensions du ressort de compression intégré dans un système de suspension tout en couplant la prise en compte des exigences statiques et dynamiques. Cette prise en compte simultanée des exigences permet de générer les dimensions satisfaisant les contraintes statiques et dynamiques déduites des exigences imposées sans nécessité de re-dimensionner le système en cas d'échec.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré la possibilité d'intégrer des exigences dynamiques sous la forme de contraintes algébriques dans un modèle NCSP. L'évaluation de l'approche de conception proposée qui se base sur l'intégration des exigences dynamiques est faite sur le cas de dimensionnement d'un ressort de compression intégrée dans une suspension de véhicule. Les avantages de cette démarche de conception par rapport aux démarches conventionnelles de conception sont pointées comme suit :

- Les solutions obtenues satisfont les exigences statiques et dynamiques imposées.
- L'approche est déclarative et ne nécessite pas la simplification des modèles analytiques.
- Elle permet la vérification de la validité d'un dimensionnement existant aussi bien que la génération d'une ou plusieurs solutions admissibles voire optimal au sens d'un critère donné.
- Elle est acausale et permet ainsi une grande variété de cahier des charges pour un même modèle.
- Il est possible d'intégrer de manière native des tableaux de valeurs compatibles et des alternatives de dimensionnement.
- Il est possible de traiter une grande diversité de contraintes numériques (arithmétiques, quadratiques, trigonométriques...).
- Le principe de contraction garantit que l'ensemble des solutions admissibles à un pro-

blème se situe nécessairement à l'intérieur des pavés résultats.

- Il est possible de fonctionner dans une approche de type set-based design par ajout et/ou retrait de contraintes en cours d'étude.
- Quand un optimum est trouvé, il est global, quelle que soit la fonction à optimiser.
- Le temps de calcul est satisfaisant : dans cette étude, les résultats de l'optimisation sont de quelques minutes sur un type d'ordinateur PC standard.

Chapitre 5 : Étude de cas :
conception préliminaire
d'un système de suspension
MacPherson active

Chapitre 5

Étude de cas : conception préliminaire d'un système de suspension MacPherson active

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons un exemple réel d'application de la méthode de conception proposée au dimensionnement globale d'un système de suspension MacPherson de type actif. L'objectif est de montrer la manière de déterminer et d'intégrer des exigences dynamiques d'un système technique réel sous forme d'équations et d'inéquations algébriques. Ce cas d'étude comprend toutes les exigences dynamiques et les critères de performance détaillés dans le chapitre 4.

Ce chapitre est structuré comme suit : d'abord, nous présentons le modèle cinématique de la suspension MacPherson utilisé pour déterminer les actions mécaniques en cas d'équilibre. Puis, nous présentons le modèle d'état dynamique selon lequel les différentes relations mathématiques qui décrivent les exigences dynamiques de conception sont obtenues. Ensuite, nous présentons les résultats de dimensionnement de la suspension à travers la méthode de conception proposée. Enfin, quelques interprétations et conclusions sont tirées en fonction des résultats obtenus.

5.2 Exigences de dimensionnement de la suspension MacPherson

5.2.1 Exigences de dimensionnement statiques

Dans cette partie nous nous intéressons au dimensionnement statique de la suspension. En effet, nous cherchons à déterminer les efforts appliqués sur les éléments constituant le système de suspension MacPherson pour assurer le maintien du véhicule en cas d'équilibre.

Nous proposons ainsi le modèle cinématique suivant, défini dans les repères orthonormés $R(x, y, z)$ et $R_1(x_1, y_1, z_1)$:

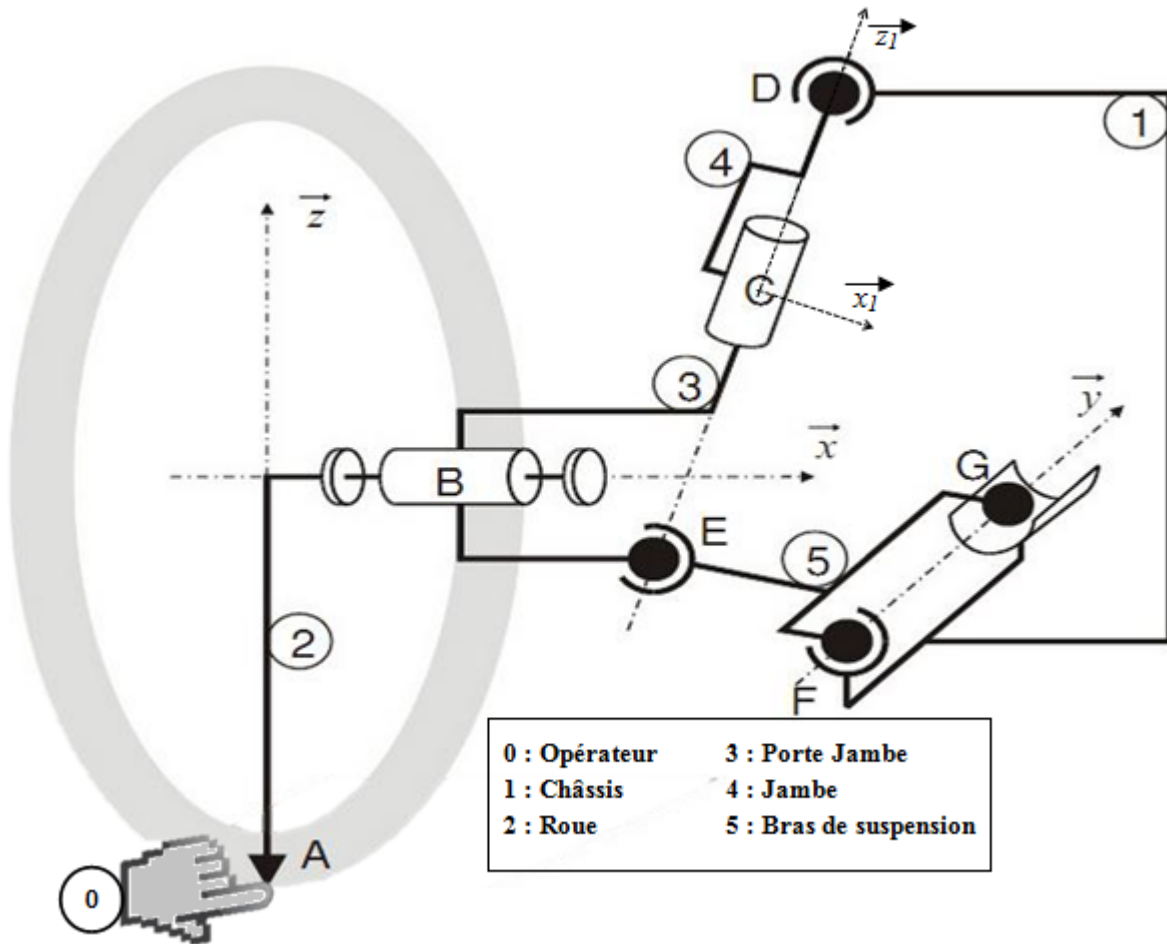


FIGURE 5.1 – Modèle cinématique du système de suspension MacPherson.

Dans cette étude, nous considérons que la suspension est fixe, et que le poids du quart de la masse total du véhicule est appliqué sur la suspension. Ainsi, nous modélisons cet effort par une force de module F_a appliqué sur la roue (2) au point A, de direction verticale Z dans le sens descendant. Nous pouvons alors déterminer successivement les efforts au sein des liaisons du modèle cinématique, jusqu'à l'obtention de l'action mécanique F_r au point C appliquée par le ressort. Cette force sert à maintenir l'équilibre du véhicule.

Nous définissons les paramètres $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, p_{51}, p_{52}$ et α de la manière suivante :

Avec :

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{l_4 - l_3}{h_3 + h_4} \right) \quad (5.1)$$

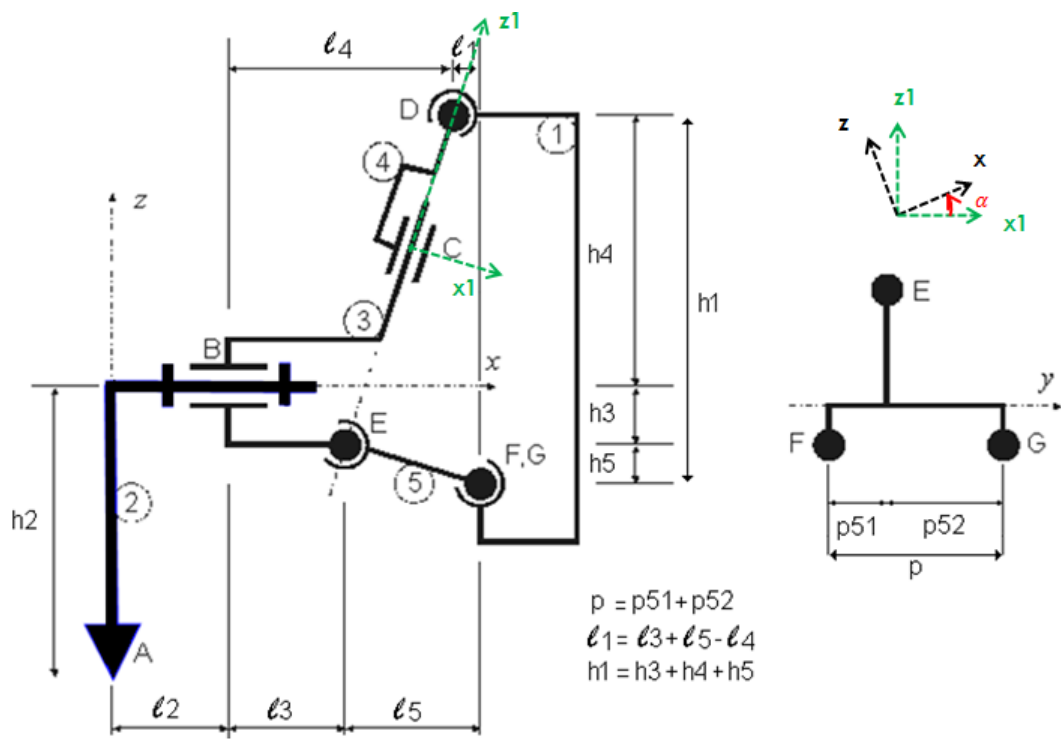


FIGURE 5.2 – Projection du schéma cinématique du système de suspension MacPherson sur le plan (OXZ)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Nous isolons dans un premier temps la roue (2). Le bilan des actions mécaniques extérieures est le suivant :

Action de l'opérateur (0) sur la roue (2)

$$\{T_{0 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F_a & 0 \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & l_2 F_a \\ F_a & 0 \end{array} \right\}_B \quad (5.2)$$

Action du porte jambe (3) sur la roue (2)

$$\{T_{3 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{3 \rightarrow 2} & 0 \\ Y_{3 \rightarrow 2} & M_{3 \rightarrow 2} \\ Z_{3 \rightarrow 2} & N_{3 \rightarrow 2} \end{array} \right\}_B \quad (5.3)$$

