

Régionalisation de données entachées d'erreurs de mesure par krigeage

Application à la pluviométrie

Paul MEYLAN ⁽¹⁾

RÉSUMÉ

Le krigeage est largement utilisé pour l'interpolation d'une variable régionalisée. On montre cependant que si les points connus sont entachés d'une erreur de mesure non stationnaire, il convient de modifier la méthode classique en introduisant la notion de variogramme structural. Dès lors le krigeage peut être abordé de façon rigoureuse. On compare cette formulation à celle de Delhomme, dont on corrige l'expression de la variance. Un exemple d'application concernant la pluviométrie est présenté.

MOTS-CLÉS : Krigeage – Cartographie des précipitations – Variogramme structural – Précipitations journalières vicennales.

ABSTRACT

KRIGING USED IN THE REGIONALIZATION OF DATA AFFECTED BY MEASUREMENT ERRORS. APPLICATION TO RAINFALL

Kriging is a widely used interpolation technique applied to a regionalized variable. However when control points are affected by a non stationary measurement error, it can be demonstrated that the classical method of kriging must be modified. With the use of a structural variogram the kriging is able to give a rigorous answer to the problem. This procedure is then compared with one proposed earlier by Delhomme, in which the equation giving the estimation variance is corrected. A rainfall contour mapping illustrates the use of this proposed technique.

KEY WORDS : Kriging – Rainfall mapping – Structural variogram – Vicennial daily rainfalls.

1. INTRODUCTION

Depuis les travaux du géologue sud-africain D.-G. KRIGE dans les années 1950, puis la formulation de la théorie des *variables régionalisées* (V.R.) par G. MATHERON (1951, 1962), le *krigeage* a été largement utilisé, tout d'abord dans les problèmes d'estimation des gisements miniers, puis comme méthode générale d'interpolation. En bref, le krigeage consiste à estimer une variable en un point (*krigeage ponctuel*) ou la moyenne d'une variable sur un domaine (*krigeage zonal*) à partir d'échantillons d'implantation connue.

La large diffusion de cette méthode est avant tout due à deux de ses caractéristiques :

- 1) le krigeage est un estimateur *non-biaisé* et *optimal* ;
- 2) le krigeage permet le calcul d'une *variance d'estimation*.

Sous l'une de ses formes (krigeage à variogramme connu) le krigeage utilise l'*hypothèse intrinsèque* (MATHERON, 1962, p. 56) qui stipule notamment que le variogramme $\gamma(h)$ est stationnaire sur le domaine étudié.

(1) Institut de Génie Rural, Hydrologie et Aménagement. École Polytechnique Fédérale de Lausanne (Suisse).

L'étude expérimentale du variogramme, étape nécessaire avant la mise en œuvre du krigeage, constitue un puissant moyen pour l'analyse structurale de la V.R. étudiée (SERRA, 1967).

Le présent article traite de l'étude du variogramme et de son utilisation dans le krigeage lorsque la V.R. échantillonnée est affectée d'erreurs de mesure connues a priori. Ce cas se présente notamment lorsque la V.R. étudiée est le résultat d'une analyse statistique en chaque point de donnée, laquelle fournit une moyenne et une erreur-type.

Le système de krigeage qu'il convient d'utiliser dans ce cas a également été étudié par J.P. DELHOMME (1976).

Une démarche analogue a été utilisée par l'auteur pour la cartographie côtière en présence de mesures photogrammétriques et bathymétriques de précision fort différente.

2. RAPPEL DES ÉQUATIONS DU KRIGEAGE (cf. MATHERON)

Le krigeage envisagé est le *krigeage ponctuel universel à variogramme connu* :

- *Ponctuel* signifie que l'on cherche à estimer la valeur \hat{z}_0 prise par la V.R. Z en un point x_0 non échantillonné,
- *Universel* signifie que la méthode est applicable même en présence d'une dérive non stationnaire sur le domaine étudié (la dérive $m(x)$ est l'espérance de la V.R. Z au point $x : E\{Z(x)\}$).
- *A variogramme connu* signifie que l'on utilise l'hypothèse intrinsèque : l'hypothèse intrinsèque stipule que les accroissements $z(x) - z(x+h)$ entre deux points distants de h (et non la V.R. Z elle-même) admettent, sur le domaine étudié, les deux moments stationnaires suivants :

$$E [Z(x) - Z(x+h)] = M(h) \tag{1a}$$

$$\text{Var} [Z(x) - Z(x+h)] = 2\gamma(h) \tag{1b}$$

La fonction $M(h)$ est la *dérivée linéaire*. Sa valeur ne dépend que de la distance $h : M(h) = m(x) - m(x+h)$, quel que soit x .

La fonction $\gamma(h)$ est le demi-variogramme ou *variogramme*, ou fonction intrinsèque, également indépendante de la coordonnée x .

Pour établir les équations du krigeage, nous supposons que la dérive peut être approchée, dans le voisinage du point x_0 où l'on cherche à estimer z_0 , par la forme linéaire :

$$m(x) = \sum_{l=1}^k a_l \cdot f^l(x) \tag{2}$$

où les $f^l(x)$ sont k fonctions linéairement indépendantes (avec $f^1(x) \equiv 1$) et les a_l sont des coefficients inconnus.

