

J. METZGER

Directeur de recherches de l'O.R.S.T.O.M.

**PROCÉDÉS DE CALCUL
DE SONDAGES GÉOMAGNÉTIQUES
APPLICATION A LA STATION DE M'BOUR**

Résumé

On rappelle les méthodes de WIESE et de PARKINSON, ainsi qu'une variante de cette dernière. Leur interprétation géométrique montre que ces deux méthodes sont équivalentes. On utilise pour leur application des procédés de traitement purement numériques, basés sur le principe des moindres carrés.

Le vecteur géomagnétique d'induction, obtenu à la station de M'Bour (Sénégal), présente un module dont la valeur augmente, avec la période des phénomènes considérés, de 0,31 à 0,57 et il est dirigé presque exactement vers l'ouest. Cet effet d'induction peut être attribué à un conducteur océanique.

En annexe, on discute d'un point de vue théorique les écarts qu'on peut constater entre les résultats obtenus à partir de l'une et de l'autre des deux relations (équivalentes) de la méthode de WIESE.

Abstract

We recall the principles of the methods of WIESE and PARKINSON, as well as another formulation of the latter. The geometric interpretation of these methods shows that they are equivalent. We put them into application by pure digital processes, based on the least-squares criterion.

The geomagnetic induction vector we obtain for M'Bour (Senegal) is characterized by a modulus increasing from 0,31 to 0,57, according to the periods of the phenomena involved, and its direction points approximately towards the West. This effect of induction can be ascribed to an oceanic conductor.

In an annex, we discuss theoretically the discrepancies between the results of the two (equivalent) relations of the WIESE-method.

Introduction

L'objet de la présente étude est d'exposer des procédés de calcul s'appliquant aux sondages géomagnétiques. Les méthodes d'exploitation utilisées sont dérivées de celles de WIESE et de PARKINSON : ces deux auteurs considèrent qu'une discontinuité de la conductivité électrique du sous-sol se comporte comme un canal conducteur qui concentre les courants créés par le champ magnétique inducteur. L'existence d'un tel canal peut être mise en évidence par la comparaison des composantes verticale et horizontale des perturbations magnétiques en une station donnée : l'effet du canal est de polariser les perturbations au voisinage d'un « plan préférentiel », dont les paramètres serviront à définir un « vecteur géomagnétique d'induction ».

Ces deux méthodes paraissent au premier abord différentes ; nous verrons cependant, en précisant la signification géométrique des paramètres définis par chacune d'elles, qu'elles sont rigoureusement équivalentes.

Documents utilisés - Notations

Nous avons exploité des enregistrements magnétiques originaux, distincts des La Cour, que nous avons réalisés à l'observatoire ORSTOM de M'Bour, au Sénégal ($14^{\circ} 23' N$, $16^{\circ} 57' W$), durant quelques semaines à la fin de 1968.

Les variations enregistrées étaient celles de X, Y (composantes horizontales selon les axes géographiques) et Z (composante verticale). L'appareillage utilisé comprenait essentiellement deux magnétomètres Jolivet et une balance Askania, tous trois associés à des amplificateurs ; on a ainsi obtenu les valeurs d'échelle suivantes :

$2,6 \gamma/\text{mm}$ pour X, $3,2$ pour Y et $1,5$ pour Z,

ce qui correspond à des sensibilités environ deux fois supérieures, pour les composantes horizontales, à celles des La Cour de l'observatoire et environ quatre fois supérieures pour Z. La vitesse de déroulement était la même que celle des enregistreurs La Cour, soit 15 mm/h .

Nous avons traité un échantillonnage d'environ 130 phénomènes, de période ou durée T comprise entre 2 mn et 2,5 h ; il s'agit de *si*, *ssc*, baies ou autres variations transitoires plus étalées dans le temps. Selon la valeur de T, ces perturbations ont été classées en quatre catégories : T inférieur à 20 mn, - compris entre 20 et 40 mn, - entre 40 et 60 mn, - supérieur à 1 h.

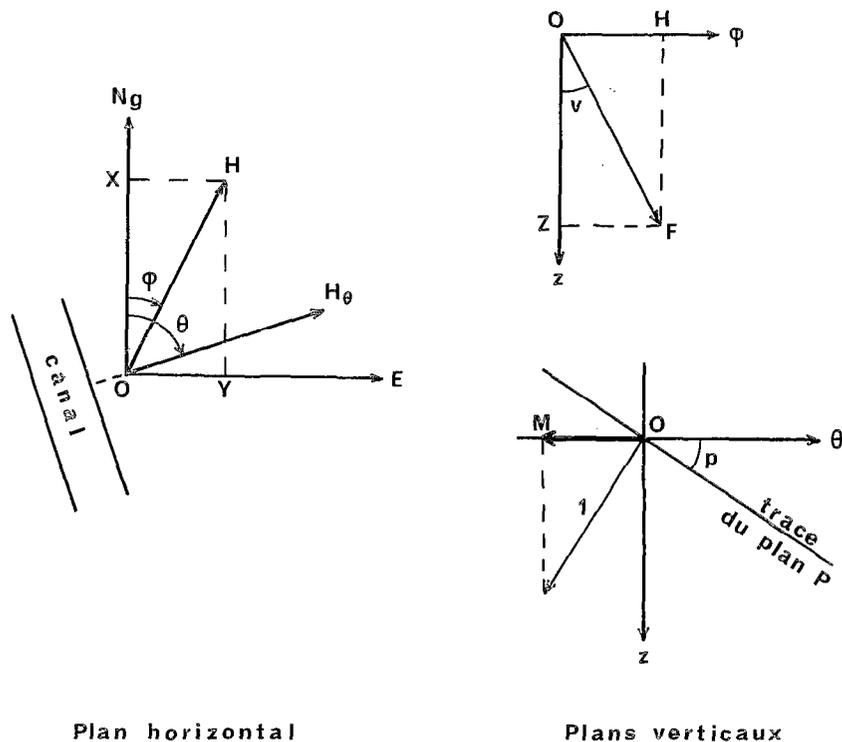


Figure 1

Les notations utilisées seront les suivantes (voir figure 1) :

- F** : vecteur perturbation magnétique de composantes X, Y, Z (dirigées respectivement vers le nord géographique, l'est et le bas) ; X, Y, Z désigneront aussi des axes orientés selon ces directions ;
- H** : composante horizontale d'une perturbation de direction quelconque, soit $H = (X^2 + Y^2)^{1/2}$;
- φ : angle horizontal d'une direction quelconque avec le nord, tel que $\text{tg } \varphi = \frac{Y}{X}$;
- θ : valeur que prend φ pour une orientation normale au canal conducteur ; selon cette direction, **H** prendra la valeur H_θ ;
- v : angle du vecteur **F** avec la verticale descendante : $\text{tg } v = \frac{H}{Z}$;
- p : angle du plan préférentiel P avec le plan horizontal.

