

**THÈSE de DOCTORAT D'ÉTAT
ès Sciences Mathématiques et Physique**

présentée

**à l'Université Pierre et Marie Curie
Paris VI**

par M. Bernard VALETTE

pour obtenir le grade de DOCTEUR ès SCIENCES

Sujet de la thèse :

**SPECTRE DES OSCILLATIONS LIBRES DE LA TERRE
ASPECTS MATHÉMATIQUES ET GÉOPHYSIQUES**

soutenue le 6 Novembre 1987

devant le jury composé de :

M. M. ROSEAU	Président
M. C. BARDOS	Examineur
M. F. DAHLEN	Rapporteur
M. Y. DERMENJIAN	Rapporteur
M. G. JOBERT	Rapporteur
M. J.L. LE MOUËL	Examineur
M. R. OHAYON	Rapporteur
M. P.C. SABATIER	Examineur

TDM 32

ORSTOM

Editions de l'ORSTOM

INSTITUT FRANÇAIS DE RECHERCHE SCIENTIFIQUE
POUR LE DÉVELOPPEMENT EN COOPÉRATION

Collection :

Travaux et documents microédités

PARIS 1988

ISBN 2-7099-0905-7

© ORSTOM

« La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, « que les «copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective» et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, «toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite» (alinéa 1er de l'article 40).

« Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, « constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants « du Code Pénal»...

F6

Je remercie Georges Jobert qui a bien voulu suivre mon travail et m'a aidé amicalement pour nombre de calculs.

J'ai été touché de la manière dont Messieurs Balabane, Bardos, Dermenjian et Ohayon ont accueilli mon travail en me consacrant de nombreuses journées de discussion. Mes remerciements également à Monsieur Cessenat pour ses critiques constructives du chapitre II.

Messieurs Roseau, Dahlen, Le Mouël et Sabatier me font l'honneur de participer à mon jury ; je les en remercie sincèrement.

J'ai bénéficié de l'aide informatique et de fructueuses discussions avec de nombreux membres des I.P.G., notamment avec A. Nercessian, P. Lesage, A. Tarantola, P. Lognonne, J.J. Lévêque, H. Legros, J. Hinderer, C. Gire et D. Jault. Assister au groupe de travail "Propagation d'ondes : aspects mathématiques et numériques" du centre de mathématiques appliquées de l'Ecole polytechnique pendant plusieurs années m'a été également d'une aide précieuse. Amicals remerciements à tous.

Messieurs Albouy et Aubrat ont largement contribué à me fournir des conditions de travail décentes grâce à l'O.R.S.T.O.M. Je ne peux l'oublier ici.

Enfin mes sincères remerciements à T. Diop qui m'a aidé à la réalisation matérielle de ce document.

Remerciements.	1
Table des Matières.	2
0 Avant-Propos.	4
I Mise en place des équations de l'élasto-gravité pour un corps auto-gravitant.	
Perturbation d'équilibre.	7
1 Calcul de perturbations réelles ou virtuelles. Point de vue Lagrangien et Eulerien.	7
2 Perturbations adiabatiques de la Terre autour d'une position d'équilibre en rotation uniforme.	13
3 Lien entre les équations locales et les équations de la Mécanique rationnelle. Considérations énergétiques.	44
4 Cas d'un écoulement stationnaire quelconque dans le Noyau-externe.	51
II Etude Mathématique de l'opérateur de l'élasto-gravité.	61
1 Rappels et notations.	61
2 Cadre fonctionnel.	64
3 Gravité, pesanteur et potentiel de redistribution des masses.	72
4 Cadre variationnel et opérateurs auto-adjoints semi-bornés ; extension de Friedrichs.	82
5 Opérateur de l'élasto-gravité pour une planète partout solide.	86
6 Opérateur de l'élasto-gravité pour une planète présentant une inclusion fluide.	101
7 Caractérisation variationnelle des vecteurs propres de A, principe de Rayleigh.	112
III Etude d'une classe de problèmes spectraux non linéaires et des problèmes d'évolution associés.	
1 Généralités.	118
2 Utilisation de la compacité.	128
3 Résolution de l'identité associée au spectre σ	143
4 Caractérisation variationnelle des vecteurs propres.	151
5 Problème d'évolution associé.	152

IV Modes propres de la Terre ou d'une planète.	161
1 Introduction historique.	161
2 Cas d'une planète solide. Mouvement Chandlerien.	166
3 Cas de la Terre. Mouvement Chandlerien. Nutation libre du noyau.	171
4 Caractérisation variationnelle des fréquences propres.	182
5 Problème d'évolution.	185
V Méthode de perturbation pour une configuration proche de la symétrie sphérique. 193	
1 Perturbation de rotation et de paramètres.	194
2 Perturbation de configuration. Equations de Clairaut, cas orthotrope.	200
3 Corrections d'ellipticité pour une Terre orthotrope.	220
4 "Splittings" anormaux.	236
5 Perturbation Lagrangienne du signal.	240
VI Méthodes d'inversion et probabilités conditionnelles. 247	
1 Inversion en terme de probabilité conditionnelle. Le cas discret.	248
2 Moindres carrés généralisés.	252
3 Le point de vue de l'estimation. Compromis erreur-résolution.	257
4 Inversion globale fonctionnelle.	265
5 Cadre fonctionnel et probabilité conditionnelle.	267
VII Une Méthode d'estimation d'un modèle de référence orthotrope à partir de fréquences propres terrestres. 273	
1 Prise en compte de l'anélasticité.	274
2 Paramétrisation.	278
3 Inversion simultanée modes-paramètres.	283
Références. 287	

L'étude des oscillations libres d'une planète ou d'un corps céleste autour d'une configuration stationnaire conduit au problème spectral associé à la famille :

$$L_{i\omega} = -\omega^2 + 2i\omega B(\omega) + A$$

où A est un opérateur formellement symétrique qui décrit le comportement élasto-gravitationnel du corps, B un opérateur dont la partie antisymétrique, indépendante de ω , est associée aux mouvements de rotation et de convection qui animent ce corps et dont la partie symétrique décrit les processus d'atténuation.

On peut considérer que les premières études de ce type de problème remontent à la fin du siècle dernier avec entre autres Rayleigh, Hough, Poincaré et Love. Bien que théoriques et décrivant des situations idéalisées, ces travaux ont porté leurs fruits puisqu'ils ont conduit à l'estimation des fréquences propres sismiques de la Terre bien avant qu'un patient effort international d'observation ait permis de les identifier. Ensuite par une complexification progressive de la modélisation (prise en compte de la rotation et de l'ellipticité puis de l'anisotropie et de l'atténuation, des hétérogénéités latérales enfin) et par l'amélioration constante de la qualité du matériel d'enregistrement et le développement des réseaux sismologiques, il a été possible d'affiner la connaissance du spectre sismique. Si bien que de nos jours la sismologie constitue le plus puissant moyen d'investigation de la structure terrestre et particulièrement du manteau.

Un regain d'intérêt sur ce type de problème a été provoqué par ailleurs, dans les années 70, par les premières observations des vibrations propres solaires aux périodes voisines de cinq minutes de sorte que l'héliosismologie est maintenant en plein essor (voir J. Christensen-Dalsgaard (1985) par exemple). L'intérêt théorique chez les astronomes semble s'être dirigé vers l'étude des problèmes de bifurcation liés à la convection (voir la revue de Schutz (1983)).

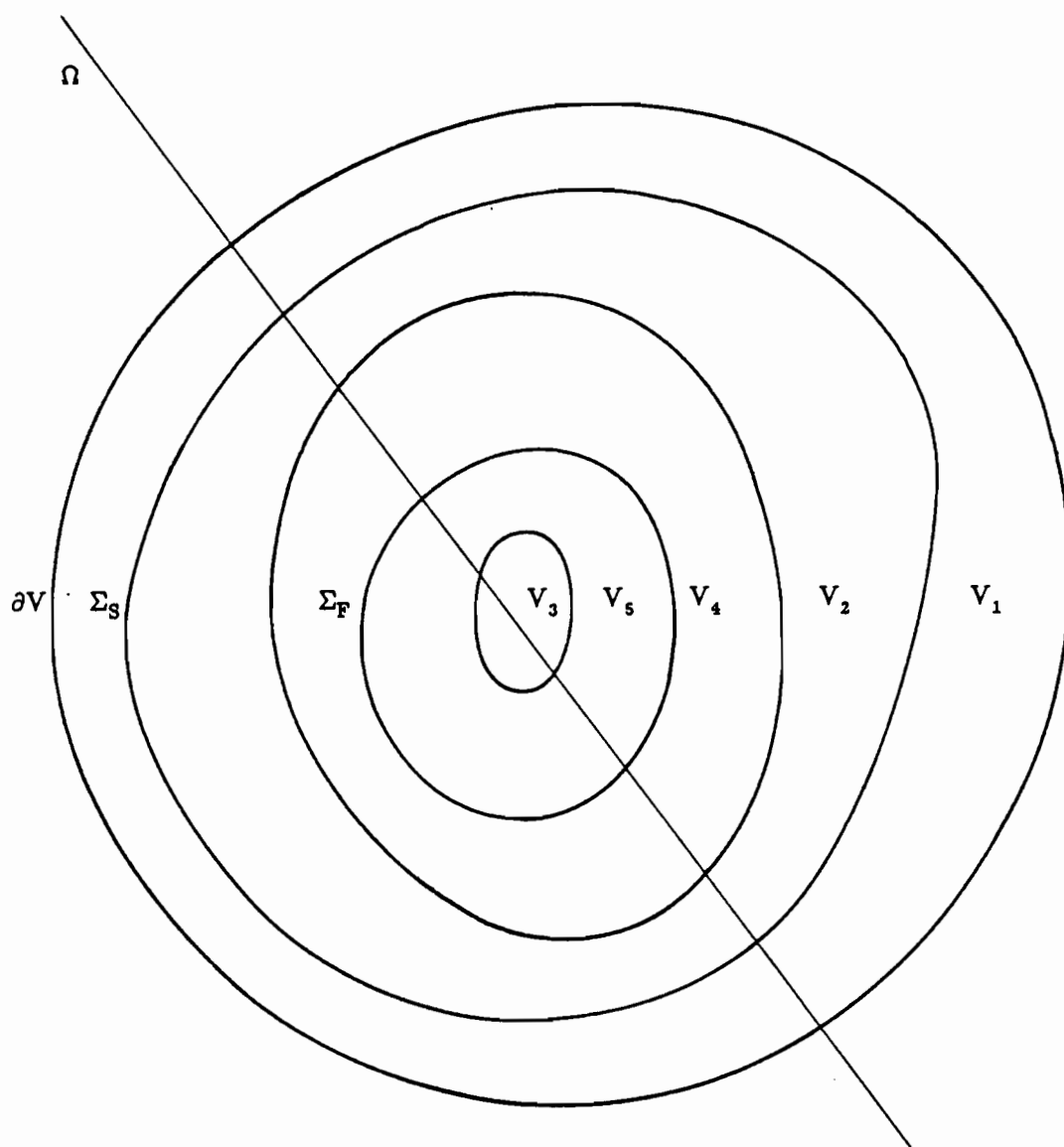
Des aspects de ces problèmes restent néanmoins mal appréhendés. Par exemple le modèle solaire "sismologique" semble incompatible avec les modèles solaires physiques. Dans le cas de la Terre, le comportement mécanique du noyau externe est encore mal compris. Sa relation avec l'existence du champ magnétique, que l'on néglige en sismologie, reste à préciser.

Par ailleurs de nombreux problèmes d'aéronautique se ramènent aussi à un problème spectral quadratique ; la stabilisation d'un satellite par exemple, ou l'étude des modes propres d'un réservoir de lanceur. Dans ces problèmes, des interfaces solide-fluide sous fort déviateur de contrainte sont à considérer. De plus, la forme de ces objets ne présentant pas toujours des symétries simples, un grand effort numérique a été entrepris avec l'utilisation systématique des méthodes de Galerkin et des méthodes spectrales.

Ainsi l'étude des problèmes spectraux quadratiques, ou plus généralement des familles spectrales du type L_{ω} , se trouve à la croisée des chemins. Mon travail, dans cette thèse, est constitué de deux parties.

Le fil directeur de la première est de replacer la problématique des sismologues dans le cadre mathématique rigoureux de l'étude d'une famille de type L_{ω} . Le premier chapitre est consacré à l'établissement des équations utilisées en Sismologie ainsi que des formulations variationnelles qui y sont associées. J'insiste sur les problèmes d'interface et sur la manière de rendre compte de la précontrainte et du mouvement convectif dans le noyau. Dans le deuxième chapitre j'étudie l'opérateur A de l'élasto-gravité, en ne considérant pas d'emblée le mouvement convectif, de manière à rendre A borné inférieurement. Cela me permet d'entamer, dans le troisième chapitre, l'étude mathématique proprement dite de la famille spectrale correspondante, en négligeant cette fois l'atténuation. Dans le quatrième chapitre enfin, je montre comment les résultats abstraits du troisième s'appliquent au cas de la Terre. Cela fournit, notamment, un nouveau point de vue sur les mouvements de Poincaré et le spectre géodynamique. Bien entendu, de nombreuses questions essentielles restent ouvertes. Je me suis efforcé de les signaler au passage.

La deuxième partie est plus appliquée. Elle tourne autour des problèmes que pose l'élaboration des modèles moyens (sans hétérogénéités latérales). Cela m'a conduit à considérer également les problèmes de calculs de perturbations, notamment ceux liés à la forme de la Terre et au noyau externe. Ceci d'autant plus que la communauté sismologique éprouve actuellement des difficultés à rendre compte des observations de certains modes présentant une énergie non négligeable dans le noyau.



$$V_S = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \Sigma_S \quad V_F = V_4 \cup V_5$$

figure 1 : Disposition schématique des différents ouverts représentant la configuration terrestre (cf. le paragraphe 2 de ce chapitre ainsi que le chapitre II) .

I MISE EN PLACE DES ÉQUATIONS DE L'ÉLASTO-GRAVITÉ POUR UN CORPS AUTO-GRAVITANT. PERTURBATIONS D'ÉQUILIBRE.

L'objet de ce chapitre est de préciser les équations qui gouvernent les perturbations adiabatiques de la Terre autour de sa position d'équilibre que l'on suppose en rotation uniforme. On considère également le cas où le noyau externe est animé d'un mouvement stationnaire quelconque. Nous sommes ainsi conduit à rappeler et préciser le calcul des perturbations de configuration, Lagrangiennes ou Eulériennes, réelles ou virtuelles. Ceci nous sera également utile, au chapitre 5, pour l'étude de configurations proches de la symétrie sphérique. Nous précisons enfin le lien entre le point de vue local avec les équations de la mécanique rationnelle et les considérations énergétiques.

1- Calcul de perturbations réelles ou virtuelles. Point de vue Lagrangien et Eulerien.

Considérons dans l'espace Euclidien deux systèmes physiques dans un état proche l'un de l'autre. On suppose également que les deux configurations sont proches l'une de l'autre dans l'espace et l'on se propose de calculer les perturbations des différentes grandeurs physiques entre ces deux états. Pour ce faire on considère une évolution continue de la configuration et des paramètres physiques qui permet de passer de l'état pris comme référence au second. Cette évolution peut soit correspondre à l'évolution réelle d'un même système matériel, soit être purement abstraite. C'est notamment le cas lorsque les deux états correspondent à deux systèmes matériels distincts qui se trouvent dans un état proche l'un de l'autre. On parle alors d'évolution virtuelle. Quoi qu'il en soit, deux approches sont possibles :

- l'approche Eulerienne qui décrit la perturbation des grandeurs physiques en restant à un point donné de l'espace Euclidien.
- l'approche Lagrangienne qui décrit les perturbations en suivant une particule matérielle, ou

une trajectoire virtuelle de l'évolution. Plus précisément, soient V_0 et V_1 les volumes occupés par les deux configurations et $T_{0,i}$, $T_{1,i}$ les différents champs de tenseurs représentant les différentes grandeurs physiques dans les deux états correspondants. L'évolution se définit mathématiquement par une application :

$$\forall t \in [0,1], \forall a \in V \quad (a,t) \rightarrow x(a,t) \in V_t \\ (a,t) \rightarrow T_i(x(a,t),t)$$

avec :

$$x(a,0) = a, \quad x(a,1) = x, \\ T_i(a,0) = T_{0,i}(a), \quad T_i(x,1) = T_{1,i}(x),$$

où x est le point de la deuxième configuration associé à a , d'une manière réelle ou virtuelle.

Soit :

$$x = a + \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i!} \xi_i$$

le développement formel de Taylor de $x(a,t)$ par rapport à $x(a,0)$ pour $t = 1$.

On définit les perturbations Lagrangiennes et Euleriennes au premier ordre d'un tenseur T respectivement par :

$$\delta_{1l} T(a) = \frac{d}{dt} T(x(a,t),t)|_{t=0},$$

$$\delta_{1e} T(a) = \frac{\partial}{\partial t} T(x(a,t),t)|_{t=0}.$$

Ainsi :

$$\delta_{1l} T(a) = \delta_{1e} T(a) + D_a T(\xi_1) \tag{1}$$

où $D_a T$ désigne la dérivée spatiale du champ T au point a . D'une manière générale, on évalue les perturbations du tenseur T jusqu'à l'ordre n par :

$$\delta_{nl} T(a) = \frac{d^n}{dt^n} T(x(a,t),t)|_{t=0}$$

$$\delta_{ne} T(a) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} T(x(a,t), t)|_{t=0}$$

et :

$$\delta_l T(a) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \delta_{il} T(a) ,$$

$$\delta_e T(a) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \delta_{ie} T(a) .$$

On voit donc que les perturbations lagrangiennes sont associées aux dérivées particulières, c'est à dire totales par rapport au temps qu'il soit réel ou virtuel, et que les perturbations Euleriennes sont associées aux dérivées partielles par rapport à ce temps, en une position de l'espace.

On obtient alors aisément la :

Proposition 1 :

$$\delta_l(DT) = D(\delta_l T) - DT.D\xi_1 \tag{2}$$

$$\delta_l(\text{grad} p) = \text{grad}(\delta_l p) - (D\xi_1)^*(\text{grad} p) \tag{3}$$

$$\delta_l(\text{div}(u)) = \text{div}(\delta_l u) - \text{tr}(Du.D\xi) \tag{4}$$

où * désigne l'adjoint d'un opérateur pour la structure Euclidienne, T un champ de tenseur et u un champ vectoriel.

Preuve :

Utilisant (1), on déduit sans peine que :

$$\begin{aligned} \delta_l(DT) &= \delta_e(DT) + D^2 T(\xi_1) \\ &= \delta_e(DT) + D(DT(\xi_1)) - DT.D\xi_1 \\ &= D(\delta_l T) - DT.D\xi_1, \end{aligned}$$

ce qui prouve (2).

(3) correspond au cas particulier où T est scalaire.

Pour obtenir (4), il suffit d'appliquer l'opérateur trace à (2) avec T = u. ■

Dans le cas des perturbations de 2ème ordre, on obtient la :

Proposition 2 :

$$\delta_{21}T = \delta_{2e}T + D^2T(\xi_1, \xi_1) + 2D(\delta_{1e}T)(\xi_1) + DT(\xi_2) \quad (5)$$

$$\delta_{21}(DT) = D(\delta_{21}T) - 2D(\delta_{11}T).D\xi_1 + 2DT.D\xi_1.D\xi_1 - DT.D\xi_2 \quad (6)$$

$$\delta_{21}(\text{grad}p) = \text{grad}(\delta_{21}p) - 2(D\xi_1)^*(\text{grad}\delta_{11}p) + 2(D\xi)^*(D\xi)^*(\text{grad}p) - (D\xi_2)^*(\text{grad}p) \quad (7)$$

$$\delta_{21}(\text{grad}) = \text{grad}(\delta_{21}p) + DH(p)(\xi, \xi) + 2H(\delta_{11}p)\xi + H(p)\xi_2 \quad (8)$$

$$\delta_{21}(\text{div}u) = \text{div}(\delta_{21}u) - 2\text{tr}(D(\delta_{11}u).D\xi_1) + 2\text{tr}(Du.D\xi_1.D\xi_1) - \text{tr}(Du.D\xi_2) \quad (9)$$

Preuve :

Calculons $\delta_{21}T$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}T(x(t), t) &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial T} + DT \left(\frac{dx}{dt} \right) \right\} \\ &= D^2T \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt} \right) + DT \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 2D \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \\ &= D^2T(\xi_1, \xi_1) + 2D(\delta_{1e}T)(\xi_1) + \delta_{2e}T + DT(\xi_2). \end{aligned}$$

Cela conduit à (5).

Utilisant (5), on obtient :

$$\begin{aligned} \delta_{21}(DT) &= \delta_{2e}(DT) + D^2T(\xi_1, \xi_1) + 2D(\delta_{1e}(DT))\xi_1 + D^2T(\xi_2) \\ &= D(\delta_{21}T) - 2D(\delta_{11}T).D\xi_1 + 2DT.D\xi_1.D\xi_1 - DT.D\xi_2, \end{aligned}$$

ce qui prouve (6).

(7) correspond au cas où T est scalaire, (8) s'obtient à partir de (5), et (9) en appliquant l'opérateur trace à (6) avec $T = u$. ■

Pour terminer indiquons comment perturber des expressions intégrales scalaires portant sur V ou ∂V ou, plus généralement, sur toute interface Σ de V . Soient :

$$I(t) = \int_{V_t} L(x(t),t) dV_t \quad \text{et} \quad J(t) = \int_{\Sigma_t} M(x(t),t) d\Sigma_t .$$

On obtient d'une manière classique (voir Bamberger, Cea, Germain) la :

Proposition 3 :

$$\delta I = \int_V \{ \delta_1 L + L \operatorname{div}(\xi) \} dV , \tag{10a}$$

$$= \int_V \delta_e L dV - \int_{\Sigma} [L(x)](\xi \cdot n) d\Sigma \tag{10b}$$

$$\delta J = \int_{\Sigma} \{ \delta_1 M + M (\operatorname{div}_{\Sigma} \xi_{\Sigma} + 2c(\xi \cdot n)) \} d\Sigma \tag{11a}$$

$$= \int_{\Sigma} \left\{ \delta_e M + \frac{dM}{dn} \xi \cdot n + 2c(\xi \cdot n)M \right\} d\Sigma , \tag{11b}$$

$$\delta_2 I = \int_V \{ \delta_{21} L + 2\delta_{11} L \operatorname{div} \xi_1 + L(\operatorname{div} \xi_2 + (\operatorname{div} \xi_1)^2 - \operatorname{tr}(D\xi_1 \cdot D\xi_1)) \} dV , \tag{12}$$

où c est la courbure moyenne associée à l'orientation de n : $2c = \operatorname{tr}(D_{\Sigma} n)$ et où l'expression (11b) n'est valable que si Σ est fermée et si $\frac{dM}{dn}$ a un sens, c'est à dire si M peut être prolongé hors de Σ .

Preuve :

Par définition :

$$\delta I = \frac{d}{dt} \left\{ \int_{V_t} L(x(t),t) dV_t \right\}_{t=0} .$$

Or :

$$\frac{1}{h} \left\{ \int_{V_{t+h}} L(x(t+h),t+h) dV_{t+h} - \int_{V_t} L(x,t) dV_t \right\} = \int_{V_t} \left\{ \frac{L(x(t+h),t+h)(1+\theta(h)) - L(x,t)}{h} \right\} dV_t ,$$

où $\theta(h)$ est la dilatation volumique. Ainsi :

$$\theta \simeq \operatorname{div} (x(t+h) - x(t)) \text{ lorsque } h \rightarrow 0 ,$$

et donc :

$$\lim \frac{\theta(h)}{h} = \operatorname{div} (\xi) , \text{ lorsque } h \rightarrow 0 \text{ et } t = 0 .$$

On en déduit par passage à la limite dans la dernière expression que :

$$\delta I = \int_V \frac{dL}{dt} + L \operatorname{div}(\xi) dV = \int_V \delta_1 L + L \operatorname{div}(\xi) dV ,$$

puis utilisant que :

$$\delta_1 L = \delta_e L + \operatorname{grad} L \cdot \xi$$

et :

$$\operatorname{div}(\xi L) = \operatorname{grad} L \cdot \xi + L \operatorname{div}(\xi) ,$$

on est conduit à l'expression (10b).

Passons à la démonstration de (11a). D'une manière analogue à la démonstration précédente :

$$\delta J = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Sigma_t} \frac{1}{h} (M(x(t+h), t+h) (1 + \chi_t(h)) - M(x, t)) d\Sigma_t \right\}_{t=0}$$

où $\chi_t(h)$ est la déformation surfacique entre Σ_t et Σ_{t+h} .

$$\begin{aligned} \chi_t(h) &\simeq \operatorname{div}(x(t+h)-x(t)) - D_{n_t}(x(t+h)-x(t)) \cdot n_t \\ &= \operatorname{div}_{\Sigma_t}(x(t+h)-x(t))_{\Sigma} + 2c(x(t+h)-x(t)) \cdot n_t \text{ lorsque } h \rightarrow 0 . \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim \frac{\chi_t(h)}{h} = \text{div}_{\Sigma} \xi_{\Sigma} + 2c(\xi.n) = \text{div}(\xi) - D\xi(n).n \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0 \text{ et } x = 0.$$

On en déduit que :

$$\delta J = \int_{\Sigma} \delta_1 M + M(\text{div}_{\Sigma} \xi_{\Sigma} + 2c(\xi.n)) \, d\Sigma .$$

On obtient l'expression (11b) en utilisant, lorsque Σ est fermée, le théorème de Stokes et :

$$\delta_1 M = \delta_e M + \xi \cdot \text{grad} M ,$$

$$\text{div}_{\Sigma}(\xi_{\Sigma} M) = M \text{div}_{\Sigma} \xi_{\Sigma} + \xi_{\Sigma} \cdot \text{grad}_{\Sigma} M .$$

L'expression (12) s'obtient grâce à l'expression (10a) en tenant compte de la proposition 1. ■

2- Perturbations adiabatiques de la Terre autour d'une position d'équilibre en rotation uniforme.

Dans ce paragraphe nous établissons les équations usuellement utilisées en sismologie globale en insistant sur les conditions aux limites aux interfaces solide - fluide et sur les termes de précontraintes et nous donnons les formulations variationnelles associées. On pourra s'étonner que l'on ne perturbe pas les équations de Navier Stokes dans le noyau externe. Il est en effet communément admis que l'existence du champ magnétique est liée à une circulation dans le noyau externe (Elsasser (1946) , Le-Mouel (1984)). De plus le maintien du mouvement Chandlerien peut être lié à une telle circulation. Cela devrait nous conduire, en toute logique, à la considération des équations de la magnéto-hydrodynamique, mais ceci reste un objectif non encore atteint. Précisons simplement que la considération d'un écoulement stationnaire sera l'objet du paragraphe 4 et que les observations sismologiques conduisent à une estimation très élevée du facteur de qualité dans le noyau. Une prise en compte par perturbations des termes de viscosité semble alors suffisante.

Il faut enfin indiquer, à l'intention de ceux qui ne sont pas au fait de la Géophysique et de ses méthodes, que les observations sismologiques de surface ne permettent pas, en l'état actuel des choses, une résolution précise au delà de 1000 kilomètres de profondeur. Les écarts à un modèle moyen de Terre dans le noyau n'affectent donc que très peu la zone sismique du spectre et gardent encore un aspect spéculatif. Ceci explique que l'intérêt pour le noyau ne soit que très récent chez les spécialistes des modes propres de la Terre.

♠
Geophys. J. R. astr. Soc. (1986) **85**, 179–208

About the influence of pre-stress upon adiabatic perturbations of the Earth

Bernard Valette *Laboratoire de Sismologie, associé au CNRS no. 195, Institut de Physique du Globe de Paris, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05, France and ORSTOM, 24 rue Bayard, 75008 Paris, France*

Accepted 1985 September 16. Received 1985 September 16; in original form 1984 June 28

Summary. In this paper we examine the influence of the state of stress in the equilibrium configuration of the Earth (i.e. the pre-stress) upon its adiabatic perturbations. The equations governing these perturbations to the first order (Woodhouse & Dahlen; Dahlen) are re-derived using a Lagrangian approach. Different expressions of the sesquilinear form associated to the elastic-gravitational operator are given. One of these provides a way to extend to hydrostatically pre-stressed solids the criterion of local stability given by Friedman & Schutz for uniformly rotating fluids. Then the propagation in the Earth of seismic wavefronts is considered. It is shown that the nature of these different wavefronts is entirely determined by the quadratic coefficients of the development of the specific internal energy variation, corresponding to isentropic evolution, with respect to the Lagrangian finite deformation tensor. Expressions for the velocities of the various waves are given as functions of incidence angle and pre-stress for orthotropic elastic material. In the particular case where the elastic parameters depend only on one coordinate of a curvilinear system and the axis of orthotropy of the material coincides with the corresponding natural base vector, the elastodynamic equations are reduced to a simple system for a displacement stress vector, using surface operators. In particular for spherical geometry, equations are obtained which generalize to orthotropic pre-stress those given by Alterman *et al.* and Takeuchi & Saito.

Key words: anisotropy, gravito-elastodynamics, normal modes, perturbation, pre-stress

1 Introduction

Since at least Love (1911) it has been common to establish the first-order equations governing the adiabatic perturbations of the Earth by considering the Eulerian perturbations of the equilibrium configuration (see, e.g. Pekeris & Jarosh 1958; Dahlen 1972). Sections 2 and 3 review how these equations may be derived using a Lagrangian approach. Equation

(36) of the sesquilinear form associated with the elastic-gravitational operator may be used as a starting point for the mathematical definition and study of this operator. Equations (38) and (39) are perhaps less well known. In the hydrostatic case they allow the energy to be expressed as a quadratic form of the Eulerian perturbations of the various physical quantities, and thus local stability to be considered in a similar way to that used for perfect fluids (Friedman & Schutz 1978b).

It seems of some importance to introduce the tensor c^{ijkl} which arises naturally in the development of the specific internal energy variation. Section 4 shows indeed that this tensor determines the nature of the different seismic wavefronts.

Following Alterman, Jarosh & Pekeris (1959) and Takeuchi & Saito (1972), we show in Sections 5, 6 and 7 how the elastic-gravitational equations can be separated in the case of lateral invariance of the mechanical properties of the material. The hypothesis of orthotropy made by Takeuchi & Saito (1972) in spherical geometry is extended here to the pre-stress for more general stratifications. It is the broadest hypothesis which may be adopted in a global approach. Indeed the assumption of lateral invariance implies that the different elastic tensors are invariant under parallel displacements over the constitutive surfaces of the stratification. Thus, considering closed surfaces in a global approach, we are led to assume that these different tensors are at each point invariant under rotation around the direction normal to the stratification.

2 Preliminaries

Let us consider a deformable body which is in equilibrium in a Euclidean space E in which we introduce a convenient curvilinear coordinate system (x^i) with metric tensor g^{ij} . A deformation of this body from this reference configuration is defined at each instant by a map f_t :

$$\forall a \in V, a \rightarrow f_t(a) = x(a, t) = a + u(a, t) \in V_t,$$

where $u(a, t)$ is the Lagrangian displacement of the material point a , defined in the volume V , from its initial position to the corresponding one at t in the deformed volume V_t .

Let us denote F the linear tangent application of f_t at a , Du the Euclidian derivative mapping of u at (a, t) , e the Lagrangian finite deformation tensor and e the Eulerian one. F is an isomorphism of E , which is naturally defined from the tangent space $T_a(E)$ at point a on to the tangent space at the deformed point $x(a, t)$, $T_x(E)$; e and e may be considered as bilinear symmetrical forms on E (e is naturally defined on $T_a(E)$ and e on $T_x(E)$). In the local frame $(e_i)_{i=1,3}$ at point a , these different tensors are expressed by:

$$\begin{aligned} Du(e_q) &= D_q u^p e_p, & F^p{}_q &= g^p{}_q + D_q u^p, \\ \epsilon_{pq} &= D_p u_q + D_q u_p + D_p u^k D_q u_k, & e_{ij} &= (F^{-1})^p{}_i (F^{-1})^q{}_j \epsilon_{pq}. \end{aligned} \tag{1}$$

At each time the different expressions of virtual work result in an evaluation of (differential) linear forms on the field space of u . The virtual strain work is usually expressed as follows (see, e.g. Bamberger 1981; Malvern 1969; Truesdell 1972):

$$\delta W_S = \int_{V_t} T^{ij} \delta e_{ij} dV_t = \int_V \sigma^{pq} \delta \epsilon_{pq} dV, \tag{2}$$

where:

$$\delta e_{ij} = D_i \delta u_j + D_j \delta u_i, \quad \delta \epsilon_{pq} = F^i{}_p F^j{}_q \delta e_{ij}.$$

This defines the Cauchy stress tensor T and the (second) Piola–Kirchhoff stress tensor σ ,

linked to each other by:

$$\sigma^{pq} = (1 + \theta) \frac{\partial a^p}{\partial x^i} \frac{\partial a^q}{\partial x^j} T^{ij} = (1 + \theta) \{(F^{-1} \times F^{-1})(T)\}^{pq} \quad (3)$$

where \times denotes the tensorial product and $\theta = \det(F) - 1$ the volumetric dilatation which may be expressed up to the second order in Du as:

$$\theta = D_i u^i + \{(D_i u^i)^2 - D_i u^j D_j u^i\} / 2. \quad (4)$$

The Cauchy stress tensor is indeed directly related to the state of stress at each given point of the Euclidean space. The actual density force acting at the point considered on the element of surface of unit normal n is precisely $T(n)$. The state of stress in the equilibrium configuration is represented by $T_0 (= \sigma_0)$. This initial state of stress is called the pre-stress when considering the stress evolution during the perturbation of the equilibrium. In order to describe the perturbation of the different physical quantities, two approaches are usually adopted.

The first one corresponds to a Lagrangian description which consists of evaluating the perturbation from a given point in the reference configuration by following the considered material particle. One way to evaluate this Lagrangian perturbation is to follow the evolution in the frame strained by the field u (i.e. in considering co-moving coordinates, see Taub 1969 and Friedman & Schutz 1978a). In the case of the Cauchy stress tensor, one obtains in the local frame at reference point a :

$$\delta_i' T^{pq} = \{F^{-1} \times F^{-1}(T)\}^{pq} - T_0^{pq}.$$

Taking into account (3) and (4), this yields to the first order in Du :

$$\delta_i' T^{pq} = (\sigma - \sigma_0)^{pq} - \text{div}(u)\sigma^{pq}. \quad (5)$$

A more common way simply considers the evolution by following the particle in the embedding Euclidean space:

$$\delta_i T = T_{x_t} - T_0.$$

In the local frame at initial point a , this yields, taking into account (3):

$$\delta_i T^{pq} = \{F \times F(\sigma)\}^{pq} / (1 + \theta) - T_0^{pq}.$$

Thus one deduces from (1) and (4) that to the first order in Du :

$$\delta_i T^{pq} = (\sigma - \sigma_0)^{pq} - \sigma^{pq} \text{div}(u) + \sigma^{pk} D_k u^q + \sigma^{qk} D_k u^p. \quad (6)$$

The second point of view is the Eulerian one which consists of considering the evolution of the physical quantities in the local frame at a given point of the space. In the hypothesis of small displacement, that is to the first order in u , the Eulerian perturbation may be related to the Lagrangian ones as follows:

$$\delta_e T^{pq} = \delta_i T^{pq} - u^k D_k T^{pq}, \quad (7a)$$

and (Taub 1969; Friedman & Schutz 1978a):

$$\delta_e T^{pq} = \delta_i' T^{pq} - L_u T^{pq}, \quad (7b)$$

where L_u is the Lie derivative with respect to u (see, e.g. Choquet-Bruhat *et al.* 1982; Doubrovine *et al.* 1982):

$$L_u T^{pq} = u^k D_k T^{pq} - T^{pk} D_k u^q - T^{qk} D_k u^p, \quad -L_u g^{pq} = g^{pk} D_k u^q + g^{qk} D_k u^p.$$

The mechanical equation of motion (or virtual works principle, i.e. the stationarity of the total energy with respect to field u , at each instant) is usually written in Lagrangian form as

follows (see, e.g. Bamberger 1981; Malvern 1969; Marsden & Hughes 1978; Truesdell 1972):

$$D_p \{(1 \times F)(\sigma)\}^{pj} + \rho \Psi^l(x(a, t)) = 0 \quad \text{in } V, \quad (8a)$$

$$F^j_q \sigma^{qp} n_p = (1 + \chi) \Phi^j \quad \text{on } \partial V \text{ as well as on each interface,} \quad (8b)$$

where $\{(1 \times F)(\sigma)\}^{pj} = \sigma^{pq} F^j_q$ is the (first or Piola–Lagrange) Piola–Kirchhoff tensor, ρ the density in the reference configuration, Ψ the body force density, Φ the surface density of force acting on the actual deformed boundary and χ the surface dilatation of this boundary with respect to the initial configuration with outward unit normal n .