Si l'on note γ_{ij} le variogramme $\gamma(d(i,j))$ pour la distance entre deux points i et j , si n est le nombre de points connus et le sous-indice o désigne le point inconnu, le système d'équations du krigeage ponctuel universel à variogramme connu s'écrit :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \gamma_{ij} + \sum_{l=1}^k \mu_l \cdot f_i^l = \gamma_{io} \quad \forall i = 1, n \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot f_j^l = f_0^l \quad \forall l = 1, k$$

où les μ_l sont les k paramètres de Lagrange associés aux conditions d'optimalité de l'estimation, et les λ_j sont les poids associés aux mesures z_j pour l'estimation de z :

$$\hat{z}_0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot z_j \tag{4}$$

La variance d'estimation ou variance de krigeage est donnée par :

$$\sigma_K^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \gamma_{0j} + \sum_{l=1}^k \mu_l \cdot f_l^2 \quad (5)$$

3. LE VARIOGRAMME

Le variogramme $\gamma(h)$ (défini à l'équation 1b) contient toute l'information structurale souhaitable concernant la variable régionalisée (Serra, 1967) :

- dimension de la zone d'influence autour d'un point,
- nature isotropique ou anisotropique de la V.R.,
- nature de la continuité de la V.R. dans l'espace.

L'étude du variogramme est donc un puissant moyen d'étude de la structure du phénomène analysé. De plus, la connaissance du variogramme est indispensable à la mise en œuvre correcte du krigeage.

Dans le cas général où la dérive $m(x)$ n'est pas stationnaire, la détermination du variogramme n'est pas facile.

Si l'on se limite au cas où la V.R. ne présente pas de dérive, la détermination du variogramme $\gamma(h)$ peut facilement être effectuée. On aura en effet :

$$\text{Var}[Z_i - Z_j] = \text{Var}[Z_i] + \text{Var}[Z_j] - 2\text{Cov}[Z_i, Z_j] = E[(Z_i - E[Z_i])]^2 + E[(Z_j - E[Z_j])]^2 - 2E[(Z_i - E[Z_i])(Z_j - E[Z_j])]$$

Si la dérive $m(x) = E[Z(x)] = \text{constante}$, on a donc $E[Z_i] = E[Z_j]$.

Il vient donc : $\text{Var}[Z_i - Z_j] = E[(Z_i - Z_j)^2]$.

L'estimateur non biaisé de $\gamma(h)$ est alors donné par la formule :

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2(N_h - 1)} \sum_{i=1}^{N_h} (z_i - z_j)^2 \quad (6)$$

où N_h est le nombre de couples de points i et j distants de h , $N_h - 1$ corrigeant le biais de l'estimateur. z_i et z_j sont deux points connus distants de h .

Pratiquement, on effectuera la détermination de $\hat{\gamma}(h)$ par classes de distances. On dira que $\hat{\gamma}(h)$ est le *variogramme brut expérimental* (appelé variogramme expérimental dans la littérature).

4. L'EFFET DE PÉPITE

On peut noter que si la distance h est nulle ($i = j$), la valeur correspondante de $\gamma(h)$ est nulle : $\gamma(0) = 0$. Cependant, dans la pratique, l'étude des variogrammes expérimentaux montre fréquemment une discontinuité à l'origine : la valeur $\hat{\gamma}(\epsilon)$ au voisinage immédiat de l'origine n'est pas nulle. C'est ce que les géologues ont appelé *l'effet de pépite*. Un tel comportement peut avoir deux causes, qui peuvent d'ailleurs jouer simultanément (DELHOMME, 1976) :

- 1) présence d'une structure dont l'échelle est très inférieure à l'espacement des données (appelée « microrégionalisation »),
- 2) influence des erreurs de mesure sur les valeurs z_i , ou, plus généralement, incertitudes sur les mesures z_i .

Si les incertitudes de mesure sont seules en cause et ont de plus une loi de distribution identique sur le domaine étudié, on est alors conduit à la relation :

$$\hat{\gamma}(\epsilon) = \text{Var}[Z_0] = \sigma_E^2 \quad (7)$$

où σ_E^2 désigne la variance des mesures, stationnaire sur le domaine étudié.

5. LE VARIOGRAMME STRUCTURAL

Soit une V.R. Z dont on connaît les valeurs z_i en un certain nombre de points x_i . En supposant une dérive $m(x)$ constante on peut alors calculer le variogramme expérimental $\gamma_1(h)$ à l'aide de la relation (6). Si l'on ajoute maintenant à toutes les mesures z_i de la V.A. Z , un bruit aléatoire e_i , de variance σ_E^2 , l'application de la relation (6) conduit à trouver un nouveau variogramme expérimental $\gamma_2(h)$, translaté verticalement de la quantité σ_E^2 par rapport au premier, à condition que le nombre de points connus soit suffisamment grand pour atténuer les fluctuations d'échantillonnage.

Par conséquent, si l'on analyse des données brutes z_i , entachées d'une erreur de mesure σ_E^2 stationnaire, le variogramme brut pourra être décomposé en deux termes :

$$\hat{\gamma}(h) = \hat{\gamma}_S(h) + \sigma_E^2 \quad (8)$$

(Cette équation sera énoncée sous une forme plus générale par la suite.) Dans cette relation (cf. fig. 1) :

- $\hat{\gamma}(h)$ est le *variogramme expérimental brut*, obtenu à partir des données z_i entachées d'une erreur e_i de distribution stationnaire et de variance σ_E^2 .
- $\hat{\gamma}_S(h)$ est le *variogramme structural expérimental*. C'est lui qui rend compte de la *structure* du phénomène, indépendamment de toute incertitude sur les mesures z .
- σ_E^2 est le *terme d'erreur* de mesure, qui rend compte uniquement des imprécisions aléatoires, de variance constante sur le domaine.