MÉTHODE DE WIESE ET DE PARKINSON

- SIGNIFICATIONS GÉOMÉTRIQUES

Nous rappellerons sommairement les méthodes de WIESE et de PARKINSON, sans entrer dans le détail des fondements théoriques ; en même temps, nous présenterons l'interprétation géométrique de chacune d'elles.

Sur la base de considérations théoriques, WIESE (1965) aboutit à la relation suivante entre les composantes d'une perturbation :

$$Z = AX + BY, \quad (1)$$

les coefficients A et B dépendant de la situation de la station par rapport au canal conducteur et de la période de la perturbation. Cette relation traduit le fait que le vecteur F est polarisé dans le plan préférentiel ; géométriquement, l'équation (1) définit en effet un plan, dont l'intersection avec le plan horizontal $Z = 0$ est la droite $Y = -\frac{A}{B}X$, droite qui est parallèle au canal. Le plan vertical perpendiculaire à cette orientation est donc représenté par l'équation $Y = \frac{B}{A}X$, de sorte que la direction orthogonale au canal peut être définie par un azimut θ tel que :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{Y}{X} = \frac{B}{A}; \quad (2)$$

ce sera la direction du vecteur géomagnétique d'induction (Induktionspfeil) et, selon WIESE, celui-ci sera orienté dans une direction opposée à celle où se trouve le canal.

WIESE détermine le module C de ce vecteur par la relation :

$$C = \frac{Z}{H\theta};$$

remarquons que ce rapport est égal à $\operatorname{tg} p$; pour calculer sa valeur, exprimons X et Y en fonction de Z à l'aide des relations (1) et (2), puis additionnons les carrés des deux expressions :

$$X^2 + Y^2 = H^2\theta = \frac{Z^2}{A^2 + B^2},$$

d'où :

$$C = \frac{Z}{H\theta} = \operatorname{tg} p = (A^2 + B^2)^{1/2}. \quad (3)$$

La méthode graphique est la plus commode pour obtenir les valeurs des coefficients A et B, permettant de calculer θ et C ; divisons les deux membres de l'équation (1) par X, elle devient :

$$\frac{Z}{X} = A + B \frac{Y}{X}; \quad (4)$$

les points de coordonnées $\frac{Y}{X}$ et $\frac{Z}{X}$ d'un nombre suffisant de perturbations se placent au voisinage d'une droite d'ordonnée à l'origine A et de coefficient angulaire B (figure 2). On peut aussi diviser (1) par Y, ce qui donne :

$$\frac{Z}{Y} = A \frac{X}{Y} + B; \quad (5)$$

on aura ainsi une deuxième droite et une autre façon de déterminer A (qui est maintenant le coefficient angulaire) et B (ordonnée à l'origine).

PARKINSON (1959) part de la considération du plan préférentiel, au voisinage duquel se placent les vecteurs perturbations F. Il applique un procédé uniquement graphique, consistant à représenter sur un diagramme polaire chaque perturbation par un point à une distance du centre égale à $\sin v = \frac{H}{F}$ et dans une direction φ qui est celle de la perturbation. A partir d'un grand nombre d'observations, il obtient ainsi une

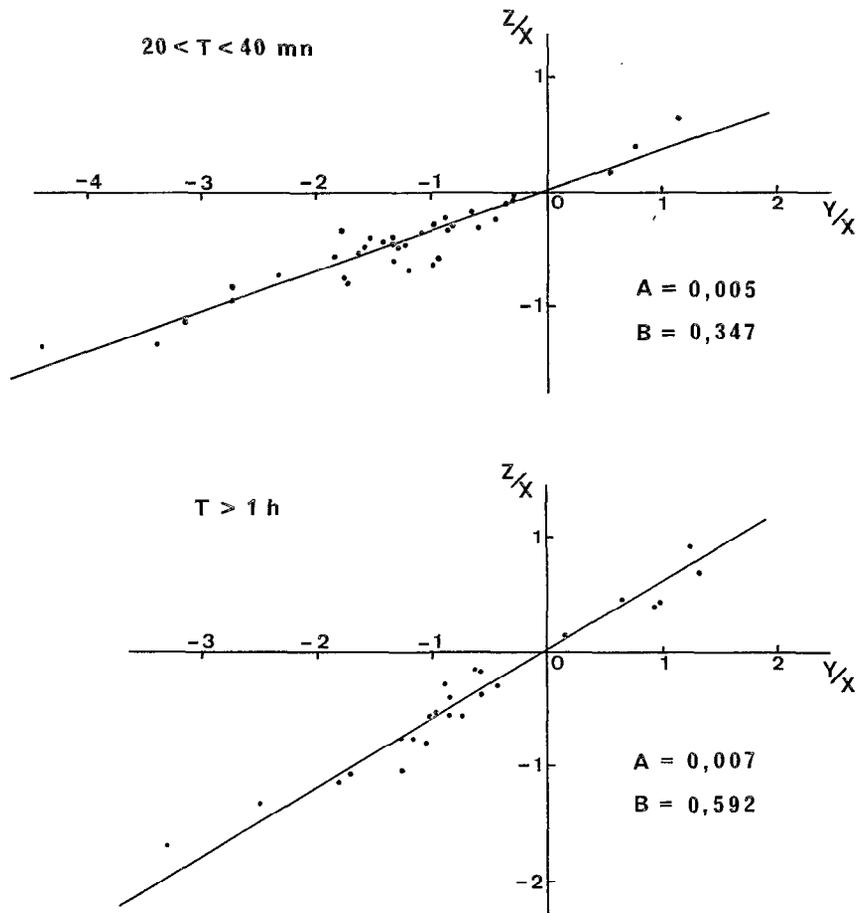


Figure 2
Première droite de WIESE pour $20 < T < 40 \text{ mn}$ et pour $T > 1 \text{ h}$.

