

Modélisation de la résistance hydraulique à la surface d'un bassin fluvial

Abel A. AFOUDA
Université Nationale du Bénin
B.P. 526 - Cotonou (R. P. Bénin)

RÉSUMÉ

L'une des difficultés majeures de la modélisation mathématique du phénomène pluie-débit réside dans l'estimation de la résistance hydraulique pour des conditions naturelles d'écoulement sur un bassin fluvial. On dégage dans cet article un modèle généralisé de résistance hydraulique et un facteur cinématique qui servent de base au choix d'une loi de débit pour un écoulement sur une surface couverte de végétation. La discussion de ce modèle se fait à la lueur des résultats antérieurs.

ABSTRACT : *Hydraulic resistance modelling on a natural river basin surface*

One of the major difficulties of the rainfall-runoff mathematical modelling lies in estimating the hydraulic resistance for natural flow condition on a river basin. This paper presents a generalized hydraulic resistance model and a kinematic factor which are the basis for the selection of the flow equation on a vegetated watershed surface. The model is discussed in the light of previous results.

1. POSITION DU PROBLÈME

Depuis que Sherman a introduit la notion de l'Hydrogramme Unitaire, on assiste à un grand développement des modèles pour simuler la transformation de la pluie en débit. Mais la plupart des approches sont fondées sur une simplification de la configuration du bassin versant, compatible avec les hypothèses de linéarité qui sont à la base de la théorie de Sherman. Par la suite, l'importance de l'écoulement de surface dans la réponse du bassin versant à un événement pluvial donné, l'absence de séries de mesures suffisamment longues et pouvant permettre l'utilisation de méthodes probabilistes dans le cas de petits bassins versants, ont conduit à une utilisation intensive de modèles mathématiques qui permettent, lorsque l'on connaît l'évènement pluvial, de prédire l'écoulement. On s'attache ainsi par différentes méthodes à simuler le comportement du bassin versant par un opérateur linéaire ou non-linéaire, ou à dégager une fonction de transfert du bassin versant. Parmi les contributions les plus importantes dans le domaine, on peut citer les travaux de Dooge (1959, 1973) pour les modèles linéaires, de Amorocho et Orlob (1961) pour les opérateurs non-linéaires, et de Wooding (1965) pour les modèles à paramètres répartis.

Lorsqu'elle est déterminée à partir d'une méthode de déconvolution (linéaire ou non-linéaire), la fonction de transfert décrit l'influence des propriétés physiques et physiographiques du bassin versant. Lorsqu'elle est déterminée à partir d'une simulation du bassin versant par une équation différentielle ordinaire, l'influence des propriétés physiographiques est explicitement introduite par un coefficient dit de stockage (Dooge, 1959, Debordes 1975) ; et lorsque l'écoulement sur le bassin versant est décrit par une équation à paramètres répartis (éq. de St-Venant), l'influence des propriétés physiographiques est décrite soit par le coefficient de Darcy-Weisbach, soit par le coefficient de Chézy, ou soit encore par le coefficient de Manning (Wooding-1965, Woolhiser-1975). Mais dans tous les cas, les paramètres essentiels doivent être déterminés expérimentalement alors que l'amplitude, la forme, la distribution et la nature de la végétation sur un bassin versant se prêtent difficilement à une modélisation expérimentale. L'une des difficultés majeures de la modélisation mathématique du phénomène pluie-débit réside donc dans l'estimation de la résistance hydraulique pour des conditions naturelles d'écoulement sur le bassin versant.

Dans les lignes qui suivent, on se propose de développer une méthode analytique d'évaluation des caractéristiques physiographiques du bassin versant et de dégager une expression de la résistance hydraulique qui permette de décrire de manière adaptée l'écoulement. On dégage ensuite la relation qui existe entre les résultats obtenus et ceux des travaux antérieurs.

2. RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS CLASSIQUES DE LA RÉSISTANCE HYDRAULIQUE

L'une des caractéristiques de l'écoulement sur un bassin versant est que le mouvement de l'eau a lieu dans un milieu couvert d'obstacles de tous genres : végétation, protubérances, graviers ou cailloux de différentes géométries, etc. La notion de rugosité revêt donc dans ce cas une signification toute particulière. Aussi l'un des problèmes majeurs qui se posent dans la modélisation de l'écoulement sur un bassin versant est-il celui de l'évaluation de la résistance hydraulique.

Plusieurs études antérieures ont montré que l'écoulement sur une « surface libre » peut se présenter sous trois formes :

- 1) L'écoulement laminaire.
- 2) L'écoulement de transition.
- 3) L'écoulement turbulent.

Les limites de chacun de ces régimes d'écoulement se présentent souvent sous forme de discontinuité à l'échelle « log-log » sur les courbes traduisant la relation entre le coefficient de résistance et le nombre de Reynolds de l'écoulement (Comolet 1963, Yao-Huang, Yevjevich et Woolhiser 1978).

Dans le cas de l'écoulement laminaire dans une conduite, l'équation théorique de la vitesse est donnée par

$$V = g R^2 J / k \nu \quad (1)$$

et dans le cas d'un écoulement turbulent la vitesse peut être évaluée par l'une des expressions suivantes :

$$J = \Gamma_0 V^2 / 8 g R \quad (\text{formule de Darcy-Weisbach}) \quad (2)$$

$$V = C R^{1/2} J^{1/2} \quad (\text{formule de Chézy}) \quad (3)$$

$$V = \frac{1,486}{n} R^{2/3} J^{1/2} \quad (\text{formule de Manning}) \quad (4)$$

Dans ces expressions, k est une constante; R est le rayon hydraulique, ν désigne la viscosité cinématique de l'eau, g l'accélération de la pesanteur, J est la perte de charge, Γ_0 est le coefficient de résistance hydraulique ou coefficient de Darcy-Weisbach, C est le coefficient de Chézy, n est le coefficient de Manning et V est la vitesse moyenne.

