



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

Discipline ou spécialité :

Génie des Procédés et de l'Environnement

Présentée et soutenue par :

M. VINCENT LOISEL

le lundi 9 décembre 2013

Titre :

TRANSITION A LA TURBULENCE DES ECOULEMENTS DE
SUSPENSION: SIMULATIONS NUMERIQUES ET ANALYSE PHYSIQUE.

Ecole doctorale :

Mécanique, Energétique, Génie civil, Procédés (MEGeP)

Unité de recherche :

Laboratoire de Génie Chimique (L.G.C.)

Directeur(s) de Thèse :

M. OLIVIER MASBERNAT

MME MICHELINE ABBAS

Rapporteurs :

M. ERIC CLEMENT, UNIVERSITE PARIS 6

M. JOHN HINCH, UNIVERSITE DE CAMBRIDGE

Membre(s) du jury :

M. JACQUES MAGNAUDET, INP TOULOUSE, Président

M. CHERIF NOUAR, UNIVERSITE DE LORRAINE, Membre

M. ERIC CLIMENT, INP TOULOUSE, Membre

M. JEAN-PHILIPPE MATAS, INP DE GRENOBLE, Membre

Mme MICHELINE ABBAS, INP TOULOUSE, Membre

M. OLIVIER MASBERNAT, INP TOULOUSE, Membre

À toute ma famille

Remerciements

Ainsi s'achèvent mes trois années de thèse au Laboratoire de Génie Chimique de Toulouse. Avant de me tourner vers de nouveaux horizons, j'aimerais exprimer ma gratitude envers toutes celles et ceux qui ont – de près ou de loin – contribué à mon épanouissement et à faire de cette étude un travail de qualité.

Mes premières pensées vont vers Micheline, que je ne remercierai jamais assez pour son aide, son enthousiasme, ses encouragements, sa patience... Si ces trois années se sont particulièrement bien passées, c'est parce que j'ai pu compter sur toi pour tous les problèmes qui se sont posés à moi. Aussi, je te souhaite de fructueuses années de recherche dans le futur.

Je tiens également à remercier très sincèrement mes deux autres encadrants, Olivier et Éric, pour la confiance qu'ils m'ont accordée, ainsi que pour avoir partagé avec moi leur maîtrise et leur expérience du sujet.

J'adresse mes profonds remerciements aux membres qui ont composé mon jury de thèse, pour l'intérêt qu'ils ont montré à mon travail et leurs nombreuses idées et questions formulées pour l'améliorer et aller plus loin.

Je n'oublie pas non plus les quelques personnes qui m'ont apportées un soutien technique comme Annaïg Pedrono (Service Cosinus, IMFT), Nicolas Renon et Pierrette Barbaresco (CALMIP), Emmanuel Cid et Iréa Touche (LGC), ainsi que Laurent Poudroux et Stéphane Lévignac (Service Informatique de l'ENSIACET).

Mon passage au LGC n'aurait pas été si mémorable pour moi sans la présence de tous mes amis. Pour tout le temps passé ensemble, pendant nos sorties, autour d'un repas, d'une partie de tarot ou d'un café, je n'oublierai pas Maxime (l'inventeur du tennis ventre-à-plat), Séda et ses blagues pourries, Élodie pour ses encouragements, Mamad (ma source intarissable d'inspiration), Sara pour son magnifique bonnet en laine, Youen le râleur mais toujours partant pour sortir, Jennifer, Nick, Nicoco, Céline (aka *sis'*), Fatima, Pierre T., Pierre L., Alex, Lætitia, Brice, Giovanni, Kémie, Léa, Aurélie, Juan, Mylène, ... Je veux remercier aussi les différents stagiaires pour leur contribution (Nitin et Carlos), ainsi qu'Alain pour son aide précieuse et son attention dans tout ce qui est organisation d'évènements pour l'Alambic ☺

Pour finir, je voudrais souhaiter courage et bonne chance pour la suite à tous mes ex-camarades qui poursuivent leur sacerdoce...

Nomenclature

Par soucis de lisibilité, l'essentiel des notations physiques introduites dans ce mémoire ont été regroupées dans les tables suivantes. Tout au long du texte, les grandeurs apparaissant en **gras** correspondent à des vecteurs ou à des tenseurs, celles placées entre $\langle \rangle$ représentent des moyennes spatiales et celles surmontées d'une barre horizontale $\overline{\quad}$ sont des moyennes temporelles. Certaines des notations employées arborent également des indices ou des exposants non spécifiés ci-après, mais dont la signification est rappelée en lieu et place dans le texte.

Lettres grecques

Notation	Grandeur	Unité
γ	Taux de cisaillement local	$[\text{s}^{-1}]$
δ^+	Coordonnée de paroi	
Δ	Enveloppe gaussienne appliquée au monopôle	
Δ'	Enveloppe gaussienne appliquée au dipôle	
ϵ	Taux de déformation	
μ	Viscosité dynamique	$[\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}]$
μ_{eff}	Viscosité dynamique effective	$[\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}]$
ν	Viscosité cinématique	$[\text{m}^2.\text{s}^{-1}]$
ρ	Masse volumique du fluide	$[\text{kg.m}^{-3}]$
σ	Largeur de la gaussienne Δ	$[\text{m}]$
σ'	Largeur de la gaussienne Δ'	$[\text{m}]$
τ_w	Contrainte de cisaillement pariétale	$[\text{N.m}^{-2}]$
ϕ	Concentration volumique en particules	$[\%]$
χ_p	Fonction de présence de la particule dans le volume considéré	
Ω	Vorticité	$[\text{s}^{-1}]$

Nombres adimensionnels

Notation	Nombre	Expression
Re	Nombre de Reynolds d'écoulement	$\langle U \rangle H / \nu$
Re^c	Nombre de Reynolds critique de transition	
Re_{eff}	Nombre de Reynolds effectif	$\rho \langle U \rangle H / \mu_{\text{eff}}$
Re_p	Nombre de Reynolds particulaire	$\gamma a / \nu$

Lettres latines

Notation	Grandeur	Unité
a	Rayon particulaire	[m]
C_f	Coefficient de frottement pariétal	
d	Diamètre particulaire	[m]
D	Diamètre de conduite	[m]
E	Énergie	[kg.m ² .s ⁻²]
F_{rep}	Force de répulsion inter-particulaire	[N]
g	Accélération gravitationnelle	[m.s ⁻²]
G_{ij}	Tenseur du dipôle	[N.m]
H	Distance séparant les deux plaques planes	[m]
I	Niveau de fluctuation de l'écoulement	
L	Longueur du canal	[m]
\mathcal{L}	Terme linéaire de diffusion	
n	Indice de la particule considérée	
\mathcal{N}	Terme non-linéaire d'advection	
p	Pression	[N.m ⁻²]
S_{ij}	Tenseur du Stresslet	[N.m ⁻²]
t	Temps	[s]
T	Couple	[N.m]
$\mathbf{u} = (u, v, w)$	Champ des vitesses instantannées	[m.s ⁻¹]
$\mathbf{U} = (U, V, W)$	Composantes moyennes	[m.s ⁻¹]
$\mathbf{u}' = (u', v', w')$	Composantes fluctuantes	[m.s ⁻¹]
$\mathbf{u}_s = (u_s, v_s, w_s)$	Composantes de glissement de la phase particulaire	[m.s ⁻¹]
V	Volume	[m ³]
W	Largeur du canal	[m]
$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	Répère 3D orthonormé	
$\mathbf{X} = (x, y, z)$	Position quelconque dans le domaine 3D	
$\mathbf{Y} = (x_p, y_p, z_p)$	Position du centre de la particule	

Résumé

Le travail de cette thèse aborde le sujet de l'influence des particules non-pesantes et de taille macroscopique sur les écoulements en canal dans des conditions proches du seuil de la transition laminaire-turbulent. Les suspensions sont faiblement concentrées (fraction volumique $\phi = 5\%$). Le couplage hydrodynamique existant entre la phase dispersée et la phase continue est résolu numériquement par la Force-Coupling Method, et les particules sont suivies d'une façon lagrangienne.

Dans un écoulement laminaire de Couette ou de Poiseuille plan, nous montrons que les contraintes induites par la phase solide augmentent avec l'inertie, et l'influence de la concentration est plus faible qu'en régime de Stokes. Les particules avancent avec un retard dans la direction de l'écoulement et migrent à travers les lignes de courant (effet Segré-Silberberg en écoulement de Poiseuille). Les vitesses de migration et de glissement s'amplifient avec l'inertie et sont du même ordre de grandeur quand $Re_p = O(1)$. Quand les particules sont lâchées librement dans un écoulement de Poiseuille plan en-deçà du seuil critique de transition à la turbulence, la suspension initialement homogène ($\phi = 5\%$) devient stratifiée, après un temps d'écoulement de plusieurs dizaines d'unités de temps (rapport de la hauteur du canal sur la vitesse moyenne de l'écoulement). Après une centaine d'unités de temps, nous observons le développement d'une instabilité à l'interface entre la zone chargée en particules et la zone de fluide pur. Des motifs dunaires prennent place dans la direction de la vorticité. Ces motifs sont soutenus par des écoulements secondaires d'intensités faibles mais non-nulles.

Dans un écoulement au-dessus du seuil de transition, nous avons étudié les profils des phases continues et dispers es et réalisé des visualisations 3D afin de comprendre pourquoi les particules macroscopiques diminuent le nombre de Reynolds critique de relaminarisation de l'écoulement. Nous observons que les particules provoquent une augmentation significative des fluctuations de vitesses dans les directions transverses et qu'elles modifient les structures rotationnelles de l'écoulement, qui deviennent plus petites, plus nombreuses et plus énergétiques (plus grandes vitesses de rotation). Le coefficient de frottement pariétal de l'écoulement de suspension en régime de transition est supérieur à celui de l'écoulement monophasique. Quand le nombre de Reynolds est diminué et que l'écoulement devient finalement laminaire, le coefficient de frottement pariétal rejoint la loi laminaire d'un écoulement monophasique, à condition de substituer la viscosité effective de la suspension à la viscosité du fluide dans l'expression du nombre de Reynolds.

D'après nos résultats, la turbulence de l'écoulement de suspension est conserv e jusqu'à des nombres de Reynolds bien inférieurs à celui de l'écoulement monophasique en canal, en accord avec les observations expérimentales de Matas, Morris et Guazzelli (*PRL*, 2003) pour une géométrie cylindrique. Par ailleurs, nous montrons que selon le sens de la transition, laminaire \mapsto turbulent ou turbulent \mapsto laminaire, le nombre de Reynolds critique de transition d'un régime à l'autre n'est pas le même. Nous n'avons pas observé d'influence significative de la concentration en ce qui concerne la valeur du nombre de Reynolds critique de relaminarisation pour les deux concentrations  tudi es ($\phi = 2.5\%$ et 5%).

MOTS CLÉS : transition, turbulence, écoulement fluide + particules, simulation numérique.

Abstract

This PhD addresses the influence of macroscopic and neutrally buoyant particles on the channel flows close to the laminar-turbulent transition regime. The suspension flow is moderately concentrated (solid volumetric concentration $\phi = 5\%$). The hydrodynamic coupling between the dispersed and carrier fluid is numerically resolved using the Force-Coupling Method approach. Particle trajectories are obtained by lagrangian tracking.

In laminar wall-bounded flows, we show that the stress induced by the solid phase increases with inertia, and that the effect of the concentration is weaker than in the Stokes regime. The particles lag the flow and they migrate across the streamlines (Segré-Silberberg effect in Poiseuille flow). The migration and slip velocities are of the same order of magnitude for $Re_p = O(1)$. When the particles are freely suspended in a Poiseuille flow below the transition threshold, the initially homogeneous suspension ($\phi = 5\%$) becomes stratified after several ten time units (channel height/average flow velocity). After a hundred time units, the different rheological properties of the suspension segregated parts induce an instability yielding the formation of dune-like patterns, sustained by weak but finite secondary flows.

In the fluctuating flow regime, we studied the profiles of the continuous and dispersed phase and realized 3D visualizations in order to understand why finite size particles delay the relaminarization threshold. The particles induce a significant increase of the velocity fluctuations in the transverse directions and they modify the rotational flow structures, which become smaller, more numerous and more energetic (larger rotation velocity). The wall-friction coefficient of the suspension flow in the transition regime is larger than the single-phase flow case. When the Reynolds number is decreased and the flow becomes laminar, the friction coefficient recovers the laminar law of a single phase flow provided that the fluid viscosity is replaced by the effective suspension viscosity in the Reynolds number definition.

Our results clearly show that the two-phase channel flow turbulence is conserved down to a threshold well below the single phase flow limit, in agreement with the observations of Matas, Morris et Guazzelli (*PRL*, 2003) for a cylindrical geometry. In addition, we show that according to the transition direction, *i.e.* laminar \mapsto turbulent or turbulent \mapsto laminar, the switch from a regime to another does not occur at the same critical Reynolds number. Finally, in the limit of moderately concentrated ($\phi = 2.5 - 5\%$) suspension flow in a channel, the concentration has no significant influence on the critical Reynolds number.

KEYWORDS : transition, turbulence, two-phase particulate flow, numerical simulation.

Contents

Introduction générale	3
Introduction générale	5
0.1 Transition d'un écoulement monophasique	5
0.2 Les écoulements de suspension en régime de transition	7
0.3 Objectifs des recherches et organisation du document .	10
Corps de thèse	15
1 Méthode numérique et validation	17
1 Choix de la méthode numérique	18
2 Résolution numérique des équations de Navier-Stokes de l'écoulement monophasique	24
2.1 Formulation mathématique et discrétisation	24
2.2 Validation en écoulement monophasique : évolution d'un mode instable dans l'écoulement de Poiseuille plan	27
3 Force-Coupling Method	29
3.1 Formulation	29
3.2 Algorithme de calcul du dipôle	33
3.3 Force de répulsion interparticulaire	35
4 Validation de la FCM à Re_p fini	38
4.1 Particule isolée dans un écoulement cisailé pur	39
4.1.1 Contraintes	40
4.1.2 Rotation	41
5 Parallélisation et tests de performance du code avec FCM	42

2	Suspensions en écoulements laminaires à nombre de Reynolds particulaire fini	49
1	Introduction	50
2	Perturbations induites par les particules	52
2.1	Tenseur des contraintes	53
2.2	Viscosité de suspension	54
3	Propriétés des écoulements de suspensions homogènes en ré- gime inertiel	55
3.1	Paramètres des écoulements et grandeurs moyennes	57
3.2	Écoulement de Couette plan	59
3.2.1	Profil du Stresslet	59
3.2.2	Vitesses de glissement et de migration	61
3.3	Écoulement de Poiseuille	63
3.3.1	Profil du Stresslet	64
3.3.2	Vitesses de glissement et de migration	66
4	Dynamique d'un écoulement laminaire de suspension en ca- nal plan	68
4.1	Migration inertielle d'une particule isolée	69
4.1.1	Quelques rappels	69
4.1.2	Étude numérique en canal plan	70
4.2	Effet de la migration inertielle sur le transport de sus- pensions	73
4.2.1	Stratification de la suspension	73
4.2.2	Développement de motifs dunaires	76
5	Conclusion	81
3	The effect of neutrally-buoyant finite-size particles on the laminar-turbulent transition	87
1	Introduction	88
2	Simulation procedure	90
2.1	Single-phase flows	90
2.2	Two-phase flows	91
2.3	Pressure regulation	92
3	Single-phase flow in the transition regime	93
3.1	Wall friction and velocity fluctuations	96
3.2	Coherent structures prior to relaminarization	99
4	Fluctuation enhancement by particles in the transition regime	100
4.1	Average profiles of fluctuating suspension flows	101
4.2	Wall friction and velocity fluctuations	104
4.3	Energy balance of the Reynolds stress component $\langle u'^2 \rangle$	111
5	Suspension dynamics below the transition	113
5.1	Effect of the concentration on the transitional flow	114

6	Hysteresis	117
7	Conclusion	118

Conclusion générale	123
----------------------------	------------

Annexes	131
----------------	------------

1	Utilisation de la méthode du Gradient Conjugué	133
2	Modification des enveloppes Gaussienne à la paroi	134

Première partie

Introduction générale

Introduction générale

Les écoulements de suspensions sont présents dans nombre d'applications diverses et variées telles que l'ingénierie pétrolière, agro-alimentaire, traitement du solide ou traitement de l'eau (transport de suspensions ou d'émulsions dans des conduites, lits fluidisés, filtration hydrodynamique, *etc.*). Les propriétés d'écoulement d'une suspension peuvent différer grandement de celles du fluide porteur (évolution non-triviale des propriétés physiques et rhéologiques). Ces propriétés dépendent de plusieurs paramètres qui peuvent être regroupés sous la forme de nombres adimensionnels comme les nombres de Reynolds, de Stokes ou de Péclet, ou encore le rapport de taille particule-conduite, la fraction volumique du solide, *etc.* Dans les applications industrielles du transport en conduite, il est particulièrement intéressant de comprendre comment les particules modifient la turbulence et la transition laminaire-turbulent d'un écoulement de suspension. Le régime de transition est généralement évité dans les dispositifs industriels à cause des structures transitoires de grande taille qui peuvent se développer et par la suite endommager les équipements. Au delà de cet aspect pratique, l'étude dans cette thèse est surtout motivée par une compréhension des mécanismes fondamentaux à l'œuvre dans les écoulements chargés en particules proches du seuil de transition laminaire-turbulent.

0.1 Transition d'un écoulement monophasique

L'étude de la transition laminaire-turbulent d'un écoulement monophasique remonte à la fin du XIX^{ème} siècle, quand Osborne Reynolds remarque la tendance naturelle qu'a un écoulement stratifié à débit fixe à former spontanément des tourbillons quand sa température augmente (Reynolds, 1883a). L'analyse des équations du mouvement du fluide lui a révélé l'existence de deux types de forces : inertielles et visqueuses, qui mises sous forme de

rapport, constituent un nombre adimensionnel capable de définir le régime d'écoulement. Le nombre de Reynolds Re est ainsi né, et s'énonce généralement de la manière suivante :

$$Re = \frac{\rho V^2}{\mu V/L} = \frac{\text{Forces inertielles}}{\text{Forces visqueuses}}, \quad (1)$$

V et L étant respectivement une vitesse et une longueur caractéristique, μ et ρ la viscosité dynamique et la densité du fluide. Les expériences de Reynolds consistaient simplement à injecter à l'entrée d'un tube cylindrique et transparent un colorant dans un écoulement d'eau. Les résultats rapportés dans ses traités (Reynolds, 1883a,b) démontrent l'existence d'un Re limite au delà duquel la ligne d'émission du filet de colorant initialement rectiligne commence à devenir chaotique. Bien que ténue, cette limite démarquant régimes laminaire et fluctuant est en pratique rencontrée entre $Re = 1760$ et 2300 en tube (Kerswell, 2005). O. Reynolds témoigne cependant avoir réussi à maintenir un écoulement laminaire jusqu'à $Re = 13000$ en protégeant autant que cela soit possible son dispositif expérimental des perturbations extérieures. Plus tard, Eckman a conservé l'écoulement laminaire jusqu'à $Re = 44000$ en améliorant le dispositif de Reynolds (Rott, 1990), et Pfenniger (1961) est parvenu à garder un écoulement laminaire jusqu'à $Re = 10^5$.

Les conditions menant à l'apparition du régime de transition ne sont toujours pas totalement élucidées. Il existe selon le type de géométrie (en particulier la forme de la section droite de la conduite) deux types d'instabilité. Par exemple en canal plan, à partir d'un nombre de Reynolds Re^c dit *critique*, l'écoulement laminaire entre dans un équilibre instable où la moindre perturbation provoque une transition définitive, on parle alors d'*instabilité sous-critique*. En revanche, un écoulement de Poiseuille en conduite circulaire est linéairement stable quel que soit le nombre de Reynolds. Son instabilité *super-critique* nécessite un niveau de perturbation minimum (amplitude et forme de la perturbation) pour apparaître durablement. Les recherches sur les perturbations optimales qui déclenchent la transition dans un écoulement en conduite cylindrique restent aujourd'hui toujours actives (voir la revue de Eckhardt *et al.* (2007)).

Pour un nombre de Reynolds légèrement au dessus du seuil de transition, les écoulements en tube exhibent l'existence de bouffées turbulentes appelées *puffs*. Ces *puffs* se transforment en *slugs* lorsque l'écoulement se rapproche de l'état de turbulence développée (Mullin, 2010). Statistiquement, les *puffs* ont une longueur typique d'environ vingt diamètres de conduite et voyagent à une vitesse de l'ordre de 90% de la vitesse moyenne de l'écoulement. Cette structure d'écoulement fluide peut sembler tout à fait établie et finalement décliner

sans aucun préavis. Willis et Kerswell (2007) ont montré que la distribution du temps de vie des puffs avant relaminarisation suivait une loi exponentielle pour différents nombres de Reynolds (plus le nombre de Reynolds est grand et plus le temps de vie augmente). Le problème du déclenchement durable de la turbulence peut s'appréhender selon deux approches. Une première approche consiste à déterminer pour un nombre de Reynolds donné le seuil de perturbation suffisant à apporter pour qu'une instabilité se développe. Une deuxième méthode vise à connaître, par une étude statistique, le nombre de Reynolds à partir duquel le déclin de la turbulence n'est plus probable aux temps longs, *i.e.* le puff est devenu un « attracteur ». Il faut alors déterminer aussi le nombre de Reynolds au-dessous duquel tout écoulement fluctuant relaminarise. C'est ce deuxième type d'approche que nous utiliserons dans notre travail (en écoulement diphasique) pour caractériser la transition du régime turbulent vers le régime laminaire.

0.2 Les écoulements de suspension en régime de transition

Notre étude se focalise sur l'effet de particules non-pesantes (densité identique à celle du fluide) et de taille finie sur l'écoulement en canal plan proche du seuil de transition laminaire-turbulent. Les particules sont non-colloïdales (grand nombre de Péclet basé sur le rapport de la perturbation de vitesse à l'échelle de la particule multipliée par le diamètre de la particule et le coefficient de diffusion), et faiblement inertielles, *i.e.*, leur temps de relaxation en réponse à une perturbation locale de l'écoulement est faible (nombre de Stokes modéré).

Les expériences pionnières de Matas *et al.* (2003) ont montré que ce type de particules (diamètre d) modifie le nombre de Reynolds critique à partir duquel apparaît la transition à la turbulence développée, et cela même si l'écoulement est très peu chargé en particules. En fonction de leur taille par rapport à la conduite (diamètre D) et de leur concentration, la présence de particules de taille finie entraîne un décalage du seuil de transition laminaire-turbulent vers des nombres de Reynolds plus faibles ou plus élevés (figure 1).

- **Pour un rapport de diamètre $D/d \geq 65$ (petites particules)** et une concentration faible, l'apparition de la transition est décalée vers des nombres de Reynolds supérieurs à la valeur seuil de l'écoulement monophasique ($Re \approx 2000$ dans leur dispositif expérimental). Aux concentrations modérées, si le nombre de Reynolds de l'écoulement est remplacé par un nombre de Reynolds de suspension basé sur la viscosité effective (Krieger et Dougherty, 1959), le nombre de Reynolds critique d'apparition de la transition rejoint celui du seuil

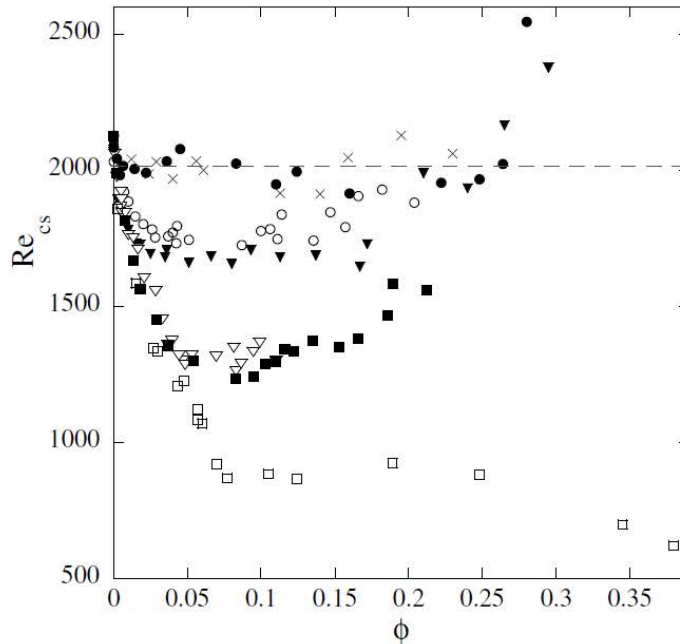


FIGURE 1: Évolution du nombre de Reynolds critique de transition en fonction de la concentration volumique en particules pour plusieurs valeurs de la taille des particules. (\times) : $D/d = 200$, (\circ) : $D/d = 37$, (∇) : $D/d = 16$, (\square) : $D/d = 10$, (\bullet) : $D/d = 65$, (\blacktriangledown) : $D/d = 27$, (\blacksquare) : $D/d = 18$. Tirée de Matas *et al.* (2003).

relatif à l'écoulement monophasique. En revanche, pour des concentrations volumiques plus importantes ($\phi \geq 25\%$), les écoulements de suspension subissent un *retard* à l'apparition de la transition qui ne peut plus être expliqué simplement par l'augmentation de la viscosité effective. Plus récemment, Pouplin *et al.* (2011) ont obtenu le même résultat pour des émulsions fortement chargées en fines gouttes.

- **Pour $D/d < 65$ (particules macroscopiques)**, la présence des particules entraîne une diminution du nombre de Reynolds critique. Pour une concentration inférieure à 8%, le nombre de Reynolds critique décroît fortement avec la concentration. Au delà de cette concentration, les auteurs ont remarqué que les nombres de Reynolds critiques atteignent leurs valeurs minimales. Pour certains rapports de taille ($\blacksquare, \circ, \bullet, \blacktriangledown$), le seuil de transition augmente à nouveau avec la fraction volumique quand la suspension devient concentrée.

Il résulte de ces observations que le régime de transition dépend de la concentration et de la taille des particules d'une façon non-monotone,

indépendamment du nombre de Reynolds du mélange basé sur la viscosité effective de la suspension. Ceci suggère l'existence de mécanismes inconnus jusqu'alors, et qui dépendent de la nature diphasique de l'écoulement. Par ailleurs, les propriétés effectives d'une suspension peuvent varier fortement en fonction de la distribution spatiale des particules dans l'écoulement. Or, la dynamique de particules non-colloïdales et non-pesantes peut dépendre de plusieurs paramètres : la taille des particules, leur concentration locale, et le régime de l'écoulement (présence de structures tourbillonnaires favorisant l'homogénéisation du mélange ou non).

Dans les écoulements laminaires de suspension en régime très dilué, les particules induisent une perturbation de vitesse qui dépend du cisaillement à l'échelle de la particule. En écoulement de Stokes, une particule non-pesante suit les lignes de courant du fluide, avec un léger glissement dû à la taille finie de la particule par rapport à la conduite. Quand l'inertie de l'écoulement est finie, les particules sont soumises à une migration latérale en raison de leur interaction avec le profil de vitesse parabolique de l'écoulement (Segré et Silberberg, 1962a,b; Schonberg et Hinch, 1989). Ce processus de migration est d'autant plus rapide que le nombre de Reynolds est élevé. Quand la concentration de la suspension est augmentée (concentration $\phi \geq 1\%$), les interactions hydrodynamiques entre particules induites par le cisaillement provoquent un mouvement chaotique. Plusieurs études ont montré que dans un écoulement de Stokes cisailé homogène l'agitation induite par le cisaillement ainsi que l'auto-diffusion des particules sont des fonctions croissantes de la taille des particules, du taux de cisaillement et de la fraction volumique en solide (Drazer *et al.*, 2004; Abbas *et al.*, 2006).

Dans les écoulements de Stokes en canal, les particules ont tendance à migrer vers le centre du canal quand la suspension est très chargée en particules (Nott et Brady, 1994; Semwogerere *et al.*, 2007; Yeo et Maxey, 2011). Cependant, quand le nombre de Reynolds est fini, Han *et al.* (1999) ont montré que des concentrations préférentielles se développent à différentes positions radiales de la section du tube, dépendant fortement de la fraction volumique moyenne de solide dans le mélange. En régime turbulent, le caractère fluctuant de l'écoulement du fluide porteur et de la phase dispersée rend le problème bien plus complexe qu'en régime laminaire. Les particules de taille finie peuvent modifier les propriétés de la phase porteuse par divers mécanismes (production, distorsion des structures turbulentes ou dissipation de l'énergie d'agitation) conduisant à la réduction ou à l'augmentation des contraintes turbulentes. Ces mécanismes dépendent à la fois de la concentration et de la taille des particules comparée à la taille des structures cohérentes de l'écoulement turbulent. Une analyse récente sur la modulation de la turbu-

lence par des particules est proposée dans la revue de Balachandar et Eaton (2010).

0.3 Objectifs des recherches et organisation du document

Nous étudions dans cette thèse le cas de l'écoulement de suspension en canal plan. Bien que la géométrie ne soit pas cylindrique comme dans les expériences de Matas *et al.* (2003), les écoulements en tube et en canal ont deux points communs : ils sont entraînés par une différence de pression et bornés par des parois. Pour les mêmes rapports de taille particule-conduite et les mêmes nombres de Reynolds, les mécanismes qui contrôlent le mouvement des particules et les interactions fluide-particule sont sans doute proches. Le nombre de Reynolds de l'écoulement est $Re = O(1000 - 2000)$ à l'échelle du canal, et $Re_p = O(1 - 10)$ à l'échelle des particules. La gamme de fractions volumiques étudiées est $\phi = [1\% - 5\%]$ et le rapport de taille entre la hauteur du canal et la taille des particules est de $H/d = 16$. D'après les résultats de Matas *et al.* (2003), on s'attend à ce que ce type de conditions de taille et de concentration réduise considérablement le seuil de transition.

En compléments des méthodes expérimentales d'analyse locale des milieux diphasiques (par exemple PIV en milieu optiquement homogène comme dans la thèse de Pouplin (2009)), la simulation numérique directe apporte des informations utiles pour l'étude des modifications induites par la présence de macro-particules sur la transition. Elle permet d'accéder en tout point de l'écoulement aux informations relatives à la dynamique des particules et de l'écoulement. Grâce à l'augmentation de puissance des ressources de calcul scientifique, les simulations numériques résolues d'écoulements turbulents chargés en particules ne cessent de s'améliorer (Pan et Banerjee, 1997; Uhlmann, 2008; Garcia-Villalba *et al.*, 2012; Shao *et al.*, 2012). La méthode numérique (Force-Coupling Method) choisie pour ce travail résout les équations du fluide à une échelle plus petite que le rayon de la particule. En résolvant le couplage hydrodynamique entre les particules et le fluide, elle permet d'accéder aux valeurs du tenseur de contrainte, aux fluctuations de vitesse induites par les particules, ainsi qu'à leur dynamique individuelle. Les résultats des simulations numériques seront exploités de manière à obtenir des informations sur la modification des propriétés de la suspension par rapport à celles de l'écoulement monophasique, en régime laminaire ou turbulent proche du seuil de transition. Les simulations seront réalisées dans un domaine périodique. Ceci permet de suivre l'écoulement pendant un temps suffisamment long pour un coût de calcul modéré. Même avec les moyens les plus importants de simulations numériques disponibles actuellement, il est impossible de considérer des domaines très longs afin d'accommoder les

bouffées de turbulence qui prennent place dans un écoulement en transition. Cependant, le domaine de calcul que nous considérerons possède une taille suffisante pour que les structures rotationnelles de l'écoulement y prennent place. Ainsi, même si nous ne pourrions pas déterminer avec précision le nombre de Reynolds de transition (comme dans les études numériques monophasiques spécifiques ou les expériences diphasiques), nous obtiendrons des informations sur les mécanismes d'interaction entre le fluide et les particules responsables de l'avancement ou du retard de la transition à la turbulence.

Le premier chapitre de ce mémoire dresse tout d'abord un bilan sommaire des méthodes numériques employées pour la résolution des écoulements de suspension. Le schéma de résolution des équations du mouvement du fluide est ensuite détaillé, ainsi que le couplage entre le fluide et les particules par la *Force-Coupling Method*. Cette méthode de couplage initialement développée pour des écoulements de Stokes est étendue pour simuler le comportement de particules dans des écoulements inertiels confinés. La méthode numérique est validée sur une configuration de référence correspondant à une particule isolée soumise à un écoulement cisailé homogène où l'inertie du fluide est finie.

Le deuxième chapitre présente une discussion sur l'effet de l'inertie sur les propriétés de transport d'une suspension. Nous étudions plus particulièrement : l'évolution des contraintes et de la vitesse de glissement entre la particule et le fluide en fonction du nombre de Reynolds et de la concentration volumique dans une suspension homogène. Au dessous du seuil de transition, nous montrons qu'aux temps longs, suite à la migration des particules en réponse à l'effet Segré-Silberberg, l'écoulement laminaire de suspension évolue d'une distribution spatiale homogène à un état stratifié. Cette migration est suivie d'une instabilité qui conduit à l'apparition d'écoulements secondaires répartissant les particules sous forme de motifs dunaires.

Le dernier chapitre aborde l'effet des macro-particules sur un écoulement turbulent proche du seuil de transition. En présence de turbulence, les particules restent réparties d'une façon relativement homogène dans le canal malgré une tendance à la migration inertielle vers les parois. Elles augmentent à la fois l'agitation et la dissipation et modifient les structures rotationnelles de l'écoulement. Ceci conduit à une réduction du seuil de transition vers des nombres de Reynolds plus faibles qu'en monophasique. L'analyse des résultats des simulations dans les sens laminaire \mapsto turbulent et turbulent \mapsto laminaire présente une hystérésis sur le nombre de Reynolds critique.

Bibliographie

- ABBAS, M., CLIMENT, E. et SIMONIN, O. (2006). Dynamics of bidisperse suspensions under Stokes flows : Linear shear flow and sedimentation. *Phys. Fluids*, 18.
- BALACHANDAR, S. et EATON, J. K. (2010). Turbulent dispersed multiphase flow. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 42:111–133.
- DRAZER, G., KOPLIK, J., KHUSID, B. et ACRIVOS, A. (2004). Microstructure and velocity fluctuations in sheared suspensions. *J. Fluid Mech.*, 511:237–263.
- ECKHARDT, B., SCHNEIDER, T., HOF, B. et WESTERWEEL, J. (2007). Turbulence transition in pipe flow. *An. Rev. Fluid Mech.*, 39:447–468.
- GARCIA-VILLALBA, M., KIDANEMARIA, A. et UHLMANN, M. (2012). DNS of vertical plane channel flow with finite-size particles : Voronoi analysis, acceleration statistics and particle-conditioned averaging. *Int. J. Multiphase Flow*, 46:54–74.
- HAN, M., KIM, C., KIM, M. et LEE, S. (1999). Particle migration in tube flow of suspensions. *J. Rheology*, 43(5):1157–1174.
- KERSWELL, R. R. (2005). Recent progress in understanding the transition to turbulence in a pipe. *Nonlinearity*, 18:17–44.
- KRIEGER, I. M. et DOUGHERTY, T. J. (1959). A mechanism for non-newtonian flow in suspensions of rigid spheres. *Trans. Soc. Rheol.*, III:137–152.
- MATAS, J.-P., MORRIS, J. F. et GUAZZELLI, E. (2003). Transition to turbulence in particulate pipe flow. *Phys. Rev. Lett.*, 90:1–4.
- MULLIN, T. (2010). Experimental studies of transition to turbulence in a pipe. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 43(1–24).
- NOTT, P. R. et BRADY, J. F. (1994). Pressure-driven flow of suspensions : simulation and theory. *J. Fluid Mech.*, 275:157–199.
- PAN, Y. et BANERJEE, S. (1997). Numerical investigation of the effects of large particles on wall-turbulence. *Phys. Fluids*, 9(12):3789–3807.
- PFENNIGER, W. (1961). Transition in the inlet length of tubes at high reynolds tubes. *Boundary layer and flow*, pages 970–980.

-
- POUPLIN, A. (2009). écoulements liquide-liquide dispersés homogènes en conduite horizontale : approche locale en milieu concentré.
- POUPLIN, A., MASBERNAT, O., DÉCARRE, S. et LINÉ, A. (2011). Wall friction and effective viscosity of a homogeneous dispersed liquid- liquid flow in a horizontal pipe. *AIChE J.*, 57(5):1119–1131.
- REYNOLDS, O. (1883a). An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous of the law of resistance in parallel channels. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, 35:84–99.
- REYNOLDS, O. (1883b). An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous of the law of resistance in parallel channels. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A*, 174:835–982.
- ROTT, N. (1990). A note on the history of the Reynolds number. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 22(1–11).
- SCHONBERG, J. A. et HINCH, E. J. (1989). Inertial migration of a sphere in Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 203:517–524.
- SEGRÉ, G. et SILBERBERG, A. (1962a). Behavior of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow. Part 1 : Determination of local concentration by statistical analysis of particle passages through crossed light beams. *J. Fluid Mech.*, 14:115–135.
- SEGRÉ, G. et SILBERBERG, A. (1962b). Behavior of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow. Part 2 : Experimental results and interpretation. *J. Fluid Mech.*, 14:136–157.
- SEMWOGERERE, D., MORRIS, J. et WEEKS, E. (2007). Development of particle migration in pressure-driven flow of a brownian suspension. *J. Fluid Mech.*, 581:437–451.
- SHAO, X., WU, T. et YU, Z. (2012). Fully resolved numerical simulation of particle-laden turbulent flow in a horizontal channel at a low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 693:319–344.
- UHLMANN, M. (2008). Interface-resolved direct numerical simulation of vertical particulate channel flow in the turbulent regime. *Phys. Fluids*, 20(053305):1–27.

- WILLIS, A. P. et KERSWELL, R. R. (2007). Critical behavior in the re-laminarization of localized turbulence in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.*, 98(014501):1–4.
- YEO, K. et MAXEY, M. R. (2011). Numerical simulations of concentrated suspensions of monodisperse particles in a Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 682:491–518.

Deuxième partie

Corps de thèse

Méthode numérique et validation

Sommaire

1	Choix de la méthode numérique	18
2	Résolution numérique des équations de Navier-Stokes de l'écoulement monophasique	24
2.1	Formulation mathématique et discrétisation	24
2.2	Validation en écoulement monophasique : évolu- tion d'un mode instable dans l'écoulement de Poi- seuille plan	27
3	Force-Coupling Method	29
3.1	Formulation	29
3.2	Algorithme de calcul du dipôle	33
3.3	Force de répulsion interparticulaire	35
4	Validation de la FCM à Re_p fini	38
4.1	Particule isolée dans un écoulement cisailé pur	39
5	Parallélisation et tests de performance du code avec FCM	42

1 Choix de la méthode numérique

Les écoulements particuliers tiennent leur complexité de la multitude des échelles temporelles et des échelles spatiales, allant de la taille des particules jusqu'à la taille globale de l'écoulement. Le comportement de ces écoulements est grandement influencé par la concentration et la taille des particules solides suspendues, conditions qui dans certains cas, rendent inopérantes les techniques de mesure expérimentales pour déduire les quantités physiques d'importance. Afin de renforcer la compréhension des mécanismes dont découle le comportement macroscopique des suspensions, les méthodes numériques modélisant le couplage des écoulements chargés en particules connaissent depuis quelques décennies un développement important. La simulation numérique d'écoulements de suspensions est en contrepartie soumise à des prescriptions strictes pour garantir une précision à l'échelle locale, ce qui la rend toujours à l'heure actuelle assujettie à l'essor technologique des moyens de calcul.