En appliquant le principe fondamental de la statique (PFS) sur la roue(2) au point B , nous obtenons le torseur des actions mécaniques de (3) sur (2) au point B

$$\{T_{3 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -l_2 F_a \\ -F_a & 0 \end{array} \right\}_B \quad (5.4)$$

Nous isolons ensuite l'ensemble (porte jambe (3) + jambe (4)). Ainsi, le bilan des actions mécaniques extérieures est comme suit :

$$\{T_{2 \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & l_2 F_a \\ F_a & 0 \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & (l_2 + l_3) F_a \\ F_a & 0 \end{array} \right\}_E \quad (5.5)$$

L'action de la châssis (1) sur la jambe (4) :

$$\{T_{1 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{1 \rightarrow 4} & 0 \\ Y_{1 \rightarrow 4} & 0 \\ Z_{1 \rightarrow 4} & 0 \end{array} \right\}_D = \left\{ \begin{array}{cc} X_{1 \rightarrow 4} & -(h_3 + h_3) Y_{1 \rightarrow 4} \\ Y_{1 \rightarrow 4} & (h_3 + h_3) X_{1 \rightarrow 4} - (l_4 - l_3) Z_{1 \rightarrow 4} \\ Z_{1 \rightarrow 4} & (l_4 - l_3) Y_{1 \rightarrow 4} \end{array} \right\}_E \quad (5.6)$$

L'action du bras de suspension (5) sur le porte jambe (3) :

$$\{T_{5 \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{5 \rightarrow 3} & 0 \\ Y_{5 \rightarrow 3} & 0 \\ Z_{5 \rightarrow 3} & 0 \end{array} \right\}_E \quad (5.7)$$

Après, application du PFS sur l'ensemble (3+4) au point E , nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} TRS : \left\{ \begin{array}{l} X_{5 \rightarrow 3} + X_{1 \rightarrow 4} = 0 \\ Y_{5 \rightarrow 3} + Y_{1 \rightarrow 4} = 0 \\ Z_{5 \rightarrow 3} + Z_{1 \rightarrow 4} = -F_a \end{array} \right. \\ TMS : \left\{ \begin{array}{l} Y_{1 \rightarrow 4} = 0 \\ (h_3 + h_4) X_{1 \rightarrow 4} - (l_4 + l_3) Z_{1 \rightarrow 4} = -(l_2 + l_3) F_a \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Nous isolons le bras de suspension (5), le bilan des actions mécaniques extérieures est alors :

$$\{T_{1 \rightarrow 5}\} = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 5} & 0 \\ Y_{1 \rightarrow 5} & 0 \\ Z_{1 \rightarrow 5} & 0 \end{Bmatrix}_F + \begin{Bmatrix} X'_{1 \rightarrow 5} & 0 \\ 0 & 0 \\ Z'_{1 \rightarrow 5} & 0 \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 5} + X'_{1 \rightarrow 5} & pZ'_{1 \rightarrow 5} \\ Y_{1 \rightarrow 5} & 0 \\ Z_{1 \rightarrow 5} + Z'_{1 \rightarrow 5} & -pX'_{1 \rightarrow 5} \end{Bmatrix}_F \quad (5.9)$$

et

$$\{T_{3 \rightarrow 5}\} = \begin{Bmatrix} -X_{5 \rightarrow 3} & 0 \\ 0 & 0 \\ -Z_{5 \rightarrow 3} & 0 \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} -X_{5 \rightarrow 3} & p_{51}Z_{5 \rightarrow 3} \\ 0 & -h_5X_{5 \rightarrow 3} - l_5Z_{5 \rightarrow 3} \\ -Z_{5 \rightarrow 3} & p_{51}X_{5 \rightarrow 3} \end{Bmatrix}_F \quad (5.10)$$

Application du PFS sur le bras de suspension (5) au point F :

$$\begin{cases} TRS : \begin{cases} -X_{5 \rightarrow 3} + X_{1 \rightarrow 5} + X'_{1 \rightarrow 5} = 0 \\ Y_{1 \rightarrow 5} = 0 \\ -Z_{5 \rightarrow 3} + Z_{1 \rightarrow 5} + Z'_{1 \rightarrow 5} = 0 \end{cases} \\ TMS : \begin{cases} -p_{51}Z_{5 \rightarrow 3} - pZ'_{1 \rightarrow 5} = 0 \\ -h_5X_{5 \rightarrow 3} - l_5Z_{5 \rightarrow 3} = 0 \\ p_{51}Z_{5 \rightarrow 3} - pX'_{1 \rightarrow 5} = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (5.11)$$

Ainsi, les torseurs statiques s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \{T_{0 \rightarrow 2}\} &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F_a & 0 \end{Bmatrix}_A ; \{T_{3 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -l_2F_a \\ -F_a & 0 \end{Bmatrix}_B ; \{T_{1 \rightarrow 4}\} = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 4} & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{1 \rightarrow 4} & 0 \end{Bmatrix}_D \\ \{T_{5 \rightarrow 3}\} &= \begin{Bmatrix} X_{5 \rightarrow 3} & 0 \\ 0 & 0 \\ X_{5 \rightarrow 3} & 0 \end{Bmatrix}_E ; \{T_{1F \rightarrow 5}\} = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 5} & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{1 \rightarrow 5} & 0 \end{Bmatrix}_F ; \{T_{1F \rightarrow 5}\} = \begin{Bmatrix} X'_{1 \rightarrow 5} & 0 \\ 0 & 0 \\ Z'_{1 \rightarrow 5} & 0 \end{Bmatrix}_G \end{aligned}$$

Le système suivant à résoudre est composé de 8 équations et 8 inconnues. Nous pouvons alors calculer chacune des inconnues statiques.

$$\begin{cases} X_{5 \rightarrow 3} + X_{1 \rightarrow 4} = 0 \\ Z_{5 \rightarrow 3} + Z_{1 \rightarrow 4} = -F_a \\ (h_3 + h_4)X_{1 \rightarrow 4} - (l_4 - l_3)Z_{1 \rightarrow 4} = -(l_2 + l_3)F_a \\ -X_{5 \rightarrow 3} + X_{1 \rightarrow 5} + X'_{1 \rightarrow 5} = 0 \\ -Z_{5 \rightarrow 3} + Z_{1 \rightarrow 5} + Z'_{1 \rightarrow 5} = 0 \\ -p_{51}Z_{5 \rightarrow 3} + pZ'_{1 \rightarrow 5} = 0 \\ -h_5X_{5 \rightarrow 3} + l_5Z_{5 \rightarrow 3} = 0 \\ -p_{51}X_{5 \rightarrow 3} + pX'_{1 \rightarrow 5} = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

Les torseurs statiques sont ainsi parfaitement déterminés :

$$\begin{aligned}
\{T_{0 \rightarrow 2}\} &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F_a & 0 \end{Bmatrix}_A ; \{T_{3 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -l_2 F_a \\ -F_a & 0 \end{Bmatrix}_B ; \\
\{T_{1 \rightarrow 4}\} &= \begin{Bmatrix} -F_a \frac{(l_2+l_4)l_5}{(h_3+h_4)l_5+(l_4-l_3)h_5} & 0 \\ 0 & 0 \\ F_a \frac{(l_2+l_3)h_5-(h_3+h_4)l_5}{(h_3+h_4)l_5+(l_4-l_3)h_5} & 0 \end{Bmatrix}_D ; \{T_{5 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} F_a \frac{(l_2+l_4)l_5}{(h_3+h_4)l_5+(l_4-l_3)h_5} & 0 \\ 0 & 0 \\ -F_a \frac{(l_2+l_4)h_5}{(h_3+h_4)l_5+(l_4-l_3)h_5} & 0 \end{Bmatrix}_E ; \\
\{T_{1F \rightarrow 5}\} &= \begin{Bmatrix} F_a \frac{(l_2+l_4)l_5 p_{52}}{[(h_3+h_4)l_5+(l_4-l_3)h_5]p} & 0 \\ 0 & 0 \\ -F_a \frac{(l_2+l_4)h_5 p_{52}}{[(h_3+h_4)l_5+(l_4-l_3)h_5]p} & 0 \end{Bmatrix}_F ; \{T_{1F \rightarrow 5}\} = \begin{Bmatrix} F_a \frac{(l_2+l_4)l_5 p_{51}}{[(h_3+h_4)l_5+(l_4-l_3)h_5]p} & 0 \\ 0 & 0 \\ -F_a \frac{(l_2+l_4)h_5 p_{51}}{[(h_3+h_4)l_5+(l_4-l_3)h_5]p} & 0 \end{Bmatrix}_G
\end{aligned}$$

Considérons à présent uniquement l'ensemble porte jambe (3) et jambe (4). En isolant la jambe (4) qui inclue le ressort, nous obtenons le bilan des actions mécaniques extérieures :

$$\{T_{3 \rightarrow 4}\} = \begin{Bmatrix} X_{3 \rightarrow 4} & L_{3 \rightarrow 4} \\ Y_{3 \rightarrow 4} & M_{3 \rightarrow 4} \\ -F_r & 0 \end{Bmatrix}_c \quad (5.13)$$

$$\{T_{1 \rightarrow 4}\} = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 4} & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{1 \rightarrow 4} & 0 \end{Bmatrix}_D = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 4} \cos \alpha - Z_{1 \rightarrow 4} \sin \alpha & 0 \\ 0 & l(X_{1 \rightarrow 4} \cos \alpha - Z_{1 \rightarrow 4} \sin \alpha) \\ X_{1 \rightarrow 4} \sin \alpha - Z_{1 \rightarrow 4} \cos \alpha & 0 \end{Bmatrix}_C \quad (5.14)$$

Application du PFS sur la jambe (4) au point C :

$$\begin{cases} TRS \\ TMS \end{cases} \begin{cases} X_{3 \rightarrow 4} = -X_{1 \rightarrow 4} \cos \alpha + Z_{1 \rightarrow 4} \sin \alpha \\ Y_{3 \rightarrow 4} = 0 \\ F_r = -X_{1 \rightarrow 4} \sin \alpha - Z_{1 \rightarrow 4} \cos \alpha \\ L_{3 \rightarrow 4} = 0 \\ M_{3 \rightarrow 4} = -l(X_{1 \rightarrow 4} \cos \alpha - Z_{1 \rightarrow 4} \sin \alpha) \end{cases} \quad (5.15)$$

Nous pouvons ainsi déterminer la force F_r en fonction de la force F_a (exemple pour une véhicule d'une masse de 1.3 tonnes, $F_a = 3188.25N$, après tout calcul fait nous trouvons $F_r = 3206.65N$)

Après détermination de la force statique appliquée sur le ressort, nous intégrons dans le modèle de résolution CSP seulement les exigences statiques du ressort de compression détaillées dans le chapitre 4 (cf paragraphe 4.1.1).