Equation (8a) has the disadvantage of being hybrid; this is due to the fact that the (first) Piola–Kirchhoff tensor works naturally on the product of the spaces tangent at a and at x : $T_a(E) \times T_x(E)$. In the coordinate point of view this means that the index j in (8) refers to $T_x(E)$ and the index p to $T_a(E)$. In order to obtain a purely Lagrangian formulation (i.e. on $T_a(E)$ exclusively) one may multiply (8a) by $(F^{-1})^l_j$. Indeed summing up j indices leads to:

$$D_p \sigma^{pl} + \sigma^{pq} (F^{-1} D_p F)^l_q + \rho F^{-1} (\Psi)^l = 0,$$

which to the first order in Du , D^2u and with the help of (1) yields:

$$D_p \sigma^{pl} + \sigma^{pq} D_p D_q u^l + \rho \{\Psi - Du(\Psi)\}^l = 0.$$

Taking into account the equilibrium of the initial configuration, that is:

$$D_p \sigma_0^{pl} + \rho \Psi_0^l = 0 \quad \text{in } V (\sigma_0(n) = \Phi_0 \text{ on } \partial V), \quad (9)$$

one finally deduces:

$$D_p \{(\sigma - \sigma_0)^{pl} + \sigma_0^{pq} D_q u^l\} + (\sigma - \sigma_0)^{pq} D_p D_q u^l + \rho \{(\Psi - \Psi_0) - Du(\Psi - \Psi_0)\}^l = 0 \quad \text{in } V, \quad (10)$$

which constitutes the Lagrangian formulation of the equation governing to the first order the perturbation inside the body.

Taking into account (3) and the expression of the outward unit vector n_t normal to the deformed boundary as a function of its analogue n in the reference configuration:

$$n_t = \frac{1 + \theta}{1 + \chi} (F^{-1})^*(n),$$

where the asterisk denotes the adjoint operator with respect to the Euclidean structure, it is clear that equation (8b) is equivalent to the Eulerian formulation:

$$T(n_t) = \Phi. \quad (11)$$

Anyway, denoting by a dot the Euclidean scalar product in E , one obtains to the first order in Du :

$$\chi = \text{div}(u) - Du(n) \cdot n \quad (12a)$$

$$n_t = n - Du^*(n) + \{Du(n) \cdot n\}n \quad (12b)$$

and from (3), (4) and (8b) or (11):

$$T(n_t) = \{1 - \text{div}(u) + Du(n) \cdot n\} \sigma(n) + Du\{\sigma(n)\} = \Phi. \quad (12c)$$

3 The different forms of the equations governing to the first-order adiabatic perturbations of the Earth

Let us suppose that the Earth is in equilibrium under uniform rotation with instantaneous rotation vector Ω about its centre of mass G . As usual, we take this rotating space, centred at G , as the Lagrangian reference space. The fact that this reference configuration does not correspond to a physical state, because of the existence of tidal forces, needs to be pointed out. However, such an abstract configuration has the advantage of representing a mean thermodynamical state of the Earth which should not differ much from the real one.

3.1 CONSTITUTIVE EQUATIONS AND INTERNAL ENERGY

Adopting a purely elastic behaviour for the solid parts of the Earth V_S and a perfectly fluid rheology for the external core V_F leads, to the first order in Du for any adiabatic perturbations of the equilibrium, to the following expressions in the local frame attached to the reference point a (see Appendix 1):

$$(\sigma - \sigma_0)^{ij} = c^{ijkl} D_k u_l \quad \text{in } V_S, \quad (13a)$$

$$\delta_l T^{ij} = (T - T_0)^{ij} = -g^{ij} \delta_l p = p_0 \gamma \operatorname{div}(u) g^{ij} \quad \text{in } V_F, \quad (13b)$$

where $\gamma (= \rho/p_0 (\partial p / \partial \rho)_R)$ is the adiabatic index of the fluid and c^{ijkl}/ρ are the quadratic coefficients in the development of the specific internal energy variation, corresponding to an isentropic evolution, with respect to the finite deformation tensor. Thus the tensor c^{ijkl} has the following symmetries:

$$c^{ijkl} = c^{klij} = c^{jikl} = c^{ijlk}. \quad (14)$$

It may be of interest to note that whereas an Eulerian description seems well suited to the fluid case, it is the second Piola–Kirchhoff tensor which naturally appears from the thermodynamical principles in the case of a solid (see Bamberger 1981; Malvern 1969). But, as a matter of fact, the constitutive equation of a perfect fluid may be regarded as a particular form of that of a solid. Indeed, from (13a), (5), (6) and (7) it is deduced to the first order in Du :

$$\delta_l' T^{ij} = c^{ijkl} D_k u_l - \sigma_0^{ij} \operatorname{div}(u) \quad (15a)$$

$$\delta_l T^{ij} = d^{ijkl} D_k u_l \quad (15b)$$

$$\delta_e T^{ij} = d^{ijkl} D_k u_l - u^k D_k \sigma_0^{ij} \quad (15c)$$

with:

$$d^{ijkl} = c^{ijkl} - \sigma_0^{ij} g^{kl} + \sigma_0^{ik} g^{jl} + \sigma_0^{jk} g^{il}. \quad (16)$$

It is then clear, by comparison with (13b), that in the case of a perfect fluid:

$$\sigma_0^{ij} = -p_0 g^{ij}, \quad c^{ijkl} = p_0 (\gamma - 1) g^{ij} g^{kl} + p_0 (g^{ik} g^{jl} + g^{jk} g^{il}).$$

The tensor d^{ijkl} contains the symmetries (14) in the case of an hydrostatic pre-stress. This tensor has been adopted by Takeuchi & Saito (1972) in order to represent elasticity. The tensor d^{ijkl} , however, no longer has these symmetries in the case of anisotropic pre-stress. Dahlen (1972) and Woodhouse & Dahlen (1978) have adopted as reference tensor the orthogonal projection of d^{ijkl} (with respect to the usual scalar product: $t \cdot t' = t^{ijkl} t'_{ijkl}$) on to the space of tensors characterized by the symmetries (14).

As the evolution is supposed adiabatic, the variation δI of the internal energy is nothing else but the opposite of the work of the interior forces. That is, the strain work minus the mutual work W_M due to slipping at interfaces or to non-local actions as gravitational effects (the variation of gravitational potential energy may be also considered separately); thus (see Appendix 1):

$$\delta I = \int_V \delta_i i \, dm - W_M \quad (17a)$$

where $\delta_i i$ is the Lagrangian perturbation of the specific internal energy which is expressed up to the second order in Du as:

$$\rho \delta_i i = \sigma_0^{ij} D_i u_j + \frac{1}{2} (c^{ijkl} + \sigma_0^{ik} g^{jl}) D_i u_j D_k u_l. \quad (17b)$$

If we consider a free evolution in the neighbourhood of the reference state of the Earth, considered as a closed system, the forces reduce to inertia and gravitation:

$$\delta_i \Psi = \Psi(x) - \Psi_0(a) = g'(x) - g_0'(a) - 2\Omega \times \partial_t u - \partial_{tt}^2 u \quad (18)$$

where g' is the gravity field:

$$g'(x) - g_0'(a) = g(x) - g_0(a) - \Omega \times (\Omega \times u),$$

$$g(x) - g_0(a) = G \int_V \left\{ \frac{x' - x}{|x' - x|^3} - \frac{a' - a}{|a' - a|^3} \right\} dm', \quad dm = \rho dV,$$

and G the universal gravitational constant.

In the hypothesis that the domain V_t remains contractible (i.e. without hole), we deduce to the first order in u :

$$g - g_0 = G \int_V \left\{ \frac{u' - u}{|a' - a|^3} - 3(a' - a) \frac{(a' - a) \cdot (u' - u)}{|a' - a|^5} \right\} dm', \quad (19a)$$

where u' represents $u(a')$.

This yields the usual expression:

$$g - g_0 = \text{grad}(\psi + u \cdot g_0) - Du^*(g_0) = Dg_0(u) + \delta_e g = Dg_0(u) + \text{grad} \psi, \quad (19b)$$

where:

$$\psi = -G \int_V \frac{(a' - a) \cdot u'}{|a' - a|^3} dm' = -G \int_V \frac{\text{div}(\rho' u')}{|a' - a|} dV' - G \int_{\Sigma_\rho} \frac{[\rho'] u' \cdot n'}{|a' - a|} d\Sigma'.$$

Here Σ_ρ consists of all the surfaces of discontinuity of ρ and $[\rho]$ denotes the jump of ρ through Σ_ρ in the direction of n . ψ is the potential of mass redistribution which verifies (in the sense of distribution over E):

$$\Delta \psi = 4\pi G \text{div}(\rho u). \quad (20)$$

Thus the traces of $(\text{grad} \psi - 4\pi G \rho u) \cdot n$ on both sides of each interface are identical, as well as that of ψ .

The variation of gravitational potential energy is:

$$\delta P = -\frac{G}{2} \int_{V \times V} \left\{ \frac{1}{|x' - x|} - \frac{1}{|a' - a|} \right\} dmdm',$$

and a second-order development yields:

$$\begin{aligned} \delta P &= - \int_V u \cdot g_0 \, dm + \frac{G}{4} \int_{V \times V} \left\{ \frac{|u' - u|^2}{|a' - a|^3} - 3 \frac{\{(a' - a) \cdot (u' - u)\}^2}{|a' - a|^5} \right\} \, dmdm' \\ &= - \int_V u \cdot \frac{g + g_0}{2} \, dm. \end{aligned} \quad (21)$$

3.2 LAGRANGIAN AND EULERIAN FORMULATIONS OF ELASTODYNAMIC EQUATIONS OF THE EARTH

Making use of (13a), equation (10) may be rewritten to the first order in Du , D^2u :

$$\partial_{tt}^2 u + 2\Omega \times \partial_t u + A(u) = 0 \quad \text{in } V, \quad (22)$$

where the operator A is defined by:

$$A(u)^j = - \frac{1}{\rho} D_i \tau^{ij} - \{g - g_0 - \Omega \times (\Omega \times u)\}^j \quad (23a)$$

with:

$$\begin{aligned} \tau^{ij} &= (c^{ijk} + \sigma_0^{ik} g^jl) D_k u_l \\ D_i \sigma_0^{ij} + \rho \{g_0 - \Omega \times (\Omega \times a)\}^j &= 0, \end{aligned} \quad (23b)$$

and where $g - g_0$ is given by (19), to the first order in u .

These equations correspond to those given by Woodhouse & Dahlen (1978) and constitute the Lagrangian formulation of the elastodynamic equations inside the Earth.

Taking into account expressions (15c, 16) of the Eulerian perturbation of the Cauchy stress tensor, we may deduce from (23):

$$A(u)^j = - \frac{1}{\rho} \{ D_i \delta_e T^{ij} - g_0^j \operatorname{div}(\rho u) + \rho (\operatorname{grad} \psi)^j \}, \quad (24a)$$

that is:

$$A(u)^j = - \frac{1}{\rho} \delta_e (D_i T^{ij} + \rho g_0^j). \quad (24b)$$

This shows that equation (22) may be obtained to the first order in u , Du , D^2u at each inner point of the reference configuration V , as the Eulerian perturbation of the equilibrium equation. This approach, which has been adopted by Takeuchi & Saito (1972) in the hydrostatic case and by Dahlen (1972) in the general case, leads to:

$$\begin{aligned} \rho \partial_{tt}^2 u^j + 2\rho (\Omega \times \partial_t u)^j - D_i (d^{ijk} D_k u_l - u^k D_k \sigma_0^{lj}) + \operatorname{div}(\rho u) g_0^j \\ - \rho (\operatorname{grad} \psi)^j = 0 \quad \text{in } V, \end{aligned} \quad (25)$$

where the expression of d^{ijk} is given in (16), and constitutes the Eulerian form of the elastodynamic equations inside the Earth. It may be of some interest to note that this Eulerian interpretation of the elastodynamic equations in the reference configuration fails at boundaries, unless they are assumed undeformable.

3.3 BOUNDARY CONDITIONS

The usual hypothesis that the domain V_r remains contractible implies that at each inner interface, assumed to be closed and regular, the different parts V_{r+} , V_{r-} remain in contact. This yields, to the first order, $u \cdot n$ continuous across the reference interface:

$$[u] \cdot n = u_+ \cdot n - u_- \cdot n = 0, \quad (26)$$

where n is the unit normal in the reference configuration, oriented in the direction of the jump (i.e. from V_- toward V_+).

Taking into account (13a) it is deduced from boundary conditions (9), (12c) that to the first order in u , Du , (Dahlen 1972):

$$[T(n_r)] = [\delta_I \{T(n)\}] = D\{\sigma_0(n)\}[u],$$

and thus:

$$[(\sigma - \sigma_0)(n) + Du\{\sigma_0(n)\} - \{\text{div}(u) - Du(n) \cdot n\}\sigma_0(n)] = D\{\sigma_0(n)\}[u]. \quad (27)$$

Apart from eventual source areas, the solid interfaces are usually considered as welded. Therefore, the boundary conditions on these interfaces are:

$$[u] = 0, \quad [(\sigma - \sigma_0)(n) + Du\{\sigma_0(n)\} - \{\text{div}(u) - Du(n) \cdot n\}\sigma_0(n)] = 0. \quad (28)$$

Let us consider $\tau^*(n)$, (see 23b):

$$\tau^*(n) = (\sigma - \sigma_0)(n) + Du\{\sigma_0(n)\}, \quad (29)$$

and $\tau'^*(n)$ defined by:

$$\tau'^*(n) = (\sigma - \sigma_0)(n) + Du\{\sigma_0(n)\} + Du^*\{\sigma_0(n)\} - \text{div}(u)\sigma_0(n). \quad (30)$$

From (12) and (13a) and to the first order in Du , it is clear that:

$$\tau^*(n) = (1 + \chi)T(n_r) - \sigma_0(n). \quad (31)$$

Considering expressions (15b) and (16) one deduces that $\tau'^*(n)$ coincides with $(\delta_I T)(n)$ if the pre-stress is hydrostatic. In the general case, however:

$$\tau'^*(n) = (\delta_I T)(n) - \sigma_0\{Du^*(n)\} + Du^*\{\sigma_0(n)\},$$

that is:

$$\tau'^*(n)^i = \tau'^{ij}n_j, \quad (32a)$$

with:

$$\tau'^{ij} = \tau^{ij} + \sigma_0^{ll}g^{jk}D_k u_l - \text{div}(u)\sigma_0^{ij}. \quad (32b)$$

In terms of these vectors, (28) may be rewritten:

$$[u] = 0, \quad [\tau^*(n)] = 0 \quad \text{or} \quad [\tau'^*(n)] = \{\sigma_0(n) \cdot [Du(n)]\}n - \{n \cdot [Du(n)]\}\sigma_0(n). \quad (33)$$

(Note that the latter term is null if n is an eigendirection of σ_0 .)

At the external boundary ∂V , neglecting atmospheric pressure, it is easily deduced from (9) and (12c) that:

$$\sigma_0(n) = \tau^*(n) = \tau'^*(n) = 0, \quad (34)$$

where n represents the unit outward normal to ∂V .

At an inner interface Σ where a fluid is involved:

$$\sigma_0(n) = -p_0 n.$$

From (26), (27), (29), (30) it is deduced in Appendix 2 that the boundary conditions may take the following forms (equivalent to the one given by Woodhouse & Dahlen 1978):

$$\begin{aligned} [u] \cdot n = 0, [\tau^*(n)] &= -n \operatorname{div}_\Sigma(p_0[u]) - p_0 W[u] \\ &= -n \operatorname{div}_\Sigma(p_0[u]) + p_0 [Du^*(n) - \{Du(n) \cdot n\}n], \end{aligned} \quad (35a)$$

$$[u] \cdot n = 0, [\tau'^*(n)] = -([u] \cdot \operatorname{grad}_\Sigma p_0)n. \quad (35b)$$

Here $\operatorname{div}_\Sigma$ and $\operatorname{grad}_\Sigma$ are the usual surface operators, with:

$$\operatorname{div} u = \operatorname{div}_\Sigma \{u - (u \cdot n)n\} + Du(n) \cdot n + (c_1 + c_2)u \cdot n,$$

$$\operatorname{grad} p_0 = \operatorname{grad}_\Sigma p_0 + (\operatorname{grad} p_0 \cdot n)n,$$

where c_1 and c_2 are the principal curvatures of Σ at the considered point, i.e. the eigenvalues of the Weingarten operator W which is the self-adjoint operator defined on the space tangent at Σ , $T_a(\Sigma)$, by:

$$\forall v \in T_a(\Sigma) \quad W(v) = D_v(n) \in T_a(\Sigma).$$

Note that when pre-stress is hydrostatic on both sides of the interface and ρ is discontinuous across it, the equilibrium of the reference configuration yields easily that the right side of (35b) vanishes.

3.4 SESQUILINEAR FORM ASSOCIATED TO OPERATOR A AND LOCAL STABILITY

From these boundary conditions it may be deduced that A is a symmetric unbounded operator in $L^2_C(V, dm)$. Indeed, from Appendix 3:

$$\begin{aligned} (A(u)|v) &= \int_V (c^{ijkl} + \sigma_0^{ik} g^{jl}) D_i u_j D_k \bar{v}_l + \rho \{(\Omega \cdot u)(\Omega \cdot \bar{v}) - \Omega^2 u \cdot \bar{v}\} dV \\ &+ \frac{G}{2} \int_{V \times V} \left\{ \frac{(u' - u) \cdot (\bar{v}' - \bar{v})}{|a' - a|^3} - 3 \frac{\{(a' - a) \cdot (u' - u)\} \{(a' - a) \cdot (\bar{v}' - \bar{v})\}}{|a' - a|^5} \right\} dmdm' \\ &+ \int_\Sigma p_0 \{ [u] \cdot \operatorname{grad}_\Sigma(\bar{v} \cdot n) + [\bar{v}] \cdot \operatorname{grad}_\Sigma(u \cdot n) \\ &- [W(u - (u \cdot n)n) \cdot \{\bar{v} - (\bar{v} \cdot n)n\}] \} d\Sigma, \end{aligned} \quad (36)$$

where $(|)$ denotes the inner product of $L^2_C(V, dm)$:

$$(|) = \int_V \cdot \bar{} dm,$$

Σ consists of all interfaces where a fluid is involved and $\bar{}$ denotes complex conjugation. The integration over $V \times V$ involved in the second term of (36) is due to the non-local character of mass redistribution effects. In order to avoid this term, the potential of mass redistribution ψ is usually introduced via (19b) (Pekeris & Jarosh 1958). However ψ must then be constrained by equation (20). Adopting a variational approach, one may (Backus & Gilbert 1967; Johnson & Smylie 1977; Woodhouse & Dahlen 1978) use the method of Lagrange multipliers in order to derive an unconstrained stationary problem related to the operator A .

The integration over Σ corresponds to the mutual work caused by slipping at interfaces Σ . More precisely, considering a real evolution u , expressions (17) and (21) yield:

$$\delta I = \int_V (\sigma_0^{ij} D_i u_j - \rho g_0 \cdot u) dV + \frac{G}{4} \int_{V \times V} \left\{ \frac{|u' - u|^2}{|a' - a|^3} - 3 \frac{\{(a' - a) \cdot (u' - u)\}^2}{|a' - a|^5} \right\} dmdm' \\ + \frac{1}{2} \int_V (c^{ijkl} + \sigma_0^{ik} g^{jl}) D_i u_j D_k u_l dV + \int_0^t dt \int_{\Sigma} [(1 + \chi_t) T(n_t) \cdot \partial_t u] d\Sigma,$$

with the unit normal n to Σ oriented in accordance with the jump.

From relation (31) and Appendix 3, we deduce:

$$\int_0^t dt \int_{\Sigma} [(1 + \chi_t) T(n_t) \cdot \partial_t u] d\Sigma = \int_0^t dt \int_{\Sigma} [(\sigma_0(n) + \tau^*(n)) \cdot \partial_t u] d\Sigma \\ = \int_{\Sigma} p_0 \{ [-u] \cdot n + [u] \cdot \text{grad}_{\Sigma}(u \cdot n) - [W\{u - (u \cdot n)n\} \cdot \{u - (u \cdot n)n\}] / 2 \} d\Sigma,$$

and finally, taking into account the equilibrium of the reference state (23b):

$$\delta I = \frac{1}{2} \left\{ A(u) | u \right\} + \int_V \{ |\Omega \times (a + u)|^2 - |\Omega \times a|^2 \} dm \quad (37)$$

But other expressions of $(A(u) | u)$ may be obtained for which the surface integral term is very simple or cancels. Indeed, as derived in Appendix 4:

$$(A(u) | u) = \int_V \{ [c^{ijkl} - \sigma_N g^{ij} g^{kl} + \sigma_0^{ik} g^{jl} + \sigma_N g^{il} g^{jk}] D_i u_j D_k \bar{v}_l + S \{ -\rho D g_0' u \cdot \bar{v} \\ + (D \bar{v}(u) - u \text{div}(\bar{v})) \cdot \text{grad} \sigma_N \} \} dV - \int_E \frac{\text{grad} \psi(u) \cdot \text{grad} \psi(\bar{v})}{4\pi G} dV \\ - \int_{\Sigma} S \{ (u \cdot n) [\bar{v}] \cdot \text{grad}_{\Sigma} p_0 \} d\Sigma, \quad (38a)$$

and also:

$$(A(u) | u) = \int_V \{ [c^{ijkl} - \sigma_N g^{ij} g^{kl} + \sigma_0^{ik} g^{jl} + \sigma_N g^{il} g^{jk}] D_i u_j D_k \bar{v}_l + S \{ 2 \rho g_0' \cdot u \text{div}(\bar{v}) \\ + (g_0' \cdot u) (\bar{v} \cdot \text{grad} \rho) + (\text{grad} \sigma_N + \rho g_0') (D \bar{v}(u) - u \text{div}(\bar{v})) \} \} dV \\ - \int_E \frac{\text{grad} \psi(u) \cdot \text{grad} \psi(\bar{v})}{4\pi G} dV + \int_{\Sigma} S \{ (\bar{v} \cdot n) [u \cdot (\rho g_0' - \text{grad}_{\Sigma} p_0)] \} d\Sigma \\ + \int_{\Sigma'} S \{ [\rho] (g_0' \cdot u) (\bar{v} \cdot n) \} d\Sigma, \quad (38b)$$

where Σ is comprised as in (36) of all interfaces where a fluid is involved and Σ' of all welded interfaces. $S \{ \}$ denotes the symmetric part:

$$S\{a(u, v)\} = \{a(u, v) + \overline{a(v, u)}\} / 2,$$

and here σ_N is any regular scalar function the value of which is $-p_0$ in V_F and 0 on ∂V . Under the common assumption that the interfaces belong to a regular family of surfaces we may choose $\sigma_N = \sigma_0(n) \cdot n$, where n is here the unit normal to the surface of the family at the considered point.

In the hydrostatic case with the choice $\sigma_N = -p_0$, (38a) yields:

$$(A(u)|v) = \int_V d^{ijkl} D_l u_j D_k \bar{v}_l + \rho S \{u \cdot g'_0 \operatorname{div}(\bar{v}) - \bar{v} \cdot \operatorname{grad}(u \cdot g'_0)\} dV \\ - \int_E \frac{\operatorname{grad} \psi(u) \cdot \operatorname{grad} \psi(\bar{v})}{4\pi G} dV - \int_\Sigma S \{(u \cdot n) [\bar{v}] \cdot \operatorname{grad}_\Sigma p_0\} d\Sigma. \quad (39a)$$

Also, with the use of (15c) it is easy to see that (38b) reduces to:

$$\{A(u)|v\} = \int_V \left\{ (\delta_e T_u)_{ij} (d^{-1})^{ijkl} (\delta_e T_{\bar{v}})_{kl} + \frac{u \cdot g'_0 \bar{v} \cdot g'_0}{|g'_0|^2} \{ \operatorname{grad} \rho - \rho^2 (d^{-1})^{i,k} g'_0 \} \cdot g'_0 \right\} dV \\ - \int_E \frac{(\delta_e g_u) (\delta_e g_{\bar{v}})}{4\pi G} dV + \int_{\Sigma_\rho} [\rho] (g'_0 \cdot n) (u \cdot n) (\bar{v} \cdot n) d\Sigma. \quad (39b)$$

The latter expression provides a way to extend the criterion of local stability (Friedman & Schutz 1978b) to hydrostatically pre-stressed solids. Indeed relation (15b) shows that it is possible to select the Cauchy stress tensor T and the specific entropy h as state variables in order to describe to the first order the elastic evolution around an hydrostatic configuration. Then, supposing the evolution is isentropic ($\delta_l h = 0$) leads to:

$$\delta_l \rho = -\rho \operatorname{div}(u) = -\rho \operatorname{tr}(d^{-1}(\delta_l T)),$$

so that, for an arbitrary evolution:

$$\delta_l \rho = -\rho \operatorname{tr}(d^{-1} \delta_l T) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_T \delta_l h.$$

Applying this relation to Eulerian perturbations, we deduce:

$$\delta_e \rho = -\operatorname{div}(\rho u) = -\rho \operatorname{tr}(d^{-1} \delta_e T) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_T \delta_e h,$$

and finally, with (15c) in the case of an isentropic evolution:

$$\delta_e h = - \left(\frac{\partial h}{\partial \rho} \right)_T \{ \operatorname{grad} \rho - \rho^2 (d^{-1})^{i,k} g'_0 \} \cdot u = -\operatorname{grad} h \cdot u.$$

This shows that:

$$\operatorname{grad} h = \left(\frac{\partial h}{\partial \rho} \right)_T \{ \operatorname{grad} \rho - \rho^2 (d^{-1})^{i,k} g'_0 \} \parallel g'_0 \quad (\operatorname{grad} \rho \parallel g'_0).$$

and therefore that the second term of the right side of (39b) is proportional to the product of Eulerian perturbations of specific entropy.

If we consider now an evolution with viscosity, say Newtonian, instead of (22) the real displacement verifies:

$$\partial_{tt}^2 u + 2\Omega \times \partial_t u + A(u) = -B(\partial_t u) \quad (40)$$

where B is a positive self-adjoint operator. $(B(\partial_t u) | \partial_t u)$ represents the power of viscous irreversibility, i.e. the rate of entropy increase.

Let us now introduce, after Friedman & Schutz (1978b), the canonical energy $E_{C,R}$ (canonical with respect to the symplectic structure related to equation (22)):

$$E_{C,R} = \{(A(u) | u) + (\partial_t u | \partial_t u)\} / 2.$$

Then, formally, it is straightforward from (40) that:

$$\partial_t E_{C,R} = - (B(\partial_t u) | \partial_t u) < 0. \tag{41}$$

So that, in order to ensure stability, it must necessarily be assumed that A is positive in the space of displacements orthogonal to uniform translations. That is the space of kinematically admissible displacements satisfying the constraint that the reference space is centred at G : $\int u dm = 0$. (The fact that in the presence of other celestial bodies, the trajectory of G is not uniform contributes simply to tidal forces in the reference space, see Wahr (1981).) Indeed, let us suppose that A is not positive in this space. Then it would be possible to find a kinematically admissible displacement u_0 such that: $(A(u_0) | u_0) < 0$. Adopting this displacement with $(\partial_t u)_0 = 0$ as initial conditions of the evolution problem (40), it would follow by integration of (41):

$$-(A(u) | u) > -(A(u_0) | u_0) > 0.$$

But (40) yields also:

$$-(A(u) | u) = (\partial_{tt}^2 u | u) + 2\Omega \cdot \int_V u \times \partial_t u \, dm + (B(\partial_t u) | u).$$

Thus it would be impossible that u converges and that $\partial_t u$ and $\partial_{tt}^2 u$ vanish for the topology of $H^1(V_S U V_F)$. Indeed, since the form $(B \cdot | \cdot)$ is continuous for this topology in the case of Newtonian viscosity, $-(A(u) | u)$ would tend to zero. This clearly contradicts asymptotic stability.

Consider now local conditions and thus displacements with support in the vicinity of a given point. In the case of a fluid, the independence of $\delta_e p$ and $\delta_e h$ leads us to assume (see expression (39b) for $(A(u) | u)$) that:

$$g'_0 \cdot \text{grad } \rho > \rho^2 (d^{-1})^i_k g'_0{}^k. \tag{42}$$

This is the generalized Schwarzschild criterion for uniformly rotating fluids (Friedman & Schutz 1978b). In the case of a solid, $\delta_e T$ and $\delta_e h$ may no longer be fixed independently in the neighbourhood of a point. However, for a negative value of $g'_0 \cdot (\text{grad } \rho - \rho^2 (d^{-1})^i_k g'_0{}^k)$ instability arises if the tensor d^{ijkl} is sufficiently close to the direction of $g^{ij} g^{kl}$. For instance, in the isotropic case, given a value of the bulk modulus ($\kappa = \lambda + 2\mu/3$) and a negative value of:

$$\text{grad } \rho - \rho^2 (d^{-1})^i_k g'_0{}^k \cdot g'_0 = \{ \text{grad } \sqrt{\rho^2 g'_0 / \kappa} \} \cdot g'_0,$$

there is a critical value of the rigidity (μ) under which local instability appears.

4 Pre-stress and seismic wavefronts

The influence of pre-stress upon plane wave propagation in homogeneous media has been already investigated in geophysical literature (see, e.g. Nikitin & Chesnokov 1981). Here we will examine a related problem: how the pre-stress affects seismic wavefront propagation, and thus travel-time analysis. Following Hadamard (1903) (see also Bamberger 1981;

Truesdell 1972; Vlaar 1968) let us consider an acceleration wavefront, that is a travelling surface S_f across which the relative acceleration admits a jump: $s = [\partial_{rt}u]$. Then it may be deduced (Hadamard lemma) that the second-order spatial derivative of u also admits a discontinuity across the front: $[D_i D_j u] = n_i n_j^s / U^2$, where n is the unit normal vector to the surface S_f representing the wavefront with normal velocity U in the reference configuration.

In order to obtain the eigenvalue problem which governs the polarization and the velocity of these fronts at a given point of the reference configuration, the jump operator has to be applied to equations (23) or (25). Taking into account the regularity of u , Du and $g - g_0$, this yields at a point where the different elastic parameters are regular:

$$M^i_j s^j = \rho U^2 s^i, \text{ with } M^{ij} = c^{kijl} n_k n_l + g^{ij} \sigma_0^{kl} n_k n_l = d^{kijl} n_k n_l. \quad (43)$$

Thus it is clear that the polarization of the different acceleration waves corresponds to the different eigendirections of the symmetrical tensor $c^{kijl} n_k n_l$. Therefore it is in fact c^{ijkl} which determines the nature of the seismic fronts in the Earth. If c^{ijkl} is isotropic only P - and S -wavefronts exist and the influence of pre-stress anisotropy manifests itself only in the eigenvalues of (43), i.e. is confined to the dependence of the velocity of the wavefronts on their incidence. The importance of this anisotropy is thus related to the ratio between the usual Lamé parameters and the pre-stress deviator. Considering the maximum order of magnitude generally adopted for the latter in the lithosphere, a major effect is not to be expected (probably less than 1 per cent in velocity anisotropy).

In the case where c^{ijkl} is anisotropic, the velocities corresponding to the three kinds of fronts are affected by both c^{ijkl} and σ_0^{ij} . More precisely, let us assume that the anisotropy of c^{ijkl} is sufficiently weak to permit a (mathematical) perturbation approach (see Backus 1970), to the eigenvalue problem (43). Denoting λ' and μ' the Lamé coefficients of the orthogonal projection of c^{ijkl} on to the isotropic tensors space:

$$c^{ijkl} = \lambda' g^{ij} g^{kl} + \mu' (g^{ik} g^{jl} + g^{jk} g^{il}) + \delta^{ijkl},$$

it follows, in the case of quasi-compressional wavefronts:

$$\begin{aligned} \rho U_{QP}^2 &= \lambda' + 2\mu' + \sigma_0^{ij} n_i n_j + \delta^{ijkl} n_i n_j n_k n_l \\ &= \sigma_0^{ij} n_i n_j + c^{ijkl} n_i n_j n_k n_l (= d^{ijkl} n_i n_j n_k n_l). \end{aligned} \quad (44)$$

Thus only a weak inference upon the deviatoric part of the state of stress may be expected from the knowledge of quasi-compressional wavefront velocity as a function of incidence.

The problem of determining 'inherent' anisotropy of the material, i.e. that which is related to the inner structure of material, independently of the state of stress, has been investigated by Nikitin & Chesnokov (1981). They have proposed an evaluation of the change of the quadratic adiabatic elastic parameters c^{ijkl} related to the deviatoric part of the pre-stress.

5 The orthotropic material case

Let us now consider in more detail the case where at each solid point the material is orthotropic (or transversely isotropic), that is its mechanical properties are invariant under rotation around a given axis. This results in supposing that c^{ijkl} and σ_0^{ij} are both orthotropic with respect to the same axis (the hypothesis for σ_0^{ij} is not essential in this section). Moreover let us suppose that it is possible to choose, at least locally, a curvilinear coordinate system such that at each point the vector of the natural basis e_1 , associated to the first

coordinate, corresponds to this axis of orthotropy and is orthogonal to the other two vectors of the basis which will be referred to by a Greek index: $(e_\alpha) \alpha = 2, 3$.

Let η_{ij} be the linearized deformation tensor: $\eta_{ij} = (D_i u_j + D_j u_i)/2$. For any rotation of axis e_1 , η has five linearly independant invariants of second order. It is usual to choose:

$$(\eta^2_2 + \eta^3_3)^2, (\eta^1_1)^2, \eta^1_1(\eta^2_2 + \eta^3_3), \eta^1_2\eta^2_1 + \eta^1_3\eta^3_1, \eta^2_3\eta^3_2 - \eta^2_2\eta^3_3.$$

Thus supposing c^{ijkl} orthotropic yields:

$$c^{ijkl}\eta_{ij}\eta_{kl} = A'(\eta^2_2 + \eta^3_3)^2 + C'(\eta^1_1)^2 + 2F'\eta^1_1(\eta^2_2 + \eta^3_3) + 4L'(\eta^1_2\eta^2_1 + \eta^1_3\eta^3_1) + 4N'(\eta^2_3\eta^3_2 - \eta^2_2\eta^3_3). \quad (45)$$

Considering an adiabatic evolution and taking into account (13a) we deduce from (45) to the first order in Du :

$$\sigma^{\alpha\beta} = \sigma_0^{\alpha\beta} + \{(A' - 2N')\eta^\gamma_\gamma + F'\eta^1_1\} g^{\alpha\beta} + 2N'\eta^{\alpha\beta}, \quad \sigma^{\alpha 1} = \sigma_0^{\alpha 1} + 2L'\eta^{\alpha 1}, \quad \sigma^{11} = \sigma_0^{11} + F'\eta^\gamma_\gamma g^{11} + C'\eta^{11}. \quad (46)$$

Substituting these expressions into (23b) leads to:

$$\begin{aligned} \tau^{\alpha\beta} &= \{(A' - 2N')D_\gamma u^\gamma + F'D_1 u^1\} g^{\alpha\beta} + N'g^{\beta\gamma}D_\gamma u^\alpha + (N' + \sigma_T)g^{\alpha\gamma}D_\gamma u^\beta, \\ \tau^{\alpha 1} &= (L' + \sigma_T)g^{\alpha\beta}D_\beta u^1 + L'g^{11}D_1 u^\alpha, \quad \tau^{1\alpha} = L'g^{\alpha\beta}D_\beta u^1 + (L' + \sigma_N)g^{11}D_1 u^\alpha, \\ \tau^{11} &= g^{11} \{F'D_\gamma u^\gamma + (C' + \sigma_N)D_1 u^1\}, \end{aligned} \quad (47)$$

where $\sigma_N = \sigma_0^1_1, \sigma_T = \sigma_0^2_2 = \sigma_0^3_3$.

Thus it may be deduced that the eigenvalue problem (43) takes the form:

$$M^i_j s^j = \rho U^2 s^i, \quad \text{with } M^i_j = P^i_j + (\sigma_0^{kl} n_k n_l) g^i_j \text{ and} \quad (48)$$

$$P = \begin{pmatrix} C'n^1 n_1 + L'(n^2 n_2 + n^3 n_3) & (F' + L')n^1 n_2 & (F' + L')n^1 n_3 \\ (F' + L')n^2 n_1 & L'n^1 n_1 + A'n^2 n_2 + N'n^3 n_3 & (A' - N')n^2 n_3 \\ (F' + L')n^3 n_1 & (A' - N')n^3 n_2 & L'n^1 n_1 + N'n^2 n_2 + A'n^3 n_3 \end{pmatrix}$$

The eigenvalues of P are:

$$N'(n^2 n_2 + n^3 n_3) + L'n^1 n_1, \{A'(n^2 n_2 + n^3 n_3) + C'n^1 n_1 + L' \pm \Delta\}/2,$$

with:

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \{A'(n^2 n_2 + n^3 n_3) + C'n^1 n_1 - L'\}^2 \\ &\quad + 4n^1 n_1 (n^2 n_2 + n^3 n_3) \{(F' + L')^2 - (A' - L')(C' - L')\}. \end{aligned}$$

The expression of the different acceleration wave velocities follows:

$$\rho U_{S_1}^2 = N \sin^2 \theta + L \cos^2 \theta,$$

$$\rho U^2 \left\{ \frac{P}{S_2} = \frac{1}{2} \{A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta + L - (\sigma_N - \sigma_T) \sin^2 \theta\} \pm \Delta \right\}, \quad (49)$$

where θ is here the angle between the unit normal to the front n and e_1 , and:

$$\Delta^2 = \{A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta - L + (\sigma_N - \sigma_T) \sin^2 \theta\}^2 + \sin^2 (2\theta) [(F + L)^2 - \{(A - L + (\sigma_N - \sigma_T))(C - L)\}],$$

$$A = A' + \sigma_T = \rho U_{qP}^2, \quad C = C' + \sigma_N = \rho U_{qPN}^2,$$

$$F = F' - \sigma_N, \quad L = L' + \sigma_N = \rho U_{qSN}^2, \quad N = N' + \sigma_T = \rho U_{qS_1 T}^2. \quad (50a)$$

These latter coefficients permit the definition of an orthotropic tensor b^{ijkl} containing the symmetries (14) by a relation analogous to (45). Thus:

$$b^{ijkl} \eta_{ij} \bar{\eta}_{kl} = c^{ijkl} \eta_{ij} \bar{\eta}_{kl} + \sigma_N (2\eta_j^i \bar{\eta}_l^j - \eta_i^j \bar{\eta}_l^i) + (\sigma_T - \sigma_N) (2\eta_\alpha^\beta \bar{\eta}^{\beta\alpha} - \eta_\alpha^\alpha \bar{\eta}^{\beta\beta}). \quad (50b)$$

Note that in the hydrostatic case this tensor is equal to d^{ijkl} and then corresponds to Takeuchi & Saito's (1972) choice.

