

# Fiabilité des modèles mathématiques de prévision de crues

C. THIRRIOT (1), H. HABAIEB (2)

## RÉSUMÉ

*Une simulation numérique a permis d'apprécier les performances de différentes méthodes de prévision de crue sur l'exemple d'une rivière du sud-ouest de la France, l'Aveyron. A partir des résultats de comparaison entre hydrogrammes prévus et hydrogrammes observés ont été construites les fonctions de répartitions de l'erreur sur le débit maximal et de l'erreur moyenne.*

**MOTS-CLÉS :** Modèles mathématiques – Prévision de crue – Algorithmes de prévision – Erreur de prévision.

## ABSTRACT

RELIABILITY OF MATHEMATICAL MODELS FOR FLOOD FORECASTING

*A numerical simulation was used to test different methods of flood forecasting on the example of the river Aveyron in S.W. France. Comparisons between predicted and observed hydrographs provided estimates of the error of maximum flow predictions and the mean error.*

**KEY WORDS :** Mathematical models – Flood forecasting – Prediction algorithms – Prediction error.

## 1. INTRODUCTION

L'objectif du travail de recherche était la mise à l'épreuve de méthodes de prévision des crues en temps réel.

Certes, de nombreux travaux ont eu lieu sur le sujet notamment outre-Atlantique. On doit signaler en particulier les opérations menées sous l'égide de l'Organisation Météorologique Mondiale. Par exemple une réunion internationale de mise en commun pédagogique d'expérience eut lieu en 1983 à l'Université de Wageningen aux Pays-Bas (KRAIJENHOFF et MOLL 1986). De son côté, J. NEMEC Directeur au département Hydrologique de l'OMM rassembla l'expérience acquise dans les projets commandités par l'OMM dans les pays du tiers-monde et par certains services hydrologiques nationaux dans un ouvrage « Hydrological Forecasting » paru en 1986 (NEMEC). Plus récemment encore l'OMM a lancé une opération de comparaison de méthodes et d'expériences qui devait se dérouler en temps limité en marge du congrès de l'Association Internationale des Sciences Hydrologiques à Vancouver en août 1987 et qui visait pour objectif particulier l'examen des performances de l'actualisation des modèles.

Une confrontation critique similaire est lancée en France par la Société Hydrotechnique de France sur la demande du Ministère de l'Environnement. En général, on examine d'une manière privilégiée une méthode réputée meilleure. Pour notre part, nous avons voulu exécuter une étude critique systématique sans préjuger a priori de la qualité des méthodes. Plusieurs milliers d'essais de simulation ont été exécutés sur deux stations hydrologiques très contrastées par la quantité et la qualité de l'information. L'une concerne la Mejerdah seul fleuve pérenne de la Tunisie du Nord, pour laquelle l'information était clairsemée. L'autre est afférente au bassin de l'Aveyron, rivière du sud-ouest de la France.

---

(1) E.N.S.E.E.I.H.T., 2, rue Charles-Camichel, 31071 Toulouse Cedex, France.

(2) INAT, 43 av. Charles Nicolle, 1002 Tunis Belvédère, Tunisie.

Les deux bassins de l'Aveyron et de la Mejerdah sont évidemment très différents par la surface (respectivement 5 300 km<sup>2</sup> et 23 700 km<sup>2</sup>), par l'exposition climatique aussi bien du point de vue des précipitations (assez bien distribuées sur l'Aveyron sur toute l'année ou presque mais pratiquement nulles en été sur la Mejerdah) que de celui de l'évaporation, par la couverture végétale enfin. Cependant en dépit de ces forts contrastes, les conclusions obtenues à l'issue de nos simulations sont assez comparables.

Dans ce qui suit, compte tenu de la brièveté de ce rapport nous ne présenterons que les résultats de la prévision en une seule station, Villefranche, située au tiers amont de la rivière Aveyron. L'exemple traité constitue cependant un résultat suffisamment significatif des conclusions déduites de l'ensemble de nos expériences, qui n'ont évidemment pas la prétention de couvrir toute la gamme des situations hydrologiques afférentes aux crues.