5.2.2 Exigences de dimensionnement dynamiques

5.2.2.1 Modèle d'état

Nous utilisons le modèle dynamique d'état linéarisé du système de suspension MacPherson qui se base sur le modèle de *Sohn.et.al* [16, 88] (cf chapitre 3 paragraphe 3.5.3). Le

modèle est constitué par un essieu et un pneu, un ressort hélicoïdal, un amortisseur, un axe, un chargement de perturbation et un bras de commande. Le quart de la carrosserie du véhicule est supposé avoir seulement deux degrés de mouvements vertical. Le modèle du système de suspension de type MacPherson est introduit dans la figure 5.3. Le déplacement vertical z_s de la masse suspendue et l'angle de rotation θ du bras de contrôle sont choisis comme coordonnées généralisées.

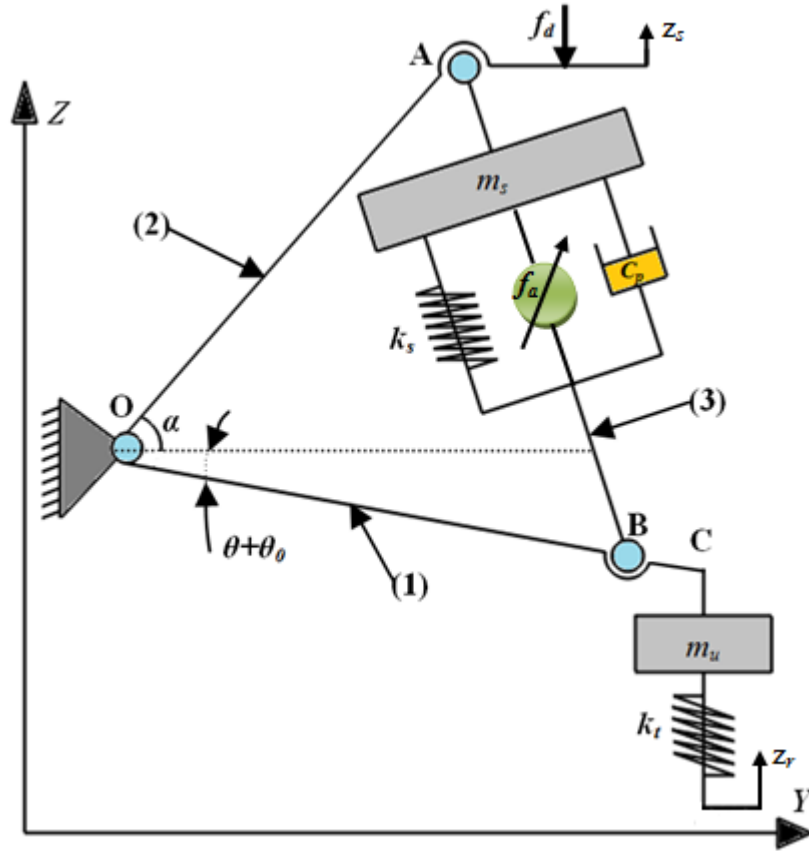


FIGURE 5.3 – Modèle dynamique de la suspension MacPherson d'un quart de véhicule.

Le modèle linéarisé par rapport à un point d'équilibre : $x_e = (x_{1e}, x_{2e}, x_{3e}, x_{4e}) = (0,0,0,0)$ est le suivant :

$$\dot{x} = Ax(t) + B_1 f_d(t) + B_2 z_r(t) + B_3 f_d(t), \quad x(0) = x_0 \quad (5.16)$$

Où :

$$x = \begin{bmatrix} z_s \\ \dot{z}_s \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l_B \cos(-\theta_0)}{m_s l_C + m_u l_C \sin^2(-\theta_0)} \\ 0 \\ \frac{(m_s + m_u) l_B}{m_s m_u l_C^2 + m_u^2 l_C^2 \sin^2(-\theta_0)} \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_t l_C \sin^2(-\theta_0)}{m_s l_C + m_u l_C \sin^2(-\theta_0)} \\ 0 \\ \frac{m_s k_t l_C \cos(-\theta_0)}{m_s m_u l_C^2 + m_u^2 l_C^2 \sin^2(-\theta_0)} \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l_C}{m_s l_C + m_u l_C \sin^2(-\theta_0)} \\ 0 \\ \frac{m_u l_C \cos(-\theta_0)}{m_s m_u l_C^2 + m_u^2 l_C^2 \sin^2(-\theta_0)} \end{bmatrix}$$

tel que :

$$a_l = l_A^2 + l_B^2, b_l = 2l_A l_B$$

$$c_l = a_l^2 - a_l b_l \cos(\alpha + \theta_0)$$

$$d_l = a_l b_l - b_l^2 \cos(\alpha + \theta_0)$$

$$D_1 = m_s l_C + m_u l_C \sin^2(\alpha' - \theta_0)$$

$$D_2 = m_s m_u l_C^2 + m_u^2 l_C^2 \sin^2(\alpha' - \theta_0)$$

$$a_{21} = \frac{-k_t l_C \sin^2(-\theta_0)}{D_1}$$

$$a_{23} = \frac{1}{D_1^2} \left[\left[\frac{1}{2} k_s \left(b_l + \frac{d_l}{(c_l - d_l \cos \alpha')^{\frac{1}{2}}} \right) \cos(\alpha' + \theta_0) - \frac{1}{2} (k_s \sin \alpha' \cos(-\theta_0)) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \left(\frac{d_l^2 \sin \alpha'}{2(c_l - d_l \cos \alpha')^{\frac{3}{2}}} \right) - k_t l_C^2 \sin^2(-\theta_0) \cos(-\theta_0) \right] \cdot [m_s l_C + m_u l_C \sin^2(-\theta_0)] \right. \\ \left. + m_u k_s l_C \sin \alpha' \sin(-\theta_0) \cos^2(-\theta_0) \left(b_l + \frac{d_l}{(c_l - d_l \cos \alpha')^{\frac{1}{2}}} \right) \right]$$

$$a_{24} = \frac{1}{D_1} \cdot \frac{c_p b_l^2 \sin^2 \alpha'}{4(a_l - b_l \cos \alpha')}$$

$$a_{41} = -\frac{m_s k_t l_C \cos(-\theta_0)}{D_2}$$

$$\begin{aligned}
a_{43} &= \frac{1}{D_1^2} \left[\left[\frac{1}{2} (m_s + m_u) k_s \cos \alpha' \left(b_l + \frac{d_l}{(c_l - d_l \cos \alpha')^{\frac{1}{2}}} \right) - \frac{1}{2} (m_s + m_u) k_s \sin \alpha' \right. \right. \\
&\cdot \left. \left. \left(\frac{d_l^2 \sin \alpha'}{2(c_l - d_l \cos \alpha')^{\frac{3}{2}}} \right) - m_s k_l l_C^2 \cos(-\theta_0) \right] \cdot [m_s m_u l_C^2 + m_u^2 l_C^2 \sin^2(-\theta_0)] \right. \\
&\left. + \frac{1}{2} (m_s + m_u) m_u^2 k_s l_C^2 \sin \alpha' \sin(-\theta_0) \left(b_l + \frac{d_l}{(c_l - d_l \cos \alpha')^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \\
a_{44} &= -\frac{1}{D_2} \cdot \frac{(m_s + m_u) c_p b_l^2 \sin^2 \alpha'}{4(a_l - b_l \cos \alpha')}
\end{aligned}$$

5.2.2.2 Résonance

La seule variable d'état critique pour l'exemple du système de suspension MacPherson est le déplacement z_s . En effet, dans le cas où cette composante critique du vecteur d'état oscille à l'une de ses fréquences propres (ce qui conduit à la génération du phénomène du résonance), elle crée des sensations inconfortables pour l'utilisateur du véhicule, et elle peut aussi entraîner la destruction du système de suspension. La solution de l'équation d'état est efficacement donnée sous la forme d'exponentielle de Horner avec réduction (cf relation (5.17) et chapitre 3 de cette thèse) :

$$x(t) = \left[\exp \left(\frac{t.A}{2^s} \right) \right]^{2^s} x(t_0) \quad (5.17)$$

Où, $x(t_0)$ correspond à l'état initial du système.

$$\begin{bmatrix} z_s \\ \dot{z}_s \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\left(\frac{I + t.A \cdot \left(I + \frac{t.A}{2} \cdot \left(I + \frac{t.A}{3} \cdot \left(\dots \left(I + \frac{t.A}{n} \right) \right) \right) \right) \right)}{2^s} \right)]^{2^s}}_M \begin{bmatrix} z_s(t_0) \\ \dot{z}_s(t_0) \\ \theta(t_0) \\ \dot{\theta}(t_0) \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Ainsi, nous posons des contraintes de limitations sur le déplacement maximal et minimal de la variable z_s (c'est-à-dire sur la première ligne de la matrice M) à travers les inéquations suivantes :

$$z_{s-min} \leq P_{z_s}(t) \leq z_{s-max} \quad (5.19)$$

En annulant la dérivée de la variable d'état z_s , nous pouvons déterminer les intervalles en t où z_s possède un extrémum ce qui revient à trouver les zéros de la deuxième ligne de la matrice M . Nous calculons ainsi les fréquences propres du système de suspension en fonction de ces instants.

Pour l'exigence de résonance nous intégrons dans un premiers temps la contrainte (5.19) pour obtenir les solutions qui sont éloignées de la résonance puis, dans un deuxième temps, nous intégrons la contrainte de la dérivée du polynôme égale à zéro pour déterminer les fréquences de résonance.

5.2.2.3 Stabilité

Nous appliquons le critère de *Routh* permettant de valider la stabilité d'un système à partir du signe des racines du polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique est obtenu à partir de la relation suivante :

$$\det(pI - A) = \begin{vmatrix} p & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & p & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & p & 1 \\ a_{41} & 0 & a_{43} & p - a_{44} \end{vmatrix} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} Q(p) &= (p^2 - a_{21}) [(p - a_{44})p - a_{43}] + a_{41}(a_{23} - pa_{24}) \\ &\Leftrightarrow \\ Q(p) &= p^4 - a_{44}p^3 - (a_{43} + a_{21})p^2 + (a_{21}a_{44} - a_{23}a_{41})p + a_{21}a_{43} + a_{23}a_{41} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Ainsi, nous déterminons les coefficients de la colonne des pivots à partir du tableau suivant :

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} p^4 & 1 & -(a_{43} + a_{21}) & a_{21}a_{43} + a_{23}a_{41} & 0 \\ p^3 & -a_{44} & (a_{21}a_{44} - a_{23}a_{41}) & 0 & 0 \\ p^2 & c_1 = 2a_{21} - a_{43} - \frac{a_{23}a_{41}}{a_{44}} & c_2 = a_{21}a_{43} + a_{23}a_{41} & d_3 & 0 \\ p^1 & d_1 = \frac{a_{44}c_2 - (a_{21}a_{44} - a_{23}a_{41})c_1}{c_1} & 0 & 0 & 0 \\ p^0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Le système de suspension MacPherson est stable si et seulement si tous les coefficients c_1, d_1 et c_2 sont positifs et le coefficient a_{44} est négatif.