Pour prendre en compte le couplage existant entre le milieu porteur fluide et la phase solide dispersée, la méthode numérique retenue est de type *Euler/Lagrange*. Différents formalismes peuvent modéliser ce couplage. Dans les modèles de type « One-way Coupling » (OWC, *couplage unilatéral*), les particules – assimilées à des objets ponctuels – sont suivies de manière lagrangienne en résolvant le bilan des forces que l'écoulement environnant induit. Cet écoulement reste néanmoins non perturbé. Suivant le formalisme « Two-way Coupling » (TWC, *couplage réciproque*), le mouvement de la particule et celui du fluide en écoulement sont réciproquement affectés par la perturbation induite par la présence des particules. Ce type d'approche sert le plus souvent à étudier le comportement de suspensions où les particules sont de taille finie et comparable à la taille des plus grandes structures rotationnelles. Enfin, dans les modèles de type « Four-way Coupling » (FWC), les collisions sont prises en compte en plus de la perturbation induite par les particules dans l'écoulement. Cet aspect devient indispensable quand la suspension est concentrée en particules.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à des suspensions dont les effets sur les propriétés de l'écoulement sont importants, c'est-à-dire qui mettent en jeu des particules de taille finie à des concentrations modérées (fractions volumiques inférieures à 10%). Le formalisme TWC est alors le choix le plus approprié pour cette étude. Afin de mettre en perspective l'approche que nous allons utiliser, voici une liste non-exhaustive des principales méthodes existantes utilisant l'approche TWC, et dont le résumé figure dans le tableau (1.1).

Méthodes analytiques :

La linéarité des équations de Stokes qui lient les forces appliquées sur les particules à leur vitesse favorise l'établissement de solutions analytiques. La méthode BIM (Boundary Integral Method) de Pozrikidis (1992) permet de calculer l'écoulement pour des géométries complexes et des objets déformables. Le principal avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas la résolution du domaine fluide. Cette méthode n'est applicable que dans le contexte d'un écoulement de Stokes.

Si l'écoulement est inertiel, il existe une approche nommée *Physalis* (Zhang et Prosperetti, 2005), où un solveur de Navier-Stokes (sur un maillage fixe) est raccordé (sur une cage entourant la particule) à une solution analytique de l'écoulement de Stokes au voisinage des particules afin de modéliser l'interaction fluide-particule. Les particules sont suivies d'une manière lagrangienne et les interactions entre les particules ne sont pas modélisées explicitement. Cette méthode a été utilisée par Zhang et Prosperetti (2005) dans le cadre d'une turbulence homogène isotrope. Elle est cependant limitée à des nombres de Reynolds particuliers très petits.

Le principal atout de cette méthode étant d'apporter une solution exacte à l'écoulement au voisinage direct de la particule dans les conditions de Stokes, elle devient dès lors inopérante lorsque la région de l'écoulement en contact avec la particule subit les effets du tenseur de Reynolds attribuables à l'apparition de l'inertie. Dans ce cas précis, il n'existe aucune solution analytique et il est par conséquent nécessaire de recourir à des solveurs itératifs résolvant les équations de Navier-Stokes de manière approchée.

Simulation Numérique Directe (DNS) :

L'usage de la simulation numérique directe dans le cas d'écoulements diphasiques constitue le meilleur choix en termes de précision, mais se heurte rapidement aux limitations matérielles et au coût prohibitif qu'engendre ce type de simulation. Effectivement, comme c'est le cas pour un écoulement monophasique, la simulation numérique directe d'écoulements de suspensions résout les équations de Navier-Stokes à toutes les échelles de l'écoulement, et ceci sans utiliser de modèles de sous-maille pour estimer les propriétés locales du fluide aux échelles microscopiques (voir par exemple Magnaudet *et al.* (1995), Mikulencak et Morris (2004), Zeng *et al.* (2009)). Ceci inclut la couche limite à la surface de chaque particule, et qu'il est donc nécessaire de bien calculer. Pour ce faire, un maillage particulièrement fin est indispensable,

et d'autant plus quand le nombre de Reynolds est élevé¹. Il reste cependant possible de minimiser le nombre de mailles en adaptant à chaque pas de temps un *maillage mobile*, augmentant le nombre de mailles seulement autour de la surface des particules. Cependant l'opération de reconstruction du maillage est en général complexe, coûteuse en temps de calcul, et peut engendrer des imprécisions sur le plan numérique. Ces contraintes font que la DNS se cantonne principalement à l'étude académique d'écoulements dans des domaines de petites dimensions et aux nombres de Reynolds modérément faibles, en attendant que la puissance des moyens de calcul évolue.

Méthode Lattice-Boltzmann sur réseau (LBM) :

Au lieu de résoudre numériquement les équations de conservation de propriétés macroscopiques telles que la masse, la quantité de mouvement ou l'énergie, la LBM modélise le fluide comme un ensemble de particules microscopiques fictives dont le comportement (mouvement, propagation, collision, *etc.*) est gouverné par l'équation de Boltzmann projetée sur un réseau discret de nœuds. L'avantage de cette méthode est qu'elle est appropriée pour les géométries complexes et facilement parallélisable. Ladd (1989) a conduit des simulations sur l'étude des interactions hydrodynamiques dans une suspension laminaire de particules colloïdales sphériques, en utilisant avec succès cette approche. Les effets inertiels inhérents à des nombres de Reynolds particuliers finis dans des suspensions non-colloïdales laminaires ou turbulentes ont été étudiés par Jasberg *et al.* (2000), Chun et Ladd (2006), Ten Cate *et al.* (2004) et d'autres. Les principales difficultés soulevées par l'implémentation de cette méthode sont liées au traitement des liaisons entre les nœuds à travers l'interface et à la modélisation des interactions locales à l'interface (turbulence).

Méthode de pénalisation (PM) :

Les termes de *Penalty Methods* regroupent en fait un ensemble de méthodes numériques telles que l'IBM (*Immersed Boundary Method*) et la DLM/FDM (*Distributed Lagrangian Multiplier/Fictitious Domain Method*), qui visent à résoudre l'écoulement autour d'une interface solide-liquide telle qu'une particule immergée, en appliquant des *fonctions de pénalisation* dans le but de pouvoir satisfaire la condition de Dirichlet localement à l'interface fluide-particule. Ces fonctions sont déterminées à l'aide de polynômes de Lagrange calculant la solution sur quelques points du maillage et obtenant la valeur de pénalisation adéquate dans la cellule lagrangienne considérée, couplant ainsi l'objet libre au fluide porteur (Randrianarivelo *et al.*, 2005). La méthode IBM

¹L'échelle de longueur de Kolmogorov dans un écoulement turbulent étant une fonction décroissante du nombre de Reynolds.

fût initialement développée par Peskin (1972) pour simuler la mécanique cardiaque et les flux sanguins associés. Sa particularité est d'utiliser un maillage cartésien pour discrétiser des géométries complexes. Chaque particule est représentée par une multitude de fibres monodimensionnelles flexibles agissantes comme des ressorts, permettant une redistribution réciproque des efforts sur le système fluide-particule. L'IBM a été utilisée avec succès pour étudier la sédimentation de particules dans un écoulement turbulent en canal (Uhlmann, 2008; Garcia-Villalba *et al.*, 2012). Dans la méthode DLM introduite par Glowinski *et al.* (1999), la condition de rigidité est appliquée à l'intérieur et sur les frontières des particules grâce à l'utilisation systématique de *multiplieurs de Lagrange*. Le système différentiel obtenu par cette approche est raide mathématiquement, en raison des contraintes imposées, ce qui limite le nombre de particules utilisées. La DLM a ensuite été reprise par plusieurs groupes de recherche, notamment par Yu et Shao (2010) ainsi que Shao *et al.* (2012) qui l'ont utilisée efficacement pour étudier des écoulements inertiels en canal ou en tube chargés en particules de taille finie.

Méthodes multipolaires :

Dans cette classe de méthodes, le champ fluide est représenté par une matrice de résistance extraite d'un développement multipolaire tronqué. Cette matrice contient les informations hydrodynamiques liées aux forces, aux couples et aux vitesses des particules en tenant en compte du champ fluide non perturbé. La méthode multipolaire la plus répandue est la *Stokesian Dynamics* (SD), établie par Brady *et al.* (1988) et ultérieurement améliorée par Sierou et Brady (2001), grâce à la troncature du développement après le second ordre. Le principal avantage de cette méthode est qu'elle permet de calculer les interactions hydrodynamiques multi-corps à un moindre coût puisqu'elle s'affranchit du calcul complet lié à l'écoulement de la phase continue. En revanche, elle se limite uniquement au régime de Stokes.

La *Force-Coupling Method* (FCM) appartient également à la classe des méthodes multipolaires, dans laquelle le problème de mobilité est résolu en lieu et place du problème de résistance. Initialement formulée pour traiter les particules comme des inclusions ponctuelles dans un écoulement de Stokes, elle a été étendue aux écoulements chargés en particules sphériques de taille finie grâce à l'emploi d'enveloppes gaussiennes distribuant spatialement les efforts sur le fluide à la surface des sphères (Maxey et Patel, 2001; Lomholt et Maxey, 2003). Ces termes de forçage liés aux particules peuvent être implémentés dans n'importe quel solveur des équations de Navier-Stokes, et peuvent être étendus par adaptation à des formes plus variées (ellipsoïdales, *etc.*). Les vitesses de translation et de rotation des particules sont obtenues

à partir des vitesses du fluide localement pondérées par les enveloppes gaussiennes. Un nombre de mailles réduit par rayon de particule (3 ou 4) est suffisant pour obtenir une bonne approximation de la perturbation induite par chaque particule, ce qui permet d'alléger fortement le maillage. En contrepartie, ce type de méthode est particulièrement adapté pour modéliser des suspensions modérément concentrées (concentration inférieure à 20%) parce qu'elles n'incluent pas l'effet des interactions de lubrification à très courte portée. Pour pallier ce problème, les corrections de lubrification ont été prises en compte par Dance et Maxey (2003) et Yeo et Maxey (2010). Récemment, la FCM a été également utilisée et validée dans différentes configurations de suspensions inertielles non-confinées par des parois (Yeo *et al.*, 2010; Yeo et Maxey, 2013).

Face aux limitations rencontrées lors de la simulation numérique directe (maillages trop denses, domaines trop petits, *etc.*), les méthodes multipolaires constituent une alternative, en permettant de capter localement les interactions hydrodynamiques induites par les particules avec une bonne précision, et ceci pour un coût de simulation raisonnable (simulation sur maillage fixe). Dans cette étude, la FCM est couplée au code JADIM (développé à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse) dans le but de modéliser des écoulements chargés en particules non-pesantes et de taille finie dans des situations où l'inertie du fluide prévaut. Le bon compromis affiché entre un coût de calcul modéré et une représentation physiquement précise des interactions hydrodynamiques fait d'elle une méthode attractive dans les conditions de notre étude. Quatre parties constituent ce chapitre. La première section contient une brève description du solveur des équations de Navier-Stokes (code JADIM). Dans la deuxième section, le couplage entre les équations du fluide et le modèle FCM adapté aux écoulements inertiels est décrit en détails. La troisième section est dédiée à la validation de la FCM dans des situations de référence d'écoulement inertiel autour d'une particule isolée (cisaillement pur ou Poiseuille plan). Dans la dernière section, les performances numériques du code sont discutées.

Méthode	Avantages	Inconvénients	Domaine de validité
Méthodes Analytiques	Rapides et précises	Non adaptées aux écoulements à nombre de Reynolds fini	$Re_p \ll 1$
DNS	Précision de la solution	Requiert un maillage très fin (coûteuse en moyens de calcul)	$0 \leq Re_p < \infty$
LBM	Adaptée aux géométries complexes et aisément parallélisable	Positionnement de la frontière. Modélisation des interactions locales à l'interface	$0 \leq Re_p \leq O(1)$
PM	Maillage fixe, utilisation de fonctions de pénalisation pour les inclusions solides	Coûteuse à cause du maillage fin requis au voisinage de l'interface	$0 \leq Re_p \leq O(10)$
Méthodes mutlipolaires	Rapides et faciles à implémenter	SD limitée aux écoulements de Stokes. Pas d'information relative au fluide	$Re_p \ll 1$
FCM	Couplage avec n'importe quel solveur numérique de Navier-Stokes	La dynamique de l'écoulement à l'interface particule-fluide n'est pas bien résolue	$0 \leq Re_p < O(10)$

TABLE 1.1: Comparatif des avantages et inconvénients des différentes méthodes de résolution d'écoulements de suspension. Re_p désigne le nombre de Reynolds particulaire.

Par soucis d'économie et de clareté, nous utiliserons par la suite les abréviations suivantes pour décrire les méthodes précédemment citées :

Abréviation	Méthode décrite
DNS	Simulation numérique directe
LBM	Méthode Lattice-Boltzmann sur réseau
PM	Méthode de pénalisation
SD	Stokesian Dynamics
FCM	Force-Coupling Method

TABLE 1.2: Abréviations utilisées pour décrire les méthodes de résolution d'écoulement multiphasique.

2 Résolution numérique des équations de Navier-Stokes de l'écoulement monophasique

2.1 Formulation mathématique et discrétisation

La version monophasique du code JADIM permet la résolution du système d'équations de Navier-Stokes : trois projections du bilan de quantité de mouvement (1.1), et l'équation de continuité (1.2). Pour un fluide incompressible, ces équations s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot (\nu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})) + \mathbf{f}_{\text{ext}}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.2)$$

où \mathbf{u} et p représentent les champs de vitesse et de pression du fluide, ρ et ν la densité et la viscosité cinématique du fluide newtonien. \mathbf{f}_{ext} symbolise l'ensemble des forces volumiques externes appliquées sur le fluide. Dans le membre de gauche, le terme d'*advection* $\nabla (\mathbf{u}\mathbf{u})$ – non-linéaire – est le principal responsable de la grande diversité qui peut être rencontrée dans les écoulements turbulents. Le membre de droite fait quant à lui le bilan des efforts internes (force de pression et contraintes visqueuses) et externes appliqués localement au fluide, et sert à équilibrer l'inertie engendrée par le terme d'*advection*. La grande complexité mathématique essentiellement due à la non-linéarité du terme advectif, fait qu'il n'est pas encore possible de résoudre analytiquement ce système d'équations aux dérivées partielles.

Dans le code JADIM, le schéma de discrétisation spatiale et d'intégration temporelle des équations (1.1) sans terme source dans un espace tridimensionnel normé est décrit exhaustivement par Calmet (1995) et Calmet et Magnaudet (1997). Rappelons toutefois succinctement de quelle façon sa résolution est accomplie.

La discrétisation spatiale s'appuie sur une formulation en *volumes-finis*. Bien qu'étant plus coûteuse en termes de nombre de mailles qu'une méthode spectrale, cette formulation présente l'avantage d'être totalement conservative puisque les quantités physiques calculées sous forme de flux à travers les frontières de l'un des volumes élémentaires est égale au flux sortant du volume mitoyen. En outre, cette formulation peut être adaptée à des maillages non-structurés, ce qui rend possible son utilisation dans des domaines géométriquement complexes.

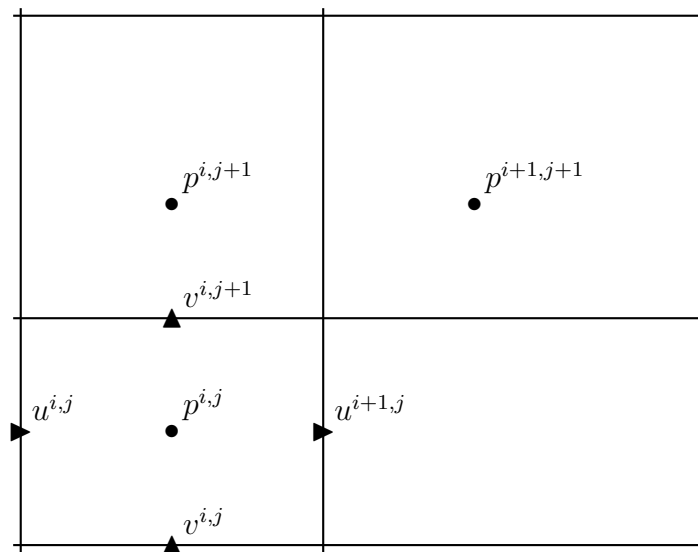


FIGURE 1.1: Représentation schématique bidimensionnelle d'un maillage décalé (non uniforme). Les points de vitesse sont à égale distance des deux points de pression voisins.

Le système d'équations tridimensionnel (1.1) est projeté sur un maillage décalé (figure 1.1). La résolution est réalisée par un schéma Runge-Kutta/Crank-Nicolson. L'avancement dans le temps de la solution est assuré au moyen d'une procédure de Runge-Kutta à trois sous-pas de temps (RK3), où les termes non-linéaires d'advection \mathcal{N} sont résolus explicitement tandis que les termes linéaires de diffusion \mathcal{L} sont traités semi-implicitement grâce au schéma de Crank-Nicolson (CN). À chaque sous-pas de temps ($k = 1, 2, 3$)

entre $n\Delta t$ et $(n + 1)\Delta t$, la solution est avancée à l'aide d'approximations successives des champs de vitesse \hat{V}_i et de la pression réduite p :

$$\begin{aligned} \frac{\hat{V}_i^k - \hat{V}_i^{k-1}}{\Delta t} &= \gamma_k \mathcal{N}(\hat{V}_i^{k-1}) + \zeta_k \mathcal{N}(\hat{V}_i^{k-2}) + (\alpha_k + \beta_k) \\ &\times \left[\mathcal{L}(\hat{V}_i^{k-1}) - \frac{\partial p^{n-1/2}}{\partial x_i} \right] + \beta_k \mathcal{L}(\hat{V}_i^k - \hat{V}_i^{k-1}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Les différents termes implémentés dans JADIM sont formulés dans leurs expressions générales, c'est-à-dire tenant compte des changements locaux de la viscosité qui peuvent intervenir lorsque les champs intermédiaires de vitesse ne sont pas à divergence nulle (cas de plusieurs espèces chimiques en présence, transfert de matière, *etc.*). Les termes non-linéaires sont exprimés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\hat{V}_i^k) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \hat{V}_j^k}{\partial x_i} \right) - \nu \frac{\partial^2 \hat{V}_j^k}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{V}_i^k \hat{V}_j^k) \\ &\quad + \hat{V}_i^k \frac{\partial \hat{V}_j^k}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Les termes linéaires issus de l'algorithme CN sont déduits de :

$$\mathcal{L}(\hat{V}_i^k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \hat{V}_i^k}{\partial x_j} \right). \quad (1.5)$$

Ce qui fait le principal attrait de ces deux schémas est qu'ensemble, ils combinent avantageusement des propriétés de stabilité pour des valeurs de nombre CFL $< \sqrt{3}$ avec une précision spatiale à l'ordre Δx^2 , et une intégration temporelle à l'ordre Δt^2 (Calmet, 1995). Ceci permet de simuler des écoulements faiblement visqueux avec un pas de temps relativement élevé (Canuto, 1988). Le choix des coefficients α_k , β_k , γ_k et ζ_k utilisés pour l'avancement en temps de la solution dans l'algorithme de Runge-Kutta permet de réduire significativement l'espace mémoire occupé. À la fin du troisième sous-pas de temps ($k = 3$), le champ de vitesse \hat{V}_i^3 ne respecte toujours pas la condition de divergence nulle. Par contre, le champ de vorticité est lui tout à fait défini avec une précision $O(\Delta t^2)$. La condition de continuité ( q. (1.2)) satisfaisant l'incompressibilité de l'écoulement n'est remplie qu'après ce troisième pas de temps intermédiaire en résolvant une équation de Poisson pour le potentiel de pression auxiliaire ϕ (Le et Moin, 1991) :

$$\frac{\partial^2 \phi^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \hat{V}_i^3}{\partial x_i}. \quad (1.6)$$

En définitive, les champs de vitesse et de pression finaux sont déduits du potentiel auxiliaire à partir des relations suivantes :

$$V_i^{n+1} = \hat{V}_i^3 - \Delta t \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial x_i}, \quad (1.7)$$

$$p^{n+1/2} = p^{n-1/2} + \phi^{n+1}. \quad (1.8)$$

Ci-après, les champs de pression et de vitesse finaux obtenus sont des approximations de la solution exacte à l'ordre deux :

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta t} = \sum_{k=1}^3 \left[\gamma_k \mathcal{N}(\hat{V}_i^{k-1}) + \zeta_k \mathcal{N}(\hat{V}_i^{k-2}) \right] \quad (1.9)$$

$$+ \sum_{k=1}^3 \left[\alpha_k \mathcal{L}(\hat{V}_i^{k-1}) + \beta_k \mathcal{L}(\hat{V}_i^k) \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} (p^n + \phi^{n+1}). \quad (1.10)$$

2.2 Validation en écoulement monophasique : évolution d'un mode instable dans l'écoulement de Poiseuille plan

Afin de tester l'algorithme de résolution des équations de Navier-Stokes, nous avons étudié la croissance d'une perturbation bidimensionnelle de faible amplitude – dite *onde de Tollmien-Schlichting* – dans un écoulement en canal plan. L'objectif de ce test est de vérifier que la diffusion numérique reste faible lors de la simulation d'écoulement en phase de transition vers la turbulence (*cf.* chapitre 3). Une description plus détaillée peut se trouver dans la thèse de Calmet (1995), ainsi que dans l'article de Calmet et Magnaudet (1997). Les points importants sont repris dans ce paragraphe.

Considérons un écoulement de Poiseuille plan $U = 1 - y^2$ dans un canal de hauteur $H = 2$ et de longueur πH dans la direction de l'écoulement et de la vorticité. On définit le nombre de Reynolds sur la vitesse au centre de l'écoulement et sur la demi-hauteur du domaine.

Au-delà d'un nombre de Reynolds critique $Re^c \approx 5772$ (cette valeur équivaut à environ 7700 en définissant le nombre de Reynolds avec la vitesse moyenne et la hauteur totale du canal), Orszag (1971) a montré qu'un écoulement est linéairement instable vis à vis de certaines perturbations. Dans le domaine linéaire, les ondes de Tollmien-Schlichting (TS), exprim es sous la forme de modes normaux, constituent un exemple de ce type de perturbations :

$$u(x, y, t) = 1 - y^2 + \epsilon \mathcal{R}e\{\Psi'(y) \exp [i(\alpha x - \omega t)]\}, \quad (1.11)$$

$$v(x, y, t) = -\epsilon \mathcal{R}e\{i\alpha \Psi(y) \exp [i(\alpha x - \omega t)]\}. \quad (1.12)$$

Le couple de paramètres $Re = 1/\nu = 1/7500$ et $\alpha = 1$ est choisi. La pulsation du mode instable $\omega = 0.251362 + 0.00250225i$ est calculée à partir du code LISA (IMFT). L'amplitude de la perturbation est fixée à $\epsilon = 10^{-4}$. Le code LISA fournit également les parties réelles et imaginaires des fonctions $\Psi(y)$ et $\Psi'(y)$ qui caractérisent les perturbations initiales imposées aux composantes de vitesses dans les directions respectives de l'écoulement et de la normale aux parois.

La simulation de l'écoulement de Poiseuille auquel est apporté une perturbation TS est conduite dans un domaine tridimensionnel comportant un maillage contenant $64 \times 64 \times 64$, régulier dans la direction de l'écoulement et dans celle de la vorticité, et suivant une progression en tangente hyperbolique dans la direction normale aux parois². Le pas de temps choisi est 6.25×10^{-3} .

Sur la base de la perturbation, une instabilité se développe au sein de l'écoulement. L'évolution temporelle de l'énergie totale de fluctuation définie par l'équation (1.13) (où u' et v' sont les fluctuations de vitesse par rapport à l'écoulement de Poiseuille non perturbé) :

$$E(t) = \int_0^L dx \int_0^L dz \int_{-1}^1 \{u'^2(x, y, z, t) + v'^2(x, y, z, t)\} dy, \quad (1.13)$$

peut se représenter théoriquement sous la forme d'une exponentielle :

$$\frac{E(t)}{E_0} = \exp(2\omega_i t). \quad (1.14)$$

Selon la figure 1.2, l'énergie calculée par le code JADIM correspond à environ 95% de l'énergie théorique calculée à partir de l'équation d'Orr-Sommerfeld. Ce test confirme que la méthode numérique que nous utilisons pour la résolution des équations d'un écoulement fluctuant permet de restituer l'énergie totale des fluctuations d'une façon satisfaisante.

²Le même domaine est utilisé pour la simulation d'écoulements monophasiques dans le chapitre 3.

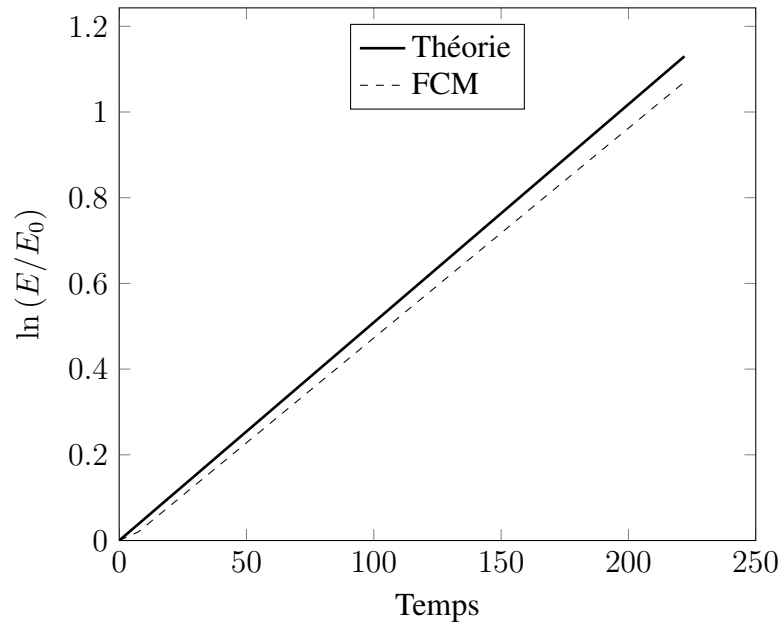


FIGURE 1.2: Évolution temporelle de l'énergie de la perturbation (normalisée par sa valeur initiale) à $Re = 1/\nu = 7500$.

3 Force-Coupling Method

3.1 Formulation

Cette méthode développée initialement par Maxey et Patel (2001) consiste à déterminer le couplage entre le mouvement des particules et le fluide, symbolisé par le terme de forçage \mathbf{f}_{ext} dans l'équation (1.1). Le fluide remplit la totalité du domaine, y compris le volume occupé par les particules, ce qui permet de résoudre les équations sur un maillage fixe. Le fluide est supposé incompressible et sa viscosité constante.

La perturbation du champ de vitesse induite par la présence des particules est déduite du calcul d'un développement multipolaire d'ordre fini (Maxey et Patel, 2001; Lomholt et Maxey, 2003; Climent et Maxey, 2009). L'ordre de ce développement conditionne le degré de précision de la méthode en permettant la prise en compte d'effets supplémentaires induits par la particule considérée (interactions de champ lointain, de champ proche, *etc.*). Ainsi, le monopôle $F_i^{(n)}$ constitue le moment d'ordre 1, le dipôle $F_{ij}^{(n)}$ le moment d'ordre 2, le quadropole $F_{ijk}^{(n)}$ le moment d'ordre 4, *etc.* Dans une formulation de type

point-particule, le terme de forçage s'exprime :

$$f_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^N \left[\left(F_i^{(n)} + F_{ij}^{(n)} \frac{\partial}{\partial x_j} + F_{ijk}^{(n)} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \dots \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{Y}^{(n)}) \right], \quad (1.15)$$

où δ désigne la fonction de Dirac et $\mathbf{Y}^{(n)}$ la position du centre de la $n^{\text{ème}}$ particule. Cependant en pratique, l'usage de la fonction de Dirac implique numériquement la prise en compte d'une singularité qui ne peut pas être représentée avec exactitude. Une solution consiste à régulariser ce Dirac par une fonction gaussienne enveloppant chaque particule sphérique (éq. (1.16)). Chacune des mailles couvertes par cette enveloppe tridimensionnelle reçoit une valeur pondérée du terme source affectant la particule, ce qui permet de prendre en compte sa taille réelle.

$$\Delta(\mathbf{x}) = (2\pi\sigma^2)^{-3/2} e^{\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (1.16)$$

Tenant compte de cette modification, la nouvelle expression du terme de forçage appliqué en un point de coordonnées \mathbf{x} appartenant aux enveloppes gaussiennes s'écrit :

$$f_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^N F_i^{(n)} \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{Y}^{(n)}(t)) + G_{ij}^{(n)} \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta'(\mathbf{x} - \mathbf{Y}^{(n)}(t)). \quad (1.17)$$

Dans cette formulation, nous considérons uniquement les deux premiers termes du développement multipolaire, à savoir le forçage relatif au monopôle $F_i^{(n)}$ (ou *Stokeslet*) et au dipôle $G_{ij}^{(n)}$ (*Stresslet* et *Rotlet*³), respectivement distribuées sur les enveloppes Δ d'épaisseur σ , et Δ' d'épaisseur σ' .

La contribution exercée sur le fluide par le monopôle associé à chaque particule (éq. (1.18)), représente la somme des actions induites par sa présence (inertie, flottabilité, ou n'importe quelle autre force externe additionnelle \mathbf{F}_{ext}).

$$\mathbf{F}^{(n)} = (m_p - m_f) \left(\mathbf{g} - \frac{d\mathbf{V}^{(n)}}{dt} \right) + \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (1.18)$$

L'étude que nous menons ici concerne des particules non-inertiellles et non-pesantes (particules de même densité que le fluide). Le calcul du monopôle se restreint donc numériquement à la détermination de \mathbf{F}_{ext} , qui, nous le verrons plus tard, sera utilisé pour imposer la propriété de non-recouvrement

³Également dénommé *Couplet*.

des particules (*cf.* §3.3).

Le second terme du développement multipolaire (ou dipôle) consiste en un tenseur d'ordre deux divisé en parties symétrique et anti-symétrique. La partie anti-symétrique A_{ij} (Rotlet) représente l'action induite par un couple \mathbf{T} agissant sur la particule telle que $A_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}T_k^{(n)}$, et provoque une « rotation solide » au sein de l'écoulement. Le couple $\mathbf{T}^{(n)}$ résulte de la somme entre un couple externe $\mathbf{T}_{\text{ext}}^{(n)}$ appliqué à la particule, et une contribution inertielle due à la rotation de la particule, tel que :

$$\mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{T}_{\text{ext}}^{(n)} - (I_p - I_f) \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}^{(n)}}{dt} \right). \quad (1.19)$$

où $I_p - I_f = V_p(\rho_p - \rho_f)\frac{2a^2}{5}$ représente la différence de moments d'inertie relatif à la masse de la particule, et la masse de fluide qui occupe réellement son volume V_p . Ici encore, les particules étant non-pesantes et libres de tourner sur les trois axes, ce terme se réduit à l'application éventuelle d'un couple externe.

La partie symétrique S_{ij} se rapportant au Stresslet a pour rôle d'annuler le taux de déformation dans le volume de la particule. Pour que cette condition de rigidité soit respectée, le Stresslet est calculé de manière à imposer une déformation globale nulle à l'intérieur du volume de la particule sphérique :

$$\epsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_p} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Delta'(\mathbf{x} - \mathbf{Y}^{(n)}(t)) d^3\mathbf{x} = 0. \quad (1.20)$$

Les termes du tenseur de Stresslet sont en général obtenus d'une façon itérative (Dance et Maxey, 2003), et tiennent compte des interactions hydrodynamiques qu'induisent les perturbations provoquées par la présence des autres particules dans l'écoulement. Le calcul itératif et implicite des termes du dipôle ainsi que le schéma d'intégration temporelle des équations de l'écoulement sont détaillés dans la section suivante.

Concernant notre sujet d'étude, en l'absence de couple et de force externes appliqués sur les particules dans un écoulement de suspension, seule la partie symétrique du dipôle gouverne leur mouvement.

Les vitesses de translation et de rotation des particules sont obtenues par intégration volumique de la vitesse du fluide et de sa rotation sur la région occupée par la particule (éq. (1.21) et (1.22)).

$$\mathbf{V}^{(n)}(t) = \int_{\Sigma_p} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \Delta (\mathbf{x} - \mathbf{Y}^{(n)}(t)) d^3\mathbf{x} \quad (1.21)$$

$$\mathbf{\Omega}^{(n)}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_p} \{\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\} \Delta' (\mathbf{x} - \mathbf{Y}^{(n)}(t)) d^3\mathbf{x} \quad (1.22)$$

Et la trajectoire lagrangienne est déduite par intégration de l'équation (1.23).

$$\frac{d\mathbf{Y}^{(n)}}{dt} = \mathbf{V}^{(n)}(t) \quad (1.23)$$

Les épaisseurs des enveloppes gaussiennes ont été préalablement déterminées à partir des lois théoriques connues pour des particules isolées dans un écoulement de fluide infini. Celle concernant le monopôle est déduite de la force de trainée subie par une particule en sédimentation dans un fluide au repos. La relation entre le monopôle exercé sur le fluide et la vitesse sédimentation \mathbf{W}_s , s'écrit alors $\mathbf{F} = 6\pi\mu a \mathbf{W}_s$. Connaissant sa vitesse de sédimentation, la vitesse du champ fluide peut être calculée analytiquement. En égalant l'intégrale dans l'équation (1.21) à la vitesse de sédimentation :

$$\mathbf{V} = \frac{a}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathbf{W}_s, \quad (1.24)$$

la relation exacte entre la largeur de la gaussienne du monopôle et le rayon de la particule est $\sigma = a/\sqrt{\pi}$ (Maxey et Patel, 2001). Bien que la FCM ne reproduise pas explicitement la condition de non-glissement à la surface de chaque particule, la méthode permet de bien restituer la dynamique de l'écoulement autour d'une particule lors de sa sédimentation. Par ailleurs la valeur de $\sigma = a/\sqrt{\pi}$ permet de capter avec une bonne précision la vitesse de sédimentation d'une particule dans un écoulement quadratique (bonne représentation de la correction de Faxén dans la force de trainée).

La largeur de la gaussienne appliquée au dipôle dans la limite de l'approximation de Stokes est déterminée à partir de la rotation d'une particule dans un fluide visqueux immobile soumise à un couple extérieur. La relation entre le couple \mathbf{T} et la vitesse de rotation $\mathbf{\Omega}$ est donnée par la relation suivante :

$$\mathbf{T} = 8\pi\mu a^3 \mathbf{\Omega}, \quad (1.25)$$

la condition de déformation nulle appliquée sur le champ fluide exprimée en fonction du dipôle est respectée exactement lorsque $a/\sigma' = (6\sqrt{\pi})^{1/3}$

(Lomholt et Maxey, 2003).

Les largeurs des enveloppes telles que définies précédemment ne sont variables que loin des parois. À proximité d'une paroi, une particule voit une partie de son enveloppe recouvrir la limite physique du domaine, provoquant sa troncature. Ainsi, pour que le calcul de la perturbation induite par la particule soit mieux pris en compte, une modification des enveloppes gaussiennes est à apporter. La méthode de *l'enveloppe image* est utilisée (Yeo et Maxey, 2010) dans ce but (voir détails en annexe 2).

3.2 Algorithme de calcul du dipôle

La détermination du tenseur de dipôle nécessite l'emploi d'un schéma itératif convergeant vers une valeur qui respecte la condition de non-déformabilité à l'intérieur de toutes les particules. Dance et Maxey (2003) ont détaillé l'algorithme de son calcul dans un écoulement de Stokes basé sur un schéma itératif. Liu (2000) a utilisé une méthode itérative de point fixe pour calculer le dipôle dans un écoulement laminaire inertiel autour d'une particule. Cependant, l'implémentation de ce type de méthode génère des oscillations dans la recherche de la solution. Ainsi, afin d'assurer la stabilité du schéma numérique, nous avons implémenté les termes du tenseur symétrique du dipôle de manière implicite dans les équations de Navier-Stokes.

Modification du schéma d'intégration temporelle RK3/CN :

À chaque nouveau pas de temps t^m , les équations de mouvement du fluide sont résolues suivant le schéma d'avancement temporel Runge-Kutta/Crank-Nicolson à trois sous-pas de temps (RK3/CN). Dans chacun de ces trois sous-pas de temps k se déroulent successivement les étapes suivantes :

1. La nouvelle position de la particule p est calculée explicitement pour le sous-pas de temps suivant en utilisant l'expression (1.26).

$$\mathbf{X}_p^k = \mathbf{X}_p^{k-1} + dt (\gamma_k \mathbf{V}_p^{k-1} + \zeta_k \mathbf{V}_p^{k-2}) \quad (1.26)$$

2. Déplacement des enveloppes gaussiennes. Calcul des vitesses des particules.
3. Calcul du monopôle \mathbf{F}_M dû aux forces interparticulaires.
4. Les équations de Navier-Stokes sont alors résolues pour le sous-pas de temps k en associant le monopôle à une force volumique. Le dipôle \mathbf{F}_D est évalué implicitement par le biais de la boucle itérative suivante :

- 4a. Le champ de vitesse intermédiaire est calculé en prenant en compte les termes non-linéaires \mathcal{N} , la partie explicite des termes visqueux linéaires \mathcal{L} , ainsi que le monopôle :

$$\begin{aligned} \frac{1}{dt} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^{k-1}) &= \gamma_k \mathcal{N}(\mathbf{u}^{k-1}) + \zeta_k \mathcal{N}(\mathbf{u}^{k-2}) + \gamma_k \mathbf{F}_M^{k-1} + \zeta_k \mathbf{F}_M^{k-2} \\ &+ \alpha_k \mathcal{L}(\mathbf{u}^{k-1}) - (\alpha_k + \beta_k) \nabla p^{k-1}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

où α , β , γ et ζ sont des coefficients employés dans le schéma d'avancement temporel de la solution RK3/CN (Calmet, 1995). $\hat{\mathbf{u}}$ désigne l'approximation intermédiaire de la vitesse du fluide. Les opérateurs \mathcal{N} et \mathcal{L} sont définis par les équations (1.4) et (1.5).

- 4b. Le champ de vitesse est complété en ajoutant le champ de forçage du dipôle \mathbf{F}_D . Ce champ de forçage est nul partout dans le fluide sauf dans les particules où $\mathbf{F}_{D,i} = G_{ij}^{(n)} \cdot \frac{\partial \Delta'}{\partial x_j}$ où $\Delta'(\mathbf{x} - \mathbf{Y}^{(n)}(t))$ est l'enveloppe gaussienne du dipôle de la particule n . L'estimation initiale de \mathbf{F}_D est appelée \mathbf{F}_D^∞ . \mathbf{F}_D^∞ est nulle à l'instant initial, égale à \mathbf{F}_D^{k-1} à chaque sous-pas de temps et à $\mathbf{F}_D^{(m-1)}$ pour $k = 0$ à $t = t^m$.

Un potentiel auxiliaire (éq. (1.28)) est également ajouté afin de satisfaire la condition de divergence nulle du champ de vitesse total \mathbf{u}^k . Contrairement au schéma initial de l'écoulement monophasique, la condition de divergence nulle est satisfaite à chaque sous-pas de temps. Le complément de l'équation (1.27) est obtenu grâce au système :

$$\nabla^2 p^\infty = \nabla \cdot \mathbf{F}_D^\infty + \frac{\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}}{dt (\alpha_k + \beta_k)}, \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} (1 - \beta_k dt \mathcal{L})(\mathbf{u}^\infty - \hat{\mathbf{u}}) &= (\alpha_k + \beta_k) dt [-\nabla p^\infty + \mathbf{F}_D^\infty] \\ &+ \beta_k dt \mathcal{L}(\hat{\mathbf{u}}). \end{aligned} \quad (1.29)$$

- 4c. Une estimation de l'erreur sur la condition de rigidité est calculée à partir du tenseur des déformations ϵ_{ij} qui détermine le taux de déformation dans le volume de chacune des particules. Si la condition de rigidité au sein des particules sphériques est satisfaite ($\epsilon_{ij}(\mathbf{u}^\infty) \approx 0$) au sous-pas de temps k , alors le champ de vitesse est bien $u^k = u^\infty$. Si ce n'est pas le cas, un champ partiel correctif \mathbf{u}^p est cherché, de telle façon que :

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^\infty + \mathbf{u}^p$$

satisfasse les deux conditions de divergence nulle et de rigidité des particules. \mathbf{u}^∞ et \mathbf{u}^p correspondent respectivement à \mathbf{F}_D^∞ et \mathbf{F}_D^p .