The consideration of the case where:

$$(F' + L')^2 = (A' - L')(C' - L'),$$

and where:

$$\rho U_{qS_1}^2 = N \sin^2 \theta + L \cos^2 \theta, \quad \rho U_{qS_2}^2 = \{L - (\sigma_N - \sigma_T)\} \sin^2 \theta + L \cos^2 \theta,$$

$$\rho U_{qP}^2 = A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta,$$

also illustrates the weak resolving power of the knowledge of velocity anisotropy upon the deviatoric part of the stress. (The approximative approach (44) yields the same result for qP fronts when: $A' + C' = 4L' + 2F'$.)

6 Equations of the 'displacement stress vector'

Let us now suppose that the tensors σ_0^{ij} and c^{ijkl} are invariant under any parallel displacement over surfaces defined, at least locally, by $x^i = c^i$. This means that the medium is generally stratified and that A, C, F, L, N, σ_N and σ_T are functions only of the first coordinate. We will make the same assumption for ρ .

In order to reduce the equation of elastodynamic and avoid derivatives of the different elastic parameters, it is natural from (23) to introduce the vector (29):

$$t = \tau^*(e_1) = (\sigma - \sigma_0)(e_1) + Du\{\sigma_0(e_1)\}, \quad (t^j = c_1^{jkl} D_k u_l + \sigma_N D_1 u^j). \quad (51)$$

Unfortunately this vector does not allow boundary conditions at the solid-fluid interfaces (see 35a) as simply as that of the vector $(\delta_1 T)(e_1)$ (see 15b, 16, 25) used by Alterman *et al.* (1959) and by Takeuchi & Saito (1972) in hydrostatic situations. In order to generalize the choice adopted by these authors while keeping simple boundary conditions and avoiding derivatives of the deviator $(\sigma_N - \sigma_T)$ of the pre-stress, we also have to introduce the vector (see 30, 32, 35b):

$$s = \tau'^*(e_1) = (\delta_1 T)(e_1) - \sigma_0 \{Du^*(e_1)\} + Du^* \{ \sigma_0(e_1) \},$$

$$(s^j = t^j + \sigma_N g^{jk} D_k u_1 - \sigma_{01}^j D_k u^k = b_1^{jkl} D_k u_l). \quad (52)$$

From (47) it is straightforward that:

$$D_1 u^j = (\tau_1^j - F' D_\alpha u^\alpha) / (C' + \sigma_N), \quad D_1 u^\beta = (\tau_1^\beta - L' g^{\alpha\beta} D_\alpha u_1) / (L' + \sigma_N). \quad (53)$$

Taking into account (50) and (52), this yields:

$$D_1 u^1 = (\tau_1^1 - F D_\alpha u^\alpha)/C, \quad D_1 u^\beta = -g^{\alpha\beta} D_\alpha u_1 + \tau_1^{\beta 1}/L. \quad (54)$$

Let ∇ denote the Levi-Civita covariant derivation (see Choquet-Bruhat, Dewitt-Morette & Dilliard-Bleick 1982; Doubrovine, Novikov & Fomenko 1982) over surfaces defined locally by $x^1 = c^f$ and Γ_{jk}^i the Christoffel symbols related to the Euclidean derivation D for the system of curvilinear coordinates (x^i). Since it is assumed that the first coordinate is orthogonal to the other two, the symbols related to ∇ are equal to those corresponding to D . So that, for instance:

$$D_\alpha u^\beta = \nabla_\alpha u^\beta + \Gamma_{\alpha 1}^\beta u^1, \quad D_\alpha \tau^{\beta\gamma} = \nabla_\alpha \tau^{\beta\gamma} + \Gamma_{\alpha 1}^\beta \tau^{1\gamma} + \Gamma_{\alpha 1}^\gamma \tau^{\beta 1},$$

and it may be deduced (Appendix 5) from (23) and (47):

$$\begin{aligned} g^{11} D_1 (\tau_1^\beta) &= \rho \delta_1 \Psi^\beta + \left(\frac{F'^2}{C' + \sigma_N} + N' - A' \right) g^{\beta\alpha} \nabla_\alpha \nabla_\gamma u^\gamma - \frac{F'}{C' + \sigma_N} g^{\beta\alpha} \nabla_\alpha \tau_1^1 \\ &+ g^{11} N' (\Gamma_{1\gamma}^\beta \Gamma_{1\delta}^\gamma - \Gamma_{1\alpha}^\alpha \Gamma_{1\delta}^\beta) u^\delta - (N' + \sigma_T) g^{\alpha\gamma} \nabla_\alpha \nabla_\gamma u^\beta \\ &- g^{11} \left(\Gamma_{1\alpha}^\alpha \tau_1^\beta + \frac{L'}{L' + \sigma_N} \Gamma_{1\alpha}^\beta \tau_1^\alpha \right) - \left(\sigma_T + \frac{L' \sigma_N}{L' + \sigma_N} \right) \Gamma_{1\alpha}^\beta g^{\alpha\gamma} (\nabla_\gamma u^1 + \Gamma_{\gamma i}^1 u^i) \\ &- \nabla_\alpha \left(u^1 \left\{ (2N' + \sigma_T) g^{\beta\gamma} \Gamma_{\gamma 1}^\alpha + \left(A' - 2N' - \frac{F'^2}{C' + \sigma_N} \right) g^{\beta\alpha} \Gamma_{1\gamma}^\gamma \right\} \right). \end{aligned} \quad (55a)$$

$$\begin{aligned} D_1 (\tau_1^1) &= \rho \delta_1 \Psi_1 - \frac{L'}{L' + \sigma_N} (\nabla_\alpha \tau_1^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^1 \tau_1^\alpha) + \Gamma_{1\alpha}^\alpha \left(\frac{F'}{C' + \sigma_N} - 1 \right) \tau_1^1 \\ &+ (2N' + \sigma_T) \Gamma_{1\beta}^\gamma (\nabla_\gamma u^\beta + \Gamma_{1\gamma}^\beta u^1) + \Gamma_{\alpha 1}^\alpha \left(A' - 2N' - \frac{F'^2}{C' + \sigma_N} \right) (\nabla_\gamma u^\gamma + \Gamma_{1\gamma}^\gamma u^1) \\ &- \left(\frac{L' \sigma_N}{L' + \sigma_N} + \sigma_T \right) g_{11} (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta u^1 + g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha (\Gamma_{\beta\gamma}^1 u^\gamma + \Gamma_{1\beta}^1 u^1)) \\ &+ g^{\alpha\beta} \Gamma_{1\alpha}^\alpha (\nabla_\beta u^1 + \Gamma_{\beta i}^1 u^i). \end{aligned} \quad (55b)$$

where (18): $\delta_1 \Psi = \partial_{tt}^2 u + 2\Omega \times \partial_t u - Dg'_0(u) - \text{grad } \psi$.

Let us now suppose that the surfaces $x^1 = c^f$ are parallel (or may be considered parallel, for at least a limited range of x^1). This results in $\Gamma_{\alpha 1}^1 = 0$, or equivalently $\Gamma_{11}^\alpha = 0$. The first lines of coordinate are straight lines, g_{11} is a function only of the first coordinate and possibly by means of a change of coordinate we may suppose that $g_{11} = 1$. Let us then introduce the scalar field u_N, t_N, s_N and the tangent vector fields u_T, t_T, s_T such that:

$$u = u_N e_1 + u_T, \quad t = t_N e_1 + t_T, \quad s = s_N e_1 + s_T.$$

Let $W, \Delta_T, \text{div}_T, \text{grad}_T$ denote respectively the Weingarten operator, the Beltrami operator, the divergence and the gradient over surfaces $x^1 = c^f$:

$$\begin{aligned} \{W(u_T)\}^\beta &= \Gamma_{1\alpha}^\beta u^\alpha, \quad (\Delta_T u_T)^\beta = g^{\alpha\gamma} \nabla_\alpha \nabla_\gamma u^\beta, \quad \Delta_T \phi = g^{\alpha\gamma} \nabla_\alpha \nabla_\gamma \phi, \\ \text{div}_T(u_T) &= \nabla_\alpha u^\alpha, \quad (\text{grad}_T \phi)^\beta = g^{\beta\alpha} \nabla_\alpha \phi. \end{aligned} \quad (56)$$

The equilibrium of the reference configuration (9) yields:

$$g'_0 = -|g'_0| e_1, \quad D_1 \sigma_N + \text{tr}(W)(\sigma_N - \sigma_T) - \rho |g'_0| = 0, \quad (57)$$

where tr denotes the trace operator.

Furthermore, introducing $\chi = D_1\psi - 4\pi G\rho u_N$, and taking into account:

$$\Delta\psi = \Delta_T\psi + \text{tr}(W)D_1\psi + D_{11}\psi,$$

we deduce from (20):

$$D_1\chi = 4\pi G\rho \text{div}_T u_T - \Delta_T\psi - \text{tr}(W)\chi$$

$$D_1\psi = \chi + 4\pi G\rho u_N \quad (58)$$

ψ and χ continuous at each interface ($\rho = 0$ outside V).

Therefore, with the help of:

$$\text{div}(g'_0) = -D_1|g'_0| - \text{tr}(W)|g'_0| = -4\pi G\rho + 2|\Omega|^2, \quad (59)$$

it follows that:

$$\begin{aligned} \delta_t \Psi_N &= (\partial_{tt}^2 u + 2\Omega \times \partial_t u)_N - \text{tr}(W)|g'_0|u_N - 2|\Omega|^2 u_N - \chi \\ \delta_t \Psi_T &= (\partial_{tt}^2 u + 2\Omega \times \partial_t u)_T + |g'_0|W(u_T) - \text{grad}_T \psi. \end{aligned} \quad (60)$$

Then, taking into account (56), (60), the hypothesis: $\Gamma_{1\alpha}^1 = 0$ and the relations:

$$W^2 - \text{tr}(W)W + \det(W) = 0,$$

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha(g^{\beta\gamma}\Gamma_{1\gamma}^\alpha) &= \nabla_\gamma(g^{\beta\gamma}\Gamma_{1\alpha}^\alpha) = \{\text{grad}_T(\text{tr}(W))\}^\beta, \\ (\nabla_\alpha\Gamma_{1\gamma}^\beta &= \partial_\alpha\Gamma_{1\gamma}^\beta + \Gamma_{\alpha\delta}^\beta\Gamma_{1\gamma}^\delta - \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta\Gamma_{1\delta}^\beta = \partial_1\Gamma_{\alpha\gamma}^\beta), \end{aligned} \quad (61)$$

equations (53), (55) may be rewritten:

$$D_1 u_N = (-F' \{\text{tr}(W)u_N + \text{div}_T u_T\} + t_N)(C' + \sigma_N),$$

$$D_1 u_T = (L' \{-\text{grad}_T u_N + W(u_T)\} + t_T)(L' + \sigma_N)$$

$$\begin{aligned} D_1 t_N &= \left\{ (2N' + \sigma_T)\text{tr}(W^2) - \left(\frac{F'^2}{C' + \sigma_N} + 2N' - A' \right) \text{tr}(W)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{L' \sigma_N}{L' + \sigma_N} + \sigma_T \right) \Delta_T + \rho(\partial_{tt}^2 - |g'_0| \text{tr}(W) - 2|\Omega|^2) \right\} u_N + 2\rho \{\Omega \times \partial_t u\}_N \\ &\quad + \left\{ \left(\frac{L' \sigma_N}{L' + \sigma_N} + 2\sigma_T + 2N' \right) \text{div}_T W - \left(\frac{F'^2}{C' + \sigma_N} + 2N' - A' \right) \text{tr}(W) \text{div}_T \right. \\ &\quad \left. - (2N' + \sigma_T) \text{grad}_T(\text{tr}W) \cdot \right\} u_T - \left(1 - \frac{F'}{C' + \sigma_N} \right) \text{tr}(W)t_N - \frac{L'}{L' + \sigma_N} \text{div}_T t_T - \rho\chi, \\ D_1 t_T &= \left(\frac{F'^2}{C' + \sigma_N} + 2N' - A' \right) \text{grad}_T(\text{tr}(W)u_N) - \left(\frac{L' \sigma_N}{L' + \sigma_N} + 2\sigma_T + 2N' \right) W \text{grad}_T u_N \\ &\quad - (2N' + \sigma_T)u_N \text{grad}_T \text{tr}(W) + \left\{ \left(\frac{F'^2}{C' + \sigma_N} + N' - A' \right) \text{grad}_T \text{div}_T \right. \\ &\quad \left. - (N' + \sigma_T)\Delta_T - N' \det(W) + \left(\frac{L' \sigma_N}{L' + \sigma_N} + \sigma_T \right) W^2 + \rho(\partial_{tt}^2 + |g'_0|W) \right\} u_T \\ &\quad + 2\rho(\Omega \times \partial_t u)_T - \frac{F'}{C' + \sigma_N} \text{grad}_T t_N - \left\{ \text{tr}(W) + \frac{L'}{L' + \sigma_N} W \right\} t_T - \rho \text{grad}_T \psi. \end{aligned} \quad (62)$$

Furthermore, from (52), (54), (57) and (61) we may deduce:

$$D_1 s_N = D_1 t_N + \{(\sigma_N - \sigma_T) \text{tr}(W) - \rho |g'_0|\} \{\text{div}_T u_T + \text{tr}(W) u_N\} \\ + \sigma_N \{\Delta_T u_N - u_T \cdot \text{grad}_T \text{tr}(W) - \text{div}_T s_T / L\} + \sigma_N \text{tr}(W^2) u_N \\ - \sigma_N \text{tr}(W) (s_N / C - F \{\text{div}_T u_T + \text{tr}(W) u_N\} / C),$$

$$D_1 s_T = D_1 t_T + \{\rho |g'_0| - (\sigma_N - \sigma_T) \text{tr}(W)\} (\text{grad}_T u_N - W u_T) \\ - \sigma_N (F \text{grad}_T \{\text{tr}(W) u_N + \text{div}_T u_T\} / C + \text{grad}_T s_N / C + W (s_T) / L).$$

Substituting (62) into these latter relations and taking into account (50), (52), (54) and (58) we finally deduce:

$$D_1 u_N = (-F \{\text{tr}(W) u_N + \text{div}_T u_T\} + s_N) / C, \quad D_1 u_T = -\text{grad}_T u_N + W u_T + s_T / L, \\ D_1 s_N = (2N \text{tr}(W^2) - (F^2 / C + 2N - A) \text{tr}(W)^2 + (\sigma_N - \sigma_T) \{\Delta_T + \text{tr}(W^2)\}) \\ + \rho \{\partial_{rr}^2 - 2 \text{tr}(W) |g'_0| - 2 |\Omega|^2\} u_N + 2\rho (\Omega \times \partial_r u)_N + (2N \text{div}_T W \\ - (F^2 / C + 2N - A) \text{tr}(W) \text{div}_T - \rho |g'_0| \text{div}_T - (2N + \sigma_N - \sigma_T) \text{grad}_T \{\text{tr}(W)\} \cdot) u_T \\ - \text{tr}(W) (1 - F/C) s_N - \text{div}_T s_T - \rho \chi, \\ D_1 s_T = (F^2 / C + 2N - A) \text{grad}_T \{\text{tr}(W) u_N\} + (\rho |g'_0| - 2NW) \text{grad}_T u_N \\ - 2N u_N \text{grad}_T \text{tr}(W) + \{(F^2 / C + N - A) \text{grad}_T \text{div}_T - N \{\Delta_T + \text{tr}(W)\} \\ + \rho \partial_{rr}^2\} u_T + 2\rho (\Omega \times \partial_r u)_T - (F/C) \text{grad}_T s_N - \{\text{tr}(W) + W\} s_T - \rho \text{grad}_T \psi, \\ D_1 \psi = \chi + 4\pi G \rho u_N, \quad D_1 \chi = 4\pi G \rho \text{div}_T u_T - \Delta_T \psi - \text{tr}(W) \chi. \quad (63a)$$

In the fluid areas (15), (50), (52):

$$A = C = F = p_0 \gamma, \quad L = N = 0, \quad \sigma_N = \sigma_T = -p_0, \quad s = p_0 \gamma \text{div}(u) e_1 = -(\delta_i p) e_1.$$

Thus equations (63a) reduce to:

$$s_T = 0, \quad D_1 u_N = -\text{tr}(W) u_N - \text{div}_T u_T + s_N / (p_0 \gamma), \\ D_1 s_N = \rho \{(\partial_{rr}^2 - 2 |g'_0| \text{tr}(W) - 2 |\Omega|^2) u_N - 2(\Omega \times \partial_r u)_N - |g'_0| \text{div}_T u_T - \chi\}, \\ \partial_{rr}^2 u_T + 2(\Omega \times \partial_r u)_T = \text{grad}_T \{s_N / \rho + \psi - |g'_0| u_N\}.$$

This result may be also directly derived from the usual equation:

$$\text{grad} \{p_0 \gamma \text{div}(u) / \rho + \psi + u \cdot g'_0\} - \text{div}(u) \{g'_0 + p_0 \gamma \text{grad}(1/\rho)\} = \partial_{rr}^2 u + 2\Omega \times \partial_r u,$$

corresponding to (25) for a perfect fluid.

From (52), (26), (33), (34), (35b) and (58), it is straightforward that the boundary-conditions are:

$$s_N, s_T, \psi, \chi \text{ continuous at each interface } (\rho = 0 \text{ outside } V \text{ if necessary}),$$

$$u_N \text{ continuous at each inner interface,}$$

$$u_T \text{ continuous at each solid-solid interface.} \quad (63b)$$

As far as the variational approach is concerned under these hypotheses of orthotropy and lateral invariance over parallel stratification, expression (38a) for $(A(u)|v)$ becomes (see

Appendix 6):

$$\begin{aligned}
 (A(u) | v) = & \int_V b^{ijk'l} D_i u_j D_k \bar{v}_l + \rho S \{ \bar{u} \cdot g'_0 \operatorname{div}(\bar{v}) - \bar{v} \cdot \operatorname{grad}(u \cdot g'_0) \} \\
 & + (\sigma_N - \sigma_T) (\operatorname{tr}(W^2) u_N \bar{v}_N - \operatorname{grad}_T u_N \cdot \operatorname{grad}_T \bar{v}_N - S \{ u_N \bar{v}_T \cdot \operatorname{grad}_T \operatorname{tr}(W) \}) dV \\
 & - \int_E \frac{\operatorname{grad} \psi(u) \cdot \operatorname{grad} \psi(\bar{v})}{4\pi G} dV \quad (64a)
 \end{aligned}$$

and thus:

$$\begin{aligned}
 (A(u) | u) = & \int_V \{ |u_N|^2 (N \{ 2 \operatorname{tr}(W)^2 - \operatorname{tr}(W^2) \} - 2\rho |\Omega|^2 - 2\rho |g'_0| \operatorname{tr}(W)) \\
 & + (\sigma_N - \sigma_T) \operatorname{tr}(W^2) - (\sigma_N - \sigma_T) |\operatorname{grad}_T u_N|^2 - N |\operatorname{div}_T u_T|^2 \\
 & - Nu_T \cdot \{ \Delta_T + \operatorname{grad}_T \operatorname{div}_T + \det(W) \} \bar{u}_T \\
 & + (A - N - F^2/C) |\operatorname{tr}(W) u_N + \operatorname{div}_T u_T|^2 + |s_N|^2/C \\
 & + |s_T|^2/L - R \{ (\rho |g'_0| + 2N \operatorname{tr}(W)) u_N \operatorname{div}_T \bar{u}_T + (4NW - \rho |g'_0|) \bar{u}_T \cdot \operatorname{grad}_T u_N \\
 & + (\sigma_N - \sigma_T + 4N) u_N \bar{u}_T \cdot \operatorname{grad}_T \operatorname{tr}(W) - \rho \chi \bar{u}_N - \rho \bar{u}_T \cdot \operatorname{grad}_T \psi \} \} dV. \quad (64b)
 \end{aligned}$$

Neglecting rotation, it is well known that in the case of plane and spherical stratification the solution of (63) may be decoupled as *SH*- and *PSV*-waves. More precisely, let us define the subspaces E_{SH} and E_{PSV} (mutually orthogonal in $L^2_C(V, dm)$) by:

$$E_{SH} = \{ u : u_1 = 0, \operatorname{div}(u) = 0 \}, \quad E_{PSV} = \{ u : \operatorname{Curl}(u)_1 = 0 \}.$$

It follows then from (63) that E_{SH} and E_{PSV} reduce A in the case of parallel stratification only when the two curvatures of x^1 surfaces are equal at each point, i.e. only in the case of plane and spherical stratification (see Jobert 1976). The case of cylindrical stratification is also interesting to consider. There *PSV*- and *SH*-waves propagating in a direction perpendicular to the cylindrical axis are decoupled whatever the stratification (assumed here to be parallel). (For such *SH*-waves it is clear indeed that: $u_T \cdot \operatorname{grad}_T \{ \operatorname{tr}(W) \} = 0$ and $\operatorname{div}_T (W u_T) = 0$.) However the subspaces E_{SH} and E_{PSV} do not reduce A in this case, and so the corresponding waves are generally coupled.

7 Pre-stress and spherically symmetrical earth models

Adopting a spherically symmetrical earth configuration in order to draw an average global model of the Earth, we have to assume that the material properties are invariant under any rotation about the centre of mass. This implies that the material will be considered as orthotropic with the radial direction as the axis of symmetry at each point.

In the case of spherical geometry the Weingarten operator is simply $W = I/r$, where r denotes the radial distance of the considered point. Therefore, neglecting rotation, it follows from (63a) that:

$$\begin{aligned}
 D_r u_N = & \{ -F(2u_N/r + \operatorname{div}_T u_T) + s_N \} / C, \quad D_r u_T = -\operatorname{grad}_T u_N + u_T/r + s_T/L, \\
 D_r s_N = & \{ 4(A - N - F^2/C)/r^2 + (\sigma_N - \sigma_T) (\Delta_T + 2/r^2) + \rho(\partial_{tt}^2 - 4|g_0|/r) \} u_N \\
 & + \{ 2(A - N - F^2/C)/r - \rho |g_0| \} \operatorname{div}_T u_T - 2(1 - F/C) s_N/r - \operatorname{div}_T s_T - \rho \chi, \\
 D_r s_T = & \{ 2(F^2/C + N - A)/r + \rho |g_0| \} \operatorname{grad}_T u_N + \{ (F^2/C + N - A) \operatorname{grad}_T \operatorname{div}_T \\
 & - N(\Delta_T + 1/r^2) + \rho \partial_{tt}^2 \} u_T - (F/C) \operatorname{grad}_T s_N - 3s_T/r - \rho \operatorname{grad}_T \psi, \\
 D_r \psi = & \chi + 4\pi G \rho u_N, \quad D_r \chi = 4\pi G \rho \operatorname{div}_T u_T - \Delta_T \psi - 2\chi/r. \quad (65)
 \end{aligned}$$

We may thus deduce the equations governing the radial dependence of the free modes of the model (i.e. the eigenfunctions of the operator A). Indeed these free oscillations may be expressed as (see Alterman *et al.* 1959):

$$\left. \begin{aligned} u \\ s \end{aligned} \right\} = y_{\left\{ \begin{array}{l} 7 \\ 8 \end{array} \right\}}^{lm}(r) \text{Curl}(Y_l^m r e_r) \quad (\text{toroidal oscillation of the subspace } E_{SH}),$$

$$\left. \begin{aligned} u \\ s \end{aligned} \right\} = y_{\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right\}}^{lm}(r) Y_l^m e_r + y_{\left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \right\}}^{lm}(r) \text{grad}_T(Y_l^m r) \quad (\text{spheroidal oscillation of the subspace } E_{PSV}).$$

(66)

Here the Y_l^m ($|m| < l$) denote the usual orthonormal spherical harmonic functions:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi),$$

P_l^m the associated Legendre functions, θ and ϕ colatitudinal and longitudinal angles.

For a toroidal oscillation with eigenfrequency $\omega/2\pi$, taking into account:

$$\Delta_T(Y_l^m) = -l(l+1)Y_l^m/r^2, \quad \Delta_T\{\text{Curl}(Y_l^m r e_r)\} = \{1 - l(l+1)\}\text{Curl}(Y_l^m r e_r)/r^2,$$

it is straightforward from (64) that:

$$\frac{dy_7}{dr} = y_7/r + y_8/L, \quad \frac{dy_8}{dr} = \{(l-1)(l+2)N/r^2 - \rho\omega^2\} y_7 - 3y_8/r, \quad (67a)$$

with $y_8 = 0$ (63b) at each boundary of the solid part.

For spheroidal oscillation with eigenfrequency $\omega/2\pi$, adopting:

$$\psi = y_5^{lm}(r) Y_l^m, \quad \chi = y_6^{lm}(r) Y_l^m,$$

and taking into account:

$$\Delta_T(Y_l^m) = -l(l+1)Y_l^m/r^2, \quad \Delta_T\{\text{grad}_T(Y_l^m r)\} = \{1 - l(l+1)\}\text{grad}_T(Y_l^m r)/r^2$$

it follows easily from (64) that:

$$\frac{dy_1}{dr} = \{-2Fy_1/r + y_2 + l(l+1)Fy_3/r\}/C, \quad \frac{dy_3}{dr} = -(y_1 - y_3)/r + y_4/L,$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{dr} = & \{4(A - N - F^2/C)/r^2 + (l-1)(l+2)(\sigma_T - \sigma_N)/r^2 - \rho(4|g_0|/r + \omega^2)\} y_1 \\ & - 2(1 - F/C)y_2/r - l(l+1)\{2(A - N - F^2/C)/r - \rho|g_0|\} y_3/r \\ & + l(l+1)y_4/r - \rho y_6, \end{aligned}$$

$$\frac{dy_4}{dr} = -\{2(A - N - F^2/C)/r - \rho|g_0|\} y_1/r - (F/C)y_2/r$$

$$- \{(l(l+1)(F^2/C - A) + 2N\}/r^2 + \rho\omega^2\} y_3 - 3y_4/r - \rho y_5/r.$$

$$\frac{dy_5}{dr} = 4\pi G\rho y_1 + y_6, \quad \frac{dy_6}{dr} = -4\pi G\rho l(l+1)y_3/r + l(l+1)y_5/r^2 - 2y_6/r. \quad (67b)$$

From (63b) it may be deduced that the boundary conditions take the form:

$$\begin{aligned} y_2 = y_4 = y_6 + (l+1)y_5/b = 0, \text{ at the free surface } r = b, \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \text{ continuous at each welded interface,} \\ y_4 = 0 \text{ and } y_1, y_2, y_5, y_6 \text{ continuous at each solid-fluid interface,} \\ y_1, y_2, y_5, y_6 \text{ continuous at each fluid-fluid interface.} \end{aligned}$$

At the pole $r = 0$, the regularity of the solution has to be imposed (see Crossley 1975; Denis 1970 and also Dunford & Schwartz 1963).

Recall that the coefficients A, C, F, L, N are those of the tensor b^{ijkl} (see 50) which is equal to d^{ijkl} in the hydrostatic case. Thus, in this case, equations (64) correspond to those obtained by Takeuchi & Saito (1972). In the case of an orthotropic pre-stress, the coefficients A, C, L, N are still related to wavefront velocity (49, 50) and taking into account orthotropy of the pre-stress practically amounts to the introduction of the term $(l-1)(l+2)(\sigma_T - \sigma_N)/r^2$ in the coefficient of y_1 in the second equation of (65b).

Let u represent a displacement field and s the associated 'stress vector' (52). Expanding u and s on the spherical harmonic vector basis as in (66) and taking into account the orthogonality properties of this basis, (64b) easily yields:

$$\begin{aligned} (A(u) | u) = \int_0^b \{ & |y_1|^2 \{ (4(A - N - F^2/C) - 4\rho |g_0| r - (l-1)(l+2)(\sigma_N - \sigma_T)) \\ & + |ry_2|^2/C + l(l+1)|y_3|^2 \{ l(l+1)(A - F^2/C) - 2N \} + l(l+1)|ry_4|^2/L \\ & + l(l^2 - 1)(l+2)N|y_7|^2 + l(l+1)|ry_8|^2/L \\ & + R \{ 2l(l+1)(\rho |g_0| r - 2(A - N - F^2/C))y_1\bar{y}_3 - \rho y_1\bar{y}_6 r^2 - l(l+1)\rho y_3\bar{y}_5 r \} \} dr. \end{aligned} \quad (68)$$

where $R \{ \}$ denotes the real part.

This provides the means to estimate to the first order the effect of the deviatoric part of pre-stress upon the spheroidal eigenfrequencies. Indeed, with the help of the so-called 'Rayleigh Principle' (see, e.g. Woodhouse & Dahlen 1978), it is easily derived from (68) that the relative perturbation of a spheroidal eigenfrequency with angular order l due to the deviatoric part of pre-stress may be expressed as:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{(l-1)(l+2)}{2\omega^2} \int_0^b (\sigma_T - \sigma_N) y_1^2 dr / \int_0^b \{ y_1^2 + l(l+1)y_3^2 \} \rho r^2 dr, \quad (69)$$

where y_1 and y_3 are the components (66) of the corresponding eigenfunction for the reference hydrostatic model.

Let $K(r)$ denote the kernel of expression (69), that is the kernel related to the logarithmic derivative of ω with respect to $(\sigma_T - \sigma_N)$:

$$K(r) = \frac{(l-1)(l+2)}{2\omega^2} y_1^2(r) / \int_0^b \{ y_1^2 + l(l+1)y_3^2 \} \rho r^2 dr. \quad (70)$$

Figs 1 and 2 show the kernel $K(r)$ as a function of depth, corresponding respectively to the fundamental spheroidal mode and the first overtone for $l = 20, 50$ and 100 . They have been obtained with the use of Wiggins's (1976) computational algorithm and earth model 1066 B (Gilbert & Dziewonski 1975).

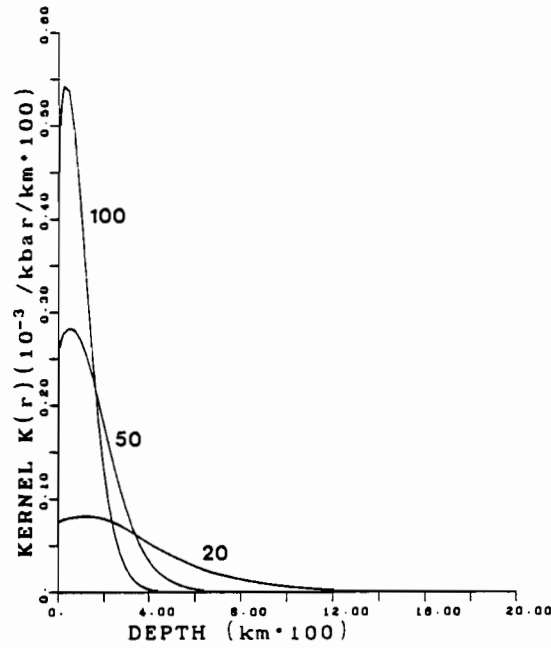


Figure 1. Kernel $K(r)$ as a function of depth, corresponding to the fundamental spheroidal mode for $l = 20, 50$ and 100 , obtained with the use of Wiggins's (1976) computational algorithm and earth model 1066 B (Gilbert & Dziewonski 1975).

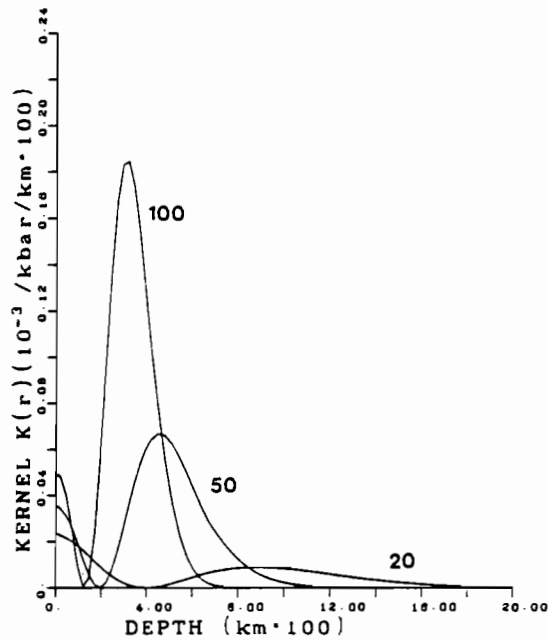


Figure 2. Same as Fig. 1 except for the first overtone.

Considering these graphs and the poorness of our knowledge of the state of the stress inside the Earth, it is believed that there is no reason to ignore, *a priori*, the deviatoric part of pre-stress in global or regional earth models.

Acknowledgments

I am very grateful to Dr G. Jobert for his numerous discussions and comments throughout this work. I am also indebted to Dr J. Woodhouse for his useful criticisms and comments on a previous version of the manuscript.

IPG Contribution No. 864.

References

- Alterman, Z., Jarosh, H. & Pekeris, C. L., 1959. Oscillations of the Earth, *Proc. R. Soc. A*, 252, 80–95.
- Backus, G. E., 1970. A geometrical picture of anisotropic elastic tensors, *Rev. Geophys. Space Phys.*, 8, 633–671.
- Backus, G. E. & Gilbert, F., 1967. Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 13, 247–276.
- Bamberger, Y., 1981. *Mécanique de l'Ingénieur II, Milieux Déformables*, Hermann, Paris.
- Choquet-Bruhat, Y., Dewitt-Morette, C. & Dillard-Bleick, M., 1982. *Analysis Manifolds and Physics*, North Holland, Amsterdam.
- Crossley, D. J., 1975. The free-oscillation equations at the centre of the earth, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 41, 153–163.
- Dahlen, F. A., 1972. Elastic dislocation theory for a self-gravitating elastic configuration with an initial static stress field, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 28, 357–383.
- Denis, C., 1970. Sur les solutions sphéroïdales au voisinage du centre dans le problème des oscillations libres d'une sphère rhéologique autogravitante, *Bull. Soc. r. Sci. Liège no 5–6*, 288–298.
- Dobrovine, B., Novikov, S. & Fomenko, A., 1982. *Géométrie Contemporaine, 1ère partie*, ed. Mir, Moscou.
- Dunford, N. & Schwartz, J. T., 1963. *Linear Operators, part II, Spectral Theory*, Wiley, New York.
- Friedman, J. L. & Schutz, B., 1978a. Lagrangian perturbation theory of non relativistic fluids, *Astrophys. J.*, 221, 937–957.
- Friedman, J. L. & Schutz, B., 1978b. Secular instability of rotating Newtonian stars, *Astrophys. J.*, 222, 281–296.
- Gilbert & Dziewonski, A. M., 1975. An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanisms for seismic spectra, *Phil. Trans. R. Soc. A*, 278, 187–269.
- Hadamard, J., 1903. *Leçons sur la Propagation des Ondes*, Hermann, Paris.
- Jobert, G., 1976. Matrix methods for generally stratified media, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 47, 351–362.
- Johnson, I. M. & Smylic, D. E., 1977. A variational approach to whole-Earth dynamics, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 50, 35–54.
- Love, A. E. H., 1911. *Some Problems of Geodynamics*, Cambridge University Press.
- Malvern, L. E., 1969. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Marsden, J. E. & Hughes, T. J. R., 1978. Topics of the mathematical foundations of elasticity, in *Non-linear Analysis and Mechanics*, Heriot-Watt Symposium, Vol. 2, ed. Knops, R. J., Pitman, London.
- Nikitin, L. V. & Chesnokov, E. M., 1981. Influence of a stressed condition on the anisotropy of elastic properties in a medium, *Izv. Earth Phys.*, 17, 174–183.
- Pekeris, C. L. & Jarosh, H., 1958. *The Free Oscillations of the Earth*, Contributions in Geophysics, Pergamon Press, Oxford.
- Takeuchi, M. & Saito, M., 1972. Seismic surface waves, in *Methods in Computational Physics*, Vol. II, Academic Press, New York.
- Taub, A. H., 1969. Stability of general relativistic gaseous mass and variational principles, *Commun. math. phys.*, 15, 235–254.
- Truesdell, C., 1972. *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, Johns Hopkins University, Baltimore.