On montre (Comolet 1963) que généralement $\Gamma_0 = F(Re, e/R)$ où e/R est une rugosité relative, et e la rugosité absolue. Pour une conduite hydrauliquement lisse $\Gamma_0 = F(Re)$ et pour une conduite hydrauliquement rugueuse $\Gamma_0 = F(e/R)$. Les diverses expériences en conduites lisses et en conduites rugueuses ont permis de mieux préciser ces relations. Ainsi, dans le cas de l'écoulement laminaire, l'utilisation de la formule de Poiseuille conduit à l'expression $\Gamma_0 = 64/Re$ pour $Re < 2\,000$; pour les écoulements turbulents en conduites lisses, l'étude de la couche limite turbulente permet de conclure que la loi-puissance rend compte de la résistance hydraulique $\Gamma_0 = (1/Re)^{1/4}$, mais lorsque le nombre de Reynolds augmente, l'exposant décroît graduellement et la variation de l'exposant est plutôt mieux décrite par une loi logarithmique, on a (Comolet 1963) :

— dans la couche limite turbulente, en conduite lisse,

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma_0}} = 2 \log \left(\frac{Re \sqrt{\Gamma_0}}{2,51} \right) \quad \text{pour } Re > 10^5 \quad (5)$$

— et pour les conduites rugueuses

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma_0}} = 2 \log \left(3,71 \frac{R}{e} \right) \quad \text{pour } Re > 10^5 \quad (6)$$

Ces résultats classiques obtenus généralement pour les conduites ont été transposés à l'étude des surfaces naturelles par les hydrologues, encouragés par le fait que d'une part la précision des mesures hydrologiques ne permet souvent pas une évaluation des erreurs que peut introduire l'utilisation de la formule classique de résistance et d'autre part, par le fait qu'il n'existe pas encore une théorie cohérente d'évaluation de la résistance hydraulique

pour les bassins versants naturels. Ainsi on utilise les expressions suivantes pour passer d'une formule du coefficient de résistance à l'autre.

$$C = (8 g/\Gamma_0)^{1/2} = (1,486 R^{1/6})/n \tag{7}$$

3. DÉTERMINATION DE LA VITESSE D'ÉCOULEMENT SUR UN BASSIN VERSANT NATUREL

Pour développer une relation entre Γ_0 et Re , applicable à l'écoulement sur un bassin versant naturel, il faut pouvoir déterminer de manière appropriée la vitesse d'écoulement sur ce bassin. Les travaux antérieurs sur les transformations pluie-débit (Roche-1963, Remenieras-1970, Ishihara-1973, Afouda-1979-a) indiquent que le ruissellement sur un bassin versant naturel met en jeu plusieurs types d'écoulement (Fig. 1) :

- un écoulement rapide qui est l'écoulement à la surface du bassin versant et qui se fait avec une vitesse V_1 et une hauteur h_1 que l'on précisera plus loin ;
- un écoulement retardé appelé écoulement hypodermique et qui se fait dans les couches poreuses de surface avec une vitesse V_2 et une hauteur h_2 ;
- un écoulement profond, s'il y a lieu, qui va alimenter la nappe phréatique. On suppose ici que l'écoulement profond est nul.

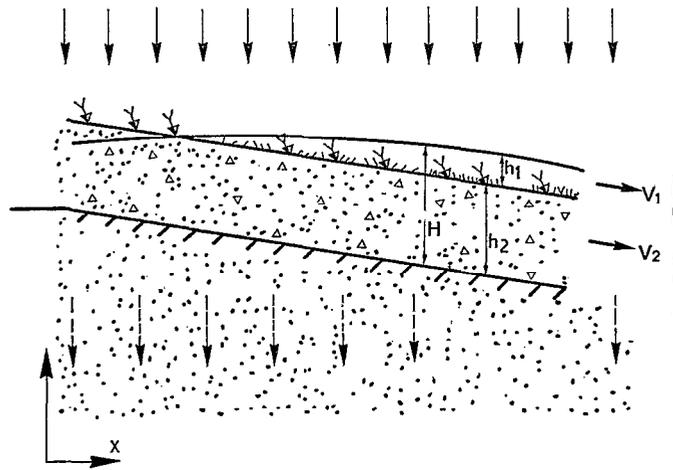


Fig. 1. — Types d'écoulement sur le bassin versant naturel

3.1. VITESSE DE L'ÉCOULEMENT RAPIDE

Dans un bassin versant, on a vu que l'écoulement a lieu en présence de nombreux obstacles de formes variées, allant des tiges d'herbes aux troncs d'arbres, en passant par les feuillages, les brindilles sèches, les cailloux, les protubérances diverses dont il faut tenir compte lors de l'évaluation de la perte de charge.