ellipse dont le grand axe indiquera la trace du plan préférentiel sur le plan horizontal : cette trace est parallèle au canal ; le vecteur géomagnétique d'induction est dirigé selon le petit axe et il est maintenant orienté vers le canal. Son module, tel que le définit PARKINSON, est égal à la projection sur l'horizontale OM d'un vecteur unitaire normal au plan P et orienté vers le bas, soit plus simplement à $\sin p$ (voir figure 1). On notera que l'ellipse est d'autant plus aplatie et le vecteur d'induction d'autant plus grand que le plan P est plus redressé, c'est-à-dire que les composantes Z sont plus importantes.

Établissons analytiquement l'équivalence de cette représentation et de la précédente. Le procédé du diagramme de PARKINSON revient à projeter sur le plan horizontal les extrémités de vecteurs F supposés égaux à l'unité ; si tous ces vecteurs se situent bien dans un plan, leurs extrémités se placent sur un cercle de rayon unitaire et on obtient la projection des points de ce cercle, c'est-à-dire une ellipse ; le grand axe de celle-ci étant pris pour unité et p étant l'inclinaison du plan, son petit axe sera égal à $\cos p$.

En effet, supposer $F = 1$ revient à écrire l'équation d'une sphère :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

et la polarisation de F dans un plan se traduit, comme tout à l'heure, par la relation :

$$Z = AX + BY.$$

Le système de ces deux équations définit un cercle, trace de la sphère sur le plan préférentiel ; en éliminant Z, on obtient l'équation de la projection de ce cercle sur le plan horizontal OXY :

$$(1 + A^2)X^2 + (1 + B^2)Y^2 + 2ABXY = 1,$$

qui est bien l'équation d'une ellipse, rapportée aux axes géographiques.

Pour la rapporter à ses propres axes, il faut opérer une rotation φ qui annule le terme rectangle ; on trouve :

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2AB}{A^2 - B^2} \text{ soit } \operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A} = \operatorname{tg} \theta$$

et on constate que c'est le même angle θ que plus haut qui intervient dans l'orientation de l'ellipse, donc du canal. Par rapport à ses axes, que nous désignerons par x et y, l'équation de l'ellipse s'écrira finalement :

$$(1 + A^2 + B^2)x^2 + y^2 = 1. \quad (6)$$

La demi-longueur du grand axe (dirigé selon Oy) est égale à 1, celle du petit axe à $(1 + A^2 + B^2)^{-1/2}$; or cette valeur est bien égale à $\cos p$, si on la compare à l'expression de $\operatorname{tg} p$, donnée en (3).

En conclusion, les deux méthodes de WIESE et de PARKINSON donnent des vecteurs géomagnétiques d'induction de même direction θ , avec cependant des sens (conventionnels) opposés ; les plans préférentiels ont même inclinaison p et, ayant une orientation identique, sont donc confondus, mais les modules des vecteurs sont définis, par convention, comme égaux à $\operatorname{tg} p$ dans un cas, à $\sin p$ dans l'autre. On peut donc, entre les grandeurs des deux vecteurs W (WIESE) et P (PARKINSON), écrire les relations suivantes :

$$W = \frac{P}{\sqrt{1 - P^2}} \text{ et } P = \frac{W}{\sqrt{1 + W^2}},$$

expressions basées sur les rapports entre sinus et tangente. On notera immédiatement que W est toujours supérieur à P, mais que les deux modules auront des valeurs voisines si l'angle p est faible, c'est-à-dire si les composantes Z sont peu importantes.

Dans ce qui suit, les modules calculés par l'une et l'autre méthodes auront même valeur, soit $C = \operatorname{tg} p$; d'autre part, les directions adoptées seront celles de PARKINSON (orientées vers le canal conducteur).

APPLICATION DE PROCÉDÉS NUMÉRIQUES

Nous avons vu que la méthode d'exploitation de PARKINSON est purement graphique ; celle de WIESE est basée sur une relation algébrique, qui se traite également de la manière la plus rapide par voie graphique. Nous avons appliqué les principes de calcul qui précèdent aux données de la station de M'Bour en utilisant des procédés de traitement purement numériques, basés sur la méthode des moindres carrés.

a - Relations de Wiese

Partons de la relation (4) ; en désignant $\frac{Z}{X}$ par f et $\frac{Y}{X}$ par a, on peut l'écrire :

$$f = A + Ba. \quad (7)$$

Le dépouillement des enregistrements a donné un nombre m de «points» ou couples de valeurs a, f et on dispose donc de m équations linéaires telles que (7) ; la méthode des moindres carrés conduit au système suivant de deux équations (équations normales) :

$$\left. \begin{aligned} (a)B + mA &= (f) \\ (a^2)B + (a)A &= (af), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

où les parenthèses désignent des sommes de m termes semblables. De ce système, on tire immédiatement la valeur des inconnues A et B .

On peut de même partir de la relation (5) ; avec $\frac{Z}{Y} = f'$ et $\frac{X}{Y} = a'$, elle s'écrit :

$$f' = Aa' + B \quad (9)$$

et conduit à un autre système d'équations normales.

Les valeurs de A , respectivement de B , tirées des deux systèmes d'équations normales sont, en pratique, un peu différentes, bien que les relations (7) et (9) soient équivalentes, les cas X ou $Y = 0$ étant éliminés ; nous étudierons cette question d'un point de vue général en annexe.

