SISMOLOGIE (DYNAMIQUE DES SYSTÈMES DE CORPS RIGIDES OU FLEXIBLES). — Ondes sismiques en termes de perturbations lagrangiennes, influence de la précontrainte.

Note de **Bernard Valette**, présentée par Georges Jobert.

Remise le 14 mai 1984.

L'objet de cette Note est d'établir les équations qui régissent les perturbations lagrangiennes d'un corps déformable autogravitant au voisinage d'un état d'équilibre. Il apparaît que la précontrainte dans le corps peut induire une forme d'anisotropie et ne peut être totalement négligée dans le cas de la Terre.

SEISMOLOGY (RIGID AND DEFORMABLE BODIES DYNAMICS). — Seismic Waves as Lagrangian Perturbations, Influence of Prestress.

In this paper our purpose is to establish the lagrangian perturbation equations for a self-gravitating deformable body in the neighbourhood of an equilibrium state. It appears that prestress may induce a kind of velocity anisotropy in the body and can in no way be totally neglected in the case of the Earth.

Nous considérons un corps déformable repéré par un système de coordonnées curvilignes dans un espace où il est en état d'équilibre. Une déformation de ce corps autour de cette position est définie à chaque instant par une application f_t :

$$\forall a \in \mathrm{V}, \quad a \rightarrow f_t(a) = x(a, t) = a + u(a, t) \in \mathrm{V}_t,$$

où $u(a, t)$ est le déplacement lagrangien du point matériel a du domaine de référence V, de sa position au repos à celle qu'il occupe en $x(a, t)$ dans le domaine déformé V_t.

Rappelons que si $\mathrm{D}f_{ta}$ désigne l'application linéaire tangente à f_t en a, ε le tenseur de déformation finie lagrangien et e son analogue eulerien :

$$(1) \qquad \mathrm{D}f_{ta} = \mathrm{I} + \mathrm{D}u(a, t), \qquad \varepsilon_{pq} = \mathrm{D}_p u_q + \mathrm{D}_q u_p + \mathrm{D}_p u^k \mathrm{D}_q u_k, \qquad e_{ij} = \varepsilon_{pq} \frac{\partial a^p}{\partial x^i} \frac{\partial a^q}{\partial x^j}.$$

Rappelons également que la puissance virtuelle de déformation s'exprime par :

$$\delta \mathrm{W}_{\mathrm{def}} = \int_{\mathrm{V}_t} \mathrm{T}^{ij} \delta e_{ij} \, d\mathrm{V}_t = \int_{\mathrm{V}} \sigma^{pq} \delta \varepsilon_{pq} \, d\mathrm{V},$$

où le tenseur des contraintes de Cauchy T et de Piola-Kirchhoff de deuxième espèce σ sont liés par :

$$\sigma^{pq} = (1+\theta) \mathrm{T}^{ij} \frac{\partial a^p}{\partial x^i} \frac{\partial a^q}{\partial x^j} = (1+\theta) \{\mathrm{D}f_{ta}^{-1} \otimes \mathrm{D}f_{ta}^{-1} (\mathrm{T})\}^{pq},$$

θ étant la dilatation volumique dont l'expression au deuxième ordre en u est :

$$(2) \qquad \theta = \mathrm{D}_i u^i + \frac{1}{2} \{(\mathrm{D}_i u^i)^2 - \mathrm{D}_i u^j \mathrm{D}_j u^i\}.$$

Les équations de la mécanique sont usuellement écrites ([2], [5]) sous la forme lagrangienne suivante :

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\mathrm{D}_p \{(1 \otimes \mathrm{D}f_{ta})(\sigma)\}^{pj} + \rho \mathrm{F}^j (x(a, t)) = 0, \quad \forall a \in \mathrm{V}, \\ &(1+\chi) \Phi^j = \sigma^{pq} \frac{\partial x^j}{\partial a^q} n_p \quad \text{sur } \partial\mathrm{V} \text{ de vecteur normal } n, \end{aligned}$$

où $\{(1 \otimes \mathrm{D}f_{ta})(\sigma)\}^{pj} = \sigma^{pq} \partial x^j / \partial a^q$, est le tenseur de Piola-Kirchhoff de première espèce; ρ, la masse volumique dans l'état de référence; F, la densité volumique des forces

0249-6305/84/02990437 $ 2.00 © Académie des Sciences

de toutes natures; Φ, la densité des forces surfaciques et χ, la dilatation surfacique $[\chi = \operatorname{div} u - \mathrm{D}u(n) \,.\, n$ au premier ordre en $u]$.