- 4d. Pour une valeur donnée de \mathbf{F}_D^p , le champ de vitesses \mathbf{u}^p correspondant est calculé grâce au système d'équations (1.30) :

$$\begin{aligned} \nabla^2 p^p &= \nabla^2 \cdot \mathbf{F}_D^p \\ (1 - \beta_k dt \mathcal{L})(\mathbf{u}^p) &= (\alpha_k + \beta_k) dt [-\nabla p^p + \mathbf{F}_D^p] \end{aligned} \quad (1.30)$$

Grâce à la linéarité du système d'équations (1.30), \mathbf{F}_D^p est calculée itérativement à l'aide de la méthode du Gradient Conjugué (pour plus de détails, se référer à l'annexe (1)). La recherche de \mathbf{F}_D^p converge quand la condition de rigidité des particules $\epsilon_{ij}(\mathbf{u}^k) = \epsilon_{ij}(\mathbf{u}^\infty) + \epsilon_{ij}(\mathbf{u}^p) \approx 0$ est satisfaite, et donc quand $\epsilon_{ij}(\mathbf{u}^p) = -\epsilon_{ij}(\mathbf{u}^\infty)$.

- 4e. Quand l'algorithme itératif converge vers la bonne valeur de \mathbf{F}_D^p , le forçage total du dipôle est $\mathbf{F}_D^k = \mathbf{F}_D^\infty + \mathbf{F}_D^p$. Le champ de vitesse complet est alors déterminé en utilisant les équations complémentaires du champ de vitesse intermédiaire (éq. (1.27)) :

$$\begin{aligned} \nabla^2 p^* &= \nabla \cdot \mathbf{F}_D^k + \frac{\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}}{dt(\alpha_k + \beta_k)} \\ (1 - \beta_k dt \mathcal{L})(\mathbf{u}^k - \hat{\mathbf{u}}) &= (\alpha_k + \beta_k) dt [-\nabla p^* + \mathbf{F}_D^k] \\ &\quad + \beta_k dt \mathcal{L}(\hat{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (1.31)$$

Le champ de pression au sous-pas de temps k est désormais :

$$p^k = p^{k-1} + p^*$$

3.3 Force de répulsion interparticulaire

Comme le développement multipolaire employé dans la FCM se restreint à l'ordre 2, les forces de lubrification qui agissent lorsqu'une particule rencontre un obstacle (autre particule ou paroi) ne sont pas prises en compte complètement. Le maillage étant de toute façon trop lâche pour pouvoir capter ce genre d'interaction, l'écoulement proche de la surface de la particule n'est tout au plus résolu que grossièrement. Le principal problème susceptible de survenir est le recouvrement partiel ou total du volume des particules. Ainsi pour éviter tout chevauchement entre une particule α et une autre β , une force de répulsion est ajoutée au monopôle (par l'intermédiaire de \mathbf{F}_{ext} dans l'équation (1.18)) suivant Dance *et al.* (2004) et Abbas *et al.* (2006) :

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = -\frac{F_{\text{ref}}}{2a} \left[\frac{R_{\text{ref}}^2 - r_{\alpha\beta}^2}{R_{\text{ref}}^2 - 4a^2} \right]^2 \mathbf{r}_{\alpha\beta}. \quad (1.32)$$

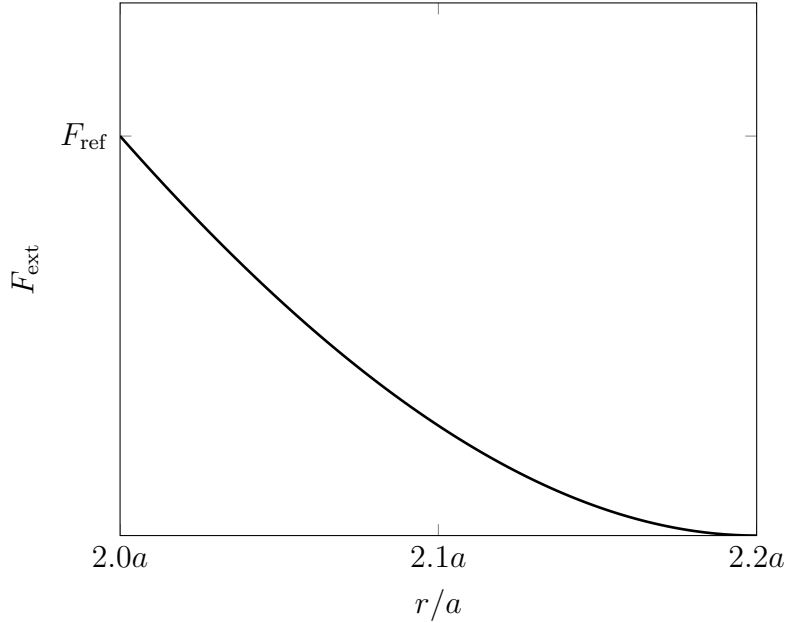


FIGURE 1.3: F_{ext} en fonction de la distance centre-à-centre des deux particules α et β . Lorsque deux particules sont sur le point de rentrer en collision, une force intervient pour les repousser. Une fois la barrière franchie, la force augmente lentement jusqu'à atteindre un maximum au contact des deux interfaces particulaires. La barrière à partir de laquelle la force commence à s'appliquer est située à $R_{\text{ref}} = 2.2a$ à partir du centre de la particule qui sert de référence.

Dans le cas où la trajectoire d'une particule α tend à venir chevaucher une paroi indiquée w , la force de répulsion, portée par le vecteur unitaire \vec{e}_y normal à la paroi, est modifiée telle que :

$$\vec{F}_{\text{ext},w} = -\frac{F_{\text{ref}}}{a} \left[\frac{\frac{1}{4}R_{\text{ref}}^2 - r_{\alpha w}^2}{\frac{1}{4}R_{\text{ref}}^2 - a^2} \right]^2 r_{\alpha w} \cdot \vec{e}_y. \quad (1.33)$$

In fine, le but de cette force est de retranscrire artificiellement le mouvement relatif qu'aurait ces deux particules après leur *collision*. Le fait que les particules soient non-inertielles implique obligatoirement la présence d'un film fluide de lubrification dans l'espace séparant les surfaces des deux particules lorsqu'elles sont proches l'une de l'autre. Toutefois en pratique, les particules – même non-chargées – vont interagir entre-elles à très courte portée ($r < 10^{-2}a$) par le biais de forces de type DLVO (compétition entre la force de Van der Waals attractive et la double couche électrique répulsive). Sous l'influence de ces forces, ce film de lubrification peut donc se rompre à la faveur d'un contact (voire d'une adhésion), et également mener à une asymétrie amont-aval des trajectoires relatives des particules si les surfaces

en contact sont rugueuses (processus irréversible même à $Re_p = 0$). Dans notre cas (pas de force de Van der Waals), une *barrière de répulsion* de rayon R_{ref} est établie autour de chaque particule afin de modéliser l'effet du film de lubrification. Quand la barrière d'une particule est pénétrée par le centre d'une autre particule, la force de répulsion intervient pour les repousser.

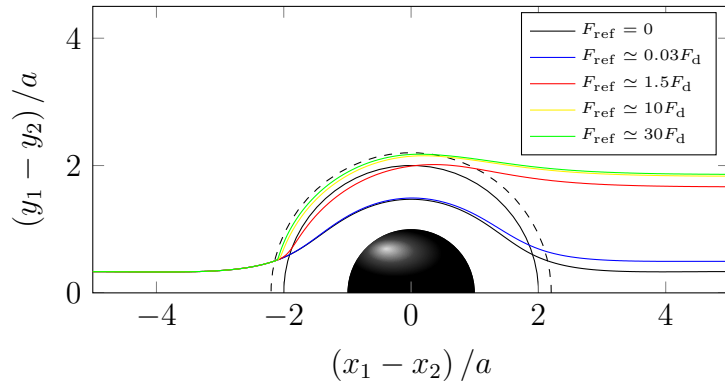


FIGURE 1.4: Trajectoires du centre d'une particule par rapport à une particule de référence matérialisée par un cercle noir de rayon a . Les deux demi-cercles concentriques, respectivement de rayons $2a$ et $R_{ref} = 2.2a$, représentent la limite à partir de laquelle les deux particules commencent à se recouvrir (—), et la distance à partir de laquelle la force répulsive commence à agir (- - -). Dans un écoulement purement cisailé à $Re_p = 9 \times 10^{-4}$, les particules sont initialement espacées de $\Delta x/a = 5$ et $\Delta y/a = 1/3$.

L'expression de la force de répulsion fait intervenir le paramètre F_{ref} qu'il convient de choisir correctement en fonction du nombre de Reynolds particulaire $Re_p = \gamma a^2/\nu$, de l'épaisseur de la barrière répulsive, de leur angle d'approche, *etc.* Pris trop faible, le recouvrement sera possible (ce que l'on cherche à éviter), pris trop fort, les interactions entre les particules risquent de ne plus être physiques (l'énergie cinétique de chaque particule est substantiellement augmentée lors de la rencontre). Des tests ont été menés en écoulement cisailé pur pour un nombre de Reynolds particulaire très faible ($Re_p = 9 \times 10^{-4}$). La trajectoire d'une particule située initialement en amont d'une particule dite de référence a été calculée pour différentes valeurs de F_{ref} (figure 1.4). Pour que ce rapprochement entre les deux particules se produise jusqu'à un éventuel recouvrement, il faut qu'il y ait initialement un écart de position sur l'axe porté par le cisaillement. Cet écart a été fixé à $\Delta y/a = 1/3$. L'ordre de grandeur de F_{ref} est donné par la force de traînée F_d appliquée sur

deux particules en rapprochement dans un écoulement cisailé :

$$F_{\text{ref}} \cong F_d = 6\pi\mu a\gamma 2a, \quad (1.34)$$

où γ est le taux de cisaillement, a le rayon de la particule et μ la viscosité du fluide. La figure 1.4 montre les résultats de nos tests pour une large gamme de F_{ref} . Le choix approprié d'une force de répulsion permet d'empêcher le recouvrement observé pour $F_{\text{ref}} = 0$. Cependant, elle rompt la symétrie amont-aval des trajectoires relatives. Pour $F_{\text{ref}} \simeq 0.03F_d$ (—) et $F_{\text{ref}} \simeq 1.5F_d$ (—), la force de répulsion est insuffisante pour garantir le non-recouvrement des particules. Avec des valeurs de $30F_d$ (—) et de $10F_d$ (—) choisies pour F_{ref} , les trajectoires obtenues montrent que les particules s'évitent mutuellement sans induire d'impact significatif sur la trajectoire relative des deux particules. Ce dernier point suggère que même avec une gamme de F_{ref} aussi étendue de $[10F_d - 30F_d]$, la sensibilité des résultats n'est que faiblement affectée.

4 Validation de la FCM à Re_p fini

La FCM est une méthode de résolution d'écoulement de suspension apparue il y a une quinzaine d'années (Maxey et Patel, 2001). Initialement conçue pour résoudre des écoulements où les particules sont représentées par des sources localisées de moment dans la limite des nombres de Reynolds particulières négligeables. Nombres de travaux ont depuis validé son modèle en conditions de Stokes, dont parmi eux ceux de Maxey et Patel (2001), Lomholt *et al.* (2002) et Lomholt et Maxey (2003). Climent et Maxey (2003) ont utilisé la FCM et validé le comportement du monopôle de force pour des particules en situation de sédimentation à Re_p finis dans un écoulement pleinement turbulent.

La méthode est validée dans des situations fondamentales, représentatives pour le cas d'écoulements inertiels chargés en particules non-pesantes de taille finie par rapport à la taille du canal. Pour une particule non-pesante, le monopôle relatif aux particules se restreint à la seule force de répulsion inter-particulaire, et la dynamique est principalement contrôlée par le dipôle qui apparaît en réponse au cisaillement local. La FCM est alors validée dans le cas d'une particule en suspension dans un écoulement cisailé simple à un nombre de Reynolds particulaire fini. Par ailleurs, la méthode est validée dans la situation où le cisaillement est non uniforme à l'échelle de la particule (effet Segré-Silberberg) en considérant le cas de migration inertielle d'une particule dans un écoulement de Poiseuille (voir 2.4.1.2).

4.1 Particule isolée dans un écoulement cisailé pur

La perturbation de vitesse engendrée par une particule dans un écoulement cisailé en régime de Stokes est décrite par une solution analytique (Batchelor et Green, 1972). Quand le nombre de Reynolds augmente et que les effets inertiels se font sentir, le comportement devient plus complexe, si bien que la plupart des travaux menés jusque là concentrent leurs analyses uniquement sur des écoulements à $Re_p \ll 1$, où les développements asymptotiques peuvent encore être utilisées. Dans le but de compléter ces études théoriques, des études analytiques (Lin *et al.*, 1970), expérimentales (Poe et Acrivos, 1975) et numériques (Nirschl *et al.*, 1995) ont été entreprises. Mikulencak et Morris (2004) ont évalué les effets d'une sphère non-pesante sur un écoulement cisailé simple pour des nombres de Reynolds particuliers $Re_p = \gamma a^2 / \nu$ compris entre 0 et 10. Les résultats de leurs simulations numériques directes portent à la fois sur les contraintes générées par la particule ainsi que sur sa rotation propre dans le fluide. Nous nous sommes fondés sur leurs résultats pour valider l'usage de la FCM dans ce travail.

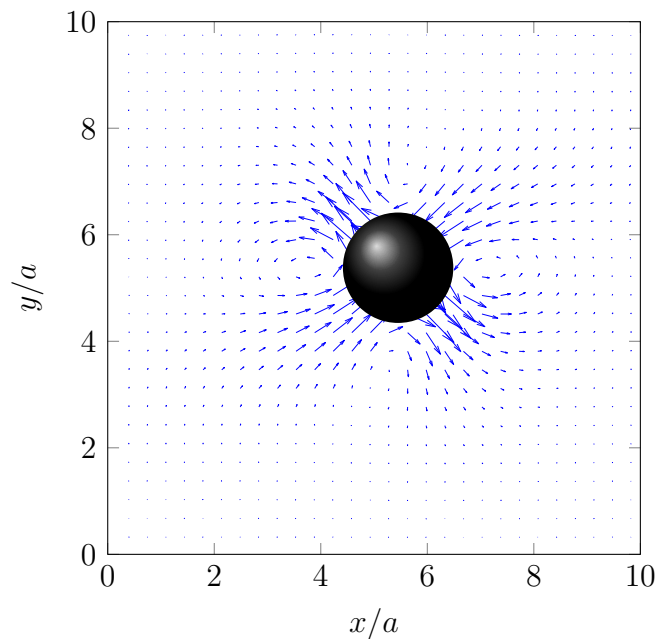


FIGURE 1.5: Représentation du champ des perturbations de vitesse ($\vec{u}' + \vec{v}'$) dans un plan (xy) traversant la particule. Mise en évidence de la perturbation induite par la particule lorsqu'elle est placée en présence d'un cisaillement.

Une particule isolée non-pesante est placée dans un écoulement cisailé. Le cisaillement est entretenu grâce à deux parois en translation à la même vitesse mais dans des sens opposés. L'écoulement est périodique dans les di-

rections de l'écoulement et de la vorticité. La condition de non-glissement est impos e sur les parois. Plusieurs nombres de Reynolds particuli es compris entre 0.02 et 10 sont consid er es. Pour $Re_p > 1$, la taille du domaine est $(10.7a)^3$, alors que pour $Re_p \leq 1$ les dimensions sont $(21a)^3$, dans le but de minimiser l'influence des parois et des conditions périodiques sur le champ de vitesse perturbé par la présence de la particule. Le maillage est régulier (six mailles par diamètre de particule).

4.1.1 Contraintes

Afin de valider le modèle FCM dans des conditions inertielles (*i.e.* hors du régime de Stokes), nous avons calcul e les termes du tenseur de Stresslet, et les avons compar es aux résultats des simulations numériques directes de Mikulencak et Morris (2004). Les valeurs des différentes composantes obtenues après convergence temporelle et adimensionnées par $\mu\gamma a^3$, sont reportées en la figure 1.6. Les valeurs calculées par la FCM montrent un très bon accord avec celles issues de la DNS jusqu'à $Re_p = O(10)$. Au delà, les différents termes du Stresslet commencent à dévier de ceux issus de la DNS de manière notable, indiquant que la limite de la méthode employée ici est atteinte.

Quand le nombre de Reynolds particulaire augmente, on observe dans la figure 1.6 une forte déviation de la composante de cisaillement du tenseur de Stresslet par rapport à sa valeur dans un écoulement de Stokes G_{12}^0 égale à $10\pi/3$ dans ces conditions. L'amplitude des différences de Stresslets normaux $N_1 = G_{11} - G_{22}$ et $N_2 = G_{22} - G_{33}$ croît en même temps que Re_p , ce qui dénote un comportement non-newtonien de la suspension lorsque l'inertie du fluide est considérée.

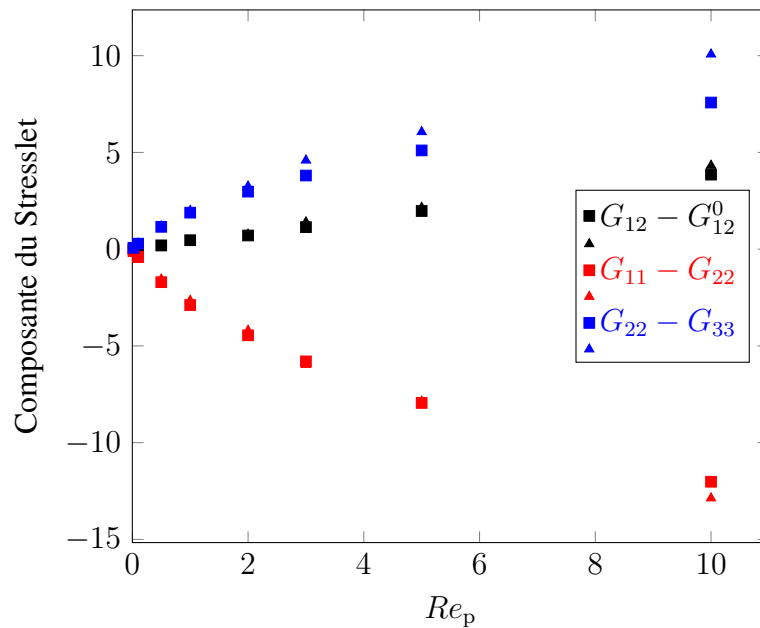


FIGURE 1.6: Composantes du Stresslet adimensionnalisées par $\mu\gamma a^3$ en fonction de Re_p . En noir, déviation de la composante non-diagonale de cisaillement G_{12} par rapport à sa valeur à $Re_p = 0$. En rouge et bleu sont représentées les différences de contraintes normales. Les symboles (\square et \triangle) représentent respectivement les résultats des simulations numériques directes de Mikulencak et Morris (2004) et ceux de la FCM.

4.1.2 Rotation

Une particule placée dans un écoulement cisailé simple tourne avec un taux de rotation égal à la vorticité moyenne du fluide $\Omega_0/\gamma = -1/2$ lorsque le régime est celui de Stokes ($Re_p = 0$). Une fois que Re_p n'est plus négligeable, les effets inertiels entrent en jeu et il y a un glissement entre la rotation de la particule et la rotation locale du fluide (la vitesse de rotation de la particule étant plus faible que celle du fluide).

Mikulencak et Morris (2004) ont également reporté les valeurs du glissement de rotation $\Omega - \Omega_0$, auxquels nous comparons les résultats issus de la FCM. La figure 1.7 présente cette comparaison, pour laquelle un excellent accord est constaté jusqu'à $Re_p = 5$, et une erreur croissante mais faible (écart relatif inférieur à 5% à $Re_p = 10$). Là encore, les résultats pour des valeurs supérieures de Re_p commencent à diverger de manière significative.

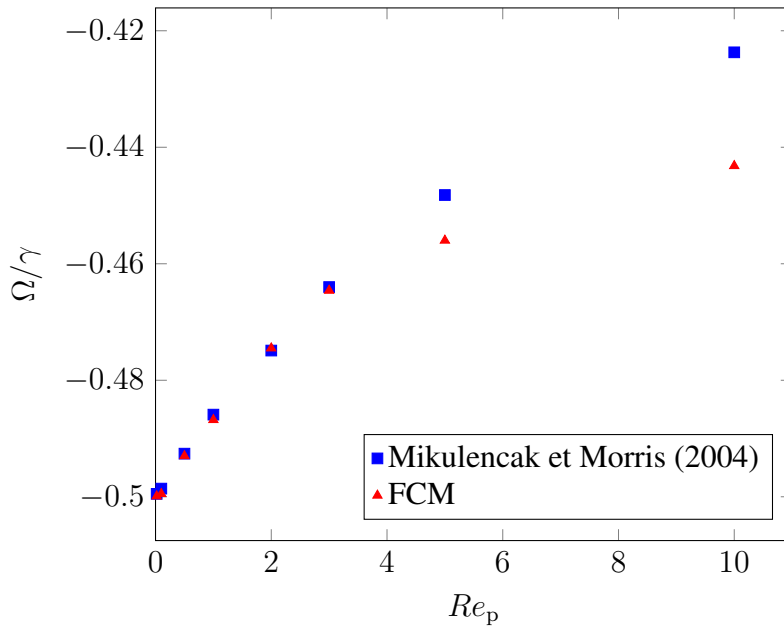


FIGURE 1.7: Taux de rotation de la particule adimensionné par le taux de cisaillement en fonction de Re_p .

5 Parallélisation et tests de performance du code avec FCM

La parallélisation des codes de simulation sur des super-calculateurs a permis à la simulation numérique de devenir un outil important pour expliquer des phénomènes physiques complexes. Le principe est le suivant : le domaine fluide est partitionné en sous-domaines égaux en nombre de mailles, à chacun desquels un processeur est dédié. La multiplication du nombre de processeurs sur le domaine a pour effet de traiter simultanément plus d'opérations afin de réduire le temps de calcul. En réalité, le temps nécessaire à chaque processeur pour accomplir une itération temporelle se décompose en deux étapes distinctes. La première étape – dite ici de calcul pur – consiste à résoudre en chaque maille du sous-domaine les équations de mouvement du fluide (couplées avec les particules dans notre cas). Ce réseau de sous-domaines étant inter-dépendant, la deuxième étape se préoccupe de communiquer aux processeurs voisins le résultat des calculs opérés à l'étape précédente. D'une manière générale, le temps d'échange entre les sous-domaines augmente avec le nombre de processeurs, tandis que le temps de calcul pur décroît. L'optimisation du calcul résulte donc d'un compromis entre ces deux effets.

Le code monophasique est parallélisé avec la librairie MPI (Message Passing Interface). Une modification de la parallélisation de base a été effectuée afin de bien prendre en compte le couplage des équations du fluide avec les particules :

- Les informations relatives aux positions et vitesses des particules sont connues et échangées par tous les processeurs à chaque sous-pas de temps.
- En fonction de la position de la particule, les informations relatives aux enveloppes gaussiennes et aux termes de forçage sont calculées par le processeur qui contient la particule considérée. Pour cela, un échange entre les processeurs voisins est effectué afin de compléter les informations (vitesses et gradients de l'écoulement) nécessaires au calcul du forçage relatif à chaque particule.

Afin de minimiser le temps consacré par la suite à chaque simulation, et d'exploiter au mieux les ressources informatiques à notre disposition, une série de tests courts sur des calculs en parallèle est entreprise sur un cas monophasique (sans particules) utilisant l'algorithme incluant la FCM. Une série similaire de tests est entreprise également avec une concentration volumique de 5% correspondant à 3107 particules dans l'écoulement. Chacun des tests constitutifs de ces séries est effectué sur une itération temporelle explicite avec le solveur spectral de Fourier. Les résultats regroupés dans le diagramme 1.8a, ont été obtenus sur les machines HYPERION⁴ du centre régional CALMIP (Calcul en Midi-Pyrénées) et ADA⁵ du centre national de calcul IDRIS. Le projet a consommé environ 2 500 000 heures de calcul.

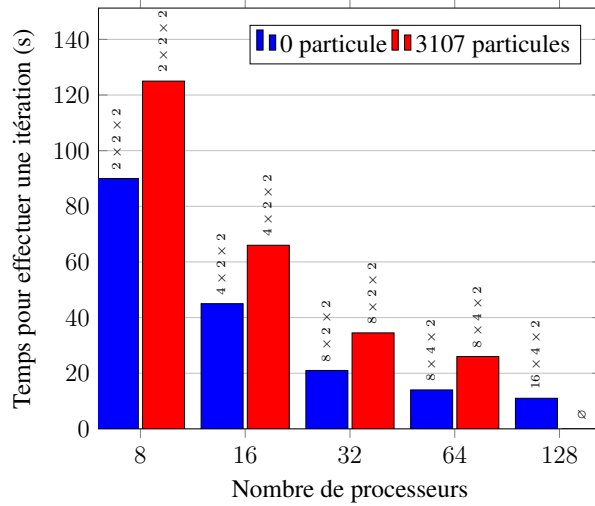
La figure 1.8b illustre l'évolution du *speed up* (c'est-à-dire du gain de temps obtenu grâce à la parallélisation) en fonction du nombre de processeurs. La référence étant fixée à 8 processeurs (*speed up* égal à 1), on observe petit à petit une baisse de l'évolution du *speed up* à partir de 32 processeurs par rapport au gain théorique attendu. Pour les simulations d'écoulements diphasiques qui utiliseront le domaine de dimensions $\pi H \times 2 \times 2.5\pi$ comptant $320 \times 100 \times 258$ mailles⁶, nous choisissons de mobiliser 64 processeurs permettant d'effectuer chaque itération temporelle sur une durée acceptable de 25 secondes (3107 particules soit $\phi = 5\%$). Dans ces conditions, avec un pas

⁴Cluster SGITM Altix Ice 8200, équipé de 368 nœuds disposant de deux processeurs quad-core Nehalem EX cadencés à 2,8 Ghz avec 8 Mo de cache par processeur, et 36 Go de RAM.

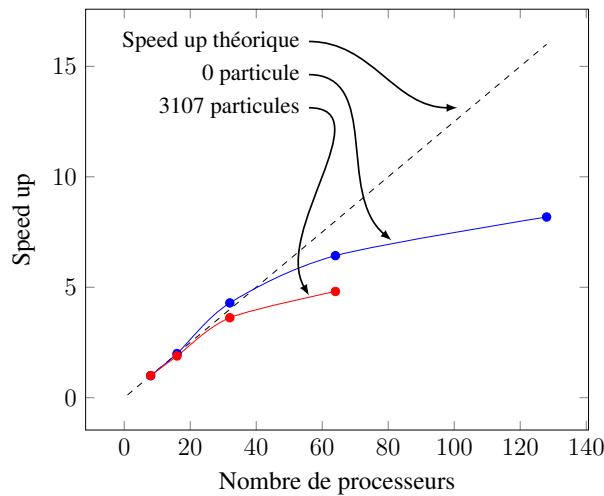
⁵Cluster IBMTM, équipé de 332 nœuds x3750-M4, quadri-processeurs IntelTM Sandy Bridge 8-cœurs à 2.7 GHz.

⁶Domaine qui sera utilisé pour simuler les écoulements diphasiques en régime de transition laminaire-turbulent (voir chapitre 3).

de temps de 1×10^{-2} et pour un temps physique de simulation équivalent à $1000H/\langle U \rangle$, soit 1×10^5 itérations, une simulation doit tourner sans discontinuer pendant environ 28 jours.



(a)



(b)

FIGURE 1.8: (a) : Évolution du temps pour effectuer une itération temporelle en fonction du nombre de processeurs, de leur partitionnement en fonction des trois directions spatiales, et du nombre de particules dans le domaine. Tests réalisés sur le super-calculateur HYPERION avec le solveur de Fourier explicite sur un domaine comprenant $398 \times 98 \times 256$ mailles. (b) : Évolution du gain (*speed up*) en fonction du nombre de processeurs par rapport au gain théorique attendu (traits en pointillés). Plus le système traite de particules, plus le temps de calcul augmente et le *speed up* diminue.

Bibliographie

- ABBAS, M., CLIMENT, E. et SIMONIN, O. (2006). Dynamics of bidisperse suspensions under Stokes flows : Linear shear flow and sedimentation. *Phys. Fluids*, 18.
- BATCHELOR, G. K. et GREEN, J. T. (1972). The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field. *J. Fluid Mech.*, 56:375–400.
- BRADY, J. F., PHILLIPS, R. J., LESTER, J. C. et BOSSIS, G. (1988). Dynamic simulation of hydrodynamically interacting suspensions. *J. Fluid Mech.*, 195:257–280.
- CALMET, I. (1995). *Analyse par simulation des grandes échelles des mouvements turbulents et du transfert de masse sous une interface plane*. Thèse de doctorat, INP Toulouse.
- CALMET, I. et MAGNAUDET, J. (1997). Large-eddy simulation of high-Schmidt number mass transfer in a turbulent channel flow. *Phys. Fluids*, 9:438–455.
- CANUTO, C. (1988). *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer-Verlag.
- CHUN, B. et LADD, A. J. C. (2006). Inertial migration of neutrally buoyant particles in a square duct : an investigation of multiple equilibrium positions. *Phys. Fluids*, 18:031704.
- CLIMENT, E. et MAXEY, M. R. (2003). Numerical simulations of random suspensions at finite Reynolds numbers. *Int. J. Multiphase Flow*, 29:579–601.
- CLIMENT, E. et MAXEY, M. R. (2009). *The Force Coupling Method : a flexible approach for the simulation of particulate flows*. Theoretical Methods for Micro Scale Viscous Flows, F. Feuillebois & A. Sellier.
- DANCE, S., CLIMENT, E. et MAXEY, M. R. (2004). Collision barrier effects on the bulk flow in a random suspension. *Phys. Fluids*, 16:828–831.
- DANCE, S. et MAXEY, M. R. (2003). Incorporation of lubrication effects into the force coupling method for particulate two-phase flow. *J. Comp. Phys.*, 189:212.
- GARCIA-VILLALBA, M., KIDANEMARIA, A. et UHLMANN, M. (2012). DNS of vertical plane channel flow with finite-size particles : Voronoi analysis,

acceleration statistics and particle-conditioned averaging. *Int. J. Multiphase Flow*, 46:54–74.

GLOWINSKI, R., PAN, T.-W., HESLA, T. I., JOSEPH, D. D. et PERIAUX, J. (1999). A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *Int. J. Multiphase Flow*, 25:755–794.

JASBERG, A., KOPONEN, A., KATAJA, M. et TIMONEN, J. (2000). Hydrodynamical forces acting on particles in a two-dimensional flow near a solid wall. *Comput. Phys. Comm.*, 129:196–206.

LADD, A. J. C. (1989). Hydrodynamic interactions and the viscosity of suspensions of freely moving spheres. *J. Chem. Phys.*, 90:1149–1158.

LE, H. et MOIN, P. (1991). An improvement of fractional step methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 92:369–379.

LIN, C. J., PEERY, J. H. et SCHOWALTER, W. R. (1970). Simple shear flow around a rigid sphere : inertial effects and suspension rheology. *J. Fluid Mech.*, 44:1–17.

LIU, D. (2000). *Spectral Element/Force-Coupling Method : Application to colloidal micro-devices and self-assembled particle structures in 3D domains*. Thèse de doctorat, Brown University.

LOMHOLT, S. et MAXEY, M. R. (2003). Force-coupling method for particulate two-phase flow : Stokes flow. *J. Comp. Phys.*, 27:381–405.

LOMHOLT, S., STENUM, B. et MAXEY, M. R. (2002). Experimental verification of the force coupling method for particulate flows. *Int. J. Multiphase Flow*, 28:225–246.

MAGNAUDET, J., RIVERO, M. et FABRE, J. (1995). Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. part 1. steady straining flow. *J. Fluid Mech.*, 284:97–135.

MAXEY, M. R. et PATEL, B. K. (2001). Localized force representations for particles sedimenting in Stokes flows. *Int. J. Multiphase Flow*, 27:1603–1626.

MIKULENCAK, D. R. et MORRIS, J. F. (2004). Stationary shear flow around fixed and free bodies at finite Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 520:215–242.

-
- NIRSCHL, H., DWYER, H. A. et DENK, V. (1995). Three-dimensional calculations of the simple shear flow around a single particle between two moving walls. *J. Fluid Mech.*, 283:273–285.
- ORSZAG, S. A. (1971). Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. *J. Fluid Mech.*, 50:689–703.
- PESKIN, C. S. (1972). *Flow patterns around heart valves : a digital computer method for solving the equations of motion*. Thèse de doctorat, Albert Einstein Coll. Med.
- POE, G. et ACRIVOS, A. (1975). Closed streamline flows past rotating single spheres and cylinders : inertia effects. *J. Fluid Mech.*, 72:605–623.
- POZRIKIDIS, C. (1992). *Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow*. Cambridge University Press.
- RANDRIANARIVELO, T. N., PIANET, G., VINCENT, S. et CALTAGIRONE, J. P. (2005). Numerical modelling of the solid particle motion using a new penalty method. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 47:1245–1251.
- SHAO, X., WU, T. et YU, Z. (2012). Fully resolved numerical simulation of particle-laden turbulent flow in a horizontal channel at a low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 693:319–344.
- SIEROU, A. et BRADY, F. F. (2001). Accelerated Stokesian Dynamics simulations. *J. Fluid Mech.*, 448:115–146.
- TEN CATE, A., DERKSEN, J. J., PORTELA, L. M. et AKKER, H. E. A. V. D. (2004). Fully resolved simulations of colliding monodisperse spheres in forced isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 519:233–271.
- UHLMANN, M. (2008). Interface-resolved direct numerical simulation of vertical particulate channel flow in the turbulent regime. *Phys. Fluids*, 20:053305.
- YEO, K., DONG, S., CLIMENT, E. et MAXEY, M. R. (2010). Modulation of homogeneous turbulence seeded with finite size bubbles or particles. *Int. J. Multiphase Flow*, 36:221–233.
- YEO, K. et MAXEY, M. R. (2010). Dynamics of concentrated suspensions of non-colloidal particles in Couette flow. *J. Fluid Mech.*, 649:205–231.
- YEO, K. et MAXEY, M. R. (2013). Dynamics and rheology of concentrated, finite-Reynolds-number suspensions in a homogeneous shear flow. *Phys. Fluids*, 25:1–24.

- YU, Z. et SHAO, X. (2010). Direct numerical simulation of particulate flows with a fictitious domain method. *Int. J. Multiphase Flow*, 36:127–134.
- ZENG, L., NAJJAR, F., BALACHANDAR, S. et FISCHER, P. (2009). Forces on a finite-sized located close to a wall in a linear shear flow. *J. Comp. Phys.*, 210:292–324.
- ZHANG, Z. et PROSPERETTI, A. (2005). A second-order method for three dimensional particle simulation. *Phys. Fluids*, 21:033302.

Suspensions en écoulements laminaires à nombre de Reynolds particulaire fini

2

Sommaire

1	Introduction	50
2	Perturbations induites par les particules	52
2.1	Tenseur des contraintes	53
2.2	Viscosité de suspension	54
3	Propriétés des écoulements de suspensions homogènes en régime inertiel	55
3.1	Paramètres des écoulements et grandeurs moyennes	57
3.2	Écoulement de Couette plan	59
3.3	Écoulement de Poiseuille	63
4	Dynamique d'un écoulement laminaire de suspension en canal plan	68
4.1	Migration inertielle d'une particule isolée	69
4.2	Effet de la migration inertielle sur le transport de suspensions	73
5	Conclusion	81

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions le comportement d'une suspension de particules non-pesantes et non-browniennes dans un écoulement laminaire en canal, à nombre de Reynolds particulaire fini et pour une fraction volumique en particules modérée ($\phi \leq 5\%$). Les interactions particule-écoulement laminaire ont déjà fait l'objet de nombreux travaux théoriques, expérimentaux et numériques, du cas de la particule isolée à celui de la suspension très concentrée. D'une part, les particules contribuent à l'augmentation des contraintes effectives de la suspension, et d'autre part, les interactions hydrodynamiques avec le fluide peuvent conduire à générer des vitesses de glissement et de migration latérale par rapport à l'écoulement local. L'occurrence de la migration dans un écoulement confiné implique alors le développement de gradients locaux de concentration et modifie les propriétés de transport de la suspension. Dans la suspension, les effets conjoints de l'inertie de l'écoulement et de la concentration, modifient les interactions fluide-particule en milieu homogène (rhéologie) et en présence d'un gradient de concentration local (migration, glissement, agitation).

L'effet de l'inertie sur la migration latérale des particules en écoulement de Poiseuille en conduite, a été démontré par les expériences de Segré et Silberberg (1962). En régime stationnaire, les particules occupent une position d'équilibre autour de $0.62R$ (où R est le rayon de la conduite), qui tend à se déplacer vers la paroi lorsque le nombre de Reynolds d'écoulement augmente. Ces résultats sont en accord avec les approches théoriques de Ho et Leal (1974) et Vasseur et Cox (1976), puis de Schonberg et Hinch (1989), et Asmolov (1999) en canal plan. Plus récemment, l'étude expérimentale de Matas *et al.* (2004) dans des plages de $Re_p = O(1 - 10)$, a mis en évidence des mécanismes plus complexes, avec l'existence, à des nombres de Reynolds intermédiaires, d'une deuxième position d'équilibre des particules plus près de l'axe de la conduite, ainsi que le développement d'une organisation spatiale des particules (trains de billes dans la direction de l'écoulement), qui dépend également du Re_p et de la concentration. $Re_p = \gamma a^2/\nu$ est construit sur le cisaillement subit par la particule, le rayon de la particule et la viscosité du fluide. L'étude numérique de Shao *et al.* (2008) reproduit ces tendances expérimentales, et celle de Chun et Ladd (2006), démontre également l'existence de plusieurs positions d'équilibre des particules dans une conduite de section carrée. Matas *et al.* (2009) ont ensuite expliqué, à l'aide d'un développement théorique en géométrie cylindrique, les différences observées sur les positions d'équilibre et les forces de portance responsables de la migration des particules, entre les géométries en canal plan et en conduite. Des résultats théoriques dans des inclusions fluides (bulles

et gouttes sphériques) et plus générales (écoulement visqueux dépendant du temps), permettent de quantifier les différents mécanismes responsables de la migration des particules vers la paroi et de la répulsion hydrodynamique de la paroi, dans la limite de faible Re_p (Magnaudet, 2003).

En milieu concentré, l'effet de l'agitation induite par le cisaillement (Drazer *et al.*, 2004) entraîne une migration vers l'axe de l'écoulement en conduite, clairement démontrée par les simulations de dynamique stokesienne à faible nombre de Reynolds de Nott et Brady (1994), puis par les expériences de Lyon et Leal (1998) en canal rectangulaire. Ainsi, le mécanisme de diffusion provoquée par le cisaillement tend à s'opposer à l'effet de migration induit par la portance dans les suspensions concentrées en écoulement de Poiseuille, donnant lieu à des concentrations préférentielles près de la paroi et du centre pour des nombres de Reynolds particuliers finis (Han *et al.*, 1999).

Les propriétés de transport d'une suspension, ou de manière équivalente, sa rhéologie, ont fait l'objet de très nombreux travaux depuis le début du XX^{ème} siècle, en commençant par ceux d'Einstein (1906, puis 1911) dans la limite de suspensions diluées de particules en régime de Stokes ($Re_p = 0$). En milieu modérément concentré et toujours à $Re_p = 0$, Batchelor et Green (1972), et Batchelor (1977) ont calculé la contribution en $O(\phi^2)$ pour des suspensions en écoulement élongationnel et cisailé simple pour des suspensions browniennes. L'effet du nombre de Reynolds particulaire (et donc de l'inertie) sur l'augmentation de la contrainte particulaire (donc de la viscosité effective) pour une particule isolée ou en milieu très dilué, varie comme $Re_p^{3/2}$ (Lin *et al.*, 1970; Mikulencak et Morris, 2004; Subramanian *et al.*, 2011).

En milieu très concentré, les lois empiriques communément admises de la viscosité effective de cisaillement d'Eilers (1941) ou de Krieger et Dougherty (1959), dans le cas de suspensions de particules mono-disperses et non-browniennes (mais à $Re_p = 0$), ont été validées par les méthodes de dynamique stokesienne (à $Re_p = 0$) de Brady *et al.* (1988a) et les simulations numériques de Yeo et Maxey (2010) par la méthode FCM étendue à l'étude du régime dense. Récemment, l'effet de l'inertie en milieu concentré sur la rhéologie de la suspension a été caractérisé par Kulkarni et Morris (2008b) par LBM (Lattice-Boltzmann sur réseau) et par FCM avec une prise en compte améliorée de la lubrification entre particules (Yeo et Maxey, 2013).