## 2. PRÉSENTATION DU SITE HYDROLOGIQUE

L'Aveyron est le plus grand affluent du Tarn qui lui-même se jette dans la Garonne. Il a une longueur de 287 km et la superficie de son bassin versant est de 5 300 km<sup>2</sup>. Les riverains se souviennent des crues catastrophiques de mars 1930, de janvier 1955 et de décembre 1981. La prévision à Villefranche fera éventuellement intervenir les informations recueillies à la station amont Rodez.

Le tableau suivant donne quelques caractéristiques afférentes à ces deux stations.

	RODEZ	VILLEFRANCHE
Altitude	530 NGF	269 NGF
Superficie du bassin versant (km <sup>2</sup> )	563	1000
Module annuel du débit (m <sup>3</sup> /s)	7,7	14,8
Pluviométrie annuelle 1973-1983 (mm)	1000	900
Débit maximal 1974-1984 (m <sup>3</sup> /s)	63	228

Les stations de Villefranche et de Rodez sont à peu près à la même latitude. A vol d'oiseau, la distance est de 44 km. Comme Villefranche est plus proche de l'Atlantique, les précipitations venues de l'océan peuvent parfois profondément perturber l'hydrogramme de crue au cours de sa propagation.

Cet échantillon présente une très grande variabilité. Les crues sont plus fréquentes en hiver mais celles de fin d'automne sont souvent plus fortes voire catastrophiques. Les crues d'été dues à des orages sont rares mais peuvent être très dommageables.

## 3. PRÉSENTATION DES ALGORITHMES DE PRÉVISION

Nous classerons les algorithmes de prévision de crue en temps réel en deux catégories :

a) Les méthodes que nous appellerons immédiates, qui ne font intervenir que l'information à la station où s'effectue la prévision (dans ce qui suit, cette information concernera seulement l'observation des niveaux transformés en estimations de débit par utilisation d'une courbe de jaugeage).

b) Les méthodes à liaisons spatiales, faisant intervenir des observations et mesures en des points extérieurs à la station où l'on veut effectuer la prévision. Le plus souvent, ce sera le niveau ou le débit en une station à l'amont sur le même cours d'eau. Ce peut être aussi l'observation de l'intensité de la pluie ou des hauteurs de pluie en divers points du bassin versant amont ou à proximité de ce bassin versant.

Donnons quelques mots d'explication rapide sur les algorithmes particuliers employés.

### 3.1. MÉTHODES IMMÉDIATES

Parmi les méthodes immédiates nous rangerons les méthodes d'extrapolation et de lissage portant soit simplement sur les valeurs des débits observés à intervalles de temps constants ou non, soit sur les différences premières ou accroissements de débits observés pendant ces intervalles de temps.

a) *Méthode d'extrapolation*

Les algorithmes sont construits suivant la manière habituelle des formules d'interpolation. Avec l'hypothèse d'intervalle de temps constant, entre les points successifs d'observation et de prévision, au lieu des formules de Lagrange ou de Newton, on peut utiliser la ressource de l'algèbre symbolique et l'on obtient aisément pour polynôme d'interpolation de degré  $p$ .

$$Q_p(t + d) = \sum_{k=0}^p (-1)^k C_{k+1}^p Q(t - kd)$$

b) *Méthode de lissage*

Par la méthode des moindres carrés habituelle, nous avons déterminé les coefficients du polynôme d'approximation (THIRRIOT 1984c). En particulier, nous avons construit des polynômes particuliers donnant plus de poids à la dernière information disponible au temps  $t$  ceci pouvant aller jusqu'à imposer la coïncidence entre observation et approximation à ce temps  $t$ , observation qui constitue alors comme un pivot.

Par exemple pour une formule de lissage linéaire à pivot à trois points de base, on obtient :

$$Q_p(t + d) = \frac{1}{11} (16 Q(t) + Q(t - d) - 6 Q(t - 2d))$$

On notera le risque d'instabilité provoqué par la circonstance que la somme des valeurs absolues des coefficients est supérieure à 1 mais c'est le fait de toutes les méthodes d'extrapolation et de lissage.

c) *Méthode de régression multiple sur les différences premières*

Pour le spécialiste des méthodes ARMA, celui-ci n'y verra qu'un cas particulier de la magnifique théorie de BOX et JENKINS (1970). Pour contourner l'impossibilité de calculer la valeur moyenne du débit de crue au moment de la prévision, nous avons utilisé les différences premières du débit qui sont de moyenne nulle lorsque le niveau final est identique au niveau initial.

$$y(t) = \Delta Q(t) = Q(t + d) - Q(t)$$

La prévision peut être alors faite à l'aide d'une formule de régression multiple faisant intervenir  $m$  valeurs antérieures :

$$Y_p(t) = b_0 y(t - d) + b_{k-1} y(t - kd) + \dots + b_{m-1} y(t - md) + \varepsilon(t)$$

$\varepsilon(t)$  est le bruit ou erreur aléatoire. Les coefficients  $b_k$  sont en principe prédéterminés à partir de l'étude de crues observées antérieures.