Ces équations présentent le désavantage d'être hybrides; cela est dû au caractère mixte du tenseur de Piola-Kirchhoff qui opère sur le produit des espaces tangents en a et en x. Pour se ramener à une formulation totalement lagrangienne il convient de multiplier l'expression (3) par $(\mathrm{D}f_{ta}^{-1})^l_j$; en effet; après sommation sur j, et tenant compte de (1) nous obtenons au premier ordre en u :

$$\mathrm{D}_p\, \sigma^{pl} + \sigma^{pm}\, \mathrm{D}_p\, \mathrm{D}_m\, u^l + \rho\, (\mathrm{F} - \mathrm{D}u\,(\mathrm{F}))^l = 0 \quad \text{dans V.} \tag{4}$$

A l'équilibre, le tenseur des précontraintes, $\sigma_0 = \mathrm{T}_0$, vérifie :

$$\mathrm{D}_p\, \sigma_0^{pl} + \rho\, \mathrm{F}_0^l = 0 \quad \text{dans V,} \qquad \sigma_0\,(n) = 0 \quad \text{sur } \partial\mathrm{V}. \tag{5}$$

Des expressions (4) et (5) nous déduisons, supposant $\sigma - \sigma_0$ du premier ordre en u :

$$\begin{gathered} \mathrm{D}_p\, \{(\sigma - \sigma_0)^{pl} + \sigma_0^{pm}\, \mathrm{D}_m\, u^l\} + \rho\, \{(\mathrm{F} - \mathrm{F}_0)^l - \mathrm{D}u\,(\mathrm{F} - \mathrm{F}_0)^l\} = 0 \quad \text{dans V,} \\ (\sigma - \sigma_0)\,(n) = \sigma_0\,(n) = 0 \quad \text{sur } \partial\mathrm{V}, \\ \mathrm{T}\,(n_t) = (\operatorname{div} u - \mathrm{D}u\,(n)\,.\,n)\,\sigma_0\,(n) + \mathrm{D}u\,(\sigma_0\,(n)) + \sigma\,(n), \ \text{continu pour toute interface.} \end{gathered} \tag{6}$$

LE CAS DE LA TERRE. — Nous supposons la Terre en état d'équilibre dans une rotation uniforme, de vecteur instantané de rotation Ω, autour de son centre de masse G. Nous prenons cet espace en rotation, centré en G, comme espace de référence pour le système de coordonnées lagrangiennes. L'adoption d'une loi de comportement élastique pour les parties solides $\mathrm{V_S}$ de la Terre, et d'une loi de fluide parfait pour le noyau externe $\mathrm{V_F}$, conduit pour les perturbations adiabatiques de l'équilibre, aux expressions suivantes, au premier ordre en $\mathrm{D}u$:

$$\begin{gathered} (\sigma - \sigma_0)^{pq} = c^{pqkl}\, \mathrm{D}_k\, u_l \quad \text{dans } \mathrm{V_S}, \\ (\mathrm{T} - \mathrm{T}_0)^{ij} = -(p - p_0)\, g^{ij} = -\gamma p_0 \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right) g^{ij} = \gamma p_0\, \mathrm{D}_k\, u^k\, g^{ij} \quad \text{dans } \mathrm{V_F}, \end{gathered} \tag{7}$$

où les coefficients c^{pqkl} sont ceux du tenseur de l'élasticité adiabatique linéaire et $\gamma\,(=\rho/p\,(\partial p/\partial\rho)_{\mathrm{S}})$ est l'indice adiabatique du fluide. Il convient de remarquer que si les coordonnées eulériennes sont bien adaptées à un fluide, c'est le tenseur de Piola-Kirchhoff qui intervient naturellement dans la loi de Hooke ([2], [5]).