Cette indétermination nous impose un choix pour l'adoption de valeurs définitives uniques : nous prendrons pour celles-ci les moyennes arithmétiques des deux coefficients trouvés. Les résultats des calculs seront indiqués dans le tableau qui suit, ainsi que les déterminations correspondantes de C , θ et p , obtenues par les relations (2) et (3).

b - Variante de la méthode de Parkinson : représentation sinusoïdale

Pour l'application de la méthode de PARKINSON, nous avons tenu compte d'une double remarque de GUEZ et ROSSIGNOL (1969) qui considèrent d'abord que la représentation par $\sin v$ est peu adaptée quand Z est petit ; en effet v est alors voisin de 90° et la variation de $\sin v$ en fonction de Z est très faible ; il serait donc avantageux de pouvoir utiliser un rapport trigonométrique plus «sensible», par exemple $\cotg v$.

De plus, au diagramme de PARKINSON, ils préfèrent la «représentation sinusoïdale», consistant à porter la variable $\cotg v$ en fonction de φ dans un système d'axes rectangulaires (figure 3) ; la sinusoïde obtenue conduit à la détermination immédiate de θ et de C . Présentons leur démonstration sous une autre forme ; on a :

$$\cotg v = \frac{Z}{H} = \frac{\sqrt{1 - (X^2 + Y^2)}}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

la dernière égalité découlant du fait que $X^2 + Y^2$ est un invariant ; on peut donc sans difficulté se rapporter aux axes de l'ellipse : en vertu de (6) le numérateur devient alors égal à $x\sqrt{A^2 + B^2}$, d'où :

$$\cotg v = \sqrt{A^2 + B^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} ;$$

le premier facteur n'est autre que C , le second est l'expression de $\cos \varphi$, pour un angle φ compté à partir de l'axe Ox de l'ellipse. On a donc :

$$\cotg v = C \cos \varphi$$

ou enfin, en nous rapportant de nouveau aux axes géographiques :

$$\cotg v = C \cos (\varphi - \theta) . \quad (10)$$

La variable $\cotg v$ varie donc sinusoïdalement en fonction de φ et le module C est égal à la demi-amplitude

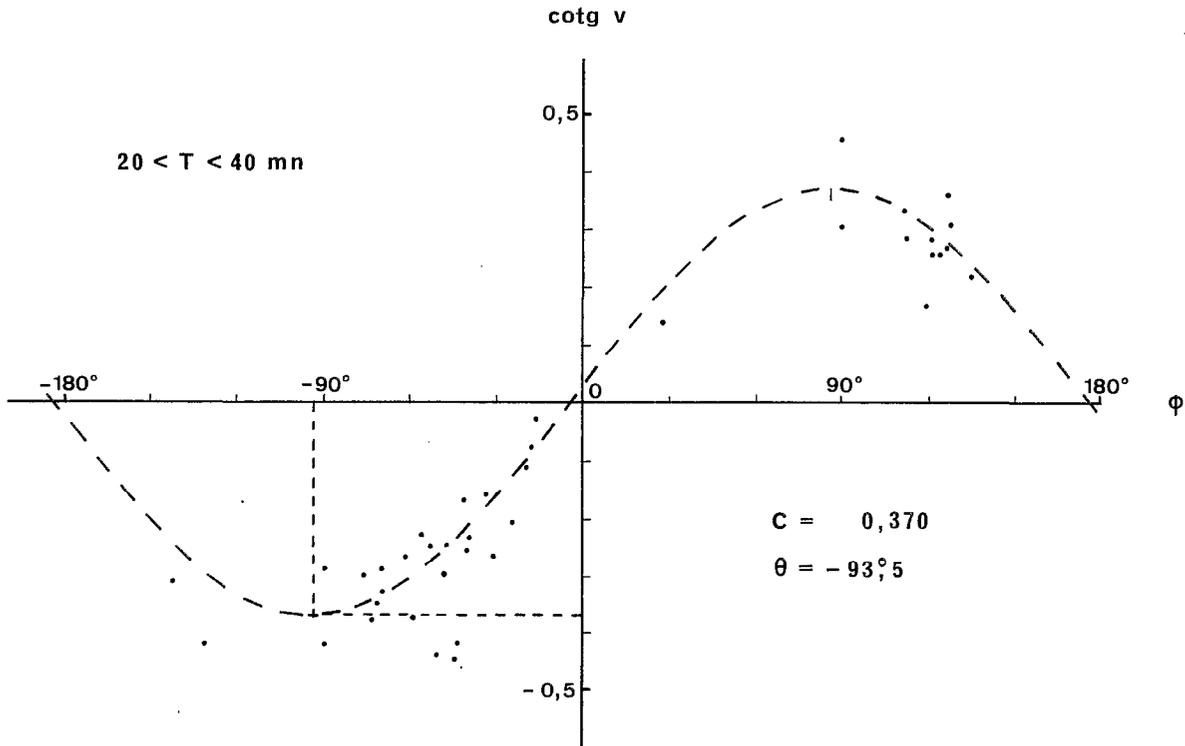


Figure 3
Représentation sinusoïdale pour $20 < T < 40$ mn

de la sinusoïde ; comme le vecteur d'induction est orienté vers le côté où les composantes Z sont négatives (sens OM de la figure 1), il convient d'adopter pour θ la valeur de φ correspondant au minimum de $\cotg v$.

Cette méthode présente également l'avantage de mieux se prêter au traitement numérique que la représentation originale de PARKINSON. Toutefois, la fonction (10) à exploiter n'étant pas linéaire, le procédé des moindres carrés est d'un emploi moins direct. Il convient dans ce cas de chercher des valeurs approchées z_0 des inconnues z et de développer la fonction en série suivant les puissances de $z' = z - z_0$; en rejetant les termes d'ordre supérieur au premier, on obtient des équations linéaires au moyen desquelles on détermine, par le procédé appliqué tout à l'heure, les valeurs des corrections z' .