5.2.2.4 Commandabilité

La condition nécessaire et suffisante (basée sur la représentation d'état) pour que le système de suspension MacPherson soit commandable est la suivante :

$$\text{rang}(Q) = \text{rang}([B_2 \ AB_2 \ A^2B_2 \ A^3B_2]) = 4 \quad (5.22)$$

Cette condition est reformulée de la manière suivante :

$$|\det(Q)| = |\det([B_2 \ AB_2 \ A^2B_2 \ A^3B_2])| \geq \varepsilon \quad (5.23)$$

Où : ε est très petit, et $f_d = f_a = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{24}a_{41} & a_{21} & a_{24}a_{43} & a_{23} + a_{24}a_{44} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \\ a_{41}a_{44} & a_{41} & a_{43}a_{44} & a_{43} + (a_{44})^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} a_{24}a_{41} & a_{21} & a_{24}a_{43} & a_{23} + a_{24}a_{44} \\ a_{21}^2 + a_{41}(a_{23} + a_{24}a_{44}) & a_{24}a_{41} & a_{21}a_{23} + a_{43}(a_{23} + a_{24}a_{44}) & a_{21}a_{24} + a_{24}a_{43} + a_{44}(a_{23} + a_{24}a_{44}) \\ a_{41}a_{44} & a_{41} & a_{43}a_{44} & a_{43} + a_{44}^2 \\ a_{21}a_{41} + a_{41}(a_{43} + a_{44}^2) & a_{41}a_{44} & a_{23}a_{41} + a_{43}(a_{43} + a_{44}^2) & a_{24}a_{41} + a_{43}a_{44} + a_{44}(a_{43} + a_{44}^2) \end{bmatrix}$$

La matrice de commandabilité Q est la suivante :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & b_2 & a_{24}b_4 & q_{14} \\ b_2 & a_{24}b_4 & q_{23} & q_{24} \\ 0 & b_4 & a_{44}b_4 & q_{34} \\ b_4 & a_{44}b_4 & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix}$$

Où :

$$q_{14} = (a_{23} + a_{24}a_{44})b_4$$

$$q_{23} = a_{21}b_2 + (a_{23} + a_{24}a_{44})b_4$$

$$q_{24} = a_{24}a_{41}b_2 + (a_{21}a_{24} + a_{24}a_{43} + a_{44}(a_{23} + a_{24}a_{44}))b_4$$

$$q_{34} = a_{41}b_2 + (a_{43} + a_{44}^2)b_4$$

$$q_{43} = a_{41}b_2 + (a_{43} + a_{44}^2)b_4$$

$$q_{44} = a_{41}a_{44}b_2 + (a_{24}a_{41} + a_{43}a_{44} + a_{44}(a_{43} + a_{44}^2))b_4$$

Ainsi nous pouvons calculer l'expression du déterminant de Q .

$$\det(Q) = -(b_2b_4)[b_4(a_{24}(a_{44}q_{34} - q_{44}) - a_{44}(a_{44}q_{14} + q_{24})) + b_2a_{44}q_{44} - q_{34}q_{14} + q_{23}q_{34}] + b_2^2[b_4a_{24}(a_{24}q_{34} + a_{44}q_{14} - q_{24}) - q_{24}q_{14}] + b_2^2q_{34}q_{43} \quad (5.24)$$

Après formulation des exigences dynamiques par des contraintes algébriques, nous intégrons les modèles statique (qui comprend le modèle statique du ressort de compression) et dynamique qui décrivent la suspension MacPherson dans le même modèle CSP.

5.2.2.5 Résultats numériques de dimensionnement du système de suspension MacPherson

Tableau 5.1 – Résultats numériques des paramètres de conception de la suspension MacPherson

<i>Paramètres du matériau</i>		
<i>Les Variables</i>	<i>Valeurs Initiales</i>	<i>Résultats</i>
Matériaux	{1, 2, 3}	1
G	{70000, 81500}	81500
E	{192000, 206000}	206000
R_m	[0 ; 2230]	1346.049
ρ	{7.85e-06, 7.9e-06}	7.85e-06
Coeff τ_{zul}	{0.48, 0.5}	0.5
τ_{zul}	[0, 10000]	673.024
μ	{0.27, 0.30, 0.31 }	0.27
<i>Paramètres constructifs principaux du ressort</i>		
d	[0.15 ; 15]	11.982
d_{min}	{0.15, 0.3}	0.3
d_{max}	{12, 15}	12
D	[0 ; 200]	50
D_e	[0 ; 217]	61.982
D_i	[0 ; 200]	38.017
L₀	[0 ; 630]	200
L_c	[0 ; 630]	143.786
n	[2 ; 2e9]	10
n_i	{1, 2, 3, 4}	2
n_m	[0 ; 2e9]	0
m	[0, 315]	17.603
z	[-π/2, π /2]	0.111
<i>Paramètres constructifs secondaires du ressort</i>		
L_d	[0 ; +∞]	1894.788
Vol₀	[0 ; 24000]	603.468
n_t	[4 ; 2e9]	12
w	[4 ; 20]	4.172
f_e	[0 ; +∞]	173856.88
M	[0 ; +∞]	1677.243

<i>Paramètres fonctionnels du ressort</i>		
F_1	[0 ; +∞]	4.210
F_2	[0 ; +∞]	5633.925
L_1	[0 ; 630]	199.974
L_2	[0 ; 630]	166.464
S_h	[0 ; 630]	33.510
W	[0 ; +∞]	94467.566
Vol_2	[0 ; 24000]	502.280
<i>Paramètres de performance (rupture statique)</i>		
L_r	[0 ; 630]	160.351
F_{cth}	[0 ; +∞]	9443.809
k	[1 ; 2]	1.365
τ_{kc}^{th}	[0 ; +∞]	954.196
a_{ff}	{0, 1, 2}	0
τ_{kc}^s	[0 ; 2230]	[954.206 ; 2230]
τ_{k2}	[0 ; +∞]	11.384
Type τ_{kc}^s	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	1
Coeff τ_{kc}^s	{0.48, 0.5, 0.56, 0.70, 0.75}	0.5
<i>Paramètres de performance (rupture par fatigue)</i>		
N	[0 ; 2e9]	100000
β	{1.6, 2.0, 3.0}	2
S_a	[0 ; +∞]	22.667
L_n	[0 ; 630]	166.454
F_n	[0 ; +∞]	[5635.618 ; 5635.623]
τ_d	[0 ; +∞]	188.356
$\tau_d(N)$	[0 ; +∞]	511.468
τ_m	[0 ; +∞]	284.836
τ_a	[0 ; +∞]	284.411
α_F	[1 ; +∞]	1.114
<i>Paramètres de performance (flambage)</i>		
ν	{0.5, 0.7, 1, 2}	1
L_k	[0 ; 630]	160.957

Paramètre dynamique de la suspension MacPherson

ω	[0 ; $+\infty$]	25.922
F_0	[0 ; $+\infty$]	4000
z_2	[0 ; $+\infty$]	0.025
C_p	[0 ; 2000]	500
k_s	[0 ; 200000]	168000
l_A	[0 ; 0.3]	0.3
l_B	[0 ; 0.3]	0.3
l_C	[0 ; 0.3]	0.3

Les dimensions du ressort de compression générées par la méthode de conception proposée sont les mêmes que les valeurs obtenues dans le chapitre 4 sauf pour les paramètres suivantes :

- Nous obtenons des valeurs légèrement différentes pour tous les paramètres fonctionnels du ressort $F_1, F_2, L_1, L_2, S_h, W, Vol_2$.
- Au niveau des paramètres de performance statiques nous constatons une différence distinguable pour la force théorique F_{cth} qui est passée de $[5704.619 ; 5704.619]N$ vers la valeur $9443.809N$.

Le différence de valeurs constaté au niveau des paramètres mentionnés ci-dessus est dû à l'ajout des nouvelles contraintes dynamiques dans le modèle de résolution CSP et à la différence du modèle dynamique utilisé.

Les valeurs des paramètres de conception de la suspension MacPherson satisfaisant les contraintes dynamiques de résonance de stabilité et de commandabilité sont :

- $500N.m/s$ pour le coefficient d'amortissement C_p
- $168000N/m$ pour le raideur du ressort k_s
- $0.3m$ pour les distances $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ qui définissent les longueurs entre éléments constituant la suspension MacPherson.
- L'action de la carrosserie sur la suspension entraîne une compression de $0.025m$ qui correspond à 8.75% de la longueur initiale du ressort.
- Dynamiquement et en se basant sur les valeurs des paramètres de conception suivantes ($m_1 = 25, m_2 = 250, k_1 = 200000$), nous notons que la fréquence d'oscillation de la suspension MacPherson doit être obligatoirement différente de la fréquence propre obtenue $\omega = 25.922rad/s$.

Nous avons donc déterminé les dimensions des paramètres de la système de suspension MacPherson en couplant la prise en compte des exigences statiques et dynamiques dans la même phase sans nécessité de re-dimensionner le système en cas de non validité des exigences dynamiques.

5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons validé l'approche de conception proposée par application sur le cas de dimensionnement d'un système de suspension MacPherson. En effet nous avons réussi à générer les dimensions des paramètres généraux de la suspension Macpheron tout en tenant compte des exigence imposées. Les résultats obtenus sont satisfaisants et confirment la validité de l'approche proposée.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale et perspectives

Problématique

Dans ce mémoire, nous sommes intéressé à la problématique de dimensionnement des systèmes techniques complexes. Le dimensionnement d'un système technique par une méthode de conception classique se fait en deux étapes successives qui correspondent aux dimensionnements statique et dynamique. L'inconvénient de ce processus est que le dimensionnement statique est traité séparément du dimensionnement dynamique ce qui entraîne le sur-dimensionnement du produit et l'échec de l'évaluation dynamique dans la plupart des cas, vu que les exigences dynamiques n'interviennent pas au moment du choix des coefficients de sécurité et des dimensions statiques du système à concevoir.

L'objectif qui a guidé nos travaux et d'avoir une méthode de conception basée sur des outils numériques robustes dans laquelle la prise en compte des exigences statiques et dynamiques est effectuée simultanément dès les phases amont de conception afin d'éviter les boucles de redimensionnement et d'optimiser le processus de dimensionnement d'un système technique complexe.

Les exigences dynamiques quant à elles, sont plus difficiles à prendre en compte dans les phases amont du processus de conception. Leur validité est évaluée après la définition statique de l'architecture du système, c'est-à-dire après la fixation des variables de conception. Ainsi, la question qui se pose est de savoir s'il est possible de les intégrer et de les coupler avec les exigences statiques dans une même étape de dimensionnement et si c'est le cas alors comment les intégrer et sous quelle forme ?