L'évolution étant supposée adiabatique le travail lié à la déformation est égal à la variation d'énergie interne $\Delta\mathrm{U}$; son calcul au deuxième ordre, compte tenu de 2, donne :

$$\begin{aligned} \Delta\mathrm{U} = & \int_{\mathrm{V_S}} \left\{ \sigma_0^{ij}\, \mathrm{D}_i\, u_j + \frac{1}{2}\,(c^{ijkl} + \sigma_0^{ik}\, g^{jl})\, \mathrm{D}_i\, u_j\, \mathrm{D}_k\, u_l \right\} d\mathrm{V} \\ & + \int_{\mathrm{V_F}} p_0 \left\{ -\mathrm{D}_k\, u^k + \frac{1}{2}((\gamma - 1)\,(\mathrm{D}_k\, u^k)^2 + \mathrm{D}_i\, u^j\, \mathrm{D}_j\, u^i) \right\} d\mathrm{V}. \end{aligned} \tag{8}$$

Puisque nous supposons ici l'évolution libre autour de l'équilibre, les actions F se réduisent à la gravitation et à l'inertie :

$$\begin{gathered} \mathrm{F} - \mathrm{F}_0 = g - g_0 - \Omega \wedge (\Omega \wedge u) - 2\,\Omega \wedge \partial_t\, u - \partial_{tt}^2\, u \\ \text{avec } g - g_0 = \mathrm{G} \int_{\mathrm{V}} \left\{ \frac{x' - x}{|x' - x|^3} - \frac{a' - a}{|a' - a|^3} \right\} dm'. \end{gathered} \tag{9}$$

Au premier ordre en u :

$$(10)\qquad g-g_0=\mathrm{G}\int_{\mathrm{V}}\left\{\frac{u'-u}{|a'-a|^3}-3(a'-a)\frac{(a'-a).(u'-u)}{|a'-a|^5}\right\}dm'.$$

Il en découle l'expression habituellement utilisée :

$$(11)\qquad g-g_0=\mathrm{D}g_0(u)+\mathrm{grad}\,\psi,\qquad \text{où}\quad \psi\left(=-\mathrm{G}\int\frac{(a'-a).u'}{|a'-a|^3}dm'\right)$$

est le potentiel de redistribution des masses qui vérifie, au sens des distributions : $\Delta\psi=4\pi\mathrm{G}\,\mathrm{div}(\rho u)$. La variation d'énergie potentielle d'origine gravitationnelle s'exprime par :

$$\Delta\mathrm{P}=-\frac{\mathrm{G}}{2}\int_{\mathrm{V}\times\mathrm{V}}\left\{\frac{1}{|x'-x|}-\frac{1}{|a'-a|}\right\}dm\,dm',$$

dont un développement au deuxième ordre en u conduit à :

$$(12)\qquad \Delta\mathrm{P}=-\int_{\mathrm{V}}u.g_0\,dm$$
$$+\frac{\mathrm{G}}{4}\int_{\mathrm{V}\times\mathrm{V}}\left\{\frac{|u'-u|^2}{|a'-a|^3}-3\frac{((a'-a).(u'-u))^2}{|a'-a|^5}\right\}dm\,dm'=-\int_{\mathrm{V}}\left(\frac{g+g_0}{2}.u\right)dm.$$

Reste à fixer le comportement des interfaces où intervient un fluide; le cas de l'interface noyau-manteau notamment a été largement discuté. Le choix classique consiste à supposer que les deux milieux restent en contact permanent et que sur la frontière il y a continuité de la contrainte normale; soit :

$$(13)\qquad u_{\mathrm{S}}.n=u_{\mathrm{F}}.n,\qquad \sigma_{0\mathrm{S}}(n)=-p_0\,n,$$
$$\sigma_{\mathrm{S}}(n)-p_0\,\mathrm{D}u_{\mathrm{S}}(n)+p+p_0\,\mathrm{div}(u_{\mathrm{F}}))\,n-p_0\,(\mathrm{D}u_{\mathrm{F}})^*(n)$$
$$=p_0\,[\mathrm{D}u^*(n)-(\mathrm{D}u(n).n)\,n]-n\,\mathrm{div}_{\Sigma}(p_0[u]).$$

