

un algorithme simple d'inversion de matrice

par J. DEJARDIN et P. CLOUARD ORSTOM Fonds Documentaire
Services Scientifiques Centraux de l'ORSTOM N° : 12 136
Aéromaritime Electronique

Cote : B

Méthode de calcul

L'idée de cet algorithme est née d'une part de considérations sur l'adjonction ou la suppression de variables indépendantes dans des problèmes de régression multiple ([1], section 13.10, p. ex.) et, d'autre part des manipulations qu'elles entraînent simultanément sur une matrice et son inverse ([2], ch. 17 : Multiple Regression Analysis par M.A. Efronson).

En fait il n'est pas nouveau mais il semble bien que sous la forme simplifiée présentée ici il n'ait jamais été utilisé, à la connaissance des auteurs, pour des calculateurs de bureau.

Il convient pourtant bien à cette classe de matériel car le nombre de mémoires internes à utiliser est faible : $n+4$, si n est la taille de la matrice. Les $n+4$ mémoires sont occupées par n termes à conserver, la taille de la matrice et trois indices repérant la ligne, la colonne et le cycle.

De plus la méthode de travail est itérative : elle utilise toujours de la même façon, lors d'un cycle de calculs, les résultats du cycle précédent : ils peuvent ainsi être stockés sur un ruban perforé qui sera lu à l'étape suivante.

Le nombre de cycles nécessaire à l'obtention de l'inverse d'une matrice est égal à la taille de cette dernière. Un cycle calcule à partir de la matrice de départ, A, une matrice D selon un schéma simple : la matrice D est décalée d'une ligne et d'une colonne par rapport à la matrice A.

Les éléments de la matrice A sont repérés par i et j :

$$A = [a_{ij}] \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$$

ceux de la matrice D par u et v :

$$D = [d_{uv}] \quad \begin{matrix} 1 \leq u \leq n \\ 1 \leq v \leq n \end{matrix}$$

Les indices u et v sont respectivement liés aux indices i et j par les relations :

$$\begin{matrix} u = i - 1 \\ v = j - 1 \end{matrix}$$

Les éléments d_{uv} des $n-1$ premières lignes et $n-1$ premières colonnes de D sont liés aux éléments de la matrice A par :

$$d_{uv} = a_{ij} - \frac{a_{iu} a_{vj}}{a_{ii}}$$

Les $n-1$ premiers éléments de la dernière ligne de D sont donnés par :

$$d_{nv} = \frac{a_{1j}}{a_{ii}}$$

les $n-1$ premiers éléments de la dernière colonne par :

$$d_{un} = \frac{a_{1j}}{a_{ii}}$$

Quant au dernier terme, d_{nn} , il vaut $\frac{1}{a_{ii}}$.

Appliquée, à titre d'exemple, à une matrice 3×3 , la méthode permet, avec seulement 3 cycles de calculs, d'obtenir la matrice inverse :

$$A \rightarrow D, \quad D \rightarrow D_1, \quad D_1 \rightarrow A^{-1}$$

Bien évidemment, la forme simplifiée de l'algorithme utilisée ici ne permet pas d'offrir tous les raffinements que peut donner un programme général pour ordinateur ([2], ch. 2 : Matrix Inversion and Related Topics by Direct Methods par A. Orden, p. ex.). Le terme pivot, entr'autres simplifications, est systématiquement a_{ii} : on ne doit donc rencontrer aucun a_{ii} nul au cours des cycles successifs de calcul. Si cette difficulté se présentait le calculateur ne pourrait la surmonter puisqu'il n'effectue aucune opération logique sur les lignes ou colonnes ; il s'arrêterait par suite de dépassement de capacité. Toutefois l'opérateur peut facilement intervenir de la façon suivante : la colonne dont il sait, après un essai infructueux, qu'elle conduit à un a_{ii} nul est transférée à la dernière place avant nouvelle inversion et la matrice inverse obtenue est prémultipliée par la matrice unitaire dans laquelle le même transfert a été fait : la matrice produit est l'inverse cherchée.

Si la matrice à inverser est singulière à partir d'un certain moment aucun transfert n'est plus possible : tous les a_{ii} ultérieurs seront nuls.