Notons que, dans la méthode classique du krigeage, c'est le variogramme expérimental *brut* qui est déterminé, puis introduit dans les équations du krigeage. Ceci n'est en fait correct que lorsqu'on peut considérer que σ_E^2 est constant sur tout le domaine étudié.

Dans le cas général, où l'incertitude de mesure n'est pas constante, il convient de développer la relation entre le variogramme brut $\hat{\gamma}(h)$ et le variogramme structural $\hat{\gamma}_S(h)$.

Notons i et j deux points de mesure, distants de h . L'équation (1b) peut s'écrire :

$$\gamma_{ij} = 1/2 \text{Var} [Z_i - Z_j]$$

En adoptant la notation σ_i^2 pour $\text{Var}[Z_i]$ et σ_{ij} pour $\text{Cov} [Z_i, Z_j]$ nous avons :

$$\gamma_{ij} = 1/2 (\sigma_i^2 - 2\sigma_{ij} + \sigma_j^2)$$

En un point i donné, la variance totale (ou brute) σ_i^2 peut s'écrire $\sigma_i^2 = \sigma_{S_i}^2 + \sigma_{E_i}^2$ si l'on considère qu'il y a indépendance entre le phénomène lui-même (terme $\sigma_{S_i}^2$) et sa mesure (terme $\sigma_{E_i}^2$).

Les erreurs ou incertitudes de mesure pour deux points i et j n'étant pas corrélées par hypothèse, la covariance σ_{ij} est égale à la seule covariance structurale σ_{Sij} . Finalement on a la relation :

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_{S_i}^2 - 2\sigma_{Sij} + \sigma_{S_j}^2) + \frac{1}{2} (\sigma_{E_i}^2 + \sigma_{E_j}^2) \quad (9)$$

Si l'on utilise l'hypothèse intrinsèque, le variogramme structural est stationnaire sur le domaine étudié :

$$\gamma_{ij} = \gamma_{Sij} + \frac{1}{2} (\sigma_{E_i}^2 + \sigma_{E_j}^2) \quad (9b)$$

Lorsque l'incertitude est indépendante du point, on retrouve la relation (8).

L'équation (9b) appelle 3 remarques :

- Le variogramme brut γ_{ij} n'est en général pas stationnaire : il dépend des points i et j pour lesquels il est calculé, par l'intermédiaire des variances de mesure $\sigma_{E_i}^2$ et $\sigma_{E_j}^2$. L'hypothèse intrinsèque (stationnarité du variogramme) s'applique par contre au variogramme structural $\gamma_S(h)$.
- Pour pouvoir utiliser cette relation, lors du krigeage ou lors de la recherche du variogramme structural expérimental, il faut que les incertitudes, caractérisées par $\sigma_{E_i}^2$, soient connues a priori. Cette condition est réalisée,

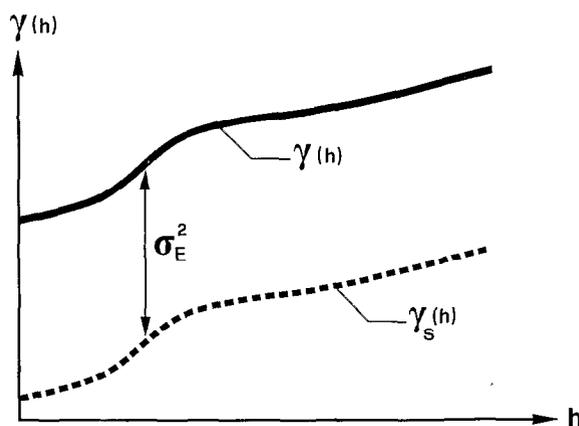


FIG. 1. — Relation entre le variogramme brut $\gamma(h)$ et le variogramme structural $\gamma_s(h)$.

notamment lorsque la valeur z_i de la V.R. Z au point i est le résultat d'un traitement statistique qui associe une erreur-type σ_{Ei} à la valeur z_i . Un exemple est fourni par l'analyse fréquentielle des précipitations (voir plus bas).

- La relation (9b) n'implique aucune hypothèse sur la dérive $m(x)$. Une telle hypothèse n'interviendra que pour la détermination du variogramme structural expérimental au moyen de la formule (10), énoncée ci-après.

6. ESTIMATION DU VARIOGRAMME STRUCTURAL

Lorsqu'on admet l'hypothèse d'une dérive $m(x)$ constante sur le domaine étudié, l'équation (9b) permet la formulation de l'estimateur du variogramme structural :

$$\hat{\gamma}_s(h) = \frac{1}{2(N_h - 1)} \sum^{N_h} [(Z_i - Z_j)^2 - (\sigma_{Ei}^2 + \sigma_{Ej}^2)] \quad (10)$$

où z_i et z_j sont les valeurs de la V.R. Z aux points i et j distants de h , N_h étant le nombre de couples de points i et j distants de h . σ_{Ei}^2 et σ_{Ej}^2 sont les variances de mesure respectives aux points i et j . Ces variances sont supposées connues *a priori*.