- Vlaar, N. J., 1968. Ray theory for an anisotropic inhomogeneous elastic medium, *Bull. seism. Soc. Am.*, 58, 2053–2072.
- Wahr, J. M., 1981. A normal mode expansion for the forced response of a rotating earth, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 64, 651–675.
- Wiggins, R. A., 1976. A fast new computational algorithm for free oscillations and surface waves, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 47, 135–150.
- Woodhouse, J. H. & Dahlen, F. A., 1978. The effect of a general aspherical perturbation on the free oscillations of the Earth, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 53, 335–354.

Appendix

(1) Let i , h and ϕ be respectively the specific internal energy, entropy and free energy and Υ the temperature field of the considered material. Using normal state variables, the following expressions stand:

$$h = - \frac{\partial \phi}{\partial \Upsilon}, \quad i = \phi + \Upsilon h.$$

The first two principles of thermodynamics, the virtual power principle and expression (2) yield for any reversible virtual evolutions around the reference state (for more details about the subject of this appendix see, e.g. Bamberger 1981; Malvern 1969; Truesdell 1972 or Marsden & Hugues 1978):

$$\delta_{\Upsilon} \phi = \delta i - \Upsilon \delta h = \delta w_S = \frac{1}{\rho} \sigma^{pq} \delta \epsilon_{pq} = \frac{1}{\rho_r} T^{ij} \delta e_{ij}.$$

Then one can see that the knowledge of the stress-strain relation results in the knowledge of specific free energy.

In the case of solid elasticity, the normal variables are the temperature Υ and the Lagrangian finite deformation tensor ϵ ; thus:

$$\sigma^{pq} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{pq}}. \tag{A1.1}$$

Developing ϕ to the second order around the equilibrium state leads to:

$$\rho \phi = \rho \phi_0 - \rho h_0 (\Upsilon - \Upsilon_0) + \sigma_0^{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \{ A (\Upsilon - \Upsilon_0)^2 + 2 (\Upsilon - \Upsilon_0) \alpha^{ij} \epsilon_{ij} + \lambda^{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \}$$

where $h_0 = - (\partial \phi / \partial \Upsilon)_0$ is the specific entropy in the reference state, σ_0^{ij} the pre-stress tensor, and where from the symmetry of ϵ_{ij} the tensors λ^{ijkl} and α^{ij} may be chosen with the following symmetries:

$$\alpha^{ij} = \alpha^{ji}, \quad \lambda^{ijkl} = \lambda^{jikl} = \lambda^{klij}. \tag{A1.2}$$

Then (A1.1) may be rewritten:

$$\sigma^{ij} = \sigma_0^{ij} + (\Upsilon - \Upsilon_0) \alpha^{ij} + \lambda^{ijkl} \epsilon_{kl}.$$

Furthermore, assuming that the evolution is adiabatic, and thus isentropic ($h = h_0$):

$$\Upsilon - \Upsilon_0 = - \frac{1}{A} \alpha^{ij} \epsilon_{ij}, \quad (\delta_l)_{\Upsilon} \phi = \delta_l i,$$

where $\delta_i i$ is the Lagrangian variation of specific internal energy. Thus:

$$\sigma^{ij} = \sigma_0^{ij} + c^{ijk l} \epsilon_{kl},$$

where the tensor $c^{ijk l} = \lambda^{ijk l} - (\alpha^{ij} \alpha^{kl})/A$, which contains the same symmetries as λ given by (A1.2), corresponds to the quadratic coefficients in the development of $\rho \delta_i i$, with respect to ϵ , related to isentropic evolution:

$$\rho \delta_i i = \rho \{(\phi - \phi_0) + h_0(\Upsilon - \Upsilon_0)\} = \sigma_0^{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} c^{ijk l} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}.$$

Restricting now the development of σ to the first order in Du and that of $\delta_i i$ to the second order leads to:

$$\sigma^{ij} = \sigma_0^{ij} + c^{ijk l} D_k u_l,$$

$$\rho \delta_i i = \sigma_0^{ij} D_i u_j + \frac{1}{2} (c^{ijk l} + \sigma_0^{lk} g^{jl}) D_i u_j D_k u_l, \quad (\text{A1.3})$$

where the presence of σ_0 in the quadratic terms comes from the quadratic ones in ϵ .

In the case of a perfect fluid, the normal state variables reduce to the temperature Υ and the density ρ . Then taking into account mass conservation:

$$\rho_r \delta_\Upsilon \phi = -p g^{ij} \delta e_{ij} \quad \text{with } p = \rho_r^2 \frac{\partial \phi}{\partial \rho_r},$$

and thus:

$$T^{ij} = -p g^{ij}.$$

If we consider an isentropic evolution, and then suppose that p is locally a function of the density, we obtain to the first order:

$$p - p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_h (\rho_r - \rho) = -\rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_h \theta / (1 + \theta),$$

where θ is the volumetric dilatation: $\theta = \rho / \rho_r - 1$.

Taking into account expression (4) of θ yields to the first order:

$$p - p_0 = -p_0 \gamma \operatorname{div}(u), \quad (\text{A1.4})$$

where

$$\gamma = \frac{\rho}{p_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_h$$

is the adiabatic index of the fluid.

The Lagrangian variation of the specific internal energy corresponding to an isentropic evolution may be expressed as:

$$\delta_i i = (\delta_i)_\Upsilon \phi = \int_0^t \frac{\partial \phi}{\partial \rho_r} \frac{\partial \rho_r}{\partial t} dt = -\frac{1}{\rho} \int_0^t p \partial_r \theta dt.$$

Thus taking into account expressions (4) and (A1.4), we obtain to the second order:

$$\rho \delta_i i = p_0 \left\{ -\operatorname{div}(u) + \frac{1}{2} \{(\gamma - 1) \operatorname{div}(u)^2 + D_i u^j D_j u^i\} \right\}. \quad (\text{A1.5})$$

Let us now recall that the internal energy is not additive. Indeed, if we consider the evolution of two systems S_1, S_2 , the variation of internal energy of the whole system $S_1 \cup S_2$ is:

$$\delta I = \delta I_1 + \delta I_2 - W_M,$$

where W_M is the mutual work caused by the action of S_1 upon S_2 and vice versa. In the case of the Earth, we deduce:

$$\delta I = \int_V \rho \delta_i i dV - W_M,$$

and here W_M is the work due to non-local gravitational effects and possible slipping at inner interface.

(2) Let W denote the Weingarten operator, that is the self-adjoint operator defined at each point of the surface Σ , assumed to be sufficiently regular, on the space tangent $T_a(\Sigma)$, by:

$$\forall u \in T_a(\Sigma), \quad W(u) = D_u(n) \in T_a(\Sigma),$$

div_Σ and grad_Σ the usual divergence and gradient surface operators:

$$\text{div } u = \text{div}_\Sigma(u - (u \cdot n)n) + Du(n) \cdot n + (c_1 + c_2)u \cdot n$$

$$\text{grad } p_0 = \text{grad}_\Sigma p_0 + (\text{grad } p_0 \cdot n)n$$

where c_1 and c_2 are the principal curvatures of Σ at the considered point, i.e. the eigenvalues of W .

Taking into account (26), it is deduced from (27):

$$\begin{aligned} [\tau^*(n)] &= -(p_0 \text{div}_\Sigma[u] + \text{grad}_\Sigma p_0 \cdot [u])n - p_0 W[u] \\ &= -\text{div}_\Sigma(p_0 [u])n - p_0 W[u]. \end{aligned}$$

From (26) and the definition of W , one may also deduce:

$$[Du(n) \cdot n]n = [Du^*(n)] + W[u],$$

so that:

$$[\tau^*(n)] = -n \text{div}_\Sigma(p_0 [u]) + p_0 [Du^*(n) - \{Du(n) \cdot n\}n].$$

From (30) it is then straightforward that:

$$\begin{aligned} [\tau'^*(n)] &= [\tau^*(n)] - p_0 [Du^*(n) - \text{div}(u)n], \\ &= (-\text{div}_\Sigma(p_0 [u]) + p_0 \text{div}_\Sigma [u])n \\ &= -([u] \cdot \text{grad}_\Sigma p_0)n. \end{aligned}$$

(3) From the definition (23) of the operator A , it is first reduced:

$$(A(u) | v) = \int_V -D_i \{ (c^{ijkl} + \sigma_0^{ik} g^{jl}) D_k u_i \} \bar{v}_j + \rho \{ g - g_0 - \Omega \times (\Omega \times u) \} \cdot \bar{v} dV.$$

With the help of Stoke's formula and taking into account expressions (19a) and (23b) it follows:

$$\begin{aligned}
 (A(u) | v) &= \int_V (c^{ijkl} + \sigma_0^{lk} g^{lk}) D_i u_j D_k \bar{v}_l + \rho \{ (\Omega \cdot u) (\Omega \cdot \bar{v}) - |\Omega|^2 u \cdot \bar{v} \} dV \\
 &+ \frac{G}{2} \int_{V \times V} \left\{ \frac{(u' - u) \cdot (\bar{v}' - \bar{v})}{|a' - a|^3} - 3 \frac{\{(a' - a) \cdot (u' - u)\} \{(a' - a) \cdot (\bar{v}' - \bar{v})\}}{|a' - a|^5} \right\} dmdm' \\
 &+ \int_{\Sigma} [\tau^*(n) \cdot \bar{v}] d\Sigma \tag{A3.1}
 \end{aligned}$$

where Σ comprises (33, 34) all solid-fluid (or fluid-fluid) interfaces, with unit normal n oriented following the jump through Σ .

The surface integral in (A3.1) is now to be evaluated. With the convention that the minus sign refers always to a fluid side, we deduce with the use of (35a) and (23b):

$$\begin{aligned}
 [\tau^*(n) \cdot \bar{v}] &= [\tau^*(n)] \cdot \bar{u}_+ + \tau_-(n) \cdot [\bar{v}], \\
 [\tau^*(n) \cdot \bar{v}] &= -(\bar{v} \cdot n) \operatorname{div}_{\Sigma}(p_0[u]) + p_0 (n \cdot \{Du_+(\bar{v}_+) - Du_-(\bar{v}_+)\} \\
 &\quad - (\bar{v} \cdot n) \{Du_+(n) \cdot n - Du_-(n) \cdot n\} + n \cdot \{Du_-(\bar{v}_+) - Du_-(\bar{v}_-)\}) \\
 &= -\operatorname{div}_{\Sigma}\{p_0[u](\bar{v} \cdot n)\} + p_0 \llbracket [u] \cdot \operatorname{grad}_{\Sigma}(\bar{v} \cdot n) + n \cdot [Du\{\bar{v} - (\bar{v} \cdot n)n\}] \rrbracket.
 \end{aligned}$$

Taking into account the following relation:

$$\begin{aligned}
 [v] \cdot \operatorname{grad}_{\Sigma}(u \cdot n) &= [v - (v \cdot n)n] \cdot \operatorname{grad}_{\Sigma}(u \cdot n) \\
 &= n \cdot [Du\{v - (v \cdot n)n\}] + [W\{v - (v \cdot n)n\} \cdot u]
 \end{aligned}$$

and the fact that the inner interfaces are closed surfaces, by Stoke's formula it is finally deduced:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma} [\tau^*(n) \cdot v] d\Sigma &= \int_{\Sigma} p_0 \llbracket [u] \cdot \operatorname{grad}_{\Sigma}(\bar{v} \cdot n) + [\bar{v}] \cdot \operatorname{grad}_{\Sigma}(u \cdot n) - \\
 &\quad [W\{u - (u \cdot n)n\} \cdot \{\bar{v} - (\bar{v} \cdot n)n\}] \rrbracket d\Sigma,
 \end{aligned}$$

which substituted in (A3.1) leads to (36).

(4) Let σ_N be any regular scalar function the value of which is $-p_0$ in V_F and 0 on ∂V . Let Σ denote all the interfaces where a fluid is involved and $S \{ \}$ the symmetric part:

$$S\{a(u, v)\} = \{a(u, v) + \overline{a(v, u)}\}/2.$$

Then:

$$\begin{aligned}
 &\int_V [S\{\operatorname{div}(\sigma_N(D\bar{v}(u) - u \operatorname{div}(\bar{v})))\}] dV \\
 &= \int_V [\sigma_N(D_i u^i D_j \bar{v}^j - (D_i u^i)(D_j \bar{v}^j)) + S\{(D\bar{v}(u) - u \operatorname{div}(\bar{v})) \cdot \operatorname{grad} \sigma_N\}] dV \\
 &= \int_{\Sigma} p_0 S\{[D\bar{v}^*(n) \cdot u - (u \cdot n) \operatorname{div}(\bar{v})]\} d\Sigma \\
 &= \int_{\Sigma} p_0 \llbracket [\bar{v}] \cdot \operatorname{grad}_{\Sigma}(u \cdot n) + [u] \cdot \operatorname{grad}_{\Sigma}(\bar{v} \cdot n) - [W\{u - (u \cdot n)n\} \cdot \{\bar{v} - (\bar{v} \cdot n)n\}] \\
 &\quad + S\{(u \cdot n)[\bar{v}] \cdot \operatorname{grad}_{\Sigma} p_0\} \rrbracket d\Sigma. \tag{A4.1}
 \end{aligned}$$

Furthermore, let us recall that:

$$\begin{aligned}
 & - \int_V \{Dg'_0(u) + \text{grad } \psi(u)\} \cdot \bar{v} \, dm \\
 &= \frac{G}{2} \int_{V \times V} \left\{ \frac{(u' - u) \cdot (\bar{v}' - \bar{v})}{|a' - a|^3} - 3 \frac{\{(a' - a) \cdot (u' - u)\} \{(a' - a) \cdot (\bar{v}' - \bar{v})\}}{|a' - a|^5} \right\} dm dm' \\
 & \quad + \int_V \{\Omega \times (\Omega \times u)\} \cdot \bar{v} \, dm \\
 &= - \int_V Dg'_0(u) \cdot \bar{v} \, dm - \int_V \frac{\text{grad } \psi(u) \cdot \text{grad } \psi(\bar{v})}{4\pi G} dV + \int_{\Sigma_\rho} \left[\rho \bar{v} - \frac{\text{grad } \psi(\bar{v})}{4\pi G} \right] \cdot n \psi(u) d\Sigma \\
 &= - \int_V Dg'_0(u) \cdot \bar{v} \, dm - \int_E \frac{\text{grad } \psi(u) \cdot \text{grad } \psi(\bar{v})}{4\pi G} dV, \tag{A4.2}
 \end{aligned}$$

where Σ_ρ consists of all the interfaces where ρ has a discontinuity and where the boundary conditions (20) have been taken into account.

With the help of these relations (A4.1, A4.2), expression (36) for $(A(u) | v)$ yields (38a). Then, in order to obtain (38b) we just have to observe that:

$$\text{div}(\rho(u \cdot g'_0) \bar{v}) = \rho(u \cdot g'_0) \text{div}(\bar{v}) + (u \cdot g'_0) \bar{v} \cdot \text{grad } \rho + \rho Dg'_0(u) \cdot \bar{v} + \rho g'_0 \cdot Du(\bar{v}).$$

(5) First of all recall that since the first coordinate is orthogonal to the other two:

$$g^{\beta\alpha} \Gamma_{\alpha 1}^\gamma = g^{\alpha\gamma} \Gamma_{\alpha 1}^\beta \tag{A5.1}$$

$$g^{\beta\alpha} \Gamma_{\alpha i}^1 = -g^{11} \Gamma_{1i}^\beta. \tag{A5.2}$$

(A5.1 may be easily obtained from the expression of the Christoffel symbols:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ki} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}), \text{ and (A5.2) comes from: } D_i g^{1\alpha} = \partial_i g^{1\alpha} = 0.$$

It is convenient to rewrite equations (22, 23):

$$D_i \tau^{ij} = \rho \delta_i \Psi^j, \text{ where (18):}$$

$$\delta_i \Psi = \partial_{1i}^2 u + 2\Omega \times \partial_i u - Dg'_0(u) - \text{grad } \psi.$$

This yields:

$$g^{11} D_1 \tau_1^\beta = \rho \delta_1 \Psi^\beta - \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} - \Gamma_{1\alpha}^\alpha \tau^{1\beta} - \Gamma_{1\alpha}^\beta \tau^{\alpha 1} \tag{A5.3a}$$

$$D_1 \tau_1^1 = \rho \delta_1 \Psi_1 - g_{11} D_\alpha \tau^{\alpha 1}. \tag{A5.3b}$$

Taking into account (53), (47) may be rewritten:

$$\begin{aligned}
 \tau^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} & \left\{ \left(A' - 2N' - \frac{F'^2}{C' + \sigma_N} \right) (\nabla_\gamma u^\gamma + \Gamma_{1\gamma}^\gamma u^1) + \frac{F'}{C' + \sigma_N} \tau_1^1 \right\} \\
 & + N' g^{\beta\gamma} (\nabla_\gamma u^\alpha + \Gamma_{1\gamma}^\alpha u^1) + (N' + \sigma_T) g^{\alpha\gamma} (\nabla_\gamma u^\beta + \Gamma_{1\gamma}^\beta u^1).
 \end{aligned}$$

Thus:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \left\{ \left(A' - 2N' - \frac{F'^2}{C' + \sigma_N} \right) \nabla_\alpha (\nabla_\gamma u^\gamma + \Gamma_{1\gamma}^\gamma u^1) + \frac{F'}{C' + \sigma_N} \nabla_\alpha \tau_1^1 \right\} \\ + N' g^{\beta\gamma} \nabla_\alpha (\nabla_\gamma u^\alpha + \Gamma_{1\gamma}^\alpha u^1) + (N' + \sigma_T) g^{\alpha\gamma} \nabla_\alpha (\nabla_\gamma u^\beta + \Gamma_{1\gamma}^\beta u^1), \end{aligned} \quad (A5.4)$$

(Note that since the first coordinate is orthogonal to the other two $\Gamma_{1\beta}^\alpha$ is a tensor of second order over the surfaces $x^1 = c^t$.)

Furthermore (see Choquet-Bruhat *et al.* 1982; Doubrovine *et al.* 1982):

$$\nabla_\alpha \nabla_\gamma u^\alpha = \nabla_\gamma \nabla_\alpha u^\alpha - R_{\delta\gamma} u^\delta, \quad (A5.5)$$

where $R_{\delta\gamma} = R^\alpha_{\delta\alpha\gamma}$ is the Ricci tensor obtained by contraction of the Riemann tensor. From the expression of the Riemann tensor:

$$R^{ijkl} = \partial_l \Gamma_{jk}^i - \partial_k \Gamma_{jl}^i + \Gamma_{pl}^i \Gamma_{jk}^p - \Gamma_{pk}^i \Gamma_{jl}^p,$$

and the flatness of Euclidian space one deduces:

$$R_{\delta\gamma} = \Gamma_{1\alpha}^\alpha \Gamma_{\delta\gamma}^1 - \Gamma_{1\gamma}^\alpha \Gamma_{\delta\alpha}^1. \quad (A5.6)$$

Substituting (A5.4) into (A5.3a) and taking into account (A5.1, 5.2, 5.5 and 5.6) leads to (55a).

Expressions (47) lead to:

$$\tau^{\alpha 1} = \frac{L'}{L' + \sigma_N} \tau^{1\alpha} + \left(\frac{L' \sigma_N}{L' + \sigma_N} + \sigma_T \right) g^{\alpha\beta} D_\beta u^1.$$

This equality is not tensorial. But taking into account:

$$D_\alpha \tau^{\alpha 1} = \partial_\alpha \tau^{\alpha 1} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \tau^{\beta 1} + \Gamma_{1\alpha}^1 \tau^{\alpha 1} + \Gamma_{\alpha 1}^\alpha \tau^{11} + \Gamma_{\alpha\beta}^1 \tau^{\alpha\beta},$$

and:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha (D_\beta u^1) + \Gamma_{\alpha 1}^1 D_\beta u^1 - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma D_\gamma u^1 = \nabla_\alpha \nabla_\beta u^1 + \nabla_\alpha (\Gamma_{\beta\gamma}^1 u^\gamma + \Gamma_{\beta 1}^1 u^1) \\ + \Gamma_{1\alpha}^1 (\nabla_\beta u^1 + \Gamma_{\beta 1}^1 u^1), \end{aligned}$$

permits us to obtain (55b), via (A5.3b).

(6) Taking into account equilibrium of the reference configuration (57), it is not difficult to deduce:

$$\begin{aligned} S \{ -\rho Dg'_0(u) \cdot \bar{v} + \{ D\bar{v}(u) - u \operatorname{div}(\bar{v}) \} \cdot \operatorname{grad} \sigma_N \} \\ = S \{ -\rho Dg'_0(u) \cdot \bar{v} - \rho g'_0 \cdot D\bar{v}(u) + \rho g'_0 \cdot u \operatorname{div}(\bar{v}) \} \\ - (\sigma_N - \sigma_T) \operatorname{tr}(W) S \{ D_i \bar{v}^1 u^i - u^1 D_i \bar{v}^i \} \\ = \rho S \{ g'_0 \cdot u \operatorname{div}(\bar{v}) - \bar{v} \cdot \operatorname{grad}(u \cdot g'_0) \} - (\sigma_N - \sigma_T) \operatorname{tr}(W) S \{ D_i \bar{v}^1 u^i - u^1 D_i \bar{v}^i \}. \end{aligned} \quad (A6.1)$$

Using this relation and (50b), expression (38a) yields:

$$\begin{aligned} (A(u)|v) = \int_V b^{ijk} D_i u_j D_k \bar{v}_l + \rho S \{ u \cdot g'_0 \operatorname{div}(\bar{v}) - \bar{v} \cdot \operatorname{grad}(u \cdot g'_0) \} \\ + (\sigma_N - \sigma_T) (D_\alpha u^\beta D_\beta \bar{v}^\alpha - g^{\alpha\beta} D_\alpha u^1 D_\beta \bar{v}_1 - D_\alpha u^\alpha D_\beta \bar{v}^\beta) \\ + \operatorname{tr}(W) S \{ u^1 D_\beta \bar{v}^\beta - D_\beta u^1 \bar{v}^\beta \} dV - \int_E \frac{\operatorname{grad} \psi(u) \cdot \operatorname{grad} \psi(\bar{v})}{4\pi G} dV. \end{aligned} \quad (A6.2)$$

Furthermore from (A5.1, 5.2, 5.5, 5.6) and (61) it may be deduced that:

$$\begin{aligned} & D_\alpha u^\beta D_\beta \bar{v}^\alpha - g^{\alpha\beta} D_\alpha u^1 D_\beta \bar{v}_1 - D_\alpha u^\alpha D_\beta \bar{v}^\beta + \text{tr}(W)S \{u^1 D_\beta \bar{v}^\beta - D_\beta u^1 \bar{v}^\beta\} \\ &= \nabla_\alpha (u^\beta \nabla_\beta \bar{v}^\alpha - u^\alpha \nabla_\beta \bar{v}^\beta) + \Gamma_{1\alpha}^\beta \Gamma_{1\beta}^\alpha u^1 \bar{v}^1 - g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u^1 \nabla_\beta \bar{v}_1 \\ &+ S \{ \nabla_\alpha (2\Gamma_{1\beta}^\alpha u^\beta \bar{v}^1 - \Gamma_{1\beta}^\beta \bar{v}^\alpha u^1) - u^1 \bar{v}^\beta \nabla_\beta (\Gamma_{1\alpha}^\alpha) \}. \end{aligned}$$

Thus, making use of Stoke's formula and taking into account the lateral invariance of $(\sigma_N - \sigma_T)$ it follows that:

$$\begin{aligned} & \int_V (\sigma_N - \sigma_T) [D_\alpha u^\beta D_\beta \bar{v}^\alpha - g^{\alpha\beta} D_\alpha u^1 D_\beta \bar{v}_1 - D_\alpha u^\alpha D_\beta \bar{v}^\beta \\ &+ \text{tr}(W)S \{u^1 D_\beta \bar{v}^\beta - D_\beta u^1 \bar{v}^\beta\}] dV \\ &= \int_V (\sigma_\pi - \sigma_\tau) [\text{tr}(W^2)u_N \bar{v}_N - \text{grad}_T u_N \cdot \text{grad}_T \bar{v}_N - S \{u_N \bar{v}_T \cdot \text{grad}_T \text{tr}(W)\}] dV. \end{aligned}$$

Taking into account this latter relation, (A6.2) yields (64a).

Let us now consider the tensor: $\tau''^{ij} = b^{ijkl} D_k u_l$. From (50) and by analogy with (46) it is clear that:

$$\begin{aligned} \tau''^{\alpha\beta} &= \{(A - 2N) \eta^\gamma_\gamma + F \eta^1_1\} g^{\alpha\beta} + 2N \eta^{\alpha\beta}, \quad \tau''^{\alpha 1} = 2L \eta^{\alpha 1}, \\ \tau'^{11} &= F \eta^\gamma_\gamma g^{11} + C \eta^{11}, \end{aligned} \tag{A6.3}$$

where the tensor η_{ij} is defined by $\eta_{ij} = (D_i u_j + D_j u_i)/2$ and (see 52) $s^j = \tau_1^j$. It follows that:

$$\begin{aligned} b^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{u}_l &= \tau''^{\alpha\beta} \bar{\eta}_{\alpha\beta} + 2\tau''^{1\alpha} \bar{\eta}_{1\alpha} + \tau''^{11} \bar{\eta}_{11} \\ &= (A - 2N - F^2/C) |\text{div}_T u_T + \text{tr}(W)u_N|^2 + |s_N|^2/C \\ &+ |s_T|^2/L + 2N \eta^{\alpha\beta} \bar{\eta}_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{A6.4}$$

Furthermore:

$$\begin{aligned} 2\eta^{\alpha\beta} \bar{\eta}_{\alpha\beta} &= \nabla_\gamma \{(g^{\alpha\gamma} u^\beta + g^{\beta\gamma} u^\alpha) (\nabla_\alpha \bar{u}_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^1 \bar{u}_1)\} + \nabla_\alpha (2g^{\alpha\gamma} \Gamma_{1\gamma}^\beta u^1 \bar{u}_\beta) \\ &- u^\beta g^{\alpha\gamma} \nabla_\gamma \nabla_\alpha \bar{u}_\beta - u^\alpha \nabla_\gamma \nabla_\alpha \bar{u}^\gamma + (g^{\alpha\gamma} u^\beta + g^{\beta\gamma} u^\alpha) \nabla_\gamma (\Gamma_{\alpha\beta}^1 \bar{u}_1) \\ &- 2\bar{u}_\beta \nabla_\alpha (g^{\alpha\gamma} \Gamma_{1\gamma}^\beta u^1) + 2\Gamma_{1\gamma}^\beta \Gamma_{1\beta}^\gamma u^1 \bar{u}_1. \end{aligned}$$

With the help of (A5.1, 5.2, 5.5, 5.6), (61) and Stoke's formula we deduce that:

$$\begin{aligned} \int_V 2N \eta^{\alpha\beta} \bar{\eta}_{\alpha\beta} dV &= - \int_V N [u_T \cdot \Delta_T \bar{u}_T + u_T \cdot \text{grad}_T \text{div}_T \bar{u}_T + \det(W) u_T \cdot \bar{u}_T \\ &- 2 \text{tr}(W^2) u_\pi \bar{u}_\pi + 4R \{u_N \bar{u}_T \cdot \text{grad}_T \text{tr}(W) + W(\bar{u}_T) \cdot \text{grad}_T u_\pi\}] dV, \end{aligned} \tag{A6.5}$$

where $R \{ \}$ denotes the real part.

Taking into account that:

$$\int_E \frac{|\text{grad } \psi|^2}{4\pi G} dV = \int_V \rho \text{grad } \psi \cdot \bar{u} dV$$

(see Appendix 4), and with the help of (A6.4, 6.5) and (59), (64b) may now be derived from (64a).

3. Lien entre les équations locales et les équations de la Mécanique rationnelle. Considérations énergétiques.

On a vu au paragraphe précédent que les perturbations adiabatiques de l'équilibre sont régies dans le repère tournant par l'équation locale (2.22) :

$$\partial^2_{tt} u + 2\Omega \wedge \partial_t u + Au = f(t) \quad (1)$$

avec :

$$(Au)^j = \frac{1}{\rho} D_i (c^{ijkl} D_k u_l + \sigma_0^{im} D_m u^j) - \left(G \int_{V_X V} \left\{ \frac{u'-u}{|a'-a|^3} - 3(a'-a) \frac{(a'-a)(u'-u)}{|a'-a|^5} \right\} dm' - \Omega \wedge (\Omega \wedge u) \right)^j .$$

Nous nous proposons de montrer que ces équations sont compatibles avec les équations de la mécanique rationnelle. En effet, il est aisé de montrer que :

$$\int_V Au \, dm = - \int_{\Sigma_F} [r^*(n)] \, d\Sigma - G \int_{V_X V} \left\{ \frac{u'-u}{|a'-a|^3} - 3(a'-a) \frac{(a'-a)(u'-u)}{|a'-a|^5} \right\} dm dm' - \int_V \Omega \wedge (\Omega \wedge u) \, dm \quad (2)$$

où $r^*(n)$ est défini au paragraphe précédent (2.21) .

Montrons d'abord que :

$$\int_{\Sigma_F} [r^*(n)] \, d\Sigma = 0 . \quad (3)$$

Rappelons qu'à une interface où intervient un fluide (voir paragraphe précédent (2.35a)) :

$$[r^*(n)] = - n \operatorname{div}_{\Sigma}(p_{\alpha}[u]) - p_{\alpha}W[u] .$$

Soit v un champ de vecteur constant dans V :

$$v \cdot \int_{\Sigma_F} [r^*(n)] d\Sigma = - \int_{\Sigma_F} \{n \cdot v \operatorname{div}_{\Sigma}(p_{\alpha}[u]) + W(p_{\alpha}[u]) \cdot v\} d\Sigma . \quad (4)$$

or :

$$n \cdot v \operatorname{div}_{\Sigma}(p_{\alpha}[u]) = \operatorname{div}_{\Sigma}(n \cdot v p_{\alpha}[u]) - p_{\alpha}[u] \cdot \operatorname{grad}_{\Sigma}(n \cdot v) , \quad (5)$$

et utilisant un système de coordonnées localement parallèle à Σ_F on déduit que :

$$\begin{aligned} p_{\alpha}[u] \cdot \operatorname{grad}_{\Sigma}(n \cdot v) &= D_{\alpha}(v_i n^i) p_{\alpha}[u]^{\alpha} \\ &= v_i D_{\alpha} n^i p_{\alpha}[u]^{\alpha} \\ &= v \cdot W(p_{\alpha}[u]) . \end{aligned} \quad (6)$$

La substitution de (6) dans (5), puis celle de (5) dans (4) montre grâce au théorème de Stokes que :

$$v \cdot \int_{\Sigma_F} [r^*(n)] d\Sigma = 0 .$$

Ceci étant vrai pour tout v , on en déduit (3).

Par un argument d'antisymétrie, on voit facilement que le deuxième terme de l'expression (2) est nul. De sorte que :

$$\int_V Au \, dm = - |\Omega|^2 \int_V u \, dm + (\Omega \cdot \int_V u \, dm) \cdot \Omega ,$$

Par intégration de l'expression (1) dans V on obtient alors :

$$\partial_{tt}^2 \int_V u \, dm + 2\Omega \wedge \partial_t \int_V u \, dm + (\Omega \cdot \int_V u \, dm) \cdot \Omega - |\Omega|^2 \int_V u \, dm = \int_V f \, dm . \quad (7)$$

Ce qui est d'ailleurs une identité puisque l'on suppose que le repère reste lié au centre des masses et donc que :

$$\int_V u \, dm = 0 \quad \text{et} \quad \int_V f \, dm = 0,$$

car f représente alors le champ des forces de marée ou des forces intérieures.

Calculons maintenant :

$$\int_V a \wedge Au \, dm.$$

Posant :

$$\tau^{ij} = c^{ijkl} D_k u_l + \sigma_0^{im} D_m u^j ,$$

on obtient :

$$\int_V a \wedge Au \, dm = - \int_V \epsilon_{pqj} a^q D_i \tau^{ij} \, dV - \int_V a \wedge (g - g_0 - \Omega \wedge (\Omega \wedge u)) \, dm . \quad (8)$$

Grâce à l'utilisation de la formule de Green, on déduit que :

$$- \int_V \epsilon_{pqj} a^q D_i \tau^{ij} = \int_V \epsilon_{pij} \tau^{ij} + \int_{\Sigma_F} a \wedge [\tau^*(n)] \, d\Sigma . \quad (9)$$

Il découle de l'antisymétrie de ϵ_{pij} en i, j et de l'équation d'équilibre que :

$$\int_V \epsilon_{pij} r^{ij} dV = \int_V \epsilon_{pij} \sigma_0^{ik} D_k u^j ,$$

$$= \int_{\Sigma_F} -\sigma_0(n) \wedge [u] d\Sigma + \int_V (g_0 - \Omega \wedge (\Omega \wedge a)) \wedge u dm . \tag{10}$$

La substitution de (10) dans (9) puis celle de (9) dans (8) conduit à :

$$\int_V a \wedge Au dm = \int_{\Sigma} \{a \wedge [r^*(n)] + p_0 n \wedge [u]\} d\Sigma +$$

$$+ \int_V \{(g_0 - \Omega \wedge (\Omega \wedge a)) \wedge u - a \wedge (g - g_0 - \Omega \wedge (\Omega \wedge u))\} dm . \tag{11}$$

Montrons que :

$$\int_V a \wedge (g-g_0) dm = \int_V g_0 \wedge u dm . \tag{12}$$

Il résulte en effet de l'expression (19a) du paragraphe précédent que :

$$\int_V a \wedge (g-g_0) dm = G \int_{V \times V} \left\{ \frac{a \wedge (u'-u)}{|a'-a|^3} - 3 a \wedge a' \frac{(a'-a) \cdot (u'-u)}{|a'-a|^5} \right\} dmdm' .$$

Il en découle par symétrisation :

$$= \frac{1}{2} G \int_{V \times V} \frac{(u'-u) \wedge (a'-a)}{|a'-a|^3} dmdm'$$

$$= \frac{1}{2} \int_V u' \wedge (G \int_V \frac{a'-a}{|a'-a|^3} dm) dm' - \frac{1}{2} \int_V u \wedge (G \int_V \frac{a'-a}{|a'-a|^3} dm') dm$$

$$= \int_V \mathbf{g}_0 \wedge \mathbf{u} \, dm .$$

Montrons maintenant que :

$$\int_{\Sigma_F} \{ \mathbf{a} \wedge [\mathbf{r}^*(\mathbf{n})] + \mathbf{p}_0 \mathbf{n} \wedge [\mathbf{u}] \} \, d\Sigma = 0 . \quad (13)$$

En effet l'expression (2.35a) du paragraphe précédent montre que :

$$\int_{\Sigma_F} \{ \mathbf{a} \wedge [\mathbf{r}^*(\mathbf{n})] + \mathbf{p}_0 \mathbf{n} \wedge [\mathbf{u}] \} \, d\Sigma = \int_{\Sigma_F} \{ \mathbf{n} \wedge (\mathbf{a} \operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{p}_\alpha[\mathbf{u}]) - \mathbf{a} \wedge W[\mathbf{p}_0 \mathbf{u}]) \} \, d\Sigma .$$

Soit \mathbf{v} un champ de vecteur constant dans V , calculons :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \int_{\Sigma_F} \{ \mathbf{n} \wedge (\mathbf{a} \operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{p}_\alpha[\mathbf{u}]) + \mathbf{p}_\alpha[\mathbf{u}] - \mathbf{a} \wedge W[\mathbf{p}_0 \mathbf{u}]) \} \, d\Sigma \\ = \int_{\Sigma_F} \{ (\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{a}) \operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{p}_\alpha[\mathbf{u}]) + (\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{p}_\alpha[\mathbf{u}]) - (\mathbf{v}, \mathbf{a}, W[\mathbf{p}_0 \mathbf{u}]) \} \, d\Sigma \end{aligned} \quad (14)$$

L'utilisation d'un système de coordonnées parallèles à Σ_F montre que :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{a}) \operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{p}_\alpha[\mathbf{u}]) &= \operatorname{div}_\Sigma((\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{a}) \mathbf{p}_\alpha[\mathbf{u}]) + (W[\mathbf{p}_\alpha[\mathbf{u}]], \mathbf{v}, \mathbf{a}) + \epsilon^{ijk} v_j D_\alpha a_k \mathbf{p}_\alpha[\mathbf{u}]^\alpha n_i \\ &= \operatorname{div}_\Sigma((\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{a}) \mathbf{p}_\alpha[\mathbf{u}]) + (W[\mathbf{p}_\alpha[\mathbf{u}]], \mathbf{v}, \mathbf{a}) + (\mathbf{n}, \mathbf{v}, \mathbf{p}_0[\mathbf{u}]) . \end{aligned}$$

Par substitution de cette dernière expression et utilisant le théorème de Stokes, on déduit que l'expression (14) est nulle. Ce qui donne (13) puisque ceci reste valable pour tout champ \mathbf{v} constant.