D'autre part, l'effet de l'inertie et de la concentration induisent un comportement non-newtonien de la suspension, qui se traduit par des différences de contraintes particulières normales non-nulles. La première différence des contraintes normales ($N_1 = G_{11} - G_{22}$) est toujours négative et augmente avec la concentration et l'inertie (Re_p). La deuxième différence de contraintes normales ($N_2 = G_{22} - G_{33}$) est positive à faible concentration en particules et devient négative lorsque la concentration augmente. Pour une concentration donnée, l'augmentation du Re_p tend à augmenter N_2 , pouvant la faire changer de signe (Kulkarni et Morris, 2008b; Yeo et Maxey, 2013). À faible concentration ($\phi < 5\%$) et pour $Re_p \geq 1$, N_2 sera positive.

Notre étude se situe dans le cadre de ces travaux, visant à évaluer l'effet de l'inertie sur la structure et les propriétés de transport d'une suspension en écoulement laminaire en canal. Dans ce but, nous avons entrepris deux types de simulations d'écoulements. Le premier, que l'on qualifiera de *statique* ou d'homogène, consiste à examiner la rhéologie d'une suspension volontairement maintenue homogène dans le temps, à l'intérieur d'un écoulement de Couette plan et d'un écoulement de Poiseuille plan. L'étude comparative de ces deux écoulements permet d'obtenir l'influence de la forme du profil de vitesse (linéaire ou quadratique) sur les contraintes induites par la présence des particules et leur vitesse de glissement par rapport à l'écoulement non perturbé. Le second type de simulations, qualifié de *dynamique*, étudie l'écoulement de Poiseuille d'une suspension aux temps longs et sur un plus grand domaine de calcul. Le comportement transitoire de la suspension peut être alors étudié. Nous considérons spécifiquement le cas de particules avec un rapport de taille ($H/d = 16$), et deux fractions volumiques de la suspension (initialement homogène) de 1% et 5%. Pour chaque concentration, deux nombres de Reynolds de canal, $O(10^{-3})$ et $O(10^3)$ sont étudiés.

2 Perturbations induites par les particules

Dans un écoulement de Stokes chargé en particules libres de tourner sur elles-mêmes et non-pesantes, le Stresslet particulaire est l'unique contribution à l'augmentation des contraintes effectives dans le mélange. Lorsque l'inertie n'est pas négligeable, une contribution supplémentaire à la contrainte particulaire est due au terme d'accélération convective dans les équations du mouvement. Ce mécanisme se manifeste par une rupture de symétrie de la perturbation du champ de vitesse autour de la particule et par la déformation des lignes de courant en aval d'une sphère en suspension dans un écoulement cisailé pur (Subramanian et Koch, 2006a,b; Kulkarni et Morris, 2008a). Tout comme le Stresslet, la contribution des contraintes de Reynolds induites par

l'agitation des particules, augmente avec le nombre de Reynolds particulaire. La conjugaison de ces deux contributions est à l'origine d'un accroissement local de la viscosité effective du mélange fluide-particules et de l'apparition de différences de contraintes normales non-nulles.

2.1 Tenseur des contraintes

La formulation générale du tenseur des contraintes effectives dans un volume V d'un écoulement de suspension a été détaillée par Batchelor (1970) :

$$\Sigma_{ij} = \underbrace{\frac{1}{V} \delta_{ij} \int_{V-\sum V_0} p dV}_{\text{Contrainte de pression}} + \underbrace{\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{Contrainte visqueuse}} + \underbrace{\Sigma_{ij}^p}_{\text{Contrainte particulaire}} . \quad (2.1)$$

Le tenseur contient la contribution moyenne sur le volume occupé par le fluide ($V - \sum V_0$) du gradient de pression, la contribution moyenne sur tout le volume V des contraintes de cisaillement du fluide porteur (supposé newtonien de viscosité μ), ainsi que le terme induit par la présence des particules (appelée contrainte particulaire). V_0 et A_0 sont respectivement le volume et la surface d'une particule. La contrainte particulaire peut être décomposée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij}^p = & \underbrace{\frac{1}{V} \sum \int_{A_0} \frac{1}{2} (\sigma_{ik} x_j + \sigma_{jk} x_i) n_k dA}_{\text{Stresslet}} - \underbrace{\frac{1}{V} \sum \int_{A_0} \frac{1}{2} \mu (u_i n_j + u_j n_i) dA}_{\text{Déformation particulaire}} \\ & + \underbrace{\frac{1}{2V} \sum \epsilon_{ijk} T_k}_{\text{Rotlet}} - \underbrace{\frac{1}{V} \sum \int_{V_0} \frac{1}{2} \rho (f'_i x_j + f'_j x_i) dV}_{\text{Interaction de paires}} \\ & - \underbrace{\frac{1}{V} \int_V \rho u'_i u'_j dV}_{\text{Contrainte de Reynolds}} . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dans l'expression (2.2), le premier terme représente la contribution localement induite par la rigidité des particules (Stresslet). La deuxième contribution apparaît dans le cas de particules déformables, tandis que le Rotlet est l'apport provenant d'un couple extérieur exercé sur la particule. Ces deux dernières contributions sont nulles dans le cas de notre étude. Le terme d'interaction de paires traduit quant à lui les effets engendrés par les collisions in-

terparticulaires sur la contrainte, dus aux fluctuations d'accélération du fluide à l'emplacement des particules :

$$f'_i = \frac{\partial u'_i}{\partial t} + u'_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + U_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_j - \overline{u'_i u'_j}). \quad (2.3)$$

Le dernier terme de (2.2) est issu des contraintes de Reynolds locales, générées par l'agitation causée par la présence des particules dans tout le volume de la suspension. Les contributions dominantes à la contrainte particulaire pour les écoulements de suspensions considérées dans cette étude ($Re_p < 10$), sont le Stresslet et la contribution des contraintes de Reynolds. Une conséquence directe de l'augmentation des contraintes induites par la présence des particules dans l'écoulement, est l'augmentation de la viscosité effective du mélange.

Cette augmentation de viscosité est due au caractère non-déformable de la surface des particules. Ceci s'oppose à la présence d'un taux de déformation local de l'écoulement provoquant localement l'apparition d'une perturbation du champ de vitesse. En écoulement de Stokes, cette perturbation résultant de la partie symétrique du dipôle de force, décroît en $1/r^2$.

2.2 Viscosité de suspension

Einstein (1906, puis 1911) a montré que dans la plage des faibles concentrations ($\phi \leq 1 - 2\%$), et pour un nombre de Reynolds particulaire nul, la variation de la viscosité effective était une fonction linéaire croissante de la concentration :

$$\frac{\mu_{\text{eff}} - \mu}{\mu} = \frac{5}{2}\phi. \quad (2.4)$$

À concentration modérée ($\phi \leq 10 - 15\%$), les calculs théoriques de Batchelor et Green (1972) et Batchelor (1977) aboutissent à une relation du type :

$$\frac{\mu_{\text{eff}} - \mu}{\mu} = \frac{5}{2}\phi + K\phi^2 + O(\phi^3). \quad (2.5)$$

Suivant les configurations d'écoulement (élongationnel ou cisailé avec mouvement brownien), le coefficient K varie de 6.2 à 7.6 (Batchelor et Green, 1972; Batchelor, 1977). Pour le cas d'une suspension non-brownienne dans un écoulement cisailé la constante K est indéterminée de fait de l'existence de trajectoires fermées lorsque les particules sont proches. Dans une suspension très concentrée ($\phi \geq 25\%$), les forces de lubrification et de contact deviennent prépondérantes (Yeo et Maxey, 2010). Des modèles semi-empiriques ont alors

été développés pour représenter la viscosité effective de suspensions concentrées de particules non-browniennes et non-inertielles, comme ceux de Eilers (1941) ou de Krieger et Dougherty (1959), couramment utilisés dans la littérature :

$$\frac{\mu_{\text{eff}} - \mu}{\mu} = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-2.5\phi_m}, \quad (2.6)$$

où ϕ_m est la concentration à l'empilement maximum, variant entre 0.62 et 0.74 suivant le caractère monodisperse ou polydisperse de la suspension.

Kulkarni et Morris (2008b) par une méthode de type Lattice-Boltzmann sur réseau (*cf.* chapitre 1 §1), puis Yeo et Maxey (2013) par une méthode FCM couplée aux effets de lubrification, ont calculé les propriétés de transport de suspensions cisillées concentrées ($0.05 < \phi < 0.5$), dans une plage relativement étendue de nombres de Reynolds particulières ($0.005 < Re_p < 2$, avec $Re_p = \gamma a^2 / \nu$), et ont pu mettre en évidence l'influence de ces deux paramètres sur la rhéologie de la suspension. La viscosité effective de cisaillement évolue de façon monotone avec la concentration à bas nombre de Reynolds suivant une loi de type Eilers ou Krieger et Dougherty, et tend à augmenter avec le nombre de Reynolds particulière. Yeo et Maxey (2013) trouvent en particulier, qu'au-delà de $Re_p > 0.1$, la contrainte particulière de cisaillement normalisée varie linéairement avec Re_p , dans une plage de concentration comprise entre 0.2 et 0.4, et non plus comme $Re_p^{3/2}$ en milieu dilué (Lin *et al.*, 1970; Mikulencak et Morris, 2004).

3 Propriétés des écoulements de suspensions homogènes en régime inertiel

Pour caractériser les propriétés macroscopiques d'une suspension homogène en canal à Reynolds fini, des simulations dites statiques ont été menées, où la position de chacune des particules de la suspension est tirée aléatoirement dans le domaine, de façon à maintenir une répartition spatiale homogène. Une redistribution aléatoire est effectuée toutes les n itérations. Ce type de simulation en écoulement laminaire permet de discriminer l'influence du Reynolds particulière sur les propriétés effectives de la suspension des effets de ségrégation dus à la migration inertielle, conduisant de fait à des gradients de concentration. Les grandeurs moyennes calculées dans ces conditions correspondent à celles d'une suspension homogène, car le nombre d'itérations choisi entre chaque tirage aléatoire est insuffisant pour que le comportement de la suspension soit altéré par la migration. Afin de s'assurer

de la convergence du calcul du dipôle pour chaque particule, la fréquence de redistribution ($1/n$) des particules dans le domaine doit être suffisamment faible pour obtenir des données stationnaires, et raisonnablement élevée pour éviter l'établissement du phénomène de migration vers les parois (voir §4.1).

Un premier test consiste à placer une particule sur l'axe d'un écoulement cisailé pur entre deux parois mobiles. Le domaine de calcul est constitué d'une boîte cubique de dimensions $(20a)^3$, la résolution du maillage est de 3 mailles par rayon de particule. La figure 2.1 présente l'évolution de la composante de Stresslet G_{12} normalisée par $\mu \gamma a^3$, en fonction du temps adimensionnel $t^* = t\nu/a^2$ (ou de manière équivalente $t \gamma Re_p^{-1}$) pour deux valeurs de Re_p (10^{-5} et 1), pour une particule placée sur l'axe d'un écoulement cisailé pur entre deux parois mobiles. On constate que les deux courbes sont superposées aux temps courts ($t^* < 1$) et s'écartent légèrement aux temps longs, pour converger vers la valeur exacte du Stresslet au Re correspondant (figure 1.6). Le temps caractéristique de diffusion de la perturbation a^2/ν dans le fluide augmente avec Re_p , donc le temps de convergence de la simulation aussi. Le nombre d'itérations nécessaires à la convergence du calcul du Stresslet varie de manière significative, de 100 pour un écoulement à $Re_p = 10^{-5}$ à 2000 pour $Re_p = 1$.

Pour l'étude du régime homogène, à cause du phénomène de migration nous avons été contraints de choisir un nombre d'itérations égal à 100, correspondant à un temps inférieur à celui nécessaire pour atteindre la convergence du dipôle. Sur le graphe de la figure 2.1, nous avons reporté les valeurs des Stresslets calculés pour les différents Re_p au bout de 100 itérations (symboles). Dans ces conditions, le calcul à $Re_p = 1$ pour une particule isolée en écoulement cisailé, conduit à une très légère surestimation du dipôle (de l'ordre de 1%), tandis que l'écart à la convergence est négligeable pour $Re_p = 10^{-5}$. Même si la configuration d'un écoulement de suspension aléatoire est très différente, en raison des interactions hydrodynamiques entre particules et les interactions avec la paroi, ces résultats tendent à montrer que le nombre d'itérations choisi pour la fréquence de redistribution des particules dans le domaine, permet de satisfaire le critère de convergence du dipôle.

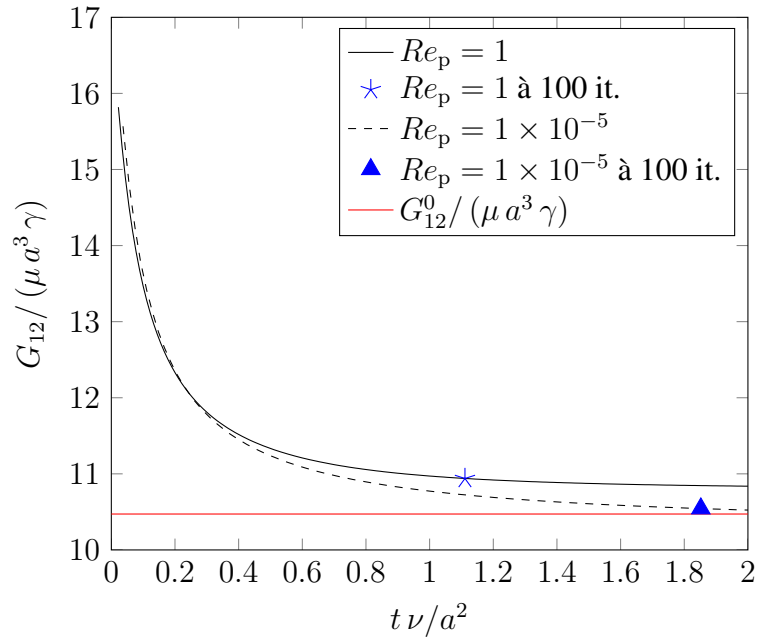


FIGURE 2.1: Évolution de la composante de cisaillement $G_{12}/(\mu \gamma a^3)$ en fonction de $t\nu/a^2$ dans un écoulement cisailé pur, à différents Re_p ($G_{12}^0 = 10\pi/3$). Deux domaines bornés de dimensions $(20a)^3$ pour les cas à $Re_p = 10^{-5}$ et $(10a)^3$ pour le cas à $Re_p = 1$ ont été utilisés. La résolution du maillage est de 3 mailles par rayon de particule. Les symboles sur les courbes (* et ▲) indiquent la valeur du Stresslet à 100 itérations.

3.1 Paramètres des écoulements et grandeurs moyennes

Les paramètres employés dans les simulations des écoulements de suspensions sont résumés dans le tableau suivant :

Cas	Configuration	Re	Re_p	Re simulation	Re_p correspondant
SC1	Couette	$\gamma H^2/\nu$	$Re(a/H)^2$	2×10^{-3}	2×10^{-6}
SC2				1000	1
SP1	Poiseuille	$\langle U \rangle H/\nu$	$3Re(a/H)^2$	1×10^{-3}	3×10^{-6}
SP2				500	1.5

TABLE 2.1: Paramètres des écoulements de suspensions simulés.

La hauteur H du canal est choisie de façon à obtenir un rapport de taille égal à $H/d = 16$, où d est le diamètre des particules. Les dimensions longitudinale et transversale du domaine (les directions homogènes) sont choisies suffisamment grandes pour que la particule n'interagisse pas avec

son image, du fait des conditions périodiques imposées dans les directions de l'écoulement x et de la vorticité z . Les dimensions du domaine sont fixées à $20a \times 32a \times 20a$. Des conditions de non-glissement sont imposées sur les parois du domaine (en $y = 0$ et $y = 32a$).

L'écoulement de Couette plan est généré par deux parois distantes de H et se déplaçant en sens opposé à la vitesse U (vitesse nulle en $H/2$). L'écoulement de Poiseuille en canal est généré en imposant un gradient de pression fixe suivant x . Pour les deux types d'écoulement, le cisaillement moyen est noté $\langle \gamma \rangle$.

Le pas de temps est de $10^{-2} \langle \gamma \rangle^{-1}$, et le nombre d'itérations est fixé à 100. Pour un écoulement de Poiseuille plan, ce nombre d'itérations correspond à un temps d'écoulement de $H/(2U_m)$ soit une distance H parcourue par la suspension sur l'axe du canal. Pour un écoulement cisailé plan, ce nombre d'itérations correspond à une distance maximale parcourue de $H/2$ de part et d'autre du plan médian (y, z) . Le rapport H/d étant de 16, la distance parcourue est représentative des interactions entre la particule et le fluide, elle l'est aussi vis à vis des interactions entre particules (respectivement 4 fois et 7 fois la distance moyenne entre particules à 1% et 5% dans un réseau cubique centré).

Deux grandeurs moyennes ont été évaluées dans ces écoulements : la contribution du Stresslet à la contrainte effective de la suspension, et la vitesse de glissement de la phase solide par rapport à l'écoulement de suspension. Afin d'obtenir le profil du Stresslet suivant la hauteur y , le domaine est divisé en sous-couches d'épaisseur constante d , correspondant à $H/d - 2 = 14$ positions y suivant la hauteur. Dans chaque sous-couche (indexée sl), la contrainte induite par la condition de rigidité des particules est calculée en sommant les N_{sl} contributions des particules présentes dans la sous-couche considérée. Afin de n'attribuer à la sous-couche sl que la contribution relative au volume de la particule n lui appartenant, la valeur du Stresslet propre à la particule est pondérée par le pourcentage de volume de la particule effectivement présent dans la sous-couche, noté $\zeta_{sl}^{(n)}$. Le profil du Stresslet est calculé suivant :

$$S_{12}^{sl} = \frac{\sum_{n=1}^{N_{sl}} \zeta_{sl}^{(n)} G_{12}^{(n)}}{V_{sl}}, \quad (2.7)$$

où V_{sl} est le volume de la couche.

L'augmentation de la viscosité locale de suspension liée au Stresslet, peut donc être déduite en divisant cette quantité par le gradient de vitesse local :

$$\frac{\mu_{\text{eff}} - \mu}{\mu} = \frac{S_{12}^{\text{sl}}}{\mu \gamma_{\text{sl}}}, \quad (2.8)$$

où γ_{sl} représente le gradient de vitesse local. La vitesse de glissement de la phase dispersée par rapport à la vitesse du fluide en écoulement est calculée suivant :

$$\mathbf{u}_s = \frac{\langle (\mathbf{u}_p - \langle \mathbf{u} \rangle) \chi_p \rangle_{x,z}}{\langle \chi_p \rangle_{x,z}} \quad (2.9)$$

\mathbf{u}_p est un champ de vitesse 3D obtenu sur le même maillage que le fluide en attribuant aux mailles contenues dans le volume de la particule sa vitesse totale $\mathbf{V}_p^{(n)} + (\mathbf{x} - \mathbf{Y}^{(n)}) \times \boldsymbol{\Omega}_p^{(n)}$. χ_p est la fonction de présence de la particule (égale à 1 si la maille est dans le volume de la particule et à 0 si la maille est dans le fluide). Les crochets $\langle \rangle$ indiquent la moyenne sur les directions homogènes x et z de l'écoulement. La vitesse de glissement est donc définie comme la différence entre la vitesse locale de la particule \mathbf{u}_p et la vitesse moyenne du fluide perturbé.

3.2 Écoulement de Couette plan

3.2.1 Profil du Stresslet

La figure 2.2 regroupe les profils suivant y de la contrainte normalisée dans les quatre cas étudiés, que nous nommerons par la suite : SC1 ($Re_p = 2 \times 10^{-6}$) et SC2 ($Re_p = 1$), à considérer tous les deux aux concentrations $\phi = 1\%$ et 5% . À titre de comparaison, des valeurs issues des simulations numériques directes de Mikulencak et Morris (2004) sur une particule isolée en écoulement cisailé, ont également été reportées sur ce graphe, correspondant aux cas à $Re_p = 0$ et $Re_p = 1$. Sur cette même figure, le trait vertical tracé en pointillés rouges indique le coefficient $5/2$, valeur limite dans le régime de Stokes ($Re_p = 0$) en régime dilué.

On constate que les profils sont plats au cœur de la section du canal, et ont tendance à s'incurver au voisinage de la paroi correspondant à une augmentation locale du Stresslet. Ce comportement traduit l'effet des interactions particules-paroi mobile, dont la portée au sein de l'écoulement augmente avec le Reynolds d'écoulement (*cf.* Magnaudet (2003) pour le cas d'une sphère isolée à faible Re_p), et indépendamment de la concentration dans la plage étudiée.

En l'absence d'effets inertiels, le Stresslet augmente avec la concentration (pointillés noirs pour $\phi = 1\%$, croix pour $\phi = 5\%$). On peut comparer ces valeurs avec celles prédites par une loi quadratique de type Batchelor et Green (1972) établie pour les suspensions non-browniennes modérément diluées :

$$\frac{\mu_{\text{eff}} - \mu}{\mu} = \frac{5}{2}\phi + K\phi^2 + O(\phi^3). \quad (2.10)$$

Les valeurs identifiées de K sont respectivement de 4.4 et de 3.1 pour les concentrations de 1% et 5%, valeurs inférieures à celles calculées pour une suspension dans un écoulement élongationnel ($K = 7.6$ (Batchelor et Green, 1972) et $K = 6.95$ (Kim et Karrila, 1991)) et par (Batchelor, 1977) pour une suspension brownienne cisailée ($K = 6.2$). La rhéologie de la suspension étant dépendante de la micro-structuration des particules dans l'écoulement (Brady *et al.*, 1988b), il est possible que les valeurs de K identifiées d'après la figure 2.2 ne soient pas indépendantes de l'opération de redistribution aléatoire des particules, effectuée toutes les 100 itérations de calcul (qu'on pourrait assimiler à un effet artificiel d'intense diffusion). De même, si son action est faible dans les cas simulés, la contribution de la diffusion induite par la contrainte sur la micro-structuration des particules peut expliquer l'effet légèrement *rhéofluidifiant* observé entre 1% et 5%. Qu'il s'agisse de l'effet de la redistribution ou de celui de l'agitation, on peut donc s'attendre à ce que les valeurs de K soient inférieures à 6.2.

Quand l'inertie du fluide n'est plus négligeable ($Re_p = 1$), le Stresslet moyen induit par les particules augmente. L'effet des parois sur la courbure du profil est également augmenté et de plus longue portée, comparé au cas sans inertie. À Reynolds fini, le cas cisailé simple entre parois mobiles n'apparaît donc pas comme un cas idéal pour identifier un comportement de type milieu effectif, qui ne peut être évalué que sur une bande étroite du canal ($12 < y/a < 18$), à l'intérieur de laquelle le Stresslet est sensiblement constant. Si l'on considère les valeurs dans cette bande, on constate que lorsque $Re_p = 1$, la contribution du Stresslet (divisé par la concentration) augmente par rapport à $Re_p \ll 1$ respectivement d'un facteur 1.036 et d'un facteur 1.023, pour des concentrations de 1% et 5%. À titre de comparaison, pour une suspension diluée, le modèle numérique à deux dimensions de Pantankar et Hu (2002) prédit à $Re_p = 1$, une augmentation du Stresslet d'un facteur 1.15 par rapport au cas $Re_p = 0$. Notons également que nos résultats sont inférieurs à ceux prédits par la relation de Subramanian *et al.* (2011), obtenue dans le cas d'une suspension diluée de gouttes ou sphères rigides cisailée à Reynolds fini ($(\mu_{\text{eff}} - \mu)/\mu = (2.5 + 0.6Re_p^{3/2})\phi$), qui conduit à une augmentation de la contrainte particulaire d'un facteur 1.24 à $Re_p = 1$

(et indépendant de la concentration). Elle est également inférieure à celle de Kulkarni et Morris qui est de 3 à $Re_p = 0.1$ et $\phi = 5\%$.

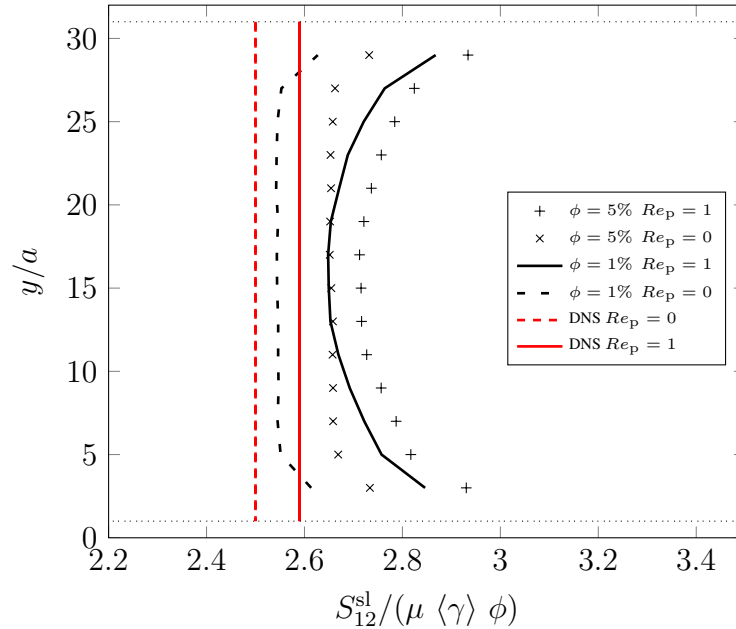


FIGURE 2.2: Contribution du Stresslet particulaire à la contrainte de cisaillement de la suspension, dans un écoulement de Couette plan. Les deux lignes horizontales en pointillés en proche-paroi représentent les limites au-delà desquelles les particules commencent à recouvrir la paroi. Les droites rouges verticales ont été obtenues à partir de DNS d'une particule isolée soumise à un écoulement cisailé pur (Mikulencak et Morris, 2004).

3.2.2 Vitesses de glissement et de migration

En écoulement cisailé pur, des particules libres de tout couple imposé ont tendance à tourner autour de l'axe de la direction transversale (axe de la vortacité de l'écoulement). En l'absence d'inertie, le taux de rotation de la particule est $\Omega_0 = -\gamma/2$. Lorsque l'inertie n'est pas négligeable, la déviation du taux de rotation $(\Omega - \Omega_0)/\gamma$ augmente en $Re_p^{3/2}$ (Lin *et al.*, 1970), indiquant que la particule glisse légèrement en tournant. De plus la particule interagit avec la présence des parois solides. Au centre, cette interaction est symétrique et ne conduit à aucune vitesse de glissement en translation. Par contre pour une position décentrée, la paroi la plus proche induit un ralentissement des particules par rapport à l'écoulement perturbé et donc une force de traînée.

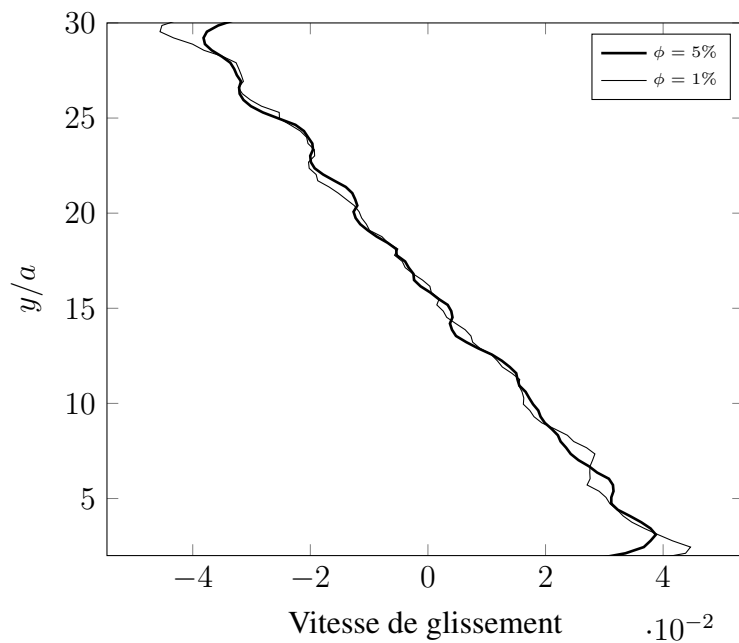
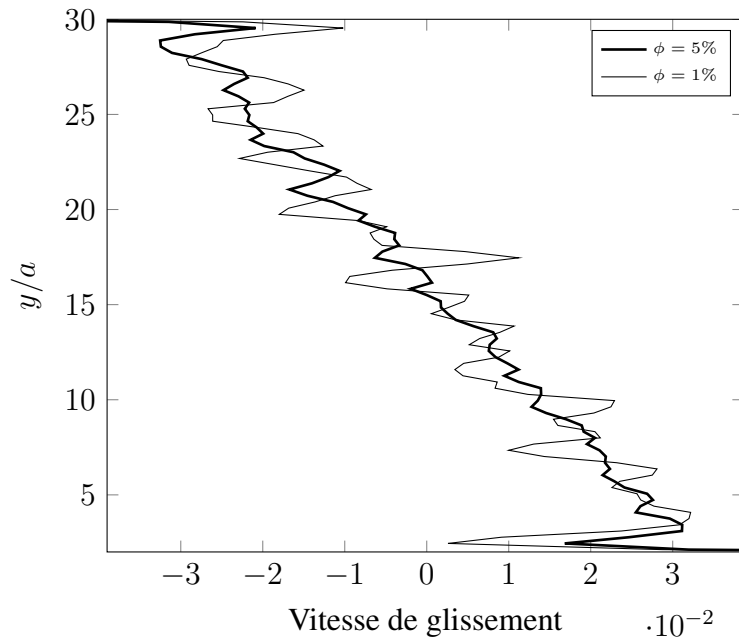


FIGURE 2.3: Profils des vitesses de glissement adimensionnées par γa pour $Re_p = 1$. (a) : u_s ; (b) : v_s .

Les profils des composantes de vitesse de glissement parallèle à l'écoulement et normale à la paroi (respectivement u_s et v_s) sont tracés sur la figure 2.3 dans le cas $Re_p = 1$. Les deux composantes du glissement pour $Re_p = 2 \times 10^{-6}$ ne sont pas représentées car négligeables. La vitesse est normalisée par la vitesse de cisaillement à l'échelle de la particule γa . Sur cette figure, on observe que les particules suspendues (non-pesantes) ont une vitesse de glissement positive dans la moitié inférieure (là où la vitesse de l'écoulement est négative) et négative dans la moitié supérieure (là où la vitesse de l'écoulement est positive), et contribuent globalement au ralentissement de l'écoulement. Les effets conjoints de l'inertie et de la présence des parois provoquent également l'apparition d'une force de portance repoussant les particules loin des parois solides de l'écoulement de Couette, comme le montre la courbe de la composante v_s sur la figure 2.3.

Cette migration est principalement due à la translation avec glissement des particules dans les régions de proche paroi et l'interaction du Stresslet particulaire avec les parois (Magnaudet, 2003), qui augmente lorsque la particule se rapproche de la paroi (v_s maximale à la paroi).

On constate d'une part que les profils de vitesse de migration et de glissement évoluent linéairement entre les parois, et d'autre part, ces vitesses sont du même ordre de grandeur (maxima respectivement de l'ordre de 3×10^{-2} et 4×10^{-2} pour u_s et v_s), suggérant un angle moyen de trajectoire des particules par rapport à l'axe du canal, proche de -45° . Il est intéressant de noter que le développement théorique de Ho et Leal (1974) à $Re_p \ll 1$ conduit à des expressions de la vitesse de glissement suivant la direction de l'écoulement et de la vitesse latérale de migration dont les ordres de grandeurs près des parois sont proches de ceux de la figure 2.3. En revanche, l'évolution prédite par Ho et Leal (1974) des composantes u_s et v_s entre l'axe ($u_s = v_s = 0$) et la paroi n'est pas linéaire et la composante de vitesse de glissement reste inférieure (en valeur absolue) à la vitesse de migration.

En outre, les profils de vitesse de glissement et de migration latérale dépendent peu de la concentration en particules entre 1% et 5%. Notons que les fluctuations élevées des profils sont dues à un nombre de réalisations de calcul qu'il faudra augmenter pour avoir des profils mieux convergés (les profils sont obtenus à partir de 1000 configurations aléatoires différentes de particules).

3.3 Écoulement de Poiseuille

Des simulations similaires ont été effectuées pour des suspensions homogènes en écoulement de Poiseuille plan, que nous appellerons SP1 pour $Re = 1 \times$

10^{-3} et SP2 pour $Re = 500$, et chacune pour les deux concentrations $\phi = 1\%$ et 5% .

3.3.1 Profil du Stresslet

Dans un écoulement de Poiseuille stationnaire, le profil suivant y de la contrainte de cisaillement est linéaire. Le profil du taux de déformation ($\partial u/\partial y$) ou du cisaillement local est donc équivalent à une courbe contrainte-déformation, c'est-à-dire à un rhéogramme. Nous avons reporté l'évolution du Stresslet (divisé par la viscosité dynamique μ du fluide) en fonction du cisaillement local γ_{sl} sur la figure 2.4 pour les quatre cas étudiés. On remarque en premier lieu que ces courbes sont toutes linéaires, permettant de conclure que, pour des particules non-pesantes, la composante tangentielle du tenseur des contraintes de la suspension se comporte comme celle d'un fluide newtonien, jusqu'à des nombres de Reynolds particuliers de 1.5 ($Re = 500$). Notons que, contrairement à l'écoulement de Couette plan, l'effet des parois n'induit pas de gradient de propriétés rhéologiques de la suspension.

Pour chaque concentration étudiée de la suspension, on remarque que la pente des droites augmente légèrement entre $Re = 1 \times 10^{-3}$ et $Re = 500$. Sur la figure 2.4, les résultats numériques à faible Re (1×10^{-3}) sont interpolés par les droites en pointillés pour les deux concentrations à 1% et 5% . Si l'on identifie la pente de ces droites à l'expression (2.10), on trouve des valeurs de K plus élevées que celles identifiées dans l'écoulement de Couette plan : $K = 19$ pour $\phi = 1\%$ et $K = 7.4$ pour $\phi = 5\%$. Cependant, les pentes sont très proches (0.0269 en Poiseuille pour 0.0254 en Couette à 1% , et 0.1435 en Poiseuille pour 0.133 en Couette à 5%). Ce résultat est lié à la sensibilité de la valeur de K aux faibles concentrations.

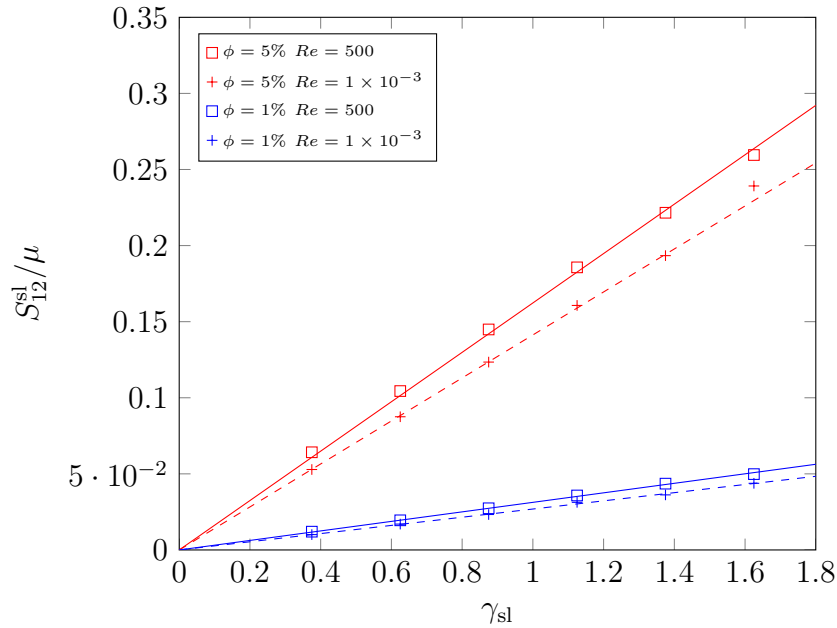


FIGURE 2.4: Contribution des particules à l'augmentation de la contrainte S_{12}^{sl}/μ en fonction du cisaillement local. La pente des différentes droites donne $(\mu_{\text{eff}} - \mu)/\mu$.

Les droites en trait continu interpolent les résultats numériques au plus fort Re (500) pour les deux concentrations. Le rapport entre ces pentes et les pentes à faible Re est de 1.16 pour $\phi = 1\%$ et de 1.13 pour $\phi = 5\%$. On peut noter que les valeurs de ces rapports sont légèrement plus élevés que ceux obtenus en écoulement de Couette (respectivement 1.036 et 1.023 pour $\phi = 1\%$ et $\phi = 5\%$), révélant que l'effet du Re sur l'augmentation du Stresslet est plus marqué en écoulement de Poiseuille qu'en écoulement de Couette. Si l'effet de l'inertie jusqu'à $Re = O(1)$ ne semble pas altérer le comportement newtonien de la contrainte de cisaillement de la suspension, en revanche, l'augmentation qui en résulte dépend de la structure locale de l'écoulement autour de la particule, un constat qui limite sensiblement l'utilisation du concept de milieu effectif pour les systèmes à $Re_p = O(1)$ et à faible concentration.

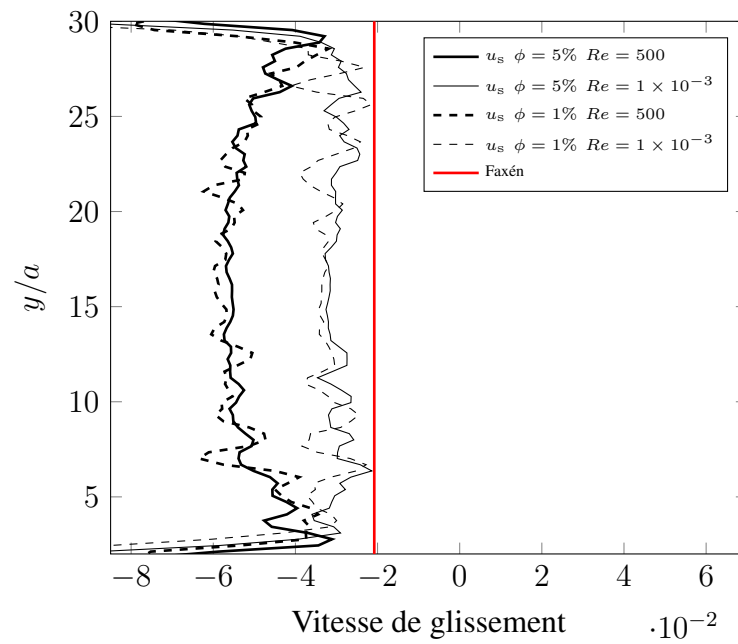
Par ailleurs, l'augmentation de la concentration, c'est-à-dire des interactions entre particules, tend à diminuer légèrement l'effet du Re , dans l'écoulement de Couette comme dans l'écoulement de Poiseuille. Cette diminution de l'effet du nombre de Reynolds sur le rapport des pentes entre 1% et 5%, est sensiblement la même dans les deux cas d'écoulement (un facteur de 0.98).