Contributions

Dans ce travail de recherche, nous avons proposé une nouvelle démarche de conception. Cette démarche est basée essentiellement sur la méthode de calcul par intervalles et sur la méthode de programmation par contraintes (NCSP). Le principe de cette démarche de conception consiste à coupler le dimensionnement statique et dynamique dans une seule étape de telle façon que la prise en compte des exigences statiques et dynamiques est effectuée de manière simultanée et globale dans la même phase de conception préliminaire.

Dans un premier temps, nous avons évalué la possibilité d'intégrer le comportement dynamique d'un système technique complexe (définie par un ensemble d'équations différentielles ordinaires) sous forme de simulation par intervalles.

Cette étape est primordiale pour la validation de la démarche de conception proposée. En effet, en se basant sur l'approche de *Goldsztein* [15] dédiée à la résolution des équations différentielles par intervalles sous forme d'équation d'état, nous avons évalué la capacité de la méthode de conception proposée à intégrer le comportement dynamique d'un système réel représenté par un système de suspension MacPherson non-linéaire-linéarisé tel que ses variables de conception sont exprimés par intervalles. Ces intervalles représentent les domaines de valeurs possibles pour chaque paramètre de conception du système à concevoir.

L'idée est d'appliquer cette méthode pour avoir un encadrement du domaine de solutions sous forme d'un produit cartésien d'intervalles au lieu d'une seule évaluation. Cela évite de lancer n simulations avec n valeurs pour chaque paramètre de conception. Ainsi, en appliquant l'expression de l'exponentielle de Horner avec réduction nous avons réussi à résoudre les EDO (sous forme d'équation d'état) par intervalles du système de suspension et à obtenir des résultats convergents en minimisant le pessimisme.

Dans un deuxième temps, nous avons réussi à exprimer la plupart des exigences dynamiques sous forme de contraintes algébriques. En effet, les exigences dynamiques telles que la résonance, la stabilité, la commandabilité, l'observabilité et la transmittance sont traduits sous forme d'équations et inéquations algébriques. Ainsi, le CSP numérique est employé pour le dimensionnement des systèmes complexes techniques. Ici l'avantage est que l'on peut intégrer simultanément en phase de conception préliminaire les exigences statiques et dynamiques. Cela évite de passer par deux étapes de dimensionnement et de perdre un temps important de calcul.

Ainsi, tout type d'exigences est traduit sous forme de contrainte. Ces contraintes sont implémentées dans un modèle NCSP utilisé pour propager les contraintes dans les domaines des paramètres de conception du système et pour faire émerger une ou plusieurs solutions. Le NCSP permet de générer les solutions qui vérifient toutes les contraintes statiques et dynamiques imposées. La démarche de conception proposée est validée par application sur le cas de dimensionnement d'un système de suspension MacPherson.

Avantages

L'approche de conception proposé est basée sur des méthodes de résolution ensembliste dans lesquelles les variables sont définies par intervalle. Par rapport à une méthode de conception classique elle permet d'obtenir plusieurs solutions simultanément et de réduire le temps de calcul. En effet, cette démarche par intervalle fournit non seulement une seule évaluation du comportement du système, mais aussi une enveloppe de performance.

Dans la méthode de conception proposé les boucles de re-dimensionnement et le passage à travers deux étapes de dimensionnement (statique et dynamique) sont évités. En effet, les exigences statiques et dynamiques sont intégrées simultanément dans la même phase amont de conception avant la simulation ce qui permet de guider le choix des coefficients de sécurité. De plus, la résolution du modèle NCSP permet de générer les solutions satisfaisant les

exigences imposées dans le cahier des charges (de telle sorte que le résultat de l'évaluation est toujours satisfaisante) puisque ces exigences sont intégrées dès le début sous forme de contraintes algébriques.

Par rapport à une démarche de conception classique qui part d'une architecture initiale puis qui vérifie la satisfaction des exigences, notre démarche de conception utilise les exigences sous formes de contraintes algébriques pour générer les solutions possibles. Elle permet la vérification de la validité d'un dimensionnement existant aussi bien que la génération d'une ou plusieurs solutions admissibles voire optimale au sens d'un critère donné.

Limites

En dépit des avantages cités, la démarche de conception est à l'heure actuelle limitée pour la résolution des systèmes linéaires ou linéarisables autour d'un point d'équilibre.

Perspectives

Les résultats déterminés dans ce travail offrent des perspectives intéressantes de développement futur. Les recherches futures pourraient se concentrer sur :

- La validation de la capacité de la conception proposée sur la base de NCSP et les intervalles au dimensionnement des systèmes non-linéaire de manière optimale (au niveau structure et composants) sans passer par la linéarisation.
- L'intégration des calculs à base d'éléments finis dans le processus de conception proposé pour le cas des systèmes définis par des équations aux dérivées partielles.
- L'intégration d'autre type d'exigences comme les exigences géométriques et de tolérance dans le but de générer les dimensions exactes avec les intervalles de tolérance pour chaque composant d'un système technique.
- L'application de la méthode de résolution NCSP dans d'autre niveau de conception et plus précisément en phase de définition d'une gamme d'usinage dans le but d'optimiser l'ordre et les paramètres d'usinage.

Annexes

Annexe A

Opérations entre les ensembles [74]

Soient X et Y deux ensembles, on définit les propriétés suivantes :

- *Inclusion* : Y est inclus dans X si et seulement si tout élément y de Y appartient à X , alors :

$$Y \subset X \Leftrightarrow \forall y \in Y, y \in X \quad (5.25)$$

Y n'est pas inclus dans X si :

$$Y \not\subset X \Leftrightarrow \exists y \in Y \text{ et } y \notin X \quad (5.26)$$

- *Égalité* : Y est égal à X lorsque tout élément de Y est un élément de X et réciproquement.

On a alors :

$$Y = X \Leftrightarrow Y \subset X \text{ et } X \subset Y \quad (5.27)$$

Y n'est pas égal à X si :

$$\exists y \in Y \wedge y \notin X \text{ ou } \exists x \in X \wedge x \notin Y \quad (5.28)$$

- *Sous-ensemble* : Y est un sous-ensemble de X si tout élément de Y est aussi élément de X :

$$Y \subset X \quad (5.29)$$

- *Espace produit* : L'espace produit de \mathbb{R} , est un ensemble noté \mathbb{R}^n dont les éléments sont des n-uplets :

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \text{ avec } x_i \in \mathbb{R} \quad (5.30)$$

Soient X et $Y \subset \mathbb{R}^n$, on définit [74] :

- *L'union* :

$$X \cup Y \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in X \text{ ou } x \in Y\} \quad (5.31)$$

- *La différence* :

$$X \setminus Y \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in X \text{ ou } x \notin Y\} \quad (5.32)$$

- *La projection canonique* :

$$proj_i(X) \Leftrightarrow \left\{ x_i \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)^T \in X \right\} \quad (5.33)$$

On définit également le produit Cartésien [74] de deux ensembles $X \subset \mathbb{R}^{n_x}$ et $Y \subset \mathbb{R}^{n_y}$ par :

$$X \times Y \Leftrightarrow \left\{ (\mathbf{x}^T \mathbf{y}^T)^T \in \mathbb{R}^{n_x+n_y} \mid \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^{n_x} \text{ et } \mathbf{y} \in Y \subset \mathbb{R}^{n_y} \right\} \quad (5.34)$$

Soient deux ensembles $X \subset \mathbb{R}^{n_x}$ et $Y \subset \mathbb{R}^{n_y}$ et une fonction $\mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$, on définit [74] :

- L'image directe de X par f :

$$f(X) \Rightarrow \{y \in \mathbb{R}^{n_y} \mid \exists x \in X, f(x) = y\} \quad (5.35)$$

- L'image inverse de Y par f :

$$f^{-1}(Y) \Rightarrow \{x \in \mathbb{R}^{n_x} \mid \exists y \in Y, f(x) = y\} \quad (5.36)$$

Soient $(X_1, X_2) \subset X, (Y_1, Y_2) \subset Y$ et $f : \mathbb{R}^{\times \wedge} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times \wedge}$, on définit les propriétés suivantes [74] :

$$f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2) \quad (5.37)$$

$$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2) \quad (5.38)$$

$$f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \quad (5.39)$$

$$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \quad (5.40)$$

$$f(f^{-1}(Y)) \subset Y \quad (5.41)$$

$$X \subset f^{-1}(f(X)) \quad (5.42)$$

$$\text{Si } X_1 \subset X_2 \Rightarrow f(X_1) \subset f(X_2) \quad (5.43)$$

$$\text{Si } Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2) \quad (5.44)$$

$$X \subset Y_1 \times Y_2 \Rightarrow X \subset \text{proj}_{Y_1}(X) \times \text{proj}_{Y_2}(X) \quad (5.45)$$

Annexe B

Exponentielle de matrice

On rappelle que $M_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie n^2 . Donc, toutes les normes sur $M_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes. Cependant, nous allons nous intéresser, ici, à des normes qui ont une propriété supplémentaire.

Définition :

On appelle norme d'algèbre (ou norme multiplicative) toute norme de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad (5.46)$$

L'intérêt d'une telle norme est qu'elle permet de définir l'exponentielle d'une matrice grâce à la propriété :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|A^k\| \leq \|A\|^k \quad (5.47)$$

Cette inégalité se prouve sans difficulté par récurrence.

Proposition :

Il existe au moins une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{K})$.

Par exemple :

$$N : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \rightarrow n N_\infty(A)$$

N_∞ désignant la norme supérieure des modules des coefficients de la matrice A. En effet, on vérifie que N est une norme et de plus :

$$N(AB) = n N_\infty(A) = n \max_{i,k} \left| \sum_j a_{ij} b_{jk} \right| \leq n \max_{i,k} \sum_j |a_{ij}| |b_{jk}| \quad (5.48)$$

$$N(AB) \leq n \max_{i,k} \max_{i,j} |a_{ij}| \sum_j |b_{jk}| \leq n \max_k N_\infty(A) n \max_{j,k} |b_{jk}| \leq n N_\infty(A) n N_\infty(B) \leq N(A) N(B) \quad (5.49)$$

Théorème :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors : la série $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$ est (absolument) convergente.

Preuve : Soit $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{K})$.

comme $\forall k \in \mathbb{N}, \|A^k\| \leq \|A\|^k$ Alors :

$$\sum_{k=0}^n \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^n \frac{\|A^k\|}{k!}$$

Or, la série numérique $\sum_{n \geq 0} \frac{\|A^n\|}{n!}$ converge vers $e^{\|A\|}$

On a donc :

$$\sum_{k=0}^n \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq e^{\|A\|} \quad (5.50)$$

Les sommes partielles sont majorées donc la série des valeurs absolues converge.

Donc la série $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$ est convergente.