Il résulte de (11), (12) et (13) que :

$$\int_V \mathbf{a} \wedge \mathbf{A}u \, dm = - \Omega \wedge \int_V (u \cdot \Omega) \mathbf{a} - (a \cdot \Omega) \mathbf{u} \, dm .$$

De l'expression (1), on déduit alors que :

$$\int_V \mathbf{a} \wedge \partial_{tt}^2 \mathbf{u} \, dm + 2 \int_V \mathbf{a} \wedge (\Omega \wedge \partial_t \mathbf{u}) \, dm - \Omega \wedge \int_V \{ (u \cdot \Omega) \mathbf{a} + (a \cdot \Omega) \mathbf{u} \} \, dm = \int_V \mathbf{a} \wedge \mathbf{f} \, dm . \quad (15)$$

Comme \mathbf{f} représente la densité des forces de marée ou des forces intérieures, le terme :

$$\int_V \mathbf{a} \wedge \mathbf{f} \, dm \text{ se réduit aux moments des forces de marées.}$$

L'expression (15) s'interprète physiquement comme la conservation, au premier ordre en \mathbf{u} , du moment cinétique \mathbf{M} par rapport au centre des masses, à l'influence des forces de marées près.

En effet :

$$\mathbf{M} = \int_V (\mathbf{a} + \mathbf{u}) \wedge (\partial_t \mathbf{u} + \Omega \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{u})) \, dm . \quad (16)$$

De sorte que dans le repère tournant :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \int_V \{ \partial_t \mathbf{u} \wedge (\Omega \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{u})) + (\mathbf{a} + \mathbf{u}) \wedge (\partial_{tt}^2 \mathbf{u} + \Omega \wedge \partial_t \mathbf{u}) \} \, dm ,$$

et que dans un repère Galiléen :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{M}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \Omega \wedge \mathbf{M} \\ &= \int_V \{ \partial_t \mathbf{u} \wedge (\Omega \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{u})) + (\mathbf{a} + \mathbf{u}) \wedge (\partial_{tt}^2 \mathbf{u} + \Omega \wedge \partial_t \mathbf{u}) + \Omega \wedge ((\mathbf{a} + \mathbf{u}) \wedge (\partial_t \mathbf{u} + \Omega \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{u}))) \} \, dm . \end{aligned}$$

Ne conservant que les termes du premier ordre en $u, \partial_t u, \partial_{tt} u$ cela nous conduit à :

$$\frac{dM}{dt} \simeq \int_V \{a \wedge (\partial_{tt} u + 2\Omega \wedge \partial_t u) - \Omega \wedge (a \cdot \Omega (a+u) + u \cdot \Omega a)\} dm .$$

Remarquant que Ω est direction propre du tenseur d'inertie on déduit que :

$$\int_V (\Omega \wedge a) a \cdot \Omega dm = 0 ,$$

et donc que :

$$\frac{dM}{dt} \simeq \int_V \{a \wedge (\partial_{tt} u + 2\Omega \wedge \partial_t u) - \Omega \wedge (a \cdot \Omega u + u \cdot \Omega a)\} dm . \quad (17)$$

Cela montre que le premier terme de (15) est, au premier ordre, égal à la dérivée du moment cinétique (17).

Le point de vue énergétique associé conduit, quant à lui, à la conservation de $\Omega \cdot M$ au deuxième ordre en u . En effet la variation d'énergie cinétique est :

$$\delta C = \frac{1}{2} \int_V \{|\partial_t(u) + \Omega \wedge (a+u)|^2 - |\Omega \wedge a|^2\} dm ,$$

et la variation d'énergie interne s'exprime au deuxième ordre en u par (voir paragraphe 2 (37)) :

$$\delta I = \frac{1}{2} \{a(u, u) + \int_V \{|\Omega \wedge (a+u)|^2 - |\Omega \wedge a|^2\} dm .$$

De sorte que d'après (16) :

$$\delta E = \delta C + \delta I = \frac{1}{2} E_{C,R} + \Omega \cdot \delta M$$

avec (cf. paragraphe 2 (41))

$$E_{C,R} = \frac{1}{2} \{ (Au|u) + (\partial_t u | \partial_t u) \} .$$

Ainsi :

$$\frac{d}{dt}(\delta E) = (Au + \partial_{tt}^2 u | \partial_t u) + \Omega \cdot \frac{d}{dt}M(t) = 0 .$$

Il en résulte que $\Omega \cdot \frac{d}{dt}M(t) = 0$, au deuxième ordre, car :

$$\partial_{tt}^2 u + 2\Omega \wedge \partial_t u + Au = \alpha(u) \quad \text{et} \quad (\Omega \wedge \partial_t u | \partial_t u) = 0 .$$

Notons enfin que le fait que A et B (= $\Omega \wedge .$) ne commutent pas est intimement lié à la linéarité de A (1er ordre en u). En effet, de l'expression (16) de M, on déduit que :

$$\Omega \cdot \frac{dM}{dt} = \int_V (\Omega, a + u, Au + \alpha(u)) \, dm = 0 .$$

Puisque :

$$\int_V (\Omega, a, Au) \, dm = 0 ,$$

il s'ensuit que :

$$(B.Au|u) = \int_V (\Omega, a + u, \alpha(u)) \, dm$$

$(B.Au|u)$ est bien du deuxième ordre en u et ne peut donc être systématiquement nul pour u réel.

4. Cas d'un écoulement stationnaire quelconque dans le noyau externe.

Les calculs de perturbations d'écoulements stationnaires sont bien connus en Astrophysique. On renvoie, entre autres, aux articles de Chandrasekhar & Lebovitz, Freeman & Schutz, au livre de W. Unno et al., ainsi qu'au chapitre de Schutz dans le livre édité par Lebovitz. Les

particularités liées au problème du noyau externe sont que, d'une part on doit tenir compte des conditions aux limites avec la graine et le manteau et que, d'autre part les calculs de perturbation sont à effectuer dans le repère tournant lié au manteau.

On convient donc de repérer l'écoulement dans le noyau externe par rapport à l'espace Euclidien en rotation uniforme Ω , avec comme origine le centre des masses de la Terre. Dans cette espace les particules fluides ont pour trajectoire :

$$t \rightarrow x(t) ,$$

et $\frac{dx(t)}{dt}$ est indépendant de t puisque le mouvement est supposé stationnaire. On pose donc :

$$\xi(x) = \frac{dx(t)}{dt} .$$

La stationnarité de l'équilibre se traduit alors par les relations :

$$\begin{array}{ll} \text{div}(\rho\xi) = 0 & \text{a)} \\ \text{grad}p_0 = \rho g_0'' & \text{b)} \\ g_0'' = g'_0 - 2\Omega \wedge \xi - D\xi(\xi) - \partial_t \xi , \quad \partial_t \xi = 0 \text{ et } \xi \cdot n = 0 \text{ sur } \partial V_F & \text{c)} \end{array} \quad (1)$$

Pour décrire la perturbation de cet équilibre stationnaire, on introduit à la suite de Freeman & Schutz, un champ de vecteur $u(x,t)$ qui décrit la perturbation des trajectoires du fluide :

$$t \rightarrow x'(t) = x(t) + u(x(t),t) . \quad (2)$$

$u(x,t)$ est "la perturbation Lagrangienne de trajectoire". La subtilité à saisir ici est que, du fait de l'hypothèse de stationnarité, les propriétés physiques et la vitesse de la particule fluide en un point de l'espace tournant ne dépendent pas de cette particule. La notion de perturbation Lagrangienne n'est donc pas stricte mais relative aux trajectoires.

On obtient par dérivation de (2) que :

$$\xi(x't) = \xi(x,t) + \partial_t u(x,t) + Du(\xi) , \quad (3a)$$

c'est à dire :

$$\delta_1 \xi = \partial_t u + Du(\xi) . \quad (3b)$$

Une nouvelle dérivation nous conduit à :

$$\delta_1(\gamma_r) = \partial_{tt} u + 2D(\partial_t u)(\xi) + D(Du(\xi))(\xi)$$

où $\gamma_r = \partial_t \xi + D\xi(\xi)$ désigne l'accélération relative dans le repère tournant. Il s'ensuit en utilisant les résultats du paragraphe précédent que :

$$\delta_1(g'') = - \partial_{tt} u - 2D(\partial_t u)(\xi) - D(Du(\xi))(\xi) - 2\Omega \wedge \delta_1 \xi + Dg_0'(u) + \text{grad}(\psi(u)) ,$$

puis, grâce à (3b), que :

$$\delta_1(g'') = - \partial_{tt} u - 2(D(\partial_t u)(\xi) + \Omega \wedge \partial_t u) - D(Du(\xi))(\xi) - 2\Omega \wedge Du(\xi) + Dg_0'(u) + \text{grad}(\psi(u)) . \quad (4)$$

La perturbation Lagrangienne de l'expression (1b) conduit grâce à l'utilisation de la relation (3) du premier paragraphe à :

$$\text{grad}(\delta_1 p) - (Du)^*(\text{grad} p_0) - \delta_1(\rho)g'' - \rho\delta_1(g'') = 0$$

Du fait que pour une perturbation adiabatique, en notant γ l'indice adiabatique du fluide (voir paragraphe 2) :

$$\delta_1 \rho = - \rho \text{div}(u)$$

$$\delta_1 p = - \gamma p_0 \text{div}(u) ,$$

et en vertu de (1) et (4), on en déduit que :

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u + 2(D(\partial_t u)(\xi) + \Omega \wedge \partial_t u) + D(Du(\xi))(\xi) + 2\Omega \wedge Du(\xi) - Dg_0'(u) - \text{grad}(\psi(u)) - \\ - \frac{1}{\rho} \{ \text{grad}(\gamma p_0 \text{div}(u)) + Du^*(\text{grad} p_0) - \text{div}(u) \text{grad} p_0 \} = 0 . \quad (6) \end{aligned}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\partial_{tt} u + 2B \partial_t u + Au = 0$$

avec :

$$Bu = Du(\xi) + \Omega \wedge u \quad (5)$$

$$Au = - \frac{1}{\rho} \{ \text{grad}(\gamma p_0 \text{div}(u)) + Du^*(\text{grad} p_0) - \text{div}(u) \text{grad} p_0 \} - \\ - Dg_0'(u) - \text{grad}(\psi(u)) + 2\Omega \wedge Du(\xi) + D(Du(\xi))(\xi) . \quad (6)$$

Comparons l'opérateur A à celui obtenu au paragraphe précédent dans le cas d'une rotation uniforme. Pour ce faire réintroduisons le tenseur c^{ijkl} qui pour un fluide (voir le paragraphe précédent expression 16 et suivante) s'exprime par :

$$c^{ijkl} = p_0(\gamma-1)g^{ij}g^{kl} + p_0(g^{ik}g^{jl} + g^{jk}g^{il}) .$$

On voit alors que :

$$(Au)^j = - \frac{1}{\rho} D_i \tau^{ij} - [Dg_0'(u) + \text{grad}(\psi(u)) - 2\Omega \wedge Du(\xi) - D(Du(\xi))(\xi)]^j$$

avec :

$$\tau^{ij} = c^{ijkl} D_k u_l - p_0 g^{ik} D_k u^j$$

La différence avec le cas où le noyau est en rotation uniforme se traduit donc par l'addition du terme $2\Omega \wedge Du(\xi) + D(Du(\xi))(\xi)$ et par le fait que l'équation d'équilibre est maintenant $\text{grad} p_0 = \rho g_0''$. Cette remarque s'avère utile pour le calcul de la forme sesquilinéaire associée à l'opérateur A. En effet il est clair que les conditions aux limites obtenues au paragraphe précédent en 3-3 restent inchangées puisque la pression en un point de l'interface côté fluide est indépendante de la particule qui se trouve dans l'état stationnaire de référence. Les calculs effectués en 3.4 au paragraphe précédent peuvent donc être repris puisque l'on n'a utilisé la condition d'équilibre que pour l'obtention des formules (39). Plus précisément utilisant l'expression (38b) on obtient grâce à la condition d'équilibre (1b) dans V_F :

(Au|v) =

$$\begin{aligned}
 & \int_{V_S} \pi^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{v}_l + S\{(\rho g_0' - \text{grad} \pi_0) \cdot D \bar{v}(u) + (\rho g_0' + \text{grad} \pi_0) \cdot u \text{ div}(\bar{v}) + (g_0' \cdot u) (\bar{v} \cdot \text{grad} \rho)\} dV + \\
 & + \int_{\Sigma_S} S\{(g_0' \cdot u) (\bar{v} \cdot n) [\rho]\} d\Sigma + \int_{\partial V_S \cap \partial V_F} S\{(\bar{v} \cdot n) [u \cdot (\rho g_0' - \text{grad}_{\Sigma} p_0)]\} d\Sigma + \quad (7) \\
 & + \int_{V_F} p_0 \gamma \text{div}(u) \text{div}(\bar{v}) + S\{2\rho g_0' \cdot u \text{div}(\bar{v}) + (g_0' \cdot u) (\bar{v} \cdot \text{grad} \rho) + 2\rho \Omega \wedge Du(\xi) \cdot \bar{v} + \rho D(Du(\xi))(\xi) \cdot \bar{v} + \\
 & + \rho(2\Omega \wedge \xi + D\xi(\xi)) \cdot (D\bar{v}(u) - u \text{div}(\bar{v}))\} dV - \int_E \frac{\text{grad}\psi(u) \cdot \text{grad}\psi(\bar{v})}{4\pi G} dV .
 \end{aligned}$$

où π_0 est une fonction régulière qui prolonge p_0 dans V_S et s'annule sur ∂V , Σ_S désigne les interfaces soudées, $\partial V_F \cap \partial V_S$ les interfaces solide-fluide, et où :

$$\pi^{ijkl} = c^{ijkl} + \sigma_0^{ik} g^{jl} + \pi_0 (g^{ij} g^{kl} - g^{jk} g^{il}) .$$

Remarquons tout d'abord que :

$$D(Du(\rho\xi))(\xi) \cdot \bar{v} = \text{div}(\rho\xi(Du(\xi) \cdot \bar{v})) - \text{div}(\rho\xi) Du(\xi) \cdot \bar{v} - \rho D\bar{v}(\xi) \cdot Du(\xi) , \quad (8)$$

$$\Omega \wedge Du(\rho\xi) \cdot \bar{v} = \text{div}((\Omega \wedge u \cdot \bar{v}) \rho\xi) - (\Omega \wedge u \cdot \bar{v}) \text{div}(\rho\xi) + \Omega \wedge D\bar{v}(\rho\xi) \cdot u , \quad (9)$$

et que :

$$\begin{aligned}
 \rho(2\Omega \wedge \xi + D\xi(\xi)) \cdot D\bar{v}(u) &= \text{div}(\rho u (2\Omega \wedge \xi + D\xi(\xi)) \cdot \bar{v}) - \rho(2\Omega \wedge \xi + D\xi(\xi)) \cdot \bar{v} \text{div} u \\
 &- 2\rho \Omega \wedge D\xi(u) \cdot \bar{v} + \rho D(D\xi(\xi))(u) \cdot \bar{v} - \text{grad} \rho \cdot u (2\Omega \wedge \xi + D\xi(\xi)) \cdot \bar{v} . \quad (10)
 \end{aligned}$$

Utilisant alors que $\text{div}(\rho\xi) = 0$ (1a) et que $\xi \cdot n = 0$ sur $\partial V_F \cap \partial V_S$ (1c), on en déduit que l'intégrale portant sur V_F dans l'expression (7) prend la forme :

$$\int_{V_F} \rho_0 \gamma \operatorname{div}(u) \operatorname{div}(\bar{v}) + S(2\rho g_0'' \cdot u \operatorname{div}(\bar{v}) + (g_0'' \cdot u) (\bar{v} \cdot \operatorname{grad} \rho) + \rho \bar{v} \cdot (2\Omega \wedge (Du(\xi) - D\xi(u)) - \rho D(D\xi(\xi))(u))) - \rho Du(\xi) \cdot D\bar{v}(\xi) \, dV + \int_{\partial V_F \cap \partial V_S} S((u \cdot n) (2\Omega \wedge \xi + D\xi(\xi)) \cdot \rho_F \bar{v}_F) \, d\Sigma, \quad (11)$$

où n est orienté vers l'extérieur de V_F .

Considérons maintenant dans l'expression (7) le terme :

$$\int_{\partial V_S \cap \partial V_F} S((\bar{v} \cdot n) [u \cdot (\rho g_0' - \operatorname{grad}_\Sigma p_0)]) \, d\Sigma .$$

Avec la convention d'orientation de n vers l'extérieur de V_F , on obtient :

$$\operatorname{grad}_\Sigma p_0 = \rho - (g_0'' - (g_0'' \cdot n)n)$$

et donc :

$$\begin{aligned} (\bar{v} \cdot n) [u \cdot (\rho g_0' - \operatorname{grad}_\Sigma p_0)] &= (\bar{v} \cdot n) (u_+ (\rho_+ g_0' - \rho_+ g_0'' + \rho_+ (g_0'' \cdot n)n) - u_- (\rho_- g_0' - \rho_- g_0'' + \rho_- (g_0'' \cdot n)n)) \\ &= (\bar{v} \cdot n) ([\rho](u_S \cdot g_0') + (2\Omega \wedge \xi + D\xi(\xi)) \cdot \rho_F [u]) . \end{aligned}$$

De sorte que :

$$\begin{aligned} \int_{\partial V_S \cap \partial V_F} S((\bar{v} \cdot n) [u \cdot (\rho g_0' - \operatorname{grad}_\Sigma p_0)]) \, d\Sigma &= \\ &= \int_{\partial V_S \cap \partial V_F} S((\bar{v} \cdot n) ([\rho](u_S \cdot g_0') + (2\Omega \wedge \xi + D\xi(\xi)) \cdot \rho_F [u])) \, d\Sigma . \quad (12) \end{aligned}$$

Reportant les expression (11) et (12) dans (7) on est conduit finalement à :

$(Au|v) =$

$$\begin{aligned} & \int_{V_S} \pi^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{v}_l + S\{(\rho g_0' \cdot \text{grad} \pi_0) \cdot D\bar{v}(u) + (\rho g_0' + \text{grad} \pi_0) \cdot u \text{ div}(\bar{v}) + (g_0' \cdot u) (\bar{v} \cdot \text{grad} \rho)\} dV + \\ & + \int_{\Sigma_S} S\{g_0' \cdot u (\bar{v} \cdot n)\} [\rho] d\Sigma + \int_{\partial V_S \cap \partial V_F} S\{(\bar{v} \cdot n) u_S \cdot (\rho_S g_0' - \rho_F g_0'')\} d\Sigma + \quad (13) \\ & + \int_{V_F} \rho_0 \gamma \text{div}(u) \text{div}(\bar{v}) + S\{2\rho g_0'' \cdot u \text{div} \bar{v} + (g_0'' \cdot u) (\bar{v} \cdot \text{grad} \rho) + \rho \bar{v} \cdot (2\Omega \wedge (Du(\xi) - D\xi(u)) - \\ & - D(D\xi(\xi)(u)))\} - \rho Du(\xi) \cdot D\bar{v}(\xi) dV - \int_E \frac{\text{grad}(\psi(u)) \cdot \text{grad}(\psi(\bar{v}))}{4\pi G} dV . \end{aligned}$$

L'opérateur A apparait aussi comme formellement symétrique, malheureusement il n'est pas borné inférieurement ce qui rend difficile son étude mathématique. C'est pourquoi nous nous restreindrons au cas de la rotation uniforme au chapitre suivant.

Montrons maintenant que l'opérateur B est formellement antisymétrique; en effet d'après (5) :

$$(Bu|v) = \int_V \{Du(\rho\xi) \cdot \bar{v} + \rho(\Omega \wedge u) \cdot \bar{v}\} dV , \quad (14)$$

Utilisant que :

$$Du(\rho\xi) \cdot \bar{v} = \text{div}(u \cdot \bar{v} \rho\xi) - u \cdot \bar{v} \text{div}(\rho\xi) - D\bar{v}(\rho\xi) \cdot u$$

et que (1a), 1(c) :

$$\text{div}(\rho\xi) = 0 , \quad \xi = 0 \quad \text{dans } V_S \quad \text{et} \quad \xi \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \partial V_S \cap \partial V_F ,$$

on déduit de (15) que :

$$\begin{aligned} (Bu|v) &= - \int_V \{ D\bar{v}(\rho\xi).u + \rho(\Omega \wedge \bar{v}).u \} dV , \\ &= - \overline{(Bv|u)} . \end{aligned} \tag{15}$$

"Mathematicians are like Frenchmen :

Whatever you say to them they translate into their own language and forthwith it is something entirely different"

J. W. Goethe

(Cité par M. Reed & B. Simon dans Methods of Modern Mathematical Physics, Vol I)

II ÉTUDE MATHÉMATIQUE DE L'OPÉRATEUR DE L'ÉLASTO-GRAVITÉ

Nous nous proposons dans ce chapitre de définir mathématiquement l'opérateur de l'élasto-gravité, de prouver qu'il est auto-adjoint et de préciser son spectre. Nous avons vu en effet au chapitre précédent que cet opérateur intervient dans l'équation régissant au premier ordre les perturbations adiabatiques d'une planète autour d'une configuration d'équilibre, en rotation uniforme dans un espace Galiléen. La principale difficulté de cette étude est due à la présence d'une éventuelle partie fluide comme, par exemple, le noyau externe dans le cas de la Terre. La présence de zone fluide fait perdre, en effet, la compacité de l'opérateur résolvant et il apparaît ainsi un spectre essentiel. Cela nous conduit à l'étude de certains espaces fonctionnels liés aux espaces $H(\text{div}, V)$ déjà considérés par Duvaut & Lions.

1-Rappels et Notations.

Considérons donc une planète en équilibre et en rotation uniforme dans un espace Galiléen. La planète étant en équilibre, l'axe de rotation correspond, comme on l'a rappelé au chapitre précédent, à la direction propre de la plus grande ou de la plus petite valeur d'inertie. Il est usuel d'adopter comme référence le repère orthonormé direct lié au centre des masses et dont les axes correspondent aux directions d'inertie, le troisième axe portant le vecteur de rotation Ω . Le repère tourne donc, lié à la planète. Soit V le volume qu'elle occupe dans cette configuration de référence.

On suppose que V est un ouvert borné, connexe et simplement connexe de \mathbb{R}^3 de frontière ∂V . On suppose de plus que la surface ∂V n'a qu'une composante connexe, est au moins de classe C^2 et que V est situé localement d'un seul côté de ∂V . On considère enfin la partition suivante de V :

$$V = \left\{ \bigcup_{i=1,n} V_i \right\} \cup \Sigma$$

où les V_i sont des ouverts connexes, deux à deux disjoints qui sont situés localement d'un seul côté de leurs frontières respectives, supposées être des surfaces de classe C^2 au moins, orientées et fermées ; et où Σ désigne l'ensemble de ces interfaces, ∂V mise à part.

On convient également de noter :

$$V_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{V}$$

Physiquement cette partition correspond à la séparation en grandes structures de la planète. Dans le cas où la planète possède des zones fluides, il convient de les spécifier. On note donc dans ce cas (voir la figure 1 page 6) :

$$V_S = \{ \cup V_i \}_{i=1,m} \cup \Sigma_S \quad , \quad V_F = \{ \cup V_i \}_{i=m+1,n} \quad , \quad \Sigma_S = \Sigma \setminus (\Sigma_F \cup \partial V_F \cup \partial V_S) \quad ,$$

où Σ_F est la réunion des différentes interfaces intérieures à V_F , c'est à dire qui marquent la frontière entre deux zones fluides de la planète. Dans le cas de la Terre, les différents ouverts V_i ($i \geq m+1$) qui correspondent alors aux différentes couches du noyau externe fluide, ou bien encore aux différentes couches atmosphériques lorsqu'on les considère dans l'évolution dynamique, sont habituellement considérées comme simplement connexes. Nous le supposons donc systématiquement bien que ce ne soit pas essentiel.

Nous avons vu au chapitre précédent que les équations qui régissent au premier ordre les perturbations adiabatiques libres de la planète autour de sa position d'équilibre s'écrivent formellement :

$$\partial_{tt} u + 2\Omega \wedge u + Au = 0 \quad , \quad \text{dans } V \quad ,$$

où u est le champ des déplacements Lagrangiens des particules de V et A l'opérateur de l'élasto-gravité dont l'expression formelle est :

$$A = A_1 - A_2 \quad , \quad \text{avec :}$$

$$A_1 u = -\frac{1}{\rho} D_i \{ c^{ijkl} D_k u_l + \sigma_0^{ik} D_k u^j \} \quad , \quad (1)$$

$$A_2 u = \text{grad}(\psi(u)) + Dg_0'(u)$$

$$(A_3 u = \text{grad}(\psi(u)) + Dg_0(u) , A_2 u = A_3 u - \Omega \wedge (\Omega \wedge u))$$

où :

$$\psi(u)(x) = -G \int_V \frac{x' - x}{|x' - x|^3} \cdot u(x') \, dm' , \quad \Delta(\psi(u)) = 4\pi G \text{div}(\rho u) , \quad (2)$$

$$g_0'(x) = g_0(x) - \Omega \wedge (\Omega \wedge x) , \quad g_0(x) = G \int_V \frac{x' - x}{|x' - x|^3} \, dm' , \quad dm' = \rho(x') \, dx' ,$$

et où, par simplification d'écriture, on a noté $Dg_0(u)$ et $Dg_0'(u)$ les champs vectoriels $Dg_0(x)u$ et $Dg_0'(x)u$. Dans ces expressions,

G est la constante de la gravitation,

$\rho(x)$ est la masse volumique au point x de V de la configuration d'équilibre prise comme référence,

$g_0(x)$ est le champ de gravité qui dérive du potentiel Newtonien associé à cette distribution de masses ρ dans la configuration de référence,

$\psi(u)$ le potentiel de redistribution des masses, c'est à dire au signe près la perturbation Eulérienne du potentiel Newtonien associée au champ de déplacement u ,

σ_0^{ij} le champ des contraintes dans la configuration d'équilibre, ($\sigma_0^{ij} = -p_0 g^{ij}$ dans V_F , g^{ij} représentant le tenseur métrique),

et c^{ijkl} le deuxième tenseur de l'élasticité qui présente les symétries :

$$c^{ijkl} = c^{klij} = c^{ikjl} \quad (c^{ijkl} = p_0 \{ (\gamma-1)g^{ij}g^{kl} + g^{ik}g^{jl} + g^{jk}g^{il} \} \text{ dans } V_F, \gamma \text{ étant l'indice adiabatique du fluide}) .$$

Par ailleurs l'équilibre de la configuration de référence impose :

$$D_i \sigma_0^{ij} + \rho g_0' = 0 \quad \text{dans } V. \quad (3)$$

Quant aux conditions aux limites, elles prennent la forme :

$$\begin{array}{ll}
 \sigma_0(\mathbf{n}) = 0, (\sigma - \sigma_0)(\mathbf{n}) + \text{Du}(\sigma_0(\mathbf{n})) = 0 & \text{sur } \partial V \quad \} \\
 [\mathbf{u}] = 0, [(\sigma - \sigma_0)(\mathbf{n}) + \text{Du}(\sigma_0(\mathbf{n}))] = 0 & \text{sur } \Sigma_S \quad \} (4) \\
 [\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}] = 0, [(\sigma - \sigma_0)(\mathbf{n}) + \text{Du}(\sigma_0(\mathbf{n}))] = -\text{ndiv}_{\Sigma}(\mathbf{p}_0[\mathbf{u}]) - \mathbf{p}_0 W[\mathbf{u}] & \text{sur } \Sigma_F \cup (\partial V_S \cap \partial V_F) \quad \}
 \end{array}$$

où :

$\sigma - \sigma_0$ est le tenseur défini par $(\sigma - \sigma_0)^{ij} = c^{ijkl} D_k u_l$,

\mathbf{n} est le vecteur normal à Σ ou ∂V , orienté vers l'extérieur dans le cas de ∂V ,

$[]$ représente l'opérateur saut, orienté en conformité avec \mathbf{n} ,

W est l'opérateur de Weingarten relatif à la surface orientée considérée,

et div_{Σ} la divergence surfacique qui vérifie notamment :

$$\text{div}_{\Sigma}(\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}) = \text{div}(\mathbf{u}) - \text{Du}(\mathbf{n})\cdot\mathbf{n} - \text{tr}(W)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}).$$

2-Cadre fonctionnel.

On note $L^2(V)$ l'espace des champs de vecteurs dont les différentes composantes cartésiennes sont de carré sommable dans V , c'est à dire sont dans l'espace $L^2(V)$. $L^2(V)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(\mathbf{u}|\mathbf{v})_{L^2(V)} = \int_V \mathbf{u}\cdot\bar{\mathbf{v}} \, dV$$

où le point "." représente le produit scalaire Euclidien dans \mathbb{R}^3 (ou plus généralement dans \mathbb{R}^n) et la barre "-" la conjugaison.

D'une manière générale on notera en caractères gras les espaces de champs de vecteurs; ainsi, par exemple, $\mathbf{D}(V)$ représente l'espace des champs de vecteurs dont les composantes cartésiennes sont dans $\mathbf{D}(V)$, l'espace des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact.

Rappelons que, pour tout entier $m \geq 0$, on définit $H^m(V)$ comme l'espace des fonctions appartenant à $L^2(V)$ dont les dérivées, au sens des distributions, d'ordre inférieur ou égal à m sont également dans $L^2(V)$. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(\mathbf{u}|\mathbf{v})_{H^m(V)} = (\mathbf{u}|\mathbf{v})_{L^2(V)} + \sum_{|\alpha| \leq m} (\mathbf{D}_{\alpha} \mathbf{u} | \mathbf{D}_{\alpha} \mathbf{v})_{L^2(V)}.$$

On considèrera également les espaces $H^m(V)$ qui sont des espaces de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u|v)_{H^m(V)} = (u|v)_{L^2(V)} + \sum_{|\alpha| \leq m} (D_\alpha u | D^\alpha v)_{L^2(V)} .$$

Rappelons qu'un ouvert est dit avoir la propriété de m -prolongement si pour tout entier $k \leq m$, il existe un opérateur linéaire de prolongement qui soit continu de $H^k(V)$ dans $H^k(\mathbb{R}^3)$. Un ouvert borné à bord de classe C^m , qui est situé localement d'un seul côté de ce bord, possède la propriété de m -prolongement. Remarquons qu'il est essentiel de supposer que V soit localement d'un seul côté de son bord afin d'éviter les fissures internes ou les interfaces qui interdiraient la possibilité d'un prolongement régulier systématique.

Pour tout s réel on définit également l'espace :

$$H^s(\mathbb{R}^3) = \{ u \in L^2(\mathbb{R}^3) : (1+|\xi|^2)^{s/2} |F(u)(\xi)| \in L^2(\mathbb{R}^3) \} ,$$

où F désigne la transformée de Fourier. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u|v)_{H^s(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^s F(u)(\xi) \overline{F(v)(\xi)} d\xi .$$

On définit $H^s(V)$ comme l'espace des restrictions à V des éléments de $H^s(\mathbb{R}^3)$. Le noyau de l'opérateur de restriction étant $H^s_{\mathbb{R}^3 \setminus V}(\mathbb{R}^3)$, $H^s(V)$ est un espace de Hilbert et :

$$H^s(V) = H^s_{\mathbb{R}^3 \setminus V}(\mathbb{R}^3)^\perp , \quad (\perp \text{ au sens de } H^s(\mathbb{R}^3))$$

$$\|u\|_{H^s(V)} = \text{Min} \{ \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} \}_{v \in H^s(\mathbb{R}^3): v|_V = u} .$$

On vérifie que, pour tout entier m , les différentes définitions de $H^m(V)$ coïncident algébriquement et topologiquement pour tout ouvert V possédant la propriété de m -prolongement.

On renvoie aux ouvrages de Adams, Lions & Magenes ou Chazarain & Piriou pour l'étude détaillée de ces espaces. On y trouvera également la définition et l'étude des espaces $H^s(\partial V)$ où ∂V est un bord régulier. Rappelons néanmoins le théorème de trace (Lions & Magenes, Nečas) :

Théorème de Trace :

On considère un ouvert borné V de bord de classe C^{m+1} qui est situé localement d'un seul côté de son bord. Alors l'application trace :

$$u \rightarrow \left\{ \frac{\partial^j u}{\partial n^j}, j = 0, 1, \dots, m \right\},$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$ représente la dérivation normale à ∂V , définie pour les fonctions u régulières, se prolonge par continuité en une application linéaire continue et surjective de :

$$H^s(V) \text{ sur } \prod_{j=0}^m H^{s-j-1/2}(\partial V),$$

où m est le plus grand entier tel que : $m < s - 1/2$.

Il existe de plus un relèvement continu à cette application.

Nous utiliserons également la proposition suivante qui est classique et que nous rappelons sans démonstration (voir Nečas, Dautray & Lions et Agmon Douglis & Nirenberg) :

Proposition 1 :

Soit V un ouvert borné à bord de classe C^m et qui est situé localement d'un seul côté de ce bord. Soit également $\phi \in H^1(V)$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \phi \in H^1(V) \\ \phi_{\partial V} \in H^{l+3/2}(\partial V) \text{ ou } \frac{\partial \phi}{\partial n}|_{\partial V} \in H^{l+1/2}(\partial V) \end{array} \right. \quad \text{avec } m \geq l + 2 \text{ et } l \geq 0.$$

Alors, $\phi \in H^{l+2}(V)$ et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\phi\|_{H^{l+2}(V)} \leq c^{te} \left\{ \|\Delta \phi\|_{H^1(V)} + \|\phi\|_{H^{l+3/2}(\partial V)} \right\} \\ \text{ou} \\ \|\phi\|_{H^{l+2}(V)} \leq c^{te} \left\{ \|\Delta \phi\|_{H^1(V)} + \left\| \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\|_{H^{l+1/2}(\partial V)} \right\} \end{array} \right.$$

On note $H(\text{div}, V)$, l'espace défini par :

$$H(\text{div}, V) = \{ u \in L^2(V) : \text{div}(u) \in L^2(V) \},$$

On trouvera dans les ouvrages de Duvaut & Lions et de Dautray & Lions (Tome 2, chapitre IX) une étude détaillée de ces espaces. Rappelons simplement la :

Proposition 2 :

Soit V un ouvert de frontière ∂V bornée et régulière et qui est situé localement d'un seul côté de celle-ci. Alors :

a- $H(\text{div}, V)$ muni du produit scalaire :

$$((u|v)) = (u|v)_{L^2(V)} + (\text{div}(u)|\text{div}(v))_{L^2(V)}$$

est un espace de Hilbert.

b- $D(\bar{V})$ est dense dans $H(\text{div}, V)$.

c- L'application trace : $u \rightarrow u.n_{\partial V}$ définie pour u régulière se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H(\text{div}, V)$ sur $H^{-1/2}(\partial V)$.

d- On a la formule de Green généralisée :

$$\forall u \in H(\text{div}, V), \forall \phi \in H^1(V) : (u|\text{grad}\phi)_{L^2(V)} + (\text{div}u|\phi)_{L^2(V)} = \langle u.n_{\partial V}|\phi_{\partial V} \rangle$$

où le crochet $\langle | \rangle$ désigne la dualité $H^{-1/2}(\partial V)$, $H^{1/2}(\partial V)$, et où l'on a convenu d'orienter la normale à ∂V vers l'extérieur.

Remarquons que l'on peut étendre cette proposition, mis à part le point b, au cas d'ouvert du type de V_F . Il suffit pour cela de considérer séparément les différentes composantes connexes V_i de V_F .

On note :

$$H_0(\text{div}, V) = \{ u \in H(\text{div}, V) : \text{div}(u) = 0 \text{ et } u.n_{\partial V} = 0 \}.$$

L'utilisation du lemme de Peetre montre que (voir par exemple Foias & Temam, Temam, Dautray & Lions Vol. 2, chap. IX pour plus de détails sur ces types de décomposition) :

$L^2(V) = \text{grad}(H^1(V)) \oplus H_0(\text{div}0, V)$, (où \oplus désigne la somme directe orthogonale). (5)

Rappelons également que, lorsque V est simplement connexe, l'espace $\text{grad}(H^1(V))$ est le noyau de l'opérateur rotationnel dans $L^2(V)$.

Introduisons maintenant les espaces :

$$H(\text{div}, V, L^2(\partial V)) = \{ u \in H(\text{div}, V) : u \cdot n_{\partial V} \in L^2(\partial V) \}.$$

Des propositions 1 et 2 on déduit la :

Proposition 3 :

Soit V un ouvert borné de bord de classe C^2 et situé localement d'un seul côté de ce bord.

Alors :

a- $H(\text{div}, V, L^2(\partial V))$ muni du produit scalaire :

$$((u|v)) = (u|v)_{L^2(V)} + (\text{div}(u)|\text{div}(v))_{L^2(V)} + (u \cdot n | v \cdot n)_{L^2(\partial V)}$$

est un espace de Hilbert.

b- $D(\bar{V})$ est dense dans $H(\text{div}, V, L^2(\partial V))$.

c- Si l'on convient d'orienter la normale à ∂V vers l'extérieur, la formule de Green généralisée prend la forme :

$$\forall u \in H(\text{div}, V, L^2(\partial V)), \forall \phi \in H^1(V) : (u|\text{grad}\phi)_{L^2(V)} + (\text{div}u|\phi)_{L^2(V)} = (u \cdot n_{\partial V}|\phi)_{L^2(\partial V)}$$

d- L'injection de $H(\text{div}, V, L^2(\partial V)) \cap H_0(\text{div}0, V)^\perp$ (\perp au sens de $L^2(V)$) dans $L^2(V)$ est compacte.