Regroupant les expressions (5), (6), (7) nous obtenons finalement :

$$(14)\qquad \begin{gathered}\partial_{tt}^2u+2\,\Omega\wedge\partial_t u=-\mathrm{A}\,u=\mathrm{L}\,u+g-g_0-\Omega\wedge(\Omega\wedge u),\\ \frac{1}{\rho}\mathrm{D}_i\,\sigma_0^{ij}+g_0-\Omega\wedge(\Omega\wedge a)=0,\qquad \text{dans V},\\ c^{ijkl}\,n_j\,\mathrm{D}_k\,u_l=0,\qquad \sigma_0^{ij}\,n_j=0\quad \text{sur } \partial\mathrm{V}_{ext},\ \text{et (13) sur } \partial\mathrm{V}_{SF},\end{gathered}$$

où $g-g_0$ est donné par (10) et L par :

$$(15)\qquad \rho(\mathrm{L}u)^j=\begin{array}{ll}\mathrm{D}_i\,\{p_0(\gamma-1)\,\mathrm{D}_k\,u^k\,g^{ij}+p_0\,g^{jm}\,\mathrm{D}_m\,u^i\}, & \text{dans } \mathrm{V_F},\\ \mathrm{D}_i\,\{c^{ijkl}\,\mathrm{D}_k\,u_l+\sigma_0^{im}\,\mathrm{D}_m\,u^j\} & \text{dans } \mathrm{V_S}.\end{array}$$

Dans le cas fluide, l'opérateur L correspond à un cas particulier de l'équation obtenue par Friedman et Schutz [4], ainsi qu'à l'opérateur déduit par Dahlen [3]; il nous semble par contre que la prise en compte de la précontrainte par ce dernier est inexacte dans le cas solide.

Des conditions aux limites on déduit que A est formellement symétrique dans $\mathrm{L}^2_{\mathrm{C}}(\mathrm{V}, dm)$:

$$(16)\qquad (\mathrm{A}\,u\,|\,v)=\int_{\mathrm{V_S}}\{c^{ijkl}\,\mathrm{D}_i\,\bar{v}_j\,\mathrm{D}_k\,u_l+\sigma_0^{im}\,\mathrm{D}_m\,u^j\,\mathrm{D}_i\,\bar{v}_j\}\,d\mathrm{V}$$
$$+\int_{\mathrm{V_F}}p_0\,\{(\gamma-1)\,\mathrm{D}_i\,u^i\,\mathrm{D}_j\,\bar{v}^j+\mathrm{D}_j\,u^i\,\mathrm{D}_i\,\bar{v}^j\}\,d\mathrm{V}+\int_{\mathrm{V}}\{(\Omega.u)(\Omega.\bar{v})-\Omega^2\,u.\bar{v}\}\,dm.$$

$$+\frac{G}{2}\int_{V\times V}\left\{\frac{(u'-u).(\bar{v}'-\bar{v})}{|a'-a|^3}-3\frac{((a'-a).(u'-u))((a'-a).(\bar{v}'-\bar{v}))}{|a'-a|^5}\right\}dm\,dm'$$

$$+\int_{\Sigma_{SF}} p_0\{[\mathrm{D}n(u-(u.n)n).(\bar{v}-(\bar{v}.n)n)]-[u].\mathrm{grad}_\Sigma(n.\bar{v})-[\bar{v}].\mathrm{grad}_\Sigma(n.u)\}\,d\Sigma.$$