Définition :

On appelle exponentielle de la matrice A , la somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Annexe C

Nomenclature

<i>Variables</i>	<i>Unités</i>	<i>Nomenclature</i>
D	mm	Diamètre moyen des spires
D_e	mm	Diamètre extérieur des spires
D_i	mm	Diamètre intérieur des spires
d	mm	Diamètre du fil
m	mm	Pas du ressort
L_0	mm	Longueur libre
L_1	mm	Longueur du ressort en charge, pour la force F_1
L_2	mm	Longueur du ressort en charge, pour la force F_2
L_c	mm	Longueur à bloc
L_d	mm	Longueur développée
L_k	mm	Longueur critique de flambage
L_n	mm	Plus petite longueur de travail admissible (géométriquement)
L_r	mm	Plus petite longueur de travail admissible (contrainte maximale)
S_a	mm	Somme des espaces minimums entre les spires utiles
S_h	mm	Course
Vol_0	cm^3	Volume enveloppe pour L_0
Vol_2	cm^3	Volume enveloppe pour L_2
F_1	N	Force du ressort pour la longueur L_1
F_2	N	Force du ressort pour la longueur L_2
F_c^{th}	N	Force théorique du ressort à L_c
F_n	N	Force du ressort à L_n
E	N/mm^2	Module d'élasticité du matériau
G	N/mm^2	Module de cisaillement
R_m	N/mm^2	Valeur minimale de la résistance à la traction
τ_{k2}	N/mm^2	Contrainte de cisaillement corrigée pour L_2
τ_{kc}^{th}	N/mm^2	Contrainte de cisaillement corrigée théorique pour L_c
τ_{zul}	N/mm^2	Contrainte maximale admissible
τ_m	N/mm^2	Contrainte moyenne
τ_a	N/mm^2	Contrainte alternée
τ_{kc}^s	N/mm^2	Valeur maximum autorisée de τ_{kc}^s

<i>R</i>	<i>N/m</i>	Raideur du ressort
<i>W</i>	<i>N.mm</i>	Travail du ressort
<i>f_e</i>	<i>Hz</i>	Fréquence propre du ressort
<i>M</i>	<i>g</i>	Masse du ressort
<i>ρ</i>	<i>kg/dm³</i>	Masse volumique
<i>z</i>	<i>rad</i>	Angle d'enroulement
<i>N</i>	-	Nombre de cycles avant rupture
<i>n</i>	-	Nombre de spires utiles
<i>n_i</i>	-	Nombre de spires pour les extrémités
<i>n_m</i>	-	Nombre de spires mortes
<i>n_t</i>	-	Nombre total de spires
<i>w</i>	-	Rapport d'enroulement
<i>α_f</i>	-	Coefficient de durée de vie en fatigue
<i>μ</i>	-	Coefficient de poisson
<i>v</i>	-	Coefficient d'assise
<i>β</i>	-	Coefficient de sécurité en fatigue

Annexe D

Algorithme 3 Algorithme de Gauss de calcul d'un déterminant suivant la première colonne

```
lire( $n$ )
lire( $A$ )
Initialiser  $\det(A)=1$ 

for  $j = 1$  jusqu'à  $n - 1$  do
  Début
  if  $a_{jj} = 0$  then
    for  $i = j + 1$  jusqu'à  $n$  do
      if  $a_{ij} = 0$  then
         $\det(A)=0$ 
      end if
    end for
  end if
  end for
  Autrement chercher le premier ( $i > j$ ) tel que  $a_{ij} \neq 0$ 
  multiplier cette  $i^{\text{me}}$  ligne par  $-1$ 
  Permuter la  $j^{\text{me}}$  ligne de  $A$  avec la  $i^{\text{me}}$  ligne
  if  $a_{ij} \neq 0$  then
     $\det(A)=0$ 
    for  $i = j + 1$  jusqu'à  $n$  do
      ajouter à la  $i^{\text{me}}$  ligne  $\frac{-a_{ij}}{-a_{jj}}$  la  $j^{\text{me}}$  ligne
       $\det(A)=a_{jj}\det(A)$ 
    end for
  end if
end if
 $\det(A)=a_{nn} \cdot \det(A)$ 
```

La matrice finale est triangulaire supérieure.

Bibliographie

- [1] Y. Pollet. La spécification du système. *Spécification du système ingénierie des exigences*.
- [2] S. A. Raka. *Méthodes et outils ensemblistes pour le pré-dimensionnement de systèmes mécatroniques*. Thèse de doctorat, Université de Cergy-Pontoise, 2011.
- [3] B. W. Boehm. A spiral model of software development and enhancement. In *IEEE Computer*, pages 61–72, 1988.
- [4] ANSI/EIA-632-1998. Processes for engineering a system. *Approved 7 January 1999*, Reaffirmed 2003.
- [5] [Online] <http://www.raw4x4europe.com>.
- [6] [Online] <http://maybach300c.blogspot.fr/2012/09/rigid-and-semi-rigid-crank-axle.html>.
- [7] P. Micouin. Ingénierie des exigences et conception des systèmes d’aéronefs. In *5ème Conférence Annuelle d’Ingénierie Système (AFIS 2009)*, PARIS : France, 2009.
- [8] P. Micouin. Toward a property based requirements theory : System requirements structured as a semilattice. *INCOSE Journal of Systems Engineering*, 11(3) :235–245, 2008.
- [9] J. Scott. *Systems engineering for commercial aircraft*. Ashgate Publisher, 1997.
- [10] T. Gorschek and A. M. Davis. Requirements engineering in search of the dependent variables. *Information and Software Technology*, 50(1–2) :67–75, 2008.
- [11] A. J. Qureshi, J.Y. Dantana, J. Bruyerec, and R. Bigota. Set based robust design of mechanical systems using the quantifier constraint satisfaction algorithm. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 27(7) :1173–1186, 2010.
- [12] Y. Meyer and P.A Yvars. Optimization of a passive structure for active vibration isolation : an interval-computation-and constraint-propagation-based approach. *Engineering Optimization*, DOI : 10.1080/0305215X, 2011.
- [13] V. Larroudé, R. Chenouard, P.A. Yvars, and D. Millet. Constraint based approach for the steady-state simulation of complex systems : Application to ship control. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 26(1) :499–514, 2013.
- [14] N. Tcheretchian, P. A. Yvars, and D. Millet. Benefits and limits of a csp/lca approach for the ecodesign of complex systems. a case applied to a hybrid passenger ferry. *Journal of Cleaner Production*, 42 :1–18, 2013.
- [15] A. Goldsztejn. On the exponentiation of interval matrices. *Hal-00411330*, page [Online] <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/41/13/30/PDF/IntervalMatrixExponential.pdf>. August 2009.

- [16] K. S. Hong, D. S. Jeon, and H. C. Sohn. A new modeling of the macpherson suspension system and its optimal pole placement control. In *Proceedings of the 7th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED99) Haifa, Israel, June*, pages 28–30, 1999.
- [17] AFIS (Association Française d'Ingénierie Système). « ingénierie système. comment ? pourquoi ? ».
- [18] M. R. Cutkosky and J. M. Tenenbaum. A methodology and computational framework for concurrent product and process design. *Mechanism and Machine Theory*, 25(3) :365 – 381, 1990.
- [19] S. K. Chandrasegaran, K. Ramani, R. D. Sriram, I. Horváth, A. B., Ramy, F. Harik, and W. Gao. The evolution, challenges, and future of knowledge representation in product design systems. *Computer-Aided Design*, 45(2) :204 – 228, 2013.
- [20] A. Ballu, H. Falgarone, N. Chevassus, and L. Mathieu. A new design method based on functions and tolerance specifications for product modelling. *Annals - Manufacturing Technology*, 55(1) :139 – 142, 2006.
- [21] A. D. Kiureghian and J. Song. Multi-scale reliability analysis and updating of complex systems by use of linear programming. *Reliability Engineering and System Safety*, 93(2) :288 – 297, 2008.
- [22] X. Zhong, M. Ichchou, and A. Saidi. Reliability assessment of complex mechatronic systems using a modified nonparametric belief propagation algorithm. *Reliability Engineering and System Safety*, 95(11) :1174 – 1185, 2010.
- [23] W. E. Spangler and J. M. Peters. A model of distributed knowledge and action in complex systems. *Decision Support Systems*, 31(1) :103 – 125, 2001.
- [24] E. Carayannis and J. Coleman. Creative system design methodologies : the case of complex technical systems. *Technovation*, 25(8) :831 – 840, 2005.
- [25] K. Ogata. *System dynamics*. Third edition. Prentice Hall International Editions, 1994.
- [26] K. Ogata. *Modern control engineering*. Fourth edition. Prentice Hall International Editions, 2001.
- [27] Ph. de Larminat. *Automatique : Commande des systèmes linéaires*. Editions Hermes, 1993.
- [28] B. Canbaz. *Preventing and resolving design conflicts for a collaborative convergence in distributed set-based design*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2013.
- [29] Y. Nahm and E. Ishikawa. Integrated product and process modeling for collaborative design environment. *Concurrent Engineering*, 12 :5–23, 2004.
- [30] G. Pahl, W. Beitz, J. Feldhusen, and K. H. Grote. Product development process, in : Wallace, k., blessing, l. (eds.). In *Engineering Design : A Systematic Approach*. Springer London, page 125–143, 2007.
- [31] G. Pahl and W. Beitz. *Engineering Design : A Systematic Approach*. 2nd edition. London : Springer, 1996.
- [32] G.W. Parry. The characterization of uncertainty in probabilistic risk assessments of complex systems. *Reliability Engineering and System Safety*, 54 :119–126, 1996.

- [33] E.K. Antonsson and K.N. Otto. Imprecision in engineering design. *Journal of Mechanical Design*, 117 :25–32, 1995.
- [34] B. Yannou and G. Harmel. A comparative study of constraint programming techniques over intervals in preliminary design. In *Proceedings of ASME Design Engineering Technical Conferences*. ASME, page 189–198, 2004.
- [35] IEEE 04. Ieee, adoption of iso/iec 15288 :2002 systems engineering - system life cycle processes. *Rapport technique, IEEE Computer Society*, 2004.
- [36] W. W. Royce. Managing the development of large software systems. In *Proceedings of IEEE WESCON 26 (August) :*, page 1–9, 1970.
- [37] Loye Lynn Ray. Security considerations for the spiral development model. *International Journal of Information Management*, 33(4) :684 – 686, 2013.
- [38] P. Joore. The v-cycle for system innovation translating a broad societal need into concrete product service solutions : the multifunctional centre apeldoorn case. *Journal of Cleaner Production*, 16(11) :1153–1162, 2008.
- [39] M. Hammadi. *Contribution à l'intégration de la modélisation et la simulation multi-physique pour la conception des systèmes mécatroniques*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, 2012.
- [40] J. Roshanian and Z. Keshavarz. Effect of variable selection on multidisciplinary design optimization : a flight vehicle example. *Chinese Journal of Aeronautics*, 20(1) :86–96, 2006.
- [41] Hu. Tianyuan and Yu. Xiongqing. Aerodynamic/stealthy/structural multidisciplinary design optimization of unmanned combat air vehicle. *Chinese Journal of Aeronautics*, 22(4) :654–660, 2009.
- [42] C. Morel. *Les décisions absurdes II : Comment les éviter*. Gallimard, coll. Bibliothèque des sciences humaines, 2012.
- [43] SysML. Systems modeling language. <http://www.sysml.org/>.
- [44] Modelica, modeling of complex physical systems. <http://www.modelica.org/>.
- [45] Simulink, simulation and model-based design. <http://www.mathworks.com/products/simulink/index.html>.
- [46] H. M. Paynter. Analysis and design of engineering systems. *M.I.T Press*, 1961.
- [47] Abaqus, finite element software. <http://www.3ds.com/products-services/simulia/overview/>.
- [48] Solidworks. <http://www.solidworks.fr/>.
- [49] H.Y. Hwang, K.J. Jung, I.M. Kang, M.S. Kim, S.I. Park, and Kim. J.H. Multidisciplinary aircraft design and evaluation software integrating cad, analysis, database, and optimization. *Advances in Engineering Software*, 37(5) :312–326, 2006.
- [50] G. Philipp. Component-oriented decomposition for multidisciplinary design optimization in building design. *Advanced Engineering Informatics*, 23(1) :12–31, 2009.
- [51] V. Larroude, P.A. Yvars, D. Millet, R. Chenouard, and A. Bernard. Inversion of emission model using constraint propagation on tables and intervals-application to ship-ecodesign. In *Proceedings of IDMME-Virtual Concept 2010 Bordeaux, France. October 20-22, 2010*.