Il convient de noter que les fluctuations d'échantillonnage pourraient conduire à une valeur $\hat{\gamma}_s(h)$ négative, pour une classe particulière de distance h . Un tel résultat serait évidemment contraire à la nature essentiellement positive de la fonction intrinsèque $\gamma(h)$.

7. ESTIMATION DE LA VARIANCE STRUCTURALE TOTALE

La théorie indique que, lorsque la dérive $m(x)$ est constante, le variogramme doit tendre vers la valeur σ^2 (variance totale) lorsque la distance h augmente. Cette indication est parfois utile lorsque l'on cherche à modéliser le variogramme expérimental en vue du krigeage. Lorsque l'on effectue, comme ici, une estimation du variogramme structural, il peut de même être avantageux de calculer la variance structurale totale σ_s^2 . Si l'erreur de mesure est stationnaire, la propriété d'additivité des variances permet d'écrire :

$$\sigma_s^2 = \sigma^2 - \sigma_E^2$$

Dans le cas général (σ_E^2 non stationnaire), la variance structurale totale pourra être estimée par la relation :

$$\sigma_S^2 = \sigma^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_{Ei}^2 \quad (11)$$

où σ_{Ei}^2 est la variance de mesure au point i , N étant le nombre de points connus.

8. KRIGEAGE AVEC LE VARIOGRAMME STRUCTURAL

Le krigeage peut être réalisé, comme à l'habitude, par résolution du système d'équations (3). Il suffira d'introduire les termes γ_{ij} et γ_{io} convenables :

a) γ_{ij} entre deux points connus i et j
pour $i \neq j$ c'est l'équation (9b) :

$$\gamma_{ij} = \gamma_{Sij} + \frac{1}{2} (\sigma_{Ei}^2 + \sigma_{Ej}^2)$$

pour $i = j$ on aura toujours $\gamma_{ij} = 0$

b) γ_{io} entre un point connu i et le point à kriger o

$$\gamma_{io} = \gamma_{Sio} + \frac{1}{2} \sigma_{Ei}^2 \quad (12)$$

La variance d'estimation est alors donnée par la relation 13, qui prend en compte les incertitudes sur les mesures :

$$\sigma_k^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot (\gamma_{0j} + \sigma_{Ej}^2) + \sum_{l=1}^k \mu_l \cdot f_l^2 \quad (13)$$

Cette formulation est équivalente à celle de DELHOMME (1976) dans laquelle nous introduisons la notation correspondant au variogramme structural pour dissiper toute ambiguïté

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \gamma_{Sij} - \lambda_i \sigma_j^2 - \sum_{l=1}^k \mu_l \cdot f_l^2 = \gamma_{Sio} \quad \forall_i = 1, n \\ \sum_{j=1}^n \lambda_i f_j^2 = f_o^2 \quad \forall_l = 1, k \end{cases} \quad (14)$$

L'expression de la variance d'estimation correspondante est alors donnée par la relation :

$$\sigma_k^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j (\gamma_{S0j} + \sigma_{Ej}^2) + \sum_{l=1}^k \mu_l f_o^2 \quad (15)$$

Remarquons que l'expression de la variance de krigeage donnée par DELHOMME ne fait pas apparaître le terme $\sigma_{E_j}^2$, ce qui est incorrect. On pourra s'en convaincre en réalisant le krigeage d'un point, une fois avec un variogramme à effet de pépite p et une fois avec un variogramme translaté, sans effet de pépite, mais avec une incertitude $\sigma_{E_i}^2 = p$: les résultats doivent être identiques.

9. APPLICATION A LA CARTOGRAPHIE DES PRÉCIPITATIONS JOURNALIÈRES VICENNALES

Dans ce paragraphe nous décrivons un exemple d'application de la méthode développée, à titre illustratif. Le problème de la régionalisation des paramètres pluviométriques ne sera envisagé ici que sous son aspect « krigeage », une étude plus complète faisant l'objet d'une publication séparée (JORDAN et MEYLAN, 1986).

La variable à cartographier est la pluie journalière de temps de retour 20 ans, notée P , sur la partie occidentale de la Suisse. Pour chacune des 66 stations pluviométriques disponibles (cf. tableau I), une analyse fréquentielle (réalisée par ajustement d'une loi de GUMBEL) fournit une valeur p_i ainsi qu'une erreur-type σ_{p_i} .

TABLEAU I

Pour les 66 stations pluviométriques de Suisse occidentale : coordonnées x_i, y_i [km], pluie journalière de temps de retour 20 ans p_i [mm], erreur-type σ_{p_i} [mm], altitude lissée sur 6×6 km z_i [m], résidu de la régression r_i [mm] (cf. fig. 2).