## 3.2. MÉTHODES A LIAISON SPATIALE

La classe des méthodes à liaisons spatiales est innombrable. Pour des raisons évidentes de temps et de coût, nous avons été obligés de limiter la panoplie des algorithmes à l'étude de la méthode de Muskingum adaptée et de la méthode de régression linéaire faisant intervenir un ou trois points d'observation à la station amont. Pour ces deux méthodes, nous avons aussi distingué les cas de prise en compte implicite de la pluie ou de considération explicite de la corrélation entre la pluie et le débit à prévoir.

Un trait commun à tous les algorithmes essayés et qui en est une limitation est leur caractère linéaire. Bien sûr comme ils ont été appliqués aux débits, on peut penser que l'anamorphose implicite tirant d'eau-débit a été bénéfique mais on pourrait envisager encore une amélioration en cherchant une transformation intermédiaire ou plus radicale.

Pour éviter toute ambiguïté, nous décrirons rapidement les algorithmes de Muskingum et de régression.

a) *Algorithme de Muskingum*

Soient  $d$  le délai de prévision,

$t$  le moment où l'on fait la prévision,

$t'$  un instant quelconque,

$Q_m(t')$  le débit à la station amont,

$Q_v(t')$  le débit à la station aval où l'on fait la prévision,

$P(t')$  l'intensité de la pluie et même plus largement un indice des apports latéraux entre les deux stations,

$\Omega(t')$  le volume d'eau contenu dans le bief de rivière entre la station amont et la station aval.

L'équation de continuité s'écrit (approximativement, du fait de l'incertitude sur les apports) :

$$\frac{d\Omega(t')}{dt} = Q_m(t') - Q_v(t') + \gamma \Sigma P(t' - \tau)$$

$\tau$  est grossièrement analogue à un temps de concentration,

$\Sigma$  est la surface du bassin versant intermédiaire entre stations amont et aval,

$\gamma$  est un coefficient qui englobe bien des incertitudes sur le coefficient d'abattement de la pluie et le taux de ruissellement.

Comme il est fait de manière habituelle, on suppose que le volume, ou plutôt la variation de volume  $d\Omega$ , peut être grossièrement estimé, à partir des niveaux aux sections amont et aval en supposant le fond peu affouillable :

$$d\Omega = \frac{1}{2} \frac{dS_m}{dz_m} dz_m + \frac{dS_v}{dz_v} dz_v \quad (S \text{ étant la section mouillée})$$

Il ne reste plus alors qu'à relier variation de niveau et variation de débit à l'aide du barème de tarage  $Q(z)$  aux stations d'observation ; et il vient après discrétisation sur l'intervalle de temps  $(t, t+d)$  :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ \frac{dS_m}{dQ_m} (Q_m(t+d) - Q_m(t)) + \frac{dS_v}{dQ_v} (Q_v(t+d) - Q_v(t)) \right] \\ &= \frac{d}{2} \left[ Q_m(t) + Q_m(t+d) - Q_v(t) - Q_v(t+d) \right] + d\gamma \Sigma P(t+d - \tau) \end{aligned}$$

En regroupant les termes de débit et en globalisant les coefficients après linéarisation (qui implique que les dérivées  $\frac{dS_m}{dQ_m}$  et  $\frac{dS_v}{dQ_v}$  sont constantes) on obtient :

$$Q_v(t+d) = a_0 Q_v(t) + b_0 Q_m(t) + b_1 Q_m(t+d) + cP(t-\tau) + \varepsilon(t),$$

$Q_m(t+d)$  inconnu au temps  $t$  sera estimé par extrapolation ce qui conduit à la relation :

$$Q_v(t+d) = a_0 Q_v(t) + (b_0 + 2b_1) Q_m(t) - b_1 Q_m(t-d) + cP(t-\tau) + \varepsilon(t)$$

$\varepsilon$  est l'erreur de prévision.