3.3.2 Vitesses de glissement et de migration

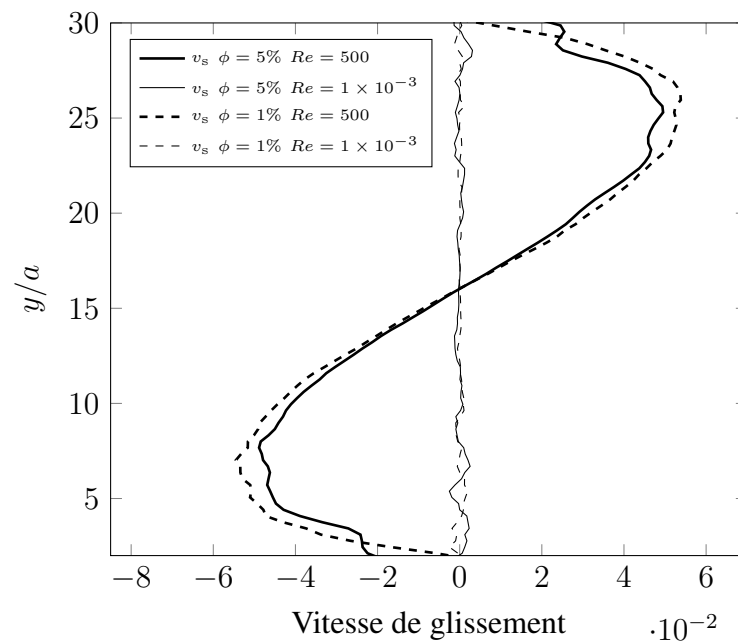
Une particule sphérique de taille finie plongée dans un écoulement parabolique subit toujours un glissement (retard par rapport à l'écoulement) du fait du caractère non-uniforme du gradient de vitesse dans le canal, et ceci indépendamment du régime de l'écoulement. En écoulement de Stokes ($Re \ll 1$), les relations liant le mouvement de la particule à la force et à son moment, sont connues sous le nom de *lois de Faxén*, et permettent de quantifier le glissement subi par la sphère dû au profil parabolique de l'écoulement (Kim et Karrila, 1991; Guazzelli et Morris, 2012) :

$$\mathbf{F} = 6\pi\mu a \left[\left(1 + \frac{a^2}{6} \nabla^2 \right) \mathbf{u}^\infty(\mathbf{Y}) - \mathbf{u}_p(\mathbf{Y}) \right]. \quad (2.11)$$

Si la particule est de taille finie par rapport au canal, la vitesse de glissement est non-nulle même en l'absence de force extérieure, et son ordre de grandeur est $(-4U_m/3)(a/H)^2$ pour une particule non-pesante, où U_m est la vitesse maximale de l'écoulement de Poiseuille. Les profils de la vitesse de glissement suivant la direction de l'écoulement u_s sont tracés sur la figure 2.5. La vitesse est normalisée par $2U_m(a/H)$. Pour les cas à $Re = 1 \times 10^{-3}$, les profils sont uniformes (à l'exception des zones proches des parois) et l'ordre de grandeur de la vitesse de glissement est de -3×10^{-2} , soit environ $-a/H (= -1/32)$, pour les deux concentrations étudiées. Cet ordre de grandeur est proche de la correction de Faxén, représentée en trait vertical sur le graphe $((-2/3)(a/H) = -1/48 = -2.08 \times 10^{-2})$. À $Re = 500$, on observe une augmentation du glissement en valeur absolue et une forme incurvée des profils vers le milieu du canal. Le glissement varie entre -6×10^{-2} $(-2(a/H))$ au milieu du canal et -4×10^{-2} $((-4/3)(a/H))$ près des parois.



(a)



(b)

FIGURE 2.5: Vitesses de glissement dans un écoulement de Poiseuille en fonction de Re et de ϕ . (a) : u_s ; (b) : v_s . Normalisées par $2U_m (a/H)$. La vitesse de glissement pour la loi de Faxén est calculée telle que $(4U_m/3)(a/H)^2$.

Les profils de la vitesse de migration v_s (composante normale à la paroi de la vitesse de glissement normalisée par $2U_m(a/H)$) sont reportés sur la figure 2.5b. On constate qu'à $Re = 1 \times 10^{-3}$, la migration latérale est négligeable pour les deux concentrations étudiées. En revanche, à $Re = 500$, la vitesse de migration évolue de manière significative entre les parois, Elle est positive dans la partie supérieure ($y/a > 16$, milieu du canal) et négative dans la partie inférieure ($y/a < 16$), indiquant une migration des particules vers les parois de l'écoulement. Comme dans le cas de l'écoulement cisailé pur, lorsque l'inertie devient prépondérante, les particules subissent une force de portance perpendiculaire aux parois. En revanche, la différence entre les deux écoulements est que loin des parois, cette force de portance, induite par l'interaction entre le Stresslet et la courbure du profil à nombre de Reynolds particulaire fini, fait migrer les particules de l'axe de l'écoulement vers les parois (Ho et Leal, 1974).

La valeur absolue de cette vitesse de migration augmente de zéro sur l'axe du canal à environ 5×10^{-2} (soit $5/3(a/H)$) pour $y/a = 7$ ou 25 , soit une distance de la paroi de $0.21H$. Entre cette cote et la paroi, elle diminue sans toutefois s'annuler. La diminution de la vitesse de migration est due à l'effet de répulsion hydrodynamique exercée par la paroi, conduisant à une position d'équilibre des particules qui se rapproche de la paroi lorsque le Reynolds augmente. Au même nombre de Reynolds, la position d'équilibre prédite par Asmolov (1999) est de $2.2a$ (ou $29.8a$), mais semble être, toujours d'après le même auteur, de l'ordre de $2.6a$ (ou $29.4a$) si l'on extrapole les données de Segré et Silberberg (1962). Les profils de la vitesse de migration de la figure 2.5b s'annulent à des positions près des parois très proches des valeurs attendues pour la suspension concentrée à 1%. En revanche, à 5%, le profil de vitesse ne présente pas de façon évidente une annulation de la vitesse à ces positions, sans doute en raison des interactions entre particules à cette concentration qui empêchent l'atteinte d'une position d'équilibre stable (ou peut-être en raison d'un manque de convergence des moyennes dans cette portion de l'écoulement).

4 Dynamique d'un écoulement laminaire de suspension en canal plan

Nous examinons dans ce paragraphe la dynamique d'une suspension concentrée à 5% dans un écoulement de Poiseuille plan, à nombre de Reynolds particulaire fini. Nous commençons l'étude par un cas test sur une particule isolée.

4.1 Migration inertielle d'une particule isolée

4.1.1 Quelques rappels

La migration latérale des particules dans un écoulement unidirectionnel a fait l'objet de nombreuses études depuis plus de 50 ans, tant sur le plan théorique qu'expérimental. Nous nous limitons à rappeler ici quelques résultats bien établis pour les particules non-pesantes, en écoulement cisailé entre parois et en écoulement de Poiseuille pour un nombre de Reynolds faible mais fini. En écoulement de Couette, les particules non-pesantes vont migrer vers le centre du canal (repoussées par l'interaction hydrodynamique avec les parois), tandis qu'en écoulement de Poiseuille, il existe une force de portance sur les particules de taille finie, induite par le gradient de cisaillement du profil quadratique à l'échelle de la particule. Les expériences de Segré et Silberberg (1962) ont mis en évidence la migration de particules non-pesantes vers une position d'équilibre dans un écoulement de Poiseuille en conduite, dont l'explication théorique a été apportée par les travaux de Ho et Leal (1974) et de Vasseur et Cox (1976). Cette position préférentielle résulte de l'équilibre entre la portance et la répulsion hydrodynamique de la paroi. Dans un écoulement parabolique, la vitesse relative du fluide sur la particule sera toujours plus élevée et la pression plus faible du côté de la paroi, générant une force sur la particule perpendiculaire à et orientée vers la paroi (figure 2.6).

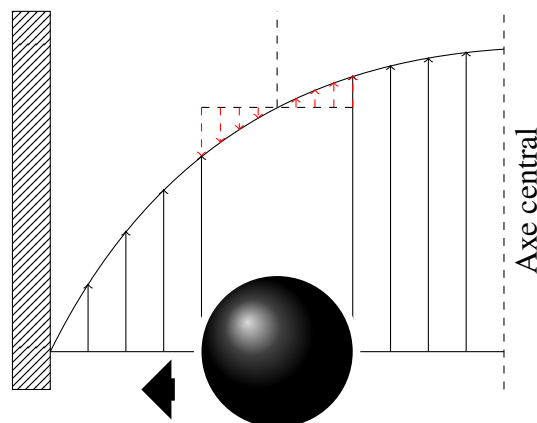


FIGURE 2.6: Portance exercée sur une particule sphérique rigide et non-pesante au sein d'un écoulement à profil de vitesse parabolique (d'après Matas *et al.* (2004)). De façon analogue à la force de Saffman, l'asymétrie du champ de vitesse autour de la particule induit une plus faible pression du côté de la paroi que celui du centre de l'écoulement.

Cette force est compensée par une force de répulsion induite par la paroi qui est d'autant plus grande que la particule est proche de la paroi, d'où

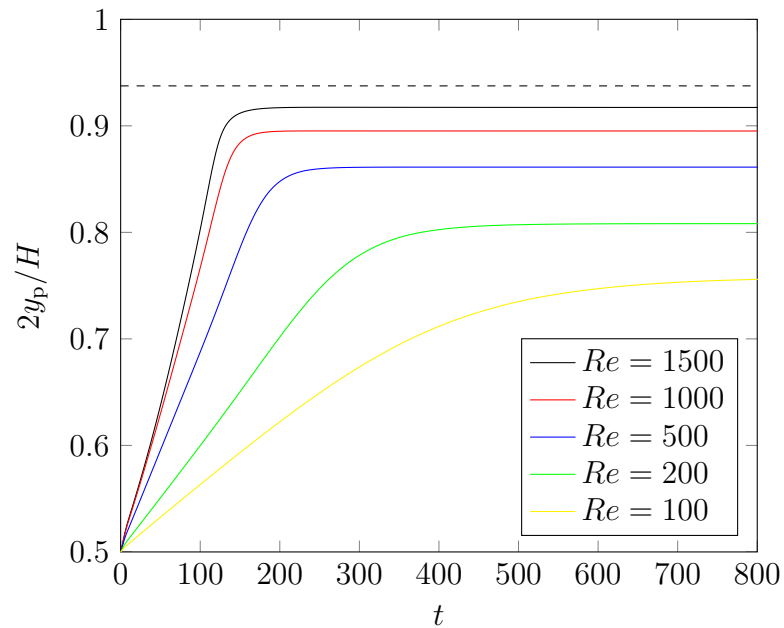
l'existence d'une position d'équilibre située à $0.62R$ (à partir du centre du tube) dans la limite des nombres de Reynolds faibles $Re < 30$ (où Re est le nombre de Reynolds de l'écoulement). Lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement (et donc le nombre de Reynolds particulaire) augmente, la position d'équilibre se déplace vers la paroi. Les travaux de Schonberg et Hinch (1989) pour $Re = O(10 - 100)$ puis d'Asmolov (1999) pour $Re = O(1000)$ ont montré que la réduction de la largeur du sillage diminuait la distance d'interaction avec la paroi (comme $H/Re^{1/2}$), conduisant d'une part à la réduction de l'intensité de la force répulsive induite par la paroi, et d'autre part à une diminution de l'interaction entre l'inertie de la particule et la courbure du profil de vitesse. Globalement, les développements théoriques de ces études prédisent le déplacement de la position d'équilibre vers la paroi avec l'augmentation du nombre de Reynolds. La réduction de la distance d'équilibre à la paroi avec Re et la faible largeur du sillage, expliquent aussi le bon accord entre les prédictions numériques en canal plan et les données de Segré et Silberberg (1962) obtenues en conduite cylindrique. Cependant, les données plus récentes de Matas *et al.* (2004) montrent que les positions d'équilibre en tube sont un peu plus éloignées de la paroi à même nombre de Reynolds d'écoulement qu'en canal. Ce résultat a été expliqué par Matas *et al.* (2009), à l'aide d'un développement théorique en géométrie cylindrique identique à celui de Schonberg et Hinch ou d'Asmolov en canal plan. Les résultats de cette étude montrent que la force de portance en tube est plus faible que celle calculée en canal plan, expliquant le décalage observé des positions d'équilibre entre les deux géométries.

4.1.2 Étude numérique en canal plan

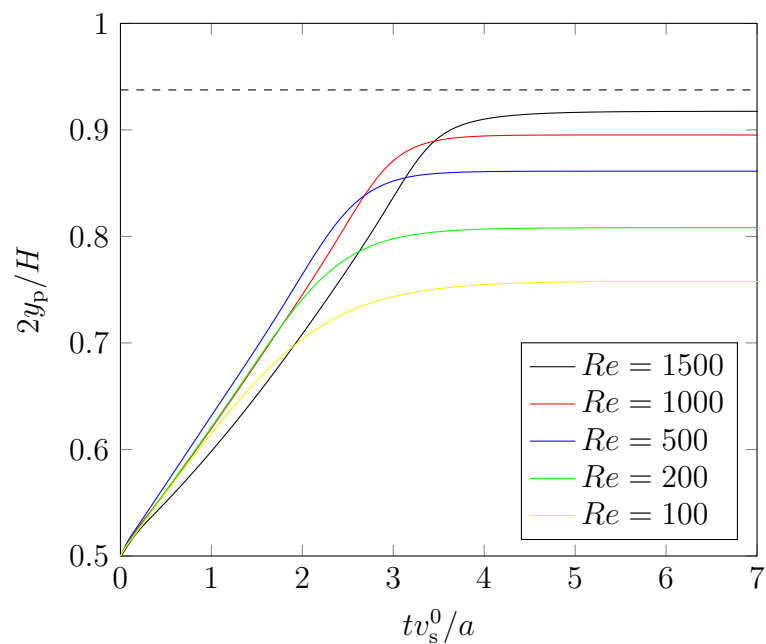
L'effet Segré-Silberberg constitue un premier test de validation de la méthode numérique utilisée dans ce travail. Le test consiste à placer initialement une particule proche du centre du canal et à suivre l'évolution de sa trajectoire dans le temps, pour différents nombres de Reynolds compris entre 100 et 1500. Les trajectoires obtenues sont reportées sur la figure 2.7a, sous la forme de la position latérale de la particule au cours du temps, $y_p(t)$. Les particules migrent vers la paroi et atteignent des positions d'équilibre y_{eq} d'autant plus proches de la paroi que le nombre de Reynolds est élevé. Par ailleurs, la vitesse de migration initiale (loin de la position d'équilibre) est une fonction croissante du nombre de Reynolds. D'après les trajectoires de la particule à différents Re , nous avons obtenu la loi d'échelle suivante pour la vitesse transverse de la particule en début de migration :

$$v_s^0 = \frac{dy_p}{dt} = 7.5 \times 10^{-3} \times \frac{\nu}{H^2} y_{eq} Re^{0.535} \quad (2.12)$$

4.1 Migration inertielle d'une particule isolée



(a)



(b)

FIGURE 2.7: (a) : Évolution temporelle de la coordonnée transversale y_p de particules initialement introduites à $y = H/4$ à différents nombres de Reynolds d'écoulement. (b) : Évolution de la coordonnée y_p du centre de la particule en fonction du temps $t_* = tv_s^0/a$. En ligne pointillée : position du centre de la particule en situation de contact avec la paroi.

Si l'on normalise le temps par a/v_s^0 , on obtient sur la figure 2.7b un faisceau de courbes qui tend vers la position d'équilibre au bout d'un temps t de l'ordre de $4a/v_s^0$.

La position d'équilibre y_{eq}/H d'une particule de rapport de taille $H/d = 16$ est reportée sur la figure 2.8 en fonction du nombre de Reynolds dans le canal. Les résultats donnés par la FCM ont été obtenus pour une résolution de trois mailles par rayon de particule, et sont en bon accord avec les prédictions d'Asmolov (avec une erreur relative inférieure à 1.5%). Notons que la condition de nombre de Reynolds particulaire inférieur à l'unité correspond dans notre cas à un nombre de Reynolds d'écoulement inférieur à 350, condition qui n'est vérifiée que pour $Re = 100$ et $Re = 200$. L'accord des présentes simulations avec les prédictions d'Asmolov tend à montrer que, dans la plage étudiée, le nombre de Reynolds particulaire a peu d'effet sur le mécanisme de migration. Des simulations similaires réalisées avec une particule plus petite ($H/d = 20$) pour un nombre égal de mailles par diamètre particulaire, n'ont révélé aucun changement des positions d'équilibre.

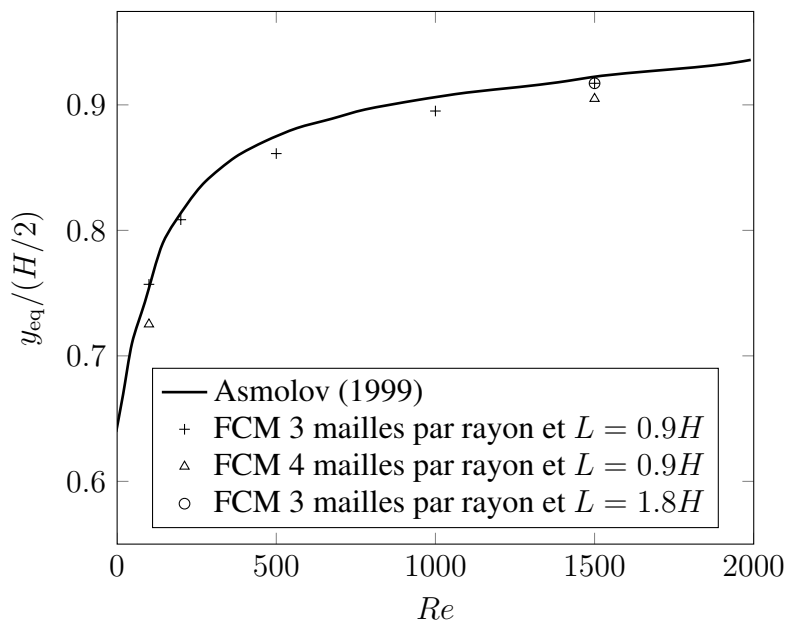


FIGURE 2.8: Positions d'équilibre pour différents nombres de Reynolds avec la FCM pour plusieurs résolutions et comparaison avec les résultats théoriques d'Asmolov (1999). La paroi est située à $y_{eq}/(H/2) = 1$, et le centre du canal est à $y_{eq}/(H/2) = 0$

Par ailleurs, la taille du domaine et la résolution du maillage ont également fait l'objet de tests, dans le but de vérifier l'indépendance des résultats sur les

paramètres numériques utilisés. En premier lieu, des simulations effectuées dans deux domaines de tailles différentes, $14.4d$ et $28.8d$ (ou $0.9H$ et $1.8H$, respectivement), n'ont révélé aucune modification de la vitesse et ni de la trajectoire de la particule pour $Re = 100$ et $Re = 1500$. L'effet de la résolution spatiale a également été évalué en considérant un maillage plus fin (4 mailles par rayon au lieu de 3). Nous avons pu observer une légère influence, le plus grand écart étant observé pour le cas à $Re = 1500$ où la distance séparant la paroi et le centre de la particule à sa position d'équilibre varie de 1.3% pour le maillage le plus fin.

4.2 Effet de la migration inertielle sur le transport de suspensions

L'influence de l'inertie sur la dynamique de l'écoulement laminaire de suspensions composées des mêmes particules non-pesantes ($H/d = 16$) est étudiée dans un plus grand domaine de dimensions $\pi H \times H \times 2.5H$ équivalent à $50d \times 16d \times 40d$, comprenant $320 \times 100 \times 258$ mailles. Un total de 3107 particules composent la suspension, correspondant à une fraction volumique de la phase solide de 5%. Les simulations d'écoulement ont été réalisées sous le seuil de transition vers la turbulence, pour des nombres de Reynolds de 1000, 1200 et 1400. Les particules sont initialement réparties de façon homogène dans le canal (tirage aléatoire des positions des centres vérifiant le non-recouvrement des interfaces). La vitesse moyenne est maintenue constante grâce à une régulation de la perte de charge longitudinale. Le temps de simulation est suffisamment long pour permettre l'établissement de tous les mécanismes d'interactions au sein de la suspension (migration, effets collectifs).

4.2.1 Stratification de la suspension

Les sphères qui occupent initialement tout le canal sont animées par une force de portance les poussant vers les parois sous l'effet Segré-Silberberg. Après une durée d'environ $70H/\langle U \rangle$, la migration des particules à travers les lignes de courant est complète, et la configuration de la suspension est composée de deux couches concentrées proches des parois et d'une zone centrale quasiment vierge en particules. Les projections dans le plan (y, z) de la suspension à l'état initial (répartition homogène) et après un temps égal à $70H/\langle U \rangle$ (stratification) sont représentées sur la figure 2.9 à $Re = 1400$. Les profils de concentration correspondants (moyennés dans les directions x et z) sont tracés sur la figure 2.10a. À $t = 0$, le profil est quasi-uniforme, et centré autour de 5%. À $t = 70H/\langle U \rangle$, le profil admet un creux au centre puis s'élève près des parois. On note la présence d'un pic de concentration proche de 17% à une distance de la paroi à peu près égale au rayon des particules.

Le profil de vitesse axiale, correspondant à $t = 70H/\langle U \rangle$ et moyenné dans les directions x et z , est représenté sur la figure 2.10b. On remarque qu'il est quasi identique au profil de Poiseuille, à l'exception de la zone correspondant à la couche de particules au contact de la paroi, où l'on note un très léger écart par rapport au profil parabolique. La vitesse axiale moyenne de la suspension peut-être assimilée à celle de l'écoulement non-perturbé, même en régime stratifié.

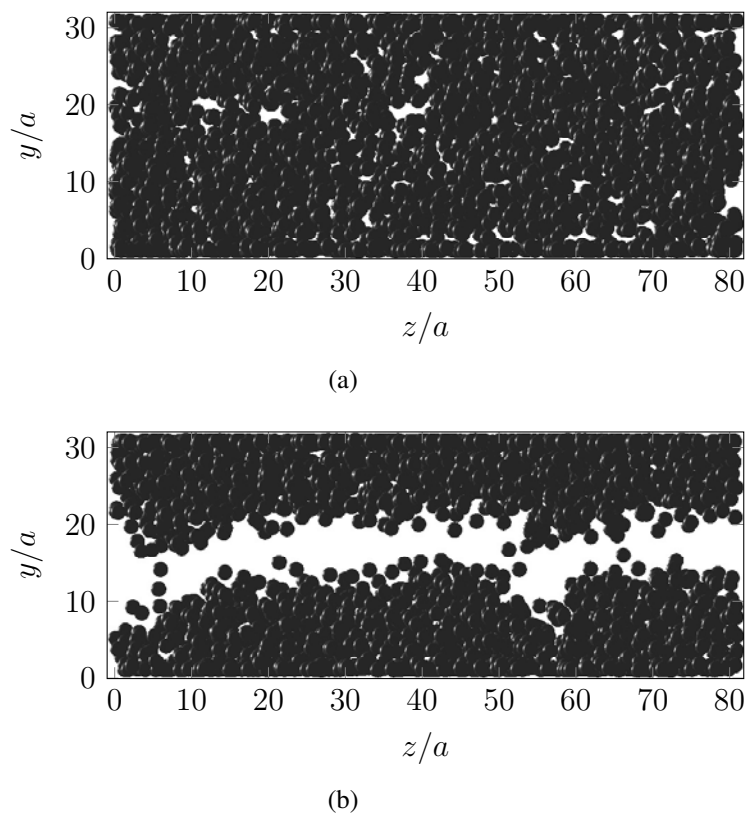
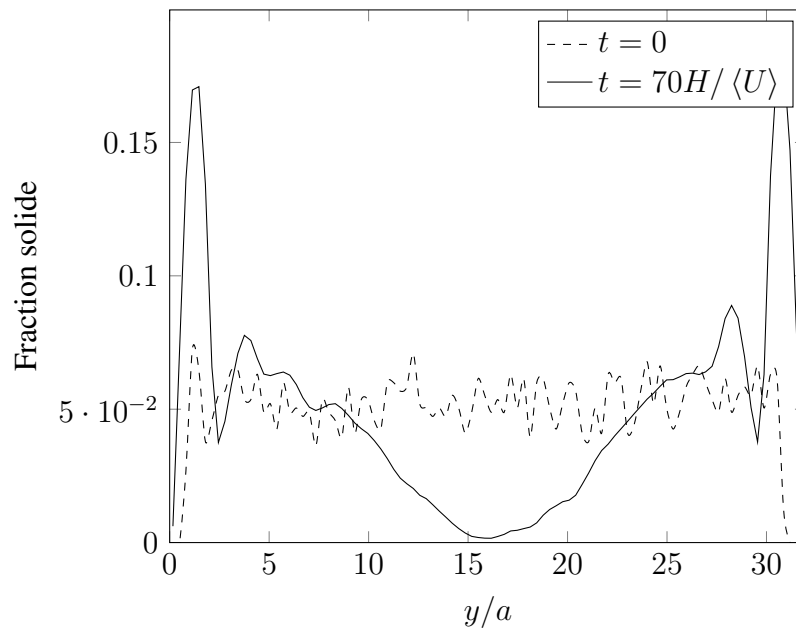
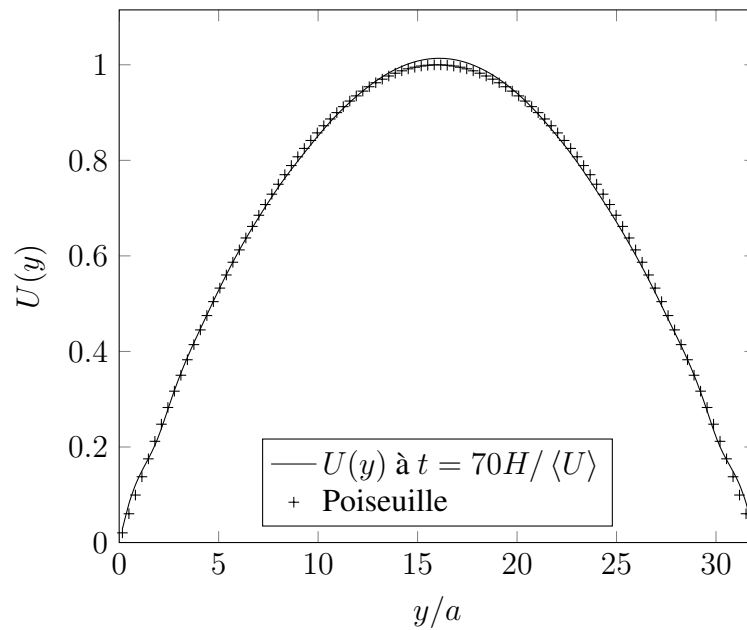


FIGURE 2.9: Vues de front de la répartition des particules dans le canal à $Re = 1400$; ((a) : $t = 0$, (b) : $t = 70H/\langle U \rangle$).



(a)



(b)

FIGURE 2.10: Profils de concentration et de vitesse correspondant aux répartitions particulières des figures 2.9a et 2.9b.

4.2.2 Développement de motifs dunaires

Après avoir atteint l'état stratifié, les couches de particules ne restent pas parallèles aux parois du canal. Des motifs en forme de dunes se développent au cours du temps dans le plan (y, z) , comme l'illustrent les figures 2.11a et 2.12a, respectivement à $Re = 1400$ et $Re = 1000$. Le temps de mise en place de ces motifs est du même ordre de grandeur que le temps d'atteinte du régime stratifié de la suspension (de l'ordre de $70H/\langle U \rangle$). Ceci implique que le temps caractéristique de formation de ces motifs est d'autant plus court que le nombre de Reynolds est élevé. Par ailleurs, les structures observées ont tendance à se déplacer très lentement dans la direction de la vorticité (direction z). Ces durées sont regroup es dans le tableau 2.2 et compar es aux différents temps de la migration.

Temps de fractionnement de la suspension (simulation)	70
Temps de mise en place des dunes (simulation)	70
Vitesse de migration d'une particule isolée	6×10^{-3}
Temps estim�e pour que la particule isolée atteigne la position d'équilibre	83
Vitesse d'agitation v' induite par le cisaillement dans le plan (x, z) (Yeo et Maxey, 2013)	7.5×10^{-4}
Temps estim�e pour qu'une particule soit emport�e d'une distance $H/2$ par l'agitation v'	400
Rotation moyenne du fluide Ω_x induite par les écoulements secondaires (simulation)	0.01 s^{-1}
Temps de migration par Ω_x	30

TABLE 2.2: Bilan des temps et vitesses caractéristiques du mouvement des particules dans le canal établi à $Re = 1400$. Le temps et la vitesse sont adimensionn es par $H/\langle U \rangle$ et la vitesse maximale de l'écoulement de Poiseuille U_m .

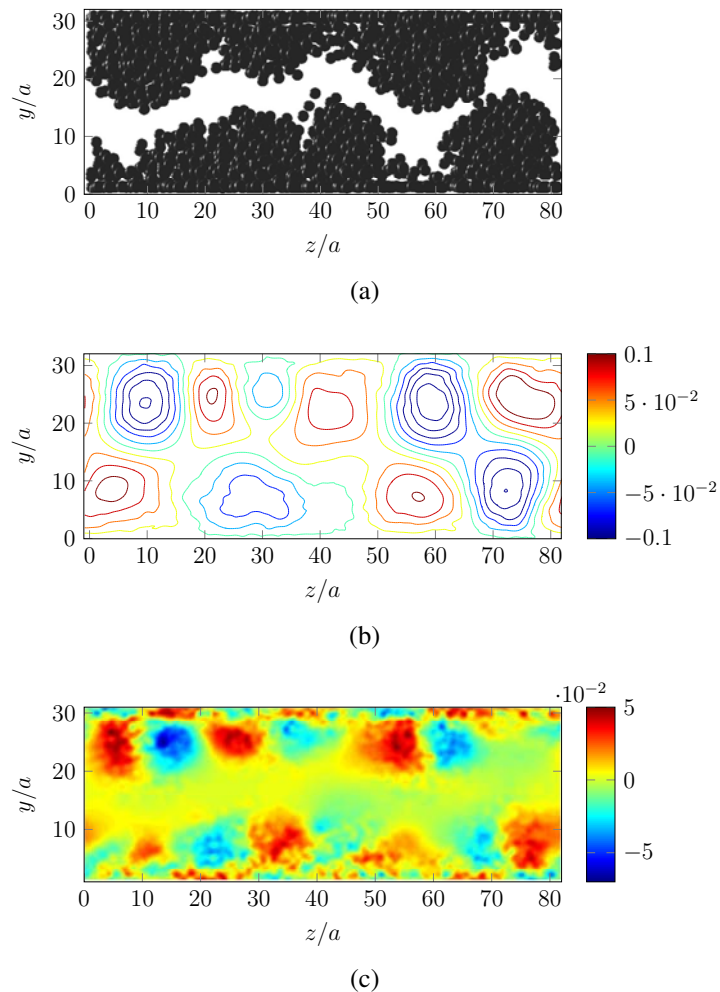


FIGURE 2.11: Suite à la stratification de l'écoulement de suspension ($Re = 1400$), une instabilité se développe dans la direction de la vorticité z induisant l'apparition de motifs sous forme de dunes (a). (b) : Contours de la fluctuation de vitesse longitudinale moyennée selon x . (c) : Contours du rotationnel de vitesse dans la direction de l'écoulement moyenné sur un intervalle de temps égal à $70H / \langle U \rangle$ une fois que les motifs dunaires ont pris place.

Les fluctuations de vitesse (par rapport à l'écoulement non-perturbé) dans la direction de l'écoulement moyennées suivant x , sont représentées sur la figure 2.11b. Il apparaît clairement que dans les zones chargées en particules (respectivement dépourvues en particules), la suspension circule plus lentement (respectivement plus rapidement) que l'écoulement local non-perturbé, c'est-à-dire l'écoulement moyen. Pour un gradient de pression constant donné dans la direction de l'écoulement, le fluide chargé en particules est plus visqueux que le fluide pur, et donc sa vitesse est plus faible. Ces fluctuations

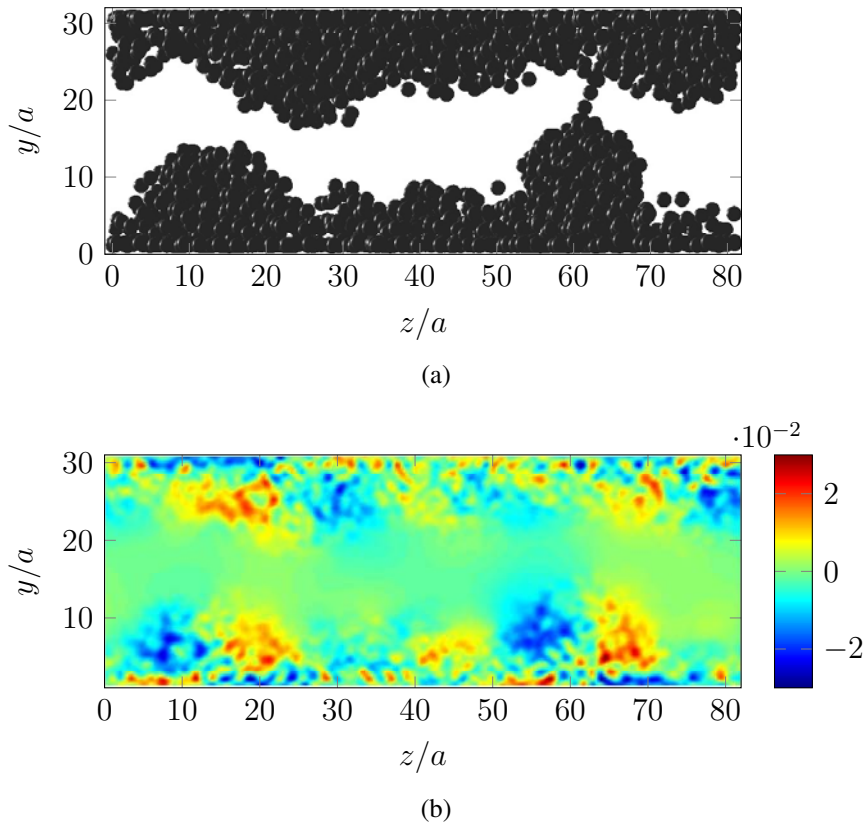


FIGURE 2.12: Même contenu que les figures 2.11a et 2.11c mais pour $Re = 1000$.

de vitesse longitudinales exercent sur les particules un cisaillement additionnel (parallèle à la paroi) d'une amplitude de l'ordre de 10% du cisaillement maximal engendré par l'écoulement de Poiseuille. Ce mécanisme, similaire à celui de la migration de particules vers les zones à fort gradient de vitesse, entraîne les particules présentes dans les régions de faible gradient de cisaillement aux zones de fort gradient, ce qui permet d'alimenter les motifs dunaires et d'augmenter leur taille. On pourrait s'attendre à ce que les particules soient ré-entraînées vers le milieu du canal du fait de l'agitation induite par le cisaillement dans le plan (x, y) . Cependant le temps de mise en place des dunes ($70H / \langle U \rangle$) est plus rapide que le temps de diffusion induit par le cisaillement sur une demi-hauteur de canal, de l'ordre de $400H / \langle U \rangle$ (marqué dans le tableau 2.2 par estimation d'après les résultats de Yeo et Maxey (2013)).

Les figures 2.11c et 2.12b présentent les contours du rotationnel de vitesse dans la direction de l'écoulement moyenné sur un intervalle de temps égal à $60H/\langle U \rangle$, une fois les motifs dunaires établis. Ces figures mettent en évidence l'existence de structures contra-rotatives dans les zones chargées en particules. Ces structures qui maintiennent les particules en « lévitation » permanente, ont une taille caractéristique égale à la moitié de la hauteur du canal, et un temps de rotation de $30H/\langle U \rangle$ qui est plus petit que le temps de mise en place de la stratification par migration latérale. Ces écoulements secondaires sont probablement liés à l'anisotropie des contraintes normales de Reynolds (elle-même liée aux gradients locaux de concentration), ajoutée aux termes de forçage induits par la localisation des particules, mais nous n'avons pas pu établir une relation quantitative directe entre l'amplitude de ces écoulements secondaires et les différentes contributions dans l'équation de transport de la vorticité.

Le mécanisme à l'origine du déclenchement et de la mise en place de ces motifs dunaires n'est pas encore clairement identifié. L'apparition de ces motifs est originale. Des structures similaires suivant la direction de la vorticité ont été observ es par Tirumkudulu *et al.* (1999) dans un écoulement de Couette cylindrique. Après quelques heures d'écoulement, les auteurs ont remarqué la présence de structures « agr g es » de sphères (non-pesantes)   la surface libre de la suspension (comprenant 5% en volume de particules mono-dispers es réparties initialement de manière homogène). D'après ces auteurs, le phénomène se produit même à des nombres de Reynolds faibles, et son temps de mise en place semble diminuer quand l'inertie du fluide augmente. Cependant, des comparaisons directes avec cette étude ne peuvent être établies, car dans les expériences de Tirumkudulu *et al.*, le phénomène se produit à la surface libre du cylindre partiellement rempli. La présence d'une interface suspension-air est susceptible de générer des forces capillaires influençant la position préférentielle des particules et il y a peu de chances que les mécanismes mis en jeu soient similaires.

Dans une autre étude, Brady et Carpen (2002) ont montré que deux couches cisail es compos es de fluides de propriétés rhéologiques différentes, peuvent déclencher à leur interface une instabilité dans la direction de la vorticité. En considérant le cas particulier d'un écoulement de Couette plan de deux phases stratifi es (fluide newtonien et suspension très concentr e   très faible nombre de Reynolds), Brady et Carpen ont montré que l'interface entre les deux couches est instable, et que cette instabilité est li e à un saut à l'interface de la deuxième différence de contrainte normale. Selon leur analyse, la condition nécessaire pour qu'une instabilité se produise est que le saut de la deuxième différence de contrainte normale N_2   l'interface soit

positif ($\Delta N_2 = N_2^{\text{newt.}} - N_2^{\text{non-newt.}} = -N_2^{\text{non-newt.}} > 0$).

Cette configuration de deux couches stratifiées de rhéologies différentes cisillées est comparable à notre configuration, même si, dans notre cas, le cisaillement n'est pas homogène suivant l'épaisseur du canal. Tandis que la couche de fluide centrale est newtonienne, l'anisotropie de la contrainte normale de suspensions concentrées a déjà fait l'objet de nombreuses études (voir par exemple Yeo et Maxey (2013)). En effet, les différences de contraintes normales sont non-nulles autour d'une particule suspendue dans un écoulement cisillé (Mikulencak et Morris (2004) et Patankar et Hu (2002)) et le signe de N_2 dépend de la concentration en particules et du nombre de Reynolds particulaire (Yeo et Maxey, 2013). Les deux contributions les plus importantes à la deuxième différence de contraintes normales N_2 sont le Stresslet ($S_{22} - S_{33}$) et les composantes transverses des fluctuations de vitesse ($v'^2 - w'^2$). Les profils de ces contributions moyennées suivant les directions x et z sont reportées sur la figure 2.13, au même instant que le profil de concentration de la figure 2.10a. Les deux contributions sont du même ordre de grandeur dans les zones chargées en particules et de signe opposé, donc leur différence est toujours positive dans les couches denses en particules, et nulle dans la zone de fluide pur. Selon la définition de Brady et Carpen (2002), le saut de N_2 à l'interface est dans ce cas négatif, et ne remplit donc pas leur critère de déclenchement de l'instabilité.

Ramachandran et Leighton (2008) ont réalisé des simulations d'écoulements de suspension non-inertielles et non-homogènes, basées sur le modèle *d'équilibre de suspension* de Nott et Brady (1994). En écrivant l'équation de transport de la vorticité dans la direction de l'écoulement, ces auteurs ont montré que la seconde différence de contraintes normales N_2 génère des écoulements secondaires dans un écoulement de suspension, et ceci dès que la section du canal n'est pas axisymétrique. Plus particulièrement, dans le cas de l'écoulement de Poiseuille plan, un gradient de concentration initialement imposé dans la section transverse conduit à la formation de motifs ondulés, qui se déplacent dans la direction de la vorticité de la même façon que ceux observés dans ce travail. Les auteurs attribuent l'origine de ces écoulements secondaires aux gradients de courbure des surfaces iso-vitesses, qui se développent uniquement lorsqu'il y a une asymétrie dans l'écoulement (dans notre cas, celle-ci pourrait provenir de l'épaisseur variable de la couche peupl e par les particules). Or, ces gradients sont initialement faibles dans le cas de particules non-pesantes et d'une section rectangulaire infinie dans la direction z . Par conséquent, les écoulements secondaires sont faibles, mais suffisants pour initier la migration des particules et amplifier l'asymétrie (courbure des iso-surfaces de vitesse) comme ce qui est montré dans la figure 2.11b.