On notera, pour terminer, tout l'intérêt qu'il y a, lors des manipulations numériques, à « cadrer » à un chiffre significatif avant la virgule les éléments diagonaux de la matrice à inverser. Ce « cadrage » évite l'obtention de nombres trop grands ou trop petits. Il se fait aisément en multipliant chaque ligne par une puissance appropriée de 10. Après inversion on multiplie chaque colonne de l'inverse par la puissance de 10 utilisée pour la ligne de même numéro : on obtient ainsi l'inverse de la matrice d'origine.

O. R. S. T. O. M.

Programme pour le calculateur LOCI-2

A — Généralités

Ce programme peut inverser des matrices jusqu'à 12×12 . Il est prévu pour l'option h et comporte 3 cartes.

La carte 3 contient dans les positions 00 à 57 le sous-programme d'indigage.

La carte 3 reste en permanence dans le lecteur supplémentaire.

Les cartes 1 et 2 alternent dans le secteur normal.

Le texte du programme figure en IV.

B — Données

Les données (éléments de la matrice à inverser) sont présentées sur ruban perforé, colonne par colonne, le premier terme étant précédé du code de sélection du mode 1 de lecture (mode « données », code S1 : CTRL et Y).

Le ruban de données est placé dans le lecteur du télétype, si possible non détaché du ruban vierge engagé dans le perforateur. Si détaché, le ruban produit par le perforateur sera engagé dans le lecteur le moment venu (cf. infra : D. « Exécution du travail »).

C — Initialisation

Avant de débiter un travail il y a lieu :

a) de charger le registre de format de sortie du CU-4 par :

1) mise sur « Off » du bouton de commande du perforateur du télétype,

2) sélection du canal : « Format »,

3) Chargement du registre de format.

b) de sélectionner ensuite le canal d'impression :

c) de placer la taille n de la matrice dans A et dans S 4 puis de ramener le MSC à zéro, ceci par la succession de commandes :

PR

Affichage de n au clavier

W→A

SM

A→SO

CLW

d) de replacer sur « On » le bouton de commande du perforateur du télétype.

D — Exécution du travail

Les cartes 1 et 3 sont dans les lecteurs-programme, le ruban de données est engagé dans le lecteur du télétype et l'initialisation est terminée.

Le travail démarre par pression de la touche PO.

Le Loci s'arrête en affichant 2. Introduire la carte 2 dans le lecteur normal. Enfoncer la touche PO.

Le Loci s'arrête en affichant I. Remplacer la carte 2 par la carte 1. Si le ruban de données était séparé du perforateur, introduire à ce moment dans le lecteur le ruban produit par le perforateur. Une pression de la touche PO provoque la poursuite du travail.

Etc...

Lorsque le travail est terminé, la machine s'arrête en affichant O. Les cartes 1 et 3 sont alors les lecteurs. Le Loci est prêt pour une autre inversion. Si le format

de sortie demandé ne change pas, l'initialisation est reprise en c ; s'il change elle est reprise en entier.

Si en cours de travail la capacité du Loci est dépassée, il s'arrête en affichant O après 6 « retour chariot » du teletype (indication de fin de travail).

E — Sortie des résultats

Les matrices intermédiaires et la matrice inverse sont imprimées colonne par colonne, une colonne sous l'autre. Deux colonnes sont séparées par 2 « retour chariot », deux matrices par 4 « retour chariot ». Lorsque le travail est terminé (fin réelle de travail ou dépassement de capacité) il se produit 6 « retour chariot ». Pour un travail qui s'est déroulé normalement, les n colonnes qui précèdent les 6 « retour chariot » sont donc les n colonnes de la matrice inverse.

F — Temps d'exécution

A titre indicatif quelques temps d'exécution sont fournis ci-dessous pour inversion de matrice non singulière, ne montrant pas de terme a_{ii} nul en cours de calcul :

— Matrice 4×4 : 2 minutes environ

— Matrice 8×8 : 45 minutes environ

— Matrice 12×12 : 9 minutes environ.

G — Possibilité d'extension

Il est possible, par quelques modifications de programme, d'augmenter la taille n des matrices que l'on désire inverser :

a) en mettant dans le programme la taille de la matrice on libère le registre S1 et il est possible d'inverser une matrice 13×13 . Les modifications sont assez mineures.

b) en mettant dans le programme la taille de la matrice et en faisant perforer le numéro de cycle on libère les registres S1 et S4. On peut alors inverser une matrice 14×14 . Les modifications à apporter au programme sont ici plus importantes car il faut conserver en S4 ce qui est en S2 dans le programme général (termes de la première ligne de A). Ce transfert est nécessaire par l'utilisation du sous-programme d'indigage qui mobiliserait alors tous les registres, sauf S3 et S4.