- [52] A.H. Eltimsahy and C.H. Copass. Computer simulation for a solar heating system. *Mathematics and Computers in Simulation*, 20(2) :114–127, 1978.
- [53] T.J. Teorey, D. Yang, and J.P. Fry. A logical design methodology for relational databases using the extended entity relationship model. *New York : ACM Computing Surveys*, 18(2) :197–222, 1986.
- [54] D. Guihal. *Modélisation en langage VHDL-AMS des systèmes pluridisciplinaires*. Thèse de doctorat, Université Toulouse III, 2007.
- [55] Catia, virtual design. <http://www.3ds.com/fr/products/catia/welcome/>.
- [56] F. Christophe, A. Bernard, and E.Coatane. Rfbs : A model for knowledge representation of conceptual design. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 59 :155–158, 2010.
- [57] P. David, V. Idasiak, and F. Kratz. Reliability study of complex physical systems using sysml. *Reliability Engineering and System Safety*, 95(431-450), 2010.
- [58] A. Pop, D. Akhvlediani, and P. Fritzson. Towards unified systems modeling with the modelicaml uml profile, in I. u. electronic (dir.). *International Workshop on Equation-Based Object-Oriented Languages and Tools*, 2007.
- [59] S. Turki. *Ingénierie système guidée par les modèles : Application du standard IEEE 15288, de l'architecture MDA et du langage SysML à la conception des systèmes mécatroniques*. Thèse de doctorat, Université du Sud Toulon-Var, 2008.
- [60] E. Andrade, P. Maciel, B. Nogueira, C. Araujo, and G. Callou. A cots-based approach for estimating performance and energy consumption of embedded real-time systems. In *Information Processing Letters*, volume 110, pages 525–534, 2010.
- [61] H. Elmqvist, S. Mattsson, and M. Otter. Modelica : The new object-oriented modeling language. in *The 12th European Simulation Multiconference, Manchester, UK*, 1998.
- [62] Matlab, matrix laboratory. <http://www.mathworks.fr/products/matlab/>.
- [63] J. Dréo, A. Pérowski, P. Siarry, and É. Taillard. *Métaheuristiques pour l'optimisation difficile*. Groupe Eyrolles, 1996.
- [64] T. Touya. *Méthodes d'optimisation pour l'espace et l'environnement*. Thèse de doctorat, Université Toulouse III, 2008.
- [65] R.E. Moore. *Interval analysis*. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1996.
- [66] P. A. Yvars. A csp approach for the network of product lifecycle constraints consistency in a collaborative design context. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 22(6) :961–970, 2009.
- [67] P.A Yvars, P. Lafon, and L. Zimmer. Optimization of mechanical system : Contribution of constraint satisfaction method. In *proc of IEEE International Conference of Computers and industrial engineeringTroyes*, pages 961–970, 2009.
- [68] R. Chenouard, L. Granvilliers, and P. Sébastian. Search heuristics for constraint-aided embodiment design. *Artificial Intelligence for Engineering Design, Analysis and Manufacturing (AIEDAM)*, 23(2) :175 – 195, 2009.
- [69] N. Revol. Interval arithmetic, parallel calculators and distributed systems. *INRIA-Rapport de recherche n :4297*, 10 :387–426, 2001.

- [70] N. Ramdani. *Méthodes Ensemblistes pour l'estimation*. Thèse de doctorat, Université Paris XII Val de Marne, 2005.
- [71] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, and E. Walter. *Applied interval analysis*. Springer, London, 2001.
- [72] T. Sunaga. *Theory of interval algebra and its application to numerical analysis*. Thèse de doctorat, RAAG Memoirs, Ggijutsu Bunken Fukuy-kai2, 1958.
- [73] L. Lamarque. *Modélisation Géométrique et Arithmétique par Intervalles*. Thèse de doctorat, Université de Bourgogne, 2006.
- [74] G. Videau. *Méthodes garanties pour l'estimation d'état et le contrôle de cohérence des systèmes non linéaires à temps continu*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 2009.
- [75] N. Meslem, N. Ramdani, and Y. Candau. Guaranteed approximation of reachable sets for uncertain dynamical continuous-time systems. *European Journal of Automated Systems*, 43(6) :241–266, 2009.
- [76] F. J. C. Alonso. *Utilisation et certification de l'arithmétique d'intervalles dans un assistant de preuves*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Lyon, 2007.
- [77] N. Meslem. *Atteignabilité hybride des systèmes dynamiques continus par analyse par intervalles. Application à l'estimation ensembliste*. Thèse de doctorat, l'Université Paris Est, 2008.
- [78] R.E. Hansen. *Global optimization using interval analysis*. second edition. CRC., 2004.
- [79] T. Raissi. *Méthodes ensemblistes pour l'estimation d'état et de paramètres*. Thèse de doctorat, l'Université Paris XII – Val de Marne, 2004.
- [80] V. Kreinovich, A. Lakeyev, J. Rohn, and P. Kahl. *Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations*. Kluwer, 1998.
- [81] A. Neumaier. *Taylor forms - use and limits*. *Reliable Computing*, 9, 2003.
- [82] U. Montanari. Networks of constraints : fundamental properties and applications to picture processing. *Information Science*, 7 :95–132, 1974.
- [83] B. Falting. Arc consistency for continuous variables. *Artificial Intelligence*, 65(2) :363–376, 1994.
- [84] F. Benhamou and L. Granvilliers. *Continuous and Interval Constraints*. In *Handbook of Constraint Programming*. Elsevier, 2006.
- [85] B. Yannou and G. Harmel. *Use of Constraint Programming for Design*, in *Advances in Design*. ElMaraghy H., ElMaraghy W. Editors, Springer, 2005.
- [86] F. Benhamou, D. McAllester, and P. V. Hentenryck. CLP (intervals) re-visited. In *M. Bruynooghe, editor, Proc of International Symposium on Logic Programming, Ithaca, New York, USA*, pages 124–138, 1994.
- [87] L. Granvilliers, E. Monfroy, and F. Benhamou. Symbolic-interval cooperation in constraint programming. In *ISSAC '01 Proceedings of the 2001 international symposium on Symbolic and algebraic computation*, page 150–166, 2001.

- [88] H. Trabelsi, P. A. Yvars, J. Louati, and M. Haddar. Effectiveness of an interval computation approach to the dynamic simulation of a macpherson suspension system. In *Mechatronics (MECATRONICS), 2012 9th France-Japan and 7th Europe-Asia Congress on and Research and Education in Mechatronics (REM), 2012 13th Int'l Workshop on*, pages 78 – 85, 2012.
- [89] J. H. Hubbard and B. H. West. *Équations différentielles et systèmes dynamiques*. Cassini, ISBN 284225015X, 1999.
- [90] J. M. Souriau. *Structure des systèmes dynamiques*. DUNOD PARIS, 1970.
- [91] B. Larroque. *Observateurs de systèmes linéaires Application à la détection et localisation de fautes*. Thèse de doctorat, Université Toulouse, 2008.
- [92] F. Schweppe. Recursive state estimation : unknown but bounded errors and system inputs. *IEEE Transaction On Automatic Control*, 13(1) :22–28, 1968.
- [93] C. Durieu, E. Walter, and B. Polyak. Multi-input multi-output ellipsoidal state bounding. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 111(2) :273–303, 2001.
- [94] D. Maksarov and J. Norton. Computationally efficient algorithms for state estimation with ellipsoidal approximations. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 16(6) :411–434, 2002.
- [95] B. T. Polyak, S. A. Nazin, C. Durieu, and walter E. Ellipsoidal parameter or state estimation under model uncertainty. *Automatica*, 40(7) :1171–1179, 2004.
- [96] M. kieffer, L. Jaulin, and E. Walter. Guaranteed recursive non-linear state bounding using interval analysis. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 16 :193–218, 2002.
- [97] J. M. Flans and O. Adrot. Estimation d'état sûre pour procédés non linéaires par méthodes ensemblistes : Application à un procédé biotechnologique. *Journal européen des systèmes automatisés*, 37(9) :1145–1161, 2003.
- [98] L. Jaulin. Nonlinear bounded-error state estimation of continuous time systems. *Automatica*, 38(2) :1079–1082, 2002.
- [99] T. Raissi, N. Ramdani, and Y. Candau. Set membership state and parametre estimation for systems described by nonlilear differential equations. *Automatica*, 40(10) :1771–1777, 2004.
- [100] N. S. Nedialkov and K. R. Jackson. An interval hermite-obreschkoff method for computing rigorous bounds on the solution of an initial value problem for an ordinary differential equation. *Reliable Computing*, 5(3) :289–310, 1999.
- [101] M. Kieffer and E. Walter. Guaranteed nonlinear state estimation for continuoustime dynamical models from discrete-time measurements. In *In Proc. 5th IFAC Symposium on Robust Control Design Toulouse. ROCOND*, 2006.
- [102] N. Meslem, N. Ramdani, and Y. Candau. Interval observers for uncertain nonlinear systems. application to bioreactors. In *Seoul, Korea. 17th IFAC World Congress*, 2008.
- [103] M. Müller. *Über das fundamental theorem in der theorie der gewöhnlichen differentialgleichungen*. Math. Z, 1926.