Nous adopterons pour C une valeur approchée C_0 , qu'il n'est pas nécessaire pour l'instant de préciser numériquement ; pour θ , les calculs précédents indiquent qu'il est de l'ordre de 75 à 90° : nous prendrons comme valeur approchée la valeur commode de 90° . Nous écrirons donc :

$$\begin{aligned} C &= C_0 + c, \\ \theta &= 90^\circ + t, \end{aligned}$$

les inconnues étant maintenant les termes correctifs c et t ; désignons $\cotg v$ par h et la relation (10) deviendra :

$$h = (C_0 + c) \cos (\varphi - 90^\circ - t)$$

ou finalement :

$$h = (C_0 + c) \sin (\varphi - t).$$

Le développement de la fonction h s'écrit alors :

$$h (C_0 + c, \varphi - t) = C_0 \sin \varphi + \sin \varphi \cdot c + C_0 \cos \varphi \cdot t + ..$$

et conduit au système d'équations normales suivant :

$$\left. \begin{aligned} (\sin^2 \varphi) c + C_0 (\sin \varphi \cos \varphi) t &= (h \sin \varphi) - C_0 (\sin^2 \varphi) \\ (\sin \varphi \cos \varphi) c + C_0 (\cos^2 \varphi) t &= (h \cos \varphi) - C_0 (\sin \varphi \cos \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

d'où l'on tire les valeurs des inconnues c et t , pour obtenir finalement celles de C et de θ .

Ajoutons pour finir que les calculs ont été conduits en attribuant aux perturbations étudiées des poids différents selon leur intensité : pour des valeurs de H inférieures à 10 gammas, le poids est de 1, il est de 2 pour H compris entre 10 et 20 gammas et de 3 pour les intensités supérieures. Pour chaque catégorie d'observations, le calcul fait donc intervenir une somme, non pas de m , mais de M termes, M étant le nombre pondéré de phénomènes étudiés.

c - Discussion des méthodes précédentes. Méthode purement analytique

Les deux représentations graphiques de WIESE, dont la précision peut être accrue par les calculs exposés ci-dessus, sont certes commodes pour illustrer la relation entre les composantes verticale et horizontale et pour juger de la netteté du phénomène ou de la qualité des mesures, selon la plus ou moins faible dispersion des nuages de points. Mais elles ne constituent pas des représentations homogènes des observations : X et Y figurant au dénominateur dans les relations utilisées, ce sont les perturbations à composantes horizontales peu marquées - et les erreurs fortuites dont sont entachées leurs mesures - qui sont prépondérantes. Nous avons incidemment signalé que les valeurs nulles de X ou Y étaient à éliminer pour des raisons de simple arithmétique : il conviendrait d'écarter aussi les valeurs les plus faibles.

La même critique s'applique à un troisième mode de représentation possible, basé sur la relation :

$$1 = A \frac{X}{Z} + B \frac{Y}{Z} \quad ,$$

obtenue en divisant les termes de l'équation (1) par Z ; la dispersion des écarts se trouve même aggravée ici du fait que les composantes verticales sont plus faibles que les composantes horizontales.

On peut également estimer que les calculs appliqués à la représentation sinusoïdale n'échappent pas totalement à ces objections. En effet, les variables figurant dans les équations normales (11) sont, outre des sinus et cosinus, des termes en h ($h = \frac{Z}{H}$, avec $H > Z$), donc des quantités dont les écarts ne présentent pas une dispersion rigoureusement normale.

Les remarques qui précèdent suggèrent de revenir à un mode de calcul plus classique et qui réponde avec plus de rigueur aux conditions d'emploi de la méthode des moindres carrés (distribution normale des écarts, dispersion indépendante de la valeur des variables). Si l'on considère que le phénomène physique étudié se manifeste sur la composante verticale, on est naturellement conduit à appliquer le critère des moindres carrés aux écarts $Z - Z_c$ entre les mesures expérimentales Z et les valeurs calculées $Z_c = AX + BY$. Un calcul simple, analogue à celui qui a été appliqué aux droites de WIESE, fournit la valeur (unique) de chacun des coefficients A et B .

Cette dernière méthode est donc purement analytique et ne s'appuie sur aucune représentation graphique, si ce n'est celle du plan $Z = f(X, Y)$.

■

L'exécution de tous ces calculs peut s'effectuer par ordinateur. Le principal avantage d'un traitement automatique est de faciliter la mise en évidence, de façon quasi-continue en fonction de la période, de la variation des intensité et direction du vecteur d'induction : il suffit de réduire les tranches de périodes à 5 ou 3 mn, par exemple ; on obtiendrait ainsi des courbes analogues à celles des sondages magnéto-telluriques. Mais il faut pour cela que chaque tranche contienne un nombre suffisant de données - ce n'est malheureusement pas le cas des enregistrements dont nous disposons - sinon la dispersion, d'une gamme à l'autre, des résultats rend ceux-ci moins précis que sur des intervalles plus larges.

RÉSULTATS

Les résultats des calculs sont donnés dans le tableau suivant. Pour chaque intervalle sont indiqués la période moyenne T_M des perturbations analysées, ainsi que les nombres m et M de ces perturbations.

Pour éviter de surcharger le tableau, on n'y porte, en ce qui concerne la méthode de WIESE, que la moyenne des valeurs tirées des deux relations (7) et (9) ; les différences entre ces résultats individuels seront examinées à la fin de l'annexe. En outre, la direction de WIESE étant opposée à celle du canal, on indique l'angle $\theta - 180^\circ$ pour le rendre directement comparable à θ obtenu par l'autre méthode.

Les valeurs de p sont déduites de la relation $C = \text{tg } p$.

T	< 20 mn		20 - 40 mn		40 - 60 mn		> 60 mn	
T_M	11,0		30,6		48,5		103	
m M	29	40	37	50	35	56	25	49
(a) - Relations de WIESE								
A	0,004		0,016		-0,093		0,006	
B	0,317		0,361		0,413		0,579	
C	0,317		0,361		0,423		0,579	
$\theta - 180^\circ$	-90°,8		-92°,5		-77°,3		-90°,6	
p	17°,6		19°,9		22°,9		30°,1	
(b) - Représentation sinusoïdale								
C	0,312		0,370		0,421		0,573	
θ	-89°,4		-93°,5		-77°,5		-90°,3	
p	17°,3		20°,3		22°,8		29°,8	
(c) - Méthode analytique								
A	-0,007		0,029		-0,086		-0,002	
B	0,306		0,355		0,422		0,572	
C	0,306		0,356		0,431		0,572	
θ	-88°,7		-95°,2		-78°,5		-89°,8	
p	17°,0		19°,6		23°,3		29°,8	
Écarts-types sur Z								
(a)	2,84	2,64	0,71	0,72	1,07	1,10	2,48	2,48
	2,73		0,71		1,04		2,47	
(b)	2,68		0,72		1,04		2,47	
(c)	2,61		0,69		1,03		2,47	

On se rend compte de la bonne concordance des trois séries de résultats : la différence entre les valeurs extrêmes est au maximum de $2^{\circ},7$ pour θ et de $0^{\circ},7$ pour p .