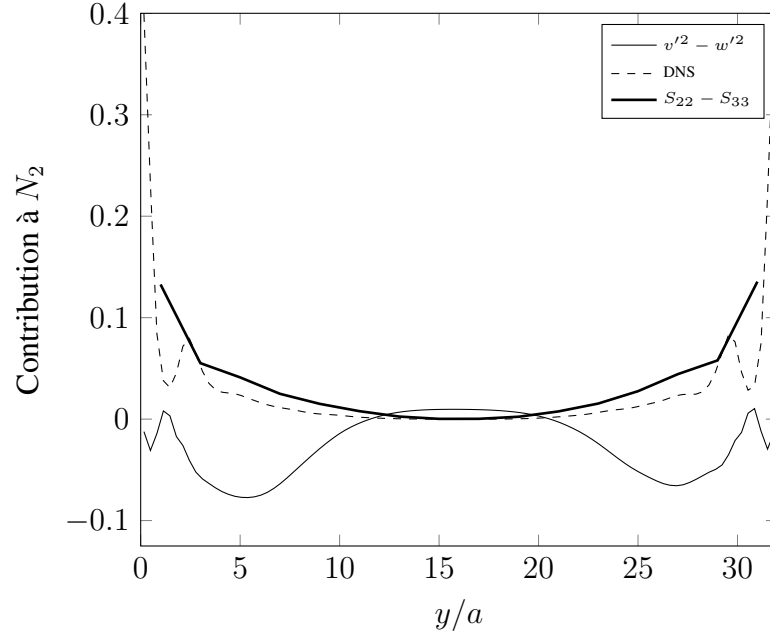


FIGURE 2.13: Profils des contributions à la seconde différence de contraintes normales à $Re = 1400$ et $t = 70H / \langle U \rangle$. Les lignes continues épaisse et fine correspondent à $(S_{22} - S_{33})$ et à $(v'^2 - w'^2)$ respectivement. La ligne en traits pointillés correspond à une estimation de $(S_{22} - S_{33})$ basée sur la simulation numérique directe de Mikulencak et Morris (2004) en tenant compte du nombre de Reynolds particulaire local et de la concentration. Normalisés par τ_w .

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats issus de l'étude d'écoulements laminaires de suspensions en canal. Les particules sont non-pesantes, non-browniennes et de taille finie. En premier lieu, nous avons caractérisé l'augmentation des contraintes induites par les particules dans la suspension, ainsi que la vitesse de glissement des particules par rapport à l'écoulement, dans le cas de suspensions maintenues volontairement homogènes. Des simulations utilisant la méthode FCM ont été effectuées dans le cas d'écoulements plans cisailé simple et de Poiseuille. Les résultats relatifs à ces deux configurations, ont montré que les contraintes induites par la phase solide augmentent avec le nombre de Reynolds particulaire. Ces contraintes augmentent également avec la concentration dans la limite d'un écoulement de Stokes. Les vitesses de glissement dans la direction de l'écoulement et la vitesse de migration latérale augmentent avec le nombre de Reynolds et sont du même ordre de grandeur quand $Re_p = O(1)$. La principale différence entre l'écoulement

de Couette plan et de Poiseuille est que les particules tendent à migrer vers le centre dans le premier cas du fait de leur taille finie, alors qu'elles migrent vers les parois dans le deuxième cas. En second lieu, des simulations dites dynamiques ont été mises en œuvre pour des écoulements laminaires de suspensions en canal plan, à des nombres de Reynolds de canal inférieurs, mais proches du régime de transition vers la turbulence. Dans un premier temps, les particules migrent vers les parois, résultant de l'interaction du dipôle induit par la particule (Stresslet) avec le profil de vitesse parabolique (effet Segré-Silberberg). La suspension se stratifie en deux couches concentrées en proche paroi, laissant une zone centrale dépourvue de particules. Dans un second temps, on observe dans les couches externes concentrées, le développement de motifs en forme de dunes, au bout d'un temps équivalent au temps de migration des particules. La cinétique de mise en place de cette instabilité est d'autant plus rapide que le nombre de Reynolds est élevé. L'origine du mécanisme responsable de l'apparition de ces motifs n'est pas encore comprise et mérite d'être explorée. Le passage d'une configuration avec une position d'équilibre des particules qui dépend du Re_p (à une concentration de 0.5% dans les expériences de Matas *et al.* (2004) et de 1% dans les simulations de Shao *et al.* (2008)) au développement de structures dunaires stratifiées, suggère l'existence d'une phase de transition dans une plage relativement étroite de concentration (0.5 – 1% à 5%), qui doit probablement dépendre du nombre de Reynolds particulaire. L'étude de cette phase de transition constitue une autre perspective à ce travail.

Bibliographie

- ASMOLOV, E. S. (1999). The inertial lift on a spherical particle in a plane Poiseuille flow at large channel Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 381:63–87.
- BATCHELOR, G. K. (1970). Stress system in a suspension of force-free particles. *J. Fluid Mech.*, 41:545–570.
- BATCHELOR, G. K. (1977). The effect of Brownian motion on the bulk stress in a suspension of spherical particles. *J. Non-Newton. Fluid*, 83:97–117.
- BATCHELOR, G. K. et GREEN, J. T. (1972). The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field. *J. Fluid Mech.*, 56:375–400.
- BRADY, J. F. et CARPEN, I. C. (2002). Second normal stress jump instability in non-Newtonian fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 102:219–232.
- BRADY, J. F., PHILLIPS, R. J., LESTER, J. C. et BOSSIS, G. (1988a). Dynamic simulation of hydrodynamically interacting suspensions. *J. Fluid Mech.*, 195:257–280.
- BRADY, J. F., PHILLIPS, R. J., LESTER, J. C. et BOSSIS, G. (1988b). Dynamic simulation of hydrodynamically interacting suspensions. *J. Fluid Mech.*, 195:257–280.
- CHUN, B. et LADD, A. J. C. (2006). Inertial migration of neutrally buoyant particles in a square duct : an investigation of multiple equilibrium positions. *Phys. Fluids*, 18:031704.
- DRAZER, G., KOPLIK, J., KHUSID, B. et ACRIVOS, A. (2004). Microstructure and velocity fluctuations in sheared suspensions. *J. Fluid Mech.*, 511:237–263.
- EILERS, H. (1941). Die viskosität von emulsionen hochviskoser stoffe als funktion der konzentration. *Kolloid-Z.*, 97:313.
- GUAZZELLI, E. et MORRIS, J. F. (2012). *A physical introduction to suspension dynamics*. Cambridge University Press.
- HAN, M., KIM, C., KIM, M. et LEE, S. (1999). Particle migration in tube flow of suspensions. *J. Rheology*, 43(5):1157–1174.
- HO, B. et LEAL, G. (1974). Inertial migration of rigid spheres in two-dimensional unidirectional flows. *J. Fluid Mech.*, 65:365–400.

-
- KIM, S. et KARRILA, S. J. (1991). *Microhydrodynamics : Principles and selected applications*. Numéro QA911 .K49 1991. Butterworth-Heinemann.
- KRIEGER, I. M. et DOUGHERTY, T. J. (1959). A mechanism for non-Newtonian flow in suspensions of rigid spheres. *Trans. Soc. Rheol.*, III:137–152.
- KULKARNI, P. M. et MORRIS, J. F. (2008a). Pair-sphere trajectories in finite-Reynolds-number shear flow. *J. Fluid Mech.*, 596:413–435.
- KULKARNI, P. M. et MORRIS, J. F. (2008b). Suspension properties at finite Reynolds number from simulated shear flow. *Phys. Fluids*, 20(040602):1–14.
- LIN, C. J., PEERY, J. H. et SCHOWALTER, W. R. (1970). Simple shear flow around a rigid sphere : inertial effects and suspension rheology. *J. Fluid Mech.*, 44:1–17.
- LYON, M. K. et LEAL, L. G. (1998). An experimental study of the motion of concentrated suspensions in two-dimensional channel flow. part 1. mono-disperse systems. *J. Fluid Mech.*, 363:25–56.
- MAGNAUDET, J. (2003). Small inertial effects on a spherical bubble, drop or particle moving near a wall in a time-dependent linear flow. *J. Fluid Mech.*, 485:115–142.
- MATAS, J. P., MORRIS, J. F. et GUAZZELLI, E. (2004). Lateral forces on a sphere. *Oil & Gas Science and Technology - Rev. IFP*, 59(1):59–70.
- MATAS, J. P., MORRIS, J. F. et GUAZZELLI, E. (2009). Lateral force on a rigid sphere in large-inertia laminar pipe flow. *J. Fluid Mech.*, 621:59.
- MIKULENCAK, D. R. et MORRIS, J. F. (2004). Stationary shear flow around fixed and free bodies at finite Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 520:215–242.
- NOTT, P. R. et BRADY, J. F. (1994). Pressure-driven flow of suspensions : simulation and theory. *J. Fluid Mech.*, 275:157–199.
- PATANKAR, N. A. et HU, H. H. (2002). Finite Reynolds number effect on the rheology of a dilute suspension of neutrally buoyant circular particles in a Newtonian fluid. *Int. J. Multiphase Flow*, 28:409–425.
- RAMACHANDRAN, A. et LEIGHTON, D. T. (2008). The influence of secondary flows induced by normal stress differences on the shear-induced migration of particles in concentrated suspensions. *J. Fluid Mech.*, 603:207–243.

-
- SAFFMAN, P. G. (1965). The lift on a small sphere in a slow shear flow. *J. Fluid Mech.*, 22:385–400.
- SCHONBERG, J. A. et HINCH, E. J. (1989). Inertial migration of a sphere in Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 203:517–524.
- SEGRÉ, G. et SILBERBERG, A. (1962). Behavior of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow. Part 1 : Determination of local concentration by statistical analysis of particle passages through crossed light beams. *J. Fluid Mech.*, 14:115–135.
- SHAO, X., YU, Z. et SUN, B. (2008). Inertial migration of spherical particles in circular Poiseuille flow at moderately high Reynolds numbers. *Phys. Fluids*, 20(103307).
- SUBRAMANIAN, G. et KOCH, D. L. (2006a). Centrifugal forces alter streamline topology and greatly enhance the rate of heat and mass transfer from neutrally buoyant particles to a shear flow. *Phys. Rev. Lett.*, 96:134503.
- SUBRAMANIAN, G. et KOCH, D. L. (2006b). Inertial effects on the transfer of heat or mass from neutrally buoyant spheres in a steady linear velocity field. *Phys. Fluids*, 18:073302.
- SUBRAMANIAN, G., KOCH, D. L. et J. ZHANG, C. Y. (2011). The influence of the inertially dominated outer region on the rheology of a dilute dispersion of low-Reynolds-number drops or rigid particles. *J. Fluid Mech.*, 674:307–358.
- TIRUMKUDULU, M., TRIPATHI, A. et ACRIVOS, A. (1999). Particle segregation in monodisperse sheared suspensions. *Phys. Fluids*, 11 :3:507–509.
- VASSEUR, P. et COX, R. G. (1976). The lateral migration of a spherical particle in two-dimensional shear flows. *J. Fluid Mech.*, 78(2):385–413.
- YEO, K. et MAXEY, M. R. (2010). Simulation of concentrated suspensions using the Force-Coupling Method. *J. Comp. Phys.*, 229(6):2401–2421.
- YEO, K. et MAXEY, M. R. (2013). Dynamics and rheology of concentrated, finite-Reynolds-number suspensions in a homogeneous shear flow. *Phys. Fluids*, 25:1–24.

The effect of neutrally-buoyant finite-size particles on the laminar-turbulent transition

3

Sommaire

1	Introduction	88
2	Simulation procedure	90
2.1	Single-phase flows	90
2.2	Two-phase flows	91
2.3	Pressure regulation	92
3	Single-phase flow in the transition regime	93
3.1	Wall friction and velocity fluctuations	96
3.2	Coherent structures prior to relaminarization	99
4	Fluctuation enhancement by particles in the transition regime	100
4.1	Average profiles of fluctuating suspension flows	101
4.2	Wall friction and velocity fluctuations	104
4.3	Energy balance of the Reynolds stress component $\langle u'^2 \rangle$	111
5	Suspension dynamics below the transition	113
5.1	Effect of the concentration on the transitional flow	114
6	Hysteresis	117
7	Conclusion	118

1 Introduction

The experiments of Matas et al. (2003) highlighted that the presence of particles may alter instabilities known for single-phase fluids. The critical Reynolds number for the onset of turbulence in pipe flow is changed when a small fraction of particles is added to the fluid. They have shown that large (small) particles compared to the pipe diameter shifts the laminar-turbulent transition threshold to smaller (larger) Reynolds numbers. Later Pouplin et al. (2011) reported similar trend for flows laden with large concentration of very small droplets. It comes from both studies that the transition regime depends on the concentration and on the particle size in a non monotonous way, independently from the mixture Reynolds number based on the effective viscosity. This suggests the existence of some mechanisms, which are still unknown. This is strictly related to the two-phase nature of the flow. Last chapter clearly points to the migration and collective effect phenomenon occurring in laminar flows close to laminar-turbulent transition. In the present chapter we aim at understanding the mechanisms taking place in suspension flows above the transition threshold.

The particles we consider are neutrally-buoyant and have a finite-size compared to the channel height. They are non-Brownian (high Péclet number based on the ratio of the velocity perturbation at the scale of the particle multiplied by the particle diameter and the particle diffusion coefficient) and weakly inertial, *i.e.* their relaxation time scale in response to a local flow perturbation is small (moderate Stokes number). In this case, the suspension dynamics is only a function of the channel Reynolds number, the solid volume fraction and the particle-to-channel size ratio (or equivalently to the particle Reynolds number).

A channel or pipe flow in the transition regime is usually characterized by large scale fluctuating structures generating strong variations of the local stresses. In the case of single-phase flow, the critical Reynolds number below which the turbulence completely vanishes depends on the channel cross-section geometry and on the wall surface property (as the wall roughness). The results obtained by Matas et al. (2003) regarding the effect of neutrally buoyant finite-size particles on the transition threshold, are based on macroscopic measurements of the pressure drop experienced by the suspension flow at a given constant flow rate (or Reynolds number). However the interactions between the particles and the flow close to the laminar-turbulent transition have not been investigated so far. Only recently Yu et al. (2013) performed numerical simulations (using the Fictitious Domain Method) of a transitional pipe flow laden with large neutrally buoyant particles. For

their study, the authors seeded the particles in a laminar flow and considered that the transition to turbulence occurs when the fluctuating energy exceeds a certain threshold value. They confirmed that large particles trigger the transition at low particle volume fractions in agreement with the experimental observations.

We use numerical simulations based on the Force Coupling Method in order to investigate finite-size particle-fluid interactions when the base flow undergoes a transitional regime. Since the flow is resolved at a scale smaller than the particle radius, information on particle-induced flow modulation (vortical structures, fluctuation level, *etc.*) can be obtained in the transitional regime. In both single and two-phase flow simulations, we use a unique definition of the Reynolds number $Re = \langle U \rangle H / \nu$ based on the channel height H , the average flow velocity $\langle U \rangle$, and the kinematic viscosity ν of the carrier fluid. Additionally in suspension flows, we analyze the results in terms of the suspension Reynolds number defined by $Re_{\text{eff}} = \langle U \rangle H / \langle \nu_{\text{eff}} \rangle$ where the carrier fluid viscosity is replaced by a suspension average viscosity. This effective viscosity is defined from the average shear stress in the channel such that:

$$\langle \mu_{\text{eff}} \rangle \langle \gamma \rangle = \langle \mu_{\text{sl}}(y) \gamma_{\text{sl}}(y) \rangle, \quad (3.1)$$

where γ is the local shear rate and the brackets stand for time and space averages in all directions. The subscript sl refers to a suspension time-average performed only in the homogeneous directions (x and z) and obtained from the numerical simulations. The local suspension viscosity depends on the local particle volumetric concentration and it is evaluated from the Stresslet contribution with equation (2.8) in previous chapter.

This chapter contains the main results of a paper submitted to the international journal *Physics of Fluids* as well as new features. It is organized as follows. The simulation procedure chosen to characterize the transition regime is detailed in section 2. Section 3 presents an overview on the single-phase flow behavior in the transition regime obtained from relaminarization of an initially turbulent flow. Then, section 4 describes the effect of neutrally buoyant particles on the transitional flow. The particles are large, *i.e.*, channel height-to-particle diameter ratio is $H/d = 16$ and the suspension is moderately concentrated ($\phi = 2.5 - 5\%$). In this case, the turbulence of the suspension flow is expected to be enhanced yielding lower critical Reynolds number than for single-phase flow transition (Matas et al., 2003). Section 5 describes the suspension dynamics below the transition threshold. At the end of the chapter, main findings are summarized in the concluding section.

2 Simulation procedure

2.1 Single-phase flows

Relaminarization of single-phase flow is achieved by reducing progressively the Reynolds number until complete damping of the flow fluctuations. However, this procedure does not give a single value of the critical Reynolds number below which the turbulence vanishes. Instead, it gives information on the distribution of lifetime of a turbulent state. For example in pipe flows, the probability of lifetime follows a Poisson distribution (Faisst and Eckhardt, 2003; Mullin and Peixinho, 2006; Avila et al., 2010).

We carried out direct numerical simulations of single-phase flows in a plane channel, with periodic boundary conditions in streamwise and spanwise directions (x and z respectively). No-slip boundary conditions are imposed at the channel walls (y is the wall-normal direction). For each new value of the Reynolds number, the computation time of simulations was set to $T_1 = 2000H / \langle U \rangle$, allowing the transition to a fully-laminar regime to take place.

The distance between the channel walls is H . We used two types of channel dimension and resolution for the simulations of single phase flows.

- The coarse grid channel dimensions are *e.g.* $(\pi H \times H \times \pi H)$ and the grid resolution is 64^3 ;
- The finer grid channel dimensions are *e.g.* $(\pi H \times H \times 2.5H)$ and the grid resolution is $(320 \times 100 \times 256)$.

The streamwise length is chosen in order to accommodate the largest flow structures in a fully-developed state at the largest Reynolds number at which the simulations have been run. According to Kim et al. (1987), in turbulent flows, the average vortical structures (related to the presence of streaks) are respectively 1000 units long and are separated by 100 wall units in the spanwise direction. As Re is gradually decreased, the length of the coherent structures is increasing (Kim et al., 1987) until it eventually exceeds the length of the computational domain, requiring larger domains to fully capture the developed structures. However, the main objective of our study is to capture the flow dynamics near the wall and further evaluate the effect of particles on that flow. For that purpose, the size πH of the domain proposed is sufficient.

The spanwise length πH is many times larger than the diameter of the vortical structures as the Reynolds number is decreased in single-phase flow simulations (the diameter of the vortices increases while their energy decreases). The spanwise length is reduced to $2.5H$ for the finer grid simulations for technical reasons (this allowed us to use the Fourier pressure solver while keeping the mesh grid uniform in all directions). The box truncation in the spanwise direction shifts the transition regime from $Re = [1600 - 1850]$ to $[1800 - 2000]$. This is the only effect we observed due to the truncation operation for single-phase flow dynamics.

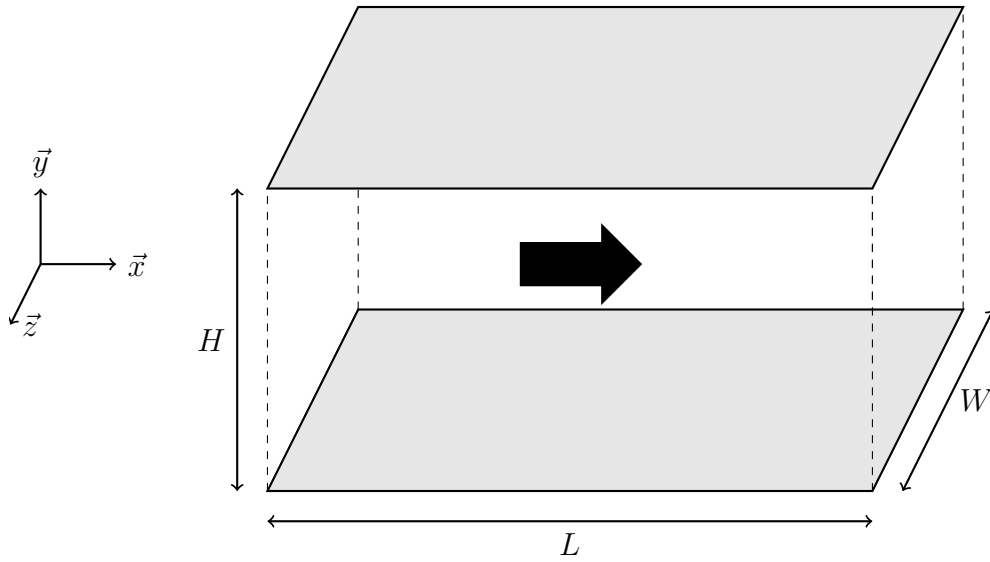


Figure 3.1: Sketch of the simulation domain.

2.2 Two-phase flows

The main objective of the two-phase flow simulations is focused on the effect of large particles on the flow undergoing transition regime. In Chapter 1 we have shown that the FCM accurately reproduces the hydrodynamic interaction when the particulate Reynolds number based on the local shear rate γ satisfies the condition $Re_p \leq 10$ where $Re_p = \gamma a^2 / \nu$. Therefore for all the simulations, a constraint must be satisfied :

$$Re_p = Re \left[\frac{\langle \gamma \rangle H}{\langle U \rangle} \right] \left(\frac{a}{H} \right)^2 \leq 10 \quad (3.2)$$

While the shear rate varies from a maximum value at the channel wall to zero at the channel center, the average shear rate $\langle \gamma \rangle$ is used for a first estimate of the average particle Reynolds number. For all simulations, we

verified a posteriori that the local particle Reynolds number in the channel core does not exceed the limit value. For Reynolds numbers ranging in the transition regime, the selected particle size ($H/d = 16$, where d is the particle diameter) satisfies this criteria and is expected to reduce the relaminarization threshold according to Matas et al. (2003). Hence this particle was chosen for all the simulations discussed in this chapter.

The finer mesh grid channel was used for the particle-laden flow simulations (three grid points per particle radius are used for the present simulations). The starting point is a snapshot taken from the single-phase flow simulation obtained with the coarse grid channel at $Re = 1625$ (the lowest Reynolds number above which the flow remains unsteady). The flow field is linearly interpolated from the coarse grid onto the finer grid. Then particles are initially seeded at random positions in the simulation box (3107 and 1553 particles were used for two particle volumetric concentration $\phi = 5\%$ and 2.5% respectively). Then the relaminarization of the suspension flow is considered by reducing the Reynolds number (similarly to the single-phase flow simulations).

As the number of grid cells of the domain is greatly increased, typical simulations of the suspension flow were carried out during $T_2 = 800H/\langle U \rangle$ (taking 80 days parallel computation on 64 processors).

2.3 Pressure regulation

Unlike fully turbulent and laminar flows, there is no straightforward relationship between the pressure-drop and the flow rate in the transition regime. Simulations performed with a fixed pressure-drop may induce undesired change of the average flow rate and hence Reynolds number variation in time. For this reason, in both single and two-phase flow cases, simulations were performed with a constant flow rate thanks to a dynamic regulation of the pressure-drop. Hence, at the time step it , the pressure-drop $\partial p/\partial x$ is adapted in order to ensure a bulk velocity close to a given target value U_{tar} such as:

$$\frac{\partial p^{it}}{\partial x} = -\frac{|\tau_{\text{bottom}}^{it-1}| + |\tau_{\text{top}}^{it-1}|}{2} + k_p \left(\langle U \rangle^{it-1} - U_{\text{tar}} \right), \quad (3.3)$$

in which k_p is the proportional coefficient of the regulation, and τ_{bottom} and τ_{top} are the average wall shear stresses measured respectively at the bottom and the top walls at the iteration $it - 1$. The value of k_p defines the reactivity of the system in response to a difference between the bulk velocity at the iteration it and the target value. In proportional regulations, k_p is set

large enough to guarantee fast convergence towards the target value, but not too large to avoid diverge problems.

Figure 3.2 shows an example of the temporal evolutions of the pressure-drops in both single and two-phase flows, scaled by $2 \langle \tau_w \rangle / H$ where τ_w is the average shear stress on both walls corresponding to each case. k_p is set to 1 in single-phase flow simulations, and to 50 in two-phase flows. For both flows, the relative error between the bulk velocity and the target velocity is of $O(10^{-4}\%)$.

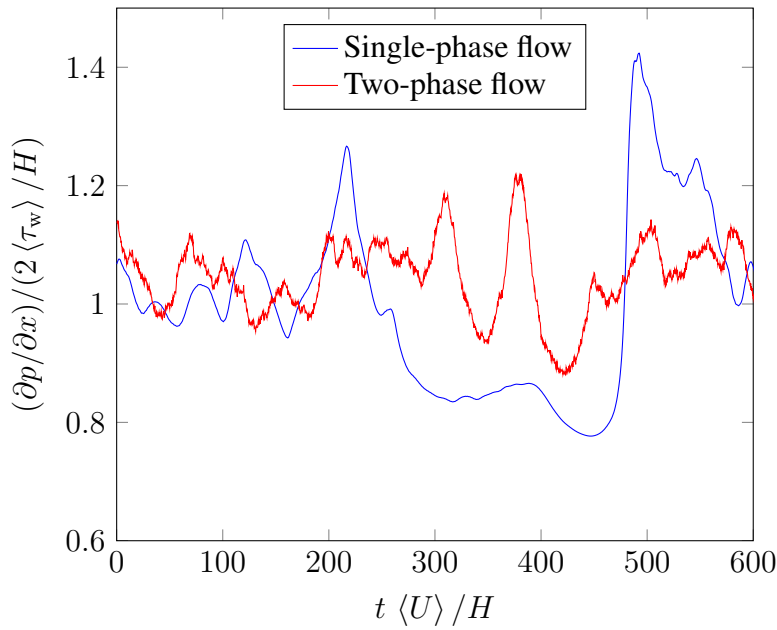


Figure 3.2: Time evolution of the pressure-drop of fluctuating flows at $Re = 1575$.

3 Single-phase flow in the transition regime

The velocity field is initialized with a laminar parabolic profile at $Re = 6000$ and a given amount of noise is added to trigger turbulence. When statistically steady state is reached, the flow is turbulent and the friction Reynolds number based on the friction velocity and on the channel half-width is $Re_\tau = u_* H / (2\nu) = 190$. The numerical simulations of Moser et al. (1999) have shown that this Reynolds number falls in the range where the flow exhibits all turbulence features. Their results at $Re_\tau = 180$ (originally published in Kim et al. (1987)) were obtained from direct numerical simulations based on spectral element method using a simulation domain twice longer than the one considered in our study and a mesh size $\delta_x^+ = 17.7$, $\delta_y^+ = 4.4$

and $\delta_z^+ = 5.9$.

Figure 3.3 contains the plots of the root mean square velocity and vorticity fluctuations. The r.m.s. profiles that we obtained using the finer grid channel ($\delta_x^+ = \delta_z^+ = 3.8$) match perfectly the results of Kim et al. (1987). Also the velocity fluctuations obtained from the coarse grid channel results ($\delta_x^+ = \delta_z^+ = 18$) agree reasonably well with the fully resolved simulations. As for the vorticity fluctuations, the spanwise component is not sensitive to the grid resolution, whereas streamwise and the wall-normal vorticity components are underestimated near the channel walls. Although this discrepancy might flaw the results in the turbulent regime, this effect is much lower while the Reynolds number is decreased towards the transition to laminar regime because flow structures become larger.

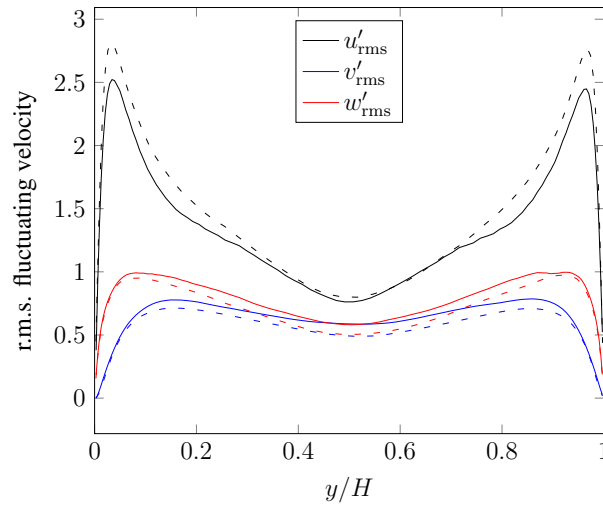
Starting from $Re = 6000$ with the coarse grid channel, the Reynolds number has been progressively decreased in successive simulations until the flow became fully laminar. The Reynolds number was decreased from 6000 to 3000 with a step of 1000. At each step, the simulation is carried out over sufficient time to reach statistical steady state. Then Re was decreased from 3000 to 2000 with a step of 200. Below $Re = 2000$, when the flow is close to transition between laminar and turbulent regimes, the reduction step applied to the Reynolds number could have a significant effect on the evolution of the flow. The step has to be small enough to prevent early turbulence extinction, and reasonably large in order to minimize the number of simulations. In our cases, the decrease of the Reynolds number respects the following constraint:

$$|dRe| \leq \frac{4}{0.073} Re^{5/4} dC_f, \quad (3.4)$$

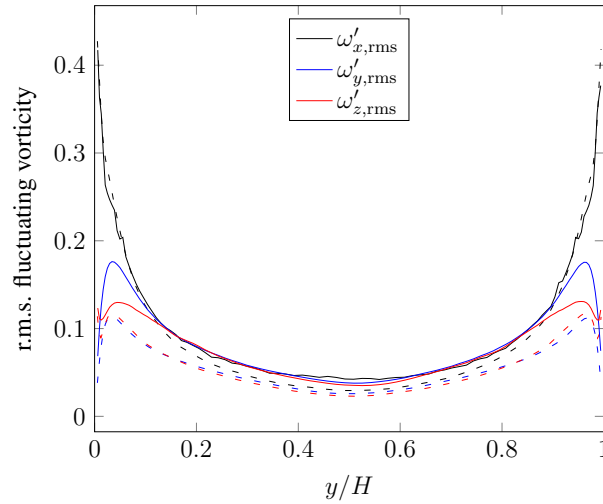
issued from Dean's relation for the friction coefficient in a turbulent smooth walls channel. The order of magnitude of dC_f can be directly deduced from the fluctuations of the friction coefficient (see figure 3.4).

$Re = 1800$ is the lowest Reynolds number at which the flow did not relaminarize. In the transition regime, five simulations were run for each Reynolds number, starting from different initial conditions (obtained from the simulations at previous Re). Keeping in mind that the main purpose of our work is to study how the particles modify the relaminarization process in comparison with the single-phase flow, five simulations performed at each Reynolds number (starting from different initial conditions) allow drawing up rough statistics of relaminarization for the studied cases, even though statistics are not fully converged. Results are gathered in table 3.1. Due to the limited size of the sample for each Re step, the percentage of relaminarized cases is

not a monotonic decreasing function of the Reynolds number. However, when a probability of 100% is reached, any further Re reduction step will lead to the same result. One may notice the difference in terms of probability between runs $1800 \mapsto 1750$ and $1750 \mapsto 1725$ and may think that the decrease of probability observed would be due to a lower step value of Re as the in case $1750 \mapsto 1725$ while the other cases share the same step value. We believe that this is only a coincidence since all the steps used to decrease the Reynolds number satisfy the constraint presented in eq. (3.4).



(a)



(b)

Figure 3.3: Profiles of the r.m.s. velocity (a) and vorticity (b) fluctuations at $Re = 6000$. Solid and dashed lines stand for the finer grid ($\delta_x^+ = \delta_z^+ = 3.8$) and coarse grid ($\delta_x^+ = \delta_z^+ \approx 18$) channels, respectively .

Re	Probability of relaminarization before T_1 (%)	Probability of relaminarization before T_2 (%)
1850 \mapsto 1800	0	0
1800 \mapsto 1750	80	0
1750 \mapsto 1725	40	0
1725 \mapsto 1675	80	40
1675 \mapsto 1625	80	40
1625 \mapsto 1575	100	100

Table 3.1: Probability of relaminarization after two different simulation times $T_1 = 2000H/\langle U \rangle$ and $T_2 = T_1/3$.

3.1 Wall friction and velocity fluctuations

The wall friction coefficient and the velocity fluctuations were computed at each Reynolds number investigated. The corresponding results are displayed in figure 3.4. Figure 3.4a shows good agreement between computed data and Dean’s friction law for a smooth wall channel. In the range $Re = [2000 - 5000]$, our numerical simulations slightly underestimate the value of the friction coefficient, probably because the mean velocity profile in the logarithmic region (not presented here) exhibits slightly larger values than the wall turbulent law. Such a discrepancy between the velocity profile in this range of Reynolds numbers and the fully turbulent profile has been observed earlier by Moser et al. (1999).

The evolution of the friction coefficient reported in previous studies on pipe and channel flows (Patel and Head, 1969; Iida and Nagano, 1998; Priymak and Miyazaki, 2004) is progressive towards the laminar regime. In our simulations, figure 3.4a shows a sharp decrease of the friction coefficient at $Re = 1575$, from the value corresponding to a turbulent state to the laminar regime. This drastic change of the friction coefficient is likely due to the size of the domain used in the present work, which is not long enough to allow an accurate description of the transition in “real channel flow” conditions. Indeed, it does not account for the coexistence of alternate laminar and fluctuating structures over large distances (similarly to puff structures in a pipe). Simulations (for the same conditions) with a twice larger streamwise dimension ($2\pi H$ instead of πH) exhibited the same behavior. Hence much

longer channels¹ should be considered to observe a progressive evolution of the friction coefficient from the turbulent to laminar law behavior as in the experiments. This would become quickly prohibitive for the simulation of particulate cases. For these reasons, we consider that the box size used for the present simulations is suitable to capture the important features related to the presence of particles in a transitional flow (fluid-particle interactions responsible of enhancement or damping of turbulence), but not to compute wall friction law in transitional regime in a channel flow.

Figure 3.4b shows the evolution of the dimensionless intensity of the transverse velocity fluctuations (eq. (3.5)) as a function of Re :

$$I = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(\langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle)}}{\langle U \rangle} \quad (3.5)$$

where $\langle v'^2 \rangle$ and $\langle w'^2 \rangle$ are time and space-averaged velocity fluctuations respectively in the wall-normal and spanwise directions. The intensity of the velocity fluctuations barely decreases while the Reynolds number is reduced, before vanishing abruptly at $Re = 1575$.

The instantaneous friction coefficient (or equivalently, the pressure drop signal) obtained by numerical simulations of turbulent single-phase flows oscillates around its time-average with a relative amplitude close to 20%. The characteristic oscillation time is of the order of $100H / \langle U \rangle$, in agreement with the observations of Jiménez and Moin (1991). However when the flow approaches relaminarization, the amplitude of the oscillations increases up to about 40% of the time-average value, without significant modification of the frequency. It is of particular interest to look in figure 3.5 at the evolution of the wall friction coefficient at $Re = 1575$ just before relaminarization occurs. The temporal signal for the single-phase case (—) shows that the friction coefficient oscillates between a quasi-laminar value, where it is almost constant and close to the value corresponding to the laminar regime (horizontal line in figure 3.5), and a turbulent state corresponding to a velocity profile almost fitting the standard logarithmic law. The intermittency of the flow at this critical Reynolds number (also noticed on the evolution of the flow velocity fluctuations in time) is consistent with the experimental observations (Patel and Head, 1969) and direct numerical simulation results (Iida and Nagano, 1998).

¹For indication, experimental studies agree on a puff length of about 40 – 50 radii in the equilibrium state (Avila et al., 2010; Mellibovsky et al., 2009; Mullin and Peixinho, 2006).

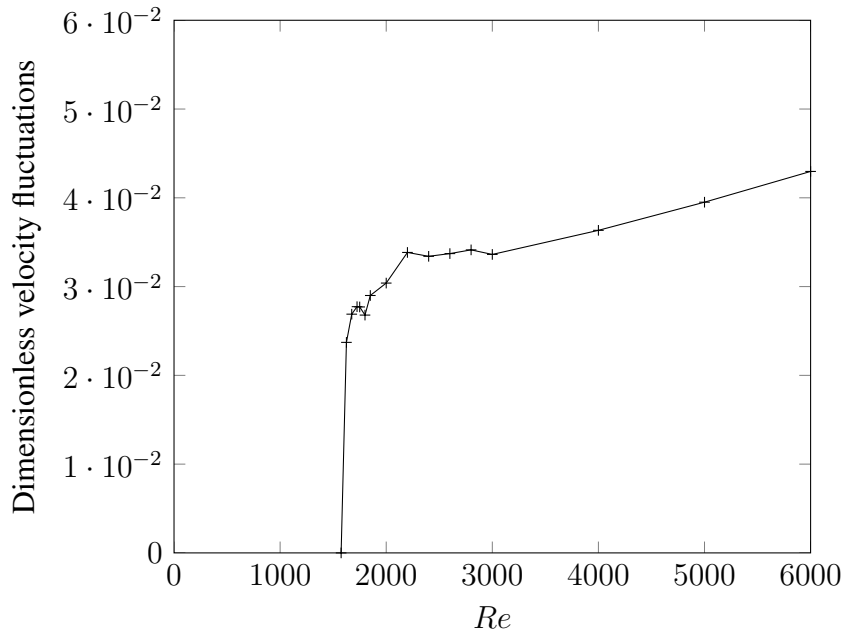
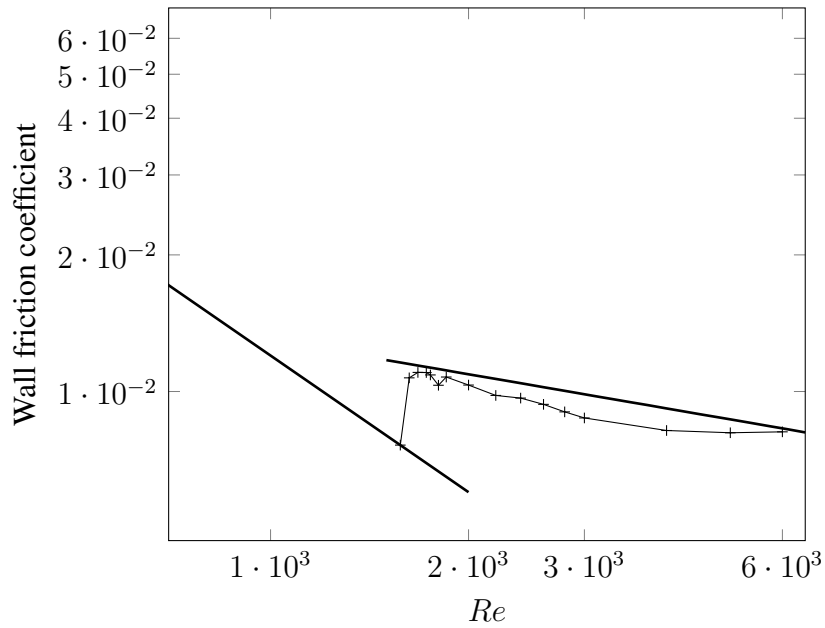


Figure 3.4: Wall friction coefficient and dimensionless velocity fluctuations (eq. (3.5)) versus Reynolds number. Symbols (+) are for the single-phase flow simulations.

(a): The solid lines represent the laminar law ($C_f = 12/Re$) and turbulent Dean's law for a smooth wall ($C_f = 0.073 Re^{-1/4}$) for channel flows.

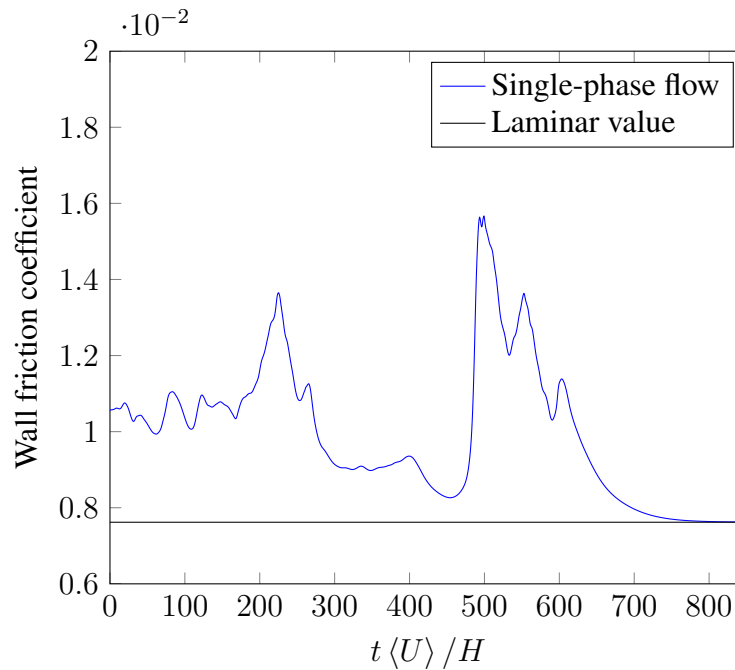


Figure 3.5: Temporal evolution of the wall friction coefficient at $Re = 1575$.