Preuve :

a- Considérons une suite de Cauchy u_i dans $H(\text{div}, V, L^2(\partial V))$. Elle est alors de Cauchy dans $H(\text{div}, V)$ ainsi que la suite $u_i \cdot n_{\partial V}$ dans $L^2(\partial V)$. Il en résulte que, d'une part (cf. proposition 2), la suite u_i converge vers une limite u dans $H(\text{div}, V)$ et que, d'autre part, la suite $u_i \cdot n_{\partial V}$ converge vers une limite t dans $L^2(\partial V)$. L'application trace étant continue de $H(\text{div}, V)$ dans

$H^{-1/2}(\partial V)$ (cf. proposition 2) et la topologie de $L^2 pH^{-1/2}$, t est égale à $u.n_{\partial V}$. Il en résulte finalement que $u \in H(\text{div}, V, L^2(\partial V))$ et que la suite u_i converge dans cette topologie. $H(\text{div}, V, L^2(\partial V))$ est donc un espace de Hilbert.

b- Soit $u \in H(\text{div}, V, L^2(\partial V))$ orthogonal à $D(\bar{V})$:

$$\forall v \in D(\bar{V}) \quad ((u|v)) = (u|v)_{L^2(V)} + (\text{div}(u)|\text{div}(v))_{L^2(V)} + (u.n_{\partial V}|v.n_{\partial V})_{L^2(\partial V)} = 0 .$$

On en déduit tout d'abord, par densité et continuité de la trace, que u est orthogonal à $H^1(V)$:

$$\forall v \in H^1(V) \quad ((u|v)) = 0 . \quad (6)$$

On en déduit également que :

$$\forall v \in D(V) \quad (\text{div}(u)|\text{div}(v))_{L^2(V)} = - (u|v)_{L^2(V)} ,$$

c'est à dire que au sens des distributions :

$$u = \text{grad}(\text{div}(u)) . \quad (7)$$

Ainsi $\text{div}(u)$ est dans $H^1(V)$. L'utilisation de la formule de Green généralisée (cf. proposition 2d) dans l'expression (6) conduit alors à :

$$\forall v \in H^1(V) \quad (\text{div}(u)_{\partial V} + u.n_{\partial V}|v.n_{\partial V})_{L^2(\partial V)} = 0 .$$

Utilisant la densité de $H^{1/2}(\partial V)$ dans $L^2(\partial V)$, on en déduit que :

$$u.n_{\partial V} = - \text{div}(u)_{\partial V} \in H^{1/2}(\partial V) . \quad (8)$$

Les relations (7) et (8) montrent donc que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(\text{div}(u)) = \text{div}(u) \in H^1(V) , \\ \text{grad}(\text{div}(u)).n_{\partial V} = u.n_{\partial V} \in H^{1/2}(\partial V). \end{array} \right.$$

Il en résulte (cf. proposition 1) que $\text{div}(u) \in H^2(V)$ et donc, d'après (7), que $u \in H^1(V)$. On déduit finalement de (6) que $((u|u)) = 0$, soit $u = 0$, ce qui prouve que $D(\bar{V})$ est bien dense dans $H(\text{div}, V, L^2(V))$.

c- cela découle de la proposition 2 et du fait que $u \cdot n_{\partial V} \in L^2(\partial V)$.

d- Remarquons tout d'abord que tout $u \in H(\text{div}, V, L^2(\partial V)) \cap H_0(\text{div}, V)^\perp$ peut s'écrire (5) :

$u = \text{grad}(p)$, avec $p \in H^1(V)$.

Rappelons que p peut être déterminé de manière unique dans l'espace :

$H = \{ p \in H^1(V) : \int_V p \, dV = 0 \}$, qui est fermé pour la topologie de $H^1(V)$, par la formulation

variationnelle suivante :

$$\forall \phi \in H : (\text{grad}(p) | \text{grad}(\phi))_{L^2(V)} = (u | \text{grad}(\phi))_{L^2(V)}.$$

L'inégalité de Poincaré montre en effet que la forme Hermitienne $(\text{grad}(\cdot) | \text{grad}(\cdot))$ est H elliptique et l'existence et l'unicité découlent du théorème de Lax-Milgram qui montre également que l'application : $\forall u \in L^2(V) \rightarrow p(u) \in H^1(V)$ est continue.

Considérons maintenant une suite de $H(\text{div}, V, L^2(\partial V)) \cap H_0(\text{div}, V)^\perp$ qui converge faiblement vers 0. De l'expression de la norme dans $H(\text{div}, V, L^2(\partial V))$ on en déduit que la suite u_i converge faiblement vers 0 dans $L^2(V)$ ainsi que les suites $\text{div}(u_i)$ dans $L^2(V)$ et $u_i \cdot n_{\partial V}$ dans $L^2(\partial V)$, et donc que ces différentes suites sont bornées au sens de L^2 . Il en résulte également que la suite $p(u_i)$ converge faiblement vers 0 dans $H^1(V)$. Le théorème d'injection compacte de Rellich et le théorème de trace montrent alors que la suite $p(u_i)$ converge fortement vers 0 dans $L^2(V)$ ainsi que $p(u_i)_{\partial V}$ dans $L^2(\partial V)$.

Par ailleurs, l'utilisation de la formule de Green généralisée conduit à :

$$\|u_i\|_{L^2(V)} = (u_i | \text{grad}(p(u_i)))_{L^2(V)} = - (\text{div}(u_i) | p(u_i))_{L^2(V)} + (v_i \cdot n_{\partial V} | p(u_i))_{L^2(\partial V)}.$$

Ainsi il est clair que la suite u_i converge vers 0 dans $L^2(V)$ et donc que l'injection de $H(\text{div}, V, L^2(\partial V)) \cap H_0(\text{div}, V)^\perp$ dans $L^2(V)$ est compacte. ■

Remarquant que si u appartient à $H(\text{div}, V, L^2(\partial V)) \cap H_0(\text{div}0, V)^\perp$, alors $u = \text{grad}(p)$ avec $p = \text{div}(u)$ et $\frac{\partial p}{\partial n} \in L^2(\partial V)$, on peut être tenté de croire, d'après la proposition 1, que $u \in H^{1/2}(V)$. En fait la proposition 1 ne s'applique pas dans ce cas et on ne peut pas assurer l'appartenance de u à $H^{1/2}(V)$. Il faut alors recourir aux espaces $H^{s,m}(V)$ (cf. Yosida ed. 1963). Considérant ceci comme trop technique, nous nous contentons d'indiquer la piste.

La proposition 3 peut être étendue au cas d'ouverts du type de V_F défini dans le premier paragraphe. Plus précisément définissons :

$$H(\text{div}, V, L^2(\partial V_F \cup \Sigma_F)) = \{ u \in L^2(V_F) : \forall i \in \{1, \dots, m\}, u_{V_i} \in H(\text{div}, V_i, L^2(\partial V_i)) \text{ et } [u \cdot n_{\Sigma_F}] = 0 \}.$$

où $[]$ désigne le saut au travers de Σ orienté en conformité avec n_{Σ_F} . En considérant chacune des composantes connexes V_i de V_F , on déduit aisément de la proposition précédente la :

Proposition 4 :

Soit V_F un ouvert du type de celui défini dans le paragraphe 1. Alors :

a- $H(\text{div}, V, L^2(\partial V_F \cup \Sigma))$ muni du produit scalaire :

$$((u|v)) = (u|v)_{L^2(V_F)} + (\text{div}(u)|\text{div}(v))_{L^2(V_F)} + (u \cdot n | v \cdot n)_{L^2(\partial V_F \cup \Sigma_F)}$$

est un espace de Hilbert.

b- Si l'on convient d'orienter la normale à ∂V_F vers l'extérieur, la formule de Green généralisée prend la forme :

$\forall u \in H(\text{div}, V_F, L^2(\partial V_F \cup \Sigma_F)), \forall \phi \in H^1(V_F) :$

$$(u|\text{grad}\phi)_{L^2(V_F)} + (\text{div}u|\phi)_{L^2(V_F)} = (u \cdot n_{\partial V_F} | \phi_{\partial V_F})_{L^2(\partial V_F)} - (u \cdot n_{\Sigma_F} | [\phi]_{\Sigma_F})_{L^2(\Sigma)}$$

c- L'injection de $H(\text{div}, V_F, L^2(\partial V_F \cup \Sigma)) \cap H_0(\text{div}0, V_F)^\perp$ (\perp au sens de $L^2(V_F)$) dans $L^2(V_F)$ est compacte.

3-Gravité, pesanteur et potentiel de redistribution des masses.

Précisons tout d'abord nos hypothèses sur la masse volumique ρ . Nous supposons que ρ est une fonction essentiellement bornée, presque partout positive et de support \bar{V} , défini dans le premier paragraphe. Nous supposons également que la fonction $1/\rho$ est essentiellement bornée et que $\forall i \in \{1, \dots, n\} \rho_{V_i} \in W^{1,\infty}(V_i)$; c'est à dire que ρ_{V_i} peut être représentée par une fonction continue et que $\text{grad}(\rho_{V_i}) \in L^\infty(V_i)$.

On suppose, en somme, que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \{1, \dots, n\} : \rho_{V_i} \in C^0(\bar{V}_i) \text{ et } \text{grad}(\rho_{V_i}) \in L^\infty(V_i), \\ \forall x \in V \quad 0 < \min \leq \rho(x) \leq \text{Maj} < +\infty \end{array} \right. \quad (9a)$$

On peut être amené à restreindre l'hypothèse (9a) dans le cas d'une zone fluide externe. En effet, la limite d'une atmosphère ou d'une étoile est parfois considérée comme marquée par la condition $\rho(x) = 0$. $1/\rho$ n'est plus alors bornée et il convient de remplacer la dernière condition de (9a) par :

$$\left\{ \forall x \in V \quad 0 \leq \rho(x) \leq \text{Maj} < +\infty \right. \quad (9b)$$

Remarquons qu'avec les hypothèses (9a) :

$$u \in L^2(V) \Leftrightarrow \sqrt{\rho} u \in L^2(V),$$

et il est ainsi équivalent de munir $L^2(V)$ du produit scalaire $(\rho |)$, c'est à dire du produit associé à la mesure dm , ce qui est souvent plus physique.

Ce n'est plus le cas dans le cadre de l'hypothèse (9b) puisque :

$$u \in L^2(V) \Rightarrow \sqrt{\rho} u \in L^2(V),$$

mais que la réciproque n'est pas vraie. L'espace L^2 pour la mesure dm contient alors strictement l'espace L^2 usuel. Le cadre naturel de travail reste néanmoins $L^2(dm)$.

Quoi qu'il en soit, on a la :

Proposition 5 :

Soit V un ouvert du type défini dans le paragraphe 1 et soit ρ vérifiant l'hypothèse (9a ou b). Le champ de gravité g_0 associé à la distribution de masse ρ vérifie alors :

$$g_0 \in C^0(\mathbb{R}^3) \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, n\} g_{0|V_i} \in C^1(\bar{V}_i),$$

$$\forall x \in \Sigma \quad \forall v \in \mathbb{R}^3, [Dg_0(x)](v) = 4\pi G [\rho(x)] (v \cdot n_\Sigma) n_\Sigma$$

où n_Σ est la normale à Σ au point x , et $[]$ le saut au travers de Σ .

Cela découle des résultats sur le potentiel de simple couche. En effet soit ϕ le potentiel Newtonien, au signe près, associé à ρ :

$$g_0 = \text{grad}(\phi), \quad \Delta\phi = 4\pi G\rho, \quad \phi(x) \rightarrow 0 \text{ si } |x| \rightarrow +\infty.$$

Par linéarité il est clair que l'on peut se ramener au cas où ρ est continue dans tout \bar{V} . Dans ce cas :

$$|\text{grad}(\phi(x))| \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty), \quad \Delta(\text{grad}(\phi)) = 4\pi G \text{grad}(\rho) \chi_V - \rho n \, d(\partial V)$$

au sens des distributions dans \mathbb{R}^3 et où χ_V désigne la fonction caractéristique de V . Raisonnant composante cartésienne par composante et utilisant à nouveau la linéarité, on voit donc que la régularité de ϕ est essentiellement contrôlée par celle du potentiel de simple couche. La proposition en découle. Nous renvoyons à l'ouvrage de Dautray & Lions pour le détail de la démonstration (Vol. 1, Chap. II § 2, prop. 6.3, 12, 13, 14).

Là où l'équilibre est hydrostatique, et notamment dans V_F on peut exploiter l'équation d'équilibre :

$$\text{grad}(p_0) = \rho g_0', \quad g_0' = \text{grad}(\phi'), \quad \phi' = \phi + (|x|^2 |\Omega|^2 - (x \cdot \Omega)^2)/2, \quad (10)$$

c'est à dire essentiellement que $\rho g_0'$ est dans l'image du gradient.

En particulier on a la :

Proposition 6 :

Soit V un ouvert du type de celui défini au premier paragraphe et ρ une distribution de masse vérifiant l'hypothèse (9a ou b). Supposons également que dans V l'équilibre est hydrostatique (10) et soit Σ_i une composante connexe de Σ , alors :

ou bien ρ est continue au travers de Σ_i ,

ou bien ρ est partout discontinue au travers de Σ_i qui est une surface équipotentielle du champ de pesanteur et du champ de pression, et les différentes limites $\rho^+(x)$ et $\rho^-(x)$ de $\rho(x)$ sont constantes sur Σ_i ($[\rho](x) = c^{te} \neq 0$ sur Σ_i).

Ainsi on peut toujours, quitte à réunir différentes composantes connexes de V , exclure la première occurrence; nous le ferons dorénavant.

Preuve : De l'équation (10) on déduit tout d'abord que p_0 peut être représentée par une fonction continue, C^1 par morceau (chaque \bar{V}_i) et que sur chacun des \bar{V}_i les équipotentiels du champ de pression coïncident avec les équipotentiels du champ de pesanteur. On en déduit également que sur ces équipotentiels ρ est constante.

Considérons maintenant l'interface Σ_i . Ou bien $[\rho](x) = 0$ pour tout x de Σ_i , ou bien il existe un point x_0 de Σ_i pour lequel $[\rho](x_0) \neq 0$. Dans ce cas Σ_i est localement une équipotentielle du champ de pression; en effet, ou bien $g_0' = 0$ et, d'après (10) $\text{grad}(p_0) = 0$, ou bien $[\text{grad}(p_0)] =$

$$\left[\frac{\partial p_0}{\partial n} \right] n = [\rho] g_0' \text{ et donc } g_0' \wedge n = 0 \text{ dans un voisinage de } x_0, \text{ dans } \Sigma_i. \text{ Dans tous les cas on}$$

déduit que, dans un voisinage de x_0 dans Σ_i : $\text{grad}(p_0) \wedge n = 0$, et donc que ρ^+ et ρ^- sont localement constantes sur Σ_i . Le résultat suit alors, en vertu de la connexité de Σ_i . ■

Dans ces conditions, on dit que le fluide est stratifié. Nous renvoyons à l'ouvrage de Wavre pour un état de l'art sur les Figures Planétaires dans une terminologie propre au début de ce siècle (1932).

Passons maintenant à l'essentiel de ce paragraphe, c'est à dire la définition de l'opérateur de perturbation gravitationnel et du potentiel de redistribution des masses. Lorsque la planète se déforme, les masses sont redistribuées et le champ de gravité se trouve perturbé. Si u est le

champ de déplacement, la perturbation Lagrangienne du champ est donnée par $A_3 u$ (cf (2) (3) et chapitre 1). Une dérivation formelle nous a de plus conduit à l'expression :

$$A_3 u(x) = G \int_V \left\{ \frac{u(x') - u(x)}{|x' - x|^3} - 3(x' - x) \left[(x' - x) \cdot \frac{u(x') - u(x)}{|x' - x|^5} \right] \right\} \rho(x') dx'.$$

La proposition suivante précise mathématiquement ces différents points. Il n'est peut-être pas inutile de rappeler, tout d'abord, la définition de l'espace de Beppo-Levi $W^1(\mathbb{R}^3)$. Remarquant que $\|\text{grad}(\cdot)\|$ est une norme sur $D(\mathbb{R}^3)$, on définit $W^1(\mathbb{R}^3)$ comme le complété de $D(\mathbb{R}^3)$ pour cette norme. L'inégalité de Poincaré n'étant pas valable dans \mathbb{R}^3 , $W^1(\mathbb{R}^3)$ contient strictement $H^1(\mathbb{R}^3)$. On peut montrer qu'en fait (voir, par exemple Dautray & Lions, Vol. 2, Chap. XI-B) :

$$W^1(\mathbb{R}^3) = \{ \phi : (1+|x|^2)^{-1/2} \phi \in L^2(\mathbb{R}^3) \text{ et } \text{grad}(\phi) \in L^2(\mathbb{R}^3) \}.$$

Proposition 7 :

Soient un ouvert V du type de celui introduit au paragraphe 1 et ρ une distribution de masse vérifiant (9a). Considérons les opérateurs :

$$A_3 u(x) = G \int_V \left\{ \frac{u(x') - u(x)}{|x' - x|^3} - 3(x' - x) \left[(x' - x) \cdot \frac{u(x') - u(x)}{|x' - x|^5} \right] \right\} \rho(x') dx'$$

$$\psi(u)(x) = -G \int_V \frac{x' - x}{|x' - x|^3} \cdot u(x') \rho(x') dx'$$

alors :

a- ψ est continu de $L^2(V)$ dans $H^1(\mathbb{R}^3)$ et $\|\text{grad}(\psi(u))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq 4\pi G \|\rho u\|_{L^2(V)}$.

b- Pour tout $u \in L^2(V)$, $\psi(u)$ est l'unique solution dans $W^1(\mathbb{R}^3)$ du problème variationnel :

$$\forall \phi \in W^1(\mathbb{R}^3) : (\text{grad}(\psi) | \text{grad}(\phi))_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 4\pi G (\rho u | \text{grad}(\phi))_{L^2(V)}.$$

c- $\forall s > 0$, A_3 est continu de $H^s(V)$ dans $L^2(V)$ et $A_3 u = \text{grad}(\psi(u)) + Dg_0(u)$.

A_3 peut donc être prolongé en un endomorphisme continu de $L^2(V)$ qui est Hermitien pour le produit scalaire $(\rho | \cdot)_{L^2(V)}$.

d- L'application $u \rightarrow \text{grad}(\psi(u))$ est compacte de $H(\text{div}, V, L^2(\partial V \cup \Sigma))$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ et :

$$\|\text{grad}(\psi(u))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq c^{10} \|\rho u\|_{L^2(V)} \{ \|\text{div}(\rho u)\|_{L^2(V)} + \|\rho\|_{\Sigma \cup \partial V, \infty} \|u \cdot n\|_{L^2(\Sigma \cup \partial V)} \}$$

Preuve :

a- Remarquons tout d'abord que : $\psi(u) = -G \text{grad} \left[\frac{1}{|x|} \right] * \rho \bar{u}$, où \bar{u} représente le prolongement de u par 0 dans \mathbb{R}^3 et $*$ la somme des convolutions composante par composante. Comme $\rho \bar{u}$ appartient à $L^2_{\text{compact}}(\mathbb{R}^3)$ et que $\text{grad} \left[\frac{1}{|x|} \right]$ appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$, les résultats classiques sur la convolution montre que $\psi(u)$ appartient à $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$. Par ailleurs, il est clair que $\text{grad} \left[\frac{1}{|x|} \right]$ appartient à l'espace des distributions tempérées $S'(\mathbb{R}^3)$ puisque c'est une fonction à croissance lente, et que $\rho \bar{u}$ est dans l'espace des convoleurs puisque son support est compact (voir Schwartz, Vo-Khac Khoan). Ainsi $\psi(u)$ est également dans $S'(\mathbb{R}^3)$ et l'analyse de Fourier est possible. Notant F la transformée de Fourier et k le vecteur d'onde associé, on obtient alors :

$$F(\psi(u)) = 4\pi G i \frac{k \cdot F(\rho \bar{u})}{|k|^2} \quad (11)$$

$$F(\rho \bar{u}) \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3), \quad |F(\rho \bar{u})|_\infty \leq \| \rho u \|_{L^1(V)} \leq |V| \| \rho u \|_{L^2(V)}.$$

De sorte que :

$$|F(\psi(u))| \leq 4\pi G \begin{cases} \frac{|F(\rho \bar{u})|_\infty}{|k|} & \text{si } |k| \leq 1 \\ |F(\rho u)| & \text{si } |k| \geq 1 \end{cases}$$

et donc, en utilisant l'égalité de Plancherel-Parseval, que :

$$\int_{\mathbb{R}^3} |F(\psi(u))|^2 dk \leq (4\pi G)^2 \left\{ 1 + |V| \int_{B(0,1)} \frac{dk}{|k|^2} \right\} \| \rho u \|_{L^2(V)}^2.$$

On déduit de plus de (11) que :

$$|k F(\psi(u))| \leq 4\pi G |F(\rho \bar{u})|,$$

puis, à nouveau grâce à l'égalité de Plancherel-Parseval, que :

$$\|\text{grad}(\psi(u))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq 4\pi G \|\rho u\|_{L^2(V)},$$

ce qui achève la démonstration du point a.

b- Il découle de l'expression (11) que :

$$|k|^2 F(\psi(u)) = 4\pi G \text{ik}.F(\rho \bar{u})$$

et donc que :

$$\Delta(\psi(u)) = -4\pi G \text{div}(\rho \bar{u})$$

Considérons maintenant le problème variationnel suivant :

$$\forall \phi \in W^1(\mathbb{R}^3) : (\text{grad}(\psi) | \text{grad}(\phi))_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 4\pi G (\rho u | \text{grad}(\phi))_{L^2(V)}. \quad (12)$$

L'application $\phi \rightarrow (\rho u | \text{grad}(\phi))$ étant continue dans $W^1(\mathbb{R}^3)$, il est clair, d'après le point de vue de Lax-Milgram (c'est à dire d'après le théorème de Riesz), que ce problème admet une solution unique dans $W^1(\mathbb{R}^3)$. Cette solution est la solution de :

$$\Delta(\psi) = -4\pi G \text{div}(\rho u), \quad \psi \in W^1(\mathbb{R}^3),$$

comme on peut le voir en restreignant (12) aux fonctions ϕ de $D(\mathbb{R}^3)$ d'une part, et en utilisant la densité de $D(\mathbb{R}^3)$ dans $W^1(\mathbb{R}^3)$ d'autre part.

Puisque $\psi(u) \in H^1(\mathbb{R}^3) \subset W^1(\mathbb{R}^3)$, on déduit ainsi que $\psi = \psi(u)$.

c- Montrons tout d'abord que quel que soit u appartenant à $H^s(V)$:

$$\int_{V \times V} \frac{|u(x') - u(x)|^2}{|x' - x|^{3+2s}} dx dx' \leq \|u\|_{H^s(V)}^2.$$

Considérons en effet le prolongement \bar{u} de u , de même norme dans $H^s(\mathbb{R}^3)$:

$$\int_{V \times V} \frac{|u(x') - u(x)|^2}{|x' - x|^{3+2s}} dx dx' \leq \int_{\mathbb{R}^3 \times B(0, \text{diam}(V))} \frac{|\bar{u}(x+y) - \bar{u}(x)|^2}{|y|^{3+2s}} dx dy,$$

puis, grâce à l'égalité de Plancherel-Parseval :

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} |F(\tilde{u})(k)|^2 \left\{ \int_{B(0, \text{diam}(V))} \frac{|e^{iky} - 1|}{|y|^{3+s}} dy \right\} dk .$$

De :

$$\left. \begin{array}{l} |e^{iky} - 1| \leq |k| |y| \\ |e^{iky} - 1| \leq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow |e^{iky} - 1| \leq 2^{1-s} \|y\|^s \|k\|^s \quad \text{pour } 0 < s \leq 1 ,$$

on déduit enfin :

$$\begin{aligned} \int_{V \times V} \frac{|u(x') - u(x)|^2}{|x' - x|^{3+s}} dx dx' &\leq \frac{2^{2-2s}}{(2\pi)^3} \left\{ \int_{B(0, \text{diam}(V))} \frac{dy}{|y|^{3-s}} \right\} \int_{\mathbf{R}^3} |k|^{2s} |F(\tilde{u})(k)|^2 dk \\ &\leq \frac{2^{2-2s}}{(2\pi)^3} \left\{ \int_{B(0, \text{diam}(V))} \frac{dy}{|y|^{3-s}} \right\} \|u\|_{\mathbf{H}^s(V)}^2 . \end{aligned}$$

En fait, on peut même montrer (cf. Adams, chapitre 7) que le bord de V étant régulier, la norme dont le carré est :

$$\|u\|_{L^2(V)}^2 + \int_{V \times V} \frac{|u(x') - u(x)|^2}{|x' - x|^{3+s}} dx dx'$$

est équivalente à celle de $\mathbf{H}^s(V)$.

Considérons maintenant la fonction $A_3 u(x)$. Elle est mesurable et :

$$|A_3 u(x)|^2 \leq 4G^2 |\rho|_{\infty}^2 \left(\int_V \frac{|u(x') - u(x)|}{|x' - x|^3} dx' \right)^2 .$$

L'utilisation de l'inégalité de Schwartz conduit alors à :

$$|A_3 u(x)|^2 \leq 4G^2 |\rho|_{\infty}^2 \int_V \frac{1}{|x' - x|^{3-s}} dx' \int_V \frac{|u(x') - u(x)|^2}{|x' - x|^{3+s}} dx' ,$$

de sorte que :

$$\int_V |A_3 u(x)|^2 dx \leq c^{2s} \|u\|_{\mathbf{H}^s(V)}^2 .$$

Ainsi A_3 est continue de $\mathbf{H}^s(V)$ dans $L^2(V)$.

Soit alors u appartenant à $D(\bar{V})$. Il est immédiat que :

$$(\psi(u) + u.g_0)(x) = -G \int_V (x'-x) \cdot \frac{u(x') - u(x)}{|x'-x|^3} \rho(x') dx' , \quad (\text{ puisque } g_0 = G \int_V \frac{x'-x}{|x'-x|^3} \rho(x') dx') ,$$

de sorte que :

$$\text{grad}(\psi(u) + u.g_0) = A_3 u + (Du)^*(g_0) ,$$

où $*$ désigne ici l'adjoint pour la structure Euclidienne de \mathbf{R}^3 . Utilisant la relation :

$$\text{grad}(u.g_0) = Dg_0(u) + (Du)^*(g_0) ,$$

qui est valable en chaque point de $\{ \cup V_i \}_{i=1,n}$ d'après la proposition 5, on obtient :

$$A_3 u = \text{grad}(\psi(u)) + Dg_0(u) .$$

La densité de $D(\bar{V})$ dans $H^1(V)$ (V défini dans le premier paragraphe, de bord régulier et situé localement d'un seul côté de ce bord) montre que cette égalité reste vraie dans $H^1(V)$ puisque, d'après la proposition 5, $Dg_0(x)$ est un champ continu par morceau d'opérateurs symétriques de \mathbf{R}^3 et que l'opérateur $u \rightarrow Dg_0(u)$ est ainsi Hermitien dans $L^2(V)$. Cela montre également que A_3 se prolonge en un endomorphisme Hermitien continu de $L^2(V, dm)$ car, d'après le point b :

$$\forall u \in L^2(V), \forall v \in L^2(V) : (\text{grad}(\psi(u)) | \text{grad}(\psi(v)))_{L^2(\mathbf{R}^3)} = 4\pi G (\rho u | \text{grad}(\psi(v)))_{L^2(V)} .$$

d- Considérons un champ u dans $H(\text{div}, V, L^2(\partial V \cup \Sigma))$. Utilisant à nouveau le point b puis la formule de Green généralisée (proposition 3 c), on déduit :

$$\begin{aligned} \|\text{grad}(\psi(u))\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}^2 &= -4\pi G (\rho u | \text{grad}(\psi(u)))_{L^2(\mathbf{R}^3)} \\ &= 4\pi G \{ (\text{div}(\rho u) | \psi(u))_{L^2(V)} + ([\rho]u.n | \psi(u))_{L^2(\Sigma \cup \partial V)} \} . \end{aligned} \quad (13)$$

Comme il est clair, d'après le théorème de trace et le point a, que :

$$\|\psi(u)\|_{L^2(\Sigma \cup \partial V)} \leq c^{ts} \|\psi(u)\|_{H^1(V)} \leq c^{ts} \|\rho u\|_{L^2(V)},$$

on obtient :

$$\| \text{grad}(\psi(u)) \|^2 \leq c^{4s} \| \rho u \|_{L^2(V)} \{ \| \text{div}(\rho u) \|_{L^2(V)} + \| [\rho] \|_{\Sigma \cup \partial V, \infty} \| u \cdot n \|_{L^2(\Sigma \cup \partial V)} \} .$$

Reste à montrer que l'application $u \rightarrow \text{grad}(\psi(u))$ est compacte de $H(\text{div}, V, L^2(\partial V \cup \Sigma))$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. Considérons donc une suite u_i convergeant faiblement vers 0 dans $H(\text{div}, V, L^2(\partial V \cup \Sigma))$. Il découle du point a que la suite $\psi(u_i)$ converge faiblement vers 0 dans $H^1(\mathbb{R}^3)$, et donc dans $H^1(V)$ puisque l'opérateur de restriction est continu. On déduit alors du théorème d'injection compacte de Rellich et du théorème de trace que les suites $\psi(u_i)$ et $u_i \cdot n_{\Sigma \cup \partial V}$ convergent vers 0 dans $L^2(V)$ et $L^2(\Sigma \cup \partial V)$ respectivement. Considérant l'expression (13) et le fait que les suites $\| \text{div}(\rho u_i) \|_{L^2(V)}$ et $\| u_i \cdot n_{\Sigma \cup \partial V} \|_{L^2(\Sigma \cup \partial V)}$ sont bornées, on déduit finalement que la suite $\text{grad}(\psi(u_i))$ converge vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. ■

Remarquons que l'expression de A_3 :

$$A_3 u(x) = G \int_V \left\{ \frac{u(x') - u(x)}{|x' - x|^3} - 3(x' - x) \left[(x' - x) \cdot \frac{u(x') - u(x)}{|x' - x|^5} \right] \right\} \rho(x') dx' ,$$

peut être étendue à l'espace $H^s(\cup V_i)$ pour $s > 3/2$. D'après la démonstration du point 7c, il suffit, en effet, de montrer que :

$$\int_{V \times V} \frac{|u(x') - u(x)|^2}{|x' - x|^{3+2s}} dx dx' < + \infty .$$

Par linéarité, il est clair que l'on peut se ramener à une seule interface. Exploitant alors le fait que $s > 3/2$, c'est à dire, d'après les théorèmes d'injection de Sobolev, que u peut être représenté par une fonction continue de chaque côté de l'interface (dans \bar{V}^+ et \bar{V}^-), il suffit de montrer que :

$$\int_{V^+ \times V^-} \frac{dx dx'}{|x' - x|^{3+2s}} < + \infty .$$

Or :

$$\int_{V^+ \times V^-} \frac{dx dx'}{|x' - x|^{3+2s}} \leq \int_{V^+} dx \int_{\{|y| \geq d(x, \Sigma)\}} \frac{dy}{|y|^{3+2s}} = 4\pi \int_{V^+} \frac{dx}{d(x, \Sigma)^s} < + \infty$$

puisque Σ est de classe C^2 .

Est-ce que l'expression reste valide pour tout $s > 0$? La question reste pour moi sans réponse.

Nous nous sommes restreint à l'étude de l'opérateur A_3 , puisqu'il apparaît d'emblée que l'opérateur : $u \rightarrow \Omega \wedge (\Omega \wedge u)$ est continu Hermitien de $L^2(V)$ dans $L^2(V)$. Précisons toutefois que l'opérateur : $A_2 u = A_3 u - \Omega \wedge (\Omega \wedge u) = \text{grad}(\psi(u)) + Dg_0'(u)$, est également continu Hermitien de $L^2(V)$ dans $L^2(V)$ muni du produit scalaire $(\rho | \cdot)$.

Le point d mérite quelques commentaires. On peut remarquer, en effet, que la norme de $H(\text{div}, V, L^2(\Sigma \cup \partial V))$ représente essentiellement un contrôle de la variation de volume. Le point d montre donc que le terme $\text{grad}(\psi(u))$, qui représente la perturbation du champ de pesanteur, est, d'une certaine manière, négligeable devant le terme $Dg_0'(u)$ dès que le champ de perturbation u est contrôlé en volume, c'est à dire appartient à $H(\text{div}, V, L^2(\Sigma \cup \partial V))$. Le fait de négliger ce terme est connu des astrophysiciens sous le nom d'approximation de Cowling. Elle se trouve ainsi quelque peu justifiée.

Remarquons finalement que, dans la proposition 7, toutes les estimations sont contrôlées par $\|\rho u\|_{L^2(V)}$. En utilisant le fait que $L^2(V, dm)$ s'injecte continument dans $L^2(V, dV)$ dès que les hypothèses (9b) sont satisfaites, la proposition 7 s'étend donc sans difficulté au cadre de l'hypothèse (9b), c'est à dire à $L^2(V, dm)$. Pour être précis, on obtient alors la :

Proposition 8 :

Soient un ouvert V du type de celui introduit au paragraphe 1 et ρ une distribution de masse vérifiant (9b). Considérons les opérateurs :

$$\psi(u)(x) = -G \int_V \frac{x' - x}{|x' - x|^3} \cdot u(x') \rho(x') dx', \quad A_3 u = \text{grad}(\psi(u)) + Dg_0(u).$$

Alors :

a- ψ est continu de $L^2(V, dm)$ dans $H^1(\mathbb{R}^3)$ et :

$$\|\text{grad}(\psi)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq 4\pi G \sqrt{\rho} \|u\|_{L^2(V, dm)}.$$

b- $\forall u \in L^2(V, dm)$, $\psi(u)$ est l'unique solution dans $W^1(\mathbb{R}^3)$ du problème variationnel :

$$\forall \phi \in W^1(\mathbb{R}^3) : (\text{grad}(\psi) | \text{grad}(\phi))_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 4\pi G (\rho | \text{grad}(\phi))_{L^2(V)}.$$

c- A_3 est un endomorphisme continu Hermitien de $L^2(V, dm)$.

d- L'application $u \rightarrow \text{grad}(\psi(u))$ est compacte de $H(\text{div}, V, L^2(\partial V \cup \Sigma))$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ ou dans $L^2(V, dm)$ et :

$$\| \text{grad}(\psi(u)) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq c^{te} \| \rho u \|_{L^2(V)} \{ \| \text{div}(\rho u) \|_{L^2(V)} + \| [\rho] \|_{\Sigma \cup \partial V, \infty} \| u.n \|_{L^2(\Sigma \cup \partial V)} \}$$

4-Cadre variationnel et opérateurs auto-adjoints semi-bornés; extension de Friedrichs.

L'objet de ce paragraphe est de présenter le cadre variationnel correspondant aux opérateurs auto-adjoints bornés inférieurement. On renvoie aux ouvrages de référence pour l'étude des opérateurs non bornés dans les espaces de Hilbert, par exemple Dunford & Schwartz, Friedrichs, Kato, Schechter, Akhiezer & Glazman ou Dautray & Lions, chapitres VI et VIII. Rappelons néanmoins quelques définitions élémentaires.

Soit H un espace de Hilbert complexe qui sera notre espace cadre. On convient de noter son produit scalaire et sa norme sans précision d'espace : $(|)$, $\| \|$. Soit A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ dense dans H ; c'est à dire une application linéaire définie dans le sous espace vectoriel $D(A)$ et à valeur dans H . On définit son adjoint A^* par :

$$D(A^*) = \{ v \in H ; \exists v^* \in H \text{ tel que } (Au|v) = (u|v^*) \forall u \in D(A) \} \text{ et } A^*v = v^* .$$

La consistance de la définition est assurée par la densité de $D(A)$ dans H . Un opérateur A est dit fermé si son graphe, $\{ (u|Au) , u \in D(A) \}$ est fermé dans $H \times H$. L'adjoint d'un opérateur de domaine dense dans H est un opérateur fermé de domaine dense dans H . Un opérateur A de domaine dense dans H est dit symétrique s'il est fermé et si $A \subseteq A^*$, c'est-à-dire si :

$$\forall (u, v) \in D(A) \times D(A) \quad (Au|v) = (u|Av) .$$

Un opérateur A de domaine dense dans H est dit auto-adjoint si $A = A^*$.

On appelle ensemble résolvant et spectre d'un opérateur fermé A , l'ouvert et le fermé de \mathbb{C} respectivement définis par :

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \text{Ker}(\lambda - A) = \{0\} \text{ et } (\lambda - A)^{-1} \in L(H) \} \text{ et } \sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A) .$$

où $L(H)$ désigne l'ensemble des opérateurs linéaires continus de H . On appelle application résolvente l'application : $\forall \lambda \in \rho(A), \lambda \rightarrow R(\lambda) = (A-\lambda)^{-1} \in L(H)$.

Cette application est analytique et :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \rho(A) \times \rho(A), R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu) R(\lambda)R(\mu). \quad (14)$$

Le champ numérique d'un opérateur A est le sous ensemble de C défini par :

$$\{ (Au|u), u \in D(A) \text{ et } \|u\| = 1 \}.$$

Pour tout λ dans l'intérieur du complémentaire dans C du champ numérique, $A-\lambda$ est injectif et d'image fermée. De plus la dimension de $\text{Im}(A-\lambda)^\perp$ reste constante quand λ parcourt l'une des composantes connexes de cet intérieur.