| x_i | y_i | p_i | σ_{p_i} | z_i | r_i | x_i | y_i | p_i | σ_{p_i} | z_i | r_i |
|--------|--------|-------|----------------|-------|--------|--------|--------|-------|----------------|-------|-------|
| 530.05 | 182.45 | 89.30 | 4.6 | 853. | 9.07 | 593.38 | 234.76 | 84.70 | 4.1 | 871. | 4.20 |
| 525.05 | 185.73 | 88.00 | 4.7 | 1140. | 3.64 | 579.58 | 234.80 | 80.80 | 3.9 | 987. | -1.37 |
| 533.45 | 195.87 | 82.50 | 3.5 | 955. | 0.79 | 583.44 | 248.23 | 82.30 | 4.0 | 747. | 3.59 |
| 538.64 | 194.55 | 74.70 | 3.4 | 1049. | -8.35 | 593.38 | 245.22 | 68.60 | 3.5 | 478. | -6.25 |
| 551.10 | 201.50 | 75.80 | 4.3 | 754. | -3.01 | 590.51 | 253.68 | 76.00 | 3.6 | 638. | -1.15 |
| 536.74 | 203.56 | 81.30 | 3.7 | 1102. | -2.51 | 580.86 | 166.50 | 87.50 | 3.8 | 1239. | 1.72 |
| 545.64 | 205.24 | 76.10 | 3.3 | 1106. | -7.77 | 574.75 | 162.10 | 87.20 | 4.4 | 891. | 6.42 |
| 558.21 | 208.58 | 76.90 | 3.7 | 948. | -4.70 | 571.37 | 167.23 | 80.50 | 3.8 | 895. | -0.34 |
| 563.15 | 205.60 | 69.70 | 3.1 | 540. | -6.04 | 560.20 | 171.90 | 74.40 | 3.3 | 718. | -3.89 |
| 565.02 | 211.22 | 76.30 | 3.5 | 743. | -2.35 | 571.50 | 174.63 | 80.30 | 4.1 | 736. | 1.75 |
| 586.45 | 219.40 | 75.90 | 3.5 | 519. | 0.46 | 575.28 | 179.88 | 70.10 | 3.1 | 667. | -7.46 |
| 566.26 | 223.17 | 83.80 | 4.2 | 1047. | 0.78 | 585.38 | 177.73 | 89.80 | 5.1 | 852. | 9.58 |
| 572.34 | 225.55 | 74.20 | 3.6 | 957. | -7.53 | 592.97 | 185.08 | 79.20 | 3.5 | 793. | -0.17 |
| 558.55 | 143.62 | 80.40 | 4.0 | 682. | 2.63 | 592.31 | 205.94 | 77.00 | 4.7 | 658. | -0.43 |
| 554.13 | 146.24 | 82.40 | 5.0 | 494. | 7.33 | 587.62 | 209.79 | 68.90 | 3.1 | 492. | -6.15 |
| 546.45 | 151.24 | 81.80 | 4.8 | 654. | 4.42 | 561.11 | 158.43 | 92.70 | 4.2 | 977. | 10.68 |
| 546.07 | 149.44 | 81.20 | 4.3 | 554. | 5.26 | 550.82 | 168.94 | 75.90 | 3.5 | 718. | -2.39 |
| 540.82 | 151.57 | 83.70 | 5.4 | 531. | 8.09 | 562.10 | 184.70 | 68.70 | 3.3 | 524. | -6.80 |
| 539.00 | 153.30 | 75.60 | 3.1 | 583. | -0.76 | 561.77 | 185.57 | 71.50 | 3.3 | 501. | -3.67 |
| 528.80 | 162.40 | 74.60 | 3.5 | 561. | -1.43 | 569.88 | 192.15 | 77.80 | 4.8 | 492. | 2.75 |
| 526.75 | 150.31 | 77.70 | 3.7 | 412. | 3.80 | 575.52 | 197.22 | 74.80 | 4.6 | 487. | -0.17 |
| 527.08 | 152.16 | 84.50 | 4.9 | 442. | 10.18 | 579.71 | 204.12 | 70.00 | 3.4 | 455. | -4.51 |
| 509.35 | 149.90 | 83.40 | 4.0 | 933. | 2.02 | 571.24 | 204.24 | 77.40 | 5.1 | 433. | 3.21 |
| 507.30 | 139.15 | 68.20 | 3.2 | 435. | -6.03 | 495.29 | 146.70 | 93.90 | 4.1 | 1201. | 8.66 |
| 507.68 | 137.40 | 76.60 | 3.7 | 417. | 2.64 | 506.59 | 161.66 | 89.30 | 4.2 | 1225. | 3.72 |
| 508.84 | 121.19 | 76.20 | 3.6 | 490. | 1.19 | 515.96 | 172.64 | 93.00 | 5.5 | 1089. | 9.37 |
| 498.93 | 122.72 | 75.50 | 3.3 | 414. | 1.58 | 527.54 | 178.77 | 80.30 | 4.9 | 828. | 0.43 |
| 544.47 | 213.17 | 75.20 | 3.4 | 957. | -6.53 | 530.23 | 178.35 | 68.30 | 3.3 | 652. | -9.05 |
| 547.26 | 211.75 | 80.00 | 5.3 | 1030. | -2.78 | 532.10 | 176.24 | 87.30 | 6.8 | 529. | 11.73 |
| 551.06 | 214.04 | 83.20 | 3.9 | 1099. | -0.58 | 538.40 | 165.79 | 83.20 | 5.2 | 643. | 5.98 |
| 566.26 | 233.84 | 80.20 | 4.2 | 912. | -0.88 | 535.88 | 172.76 | 78.60 | 4.2 | 556. | 2.63 |
| 562.45 | 252.63 | 70.40 | 3.3 | 545. | -5.40 | 539.84 | 181.45 | 79.80 | 4.3 | 480. | 4.93 |
| 569.63 | 254.22 | 65.50 | 2.9 | 533. | -10.14 | 547.57 | 172.61 | 75.20 | 3.6 | 683. | -2.59 |

Avant de tenter une interpolation directe des p_i sur l'ensemble du domaine d'étude, il est profitable de chercher à tirer profit au maximum de l'information altimétrique à disposition (par exemple dans un modèle digital du terrain). Il est en effet notoire que, parmi de nombreux facteurs explicatifs, l'altitude du poste pluviométrique joue un rôle prépondérant. Plus généralement c'est une fonction de l'altitude au voisinage de la station qui est utilisée comme facteur explicatif. Ainsi, par exemple, ZWAHLEN utilise l'altitude lissée sur une fenêtre de 7 km par 7 km autour de la station (pour l'étude de la somme des précipitations annuelles) et SCHERER envisage des fonctions plus complexes de la morphologie (pour l'étude des précipitations journalières maximales de temps de retour 10 ans).