L'écoulement autour d'un obstacle met en jeu à la fois les forces d'inertie et les forces de viscosité. Il apparaît donc normal de conférer au nombre de Reynolds qui est le rapport de ces deux forces un rôle important. La solution mathématique pour le cas où l'obstacle est une sphère a été donnée par Stocke sous la forme :

$$\tau = \frac{1}{2} \rho C_D V_1^2 \tag{8}$$

avec $C_D = 24/Re$ et $Re < 0,5$; τ étant la force de traînée par unité de surface. Lorsque l'obstacle est un disque perpendiculaire à l'écoulement $C_D = 20,4/Re$, avec $Re < 0,5$. Lorsque le disque est parallèle à l'écoulement

$C_D = 13,6/Re$, avec $Re < 0,5$. Si l'obstacle est un cylindre perpendiculaire à l'écoulement, on a lorsque d désigne le diamètre et h'_1 la hauteur apparente du cylindre

$$\tau_{cyl} = \frac{1}{2} \rho \bar{C}_D V_1^2 d h'_1 \quad (9)$$

où \bar{C}_D est le coefficient de traînée pour le cylindre. Pour un nombre de Reynolds de l'ordre de $8 \cdot 10^3$ à $2 \cdot 10^5$; $\bar{C}_D = 1,2$ (Yao-Wuang et al. 1978).

On peut alors pour décrire l'écoulement autour d'obstacle de forme quelconque, adopter une expression du coefficient de traînée de la forme

$$C_D = a/Re^{m_0} \quad (10)$$

avec m_0 variant lentement de 1 à 0 lorsque l'écoulement varie du laminaire au turbulent. a est un coefficient de forme de l'obstacle. Il est certain que a varie d'un obstacle à un autre; pour l'équation de Stoke $a = 24$, alors que pour le cylindre on prendra $a = a_0 d h'_1$ où a_0 est le coefficient propre du cylindre, d le diamètre du cylindre et h'_1 la hauteur apparente du cylindre. Alors, si l'on désigne par a le coefficient moyen de forme pour tout le bassin, par s , la surface moyenne occupée par un obstacle sur le bassin, par λ , le nombre d'obstacles par unité de surface, on peut déterminer un coefficient de résistance des obstacles à l'écoulement par la relation (Afouda 1978-a) :

$$C_1 = \frac{a \lambda}{h'_1 (1 - \lambda s)} \cdot \frac{1}{Re^{m_0}} = \frac{\eta}{Re^{m_0}} \quad (11)$$

avec

$$\eta = a \lambda / h'_1 (1 - \lambda s)$$

$a \lambda$ représente la projection de la surface occupée par les obstacles sur un plan perpendiculaire à l'écoulement par unité de largeur. $h'_1 (1 - \lambda s)$ est le volume d'eau qui participe à l'écoulement par unité de surface du bassin versant. On pose $h_1 = h'_1 (1 - \lambda s)$. Dans un bassin où les obstacles sont constitués par une végétation, η caractérise bien la densité et la nature de la végétation. Ainsi on a dégagé un paramètre η qui décrit les propriétés physiographiques du bassin.

Tout ce qui précède indique que la détermination de la vitesse d'écoulement à travers les herbes et autres obstacles doit tenir compte non seulement de la perte de charge due à la surface du bassin versant proprement dite, mais aussi de la perte de charge due aux obstacles qui jonchent cette surface.

La perte de charge due à l'écoulement sur la surface propre du bassin peut être évaluée à partir de la relation (3), en posant $R \simeq h_1$ qui traduit l'assimilation du bassin à un canal de largeur infinie

$$J_1 = V_1^2 / C^2 h_1 \quad (12)$$

La perte de charge additionnelle due aux obstacles est évaluée par

$$J_2 = C_1 V_1^2 / 2 g \quad (13)$$

En tenant compte des équations (12) et (13) et en posant $J = J_1 + J_2$, on déduit l'expression de la vitesse d'écoulement à la surface du bassin versant.

$$V_1 = \left[\frac{2 g C^2 h_1}{2 g + C_1 C^2 h_1} J \right]^{1/2} \quad (14)$$

La relation (14) suppose que l'on adopte une répartition uniforme pour les obstacles. Une telle hypothèse peut être considérée comme une approximation acceptable eu égard à la complexité du phénomène que l'on cherche à décrire.

3.2. VITESSE DE L'ÉCOULEMENT RETARDÉ

L'évaluation de la vitesse de l'écoulement retardé utilise la théorie des milieux poreux (Bear 1972) et conduit à une expression de la perte de charge de la forme (Afouda-1979-a)

$$J = \frac{1-p}{p^3} \cdot \frac{\lambda_0}{24 g \beta d_0} \cdot C_D V_2^2 \quad (15)$$

où J désigne la perte de charge, p la porosité du milieu, λ_0 est un coefficient qui tient compte de l'influence des différents grains constituant le milieu poreux, g est l'accélération de la pesanteur, β est un coefficient qui tient compte de la forme des grains, d_0 désigne le diamètre moyen des grains, C_D est le coefficient de Stoke et V_2 est la vitesse apparente de l'écoulement.

3.3. VITESSE TOTALE D'ÉCOULEMENT SUR LE BASSIN VERSANT

On suppose maintenant que l'écoulement rapide et l'écoulement retardé ont la même direction, et l'on considère le bassin versant comme un milieu stratifié où les couches sont parallèles entre elles. V_1 et V_2 sont les vitesses respectives d'écoulement dans la couche supérieure qui est le siège de l'écoulement rapide, et dans la couche inférieure qui est le siège de l'écoulement hypodermique. Q_1 et Q_2 sont les débits correspondants par unité de largeur, h_1 et h_2 sont les hauteurs des écoulements, $H = h_1 + h_2$ est la hauteur totale d'écoulement et le débit total d'écoulement est $Q = Q_1 + Q_2$.