Les coefficients  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $b_1$  et  $c$  seront déterminés par restitution des hydrogrammes des crues déjà observées. Le critère d'ajustement choisi est celui de la méthode des moindres carrés.

Si l'on admet que le terme  $cP(t-\tau)$  rend compte des apports intermédiaires, on peut écrire en considérant le régime permanent (THIRRIOT 1984a et 1984b) que  $a_0 + b_0 + b_1 = 1$ .

Mais on peut aussi laisser flotter les coefficients pour profiter d'un degré de liberté supplémentaire.

#### b) Régression linéaire

En faisant intervenir une seule information en provenance de la station amont, prise à l'instant  $t-\tau'$ ,  $\tau'$  étant en gros le temps de propagation le long de tronçon, on peut écrire :

$$Q_v(t+d) = a'_0 Q_v(t) + a'_1 Q_v(t-d) + b'_0 Q_m(t-\tau') + cP(t-\tau') + \varepsilon(t)$$

Là encore, en l'absence d'apport  $a'_0 + a'_1 + b'_0 = 1$

Par analogie avec la méthode graphique de Bachet qui fait intervenir la courbure des hydrogrammes au voisinage du débit maximal, nous avons aussi essayé la régression avec trois informations à l'amont aux temps  $t-\tau'-d$ ,  $t-\tau'$  et  $t-\tau'+d$ .

## 4. PRÉSENTATION DES CRITÈRES D'ÉVALUATION

Après avoir essayé de nombreux critères proposés dans la littérature technique, nous avons opté pour deux critères complémentaires :

- un critère de proximité des hydrogrammes prévu et observé constitué par l'écart type  $\sigma\varepsilon$  de l'erreur de prévision  $\varepsilon$  qui est un critère global.
- un critère de sécurité constitué par la valeur de l'erreur sur le débit maximal  $\varepsilon Q_{\max}$ .

En fait pour pouvoir comparer les critères pour différentes crues, nous avons considéré les rapports suivants :

$$S = \sigma\epsilon/Q_{\max} \text{ et } S' = \epsilon Q_{\max}/Q_{\max}$$

Pour plus de généralité, on pourrait penser utiliser l'écart type  $\sigma_Q$  du débit afférent à la crue. Mais cette définition variationnelle satisfaisante pour sa globalité, est ambiguë parce qu'on ne sait pas exactement quand commence et finit la crue et  $\sigma_Q$  est sensible aux choix de la durée de la crue.

## 5. LES RÉSULTATS

Nous ne détaillerons pas la procédure de simulation. Indiquons tout de même que dans le choix du jeu de coefficients du modèle, nous avons fait intervenir deux paramètres qualitatifs : la saison et un indice d'humidité. Cet indice d'humidité est analogue à ceux utilisés à l'ORSTOM (1983). Il tient compte avec une mémoire évanescence exponentielle des pluies brutes antérieures à la pluie (THIRRIOT 1986a).

Nous supposons qu'une précipitation au jour  $k$  contribue à l'humidité au temps  $t$  proportionnellement à la quantité  $I_k e^{-\frac{t-k}{\tau c}}$ ,  $\tau c$  étant une constante de temps, paramètre dont nous avons essayé les valeurs : dix jours, un mois, trois mois.

A partir des fichiers de pluies journalières, nous avons pour chaque jour  $j$  calculé l'indice :

$$H_j = \sum_{k=-\infty}^j I_k e^{-\frac{j-k}{\tau c}}$$

suivant la relation itérative très simple :

$$H_j = H_{j-1} e^{-\frac{1}{\tau c}} + I_j$$

Pour ce qui concerne l'effet saisonnier, nous avons choisi de prendre les coefficients des modèles déterminés en restitution sur la crue précédente de même saison et approximativement de même classe d'indice d'humidité.

A partir de l'échantillon des 29 crues sur dix ans, nous avons pu ainsi tenter la prévision sur 28 crues. Ce nombre nous a paru suffisant pour faire une étude statistique de l'erreur de prévision qui constitue l'objectif essentiel de ce rapport.