Le bas du tableau donne les écarts-types (racines carrées des moyennes des carrés des écarts) sur Z , calculés à partir des coefficients A et B obtenus par chacune des méthodes ; pour la représentation de WIESE, la première ligne indique les écarts-types résultant des coefficients tirés de chaque relation et la seconde ligne ceux qui découlent de leurs moyennes.

Ces écarts présentent, d'une gamme de périodes à l'autre, des variations assez importantes : leurs valeurs relativement élevées pour les deux tranches extrêmes résultent probablement d'une moindre qualité des mesures, pour les phénomènes rapides, et de l'amplitude généralement plus grande des perturbations de longue période.

Par contre, pour un intervalle donné, les différences entre les diverses valeurs trouvées sont minimes et confirment la bonne concordance des résultats. C'est évidemment la méthode analytique qui aboutit aux écarts-types sur Z les plus faibles : elle consiste précisément à rendre ces écarts minimum ; les deux autres méthodes utilisées donnent néanmoins, malgré les critiques formulées plus haut, des écarts à peine supérieurs et sont donc d'une précision tout à fait satisfaisante.

Ces résultats numériques peuvent se résumer ainsi : les valeurs de C sont relativement élevées et augmentent régulièrement de 0,31 à 0,57, des petites vers les grandes périodes ; d'autre part, le vecteur géomagnétique d'induction est dirigé presque exactement vers l'ouest, sauf pour la gamme des périodes 40-60 mn, où il présente un écart de direction de plus de 10° .

Discussion

Bien qu'il soit illusoire de vouloir tirer des données d'une seule station une interprétation précise, celles-ci peuvent néanmoins se prêter aux considérations suivantes. Dans un article récent, RIKITAKE (1971) passe en revue les résultats d'un grand nombre de sondages géomagnétiques publiés à cette date : on observe les valeurs les plus élevées de C dans certaines îles et péninsules (Hawaii, îles au large du Japon), où elles peuvent devenir égales voire supérieures à 1, pour des perturbations rapides ; pour des phénomènes de type baie, des valeurs semblables se rencontrent également sur la côte sud-est du Japon. Dans la plupart des autres régions étudiées, les valeurs de C restent généralement inférieures à 0,5 et, selon PARKINSON (1962 a), elles tombent même au voisinage de 0,1 pour quelques observatoires insulaires (San Miguel, Guam, Apia) ; l'effet constaté à M'Bour peut donc être considéré comme significatif.

La direction du vecteur géomagnétique d'induction est très sensiblement celle que PARKINSON (1962 b) avait déjà mise en évidence et on peut sans aucun doute l'attribuer à l'effet d'un ou plusieurs conducteurs, constitués par l'océan, ses sédiments et certaines couches sous-jacentes de l'écorce ou même du manteau.

L'écart de direction d'environ 14° , constaté pour les périodes 40-60 mn, peut sembler anormal ; parmi les causes d'erreur éventuelles, nous éliminons une répartition trop inégale en azimuth ou en heure des phénomènes étudiés, car tel n'est pas le cas ; on pourrait encore supposer un effet d'origine externe : il serait difficile à discerner. Nous pensons plutôt que cette différence traduit un écart d'orientation de l'axe structural aux profondeurs concernées par ces périodes, écart comparable aux changements des

directions tectoniques avec la période que l'on observe souvent dans l'analyse tensorielle des sondages magnétotelluriques.

La caractéristique la plus intéressante de ces résultats est l'augmentation régulière de C avec la période des perturbations considérées. On peut rapprocher cette variation de celle qui a été constatée par ROSSIGNOL (1972) dans des stations du nord de la France et que l'auteur attribue à l'effet d'un conducteur profond, dont l'existence serait probablement à associer à une forte anomalie géothermique ; dans les stations côtières de la Manche, au contraire, la valeur de C était trouvée la plus élevée pour les faibles périodes ce qui traduit l'effet d'un conducteur superficiel, constitué par la Manche et ses sédiments. Il est par conséquent permis de conclure que l'induction observée à M'Bour est causée par une circulation de courants dans un conducteur s'enfonçant à grande profondeur.

Certes, dans le cas de M'Bour, on pourrait également considérer l'effet éventuel du bassin sédimentaire du Sénégal, bassin d'environ 6000 m d'épaisseur présentant une résistivité très faible, de l'ordre de 10 ohm.m en moyenne, dans sa partie occidentale. On serait donc dans des conditions s'apparentant par exemple à celles de la plaine côtière du Golfe du Mexique, cas exposé parmi d'autres par PORATH et DZIEWONSKI (1971) : la forte conductivité des sédiments de cette vaste plaine favorise la pénétration des courants induits océaniques dans la partie orientale du continent américain jusqu'à la région des Grands Lacs. Nous pensons cependant que l'effet du bassin sédimentaire, dans le cas du Sénégal, est peu important : il ne devrait, d'une part, concerner que les périodes relativement faibles ; d'autre part, on constate qu'il n'affecte guère la direction du vecteur d'induction, qui est bien celle des grands fonds océaniques.

ANNEXE

Nous avons signalé plus haut, en appliquant les deux relations de WIESE, que celles-ci, bien qu'étant équivalentes, ne donnaient pas des solutions identiques. La méthode des moindres carrés conduit en effet, pour chacune des relations, à un système d'équations normales, dont les racines ne sont que les valeurs les plus probables des inconnues cherchées, c'est-à-dire celles qui rendent les écarts minimum, à défaut de pouvoir les rendre nuls.