On cherche la vitesse équivalente, correspondant à un écoulement de débit Q et de hauteur H telle que $Q = UH$ sous l'effet du même gradient J . Alors, une telle vitesse est de la forme

$$U = V_1 \left(1 - \frac{h_2}{H} \right) + V_2 \frac{h_2}{H} \quad (16)$$

En remplaçant dans cette relation V_1 et V_2 par leurs valeurs et en prenant le même gradient pour les deux écoulements, on obtient :

$$U = \left\{ \left(\frac{2 g C^2 h_1}{2 g + C_1 C^2 h_1} \right) \cdot \left(1 - \frac{h_2}{H} \right)^2 + \frac{24 g \beta d_o p^3}{\lambda_o (1-p) C_D} \left(\frac{h_2}{H} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{2 g C^2 h_1}{2 g + C_1 C^2 h_1} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{24 g \beta d_o p^3}{\lambda_o (1-p) C_D} \right)^{1/2} \cdot \left(1 - \frac{h_2}{H} \right) \left(\frac{h_2}{H} \right) \right\}^{1/2} J^{1/2} \quad (17)$$

Si l'on introduit un coefficient généralisé de résistance hydraulique par la relation

$$\Gamma = 8 g H J / U^2 \quad (18)$$

On trouve que :

$$\Gamma = 8 g H \left\{ \left(\frac{2 g C^2 h_1}{2 g + C_1 C^2 h_1} \right) \cdot \left(1 - \frac{h_2}{H} \right)^2 + \frac{24 g \beta d_o p^3}{\lambda_o (1-p) C_D} \left(\frac{h_2}{H} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{2 g C^2 h_1}{2 g + C_1 C^2 h_1} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{24 g \beta d_o p^3}{\lambda_o (1-p) C_D} \right)^{1/2} \cdot \left(1 - \frac{h_2}{H} \right) \left(\frac{h_2}{H} \right) \right\}^{-1} \quad (19)$$

4. FACTEUR CINÉMATIQUE ET ÉQUATION DE L'ÉCOULEMENT

L'objectif majeur de la détermination du coefficient de résistance hydraulique sur un bassin versant est de dégager la loi de débit applicable à l'écoulement. Compte tenu de la viscosité de l'eau, l'écoulement sur un bassin versant naturel peut être soit laminaire, soit turbulent, soit une combinaison des deux. Le choix du modèle de débit qui doit être utilisé pour la simulation de l'hydrographe de crue dans le cas laminaire ou dans le cas turbulent dépend surtout du nombre de Reynolds et/ou du nombre de Froude de l'écoulement. Wooding (1965) a montré que pour le nombre de Froude inférieur à deux ($Fr < 2$) l'équation dynamique peut être réduite à la forme

$$I_o = J \quad (20)$$

où I_o est la pente moyenne du bassin. Woolhiser et Liggett (1967) utilisant la loi classique de résistance hydraulique ont montré qu'il existe pour le bassin versant un facteur cinématique

$$K_o^* = \frac{I_o L_o}{H_o Fr^2} \quad (21)$$

L'équation dynamique réduite (éq. 20) est valable seulement dans le cas où $K_o^* > 10$.

L'utilisation du coefficient généralisé de résistance hydraulique permet de mieux préciser la forme du facteur cinématique pour un bassin versant naturel. Supposons en effet pour simplifier que $h_2 = 0$, alors la vitesse est donnée par la relation (14). On considère comme écoulement de référence l'écoulement sur une « surface libre » sans végétation, sans obstacles, que l'on désigne ici par « écoulement de Chézy », avec une vitesse $Vo^2 = C^2 h_1 J$, on déduit de la relation (14) que

$$C_1 = 2 g (\alpha^2 - 1) / C^2 h_1 \quad (22)$$

avec $\alpha = V_0/V_1$; en introduisant le nombre de Froude et en considérant l'écoulement normal, on a :

$$C_1 = \frac{2 I_0}{H_0} \left(\frac{1}{Fr_1^2} - \frac{1}{Fr_0^2} \right) \tag{23}$$

avec $J = I_0$ pour l'écoulement normal, $h_1 = H_0$ est la hauteur correspondant à l'écoulement normal, Fr_1 et Fr_2 sont les nombres de Froude respectifs de l'écoulement sur le bassin versant et de l'écoulement de Chézy. On voit que le paramètre C_1 a la dimension (L^{-1}) . En multipliant la relation (23) par une longueur de référence L_0 , on déduit

$$K_1^* = L_0 \eta / 2 Re^{m_0} + K_0^* \tag{24}$$

avec

$$K_i^* = \frac{I_0 L_0}{H_0 Fr_i^2} ; (i = 0,1)$$

Le paramètre $L_0 \eta/2$ est une grandeur adimensionnelle qui décrit aussi les propriétés physiographiques du bassin versant. En outre $L_0 \eta/2 Re^{m_0}$ est équivalent à un facteur cinématique, alors la relation (24) désigne le facteur cinématique du bassin versant naturel.