Dans notre cas, nous avons retenu comme variable explicative Z la moyenne altimétrique sur une fenêtre de 6 km par 6 km autour de la station. La régression des p_i en fonction de l'altitude lissée z_i (cf. fig. 2) permet d'obtenir la relation :

$$p_i = f(z_i) + r_i \quad (16)$$

avec p_i pluie journalière maximale de temps de retour 20 ans pour la station i , exprimée en millimètres
 $f(z_i)$ équation de la droite de régression = $68 + 0.0144 z_i$ [mm]
 z_i altitude lissée sur une fenêtre de 6 km par 6 km autour de la station i [m]
 r_i résidu (ou écart à la droite de régression) [mm]

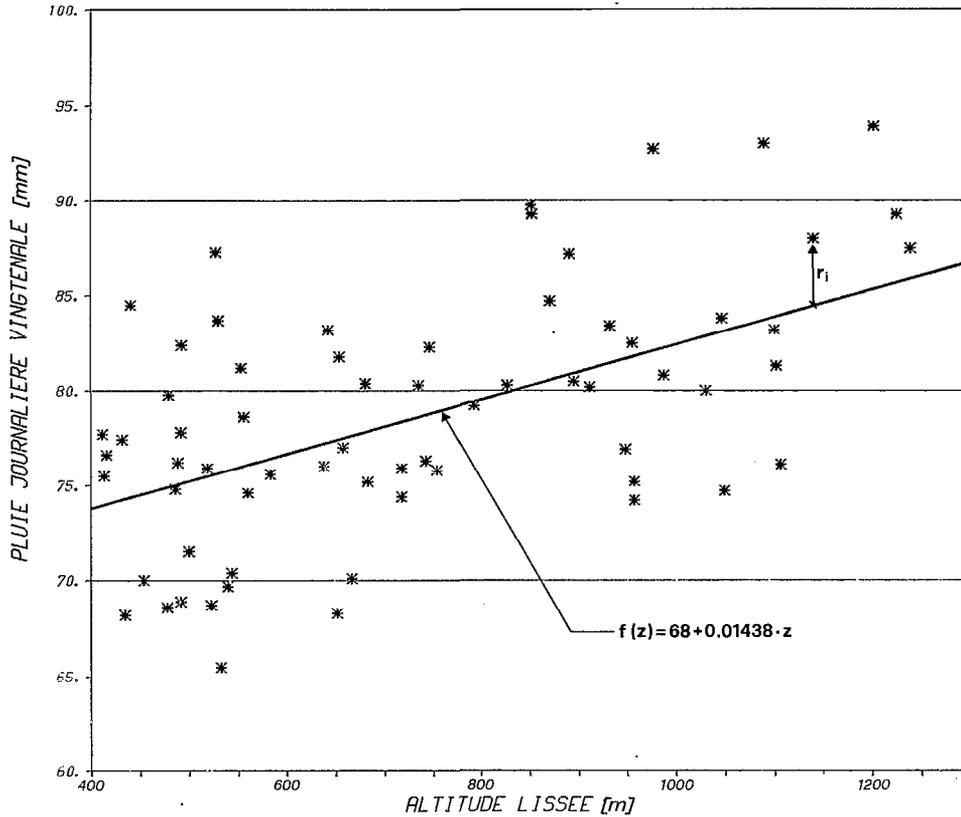


FIG. 2. - Relation entre la pluie journalière de temps de retour 20 ans P et l'altitude lissée sur une fenêtre de 6×6 km Z.

Les résidus r_i peuvent dès lors être considérés comme des anomalies à la loi de croissance de P avec l'altitude lissée Z. Ils rendent compte des facteurs régionaux tels que l'effet d'écran ou l'exposition par exemple.

Nous pouvons donc étudier la V.R. R, l'interpoler par krigeage sur une maille régulière, puis, pour chaque point de la maille de sous-indice o, reconstruire l'estimation de p_o par la relation :

$$\hat{p}_o = f(z_o) + r_o \tag{17}$$

C'est finalement à partir de cette grille que seront tracées les courbes d'isovaleurs de P.

La variable R est donc obtenue par soustraction de $f(Z)$ à P. Si $f(Z)$ est considérée comme une relation fonctionnelle, on doit alors reporter sur R l'erreur-type σ_p .

Nous sommes donc en présence d'un problème de krigeage de la V.R. R, à partir de mesures r_i entachées d'une incertitude p_i non stationnaire (cf. tabl. I). De plus, nous considérerons, dans cet exemple, que la dérive $m(x)$ est constante, ce qui permet d'obtenir le variogramme structural expérimental de la figure 3.