Un opérateur symétrique A est auto-adjoint si, et seulement si, son spectre est inclus dans R . Ce spectre $\sigma(A)$ est alors inclus dans la fermeture du champ numérique et :

$$\forall \lambda \in \rho(A) \quad \|R(\lambda)\| = \frac{1}{d(\lambda, \sigma(A))}.$$

Un opérateur symétrique est dit semi-borné inférieurement, ou supérieurement, si son champ numérique l'est dans R . Un opérateur auto-adjoint est semi-borné si, et seulement si, c'est le cas de son spectre et les bornes correspondantes sont alors égales.

Considérons maintenant une forme sesquilinéaire, symétrique, de domaine $D(a)$ dense dans H et bornée inférieurement. Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (u, v) \in D(a) \times D(a) \quad a(u, v) = \overline{a(v, u)}, \\ \text{et} \end{array} \right.$$

[le champ numérique, $\{ a(u, u), u \in D(a) \text{ et } \|u\| = 1 \}$, est borné inférieurement dans R .

(On notera $\gamma(a)$ la borne correspondante.)

Remarquons que sur $D(a)$ toutes les normes :

$$\{ a(u, u) + \lambda(u|u) \} \quad \text{avec } \lambda > -\gamma(a),$$

sont équivalentes. En effet, $\lambda \leq \lambda'$ implique :

$$a(u,u) + \lambda(u|u) \leq a(u,u) + \lambda'(u|u) ,$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} a(u,u) + \lambda(u|u) &= a(u,u) - \gamma(a)(u|u) + (\lambda + \gamma(a))(u|u) \\ &\geq \frac{\lambda + \gamma(a)}{\lambda' + \gamma(a)} (a(u,u) - \gamma(a)(u|u)) + (\lambda + \gamma(a))(u|u) \\ &= \frac{\lambda + \gamma(a)}{\lambda' + \gamma(a)} (a(u,u) + \lambda'(u|u)) . \end{aligned}$$

Ces normes définissent donc une même topologie sur $D(a)$, sa topologie naturelle en quelque sorte, plus fine que celle de H . On notera $\| \cdot \|_a$ chacune de ces normes indépendamment de λ . Remarquons de plus que la forme sesquilinéaire a est continue pour cette topologie. Soit en effet $\lambda > -\gamma(a)$, il est évident que :

$$|a(u,v)| \leq |a(u,v) + \lambda(u|v)| + |\lambda| |(u|v)| ,$$

puis, à l'aide de l'inégalité de Schwartz relative, d'une part, à la forme positive $a + \lambda$ et, d'autre part, au produit scalaire dans H , que :

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \|u\|_a \|v\|_a + |\lambda| \|u\| \|v\| \\ &\leq c^{te} \|u\|_a \|v\|_a . \end{aligned}$$

a est dite fermée si $D(a)$ est complet pour cette topologie. Lorsque $D(a)$ n'est pas complet, on peut considérer son complété qui s'injecte continument dans H , puisque la topologie de $D(a)$ est plus fine que celle de H . Par continuité, a s'étend alors en une forme \tilde{a} , symétrique, bornée inférieurement (de même borne $\gamma(a)$) et fermée, de telle sorte que $D(\tilde{a})$ n'est autre que le complété de $D(a)$. Cette extension s'appelle l'extension de Friedrichs. On a de plus la proposition suivante due à Friedrichs (voir Kato, Lions, Huet pour une généralisation au cas sectoriel) :

Proposition 9 (premier théorème de représentation) :

Il y a une correspondance bijective entre les formes sesquilinéaires, symétriques, bornées inférieurement et fermées, de domaine dense dans H et les opérateurs auto-adjoints bornés inférieurement, avec égalité des bornes inférieures.

Etant donné a , on définit A par :

$D(A) = \{ u \in H : v \rightarrow a(u,v) \text{ définie de } D(a) \text{ dans } H, \text{ est continue pour la topologie de } H \}$

et : $h = Au \Leftrightarrow \forall v \in D(a) \text{ (ou } D \text{ dense dans } D(a) \text{) } (h|v) = a(u,v) .$

Etant donné A , a est définie comme la fermeture (l'extension de Friedrichs) de la forme sesquilinéaire symétrique, bornée inférieurement :

$\forall (u,v) \in D(A) \times D(A) \quad a(u,v) = (Au|v) .$

De plus $D(A)$ est dense dans $D(a)$ pour sa propre topologie.

Ainsi tout opérateur symétrique, borné inférieurement, admet une extension auto-adjointe. Plus précisément l'extension de Friedrichs apparaît comme la plus petite extension auto-adjointe bornée inférieurement. Signalons de plus que, même dans le cas d'opérateur totalement non borné, symétrique, on a l'assurance de l'existence d'une extension auto-adjointe, à condition toutefois que l'opérateur soit réel, c'est à dire que :

$$u \in D(A) \Rightarrow \bar{u} \in D(A),$$

$$u \in D(A) \text{ et } u = \bar{u} \Rightarrow Au = \overline{Au} .$$

Ce résultat est l'objet d'un théorème de Von-Neuman (voir par exemple Yosida) obtenu grâce à l'utilisation de la transformée de Cailey. Ainsi point n'est besoin de se restreindre à des cas de symétries particulières pour invoquer Stone, comme l'ont fait Dyson & Shutz dans le cas d'étoiles fluides à rotation non uniforme.

L'inconvénient reste néanmoins que cette affirmation d'existence est abstraite et fait perdre la formulation variationnelle qui est propre à l'extension de Friedrichs dans le cas semi-borné.

Précisons que l'on appelle triplet variationnel (V,a,H) les différents éléments qui interviennent dans le premier théorème de représentation, avec $V = D(a)$ algébriquement et topologiquement.

Remarquons finalement que, lorsqu'il est défini, l'opérateur résolvant est continu de H sur $D(A)$, muni de la topologie de $D(a)$. Soit en effet : $\lambda > -\gamma(a) = -\gamma(A)$, on a alors :

$$\|u\|_a = ((A+\lambda)(u) | u) \leq \|(A+\lambda)(u)\| \|u\| , \quad \|u\| \leq c^{\text{te}} \|u\|_a .$$

De sorte que :

$$\|R(\lambda)(u)\|_s \leq c^{ts} \|u\| .$$

On étend alors le résultat à tout $\rho(A)$ grâce à la relation (14) vérifiée par la résolvante.

On peut même montrer (cf. Kato, Lions, Huet) la :

Proposition 10 (deuxième théorème de représentation) :

Dans les conditions du premier théorème, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda > -\gamma(a) = -\gamma(A) \quad D(a) = D((A+\lambda)^{1/2})$$

et :

$$\forall (u,v) \in D(a) \times D(a) , a(u,v) = ((A+\lambda)^{1/2}(u) | (A+\lambda)^{1/2}(v)) - \lambda(u|v) .$$

5-Opérateur de l'Élasto-Gravité pour une Planète partout solide.

Il reste tout d'abord à définir A_1 , la partie élastique de l'opérateur A . Il est usuel de le faire variationnellement (cf. Duvaut & Lions). La seule particularité au cas qui nous occupe est qu'on ne peut pas se référer à un état "naturel" sans contrainte, puisque l'intérieur d'une planète est le siège de contraintes non négligeables.

Rappelons (voir chapitre 1) que l'on déduit de la formule de Green et des conditions aux limites (voir (2) et (4)), que lorsque les coefficients élastiques ainsi que u et v sont suffisamment réguliers :

$$a_1(u,v) = \int_V a^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{v}_l \, dV \tag{15}$$

avec $a^{ijkl} = c^{ijkl} + \sigma_0^{ik} g^{jl}$ (g^{ij} est le tenseur métrique) .

Ainsi sous la simple hypothèse que c^{ijkl} et σ_0^{ij} sont essentiellement bornés, la forme sesquilinéaire symétrique a_1 est définie et continue dans $H^1(V)$. Le problème est de montrer qu'en fait $D(a_1) = H^1(V)$, ce qui revient à montrer que a_1 est $H^1(V)$ coercive relativement à $L^2(V)$, c'est

à dire que :

$$a_1(u, v) + c^{te} \|u\|_{L^2(V)}^2 \geq c^{te} \|u\|_{H^1(V)}^2 \quad \forall u \in H^1(V).$$

Pour ce faire, il faut préciser nos hypothèses sur c^{ijkl} , σ_0^{ij} et a^{ijkl} .

Rappelons tout d'abord que la propagation des fronts d'ondes d'accélération, c'est à dire des singularités, est contrôlée par l'opérateur A_1 . Plus précisément, considérons en un point x , et pour une direction n donnée, le tenseur symétrique de $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$:

$$a^{kilm} n_k n_l = c^{kilm} n_k n_l + (\sigma_0^{kl} n_k n_l) g^{ij} = d^{kilm} n_k n_l$$

(en notant $d^{ijkl} = c^{ijkl} - \sigma_0^{ij} g^{kl} + \sigma_0^{ik} g^{jl} + \sigma_0^{jk} g^{il}$).

Il est classique, comme nous l'avons vu au cours du premier chapitre, que les différentes valeurs propres de ce tenseur peuvent s'exprimer sous la forme $\rho U^2(n)$, où $U(n)$ s'interprète comme la vitesse de propagation du front d'onde considéré, au point x et dans la direction n . Il ne peut donc y avoir propagation des ondes dans toutes les directions possibles, au point x , que si pour tout n , $a^{kilm}(x) n_k n_l$ est défini positif; c'est à dire si, et seulement si, :

$$a^{kilm}(x) n_k \zeta_i n_l \zeta_j \geq c^{te}(n, x) |\zeta|^2 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^3,$$

et donc, puisque la sphère unité est compacte dans \mathbb{R}^3 , si, et seulement si, :

$$a^{ijkl}(x) \xi_i \zeta_j \xi_k \zeta_l \geq c^{te}(x) |\xi|^2 |\zeta|^2 \quad \forall (\xi, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

Si l'on suppose de plus que a^{ijkl} est continu dans \bar{V} , on est ainsi amené, par compacité, à la condition d'uniforme ellipticité forte :

$$\exists c \in \mathbb{R}^{+*} : \forall x \in V \quad \forall (\xi, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \quad a^{ijkl}(x) \xi_i \zeta_j \xi_k \zeta_l \geq c |\xi|^2 |\zeta|^2. \quad (16)$$

C'est l'objet d'un théorème de Gårding (cf. Yosida par exemple) de montrer que dans ces conditions (a^{ijkl} continu et uniformément fortement elliptique), a_1 est $H^1_0(V)$ -coercive relativement à $L^2(V)$, c'est à dire que :

$$a_1(u,u) + c^{te} \|u\|_{L^2(V)}^2 \geq c^{te} \|u\|_{H^1(V)}^2 \quad \forall u \in H^1_0(V) \quad (\text{inégalité de Gårding})$$

Cela montre que dans le cas où le bord est rigide, le domaine de la forme a_1 est bien $H^1_0(V)$.

Le seul inconvénient à cette approche est qu'elle suppose la continuité de a^{ijkl} dans tout \bar{V} et interdit ainsi les discontinuités dans le matériau. Mais, quoi qu'il en soit, il n'y a pas (contrairement à ce qu'affirment Marsden & Hughes chap 6, proposition 1.5) $H^1(V)$ -coercivité relativement à $L^2(V)$. Nous en donnerons plus loin un contre-exemple. Notons enfin que, si a_1 est $H^1_0(V)$ -coercive relativement à $L^2(V)$ et si a^{ijkl} est continu dans \bar{V} , alors a^{ijkl} est uniformément fortement elliptique (voir Lions et Nécas). Il nous faut donc adopter des hypothèses plus fortes, mise à part la continuité, et reprendre l'inévitable chemin du lemme de Korn. C'est alors qu'apparaît l'inconvénient de la précontrainte, puisque le tenseur a^{ijkl} ne présente pas toutes les symétries du tenseur c^{ijkl} . On obtient néanmoins la :

Proposition 11 :

Soient un ouvert V du type de celui introduit dans le premier paragraphe et, définis dans V , une distribution de masse ρ vérifiant (9a), un champ de précontrainte essentiellement borné, un champ de tenseur élastique vérifiant les symétries usuelles, essentiellement borné. Alors :

a- Si c^{ijkl} vérifie presque partout dans V :

$$c^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{u}_l \geq c^{te} \eta^i_j \bar{\eta}^j_i \quad (c^{te} > 0, 2\eta_{ij} = D_i u_j + D_j u_i) \quad (17)$$

il existe une constante $c > 0$ telle que a_1 (définie en (15)) est $H^1(V)$ -coercive relativement à $L^2(V)$ dès que : $|\sigma_0|_\infty < c$. L'opérateur A_1 associé au triplet variationnel $(H^1(V), a_1, L^2(V))$ est auto-adjoint à résolvante compacte.

b- Dans les conditions du point a, l'opérateur A , défini par $A = A_1 - A_2$, $D(A) = D(A_1)$, est auto-adjoint à résolvante compacte. Il est associé au triplet variationnel $(H^1(V), a, L^2(V, dm))$ avec :

$$a(u,v) = \int_V \left\{ a^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{v}_l - \rho D g_0'(u) \cdot \bar{v} \right\} dV - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\text{grad}(\psi(u)) \cdot \text{grad}(\psi(\bar{v}))}{4\pi G} dV, \text{ ou :}$$

$$a(u,v) = \int_V \left\{ a^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{v}_l + \rho (\Omega \cdot u)(\Omega \cdot \bar{v}) - |\Omega|^2 u \cdot \bar{v} \right\} dV -$$

$$- \frac{G}{2} \int_{V \times V} \left\{ \frac{(u(x') - u(x)) \cdot (v(x') - v(x))}{|x' - x|^3} - 3 \frac{(x' - x) \cdot (u(x') - u(x)) (x' - x) \cdot (v(x') - v(x))}{|x' - x|^5} \right\} dm dm'$$

c- Si l'on suppose que σ_0 est hydrostatique et vérifie la condition d'équilibre (10), que ρ vérifie les hypothèses (9a) et que d^{ijkl} vérifie presque partout dans V la condition :

$$\text{Min } \eta^i_j \bar{\eta}^j_i \leq d^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{u}_l \leq \text{Maj } \eta^i_j \bar{\eta}^j_i \quad (0 < \text{Min} \leq \text{Maj} < +\infty \quad 2\eta_{ij} = D_i u_j + D_j u_i) \quad (18)$$

alors l'opérateur A peut être défini par le triplet variationnel $(H^1(V), a, L^2(V, dm))$, avec :

$$a(u,v) = \int_V \left\{ (d^{ijrs} D_r u_s + \rho g_0' \cdot u g^{ij}) (d^{-1})_{ijkl} (d^{klpq} D_p \bar{v}_q + \rho g_0' \cdot \bar{v} g^{kl}) + \right.$$

$$\left. + (\text{grad } \rho - \rho^2 (d^{-1})^i_k g_0' \cdot g_0') \cdot g_0' \frac{(u \cdot g_0')(\bar{v} \cdot g_0')}{|g_0'|^2} \right\} dV - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\text{grad } \psi(u) \cdot \text{grad } \psi(\bar{v})}{4\pi G} dV +$$

$$+ [\rho] (g_0' \cdot n) \int_{\Sigma} (u \cdot n)(\bar{v} \cdot n) d\Sigma - \rho (g_0' \cdot n) \int_{\partial V} (u \cdot n)(\bar{v} \cdot n) d\Sigma$$

Il est également auto-adjoint et à résolvante compacte.

Preuve : Elle découle essentiellement du lemme de Korn et des différentes formulations variationnelles obtenues au chapitre 1. En effet :

a- L'hypothèse (17) et le lemme de Korn (cf. Duvaut & Lions) conduisent à l'existence de deux constantes c et c' , strictement positives, telles que :

$$\int_V c^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{u}_l dV + c' \|u\|_{L^2(V)}^2 \geq c \|u\|_{H^1(V)}^2 \quad \forall u \in H^1(V).$$

Par ailleurs, la symétrie de σ_0 implique que :

$$\int_V \sigma_0^{ik} D_k u^j D_i \bar{u}_j \, dV \leq |\sigma_0|_\infty \int_V D_i u^j D_j \bar{u}^i \leq |\sigma_0|_\infty \|u\|_{\mathbf{H}^1(V)}^2 .$$

De sorte que :

$$|\sigma_0|_\infty < c \Rightarrow a_1 \text{ est } \mathbf{H}^1(V) \text{ coercive relativement à } \mathbf{L}^2(V).$$

Il en résulte que a_1 est bornée inférieurement et que $D(a_1) = \mathbf{H}^1(V)$. Le premier théorème de représentation (proposition 9) montre alors que A_1 est auto-adjoint. De plus, comme nous l'avons remarqué à la suite de la proposition 9, l'opérateur résolvant est continu de $\mathbf{L}^2(V)$ dans $D(a_1)$. Il est donc, d'après le théorème de Rellich, compact dans $\mathbf{L}^2(V)$. Ce qui prouve le point a.

b- La proposition 7 montre que A_2 est continu et Hermitien dans $\mathbf{L}^2(V, dm)$. Il en résulte que l'opérateur défini par : $A = A_1 - A_2$, $D(A) = D(A_1)$, est tout comme A_1 , auto-adjoint et borné inférieurement. Le premier théorème de représentation (proposition 9) montre alors que :

$$D(a) = D(a_1) = \mathbf{H}^1(V) ,$$

$$\forall (u, v) \in \mathbf{H}^1(V) \times \mathbf{H}^1(V) \quad a(u, v) = a_1(u, v) + (A_2 u | v)_{\mathbf{L}^2(V)} .$$

Considérant à nouveau la proposition 7, on obtient successivement :

$$(A_2 u | v) = (Dg_0'(u) | v)_{\mathbf{L}^2(V)} + (\text{grad}(\psi(u)) | \text{grad}(\psi(v)))_{\mathbf{L}^2(V)} / (4\pi G) \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(V) \text{ et :}$$

$$(A_3 u | v) = - G \int_V \bar{v}(x) \cdot \int_V \left\{ \frac{u(x') - u(x)}{|x' - x|^3} - 3(x' - x) \left[(x' - x) \cdot \frac{u(x') - u(x)}{|x' - x|^5} \right] \right\} dm' dm \quad \text{dans } \mathbf{H}^1(V).$$

Il est facile de vérifier, d'une manière analogue à celle utilisée en 7c, que :

$$\int_V |v(x)| \int_V \frac{|u(x') - u(x)|}{|x' - x|^3} dx' dx < + \infty .$$

De sorte que, d'après le théorème de Fubini-Tonelli :

$$(A_3 u | v) = - G \int_{V \times V} \bar{v}(x) \cdot \left\{ \frac{u(x') - u(x)}{|x' - x|^3} - 3(x' - x) \left[(x' - x) \cdot \frac{u(x') - u(x)}{|x' - x|^5} \right] \right\} dm \, dm' ,$$

et, par symétrie, que :

$(A_3 u|v) =$

$$- \frac{G}{2} \int_{V \times V} \left\{ \frac{(u(x')-u(x))(v(x')-v(x))}{|x'-x|^3} - 3 \frac{(x'-x).(u(x')-u(x)) (x'-x).(v(x')-v(x))}{|x'-x|^5} \right\} dmdm'$$

Ce qui achève la démonstration du point b.

c- Rappelons tout d'abord que l'on a convenu de noter par $S\{ \}$ la partie symétrique d'une expression : $S\{a(u,v)\} = (a(u,v) + \overline{a(v,u)})/2$.

Soit u un champ régulier (au moins H^2 par morceaux et vérifiant les conditions aux limites (4) dans $H^{1/2}$). En vertu de la formule de Green généralisée (proposition 2), de la proposition 5 et de l'équilibre de la configuration de référence (10), on obtient facilement (voir pour les détails formels le chapitre I paragraphe 2, annexe 4) :

$$\int_V p_0(D_i u^i D_j \bar{v}^j - D_i u^j D_j \bar{v}^i) + \rho D g_0'(u) \cdot \bar{v} + S\{2\rho g_0' \cdot u \operatorname{div}(\bar{v}) + (g_0' \cdot u)(\bar{v} \operatorname{grad} \rho)\} dV +$$

$$+ \int_{\Sigma} S\{\rho (g_0' \cdot u)(\bar{v} \cdot n)\} d\Sigma = 0.$$

Reprenant alors la première formulation de $a(u,v)$ obtenue au point a et tenant compte de la proposition 6, on en déduit :

$$a(u,v) = \int_V \{ (d^{ijrs} D_r u_s + \rho g_0' \cdot u g^{ij}) (d^{-1})_{ijkl} (d^{klpq} D_p \bar{v}_q + \rho g_0' \cdot \bar{v} g^{kl}) +$$

$$+ (\operatorname{grad} \rho - \rho^2 (d^{-1})_{i k}^j g_0') \cdot g_0' \frac{(u \cdot g_0')(\bar{v} \cdot g_0')}{|g_0'|^2} \} dV - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{grad} \psi(u) \cdot \operatorname{grad} \psi(\bar{v})}{4\pi G} dV +$$

$$+ [\rho] (g_0' \cdot n) \int_{\Sigma} (u \cdot n)(\bar{v} \cdot n) d\Sigma - \rho (g_0' \cdot n) \int_{\partial V} (u \cdot n)(\bar{v} \cdot n) d\Sigma$$

Il est clair, au vu de cette expression, que $H^1(V) \subseteq D(a)$. Reste à montrer la $H^1(V)$ coercivité de a relativement à $L^2(V)$.

Le deuxième et le troisième termes de cette expression sont contrôlés en module par la norme L^2 . Ils sont donc négligeables dans cette optique.

Par ailleurs, de l'appartenance de u à $H^1(V)$ et du théorème de trace, on déduit que :

$$\begin{aligned} | [\rho]g_0' \cdot n \| u \cdot n \|_{L^2(\Sigma)}^2 - \rho g_0' \cdot n \| u \cdot n \|_{L^2(\partial V)}^2 | &\leq c^{ts} \| u \cdot n \|_{H^s(\Sigma \cup \partial V)}^2 \\ &\leq c^{ts} \| u \|_{H^{s+1/2}(V)}^2 \text{ avec } 0 < s < 1/2 . \end{aligned}$$

Se fondant sur l'injection compacte de $H^{s+1/2}(V)$ dans $H^1(V)$, il est facile de déduire que (voir Lions) :

$$\forall \epsilon > 0, \exists c(\epsilon) > 0 : \epsilon \| u \|_{H^1(V)} - \| u \|_{H^{s+1/2}(V)} + c(\epsilon) \| u \|_{L^2(V)} > 0 .$$

Il ne reste donc plus, en somme, qu'à considérer le premier terme.

De l'hypothèse 18 et de la symétrie de $\delta_e T^{ij} = d^{ijkl} D_k u_l + \rho g_0' u \cdot g^{ij}$, on déduit que :

$$\delta_e T^{ij} (d^{-1})_{ijkl} \delta_e \bar{T}^{kl} \geq c^{ts} |\delta_e T^{ij}|^2 ,$$

en notant $||$ la norme tensorielle, $|s^{ij}| = s^{ij} \bar{s}_{ij}$.

Remarquons de plus que si a^{ij} et b^{ij} sont deux tenseurs symétriques :

$$|a + b|^2 \geq |a|^2 + |b|^2 - 2|a| |b| ,$$

$$2|a| |b| \leq \epsilon^2 |a|^2 + \frac{1}{\epsilon^2} |b|^2 .$$

Il s'ensuit que :

$$|a + b|^2 \geq (1 - \epsilon^2) |a|^2 + (1 - \frac{1}{\epsilon^2}) |b|^2 , \quad (19)$$

et donc que :

$$\delta_e T^{ij} (d^{-1})_{ijkl} \delta_e \bar{T}^{kl} \geq c_1 |d^{ijkl} D_k u_l|^2 + c_2 |\rho g \cdot u|^2 \geq c |\eta|^2 + c_2 |\rho g \cdot u|^2 , (c > 0, c_1 > 0) .$$

Le lemme de Korn permet alors de conclure d'une manière analogue à celle développée lors de la démonstration du point a. ■

Rappelons tout d'abord qu'un opérateur à résolvante compacte a un spectre discret, c'est à dire constitué de valeurs propres isolées, de multiplicité finie. Lorsque l'opérateur considéré est borné inférieurement, ces valeurs propres constituent donc une suite croissante tendant vers l'infini (voir Kato et les références déjà citées au début du paragraphe précédent). Ainsi, tenir compte de la pesanteur ne change en rien la structure du spectre de l'opérateur élastique dans le cas d'un corps partout solide. Ce spectre correspond aux vibrations sismiques.

Nous sommes maintenant en mesure de présenter le contre-exemple annoncé plus haut. Plaçons nous dans le cas particulier où V est une boule de rayon R , centrée à l'origine, $\sigma_0 = 0$ et où $a^{ijkl} = c^{ijkl}$ est constant et isotrope dans V . Alors :

$$c^{ijkl} = \lambda g^{ij}g^{kl} + \mu (g^{ik}g^{jl} + g^{jk}g^{il}),$$

et les valeurs propres de c^{ijkl} , considéré comme opérateur sur les tenseurs symétriques d'ordre 2, sont :

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3} \mu \text{ d'ordre 1 (} g^{ij} \text{) et } \mu \text{ d'ordre 5.}$$

Il résulte de plus du premier chapitre, paragraphe 2 (50), que la condition d'ellipticité forte revient à :

$$\lambda + 2\mu > 0 \text{ et } \mu > 0.$$

Considérons plus particulièrement un cas où :

$$\mu > 0, \lambda + 2\mu > 0 \text{ et } \kappa = \lambda + \frac{2}{3} \mu < 0 \quad (\lambda < 0).$$

On déduit directement de l'expression (15) que, pour le déplacement purement radial $u = kx$:

$$a_1(u,u) = 9\kappa |k|^2 < 0.$$

Si a_1 était $H_1(V)$ coercive, l'opérateur A_1 serait, d'après la dernière proposition, à résolvante compacte et $\gamma(a_1)$ ($= \gamma(A_1)$) serait donc une valeur propre strictement négative. Puisque l'espace des déplacements purement radiaux réduit A_1 , il y aurait ainsi une valeur propre strictement négative associée à un mode radial. Ce n'est pas le cas, puisque, comme l'indique Love (chap 7,118), ces valeurs propres radiales sont données par l'expression :

$$\alpha^2 \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \text{ avec } \cotg(\alpha R) = 1 - \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu} \alpha^2 R^2.$$

La condition d'uniforme ellipticité forte ne suffit donc pas à assurer la $H^1(V)$ coercivité relativement à $L^2(V)$.

Précisons maintenant que, dans le cas où c^{ijkl} est continu par morceaux et où ses dérivées sont essentiellement bornées, l'opérateur A , défini par la proposition 11, permet de retrouver l'opérateur formel introduit au début de ce chapitre. En effet, il découle directement de la formule de Green généralisée (voir proposition 2) et du premier théorème de représentation (proposition 9) que :

$\forall u \in H^2(\cup V_i) \cap D(A), \forall v \in H^1(V) :$

$$\begin{aligned} a_1(u,v) &= (A_1 u | v) = \int_V a^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{v}_l dV \\ &= \int_{\cup V_i} \frac{1}{\rho} D_i (a^{ijkl} D_k u_j) \bar{v}_i dm - \int_{\Sigma} [a^{ijkl} D_i u_j \bar{v}_l n_k] d\Sigma + \int_{\partial V} a^{ijkl} D_i u_j \bar{v}_l n_k d\Sigma. \end{aligned}$$

Restreignant les fonctions tests v à $D(\cup V_i)$ on en déduit que : $A_1 u_j = \frac{1}{\rho} D_i (a^{ijkl} D_k u_j)$ au sens des distributions dans $\cup V_i$, et donc dans $L^2(V)$. Revenant alors à l'égalité précédente et utilisant la densité de $H^{1/2}(\Sigma \cup \partial V)$ dans $L^2(\Sigma \cup \partial V)$, on déduit finalement que :

$[a^{ijkl} D_i u_j n_k] = 0$ sur Σ et $a^{ijkl} D_i u_j n_k = 0$ sur ∂V (au sens de $H^{1/2}$).

Il apparait ainsi que l'opérateur A_1 , tel qu'il est défini dans la proposition 11, est une extension de l'opérateur minimal formel. Notons qu'il n'est pas du tout évident que :

$D(A) = (= D(A_1))$

$\{u \in H^2(\cup V_i) : [a^{ijkl} D_i u_j n_k] = 0, [u] = 0 \text{ dans } H^{1/2}(\Sigma) \text{ et } a^{ijkl} D_i u_j n_k = 0 \text{ dans } H^{1/2}(\partial V)\}$.

La seule chose qui peut être affirmée, d'une manière générale, c'est que, si a^{ijkl} est continu par morceaux et a des dérivées essentiellement bornées, cet espace est $D(A) \cap H^2(\cup V_i)$.

La formulation variationnelle obtenue au point c est, comme nous l'avons déjà signalé au chapitre I-2, la plus physique. Ses différents termes correspondent en effet aux perturbations Eulériennes de la contrainte, de l'entropie et du champ de pesanteur. Cette expression n'est malheureusement valable que dans le cas hydrostatique et son équivalent, dans le cas général,

nous est resté, à ce jour, inaccessible. Par ailleurs, l'hypothèse adoptée, d'une manière ad hoc, lors du point a pour le cas général, n'est pas physiquement satisfaisante. L'intuition suggère, en effet, que c'est la partie déviatorique de la précontrainte σ_0 , et non sa norme globale, qui doit être limitée. Cela nous conduit à la proposition suivante qui améliore la proposition 11a et généralise 11c.

Proposition 12 :

Soient un ouvert V du type de celui introduit dans le premier paragraphe et, définis dans V , une distribution de masse ρ vérifiant (9a), un champ de précontrainte essentiellement borné vérifiant la condition d'équilibre (10), un champ de tenseur élastique c^{ijkl} vérifiant les symétries usuelles, essentiellement borné. Considérons également une fonction réelle π_0 , continue dans V , nulle au bord de V et qui admet des dérivées essentiellement bornées dans chacun des ouverts V_i ($\pi_0 = 0$ par exemple). Définissons :

$$\pi^{ijkl} = c^{ijkl} + \sigma_0^{ik}g^{jl} + \pi_0(g^{ij}g^{kl} - g^{jk}g^{il}). \text{ Alors :}$$

a- La projection $s(\pi)^{ijkl}$ de π^{ijkl} sur l'espace des tenseurs admettant les symétries de c^{ijkl} est égale à :

$$s(\pi)^{ijkl} = c^{ijkl} + \pi_0 g^{ij}g^{kl} - \frac{\pi_0}{2} (g^{ik}g^{jl} + g^{jk}g^{il}) + \frac{1}{4} (\sigma_0^{ik}g^{jl} + \sigma_0^{il}g^{jk} + \sigma_0^{jk}g^{il} + \sigma_0^{jl}g^{ik}), \text{ et}$$

$$t(\pi)^{ijkl} = \pi^{ijkl} - s(\pi)^{ijkl} = \frac{\pi_0}{2} (g^{ik}g^{jl} - g^{jk}g^{il}) + \frac{1}{4} (3\sigma_0^{ik}g^{jl} - \sigma_0^{il}g^{jk} - \sigma_0^{jk}g^{il} - \sigma_0^{jl}g^{ik}).$$

b- Si l'on suppose que $s(\pi)^{ijkl}$ vérifie l'hypothèse (18) de la proposition 11c, l'opérateur A peut être défini par le triplet variationnel $(H^1(V), a, L^2(V, dm))$, dès que

$$|\sigma_0^{ij} - \text{tr}(\sigma_0)g^{ij}/3| < c^{ia}(a_0), \text{ avec : } a(u, v) =$$

$$\int_V \left\{ \pi^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{v}_l + S((\rho g_0' - \text{grad} \pi_0) \cdot D \bar{v}(u) + (\rho g_0' + \text{grad} \pi_0) \cdot u \text{ div}(\bar{v}) + (g_0' \cdot u)(\bar{v} \cdot \text{grad} \rho)) \right\} dV$$

$$- \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\text{grad} \psi(u) \cdot \text{grad} \psi(\bar{v})}{4\pi G} dV + \int_{\Sigma} S((g_0' \cdot u)(\bar{v} \cdot n)) [\rho] d\Sigma - \int_{\partial V} S((g_0' \cdot u)(\bar{v} \cdot n)) \rho d\Sigma$$

Preuve :

a- Elle est immédiate par symétrisation.

b- On procède d'une manière analogue à celle de la proposition 11c, avec cette fois π_0 au lieu de p_0 . Cela nous conduit à l'expression (38a) formellement dérivée au chapitre I,2 (annexe 4). C'est à dire : $a(u,v) =$

$$\int_V \left\{ \pi^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{v}_l + S((\rho g_0' - \text{grad} \pi_0) \cdot D \bar{v}(u) + (\rho g_0' + \text{grad} \pi_0) \cdot u \text{ div}(\bar{v}) + (g_0' \cdot u)(\bar{v} \cdot \text{grad} \rho)) \right\} dV$$

$$- \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\text{grad} \psi(u) \cdot \text{grad} \psi(\bar{v})}{4\pi G} dV + \int_{\Sigma} S((g_0' \cdot u)(\bar{v} \cdot n)) [\rho] d\Sigma - \int_{\partial V} S((g_0' \cdot u)(\bar{v} \cdot n)) \rho d\Sigma .$$

A la vue de cette expression, il est clair, cette fois encore, que $H^1(V) \subseteq D(a)$. Il nous faut donc, à nouveau, montrer la $H^1(V)$ coercivité de a . Pour les mêmes raisons qu'en 11c, seule la première intégrale dans l'expression de $a(u,u)$ est à considérer.

Convenons de noter par \cdot le produit scalaire tensoriel : $t \cdot t' = t^{ij} t'_{ij}$ et posons :

$$w_- = \rho g_0' - \text{grad} \pi_0, \quad w_+ = \rho g_0' + \text{grad} \pi_0 .$$

L'intégrand de ce premier terme de $a(u,u)$ prend alors la forme :

$$\pi(D\bar{u}) \cdot Du + R\{ w_- \cdot D\bar{u}(u) + (w_+ \cdot u)(g^{ij} \cdot D\bar{u}) + (g_0' \cdot u)(\bar{u} \cdot \text{grad} \rho) \} ,$$

ou bien encore, en vertu de l'hypothèse (18) pour $s(\pi)$:

$$s(\pi)^{-1} \{ (s(\pi) + t(\pi)/2)(D\bar{u}) + w(\bar{u})/2 \} \cdot \{ (s(\pi) + t(\pi)/2)(D\bar{u}) + w(\bar{u})/2 \} -$$

$$- t(\pi)(D\bar{u}) \cdot s(\pi)^{-1} t(\pi)(Du)/4 - \text{Re} \{ t(\pi)(D\bar{u}) \cdot s^{-1}(w(u))/2 \} -$$

$$- w(\bar{u}) \cdot s(\pi)^{-1}(w(u)) + R\{ (g_0' \cdot u)(\bar{u} \cdot \text{grad} \rho) \} , \quad (20)$$

en convenant que : $w^{ij} = w_-^i u^j + (w_+ \cdot u) g^{ij}$.

Puisque $s(\pi)^{-1}$ présente toutes les symétries d'un tenseur élastique, on déduit facilement de l'expression de $t(\pi)$ que :

$$s(\pi)^{-1}(t(\pi)(Du)) = s(\pi)^{-1} \{ (Du - Du^*) \circ \sigma_0 + \sigma_0 \circ (Du^* - Du) \} / 4$$

$$= s(\pi)^{-1} \{ (Du - Du^*) \circ \delta_0 + \delta_0 \circ (Du^* - Du) \} / 4$$

en notant δ_0 le déviateur de σ_0 : $\delta_0^{ij} = \sigma_0^{ij} - \text{tr}(\sigma_0) g^{ij} / 3$.