- [104] J.L. Gouze, A. Rapaport, and M.Z. Hadj-Sadok. Interval observers for uncertain biological systems. *Ecological Modelling*, 133(1–2) :45 – 56, 2000.
- [105] O. Bernard and J. L. Gouzé. Closed loop observers bundle for uncertain biotechnological models. *Journal of Process Control*, 14(7) :765 – 774, 2004.
- [106] M. Moisan, O. Bernard, and J. L. Gouzé. Near optimal interval observers bundle for uncertain bioreactors. *Automatica*, 45(1) :291 – 295, 2009.
- [107] N.S. Nedialkov. *Computing rigorous bounds on the solution of an initial value problem for an ordinary differential equation*. Thèse de doctorat, University of Toronto, 1999.
- [108] M. A. Lefebvre and H. Guéguen. Hybrid abstractions of affine systems. *Nonlinear Analysis*, 321 :93–205, 2005.
- [109] R. Rihm. Implicit methods for enclosing solutions of odes. *Journal of Universal Computer Science*, 42(6) :202–209, 1998.
- [110] M. Berz and K. Makino. Performance of taylor model methods for validated integration of odes. *Lecture Notes in Computer Science*, 3732(3732) :65–74, 2005.
- [111] J. Hoefkens, M. Berz, and K. Makino. Computing validated solutions of implicit differential equations. *Reliable Computing*, 19(19) :2003, 231-253.
- [112] R.C. Ward. Numerical computation of the matrix exponential with accuracy estimate. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 14(4) :600–610, 1977.
- [113] P. Bochev and S. Markov. A self-validating numerical method for the matrix exponential. *Computing*, 43(1) :59–72, 1989.
- [114] C. Moler and C.V. Loan. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix. *Society for industrial and applied Mathematics Review*, 45(1) :3–49, 2003.
- [115] S.M. Rump. *INTLAB INTerval LABoratory*. In Tibor Csendes, editor, *Developments in Reliable Computing*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,[Online] <http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/>, 1999.
- [116] S. M. Rump. Fast and parallel interval arithmetic. *BIT*, 39(3) :534–554, 1999.
- [117] S. M. Rump. *INTLAB-INTerval LABoratory In Tibor Csendes*. *Developments in Reliable Computing*, Kluwer, Dordrecht, Netherlands, 1999.
- [118] E.P. Oppenheimer and A.N. Michel. Application of interval analysis techniques to linear systems.i. . *Fundamental Results, Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 35(9) :1129–1138, 1988.
- [119] E.P. Oppenheimer and A.N. Michel. Application of interval analysis techniques to linear systems. ii. *Fundamental Results, Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 35(10) :1230–1242, 1988.
- [120] E.P. Oppenheimer and A.N. Michel. Application of interval analysis techniques to linear systems. iii. *Fundamental Results, Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 35(10) :1243–1256, 1988.
- [121] M. Ceberio and L. Granvilliers. Horners rule for interval evaluation revisited. *Computing*, 69(1) :51–81, 2002.

- [122] H. Habibi, K.H. Shirazi, and M. Shishesaz. Roll steer minimization of mcpherson strut suspension system using genetic algorithm method. *Mechanism and Machine Theory*, 43(1) :57–67, 2008.
- [123] Y. A. Papegay, J.P. Merlet, and D. Daney. Exact kinematics analysis of cars suspension mechanisms using symbolic computation and interval analysis. *Mechanism and Machine Theory*, 40(4) :395–413, 2007.
- [124] H. Rahnejat. *Multi-body dynamics : vehicles, machines, and mechanisms*. Wiley, 2005.
- [125] J. S. Colton and M. P. Ouellette. A form verification system for the conceptual design of complex mechanical systems. *Engineering with Computers*, 10(1) :33–44, 1994.
- [126] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. New York, 1994.
- [127] O. Bachelier. *Polycopié de cours d'Automatique : Représentations d'état linéaires des systèmes monovariabiles*. INSA de Toulouse, 2ème année ESIP, spécialité AGE. Edition, 1994.
- [128] B. Pradin. *Polycopié de cours d'Automatique : Automatique linéaire-Systèmes à temps discret*. INSA de Toulouse, 4ème année spécialité AEI. Edition, 1995.
- [129] Ieee center history-legacies rudolf e. kalman. [http : //www :ieee :org/organizations/history center/legacies/kalman.html](http://www.ieee.org/organizations/history_center/legacies/kalman.html).
- [130] H. Trabelsi, P. A. Yvars, J. Louati, and M. Haddar. CSP approach and interval computation for the coupling between static and dynamic requirements in the preliminary design of a compression spring. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 22(2-4) :183–197, 2013.
- [131] S.V. Kulkani and K. Balasubrahmanyam. Optimal design of open coiled helical springs, journal of the institution of engineers (india). *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 60 :7–14, 1979.
- [132] T. Yokota, T. Taguchi, and M. Gen. A solution method for optimal weight design problem of herical spring using genetic algorithms. *Computers ind. Engineering, Elsevier*, 33(1-2) :71–76, 1997.
- [133] K. Deb and M. Goyal. A flexible optimization procedure for mechanical component design based on genetic adaptive search. *Journal of Mechanical Design, ASME*, 120(2) :162–164, 1998.
- [134] M. Paredes, M. Sartor, and A. Daidie. Advanced assistance tool for optimal compression spring design. *Engineering with Computers*, 21(2) :140–150, 2005.
- [135] M. Paredes. Methodology to build an assistance tool dedicated to preliminary design : application to compression springs. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)*, 3(4) :265–272, 2009.
- [136] J. Spaes. *The Helical Springs, Applications and Calculations*. Rpi Technonathan, 1989.
- [137] M. Duchemin. Metal springs—constraints traction or compression. *Engineer Technical, B5431*, 1985.
- [138] J. Chon. Automotive suspension springs steel. *Engineer Technical, BM5440*, 2007.

- [139] M. Paredes. *Development of tools to support the optimal design of elastic connections by spring*. Thèse de doctorat, doctoral thesis INSA Toulouse, 2000.
- [140] DIN 2088, DIN 2089-1, and DIN 2089-2. *Burggrafenstrasse 6, postfach 11 07, 10787 Berlin, Germany*.
- [141] V. Yldrm. On the linearized disturbance dynamic equations for buckling and free vibration of cylindrical helical coil springs under combined compression and torsion. *Meccanica*, 47(4) :1015–1033, 2012.
- [142] D. Pafitis N. Wicks, B. L. Wardle. Horizontal cylinder-in-cylinder buckling under compression and torsion : Review and application to composite drill pipe. *International Journal of Mechanical Sciences*, 50(3) :538–549, 2008.
- [143] L. D. L. Vizcaya, C. R. Gonzalez, G. Mesmacque, and T. C. Hernandez. Multiaxial fatigue and failure analysis of helical compression springs. *ENGINEERING FAILLURE ANALYSIS*, 13(8) :1303–1313, 2003.
- [144] C. Berger and B. Kaiser. Results of very high cycle fatigue tests on helical compression springs. *International Journal of Fatigue*, 28(11) :1658–1663, 2006.
- [145] L. D. L. Vizcaya, C. R. Gonzalez, G. Mesmacque, and A. B. Hernandez. Stress relief effect on fatigue and relaxation of compression springs. *Materials Design*, 28(4) :1130–1134, 2007.
- [146] C. V. Suciú and S. Buma. On the structural simplification, compact and light design of a vehicle suspension, achieved by using a colloidal cylinder with a dual function of absorber and compression-spring. In *Proceedings of the FISITA 2012 World Automotive Congress, Electrical Engineering 198*, pages 21–32, 2009.
- [147] L. Zimmer and P. Zablit. Global aircraft predesign based on constraint propagation and interval analysis. In *rocs of CEAS Conference on multidisciplinary Aircraft design and Optimisation, Kln, Germany, june, 2001*.

Résumé & Mots clés

Résumé : Cette thèse traite de problématique de dimensionnement d'un système technique complexe. L'objectif est de proposer et d'outiller un processus de conception selon lequel le dimensionnement statique de l'architecture initiale d'un système satisfait dès le début les exigences statiques et dynamiques sans nécessité de redimensionnement. Ainsi, nous avons proposé une nouvelle démarche de conception dans laquelle la prise en compte des exigences statiques et dynamiques est effectuée de manière simultanée et globale dans la phase de conception préliminaire. Cette démarche se base sur les exigences pour déterminer les solutions admissibles et utilise des méthodes de résolution ensemblistes telles que la méthode de calcul par intervalle et la méthode de propagation par contraintes. En effet, les variables de conception sont exprimées par intervalles et les exigences statiques et dynamiques sont implémentées dans un même modèle NCSP. Les exigences dynamiques sont plus difficiles à intégrer. Il s'agit des exigences fonctionnelles du système, de la résonance et des critères de stabilité, de commandabilité et de transmittance. Dans un premier temps, nous avons réussi à intégrer le comportement dynamique d'un système technique sous forme d'équation différentielle ordinaire par intervalles et dans un deuxième temps, nous avons traduit les exigences dynamiques sous forme de contraintes algébriques définies par un ensemble d'équations et inéquations. La solution générée représente les valeurs admissibles des variables de conception satisfaisant simultanément les exigences statiques et dynamiques imposées. Ce couplage entre le dimensionnement statique et dynamique dans l'approche de conception proposée permet d'éviter le sur-dimensionnement puisque les exigences dynamiques interviennent dans le choix des coefficients de sécurité, et d'éviter les boucles de redimensionnement en cas d'échec ce qui permet de gagner en temps de calcul et de réduire le coût de conception. La démarche de conception proposée est validée par application sur le cas de dimensionnement d'un système de suspension active MacPherson.

Mots clés : Dimensionnement de système ; Système technique complexe ; Calcul par intervalles ; Programmation par contraintes ; exigences statiques ; exigences dynamiques ; NCSP ; Système de Suspension Active MacPherson.

Abstract & Keywords

Abstract : This thesis deals with design problems of a complex technical system. The objective is to find a design process which the static design of the initial architecture of a system meets from the first static and dynamic requirements with no need to resize it. Thus, we propose a new design approach which the consideration of static and dynamic requirements is done simultaneously and globally in the preliminary design phase. This approach is based on the requirements to determine admissible solutions and uses set-based methods such as interval computation and constraint propagation. Indeed, the design variables are expressed by intervals and the static and dynamic requirements are implemented in a NCSP model. The dynamic requirements are more difficult to integrate. They represent the functional requirements of the system, the resonance and stability criteria, controllability and transmittance. On the one hand, we succeed to integrate the dynamic behavior of a technical system in the form of ordinary differential equation by intervals. On the other hand, we formalize the dynamic requirements in the form of algebraic constraints defined by a set of equations and inequalities. The generated solution is the set of acceptable values of design variables satisfying simultaneously static and dynamic requirements. This coupling between the static and dynamic sizing steps in the proposed design approach avoids over-sizing of the system as the dynamic requirements involved in the choice of safety factors. It also avoids resizing loops in case of failure, which saves significant computation time and reduce the cost of design. The proposed design approach is applied on the sizing of a MacPherson active suspension system.

Keywords : Sizing ; Complex technical system ; Intervals computation ; Constraint Programming ; Static requirements ; Dynamic requirements ; NCSP ; MacPherson active suspension system.