Les variables aléatoires considérées sont les erreurs relatives globale  $S$  et locale  $S'$ .

Les paramètres sont les types de méthodes (près de 20 méthodes ont été essayées) et le délai de prévision  $d$  (2, 4, 6 et 12 heures).

Certaines méthodes se sont avérées assez vite peu compétitives mais nous avons poursuivi l'étude sur l'ensemble des crues pour avoir avec les fonctions de répartition de  $S$  et de  $S'$  des critères globaux stables de comparaison.

Sur les figures 1 et 2, nous donnons un exemple de fonctions de répartition obtenues pour des méthodes classées parmi les plus satisfaisantes pour les délais des prévisions élevées 6 h : la méthode de régression avec pluie pour  $S$  (fig. 1) et la méthode de Muskingum sans pluie pour  $S'$  (fig. 2). Pour chacune des variantes, les fonctions de répartition conservent approximativement la même allure grossièrement exponentielle (THIRRIOT 1986b). On peut donc concentrer l'information en considérant les deux premiers moments, soient encore les valeurs moyennes  $S$  et  $S'$  et les écarts quadratiques  $\sigma_s$  et  $\sigma_{s'}$ . Les figures 3 et 4 montrent que pour  $S$ , l'extrapolation linéaire toute simple et la régression immédiate sur les différences donnent aussi bien satisfaction que des méthodes plus sophistiquées à liaisons spatiales.

Pour  $S'$  le changement de signe en cours de fonction de répartition ferait accorder plus d'importance à  $\sigma_{s'}$  qu'à  $S'$  et alors la méthode de Muskingum marque une nette supériorité.

Pour profiter des avantages différents des diverses méthodes nous avons aussi construit des méthodes hybrides faisant intervenir un panachage des divers algorithmes.

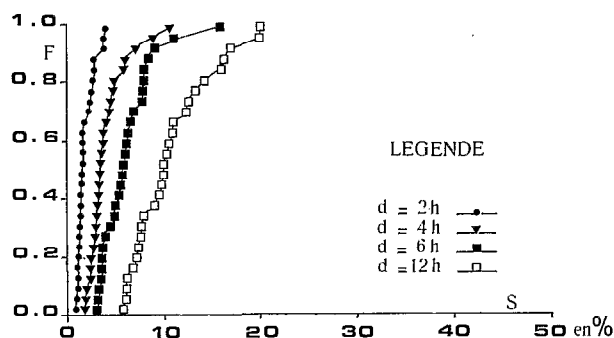


FIG. 1.

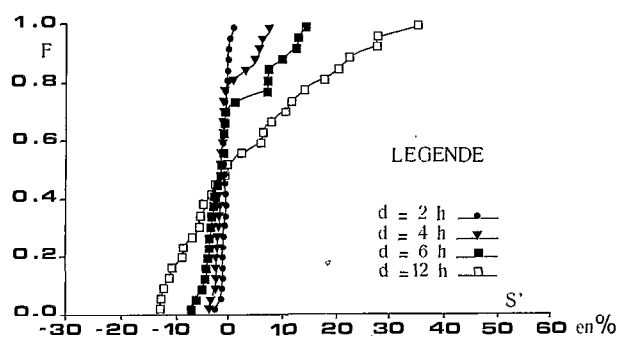


FIG. 3.

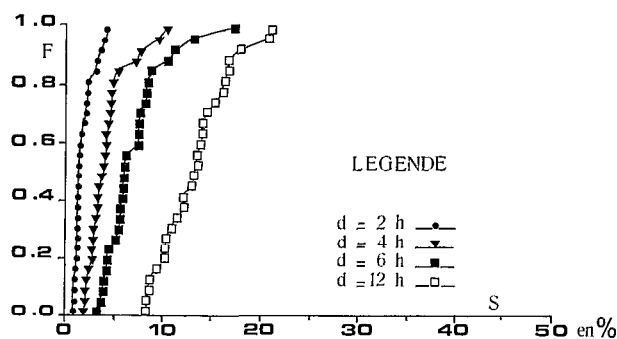


FIG. 2.