A titre indicatif, le variogramme expérimental brut a également été calculé (formule (6)) et représenté sur la figure 3. On constate que l'écart entre les deux graphes est sensiblement constant, de l'ordre de 17 mm^2 , ce qui correspond à une erreur-type « moyenne » de 4 mm.

Pour effectuer le krigeage, nous avons opté pour un modèle de variogramme linéaire de portée 60 km (cf. fig. 3) :

$$\hat{\gamma}_s(h) = 3 + 0.233 h$$

où h est la distance en kilomètres.

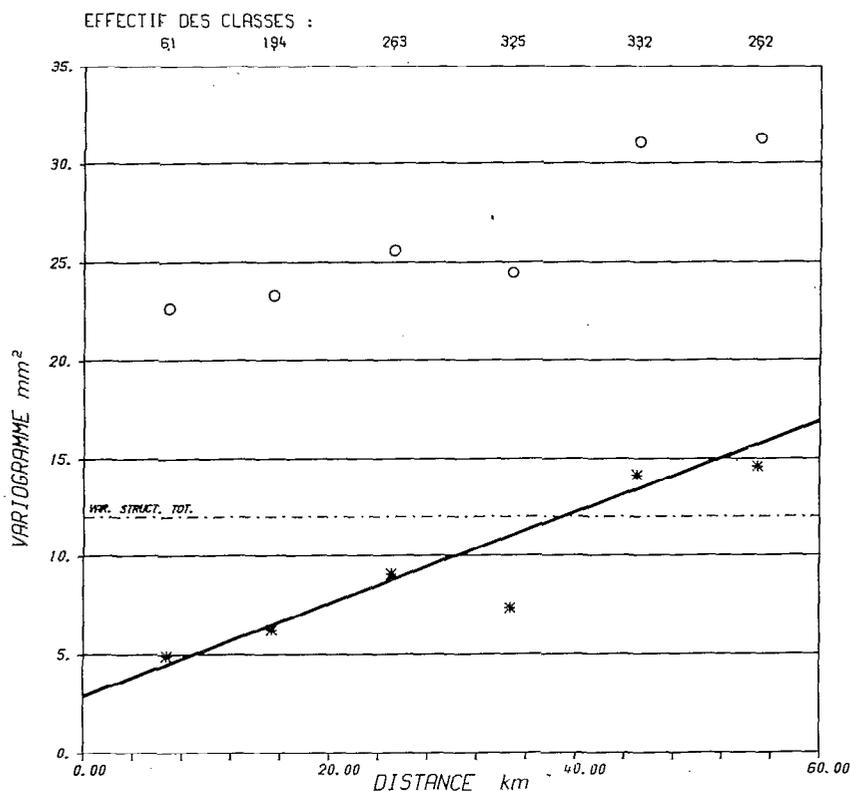


FIG. 3. – Variogrammes des résidus R. o : variogramme brut expérimental $\gamma(h)$; * : variogramme structural expérimental $\gamma_S(h)$; et modèle de variogramme structural utilisé pour le krigeage (trait fort).

Nantis de ce modèle de variogramme, le krigeage de R a été effectué sur une maille de 5 km de côté. Les résultats ont permis le tracé des courbes isovales¹ de R (cf. fig. 4) et de σ_p (cf. fig. 5). Par reconstruction de P (relation (14)), la carte des pluies journalières vicennales (cf. fig. 6) peut être obtenue immédiatement. Pratiquement, ce sont les deux cartes de P et σ_p qui seront utilisées par le projeteur.

Manuscrit accepté par le Comité de Rédaction le 13-6-1986

BIBLIOGRAPHIE

- DELHOMME (J.P.), 1976. – Application de la Théorie des Variables Régionalisées dans les Sciences de l'Eau. Thèse présentée à l'Université de Paris 6.
- JORDAN (J.P.), MEYLAN (P.), 1986. – Répartition spatiale des précipitations journalières en Suisse occidentale. Ingénieurs et Architectes suisses n° 12-13 : 157-162 et 187-189.
- KRIGE (D.G.), 1951. – A Statistical Approach to some Mine valuation and allied problems on the Wit waters rand. Master Thesis, University of Witwatersrand.
- MATHERON (G.), 1962. – Traité de Géostatistique appliquée. Mémoires du BRGM-Edition Technip, Paris.
- MATHERON (G.), 1969. – La théorie des Variables Régionalisées et ses Applications. Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Fontainebleau.
- SCHERRER (J.C.), 1977. – Une méthode d'extrapolation dans l'espace de données pluviométriques moyennes. Application à une partie des Vosges et de leur bordure. Recherche Géographique, Université Pasteur, Strasbourg.
- SERRA (J.), 1967. – Un critère nouveau de découverte de structures : le variogramme. *Sciences de la Terre*, vol. 12, n° 4, Nancy, 1967.
- ZWAHLEN (F.), 1981. – Contribution à l'étude hydrologique de la Mentue. Problème de la cartographie des éléments du bilan hydrique. Thèse présentée à l'Université de Lausanne.

1. Les courbes isovales ont été tracées par le logiciel NERVA, développé par la société ITC-SERITEC S.A., à Lausanne (Suisse).