3.2 Coherent structures prior to relaminarization

Visualizing the large scale structures is also another way to estimate – *a posteriori* – if the computational box size is sufficiently large for vortices to freely develop. The λ_2 -criterion (Jeong and Hussain, 1995) has been selected to represent the coherent structures in single-phase flows. These structures are plotted in figure 3.6 just before the flow became laminar at $Re = 1575$. The size of the box seems to be appropriate as the developing elongated vortices are smaller than the length of the domain. Figure 3.6 suggests that the quasi-coherent streamwise vortices play a role in the bursting phenomena that sustains the “turbulence” in the flow before laminar state is reached. Vortical structures are distributed in the entire channel, and not concentrated in the near-wall region. The distribution, shape and size of the coherent structures are consistent with the observations of Iida and Nagano (1998) on the relaminarization mechanisms. These authors have shown that while the quasi-laminar state develops, the viscous sub-layer increases, leading to a shift in the maximum position of streamwise velocity fluctuations towards the channel center. They have also shown that the anisotropy of turbulence increases, and that the inter-component energy transfer is insufficient to correct anisotropy, although the generation mechanism of the turbulent kinetic energy is still effective.

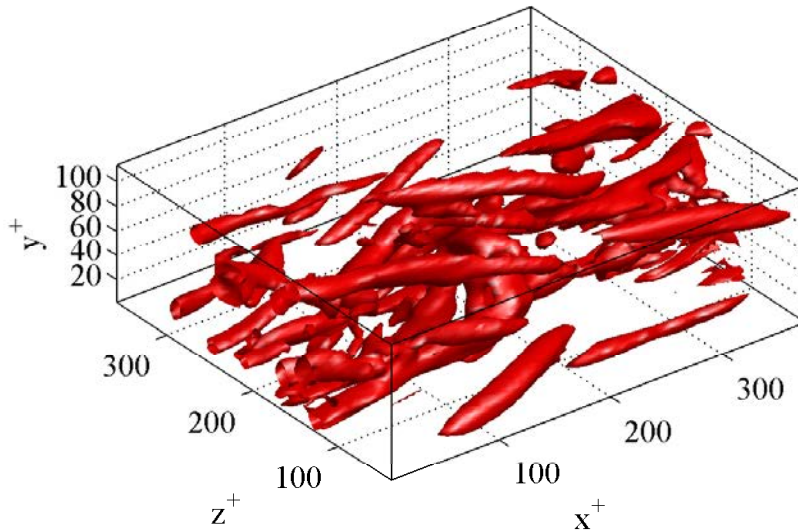


Figure 3.6: Coherent structures visualized by the λ_2 -criterion for the single-phase case at $Re = 1575$ before the flow relaminarizes. The magnitude of the contours shown here is equal to four times the standard deviation.

4 Fluctuation enhancement by particles in the transition regime

Particles are randomly seeded in the unsteady channel flow before the flow completely relaminarizes at $Re = 1575$. In this range of flow Reynolds numbers, the particle Reynolds number, defined as $Re_p = \gamma a^2 / \nu$ where γ is the local shear rate, is smaller or equal to 10, lying within the range of validity of the FCM method in a simple shear flow (see figure 1.6 in chapter 1).

At $Re = 1575$, when the single-phase flow fully relaminarizes, a turbulent-like behavior is maintained in the two-phase flow case. A sample of 30 particle trajectories is drawn in figure 3.7 showing that they occupy all the flow region, whereas in a laminar flow, particles are expected to migrate towards the near-wall region (Segré-Silberberg effect, illustrated in figure 2.8), and their deviation from the equilibrium positions results from multi-particle interactions due to the shear flow. While particle migration towards the channel walls is clearly observed in figure 3.7, some particles in

the near-wall region are pulled off by the turbulent structures occurring from bursting events. Then those particles are transported again in the core of the flow.

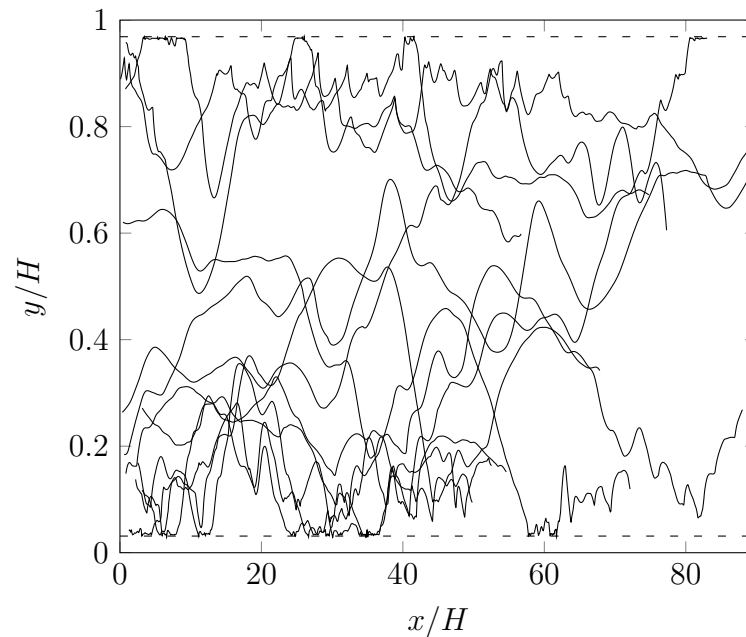


Figure 3.7: Sample of particle trajectories projected in the flow-shear plane (x, y) at $Re = 1575$. The horizontal solid lines indicate the wall positions. Horizontal dashed lines indicate the position of the particle center when the particle starts to overlap the wall.

4.1 Average profiles of fluctuating suspension flows

The particle volume fraction, flow velocity and total shear stress profiles obtained from the two-phase flow simulations at $Re = 1575$ are plotted in figures 3.8, 3.9 and 3.10, and averages have been formed over time and homogeneous directions x and z .

A snapshot of particle centers in the (x, y) plane is reported in the inset of figure 3.8 (after steady state was reached), showing that particles occupy the entire domain, with a larger presence in the near-wall region. Indeed the solid volume fraction profile confirms the homogeneity of the suspension: it is almost constant (ϕ slightly less than 5%) in the core of the channel, with a concentration peak ($\phi \approx 10\%$) near each wall due to particle migration across streamlines of the mean flow. The local minimum located near the peaks in

the concentration profile is likely due to excluded volume effect (finite size of particles).

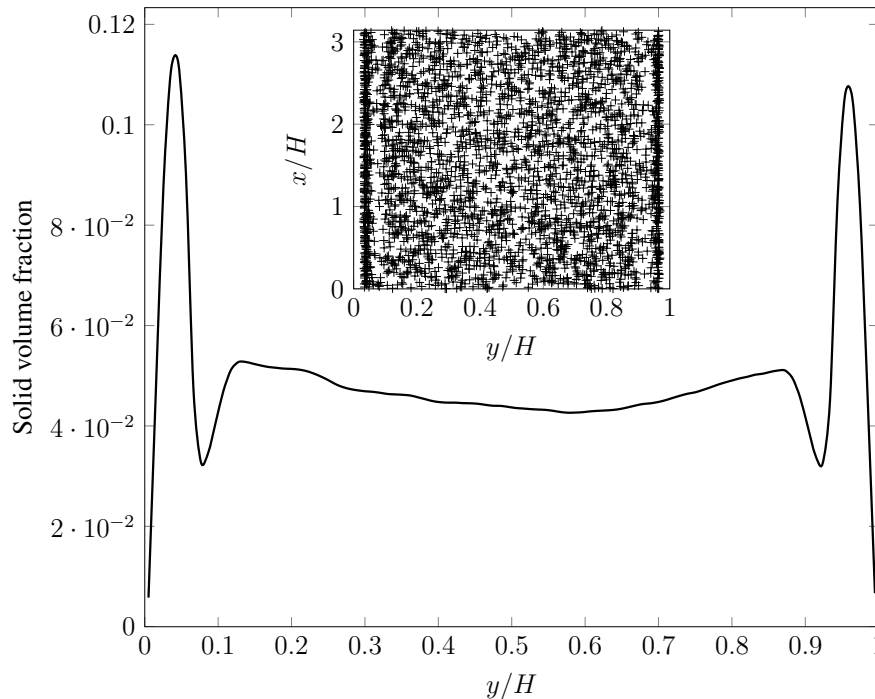


Figure 3.8: Average solid volume fraction profile at $Re = 1575$. Inset: projection of the particle centers in the flow-shear plane (x, y) .

The suspension velocity profile (squares in figure 3.9) suggests that the averaged suspension flow matches exactly the fluctuating single-phase flow profile at the same Reynolds number ($Re = 1575$). Moreover, the velocity profile in the transition regime is flatter than the laminar velocity profile in the channel core. It exhibits a lower velocity gradient at the channel walls than in the fully turbulent regime.

The total shear stress (sum of viscous and Reynolds stress contributions), normalized by the wall shear stresses, is displayed in figure 3.10 for both single and two-phase fluctuating flows. Both curves indicate that the macroscopic momentum balance corresponds to a steady parallel flow in both cases. The two-phase flow profile shows a bump near the walls, due to higher concentration and therefore to larger hydrodynamic interactions in that zone.

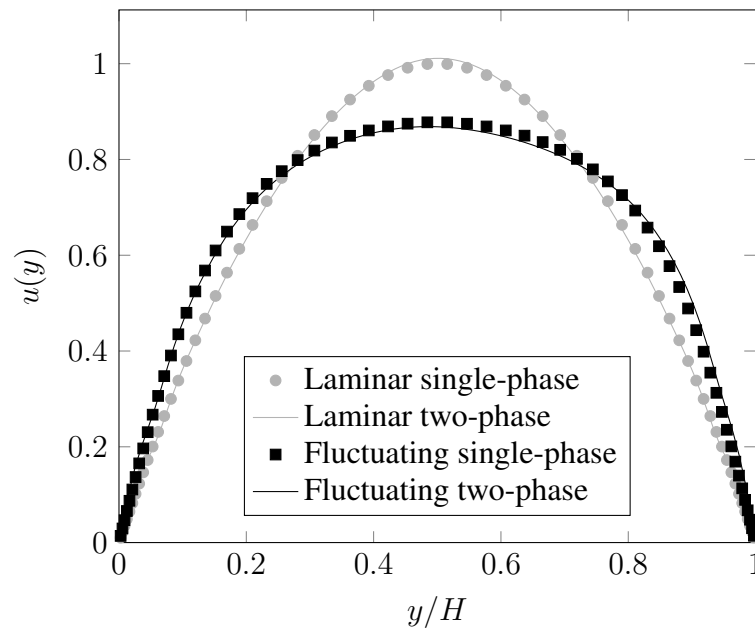


Figure 3.9: Average velocity profile of fluctuating flows at $Re = 1575$ (thin line for single-phase flow and square symbols for two-phase flow) and of laminar flows (solid line for single-phase flow and circle symbols for two-phase flow).

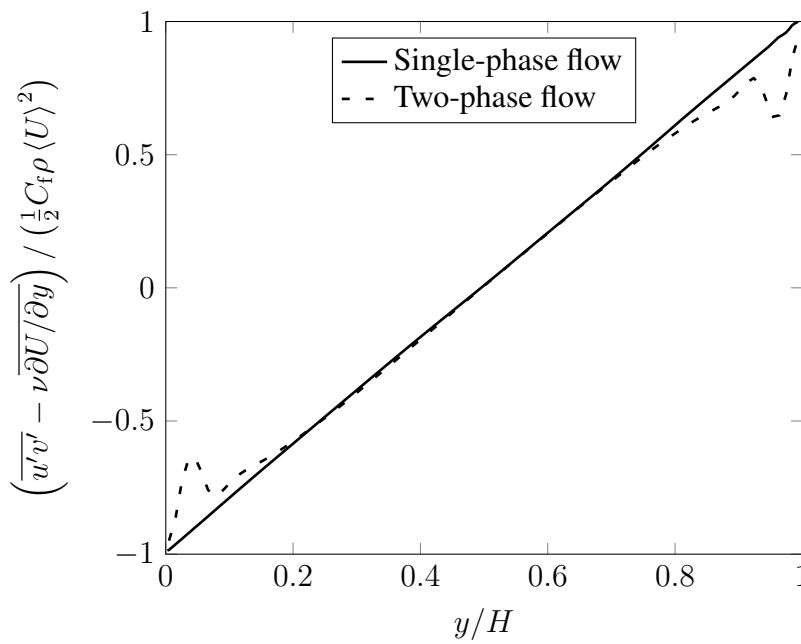


Figure 3.10: Total shear stress τ_{xy} profiles at $Re = 1575$.

4.2 Wall friction and velocity fluctuations

The presence of particles in the near-wall region increases the velocity fluctuations and the wall friction coefficient (figure 3.12). The temporal evolution of the wall friction coefficient of the particulate flow at $Re = 1575$ is plotted in figure 3.11. The friction coefficient is increased by a factor 1.5 compared to the single-phase case at same Reynolds number. Figure 3.5 suggests that intermittency revealed by the low-frequency high-amplitude fluctuations of the friction coefficient is sustained as in single-phase flows, with slightly higher oscillating frequency. It is due to the persistence of large-scale coherent structures of reduced size in the two-phase configuration, as suggested in figure 3.15. Moreover, the temporal signal of the friction coefficient exhibits additional high frequency and small-amplitude fluctuations that are not observed in the single-phase signal. It is interesting to note that the time-scale of these small-scale fluctuations is a particle-induced time scale which order of magnitude is $O\left(a/\sqrt{\langle u'^2 \rangle}\right)$ where $\sqrt{\langle u'^2 \rangle}$ is the root mean square (r.m.s.) of velocity fluctuations in the flow direction. The time-averaged values of the friction coefficient in the suspension flow are reported in figure 3.12a (black dots) for $1000 \leq Re \leq 1575$. The friction coefficient is larger than that predicted in either fully laminar or turbulent regimes. It is also nearly constant for $Re \geq 1400$, suggesting that the wall friction is mainly due to hydrodynamic interactions with a concentrated layer of particles close to each wall.

Normalized velocity r.m.s. profiles are shown in figure 3.13 at $Re = 1575$. In single-phase flow at $Re = 6000$, data (plotted in figure 3.3a) agree with those obtained both experimentally and numerically (Kim et al., 1987; Moser et al., 1999). In the transition regime single-phase flow profiles are modified with respect to the fully turbulent profiles, spanwise and wall-normal components reaching a maximum in the core of the channel instead of the near-wall region.

The r.m.s. velocity fluctuations calculated in the two-phase flow are obtained using a *composite-averaging* which does not discriminate between the solid and fluid phases (as explained in Garcia-Villalba et al. (2012)). At this Reynolds number, the fluctuations in the flow direction are slightly modified by the presence of particles, more specifically in the center of the channel where particles reduce the velocity fluctuations induced by large-scale structures. The effect of the particles is more significant with the wall-normal and spanwise fluctuating velocities. First, their intensity is nearly twice larger than the corresponding single-phase flow fluctuation level. Second, the profile shape is quite different: they are almost flat in

the channel core and they stiffly decrease close to the walls. This behavior is opposite to the observations of Shao et al. (2012) in turbulent flows at $Re = 5000$, $H/d = 10$ and $\phi = 7\%$. Their paper reported that particles increase the streamwise velocity fluctuations in the core of the channel, and slightly modify the wall-normal and spanwise fluctuations profiles compared to the single-phase turbulent flows. Such a difference between the turbulent and transitional fluctuation profiles in suspension flows therefore suggests that particles have different impact on the energy distribution in the flow.

Note that the streamwise and spanwise profiles are slightly asymmetrical. Flows undergoing a laminar-turbulent transition are strongly unsteady. Hence, the asymmetry could be related to slightly unsteady statistics for the simulation time T_2 . Another explanation is that the time-average particle number density is slightly larger in the lower part of the channel (0.3% of the total particle number), which could be related to the initial particle positions: the preferential particle migration depends on the particle position relatively to the channel center.

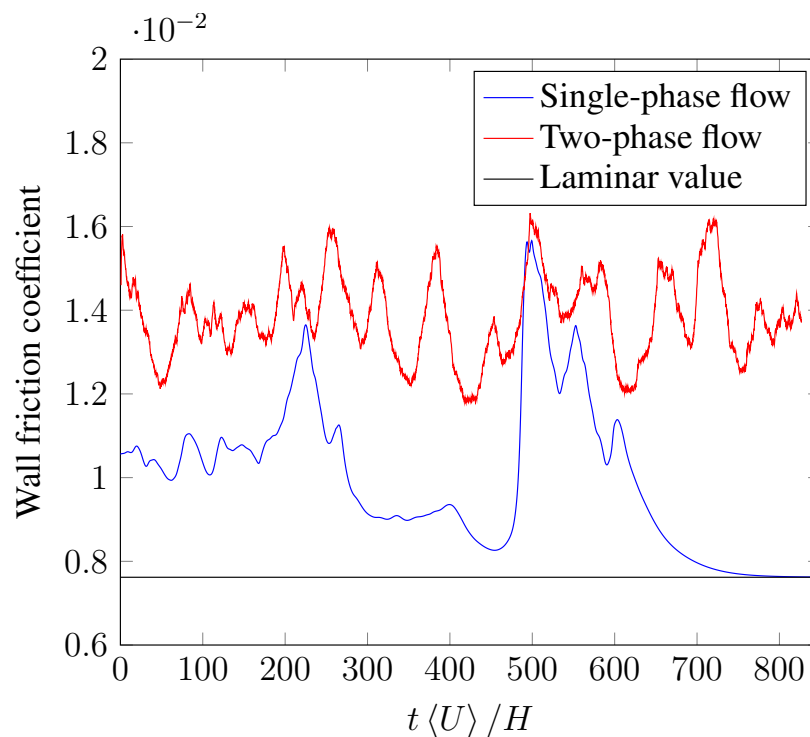
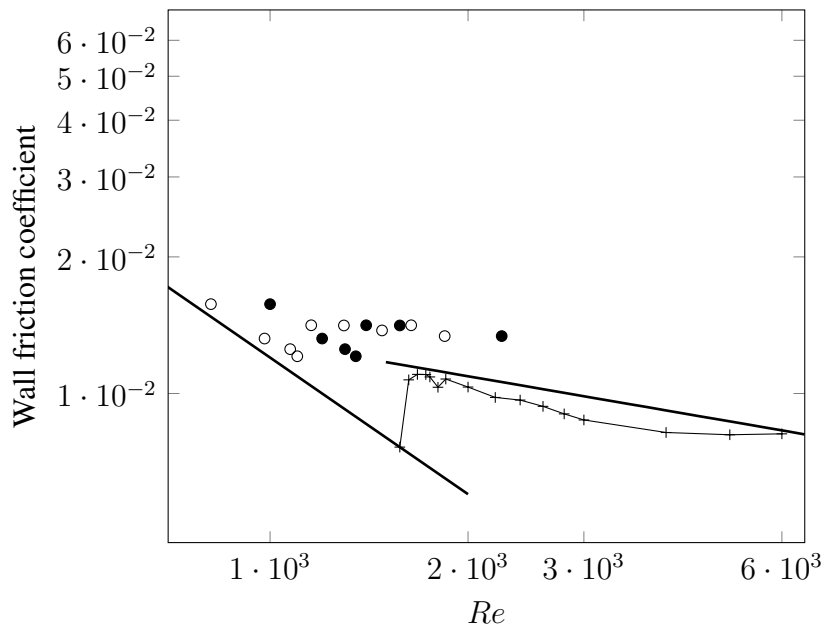
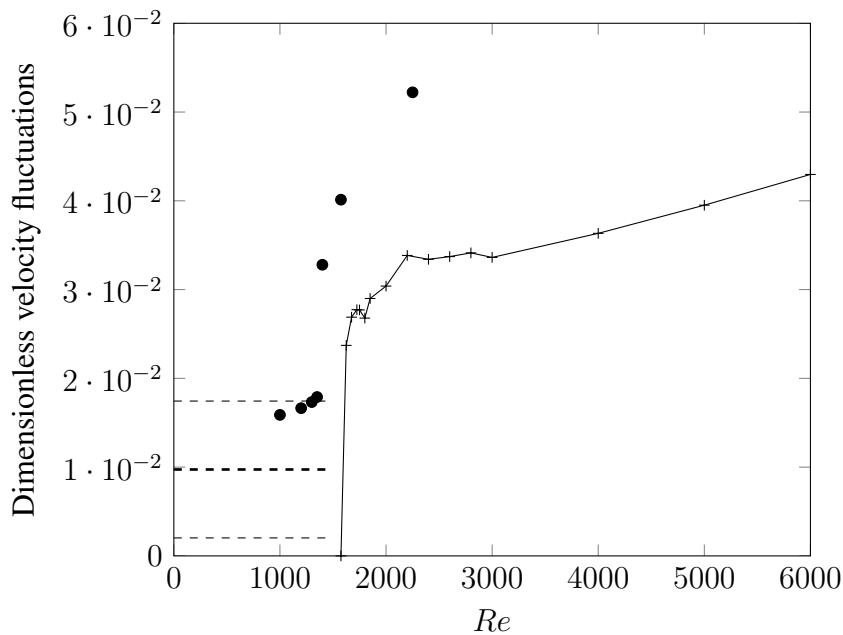


Figure 3.11: Temporal evolution of the wall friction coefficient at $Re = 1575$, including the wall friction signal of the two-phase flow at $\phi = 5\%$.



(a)



(b)

Figure 3.12: Wall friction coefficient and dimensionless velocity fluctuations (eq. (3.5)) versus Reynolds number. Symbols: single-phase flow (+), two-phase flow $\phi = 5\%$ (•).

(a): The solid lines represent the laminar law ($C_f = 12/Re$) and turbulent Dean's law for a smooth wall ($C_f = 0.073 Re^{-1/4}$) for channel flows. The circle symbols (o) stand for the friction coefficient of two-phase flows calculated with Reynolds numbers based on effective viscosity (eq. (3.1)).

(b): The solid line is only for eye guidance. The thick dashed line is the asymptotic limit of shear-induced agitation in simple shear flow (eq. (3.7)) with the standard deviation showed by thin dashed lines.

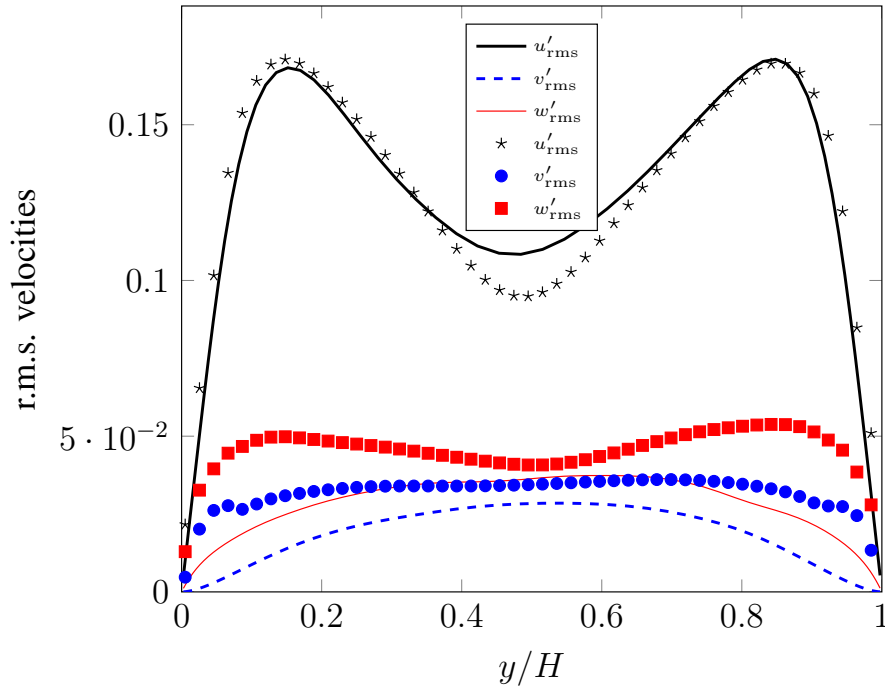


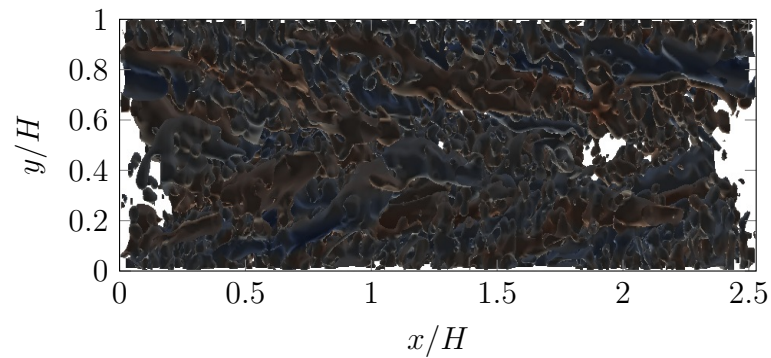
Figure 3.13: Profile of the r.m.s. velocity fluctuations scaled by $\langle U \rangle$ at $Re = 1575$. Symbols stand for two-phase flows, in the flow (\star), wall normal (\bullet) and spanwise (\blacksquare) directions. Lines present the results of single-phase flow simulations in the flow (solid), wall-normal (dashed) and spanwise (thin line) directions.

The time and space-averaged transverse velocity fluctuations (eq. (3.5)) at different Reynolds numbers are reported in figure 3.12b. The intensity of velocity fluctuations is increased compared to the single-phase case, due to the particle presence. Indeed, particles locally perturb the sheared fluid in the near-wall region where both the shear rate and the particle concentration are maximum. Particles also interact under the action of the large-scale flow structures. These hydrodynamic interactions increase the level of agitation in the channel flow.

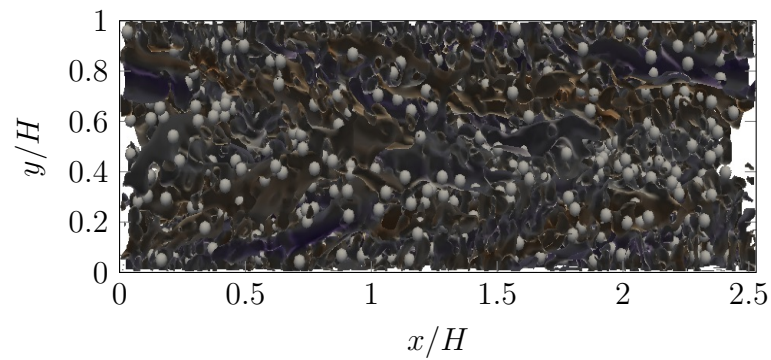
Two- and three-dimensional snapshots of spanwise and streamwise vorticity fluctuations and λ_2 contours are displayed in figures 3.15 and 3.14 respectively. Figure 3.14 depicts the flow vortical structures in the suspension flow at $\phi = 5\%$ and $Re = 1575$. Due to the perturbations induced by the particles, the λ_2 contours exhibit annulus-like artifacts around the particles, making the visual interpretation of the local flow dynamics more difficult. To avoid this, a filtering procedure based on a penalized least squares method is used around each particle (Garcia, 2010). The filtering is

performed in a cube surrounding the particle that spreads over ten meshes in the three directions (almost equal to twice the particle diameter). Though there remain some of these artifacts in the wall region, this filtering allows limiting strongly their occurrence in the domain, and a better visualization of the flow vortical structures. In figure 3.15, contour plots correspond to single-phase and two-phase flow patterns at the same Reynolds number $Re = 1575$ and in the range $[-\langle\gamma\rangle/2; \langle\gamma\rangle/2]$, where $\langle\gamma\rangle$ is the average shear rate of the single-phase flow. λ_2 contours, spanwise and streamwise vorticity maps of the single-phase flow let appear quasi-streamwise stretched vortices. The diameter of the counter-rotating pair of structures extends over about a quarter of the domain width. While observing different snapshots of the vortical structures at this Reynolds number, we could verify that they flatten and coalesce before vanishing. When adding particles, not only this “coalescence” process is slowed down, but particles seem to generate smaller structures with a larger vorticity and therefore a longer lifetime. Indeed vorticity fluctuations in the vicinity of the particle surface and in the near-wall region, are larger than anywhere else in the flow. This is mainly due to the interaction of neutrally buoyant finite-size particles with the local shear rate (for example in pure shear flow, at particle Reynolds numbers close to 5, the vorticity near the particle surface is 1.5 times larger than the unperturbed flow vorticity).

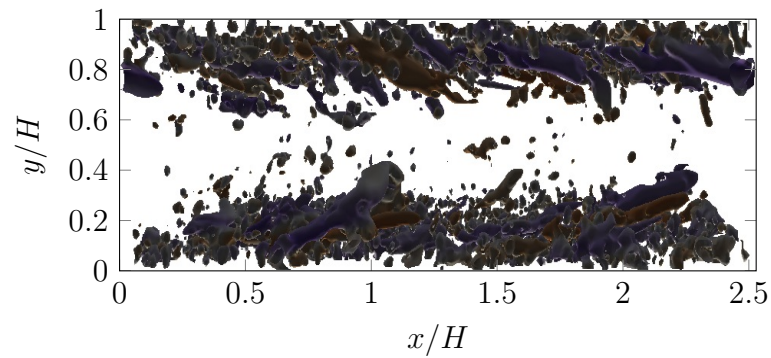
Hence, figure 3.15 suggests that the turbulence enhancement in particle-laden flow at $Re = 1575$ is both due to an additional source term of local perturbations induced by the particle finite size, and to the breakup of the large-scale eddies into smaller more energetic vortical structures, at the opposite of eddy energy transfer cascade in a turbulent flow.



(a)



(b)



(c)

Figure 3.14: Side view of a 3D snapshot of coherent structures developing in suspension flow at $Re = 1575$ and $\phi = 5\%$, with particles (b) and without particles (a and c). The contours displayed in (a,b) and (c) are respectively 4 and 25 times the standard deviation value of λ_2 .

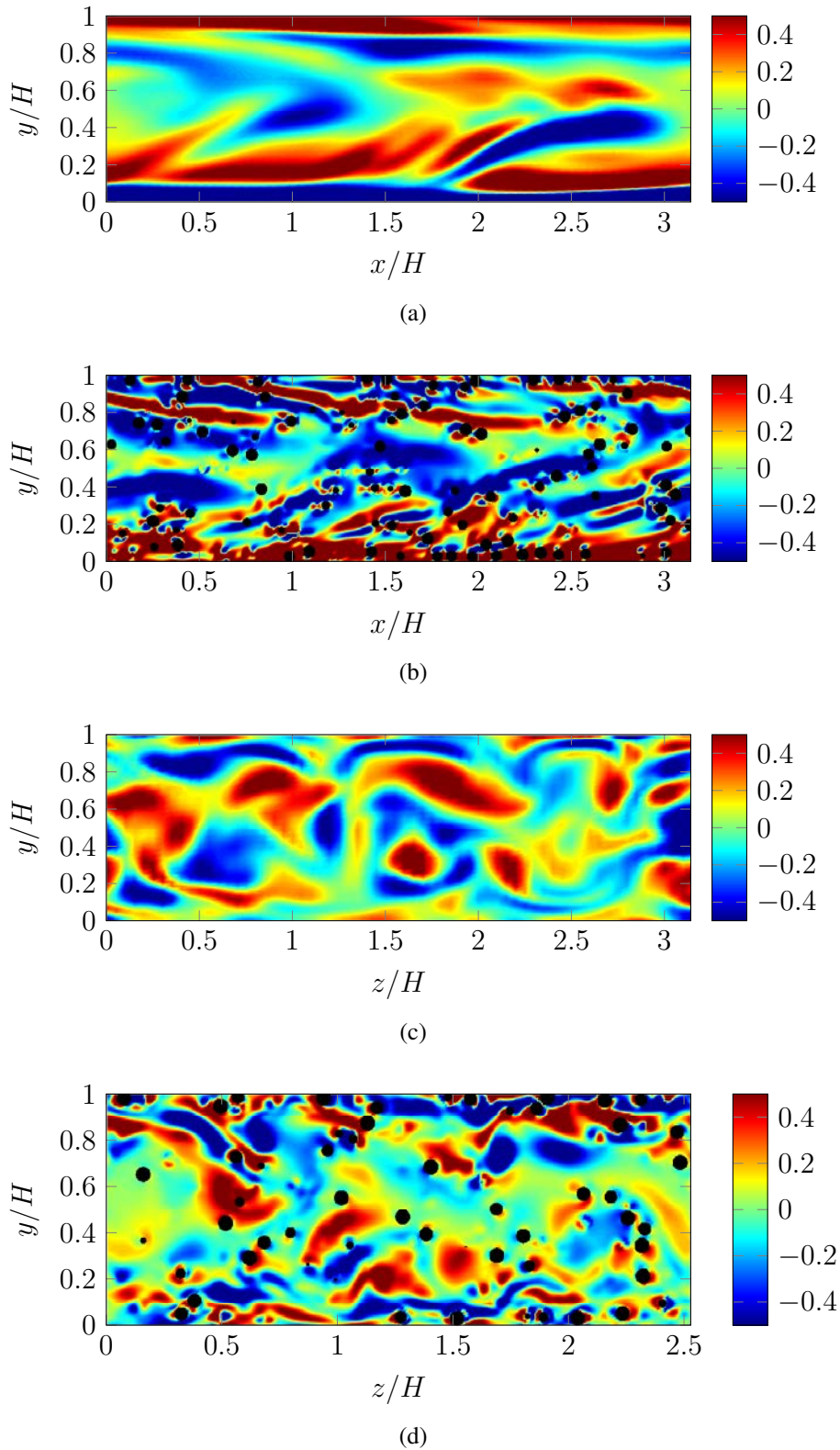


Figure 3.15: 2D slices of (a–b) spanwise ω'_z and (c–d) streamwise ω'_x vorticity fluctuations at $Re = 1575$ in the median section of the simulation domain. The fluid is flowing from left to right in (a–b). (a–c) and (b–d) correspond to single and two-phase flows, respectively.

4.3 Energy balance of the Reynolds stress component $\overline{\langle u'^2 \rangle}$

One main advantage of the DNS over experimental measurements is the capability of computing explicitly the various terms in the balance equations for the Reynolds-stress components. The budget of the Reynolds stress components is written in the general form following Chassaing (2000):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u'_i u'_j}) + \overbrace{\overline{U_k} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j})}^{\text{Advection}} = & \overbrace{\left[-\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} \right]}^{\text{Production}} \\
 & - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{p' u'_i}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{p' u'_j}) \right] \\
 & \overbrace{\left[+ \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j u'_k}) \right]}^{\text{Pressure diffusion}} \\
 & \overbrace{\left[+ \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k \partial x_k} + 2 \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right) \right)}^{\text{Viscous diffusion} \quad \text{Viscous dissipation}} \right] \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

For a complete energy budget, one should consider the balance equation of the total fluctuating energy $K = (\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle) / 3$. Only the budget of $\overline{\langle u'^2 \rangle}$ is considered here, which gives a glance on the solid phase influence on the production and dissipation contributions to the Reynolds stress balance.

The production, dissipation, pressure strain, turbulent and viscous diffusion contributions to the $\overline{\langle u'^2 \rangle}$ -budget are plotted in figure 3.16 at $Re = 6000$ (which corresponds to the initial condition for the transition simulations). Our results comply with that of Kim et al. (1987) for fully-developed turbulent channel flow. Here again we compare the different profiles obtained with both coarse and fine grid channels. The grid size does not have a drastical effect on the simulation results. The largest impact is found mostly for the diffusion terms close to the channel walls where the gradients are the steepest. Production reaches a peak in the buffer layer at $y/H \approx 0.03$ ($y^+ \approx 12$) prior to decreasing slightly towards zero in the logarithmic region. Around the peak, production exceeds dissipation in magnitude by a factor almost equal to two. The excess of energy is supplied to the viscous sub-layer via the viscous diffusion term. The dissipation at the wall is globally balanced by the viscous diffusion. Away from it, production is equal to dissipation.

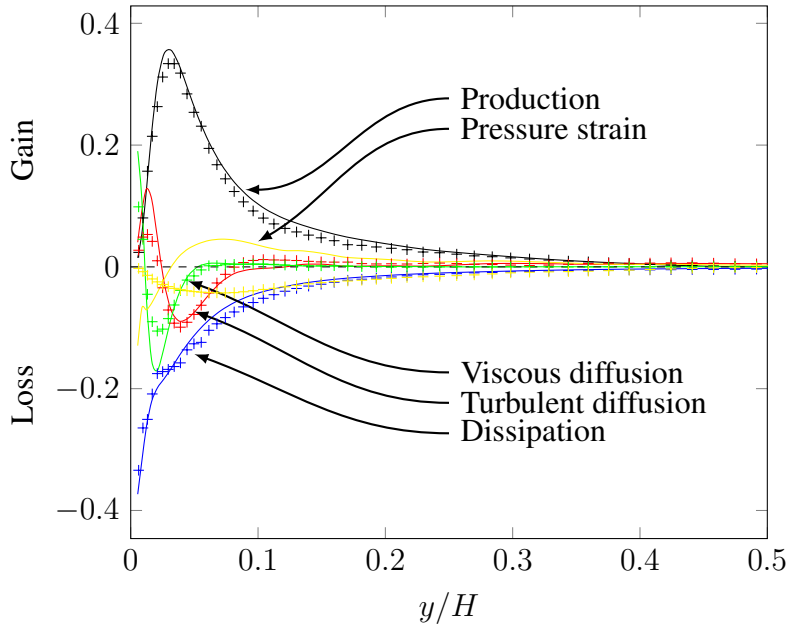


Figure 3.16: Kinetic-energy balance of $\overline{u'^2}$ normalized by u_*^4/ν (u_* being the friction velocity) and plotted in the lower half of the domain for $Re = 6000$. Solid lines stand for a resolution of 64^3 meshes while symbols are for a meshing of $256 \times 100 \times 258$ meshes.

Figure 3.17 displays the different components of the balance equation (except the pressure diffusion term) for a single-phase and a two-phase flows in the transition regime at $Re = 1575$. The different profiles obtained in the single-phase flow case agree well with the direct numerical simulation results of Iida and Nagano (1998). Particles drastically increase in magnitude both production and dissipation in a large part of the channel half. A peak of energy dissipation appears near the wall at $y/H \approx 0.05$ corresponding to the dense particle layer region (due to lateral migration). The peak of turbulence production is shifted towards the channel wall and its normalized magnitude reaches again the peak of the production contribution term in turbulent flows. This result shows that the particles sustain the turbulence level in the channel flow although they increase the effective flow viscosity and hence decrease the effective Reynolds number from 1575 to 1295. Moreover in suspension flow, the production like the turbulent diffusion terms, are large in the region occupied by the strongest flow coherent structures (see figure 3.15d). The viscous diffusion is slightly increased in the region close to the wall due to the increase of the effective local viscosity.