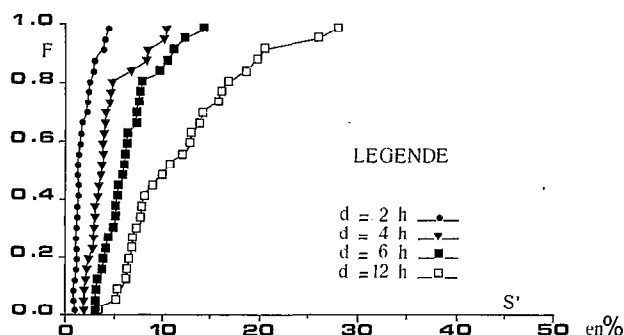


FIG. 4.

## 6. CONCLUSION

La connaissance des fonctions de répartition des erreurs de prévision permet de répondre à l'exigence d'alerte en termes de probabilité en assortissant la valeur annoncée d'une plage d'incertitude qui va évidemment s'amplifier avec le délai de la prévision.

Une restriction évidente des modèles examinés ici est leur linéarité. Dans des travaux non relatés ici nous avons pris en compte la non-linéarité de diverses façons ; en tenant compte des valeurs de débit atteints et qui pouvaient dépasser des seuils de débordements successifs dans des champs d'inondation, par le traitement des erreurs, en particulier avec les filtres de Kalman et par la mise en compétition continue de plusieurs méthodes au cours de la prévision.

Ces tentatives ont certes parfois amené un mieux mais n'ont pas bouleversé ni la forme des fonctions de répartition ni les conclusions.

## BIBLIOGRAPHIE

- BACHET (N.), 1934. — Note sur la propagation et l'annonce de crue, *Annales des Ponts et Chaussées* mai-juin 1934 : 409-465.
- BOX (G.), JENKINS (G.), 1970. — Time series analysis forecasting and control Holdenday, San Francisco.
- HABAIEB (H.), 1987. — Contribution à l'étude critique des algorithmes de prévision de crue en temps réel. Exemples de l'Aveyron et de la Medjerdah. Thèse présentée à l'ENSEEIH pour obtenir le titre de Docteur de l'Institut National Polytechnique de Toulouse.
- CHEVALLIER (P.), 1983. — L'indice des précipitations antérieures. Évaluation de l'humectation des sols des bassins représentatifs. *Cah. ORSTOM Sér. Hydrol.* vol. XX n° 3-4 : 179-189.
- KITANIDIS (P. K.), BRAS (R. L.), 1980. — Real time forecasting with a conceptual hydrologic mode. I : analysis of uncertainty. II : applications and results. *Water Resources Research*, vol. 16 n° 6 : 1025-1044.

- KRAIJENHOFF (D. A.), MOLL (J. R.), 1986. – River flow modelling and forecasting – Water Science and technology library. Reidel Publishing Company Dordrecht, Boston 372 p.
- NEMEC (J.), 1986. – Hydrological Forecasting Water Science and technology library. Reidel Publishing Company Dordrecht, Boston, 239 p.
- THIRRIOT (C.), 1960. – Contribution à l'étude des régimes variés et des régimes transitoires dans les canaux d'usines. Thèse de Doctorat ès sciences physiques. Toulouse n° d'ordre 1262.
- THIRRIOT (C.), 1968. – La prévision des crues et la protection contre les inondations. Comparaison des méthodes de calcul de la propagation des ondes de crue. SHF X<sup>e</sup> Journée de l'Hydraulique – Question II – Rapport 10.
- THIRRIOT (C.), 1984a. – Point de vue sur la méthode de Muskingum pour le suivi de la propagation des crues. Rapport interne IMFT-CT, 598.
- THIRRIOT (C.), 1984b. – Une expérience coopérative : l'étude des crues et sécheresses sous l'égide de l'Institut Méditerranéen de l'Eau. Proceeding of 5th international conference on water resources planning and management. Water in the 2000 Athens. 1-4 octobre 1984 : 1544-1545.
- THIRRIOT (C.), 1984c. – Extrapolation par lissage aux moindres carrés. Rapport interne IMF CT 605.
- THIRRIOT (C.), 1986a. – Prise en compte simplifiée de l'humidité du sol au moment d'une crue. Rapport interne IMFT - CT 670.
- THIRRIOT (C.), 1986b. – Note sur l'exploitation des fonctions de répartition des erreurs de prévision des crues. Rapport interne IMFT - CT 682.