Dans le cas d'un écoulement laminaire sur le bassin, $m_0 = 1$, le facteur cinématique dépend à la fois du nombre de Reynolds et du nombre de Froude. La figure (2) montre la relation entre le facteur cinématique K_1^* , le nombre de Reynolds Re et le paramètre $L_0 \eta/2$. On observe que pour $L_0 \eta/2 = 0$, l'écoulement est de Chézy, pour $L_0 \eta/2 = 1000$, le facteur cinématique a la même forme que l'expression de Fanning pour le coefficient de résistance en milieux poreux. Alors, en admettant qu'il existe une certaine correspondance entre le coefficient de résistance hydraulique et le facteur cinématique, dans le cas d'un écoulement laminaire, on conclut que dans ce cas la surface du bassin se comporte comme un milieu poreux.

Dans le cas d'un écoulement turbulent, $m_0 = 0$, le facteur cinématique dépend seulement du nombre de Froude de l'écoulement ; la figure (3) montre dans ce cas l'évolution du paramètre cinématique avec $L_0 \eta/2$.

On admet avec Woolhiser et Liggett (1967) que l'équation dynamique réduite (éq. 20) est valable pour $K_1^* > 10$, alors si $K_0^* = 10$, l'équation (24) montre que la relation (20) est toujours valable pour un bassin versant naturel. On admet donc l'équation dynamique sous la forme suivante équivalente à l'équation (20) :

$$Q = \Psi (H, t) \tag{25}$$

et l'équation de continuité conserve sa forme habituelle

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q (x, t) \tag{26}$$

avec $H = h_1 + h_2$ et $q (x, t) = q_r - q_e$ et q_r désigne l'intensité de la pluie, et q_e les pertes par infiltration.

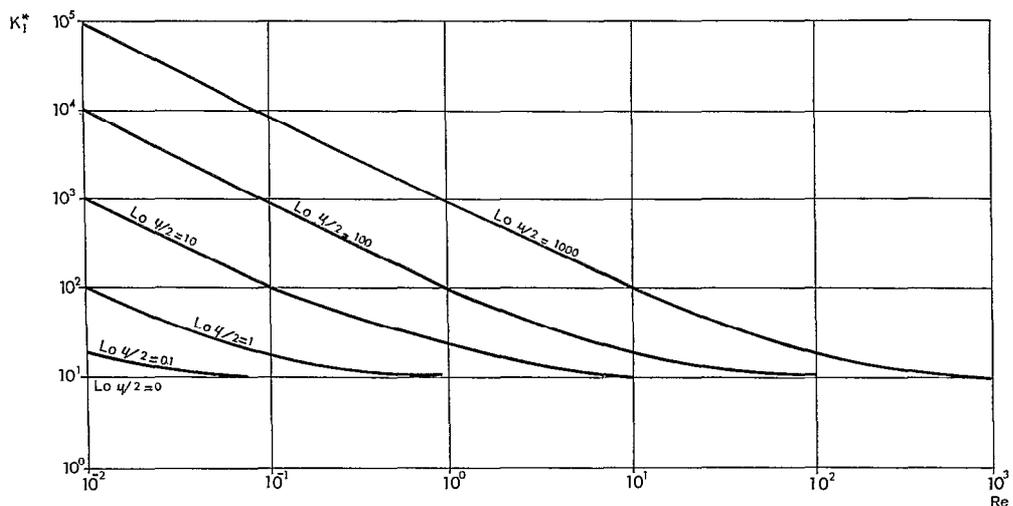


Fig. 2. — Relation entre le facteur cinématique K_1^* , le paramètre $L_0 \eta/2$ et le nombre de Reynolds Re

Les équations (25) et (26) forment le système d'équations à paramètres répartis de l'écoulement sur le bassin versant. La solution à une formulation globale de ces équations a été donnée analytiquement sous forme de série de Volterra par Afouda (1979-a, 1979-b, 1979-c).

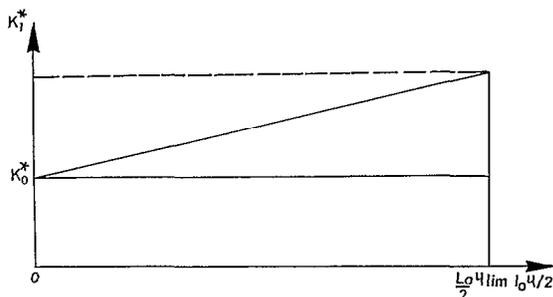


Fig. 3. — Relation entre le facteur cinématique K_1^* , et le paramètre pour $Re = Cst.$

5. COMPARAISON AVEC LES RÉSULTATS ANTÉRIEURS

La discussion du modèle proposée porte sur deux aspects; d'abord sur la relation décrivant la résistance hydraulique, et ensuite sur le modèle d'écoulement qui en découle.

5.1. LA RÉSISTANCE HYDRAULIQUE

Comme le note Woolhiser (1975), la plupart des travaux antérieurs admettent que la loi de résistance de Darcy-Weisbach est valable et les mesures de hauteurs, de débits et de pente sont effectuées pour déterminer le coefficient de résistance hydraulique.

Pour un écoulement laminaire sur un bassin versant naturel, la relation suivante a été proposée (Woolhiser 1975)

$$\Gamma = \frac{A}{Re} + \frac{a_1}{Re} q^{b_1} \quad (27)$$

où A/Re désigne le coefficient de résistance hydraulique sans l'effet de l'intensité de pluie, et les coefficients a_1 et b_1 sont des paramètres empiriques qui permettent de tenir compte de l'intensité de la pluie. Le paramètre A est lié à la surface du bassin versant alors que $a_1 \simeq 10$ et $b_1 \simeq 1$.