INFLUENCE DE LA PRÉCONTRAINTE. — Il ressort des expressions (15) que la précontrainte qui intervient dans les coefficients du deuxième ordre de l'opérateur L, dans les parties solides, influence la propagation des ondes sismiques dans ces régions; par contre elle n'intervient pas dans les parties fluides. Pour préciser son influence dans les zones solides, considérons une surface mobile S_t au travers de laquelle $\partial_{tt}^2 u$ subit une discontinuité $[\partial_{tt}^2 u]=s$; il en découle $[D_i D_j u]=n_i n_j s/c^2$ où n est le vecteur normal au front S_t de célérité normale c. Appliquant l'opérateur saut à (14) nous obtenons alors :

$$\text{(17)}\qquad M^i_j s^j=\rho c^2 s^i \quad \text{avec} \quad M^{ij}=c^{kilj} n_k n_l+g^{ij}\sigma_0^{kl} n_k n_l.$$

Cette équation de Christoffel est à rapprocher de celle obtenue en [6], mais ici les coefficients c^{ijkl} sont les coefficients adiabatiques intrinsèques de l'état de référence, et la précontrainte n'a aucun effet sur la polarisation s des différents types d'ondes. L. V. Nikitin et E. M. Chesnokov considèrent en effet le cas où la précontrainte est presque hydrostatique et ils tiennent compte des perturbations des c^{ijkl} dans le changement d'état lié à la partie purement déviatorique des contraintes. Il est donc normal que nous ne retrouvions pas de deuxième effet, de type « rhéologique », puisque nous ne préjugeons pas l'évolution thermodynamique du matériau jusqu'à l'état où ses coefficients sont σ_0^{ij} et c^{ijkl}.

L'anisotropie directement due à la précontrainte est contrôlée par son déviateur d_0^{ij}; pour un milieu où les coefficients c^{ijkl} sont faiblement anisotropes, comme c'est le cas, pense-t-on, dans la Terre :

$$c^{ijkl}=\lambda g^{ij} g^{kl}+\mu(g^{ik} g^{jl}+g^{il} g^{jk})+\delta c^{ijkl}$$

et il suit, par perturbation des résultats du cas isotrope, suivant en celà [1], que la vitesse des ondes quasi-longitudinales est donnée par :

$$\text{(18)}\qquad \rho c_q^2\,\mathrm{P}=\lambda+2\mu-p_0+d_0^{ij} n_i n_j+\delta c^{ijkl} n_i n_j n_k n_l.$$

Ceci montre notamment que l'anisotropie de vitesse directement liée au déviateur de la précontrainte n'est pas assimilable à celle induite par les coefficients élastiques. Dans le cas où elle est hydrostatique, la précontrainte n'induit pas d'anisotropie pour les vitesses; pour celles-ci tout revient à modifier par $\pm p_0$ certains paramètres élastiques. Mais en aucun cas ces paramètres « équivalents » ne peuvent décrire totalement l'effet de la précontrainte tel qu'il résulte des équations (14) pour les parties solides.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] G. E. BACKUS, A Geometrical Picture of Anisotropic Elastic Tensors, *Rev. Geophys. Space Phys.*, 8, 1970, p. 633-671.

[2] Y. BAMBERGER et Fr. SCHLOSSER, *Cours de Mécanique de l'E.N.P.C.*, École Nat. des Ponts et Chaussées, 1971-1972.

[3] F. A. DAHLEN, Elastic Dislocation Theory for a Self-Gravitating Elastic Configuration with an Initial Static Stress Field, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 28, 1972, p. 357-383.

[4] J. L. FRIEDMAN et B. F. SCHUTZ, Lagrangian Perturbation Theory of Non Relativistic, *Fluids. Ap. J.*, 221, 1978, p. 937-957.

[5] L. E. MALVERN, *Introduction to the Mechanics of Continuous Medium*, Prentice Hall, New Jersey, 1969.

[6] L. V. NIKITIN et E. M. CHESNOKOV, Wave Propagation in Elastic Media with Stress-Induced Anisotropy, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 76, 1984, p. 129-133.

L.E.G.S.P., associé au C.N.R.S., Institut de Physique du Globe,
Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05;
O.R.S.T.O.M., 24, rue Bayard, 75008 Paris.