Cherchons cependant s'il existe des cas où les solutions tirées des deux relations sont identiques. Rappelons l'équation fondamentale de WIESE :

$$Z = AX + BY \quad (1)$$

où A et B sont les inconnues ; avec $\frac{Z}{X} = f$, $\frac{Y}{X} = a$, $\frac{Z}{Y} = f'$, $\frac{X}{Y} = a'$, on a obtenu les deux relations conditionnelles :

$$f = A + Ba \quad (7)$$

$$f' = Aa' + B \quad (9)$$

chacune d'elles peut donner lieu à une représentation graphique distincte, l'une en coordonnées a, f, l'autre en coordonnées a', f'. Dans ce qui suit, nous confondrons équation et droite (représentative), couple de valeurs et point (figuratif).

Cas de m = 2

Dans le cas où on ne dispose que de deux séries de valeurs a,f, le système des deux équations (7) peut être traité par la méthode ordinaire et l'application du procédé des moindres carrés devient superflue. Il est alors bien évident que le système des deux équations (9) fournira des racines identiques à celles qu'on a tirées de (7), l'un de ces systèmes se déduisant de l'autre par division de tous les termes par a.

Cas de m = 3

Désignons ces trois couples de valeurs expérimentales par a,f - b,g - c,h. On peut alors écrire trois équations telles que (7) qui sont généralement incompatibles.

- cas des points alignés

Un cas particulier serait celui où les trois points figuratifs sont alignés ; on voit immédiatement que l'un quelconque d'entre eux est superflu et on se trouve ramené au cas précédent de deux points.

- cas général

C'est celui où les trois points sont disposés de façon quelconque ; abstraction faite de toute représentation d'un phénomène physique, ce serait le cas de valeurs a, .. f, .. purement aléatoires ; évidemment, la recherche d'une solution linéaire est alors envisagée en pure hypothèse. Cherchons donc les conditions qui aboutiraient à l'égalité des valeurs de A, respectivement de B, obtenues à partir des relations (7) et (9).

L'expression de A, première inconnue, tirée des deux équations normales (8) s'écrit :

$$A = \frac{(a^2)(f) - (a)(af)}{3(a^2) - (a)(a)}$$

avec : (a) = a + b + c,

(af) = af + bg + ch, etc..

La relation (9) conduit à un autre système d'équations normales, d'où l'on peut tirer une nouvelle expression de A :

$$A' = \frac{(a')(f') - 3(a'f')}{(a')(a') - 3(a'^2)}$$

en remarquant que $a' = \frac{1}{a}$ et $f' = \frac{f}{a}$, on a ici :

$$(a') = \left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \text{ etc..}$$

L'égalité de ces deux expressions peut s'écrire sous la forme $A - A' = 0$; le calcul a été effectué en déterminant séparément les facteurs de chacun des termes f, g, h, qui figurent toujours au premier degré ; ces trois facteurs se déduisent d'ailleurs les uns des autres par permutation circulaire des termes a, b, c et peuvent se réduire à un produit de polynômes. On trouve finalement :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{abc} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ & \cdot (b - c)(c - a)(a - b) \\ & \cdot [(b - c)f + (c - a)g + (a - b)h] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

On peut traiter de manière analogue les expressions de la seconde inconnue B ; l'égalité $B - B' = 0$ s'écrira :

$$\left(\frac{1}{abc}\right)^2 (a + b + c) P_2 P_3 = 0,$$

en désignant par P_2 et P_3 les expressions des deuxième et troisième lignes de (12) qui se retrouvent identiquement ici.

- Discutons ces deux relations ; elles sont vérifiées si l'un au moins des termes de ces produits est nul :
- les premières lignes contiennent les sommes $\left(\frac{1}{a}\right)$ et (a) ; annuler séparément l'une ou l'autre entraînerait soit $A = A'$, soit $B = B'$, c'est-à-dire l'identité partielle des solutions des deux relations (7) et (9). Mais les deux sommes ne peuvent pas être nulles toutes deux : cela nécessiterait que soit vérifiée par exemple l'égalité $(b + c)^2 = bc$, ce qui est impossible, sauf si $b = c = 0$;
 - le produit P_2 de la deuxième ligne devient nul si deux au moins des valeurs a, b, c sont égales, c'est-à-dire, géométriquement, si au moins deux des trois points ont même abscisse ; cela est alors le cas sur les deux graphiques, celui en a, f et celui en a', f' ;
 - enfin, annuler l'expression P_3 figurant à la troisième ligne revient à écrire :

$$\frac{b - c}{g - h} = \frac{c - a}{h - f},$$

relation qui signifie que les trois points figuratifs sont alignés ; l'étant sur l'un des graphiques, ils le sont également sur l'autre ; ce cas a été étudié plus haut et implique évidemment l'identité des deux systèmes de solutions.

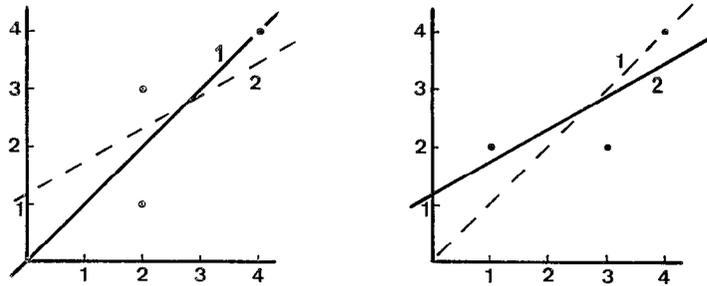


Figure 4

Étudions plus en détail le deuxième cas envisagé ($P_2 = 0$). L'égalité de deux des valeurs a, b, c , par exemple $a = b$, a pour conséquence que le troisième couple de valeurs (c, h) satisfait rigoureusement à la relation (7), c'est-à-dire qu'il ne comporte pas d'erreur, au sens de la méthode des moindres carrés ; autrement dit, la droite obtenue passe par ce point, de coordonnées c, h . Il suffit, pour s'en assurer, de calculer A et B à l'aide des équations (8), en posant $(a) = 2a + c$, etc. ; on vérifiera que l'on a bien $h = A + Bc$. Cela entraîne, pour que la somme des carrés des erreurs soit minima, que la droite passe par le milieu du segment reliant les deux points d'abscisse a .