Si l'on admet que $h_2 = 0$ et $C^2 = 8 g/\Gamma_0$ dans l'équation (19), le coefficient de résistance s'obtient sous la forme :

$$\Gamma = \Gamma_0 + 4 C_1 h_1 \quad (28)$$

avec Γ_0 représentant le coefficient de résistance de Darcy-Weisbach pour une surface sans obstacle. Cette relation est analogue à l'équation (27) avec la différence que dans l'équation (28), on ne considère pas l'effet de l'intensité de la pluie séparément, mais la valeur cumulative h_1 en tient compte. En outre dans l'équation (28), les propriétés physiographiques du bassin sont explicitement décrites par le paramètre C_1 . L'équation (28) peut alors être considérée comme une dérivation rigoureuse de la relation (24). Les coefficients de Chézy et de Manning correspondant à la relation (28) sont donnés respectivement par

$$C_{bv} = C (1 - \alpha_{bv})^{-1/2} \quad (29)$$

$$n_{bv} = n_0 (1 + \alpha_{bv})^{1/2} \quad (30)$$

avec $\alpha_{bv} = \frac{4 C_1 h_1}{\Gamma_0}$; pour $\Gamma_0 = 24/Re$, on a : $\alpha_{bv} = \eta h_1/6$.

On montre de même en posant $h_1 = 0$ (écoulement purement hypodermique) que

$$\Gamma = \frac{2 \lambda_0}{\beta} \cdot \frac{1-p}{p^3} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \quad (31)$$

qui a la forme du coefficient de résistance de Fanning pour le milieu poreux.

Aussi le coefficient de résistance hydraulique généralisé proposé permet d'analyser toute la gamme des écoulements, depuis les écoulements à surface libre au sens de Chézy, jusqu'aux écoulements en milieu poreux.

5.2. LE MODÈLE DE RÉSISTANCE HYDRAULIQUE A TROIS PARAMÈTRES

Tout récemment, Yao-Huang et al. (1978) ont étudié les effets de la rugosité de surface sur les hydrogrammes d'écoulement en simulant le bassin versant couvert de végétation par un ensemble de petits canaux parallèles. Les largeurs de ces canaux sont distribuées de manière aléatoire suivant la loi de distribution exponentielle :

$$\varphi(b) = w_1 e^{-w_1 b}$$

La moyenne des largeurs des canaux est alors donnée par $\mu(b) = b_0 = 1/w_1$. La hauteur de l'écoulement dans ces canaux est y . Pour calculer le débit Q_i dans chaque canal élémentaire, ils proposent d'appliquer la formule de Boussinesq pour l'écoulement laminaire ($\text{Re} < 600$) et de Manning pour l'écoulement turbulent ($\text{Re} > 600$). Alors on a :

$$\begin{aligned} Q_r &= \sum Q_i, \text{ le débit total dans le bassin} \\ V_1 &= Q_r / y \sum b_i, \text{ la vitesse moyenne sur le bassin} \\ \Gamma_1 &= 8 \text{ g s } y / V_1^2, \text{ le coefficient de résistance hydraulique} \\ \text{Re} &= V_1 y / \nu, \text{ le nombre de Reynolds.} \end{aligned}$$

Pour prendre en compte l'influence des murs de séparation des canaux, les auteurs introduisent les grandeurs :

M - épaisseur des murs de séparation ; n_1 - le nombre total des canaux ; $M_c = \sum b_i$ - largeur totale des canaux ; $M_w = n_1 M$ - somme des épaisseurs des murs de séparation ; Q_c - débit moyen par unité de largeur des canaux ; Q - débit moyen par unité de largeur du bassin ; V_c - la vitesse moyenne dans les canaux ; $V_1 = Q/y$ - vitesse moyenne apparente. Alors on a :

$$\begin{aligned} Q &= Q_c \cdot \frac{M_c}{M_c + n_1 M} \\ h &= y \frac{M_c}{M_c + n_1 M} \\ \text{Re} &= V y / \nu = \frac{Q_c}{\nu} \cdot \frac{M_c}{M_c + n_1 M} \\ \Gamma_1 &= 8 \text{ g s } y / V_1^2 = \frac{8 \text{ g } y \text{ s}}{V_c^2} \cdot \left(\frac{M_c + n_1 M}{M_c} \right)^2 \end{aligned}$$

Les études expérimentales ont permis de montrer que les influences des épaisseurs des murs de séparation des canaux, ainsi que les influences du nombre de Reynolds en régime transitoire et de la rugosité de surface ne modifient pas beaucoup la forme de la courbe $Q = F(h)$ en coordonnées Log — Log ; par contre ces influences se traduisent soit par un déplacement horizontal de la courbe (effet de la rugosité de surface), soit par un déplacement vertical, alors les auteurs considèrent les trois paramètres :

- w_1 — inverse de la largeur moyenne des canaux (le paramètre w_1 définit la forme de la courbe $Q = F(h)$) ;
- w_2 — déplacement vertical de la courbe ;
- w_3 — déplacement horizontal de la courbe.