Programme disponible

Le programme détaillé mis au point pour le calculateur électronique de bureau Loci-2 en vue de ce travail est mis à la disposition de tous les intéressés. Il sera fourni sur simple demande adressée aux auteurs ou à la rédaction de la revue.

Références

(1) Brownlee, K.A. — 1965 — Statistical Theory and Methodology in Science and Engineering. John Wiley & Sons, New-York, London, Sydney.

(2) Ralston, A. & Wilf, H.S. — 1960 — Mathematical Methods for Digital Computers. John Wiley & Sons, New-York, London.

Indispensable

TECHNIQUE DES SEMICONDUCTEURS

par A.V.J. MARTIN

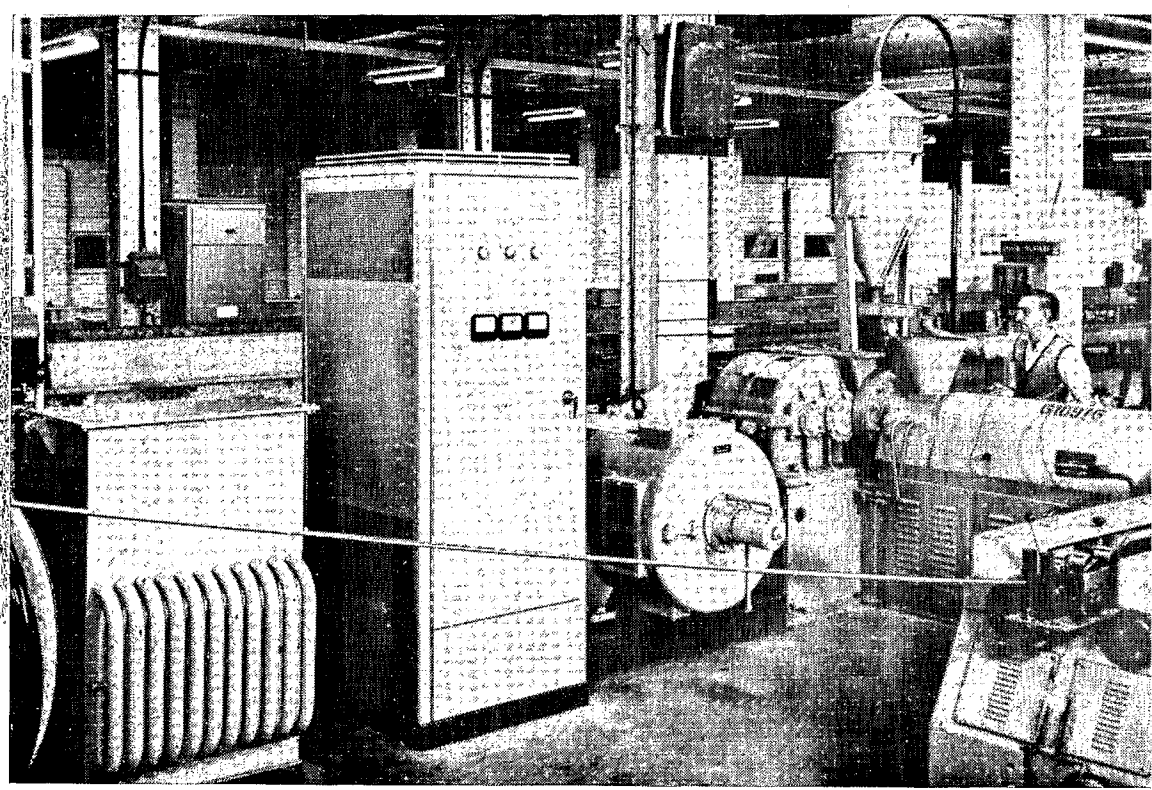
Un gros ouvrage de 519 pages 16×24 cm, avec 521 dessins et schémas. Epaisseur 50 mm.

Présentation professionnelle. Relié grain toile bleue. Jaquette plastique de protection. Prix :

à nos bureaux 45 F ; franco 50 F.

électro calcul et automatisme

revue bimestrielle internationale des systèmes informatiques et automatiques
n° 3 - 1967 et de leurs applications



Automatisation de traitements industriels

12/36