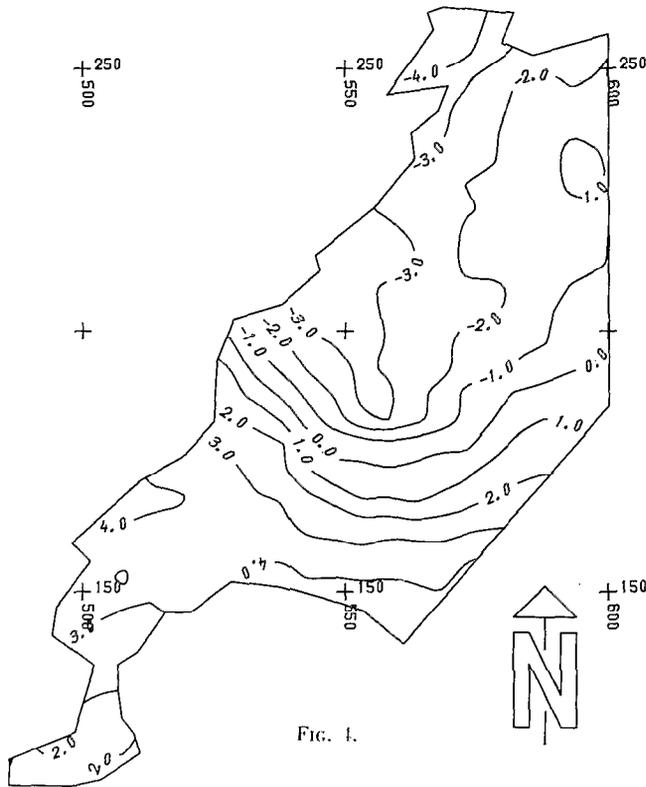


FIG. 4.

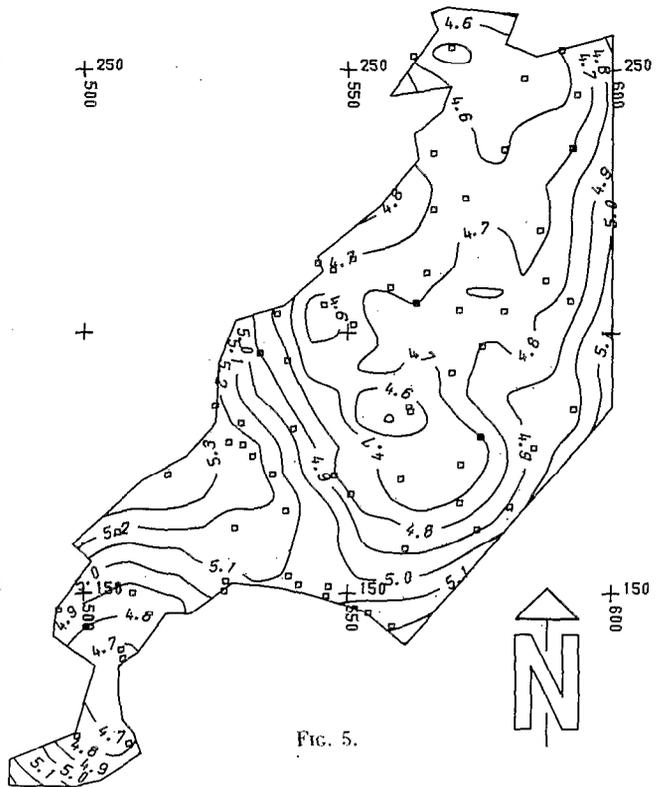


FIG. 5.

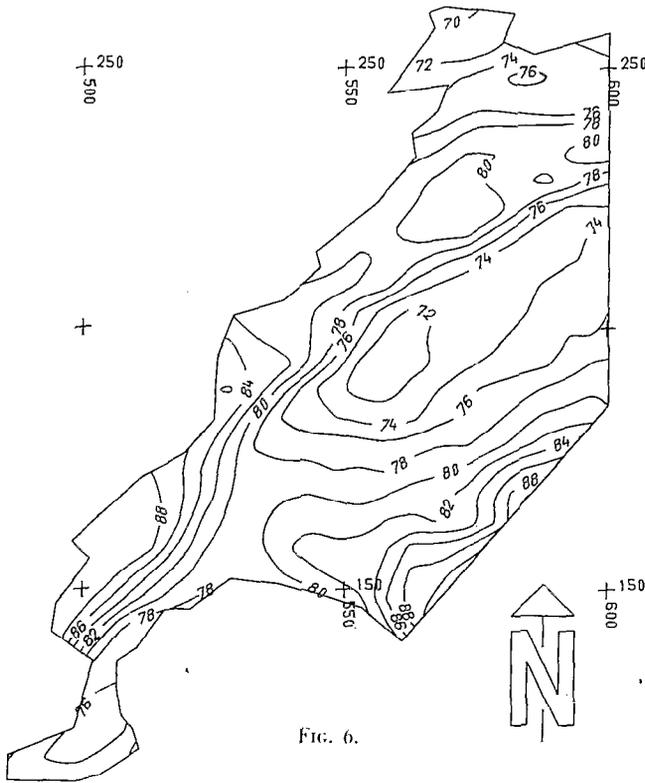


FIG. 6.

FIG. 4. - Courbes isovaleurs du résidu R en Suisse occidentale [mm].

FIG. 5. - Courbes isovaleurs de l'erreur-type d'estimation en Suisse occidentale [mm], avec figuré des stations pluviométriques.

FIG. 6. - Courbes isovaleurs de la pluie journalière vicennale en Suisse occidentale [mm].