Les auteurs emploient ensuite une technique d'optimisation utilisant d'une part les hydrogrammes observés en laboratoire sur des modèles réduits de bassin et d'autre part les hydrogrammes calculés à partir du modèle à deux paramètres $Q = \alpha h^m$ pour estimer les paramètres introduits. Toutefois les coefficients α et m ont été considérés dans ce cas comme des fonctions de h . Ils trouvent alors que pour les valeurs optimales des paramètres $w_1 = 25$; $w_2 = -1,8$; $w_3 = -0,88$ pour une surface en graviers uniformément répartis, et $w_1 = 0$; $w_2 = -1,2$ et $w_3 = -1,57$ pour une surface en béton, le modèle à trois paramètres ainsi introduit est plus performant que le modèle à deux paramètres avec $\alpha = \text{est } m = \text{est}$. Ils concluent cependant que : lorsqu'on s'intéresse à l'analyse

de crues plutôt qu'à l'influence du changement de culture ou de transport solide, le modèle à deux paramètres est plus simple et moins cher à l'usage.

La première remarque à faire dans le cadre de cette étude porte sur l'analogie formelle entre le paramètre η introduit plus haut et le paramètre w_1 . Les deux paramètres décrivent la même réalité physique et ont la même dimension (L^{-1}).

La seconde remarque est que l'introduction des paramètres w_2 et w_3 en coordonnées Log-Log est équivalente à introduire un seul coefficient correctif dans la relation $Q = \alpha (h) \cdot h^m$. En effet, en considérant les déplacements verticaux introduits par w_2 et les déplacements horizontaux introduits par w_3 , on peut écrire

$$\text{Log } Q + w_3 = \text{Log } \alpha (h) + m (\text{Log } h + w_2)$$

soit en posant

$$w_3 = \text{Log } w_3'; \quad w_2 = \text{Log } w_2'$$

$$\text{Log } (w_3' Q) = \text{Log } \{ \alpha (h) \cdot [w_2' h]^m \}$$

d'où l'on tire :

$$Q = \alpha (h) \cdot h^m \cdot w_2'^m / w_3'$$

On peut alors poser :

$$\alpha' (h) = w_2'^m \cdot \alpha (h) / w_3'$$

et on a toujours

$$Q = \alpha' (h) \cdot h^m$$

soit l'équation (25). Le modèle de résistance hydraulique à trois paramètres proposé par Yao-Huang et al (1978) peut donc être vu comme un cas particulier du modèle proposé ici pour l'écoulement rapide. Le modèle en étude est basé sur le principe de conservation de la quantité de mouvement qui est à la base de l'équation dynamique.

En effet, si l'on appelle Y le volume d'eau concerné par l'écoulement, le théorème de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\zeta Y \frac{dV_1}{dt} = \Sigma \vec{f} \quad (32)$$

où $\Sigma \vec{f}$ est la somme des forces extérieures.

Sur une longueur élémentaire dl et sur une largeur unité, on a :

$$\zeta h'_1 dl (1 - \lambda s) \frac{dV_1}{dt} = \Sigma \vec{f} \quad (33)$$

Le recensement des forces extérieures conduit après des transformations élémentaires à

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial l} + g \frac{1 - \lambda s}{(1 - \lambda s)^2} \frac{\partial h_1}{\partial l} = g (I_0 - J) \quad (34)$$

avec I_0 - pente moyenne et —

$$J = V_1^2 \left[\frac{1}{C^2 R} + \frac{a \lambda}{2 g h'_1 (1 - \lambda s)} \cdot \frac{1}{\text{Re}^{m_0}} \right] \quad (35)$$

soit comme on a posé

$$\eta = a \lambda / h'_1 (1 - \lambda s) \text{ et } C_1 = \eta / \text{Re}^{m_0}$$

$$J = V_1^2 (1/C^2 R + C_1 / 2 g) \quad (36)$$

D'autre part, une analyse faite sur la base des considérations admises dans le modèle à trois paramètres montre aisément que le modèle proposé ici et tel qu'il a été utilisé dans Afouda (1979-a) est un modèle à N paramètres α_i intervenant directement dans la détermination de la fonction de transfert du bassin. En effet, en remarquant que l'équation (25) définit une relation univoque entre Q et H on peut prendre un développement limité d'ordre N :

$$Q = \sum_i^N \alpha_i H^i$$

avec $\alpha_i = (d^i Q / d H^i)_{H=H_0}$; et ($i = 1, 2, \dots, N$). Pour $i = 1$ pour $h_2 = 0$ et $H = h_1$, on a

$$\alpha_1 = \frac{3}{2} V_1 [(1 + 2/3 \alpha_{bv}) / (1 + \alpha_{bv})] |_{h_1=H_0} \quad (37)$$

qui est l'expression de la célérité de propagation de l'onde à la surface du bassin. Les paramètres α_i tiennent compte du paramètre η qui décrit les propriétés physiographiques du bassin versant, du coefficient moyen C_1 qui en résulte et de la résistance hydraulique du bassin versant.

5.3. LE MODÈLE D'ÉCOULEMENT

La comparaison du modèle d'écoulement proposé avec les modèles antérieurs a été déjà faite dans plusieurs travaux antérieurs (Afouda 1979-a, 1979-b, 1979-c). Les principales conclusions auxquelles on aboutit sont les suivantes :

1) Le modèle obtenu est une généralisation des différents modèles à réservoirs utilisés jusque-là, avec cet avantage que le modèle proposé permet de dégager de manière explicite la signification physique du coefficient de stockage α_1 qui, dans les modèles à réservoirs, était considéré comme coefficient empirique.