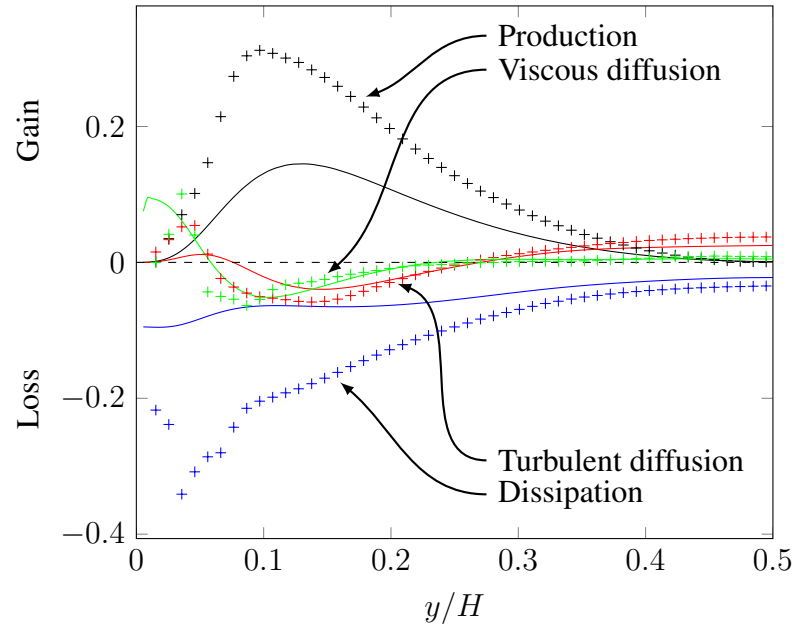


Figure 3.17: Different contributions to the budget of $\overline{\langle u^2 \rangle}$ plotted in half of the domain for $Re = 1575$. Solid lines stand for the single-phase case and symbols are for the two-phase case. Normalized by u_*^4/ν , with $u_* = \sqrt{0.5 C_f \langle u \rangle^2 / \rho}$.

5 Suspension dynamics below the transition

The Reynolds number of the suspension flow has been progressively decreased until relaminarization has been reached ($Re \leq 1350$). In the laminar regime, the average velocity profile of the suspension flow matches exactly the profile of a plane Poiseuille flow (figure 3.9). The laminar suspension dynamics explained in the last section of the previous chapter is restored.

Regarding the wall friction coefficient when the Reynolds number is decreased, (black dots in figure 3.4a) two different behaviors are suggested. For $Re \geq 1400$, the fluctuating flows undergo nearly constant friction coefficient whereas the friction coefficient increases when the Reynolds number is decreased below 1350. If the fluid viscosity is replaced by a suspension effective viscosity, the Reynolds number is modified corresponding to the black dots in figure 3.4a. When $Re \leq 1350$, if the carrier flow Reynolds number is replaced by the suspension Reynolds number Re_{eff} , the friction coefficient is close to the laminar single-phase law (open circles in figure

3.4a).

Below 1350, averaged velocity fluctuations in the channel flow approach a minimum value, without dropping to zero as observed in the relaminarization process of single-phase flows (figure 3.4b). Plotting the temporal evolution of the average streamwise flow velocity fluctuation, Yu et al. (2013) used a threshold value to identify laminar and turbulent flow regimes, which is of the same order of magnitude as the minimum value observed in figure 3.4b (direct quantitative comparison can not be made due to difference in flow geometry and particle-to-tube size ratio).

We estimated this minimum fluctuation level (thick dashed line in figure 3.18b) from the shear-induced particle agitation based on the dilute limit in unbounded Stokes shear flow (Drazer et al., 2004; Abbas et al., 2006). The shear-induced agitation depends on the local solid volume fraction and the local shear rate. Therefore an average agitation in the channel flow is obtained from eq. (3.7).

$$I_{\text{shear}} = \frac{\left\langle \sqrt{0.5\alpha\phi(y) [\gamma(y)a]^2} \right\rangle}{\langle U \rangle}, \quad (3.7)$$

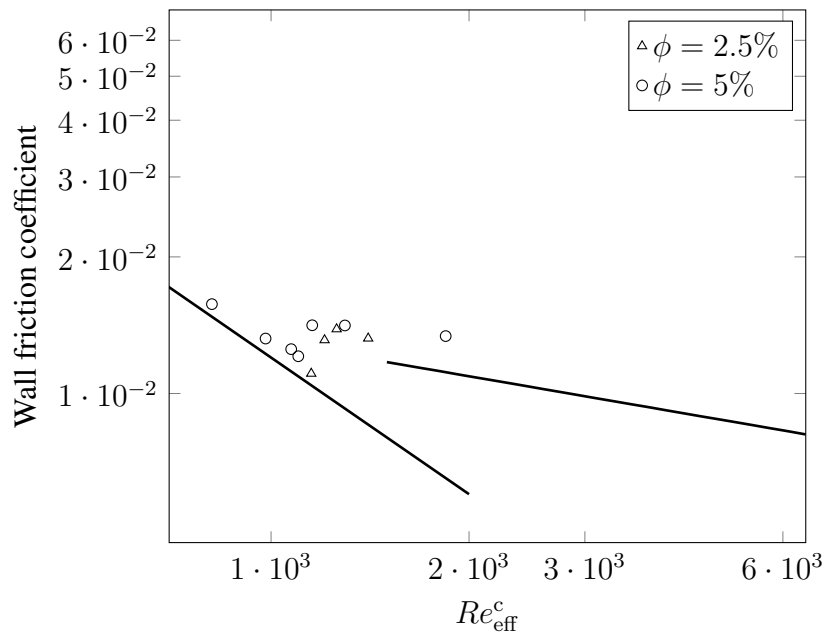
where $\alpha = 0.4$ is a constant related to the dilute limit in Stokes flow, a is the particle radius. Since both the particle volume fraction ϕ and the shear rate γ strongly depend on the distance from the channel wall, the standard deviation of the shear-induced agitation across the channel is significant (represented by thin dashed lines in figure 3.4b). The agitation due to transverse velocity fluctuations in the laminar suspension flow obtained by the numerical simulations falls within these bounds of shear-induced particle agitation. We anticipate that the influence of the particle Reynolds number (in the range of our work) on this prediction is small, according to the results of Yeo and Maxey (2013) obtained at $\phi = 20\%$ in unbounded shear flow.

5.1 Effect of the concentration on the transitional flow

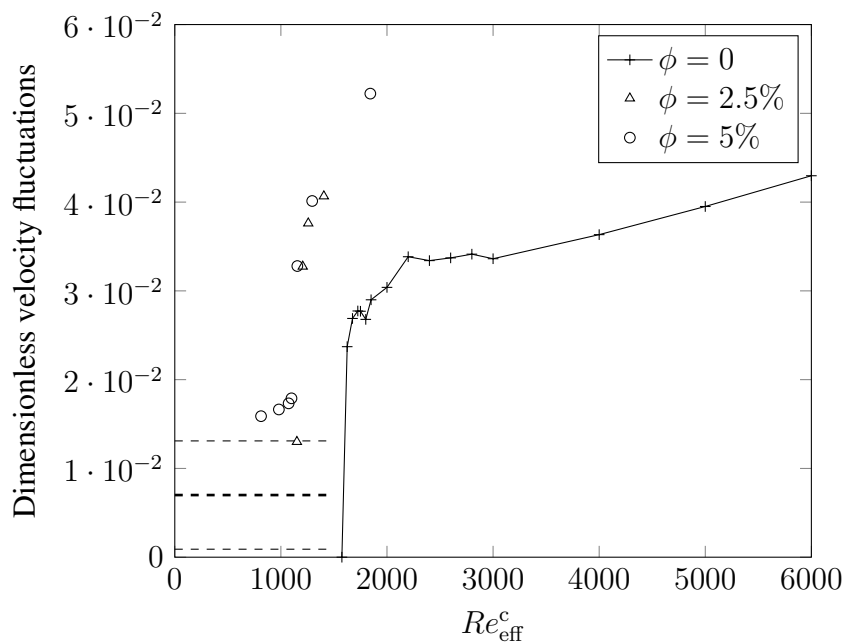
Matas et al. (2003) observed that when using large particles in the limit of dilute to moderately concentrated suspensions, a slight modification of ϕ impacts the value of the critical Reynolds number at the onset of turbulence. For instance, for a pipe-to-particle diameter ratio equal to 16, if the suspension concentration is decreased from $\phi = 5\%$ to 2.5% , the critical Reynolds number is increased from $Re_{\text{eff}} \approx 1275$ (taking into account the viscosity enhancement with the Krieger & Dougherty's formula) to $Re_{\text{eff}} \approx 1600$.

Another set of two-phase flow simulations starting from $Re = 1625$ were run at $\phi = 2.5\%$. The Reynolds numbers was reduced progressively similarly to simulations with $\phi = 5\%$. Figure 3.18 contains the evolution of the wall friction coefficient and the velocity fluctuation intensity for both concentrations ($\phi = 2.5\%$ and $\phi = 5\%$). For the friction coefficient displayed in terms of the effective Reynolds number, no significant effect of the concentration is observed (slightly lower critical Re_{eff} at $\phi = 2.5\%$). The influence of the concentration on the intensity of the velocity fluctuations seems negligible in the fluctuating flow. However, when the flow becomes laminar, the velocity fluctuation decreases considerably. This can be expected based on the shear-induced agitation argument since this latter depends strongly on the concentration (it is proportional to ϕ in the limit of Stokes flow).

The transition from the turbulent to laminar regime occurs at a critical Reynolds number $Re^c = 1300$ (which correspond to an effective Reynolds number of $Re_{\text{eff}} = 1130$) approximately equal to the threshold at $\phi = 5\%$. No definite conclusion can be drawn on this discrepancy with the experimental observation since the geometry is different (channel and pipe flows), and our results on the threshold for suspension flow relaminarization might depend on the channel length. The precise value of the critical Reynolds numbers should be checked with simulations in longer channels. Also the investigation presented here is carried out with one single initial condition for each reduction of the Reynolds number. Due to the stochastic nature of the relaminarization process, statistics should be performed on more simulations with different initial conditions, as we did in single-phase flow.



(a)



(b)

Figure 3.18: (a): Wall friction coefficient and dimensionless velocity fluctuations (eq. (3.5)) versus the suspension Reynolds number Re_{eff}^c .

The lines in both subfigures have the same significance as in figure 3.4b, however, the asymptotic limit of shear-induced agitation in simple shear flow (eq. (3.7)) is estimated for $\phi = 2.5\%$

6 Hysteresis

The analysis of the transition discussed in this chapter is appropriate for the turbulent-to-laminar transition. We also carried out numerical simulations of laminar Poiseuille flow laden with particles at $\phi = 5\%$, for different Reynolds numbers ($Re = 1000, 1200, 1400$ and 1600). This series of simulations aims to address the question of a unique critical threshold that characterizes the transition, and if it does or not depend on the transition path, i.e. increasing or decreasing the Reynolds number. The simulations we performed in the laminar regime are independent from each others, in the sense that the initial flow condition is the unperturbed Poiseuille flow and the particles are initially randomly seeded throughout the channel flow. The particle-flow interaction is the only source of perturbation of the laminar flow. At $Re \leq 1400$, the flow preserves the laminar regime, although the suspension is stratified in different layers, and the dune-like patterns develop in time, as discussed in the previous chapter. However at $Re = 1600$, the flow switches directly to the turbulent regime as it is suggested from the friction coefficient signal plotted in figure 3.19. Also this figure contains the signal of the friction coefficient of the originally fluctuating two-phase flow at $Re = 1350$ during its transition to the laminar regime. Both signals exhibit the same fluctuation features (frequencies and amplitude) while they are turbulent. Moreover, the time interval necessary to the transition from a regime to another is equal in both transition mechanisms.

Clearly, the relaminarization process and the onset of turbulence do not appear at the same Reynolds number suggesting the irreversibility of these phenomena. This hysteresis of the suspension flow transition is plotted in figure 3.20. This figure presents only a qualitative description because the hysteresis obtained here depends on the steps used to decrease or increase the Reynolds number, and it is obvious that a wider number of test cases are required to be more accurate.

The laminar-turbulent transition in single-phase flows can be obtained by stability analysis. This transition is subcritical in pipe and Couette flows, strongly conditioned by finite amplitude perturbations and contains a complex spatio-temporal dynamics. In channel flows, the laminar to turbulent transition is supercritical. Beyond the critical Reynolds number 7700 (based on the average flow velocity and the channel height), Orszag (1971) has shown that for specific perturbations (Tollmien-Schlichting, see Chapter II), the flow is linearly unstable even if the perturbation amplitude is negligibly small. When the channel flow is perturbed with specific shape perturbation, the transition to turbulence can be triggered at Reynolds numbers as small as 1000.

According to Schmid and Henningson (2001), the optimal perturbation has the shape of streamwise counter-rotating vortices with large diameter (comparable to the channel height), which recalls the vortices naturally observed during the transition from the turbulent to laminar regime (see figure 3.15c). When the simulations start from the laminar regime the particles do not induce such optimal perturbation structures. We think that they trigger the transition at $Re = 1600$ due to a sufficient amount of noise induced by their interaction with the shear flow.

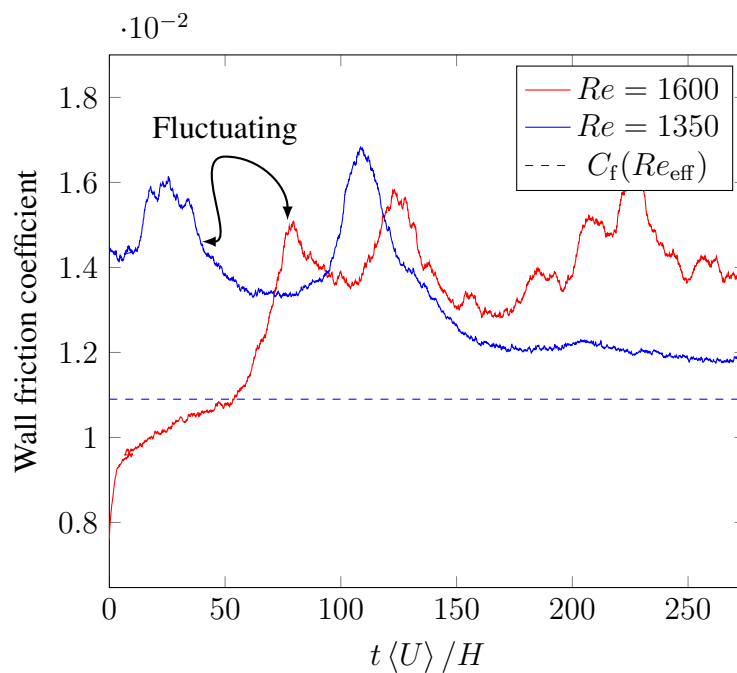


Figure 3.19: Temporal evolution of the wall friction coefficient for $Re = 1350$ and $Re = 1600$ obtained respectively from turbulent-to-laminar and laminar-to-turbulent transition. The dashed line is the laminar prediction at $Re_{eff} = 1130$ which corresponds to the $Re = 1350$ simulation.

7 Conclusion

Direct numerical simulations have been carried out with single and two-phase channel flows in the transition regime, with the aim of understanding the effect of finite-size neutrally buoyant particles on the flow dynamics. The channel-to-particle size ratio $H/d = 16$ and particle volumetric concentrations $\phi = 2.5\%$ and 5% have been considered for this work.

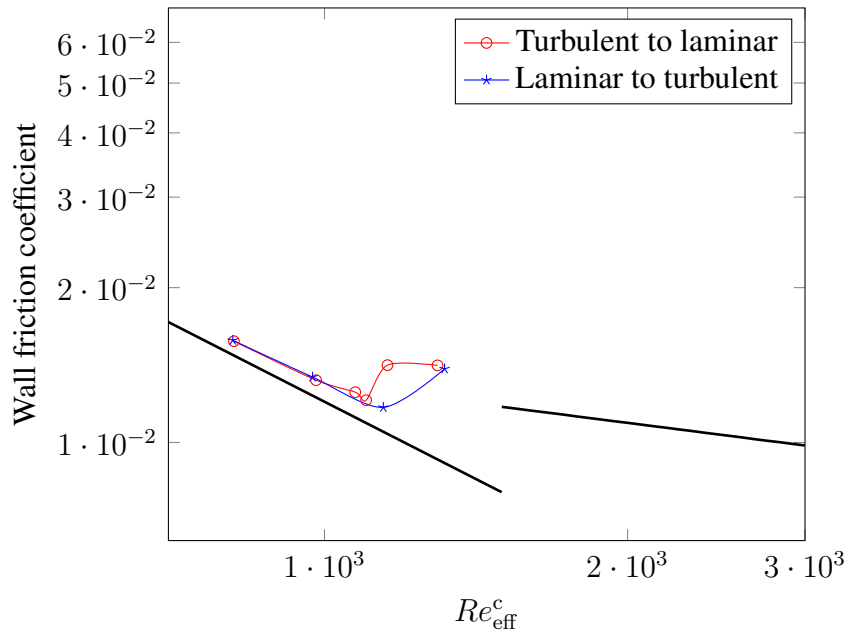


Figure 3.20: Wall friction coefficient versus the Reynolds number using the suspension viscosity given in section §1.

In the transition regime, particles are homogeneously distributed throughout the channel, with concentration peaking in the near-wall region. Cross-stream migration of particles in channel flows occurs due to inertial lift force, resulting in an increase of the friction coefficient compared to the single-phase flow case at the same Reynolds number. The intensity of transverse velocity fluctuations is also found larger in particle-laden flows. Particles behave as a source of velocity perturbations in the wall region leading to significant enhancement of both the velocity fluctuations (in the wall-normal and spanwise directions) and the wall friction coefficient. On the contrary, streamwise velocity fluctuations are damped by the particles in the core region. Additionally, the impact of the particles on the vortical structures sustaining the turbulence has been investigated. It comes from this study that particles break down the large-scale structures into smaller, more numerous, and energetic structures. The present results suggest that the interactions between the particles and the large scale flow structures could be a possible reason for the reduction of the critical Reynolds number (below which the flow becomes fully laminar).

When the flow Reynolds number is decreased, flow relaminarization occurs at critical suspension Reynolds number Re_{eff}^c far below the critical Reynolds number of single-phase transitional flow (Re_{eff}^c being based on

the effective viscosity calculated from the total suspension shear stress). However increasing the Reynolds number of an initially homogeneous laminar flow triggers transition to turbulence at a threshold above Re_{eff}^c . The average velocity fluctuations do not drop to zero in the laminar suspensions as for single-phase flows. Instead, they approach the mean shear-induced agitation calculated from the limit of unbounded sheared suspension under Stokes approximation. The friction coefficient follows the friction coefficient law in a laminar single-phase channel flow provided that the Reynolds number is replaced by the effective suspension Reynolds number.

Although the effect of the concentration has not been extensively studied, two concentrations have been tested ($\phi = 2.5$ and 5%). The simulations do not suggest significant effect of the concentration on the two-phase flow profiles in the fluctuating regime, and the critical Reynolds number Re_{eff}^c is not modified. Only in the laminar regime, the concentration increases the shear-induced particle agitation.

Bibliographie

- Abbas, M., Climent, E., and Simonin, O. (2006). Dynamics of bidisperse suspensions under Stokes flows : Linear shear flow and sedimentation. *Phys. Fluids*, 18.
- Avila, M., Willis, A., and Hof, B. (2010). On the transient nature of localized pipe flow turbulence. *J. Fluid Mech.*, 646 :111–133.
- Chassaing, P. (2000). *Turbulence en Mécanique des Fluides*. Collection Polytech - INP Toulouse.
- Drazer, G., Koplik, J., Khusid, B., and Acrivos, A. (2004). Microstructure and velocity fluctuations in sheared suspensions. *J. Fluid Mech.*, 511 :237–263.
- Faisst, H. and Eckhardt, B. (2003). Traveling waves in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.*, 91.
- Garcia, D. (2010). Robust smoothing of gridded data in one and higher dimensions with missing values. *Comp. Stat. Data Anal.*, 54 :1167–1178.
- Garcia-Villalba, M., Kidanemariam, A., and Uhlmann, M. (2012). DNS of vertical plane channel flow with finite-size particles : Voronoi analysis, acceleration statistics and particle-conditioned averaging. *Int. J. Multiphase Flow*, 46 :54–74.
- Iida, O. and Nagano, Y. (1998). The relaminarization mechanisms of turbulent channel flow at low Reynolds numbers. *Flow Turb. Comb.*, 60 :193–213.
- Jeong, J. and Hussain, F. (1995). On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech.*, 285 :69–94.
- Jiménez, J. and Moin, P. (1991). The minimal flow unit in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, 225 :213–240.
- Kim, J., Moin, P., and Moser, R. (1987). Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 177 :133–166.
- Matas, J.-P., Morris, J. F., and Guazzelli, E. (2003). Transition to turbulence in particulate pipe flow. *Phys. Rev. Lett.*, 90 :1–4.
- Mellibovsky, F., Meseguer, A., Schneider, T. M., and Eckhardt, B. (2009). Transition in localized pipe flow turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 103(054502) :1–5.
- Moser, R., Kim, J., and Mansour, N. (1999). Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. *Phys. Fluids*, 11 :943–945.

-
- Mullin, T. and Peixinho, J. (2006). Transition to turbulence pipe flow. *J. Low Temp. Phys.*, 145 :75–88.
- Orszag, S. A. (1971). Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. *J. Fluid Mech.*, 50 :689–703.
- Patel, V. C. and Head, M. R. (1969). Some observations on skin friction and velocity profiles in fully developed pipe and channel flows. *J. Fluid Mech.*, 38 :181–201.
- Pouplin, A., Masbernat, O., Décarre, S., and Liné, A. (2011). Wall friction and effective viscosity of a homogeneous dispersed liquid- liquid flow in a horizontal pipe. *AIChE J.*, 57(5) :1119–1131.
- Priymak, V. and Miyazaki, T. (2004). Direct numerical simulation of equilibrium spatially localized structures in pipe flow. *Phys. Fluids*, 16 :4221–4234.
- Schmid, P. J. and Henningson, D. S. (2001). *Stability and Transition in Shear Flows*, volume 142. Springer.
- Shao, X., Wu, T., and Yu, Z. (2012). Fully resolved numerical simulation of particle-laden turbulent flow in a horizontal channel at a low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 693 :319–344.
- Yeo, K. and Maxey, M. R. (2013). Dynamics and rheology of concentrated, finite-Reynolds-number suspensions in a homogeneous shear flow. *Phys. Fluids*, 25 :1–24.
- Yu, Z., Wu, T., Shao, X., and Lin, J. (2013). Numerical studies of the effects of large neutrally buoyant particles on the flow instability and transition to turbulence in pipe flow. *Phys. Fluids*, 25(043305) :1–15.

Troisième partie

Conclusion générale

Conclusion générale et perspectives

Dans ce travail, nous avons étudié par voie numérique le comportement des écoulements de suspension en canal plan dans des conditions proches du seuil de transition à la turbulence, en régime laminaire et fluctuant. Les particules sont sphériques, rigides, de taille non-négligeable comparée à la hauteur du canal et de même densité que le fluide porteur. À l'échelle du canal, l'écoulement est caractérisé par un nombre de Reynolds de $O(1000)$, équivalent à un nombre de Reynolds de $O(1 - 10)$ à l'échelle de la particule. L'effet des particules est analysé pour des cas de suspensions diluées dont la concentration varie entre 1% et 5%. Le rapport de taille entre la hauteur du canal et la taille des particules est $H/d = 16$. La méthode numérique (FCM) utilisée ici, permet de résoudre le couplage hydrodynamique existant entre la phase dispersée et la phase continue, et de réaliser un suivi lagrangien des particules dans l'écoulement. La méthode a été validée sur des cas académiques de particule isolée : (a) perturbation induite par une particule soumise à un écoulement cisailé pur à nombres de Reynolds particuliers finis, (b) rotation de cette même particule dans des conditions identiques d'écoulement et d'inertie, et (c) migration d'une particule dans un écoulement de Poiseuille plan. Ces tests ont montré que la méthode numérique était fiable jusqu'à des nombres de Reynolds particuliers basés sur le cisaillement local $Re_p \leq 10$.

Une première série de simulations a été menée en écoulement de Couette plan laminaire, pour lesquelles il s'agissait d'extraire les contraintes induites et les vitesses de glissement des particules dans le cas de suspensions maintenues homogènes dans le temps. Les résultats que nous avons obtenus sont cohérents avec les différentes études numériques réalisées pour des particules de taille finie Mikulencak et Morris (2004); Kulkarni et Morris (2008); Yeo et Maxey (2013); Shao *et al.* (2008) et qui ont suivi les développements théoriques dans la limite de $Re_p \ll 1$ (Ho et Leal, 1974; Vasseur et Cox,

1976; Schonberg et Hinch, 1989; Asmolov, 1999; Magnaudet, 2003). Les contraintes induites par la phase solide augmentent avec le nombre de Reynolds particulière. En accord avec les divers travaux sur la migration inertielle, les particules ont tendance à se déplacer latéralement vers le centre du canal en écoulement de Couette plan et vers des positions d'équilibre proches des parois dans un écoulement parabolique (effet Segré-Silberberg). La vitesse de migration des particules à travers les lignes de courant est d'autant plus grande que le nombre de Reynolds est élevé. Quand les particules sont lâchées librement dans un écoulement de Poiseuille plan en-dessous du seuil critique de transition à la turbulence, la suspension initialement homogène (fraction volumique $\phi = 5\%$) devient stratifiée, après un temps d'écoulement de plusieurs dizaines d'unités de temps $H/\langle U \rangle$ (H hauteur du canal, et $\langle U \rangle$ vitesse moyenne de l'écoulement). Après une centaine d'unités de temps, nous observons le développement d'une instabilité à l'interface entre la zone chargée en particules et la zone de fluide pur. Des motifs ondulés prennent place dans la direction de la vorticité. Ces motifs sont soutenus par des écoulements secondaires d'intensités faibles mais non-nulles. Le même type d'instabilité a également été observé en écoulement de Stokes, et a été attribué aux gradients de la seconde différence de contraintes normales résultant des gradients de concentration (Ramachandran et Leighton, 2008; Brady et Carpen, 2002). L'origine de cette instabilité est encore inconnue.

Afin d'évaluer l'effet de la phase dispersée sur le comportement de l'écoulement, des particules ont été initialement distribu es aléatoirement au sein d'un écoulement monophasique fluctuant à un nombre de Reynolds proche du seuil de relaminarisation. En régime stationnaire, la fraction volumique est homogène dans le canal, à l'exception de la région pariétale, où l'on observe un pic de concentration du fait de la migration inertielle des particules. Le coefficient de frottement pariétal de l'écoulement de suspension en régime de transition est supérieur à celui de l'écoulement monophasique. Les profils de turbulence (intensité des fluctuations de vitesse, structures rotationnelles, contrainte pariétale) sont calculés dans les simulations de suspensions et comparés à leurs homologues dans les écoulements monophasiques en transition. Les particules de taille finie provoquent une augmentation significative des fluctuations de vitesse dans les directions transverses. La visualisation des structures rotationnelles de l'écoulement montre que les particules modifient ces structures, qui deviennent plus petites, plus nombreuses et plus énergétiques (plus grandes vitesses de rotation). Ceci a pour conséquence de maintenir l'écoulement fluctuant à des nombres de Reynolds où un écoulement monophasique aurait normalement relaminaris . Quand le nombre de Reynolds est diminué et que l'écoulement devient finalement laminaire, le coefficient de frot-

tement pariétal rejoint la loi laminaire d'un écoulement monophasique, à condition de substituer la viscosité effective de la suspension à la viscosité du fluide dans l'expression du nombre de Reynolds. Les fluctuations de vitesse résiduelles dans la suspension relaminarisée sont bien prédites par le niveau d'agitation que l'on obtient pour une suspension de particules cisailée.

D'après nos résultats, la turbulence de l'écoulement est conservée jusqu'à des nombres de Reynolds bien inférieurs à celui de l'écoulement monophasique en canal, en accord avec les observations expérimentales de Matas *et al.* (2003) pour une géométrie cylindrique. Par ailleurs, nous montrons que selon le sens de la transition, laminaire \mapsto turbulent ou turbulent \mapsto laminaire, le nombre de Reynolds critique de transition d'un régime à l'autre n'est pas le même. Nous pensons que cette hystérésis est probablement liée à la présence de structures rotationnelles de l'écoulement turbulent, qui ont une forme optimale et une intensité suffisante, pour maintenir la turbulence active jusqu'à un seuil critique inférieur au seuil de l'écoulement monophasique. Contrairement aux résultats de Matas *et al.* (2003), nous n'avons pas observé d'influence significative de la concentration en ce qui concerne la valeur du nombre de Reynolds critique de relaminarisation pour les deux concentrations étudiées ($\phi = 2.5\%$ et $\phi = 5\%$). Il est possible que la différence de géométrie soit à l'origine de cette variation de comportement. Les écoulements en canal plan et en tube sont connus pour avoir des stabilités de natures différentes (sous- et super-critique, respectivement). L'effet de la concentration sur le nombre de Reynolds critique n'est donc pas nécessairement le même dans les deux cas.

Ce travail ouvre plusieurs perspectives sur les suspensions inertielles de part et d'autre du seuil de transition :

- Le seuil critique de transition en canal obtenu par voie numérique dépend de la taille du domaine. Des expériences en canal ou une étude numérique statistique effectuée avec des domaines plus longs permettraient éventuellement de déterminer plus exactement la valeur du seuil de transition (en autorisant la coexistence de zones turbulentes et laminaires dans l'écoulement).
- Si la nature de l'instabilité d'un écoulement monophasique en canal et en tube est différente, il serait intéressant de vérifier si les macro-particules baissent le seuil de transition laminaire-turbulent dans les deux géométries via des mécanismes identiques ou différents.
- Selon les observations expérimentales de Matas *et al.* (2003), le seuil de transition dans les suspensions diluées diminue fortement en

fonction de la concentration, il reste constant sur une large gamme de concentration, et finit par augmenter de nouveau dans les suspensions concentrées. Il serait donc intéressant d'explorer l'effet de la concentration dans la limite des écoulements denses. De nos jours, la simulation d'écoulements turbulents très chargés en particules reste un défi parce qu'il est nécessaire de bien résoudre les interactions fluide-particule à la fois au voisinage immédiat et loin des particules. Par ailleurs, l'effet de la polydispersité est un élément important pour les applications. La simulation directe de suspensions polydisperses est encore limitée en terme de spectre de taille du fait de la résolution imposée par les particules les plus petites.

- Les particules induisent le développement de contraintes normales dans l'écoulement inertiel de suspension, ce qui entraînerait un comportement non-newtonien de la suspension. Une étude comparative sur le comportement des suspensions et des fluides non-newtoniens au seuil de transition laminaire-turbulent serait intéressante.
- L'origine de la formation de motifs dunaires dans la direction transverse d'un écoulement n'est pas encore identifiée. Et plusieurs questions peuvent être soulevées : à partir de quelle concentration apparaît cette instabilité ? Mises à part les observations de Tirumkudulu *et al.* (1999), il n'y a pas d'autres preuves expérimentales de l'établissement de ce type de motifs. Des expériences dans un écoulement de Couette ou dans un canal pourraient donner plus d'éléments sur les conditions et le temps de mise en place de ces motifs en fonction de a/H , Re , ϕ , *etc.*

Bibliographie

- ASMOLOV, E. S. (1999). The inertial lift on a spherical particle in a plane Poiseuille flow at large channel Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 381:63–87.
- BRADY, J. F. et CARPEN, I. C. (2002). Second normal stress jump instability in non-Newtonian fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 102:219–232.
- HO, B. et LEAL, G. (1974). Inertial migration of rigid spheres in two-dimensional unidirectional flows. *J. Fluid Mech.*, 65:365–400.
- KULKARNI, P. M. et MORRIS, J. F. (2008). Suspension properties at finite Reynolds number from simulated shear flow. *Phys. Fluids*, 20(040602):1–14.
- MAGNAUDET, J. (2003). Small inertial effects on a spherical bubble, drop or particle moving near a wall in a time-dependent linear flow. *J. Fluid Mech.*, 485:115–142.
- MATAS, J.-P., MORRIS, J. F. et GUAZZELLI, E. (2003). Transition to turbulence in particulate pipe flow. *Phys. Rev. Lett.*, 90:014501.
- MIKULENCAK, D. R. et MORRIS, J. F. (2004). Stationary shear flow around fixed and free bodies at finite Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 520:215–242.
- RAMACHANDRAN, A. et LEIGHTON, D. T. (2008). The influence of secondary flows induced by normal stress differences on the shear-induced migration of particles in concentrated suspensions. *J. Fluid Mech.*, 603:207–243.
- SCHONBERG, J. A. et HINCH, E. J. (1989). Inertial migration of a sphere in Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 203:517–524.
- SHAO, X., YU, Z. et SUN, B. (2008). Inertial migration of spherical particles in circular Poiseuille flow at moderately high Reynolds numbers. *Phys. Fluids*, 20(103307).
- TIRUMKUDULU, M., TRIPATHI, A. et ACRIVOS, A. (1999). Particle segregation in monodisperse sheared suspensions. *Phys. Fluids*, 11 :3:507–509.
- VASSEUR, P. et COX, R. G. (1976). The lateral migration of a spherical particle in two-dimensional shear flows. *J. Fluid Mech.*, 78(2):385–413.

YEO, K. et MAXEY, M. R. (2013). Dynamics and rheology of concentrated, finite-Reynolds-number suspensions in a homogeneous shear flow. *Phys. Fluids*, 25:1–24.

Annexes

1 Utilisation de la méthode du Gradient Conjugué

Les itérations sont faites sur l'étape (4d) afin de trouver le champ de forçage \mathbf{F}_D^p qui satisfait toutes les conditions mentionnées aux étapes précédentes. Ce forçage est construit à partir des matrices $\mathbf{G}^{(n)}$ relatives à toutes les particules. Pour chaque particule, ce tenseur contient 5 composantes indépendantes. Il s'agit alors de trouver un vecteur \mathbf{G} constitué de $5 \times N_p$ éléments où N_p est le nombre de particules. La contrainte de rigidité est satisfaite dans toutes les particules si la norme L_2 du vecteur \mathbf{r} (contenant également $5 \times N_p$ éléments) qui contient le taux de déformation du fluide dans le volume de toutes les particules est inférieure à une valeur faible définie par un paramètre d'entrée. La méthode du Gradient Conjugué est utilisée car elle requiert relativement peu de mémoire et converge assez rapidement quand le système à résoudre est linéaire (éq. (1.30)). À la première itération $it = 1$, les variables suivantes sont initialisées :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^1 &= -\mathbf{e}(\mathbf{u}^\infty) \\ \mathbf{q}^1 &= \mathbf{r}^1\end{aligned}$$

$\mathbf{e}(\mathbf{u})$ représente le vecteur de déformation au sein des particules (de taille $5 \times N_p$), correspondant au champ de vitesse \mathbf{u} . Ainsi, pour chaque itération it de la boucle, les équations suivantes sont résolues (dans cet ordre), jusqu'à un nombre maximal d'itérations ou obtention d'une faible norme du vecteur résidu \mathbf{r} :

$$\begin{aligned}\nabla^2 p^* &= \nabla \cdot \mathbf{q}^{it} \\ (1 - \beta_k dt \mathcal{L})(\mathbf{u}^p) &= (\alpha_k + \beta_k) dt [-\nabla p^* + \mathbf{q}^{it}] \\ \chi^{it} &= \frac{\mathbf{r}^{it} \cdot \mathbf{r}^{it}}{\mathbf{e}(\mathbf{u}^p) \cdot \mathbf{q}^{it}} \\ \mathbf{G}^{it+1} &= \mathbf{G}^{it} + \chi^{it} \cdot \mathbf{q}^{it} \\ \mathbf{r}^{it+1} &= \mathbf{r}^{it} - \chi^{it} \cdot \mathbf{e}^{it} \\ \kappa^{it} &= \frac{\mathbf{r}^{it+1} \cdot \mathbf{r}^{it+1}}{\mathbf{r}^{it} \cdot \mathbf{r}^{it}} \\ \mathbf{q}^{it+1} &= \mathbf{r}^{it+1} + \kappa^{it} \cdot \mathbf{q}^{it}\end{aligned}$$

En général, la valeur seuil de la norme L_2 du vecteur résidu \mathbf{r} est fixée en fonction du taux de cisaillement de la suspension (par exemple 1% du taux de cisaillement).

2 Modification des enveloppes Gaussienne à la paroi

Dans sa version initiale, la FCM était employée pour des écoulements infinis ne comprenant pas de paroi (Lomholt et Maxey, 2003; Maxey et Patel, 2001). La taille des enveloppes gaussiennes Δ et Δ' sur lesquelles sont distribuées les forces de monopôle et de dipôle sont elles de tailles finies et s'étendent même au delà de la taille réelle des particules. Dans le cas d'un écoulement borné, ceci peut ponctuellement engendrer un chevauchement entre une partie des enveloppes de force et la frontière physique du domaine. Cette non prise en compte de la taille finie du domaine errone le processus d'intégration de la vitesse dans le volume de la particule pour déterminer son vecteur vitesse. Une simple modification des Gaussiennes permet de pallier ce problème lorsqu'il y a chevauchement avec la paroi (Liu *et al.*, 2002, 2004; Lomholt et Maxey, 2003; Dance et Maxey, 2003). Yeo et Maxey (2010) décrivent en détails cette procédure consistant à introduire une « enveloppe image » positionnée symétriquement par rapport à la paroi en \mathbf{Y}_{img} venant annuler les effets de celle propre à la sphère considérée. Cette enveloppe image entre en jeu lorsque les conditions de chevauchement interviennent, c'est-à-dire quand le domaine d'intégration numérique $\mathbf{I}_n(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x} - \mathbf{Y}| < a \times n\}^2$ intersecte une paroi du domaine Σ_D tel que $\mathbf{I}_n(\mathbf{Y}) \not\subseteq \Sigma_D$. La correction s'opère alors et l'intégration se fait uniquement dans $\mathbf{I}_n(\mathbf{Y}) \cap \Sigma_D$.

Dès lors, lorsqu'une particule s'approche d'une paroi, l'expression de leurs enveloppes prennent respectivement pour le monopôle et le dipôle les formes suivantes :

$$\Delta_w = \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{Y}) - \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{Y}_{\text{img}}) \quad (8)$$

$$\Delta'_w = \Delta'(\mathbf{x} - \mathbf{Y}) + \Delta'(\mathbf{x} - \mathbf{Y}_{\text{img}}) \quad (9)$$

où $\mathbf{Y}_{\text{img}} = (x_p, -y_p, z_p)^T$, x_p , y_p , et z_p étant les coordonnées de la particule. La position de la paroi où la condition de non-glissement est satisfaite est $y_p = 0$. Après modification des gaussiennes, la vitesse et le tenseur du taux de cisaillement de la particule correspondent exactement à la vitesse et au tenseur de cisaillement du fluide local non perturbé à $Re_p = 0$:

² n étant généralement choisi tel que $n \geq 2.5$ pour une précision maximale.

$$\mathbf{V} = \mathbf{u}(\mathbf{Y}) = \int_{\mathbf{I}_n(\mathbf{Y}) \cap \Sigma_D} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \Delta_w(\mathbf{x} - \mathbf{Y}) d^3\mathbf{x} \quad (10)$$

$$E_{ij} = \epsilon_{ij}(\mathbf{Y}) = \int_{\mathbf{I}_n(\mathbf{Y}) \cap \Sigma_D} \epsilon_{ij}(\mathbf{x}) \Delta'_w(\mathbf{x} - \mathbf{Y}) d^3\mathbf{x} \quad (11)$$

Cette modification des enveloppes gaussiennes permet également d'assurer que la vitesse angulaire de la particule corresponde à la vorticité de l'écoulement environnant.

Bibliographie

- DANCE, S. et MAXEY, M. R. (2003). Particle density stratification in transient sedimentation. *Phys. Rev. E.*, 68(031403).
- LIU, D., MAXEY, M. R. et KARNIADAKIS, G. E. (2002). A fast method for particulate microflows. *J. Microelectromech. Syst.*, 11(691–702).
- LIU, D., MAXEY, M. R. et KARNIADAKIS, G. E. (2004). Modelling and optimization of colloidal micro-pumps. *J. Micromech. Microengng*, 14(567–575).
- LOMHOLT, S. et MAXEY, M. R. (2003). Force-coupling method for particulate two-phase flow : Stokes flow. *J. Comp. Phys.*, 27:381–405.
- MAXEY, M. R. et PATEL, B. K. (2001). Localized force representations for particles sedimenting in Stokes flows. *Int. J. Multiphase Flow*, 27:1603–1626.
- YEO, K. et MAXEY, M. R. (2010). Dynamics of concentrated suspensions of non-colloidal particles in couette flow. *J. Fluid Mech.*, 649:205–231.