Il n'en va pas de même si deux des trois points ont même ordonnée, par exemple $f = g$, avec des abscisses différentes : la relation ci-dessus n'est alors pas vérifiée. La double figure 4 illustre la distinction entre ces deux cas : le milieu de l'intervalle des deux premiers points a mêmes coordonnées sur les deux graphiques, ainsi que le troisième point ; les droites en trait plein 1 ou 2 sont les solutions de moindres carrés pour chaque cas, dont voici les données numériques, Σe^2 étant la somme des carrés des écarts :

cas $a = b$	droite 1 : $A_1 = 0$	$B_1 = 1$	$\Sigma e^2 = 2$
		(par rapport à la droite 2 :	2,490)
cas $f = g$	droite 2 : $A_2 = 1,143$	$B_2 = 0,571$	1,143
		(par rapport à la droite 1 :	2).

On pourra s'étonner de cette différence, car la tendance habituelle est de tracer dans les deux cas une même droite ; ce sera le plus souvent celle passant par l'un des points et par le milieu de l'intervalle des deux autres. Cette tendance est justifiée si l'on n'a pas à considérer de direction privilégiée, mais elle ne l'est plus si l'on cherche, comme c'est généralement le cas, la droite de régression de y en x : ce sont alors uniquement les écarts en ordonnées qui interviennent.

Suite à la démonstration exposée plus haut, on pourra également vérifier sur cet exemple que l'application de l'équation (9) (deuxième relation de WIESE) donne un résultat identique dans le premier cas, mais différent dans le second. On trouve en effet :

pour le premier cas :	$A'_1 = 0$	$B'_1 = 1,$
pour le deuxième cas :	$A'_2 = 1,589$	$B'_2 = 0,384$

et on constate que les écarts, dans ce dernier cas, sont importants : les rapports entre ces valeurs et celles que nous avons obtenues plus haut sont respectivement :

$$1,39 \text{ et } 0,67.$$

Notons en passant ce paradoxe : c'est la configuration de points la moins dispersée (celle du deuxième cas, où $\Sigma e^2 = 1,143$) qui donne des différences notables entre les racines A , respectivement B , alors que ces différences sont nulles dans l'autre cas, où la valeur de Σe^2 est supérieure. Cela s'explique aisément : il a été démontré que l'égalité des abscisses de deux points entraînait toujours l'identité des deux systèmes de racines ; par contre, la quantité Σe^2 dépend de leur écart en ordonnée et peut donc atteindre n'importe quelle valeur.

Cas de $m > 3$

Nous avons vu que dans le cas de trois points, il fallait déjà des conditions tout-à-fait particulières pour constater l'égalité des deux systèmes de solutions. Pour un nombre de points supérieur, on peut donc affirmer que cette égalité n'est obtenue que pour des configurations exceptionnelles des points (alignement, symétries, ...) qui ne peuvent guère - surtout s'il s'agit de données expérimentales - se rencontrer en pratique.

◇

Nous avons analysé plus haut les deux cas limites : d'une part l'alignement parfait des points, qui traduirait des mesures idéales ; d'autre part une répartition aléatoire, impliquant l'absence de toute relation physique. On conçoit que des données d'observations se situent entre ces deux extrêmes et se rapprochent d'autant plus du premier cas (pour un phénomène linéaire) que la qualité des mesures est meilleure.

Quel est l'ordre de grandeur des différences sur A et sur B constatées en pratique ? Celles-ci sont généralement loin d'être négligeables, comme on peut en juger d'après les résultats expérimentaux obtenus dans l'étude précédente :

- pour B, les valeurs tirées de la première relation de WIESE étant supposées égales à 1, les solutions de la seconde relation seraient, pour les quatre gammes de périodes :

0,82 1,08 0,94 0,96,

soit une différence relative moyenne de 10% ;

- dans le cas de A, dont les valeurs absolues sont en général très faibles, les écarts relatifs seraient beaucoup plus grands, mais peu significatifs ; indiquons alors plutôt les différences algébriques (première solution - deuxième solution) :

0,043 - 0,023 0,068 0,002.

◇

Les conclusions de cette étude peuvent être résumées comme suit : les solutions tirées des deux relations de WIESE sont évidemment identiques pour deux couples de données ; elles ne le sont, pour trois couples, qu'à la condition que les trois points figuratifs soient alignés ou que deux d'entre eux aient même abscisse ; dans ce dernier cas, la droite représentative passe par le troisième point. Pour un nombre supérieur de données, les deux systèmes de solutions sont nécessairement différents, sauf cas exceptionnels, et les écarts peuvent être appréciables, par exemple de l'ordre de 10% même pour des nuages de points peu dispersés.

◆

BIBLIOGRAPHIE

- GUEZ, R., ROSSIGNOL, J.C. - 1969 - Étude des variations magnétiques enregistrées à Chambon-la-Forêt et à Garchy. Institut de Physique du Globe, Paris, note 33.
- PARKINSON, W.D. - 1959 - Directions of rapid geomagnetic fluctuations. *Geoph. J.R. Astr. Soc.*, 2, 1-14.
- PARKINSON, W.D. - 1962a - Magnetic variations over the oceans. *Geomagnetica* (San Miguel Observatory), 97-108.
- PARKINSON, W.D. - 1962b - The influence of continents and oceans on geomagnetic variations. *Geoph. J. R. Astr. Soc.*, 4, 441-449.
- PORATH, H., DZIEWONSKI, A. - 1971 - Crustal resistivity anomalies from geomagnetic deep-sounding studies. *Rev. Geoph. Space Phys.*, 9, 891-915.
- RIKITAKE, T. - 1971 - Electric conductivity anomaly in the earth's crust and mantle. *Earth-Science Rev.*, 7, 35-65.
- ROSSIGNOL, J.C. - 1972 - Electrical conductivity anomalies in northern France and along the Channel coasts. *Nature Phys. Sc.*, 235, 94-95.
- WIESE, H. - 1965 - *Geomagnetische Tiefentellurik*. Akademie-Verlag, Berlin.