2) La solution générale du modèle est obtenue sous la forme d'une série de Volterra. Une telle formulation a été utilisée auparavant par Amorocho et Orlob (1961), mais les difficultés de la déconvolution non-linéaires ont jusque-là limité l'utilisation de leur modèle pour des conditions naturelles. La formulation proposée permet d'obtenir les noyaux successifs de la série à partir d'une combinaison du noyau du modèle linéaire.

3) Lorsque la dimension de la matrice de transition qui apparaît dans la formulation globale de l'équation d'écoulement tend vers l'infini, il y a une identité parfaite entre le modèle à paramètres répartis de départ et le modèle à paramètre global qui en découle.

6. CONCLUSION

Dans l'effort de modélisation du phénomène de transformation de la pluie en débit, très peu d'attention a été accordée jusque-là aux paramètres physiographiques qui conditionnent pourtant la forme de l'hydrogramme de crue. On a dégagé dans cette étude un paramètre η qui caractérise l'état de la surface du bassin versant et déduit le paramètre $L_0 \eta/2$ qui est le rapport du volume occupé par les obstacles sur une longueur de référence $L_0/2$, sur le volume de pluie qui participe à l'écoulement sur une surface unité. Bien sûr des travaux expérimentaux seront nécessaires pour confirmer ou infirmer les résultats théoriques obtenus. Mais devant les difficultés d'une modélisation des conditions naturelles comme la végétation et autres obstacles sur la surface du bassin versant, on a provisoirement choisi de comparer les résultats obtenus à ceux des travaux antérieurs. Une telle analyse montre que l'introduction du paramètre physiographique permet d'améliorer la précision des équations classiques de l'écoulement telle que le coefficient de résistance hydraulique, le facteur cinématique de l'écoulement, la loi de débit, et même l'équation dynamique tout entière.

7. REMERCIEMENT

Pour l'essentiel, cette communication reprend en les développant, les idées contenues dans le rapport n° 7803-b préparé et présenté par l'auteur lors de son séjour au Centre International d'Hydrologie de Padoue (Italie). Il saisit donc cette occasion pour présenter aux autorités du centre, l'expression toujours renouvelée de ses sincères remerciements.

8. RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- AFOU DA A. A. - 1978-a - *Sur l'application de la formule de Chézy au ruissellement de surface*. Rapport n° 7803-b. Centre International d'Hydrologie « Dino-Tonini ». Université de Padoue, Italie.
- AFOU DA A. A. - 1978-b - *A unified Approach to Watershed Modelling*. Nordic Hydrology, vol. 9, n° 3/4.
- AFOU DA A. A. - 1979-a - *Hydrodynamic Watershed Modelling*. Rep. n° 79-TA, Intern. Centre of hydrology « Dino-Tonini » University of Padua - Italy (A paraître dans Nordic Hydrology, vol. 11, n° 2 (1980) pp. 93-112).

- AFOUDA A. A. - 1979-b - *A Generalized Kinematic approach to basin modelling*. In Hydrological Forecasting Proc. of the Oxford Symposium - April 1980. IAHS publ. n° 129.
- AFOUDA A. A. - 1979-c - *Etude théorique du modèle de transformation pluie-débit en milieu semi-urbain*. 1) Séminaire scientifique de l'Université Nationale du Bénin. Cotonou 20-21-22 décembre 1979 (soumis après autorisation au Cahier ORSTOM série hydrologique, pour publication).
- AMOROCHO J. et ORLOB G. T. - 1961 - *Non-linear analysis of hydrologic System*. Water Resources Center Contribution n° 40.
- BEAR J. - 1972 - *Dynamics of fluids in porous media*. American Elsevier publ. Cy New York.
- COMOLET R. - 1963 - *Mécanique expérimentale des fluides*. Masson et Cie édit. Paris.
- DEBORDES M. - 1975 - *Une étude générale de l'assainissement pluvial urbain*. La Houille Blanche n° 1/75.
- DOOGE J. C. I. - 1959 - *A general Theory of Unit Hydrograph*; Journ. of Geophys Res. Vol. 64, n° 2.
- DOOGE J. C. I. - 1973 - *The linear Theory of Hydrologic System*; US Depart of Agriculture Tech. Bul. n° 1463. US Govt printing office.
- ISHIHARA T. - 1971 - *Transformation System in Flood Runoff Phenomena*; Proc. USA - Japan bilateral Seminar in hydrology. Water Res. Publ. Fort Collins Colorado.
- REMIENIERAS G. - 1970 - *L'Hydrologie de l'Ingénieur*; Eyrolles Edit. - Paris.
- WOODING R. A. - 1965 - *A Hydraulic Model for Catchment Stream problem*. Part I, Kinematic Wave Theory 5 Hydrol. 3-253-267.
- WOOLHISER D. A. - 1975 - *Simulation of Unsteady Overland flow*. In Unsteady flow in open channels. Vol. II Edited by K. Mahmood and V. Yevjevich Water Res. Publ. Fort Collins Colorado.
- WOOLHISER D. A. and LIGGETT J. A. - 1967 - *Unsteady on dimensional flow over a plane. The Rising Hydrograph*; Quoted by Eagleson P. S. Dynamic Hydrology pp. 336 Mc Graw Hill Cy.
- YAO-HUANG WU, YEVJEVICH et WOOLHISER D. A. - 1978 - *Effects of surface Roughness and its spatial Distribution on runoff Hydrographs*; Hydrology Papers n° 96 Colorado State University. Fort Collins Colorado.