Il en résulte que le deuxième terme de (20) est majoré en valeur absolue par

$|\delta_0|^2_\infty |\text{Rot}(u)|^2/\min(s(\pi))$ et le troisième par $|u||\text{Rot}(u)||\delta_0|_\infty(|w+|_\infty + |w-|_\infty)$. Par ailleurs le quatrième et le cinquième termes sont tous deux majorés, à une constante près, par $|u|^2$. Grâce à l'égalité (19), (voir la démonstration du point 11c), et à l'hypothèse (18) pour π , on conclut que l'expression (20) est minorée par :

$$c_1|\eta(u)|^2 - c_2|\delta_0|^2_\infty |\text{Rot}(u)|^2 - c_3|u|^2.$$

Ainsi, en vertu du lemme de Korn, la forme sesquilinéaire a est $H^1(V)$ coercive dès que $|\delta_0|$ est suffisamment petit. ■

Il est bien connu, dans le cadre de l'élasticité sans précontrainte ni gravité, que le noyau de l'opérateur A ($= A_1$) est réduit au déplacement quasi-rigide. La rotation perturbe cette situation. On a alors la :

Proposition 13 :

Soit V un ouvert du type de celui introduit au premier paragraphe, alors :

a- Les déplacements quasi-rigides sont de la forme:

$$\forall x \in V \quad u(x) = t + k \wedge x \quad \text{avec } (t, k) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3.$$

Il sont définis par $2\eta_{ij} = D_i u_j + D_j u_i = 0$, au sens des distributions dans V .

b- Soit $u(x) = t + k \wedge x$, un déplacement quasi-rigide, alors :

$$\begin{aligned} Au(x) &= \Omega \wedge (\Omega \wedge u(x)) - Du(\Omega \wedge (\Omega \wedge x)) \\ &= \{ (\Omega.t) \Omega - |\Omega|^2 t \} + \{ (\Omega, k, x) \Omega - (\Omega.x) k \wedge \Omega \}. \end{aligned}$$

c- Si $\Omega \neq 0$, quatre directions propres indépendantes de A sont quasi-rigides. Ce sont :

$$A(t) = -|\Omega|^2 t \quad \text{si } t.\Omega = 0, \quad A(t) = 0 \quad \text{si } \Omega \wedge t = 0, \quad A(k \wedge) = 0 \quad \text{si } \Omega \wedge k = 0.$$

d- Soit I le tenseur d'inertie, défini par : $\forall k \in \mathbb{C}^3 \quad k \rightarrow I(k) = - \int_V x \wedge (x \wedge k) \, dm$, alors :

$$k \perp \Omega \Rightarrow a(k \wedge x, k \wedge x) = |k|^2 \Omega.I(\Omega) - (k \wedge \Omega).I(\bar{k} \wedge \Omega) \quad \text{et} \quad \|k \wedge x\|^2 = I(k).\bar{k}.$$

Preuve:

$$a- \text{ Des conditions : } \forall i, j \quad D_i u_j + D_j u_i = 0, \quad (21)$$

on déduit :

$$\forall i, j \quad D_i u_i = 0 \quad \text{et} \quad D_{i,j}^2 u_j = 0.$$

En vertu de la connexité de V , il en découle que chaque u_j est un polynôme du premier degré des deux autres composantes x_k, x_l :

$$u_1(x) = t_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$u_2(x) = a_{21}x_1 + t_2 + a_{23}x_3$$

$$u_3(x) = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + t_3.$$

Les conditions (21) conduisent alors à l'antisymétrie de a_{ij} . Ce qui prouve que u est de la forme $u(x) = t + k \wedge x$.

b- Soit u un déplacement quasi-rigide. u est de classe C^∞ et $\eta(u) = 0$. Ainsi u vérifie les conditions aux limites (4) et Au s'exprime sous la forme :

$$A_1 u^j = -\frac{1}{\rho} D_i \{ c^{ijkl} D_k u_l + \sigma_0^{ik} D_k u^j \} - \\ - \left\{ G \int_V \left[\frac{u(x') - u(x)}{|x' - x|^3} - 3(x' - x) \left[(x' - x) \cdot \frac{u(x') - u(x)}{|x' - x|^5} \right] \right] dm' - \Omega \wedge (\Omega \wedge u) \right\}^j.$$

Tenant compte de :

$$D_i \sigma_0^{ik} + \rho (g_0 - \Omega \wedge (\Omega \wedge x))^k = 0, \quad \eta(u) = 0 \quad \text{et} \quad D^2 u = 0,$$

on en déduit que :

$$Au = Du(g_0 - \Omega \wedge (\Omega \wedge x)) - Du(g_0) + (\Omega \wedge (\Omega \wedge u)) \\ = - Du(\Omega \wedge (\Omega \wedge x)) + (\Omega \wedge (\Omega \wedge u))$$

et plus précisément, si $u(x) = t + k \wedge x$:

$$Au(x) = \{ (\Omega \cdot t) \Omega - |\Omega|^2 t \} + \{ (\Omega, k, x) \Omega - (\Omega \cdot x) k \wedge \Omega \}.$$

c- Cela découle directement de l'expression de Au.

d- De la définition de I(k), on tire :

$$I(k) = \int_V \{ |x|^2 k - (x.k)x \} dm .$$

Ainsi :

$$\|u\|_{L^2(V)}^2 = \int_V (k \wedge x) \cdot (\bar{k} \wedge x) dm = I(k) \cdot \bar{k} .$$

Soit $u(x) = k \wedge x$, avec $k \perp \Omega$. L'expression de Au conduit à :

$$\begin{aligned} (Au|u) &= |(\Omega, k, x)|^2 - (\Omega, x)(k \wedge \Omega) \cdot (\bar{k} \wedge x) \\ &= (\Omega, k, x)(\Omega, \bar{k}, x) - |x|^2 (k \wedge \Omega)(\bar{k} \wedge x) + (k \wedge \Omega)(\bar{k} \wedge (|x|^2 \Omega - (\Omega, x)x)) \\ &= (k \wedge \Omega) \cdot \bar{k} I(\Omega) - (k \wedge \Omega) \cdot I(\bar{k} \wedge \Omega) . \end{aligned}$$

et finalement, puisque k est orthogonal à Ω :

$$(Au|u) = |k|^2 \Omega \cdot I(\Omega) - (k \wedge \Omega) \cdot I(\bar{k} \wedge \Omega) . \blacksquare$$

Il faut noter que, prenant en compte l'auto-gravitation, la positivité de A n'est pas assurée a priori, même en l'absence de rotation. Dans ce cas, la positivité de A est équivalente à la stabilité dynamique, c'est à dire à l'absence de valeurs propres négatives. De plus, comme nous le verrons au chapitre suivant, la positivité de A implique également la stabilité dynamique en présence de rotation uniforme. Il est donc important d'avoir des estimations sur $\gamma(A)$, la borne inférieure de A. Puisque le repère de référence est lié au centre des masses, il ne faut considérer que les déplacements cinématiquement admissibles, c'est à dire l'orthogonal $L^2_{\Omega}(V, dm)$ dans $L^2(V, dm)$ des translations :

$$L^2_{\Omega}(V, dm) = \left\{ u \in L^2(V) : \int_V u dm = 0 \right\} .$$

Considérons donc le déplacement $u(x) = k \wedge x$, avec $k \perp \Omega$. Soit I_3 la valeur propre de I associée à la direction Ω et I_1, I_2 les valeurs propres associées aux deux premiers vecteurs e_1, e_2 du repère de référence. On déduit de 13b que :

$$a(u,u) = |\Omega|^2 \{ (I_3 - I_1) |\alpha_2|^2 + (I_3 - I_2) |\alpha_1|^2 \} \text{ avec } k = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \text{ et } \|k \wedge x\|^2 = |\alpha_1|^2 I_1 + |\alpha_2|^2 I_2 .$$

La positivité de A nécessite donc que I_3 soit la plus grande valeur propre.

Considérons maintenant le champ $u = kx$. $u \in H^1(V) = D(a)$ et u est orthogonal aux déplacements quasi rigides :

$$\int_V u \, dm = 0 \quad \int_V x \wedge u \, dm = 0.$$

Mieux, u est orthogonal à l'image par A des déplacements quasi-rigides. Quoi qu'il en soit, on obtient facilement :

$$a^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{u}_l = |k|^2 (d_i^i k_k + 2\sigma_0^i i_i) = |k|^2 (9\kappa + 2\text{tr}(\sigma_0)) .$$

La deuxième formulation variationnelle du point b de la proposition 11 conduit alors à :

$$a(u,u) = |k|^2 \left\{ \int_V 9\kappa + 2\text{tr}(\sigma_0) - \rho\phi \, dV - I(\Omega) \cdot \Omega \right\} = |k|^2 \int_V \{ 9\kappa + 2\text{tr}(\sigma_0) - \rho\phi' \} \, dV ,$$

$$\text{avec } \|u\|^2 = |k|^2 \frac{\text{tr}(I)}{2} ,$$

où ϕ désigne le potentiel Newtonien, ϕ' le potentiel de pesanteur et $\kappa = d_i^i k_k$. Cela fournit une autre condition élémentaire pour la positivité de A .

L'observation de la formulation 11c, valable dans le cas hydrostatique, conduit à se demander si une zone de gradient très super-adiabatique - $(\text{grad}\rho - \rho^2(d^{-1})^i k_k g_0^i) \cdot g_0^i \ll 0$ ou $[\rho]g_0^i \cdot n \ll 0$ à une interface - peut induire des modes instables ou "ultra-lents", à support dans cette zone. Cela suppose également que $|d^{ijkl} - d_i^i k_k g^{ij} g^{kl}/9|$, ou, plus simplement, la rigidité dans le cas isotrope, soit suffisamment petit. C'est dans cet ordre d'idée, provenant de l'astrophysique, que Denis (1976) a considéré le cas de l'asthénosphère terrestre. Il semble se dégager de son étude que les valeurs de la rigidité généralement admises dans cette zone sont trop grandes pour permettre ce type de modes "ultra-lents".

6-Opérateur de l'élasto-gravité pour une planète présentant une inclusion fluide.

Il existe une vaste littérature, en astrophysique, sur les vibrations libres d'une masse auto-gravitante fluide ou gazeuse. Du point de vue de l'approche variationnelle, citons principalement, et de notre simple point de vue, les articles de Chandrasekhar & Lebovitz, Dyson & Schutz, Friedman & Schutz et de Hunter. Les plus mathématiques sont, sans nul doute, ceux de Hunter et de Dyson & Schutz. Leur orientation générale semble être le problème de la stabilité, séculaire notamment, et l'étude des configurations de bifurcation. A notre connaissance, nulle part ne sont considérés les problèmes d'interfaces ni, plus curieusement, n'est précisé le domaine de la forme sesquilineaire associée à l'opérateur, ce qui constitue la clef de l'extension de Friedrichs que l'on doit utiliser dans le cas d'un entrainement en rotation uniforme, qui nous occupe ici.

Les problèmes d'interfaces solide-fluide viennent de plus compliquer la situation que doivent envisager les malheureux géophysiciens. Nous avons été amenés à citer dans ce contexte les travaux de Dahlen, Johnson & Smylie, Dahlen & Smith et de Woodhouse & Dahlen. Ce n'est, d'ailleurs, que dans ce dernier article que les conditions de transmission sont correctement données, encore que la formulation variationnelle adoptée ne permette ni de découvrir le domaine de la forme associée, ni un calcul aisé de perturbation. Les ingénieurs, de leur côté, négligent l'autogravitation et donc l'équilibre de référence (cf. Berger et al., Ohayon & Valid). Cela les conduit à une formulation a priori non symétrique qui n'est pas, en fait, réellement simplificatrice.

Par ailleurs, une vaste littérature astrophysique est consacrée à l'étude des systèmes fluides à symétrie sphérique (Eisenfeld, Christensen-Dalsgaard, Cowling, Cox, Lebovitz, Ledoux, Smeyers, Tassoul & Tassoul). Il ressort de cette lecture qu'il apparait, dans ce cas, outre le spectre acoustique (ou sismique), deux familles dénombrables de modes. L'une est la famille généralisant les modes de Kelvin et dont les fréquences propres tendent vers $+\infty$. Ce sont les modes de type (k) qui se trouvent piégés au bord des discontinuités de la masse volumique. L'autre famille est constituée des modes de gravité, ou de convection, qui forment le type (g). Ils sont essentiellement contrôlés par le gradient d'entropie ou, plus précisément, par ce qu'il est convenu d'appeler le carré de la "fréquence locale de Brunt & Väisälä", défini par :

$N^2 = -(\frac{d\rho}{dr} + \rho^2 |g_0'|/\kappa) \cdot |g_0'|/\rho$. Le critère de Schwarzschild les discrimine en deux groupes. D'une part, le groupe (g⁺), correspondant aux régions à gradient d'entropie subadiabatique ($N^2 > 0$), est constitué de modes stables. D'autre part, le groupe (g⁻), associé aux zones à gradient super-adiabatique ($N^2 < 0$), est constitué de modes instables.

Une analyse plus fouillée de ces articles suggère que le spectre ponctuel (g) de l'opérateur A, considéré dans son ensemble, est dense dans $\text{Im}(s.g_0'/\rho)$ en notant $s = \text{grad}\rho - \rho^2 g_0'/\kappa$.

Par exemple, dans le cas d'une boule liquide homogène de rayon R pour laquelle ρ et γ sont constants, on obtient que :

$$s.g_0'/\rho = -\frac{8}{3} \pi G \frac{\rho}{\gamma} \frac{r^2}{R^2 - r^2} ,$$

si bien que :

$$\text{Im}(s.g_0'/\rho) =]-\infty, 0] .$$

Or, les modes (g⁻) s'expriment sous la forme (voir Smeyers) :

$$\omega^2(k, \ell) = -\frac{4\pi G \rho}{3} \{ (x(k, \ell)^2 + \ell(\ell+1))^{1/2} - x(k, \ell) \}$$

avec :

$$x(k, \ell) = \frac{1}{2} (k+1)(2\ell+2k+3) - 2$$

et cette famille est dense dans \mathbb{R}^- . Cela revient en effet à montrer que la suite :

$$z(k, \ell) = (x(k, \ell)^2 + \ell(\ell+1))^{1/2} - x(k, \ell)$$

est dense dans \mathbb{R}^+ . Remarquons tout d'abord que :

$$z(k, \ell) = \frac{\ell + 1}{\{(x(k, \ell)/\ell)^2 + 1 + 1/\ell\}^{1/2} + x(k, \ell)/\ell} .$$

Considérons maintenant un point x de \mathbb{R}^+ . Puisque \mathbb{Q}^+ est dense dans \mathbb{R}^+ , il existe deux suites d'entiers ℓ_n et k_n telles que :

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{\ell_n}{k_n} \rightarrow y = \gamma x + (\gamma^2 x^2 + 2\gamma x)^{1/2} \text{ et (bien sûr) } \ell_n \rightarrow +\infty, k_n \rightarrow +\infty .$$

On en déduit que lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$\frac{x(k_n, \ell_n)}{\ell_n} \simeq \gamma \left(1 + \frac{1}{y} \right) k_n ,$$

et donc que :

$$z(k_n, \ell_n) \rightarrow \frac{y^2}{2\gamma(y+1)} = x .$$

Ce qui prouve bien que la suite $z(k, \ell)$ est dense dans \mathbb{R}^+ .

L'article de Christensen-Dalsgaard est également intéressant à cet égard. Dans le cadre de l'hypothèse de Cowling il montre en effet, par une analyse asymptotique des modes à faible nombre radial, qu'il existe des suites de fréquences propres de type (g^+) qui convergent vers chaque maximum local de $s.g_0'/\rho$ lorsque ℓ tend vers l'infini.

Nous nous proposons de préciser ces différents points. Groupons, tout d'abord, l'ensemble des hypothèses. On se place dans un ouvert V du type de celui défini dans le premier paragraphe. On suppose que :

- dans V_S , comme précédemment, le champ de précontrainte σ_0 est essentiellement borné et vérifie l'équation d'équilibre (10); le tenseur élastique c^{ijkl} est essentiellement borné et vérifie les symétries usuelles. }
- dans V , la distribution des masses vérifie les hypothèses (9a). On abandonne donc ici le cas d'une atmosphère. } (22)
- dans V_F , le module d'incompressibilité κ et son inverse sont essentiellement bornés, $d^{ijkl} = \kappa g^{ij}g^{kl}$; le champ de pression p_0 vérifie l'équation d'équilibre $\text{grad} p_0 = \rho g_0'$.
- sur Σ_F , $[\rho](g_0' \cdot n) > 0$. }

On considère, de plus, un prolongement continu π_0 de p_0 , dans V_S , dont les dérivées sont essentiellement bornées dans chacun des ouverts V_i ($i=1, m$), et l'on suppose que le tenseur $s(\pi)^{ijkl}$, associé à ce prolongement π_0 (cf. proposition 12), vérifie l'hypothèse (18) (voir proposition 10).

On est maintenant en mesure d'énoncer la :

Proposition 14 :

Sous les hypothèses (22) :

a- L'espace $E = \{ u \in L^2(V) : u_S (= u|_{V_S}) \in H^1(V_S), u_F \in H(\text{div}, V_F, L^2(\Sigma_F \cup \partial V_F)) \}$

et $[u.n] = 0$ sur $\partial V_F \cap \partial V_S$ }

muni du produit scalaire : $(u_S|_{V_S})_{H^1(V_S)} + (u_F|_{V_F})_{H(\text{div}, V_F, L^2(\Sigma_F \cup \partial V_F))}$ est un espace de Hilbert.

b- L'opérateur de l'élasto-gravité est un opérateur auto-adjoint, borné inférieurement, défini par le triplet variationnel $(E, a, L^2(V, dm))$, dès que $|\sigma_0^{ij} - \text{tr}(\sigma_0) g^{ij}/3| < c^{ta}(\pi_0)$, avec :
 $a(u, v) =$

$$\int_{V_S} \left\{ \pi^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{v}_l + S((\rho g_0' - \text{grad} \pi_0) \cdot D \bar{v}(u) + (\rho g_0' + \text{grad} \pi_0) \cdot u \text{ div}(\bar{v}) + (g_0' \cdot u)(\bar{v} \cdot \text{grad} \rho)) \right\} dV$$

$$+ \int_{\Sigma_S} S((g_0' \cdot u)(\bar{v} \cdot n)) [\rho] d\Sigma + \int_{\partial V_S \cap \partial V_F} S((\bar{v} \cdot n)(u_S \cdot g_0')) [\rho] d\Sigma +$$

$$+ \int_{V_F} \left\{ \frac{\kappa}{\rho^2} (\text{div}(\rho u) - s \cdot u)(\text{div}(\rho \bar{v}) - s \cdot \bar{v}) + s \cdot g_0' \frac{(u \cdot g_0')(\bar{v} \cdot g_0')}{|g_0'|^2} \right\} dV +$$

$$+ [\rho](g_0' \cdot n) \int_{\Sigma_F} (u \cdot n)(\bar{v} \cdot n) d\Sigma - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\text{grad} \psi(u) \cdot \text{grad} \psi(\bar{v})}{4\pi G} dV - \int_{\partial V} S((g_0' \cdot u)(\bar{v} \cdot n)) \rho d\Sigma,$$

en notant : $s = \text{grad} \rho - \frac{\rho^2}{\kappa} g_0'$. Si u_F et v_F appartiennent à $H^1(V_F)$:

$$a(u, v) = \int_{V_S \cup V_F} \left\{ a^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{v}_l - \rho D g_0'(u) \cdot \bar{v} \right\} dV - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\text{grad}(\psi(u)) \cdot \text{grad}(\psi(\bar{v}))}{4\pi G} dV$$

$$- \int_{\Sigma_F \cup \partial V_S \cap \partial V_F} p_0 [W(u - (u \cdot n)n) \cdot (\bar{v} - (\bar{v} \cdot n)n)] d\Sigma + S(\langle [\pi_0 u] | \text{grad}_{\Sigma}(\bar{v} \cdot n) \rangle),$$

en désignant par $\langle | \rangle$ la dualité $H^{1/2}, H^{-1/2}(\Sigma_F \cup (\partial V_S \cap \partial V_F))$.

Preuve :

a- Elle découle immédiatement de la proposition 4 et du fait que l'application trace est continue dans $H^1(V_S)$ et dans $H(\text{div}, V_F, L^2(\Sigma_F \cup \partial V_F))$.

b- Considérons des champs u et v de classe C^2 par morceaux. Les formules de Green et de Stokes nous conduisent, de même qu'au chapitre 1, paragraphe 2 annexe 4, à la deuxième formulation variationnelle. Elle peut être étendue à

$$\{ u \in L^2(V) : u_S \in H^1(V_S) \quad u_F \in H^1(V_F) \text{ et } [u.n] = 0 \text{ sur } \partial V_S \cap \partial V_F \},$$

en considérant le prolongement π_0 de p_0 dans V_S , de manière à ce que $[\pi_0 u]$ appartienne à $H^{1/2}(\partial V_S \cap \partial V_F)$.

Malheureusement, sous cette forme, a n'est pas fermée. On considère donc, à nouveau, des fonctions u et v de classe C^2 par morceaux, et l'on utilise les résultats du chapitre 1, paragraphe 2, (38b) et annexe 4. Cela nous conduit à : $a(u, v) =$

$$\begin{aligned} & \int_{V_S \cup V_F} \left\{ \pi^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{v}_l + S((\rho g_0' - \text{grad} \pi_0) \cdot D \bar{v}(u) + (\rho g_0' + \text{grad} \pi_0) \cdot u \text{ div}(\bar{v}) + (g_0' \cdot u)(\bar{v} \cdot \text{grad} \rho)) \right\} dV \\ & + \int_{\Sigma_S \cup \Sigma_F} S((g_0' \cdot u)(\bar{v} \cdot n)) [\rho] d\Sigma + \int_{\partial V_S \cap \partial V_F} S((\bar{v} \cdot n)(u \cdot (\rho g_0' - \text{grad}_\Sigma p_0))) d\Sigma - \\ & - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\text{grad} \psi(u) \cdot \text{grad} \psi(\bar{v})}{4\pi G} dV - \int_{\partial V} S((g_0' \cdot u)(\bar{v} \cdot n)) \rho d\Sigma . \end{aligned}$$

Convenons d'orienter n de V_F vers V_S sur $\partial V_S \cap \partial V_F$. On obtient alors sur cette interface :

$$\text{grad}_\Sigma p_0 = \rho_-(g_0' - (g_0' \cdot n)n), \text{ puis :}$$

$$\begin{aligned} (\bar{v} \cdot n)[u \cdot (\rho g_0' - \text{grad}_\Sigma p_0)] &= (\bar{v} \cdot n)(u_+ \cdot (\rho_+ g_0' - \rho_- g_0' + \rho_-(g_0' \cdot n)n) - \rho_-(u_- \cdot n)(g_0' \cdot n)) \\ &= [\rho](\bar{v} \cdot n)(u_S \cdot g_0') \end{aligned}$$

Reportant cette expression dans l'intégrale sur $\partial V_F \cap \partial V_S$, nous sommes conduits à la première formulation variationnelle que l'on étend sans peine à E , par densité.

Quant à la E coercivité de a , elle résulte de :

- la proposition (12) pour les termes concernant V_S , Σ_S , ∂V et \mathbb{R}^3 ,
- des inégalités (voir (22)) :

$$\frac{\kappa}{\rho^2} |\operatorname{div}(\rho u) - s \cdot u|^2 \geq c_1 |\operatorname{div}(u)|^2 - c_2 |u|^2 \text{ dans } V_F,$$

$$[\rho](g_0' \cdot n) > 0 \text{ sur } \Sigma_F,$$

pour les termes concernant V_F et Σ_F ,

- du fait que, d'après le théorème de trace dans $H^1(V_S)$:

$$\left| \int_{\partial V_S \cap \partial V_F} R((\bar{u} \cdot n)(u_S \cdot g_0')) [\rho] d\Sigma \right| \leq c_1 \|u\|_{L^2(\partial V_S \cup \partial V_F)}^2$$

$$\leq c_1 \|u\|_{H^s(\partial V_S \cup \partial V_F)}^2$$

$$\leq c_2 \|u\|_{H^{s+1/2}(V_S)}^2 \quad (0 < s < 1/2),$$

ainsi que du lemme de Lions (voir démonstration de la proposition 11c), en ce qui concerne le terme portant sur $\partial V_S \cap \partial V_F$.

Ce qui achève la démonstration du point *b*. ■

Notons que l'on doit avoir recours, dans ce cas, au potentiel de redistribution des masses, car la formule intégrale utilisée, par exemple, dans la proposition 11b, n'est valable que si u_S et u_F sont dans H^s , $s > 3/2$ (voir proposition 7 et remarque).

La formulation (11b) permet de saisir l'origine des trois spectres associés aux zones fluides. Le spectre acoustique est induit par le premier terme de l'intégrale sur V_F . Le spectre (g) est, pour sa part, relié au deuxième. Quant au spectre (k), il correspond aux intégrales sur Σ_F et sur $\partial V_S \cap \partial V_F$. D'une manière générale cette formulation conduit à une classification naturelle des modes suivant l'importance relative des différents termes correspondants.

Remarquons enfin que, dans le cas où le solide est hydrostatique, le terme intégral portant sur l'interface solide-fluide prend la forme commune à toute discontinuité de masse volumique, puisque cette interface est alors une équipotentielle du champ de pesanteur. On retrouve ainsi la formulation (39b) du chapitre I, paragraphe 2, avec $\pi^{ijkl} = d^{ijkl}$ dans V_S .

Passons maintenant à l'étude du spectre de l'opérateur A . Rappelons, tout d'abord, la définition du spectre essentiel. Il en existe, en fait, plusieurs qui sont toutes équivalentes dans le cas d'un opérateur auto-adjoint A , qui nous occupe ici. Le spectre discret est, comme nous l'avons vu, l'ensemble des valeurs propres isolées de multiplicité finie. On définit le spectre essentiel comme son complémentaire dans $\sigma(A)$: $\sigma_e(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_d(A)$. Le spectre essentiel est donc constitué de l'ensemble des points d'accumulation du spectre ainsi que des points isolés, valeurs propres de multiplicité infinie. On démontre (voir Schechter) les caractérisations suivantes du spectre essentiel d'un opérateur auto-adjoint A :

$$\lambda \in \sigma_e(A) \Leftrightarrow \{ \exists (u_i) \in D(A) : \|u_i\| = 1, u_i \rightarrow 0 \text{ (faiblement)}, \|(A-\lambda)u_i\| \rightarrow 0 \}$$

(une telle suite est appelée suite singulière), et :

$$\sigma_e(A) = \sigma(A + K) \text{ pour } K \text{ compact et auto-adjoint.}$$

Une perturbation compacte n'affecte donc pas le spectre essentiel. De plus, si K est un opérateur borné Hermitien qui est compact de $D(a)$ dans $H (= L^2(V))$, l'opérateur $A + K$ avec $D(A + K) = D(A)$, qui est également auto-adjoint, a même spectre essentiel que A .

Soient en effet $\lambda \in \sigma_e(A + K)$ et une suite singulière correspondante (u_i) :

$$(A + K - \lambda)u_i \rightarrow 0, \|u_i\| = 1, u_i \rightarrow 0 \text{ (faiblement)}.$$

On en déduit que : $\forall v \in D(a), a(u_i, v) \rightarrow 0$ et donc que $u_i \rightarrow 0$ (faiblement) dans $D(a)$. La compacité de K implique que $K(u_i) \rightarrow 0$ et donc que : $(A - \lambda)u_i \rightarrow 0$. Ce qui montre que $\lambda \in \sigma_e(A)$.

Ainsi, par exemple, l'opérateur défini par $u \rightarrow \text{grad}(\psi(u))$ est continu Hermitien dans $L^2(V)$, et compact de E dans $L^2(V)$ en vertu de la proposition 7d, puisqu'il est clair que dans tous les cas $E \subseteq H(\text{div}, V, L^2(\Sigma \cup \partial V))$. Il en résulte que l'approximation de Cowling n'affecte pas le spectre essentiel.

Commençons par étudier le cas où l'inclusion fluide est isentropique. Ce cas particulièrement simple est intéressant en lui même. En effet, $s = 0$ presque partout dans V , et on a la :

Proposition 15 :

Supposons que, dans le cadre des hypothèses (22), l'inclusion fluide soit isentropique : $s = 0$ p. p. dans V_F . Soient $E_2 = \{ u \in E : u_S = 0 \text{ et } \rho u_F \in H_0(\text{div}0, V_F) \}$ et $E_1 = E \cap E_2^\perp$ (\perp au sens de $L^2(V, dm)$). Alors :

a- $E_2 \subseteq \text{Ker}(A)$ et l'injection de E_1 dans $L^2(V)$ est compacte.

b- La restriction de A à \bar{E}_1 , la fermeture de E_1 dans $L^2(V)$, est auto-adjointe et à résolvante compacte. Le spectre de A est constitué d'une suite croissante de valeurs propres, de multiplicité finie, tendant vers $+\infty$ et de 0, le seul point du spectre essentiel, qui est une valeur propre de multiplicité infinie.

Preuve :

a- Il ressort de l'expression de $a(u, v)$, obtenue dans la proposition 14b, que :

$$(s = 0 \text{ p. p. dans } V_F, u \in E_2) \Rightarrow (\forall v \in E \ a(u, v) = 0).$$

On en déduit, d'après le premier théorème de représentation (proposition 9), qu'alors :

$$E_2 \subseteq D(A) \text{ et } A(E_2) = \{0\}$$

Par ailleurs, il découle de la définition de E_2 que :

$$E_2^\perp \cap E = \{ u \in L^2(V) : u_S \in H^1(V_S), u_F \in H(\text{div}, V_F, L^2(\Sigma \cup \partial V_F)) \cap H_0(\text{div}0, V_F)^{\perp(\text{usuel})} \text{ et } [u.n] = 0 \text{ sur } \partial V_S \cap \partial V_F \}$$

On en déduit, en vertu de la proposition 4c et du théorème de Rellich, que l'injection de E_1 dans $L^2(V)$ est compacte.

b- Il est immédiat que la restriction de A à \bar{E}_1 est auto-adjointe. Le point a montre qu'elle est à résolvante compacte. Cela permet de conclure. ■

Il faut remarquer que si $\Sigma_F = \emptyset$ et si $\partial V_F \subseteq \partial V_S$, alors :

$$E \cap E_2^\perp \subseteq \{ u \in L^2(V) : u_S \in H^1(V_S) \text{ et } u_F \in H^1(V_F) \}.$$

Cela résulte de la proposition 1, puisqu'on a alors :

$$u_F = \text{grad}(h), \text{ avec } h \in H^1(V_F), \Delta h \in L^2(V_F) \text{ et } \frac{\partial h}{\partial n} \in H^{1/2}(\partial V_F).$$

La présence de Σ_F peut briser cette régularité.

Dans le cas général où l'inclusion fluide n'est pas isentropique, nous avons vu au début de ce paragraphe grâce à l'exemple du à Smeyers que le spectre essentiel peut être non vide. Gubbins (1976) (cf. Crossley & Rochester (1980)) a considéré le cas d'une couronne fluide comprise entre deux coques de rayons a et b . Il a supposé que $N^2 = s.g/\rho$ restait constant dans le fluide et a utilisé les approximations de Boussinesq et de Cowling (cette dernière n'affectant pas le spectre essentiel, comme nous l'avons remarqué). Les fréquences propres associées aux modes g sont alors données par la formule :

$$\omega^2(\ell, n) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4\ell(\ell+1)} + \frac{n^2}{\ell(\ell+1)} \pi^2 \left[\text{Log } \frac{b}{a} \right]^{-2}}.$$

Il apparaît ainsi que le spectre (g) est dense dans $[0, N^2]$. La présence de la graine affecte chacune des valeurs propres mais pas le spectre essentiel dans son ensemble.

Nous proposons donc la :

Proposition conjecturale 16 :

Supposons que, dans le cadre des hypothèses (22), la fonction $s.g_0'$ est continue par morceaux dans V_F . Soit $E_2 = \{ u \in E : u_S = 0, \rho u_F \in H_0(\text{div}0, V_F) \text{ et } s.u_F = 0 \text{ p. p. dans } V_F \}$. Alors

a- $E_2 \subseteq \text{Ker}(A)$.

b- Le spectre essentiel de A est $[\text{Min}(0, \text{Inf}(s.g_0'/\rho)), \text{Max}(0, \text{Sup}(s.g_0'/\rho))]$

c- Le spectre ponctuel de A est constitué, d'une part, d'une suite croissante de valeurs propres de multiplicité finie, tendant vers $+\infty$, d'autre part, d'une suite de valeurs propres dense dans $[\text{Min}(0, \text{Inf}(s.g_0'/\rho)), \text{Max}(0, \text{Sup}(s.g_0'/\rho))]$, et enfin de 0 qui est une valeur propre de multiplicité infinie.

Preuve partielle :

a- Soit $u \in E_2$. On tire de l'expression de $a(u,v)$ (proposition 14b) que :

$$\forall v \in E \quad a(u,v) = 0.$$

Il en résulte, en vertu du premier théorème de représentation (proposition 9), que :

$$u \in D(A) \text{ et } Au = 0.$$

b- Montrons que : $\sigma_e \subseteq [\text{Min}(0, \text{Inf}(s.g_0'/\rho)) , \text{Max}(0, \text{Sup}(s.g_0'/\rho))]$ (sans hypothèse particulière sur $s.g_0'$).

Comme remarqué plus haut, l'hypothèse de Cowling n'affecte pas le spectre essentiel. On considérera donc l'opérateur A_c associé à la forme sesquilinéaire a_c obtenue par suppression du terme :

$$\int_{\mathbf{R}^3} \frac{\text{grad}(\psi(u)) \cdot \text{grad}(\psi(\bar{v}))}{4\pi G} dV$$

dans l'expression de $a(u,v)$ de la proposition 14b.

Considérons maintenant l'opérateur continu C :

$$u \rightarrow Cu = s.g_0' \frac{u \cdot g_0'}{|g_0'|^2} g_0'.$$

On vérifie sans peine que :

$$\|C\| = |s.g_0'/\rho|_\infty.$$

L'opérateur auto-adjoint $A' = A_c - C$ est associé à la forme sesquilinéaire $a'(u,v) =$

$$\int_{V_S} \left\{ \pi^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{v}_l + S((\rho g_0' - \text{grad} \pi_0) \cdot D \bar{v}(u) + (\rho g_0' + \text{grad} \pi_0) \cdot u \text{ div}(\bar{v}) + (g_0' \cdot u)(\bar{v} \cdot \text{grad} \rho)) \right\} dV$$

$$+ \int_{\Sigma_S} S((g_0' \cdot u)(\bar{v} \cdot n)) [\rho] d\Sigma + \int_{\partial V_S \cap \partial V_F} S((\bar{v} \cdot n)(u_S \cdot g_0')) [\rho] d\Sigma +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{V_F} \frac{\kappa}{\rho^2} (\operatorname{div}(\rho u) - s.u)(\operatorname{div}(\rho \bar{v}) - s.\bar{v}) \, dV + [\rho](g_0'.n) \int_{\Sigma_F} (u.n)(\bar{v}.n) \, d\Sigma - \\
& - \int_{\partial V} S((g_0'.u)(\bar{v}.n)) \, \rho d\Sigma .
\end{aligned}$$

La démonstration se fait alors en trois étapes :

-1 On montre que $\sigma_e(A') = \{0\}$.

-2 On utilise un résultat classique (cf. Akhiezer & Glazman, T.II page 318 lemme 2) qui prouve que puisque C est borné le spectre essentiel de A_c est dans un $\|C\|$ voisinage de $\sigma_e(A')$. Ainsi $\sigma_e(A_c) \subseteq [-\|C\|, \|C\|]$.

-3 On déduit de l'expression de a_c que $\sigma(A_c) \subseteq [\operatorname{Min}(0, \operatorname{Inf}(s.g_0'/\rho)), +\infty[$.

1. (dans le cas où $\operatorname{grad} \kappa \wedge \operatorname{grad} p_0 = 0$)

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\rho u) - s.u &= \rho(\operatorname{div} u + (u/\kappa).\operatorname{grad} p_0) \\
&= \rho(\operatorname{div} u + u.\operatorname{grad} f) \\
&= \rho \exp(-f) \operatorname{div}(\exp(f)u) .
\end{aligned}$$

L'expression de a' montre que F défini par :

$$F = \{ u \in E : u_S = 0 \text{ et } \exp(f)u_F \in H_0(\operatorname{div}0, V_F) \} ,$$

est inclus dans $\operatorname{Ker}(A')$. On en déduit que :

$$E \cap (\operatorname{Ker} A')^\perp \subseteq E \cap F^\perp .$$

Or :

$$\begin{aligned}
F^\perp \cap E &= \{ u \in L^2(V) : u_S \in H^1(V_S) , \\
&\rho \exp(-f)u_F \in H(\operatorname{div}, V_F, L^2(\Sigma \cup \partial V_F)) \cap H_0(\operatorname{div}0, V_F)^{\perp(\text{usuel})} \text{ et } [u.n] = 0 \text{ sur } \partial V_S \cap \partial V_F \} .
\end{aligned}$$

Il en résulte, en vertu de la proposition 4c et du théorème de Rellich, comme pour la proposition 15, que l'injection de $E \cap (\ker A')^\perp$ dans $L^2(V)$ est compacte. Ce qui prouve que $\sigma_e(A') = \{0\}$.

c- Comme on l'a montré en a, 0 est valeur propre de multiplicité infinie. Par ailleurs, puisque $\sigma_e(A)$ est borné supérieurement, s'il n'y avait pas une suite croissant vers l'infini de valeurs propres de multiplicité finie, le spectre de A serait borné supérieurement tout comme son champ numérique. Ceci ne peut être, puisque, d'une part, on peut trouver des champs de $H^1_0(V_F)$ qui rendent le rapport $\|u\|_{H^1(V_S)}/\|u\|_{L^2(V_S)}$ aussi grand que l'on veut et que, d'autre part, pour des champs u à support dans V_S :

$$a(u,u) \geq c^{ta} \|u\|_{H^1(V_S)}^2 - c^{tb} \|u\|_{L^2(V_S)}^2.$$

Reste à montrer qu'il existe une suite de valeurs propres denses dans $\text{Im}\{s.g_0'/\rho\}$. ■

Remarquons, pour finir, que les déplacements rigides étant réguliers et vérifiant les conditions aux limites à chaque interface comme on l'a déjà vu, la proposition 13 du paragraphe précédent peut être reprise mot pour mot dans le cas d'une inclusion fluide.

7- Caractérisation variationnelle des vecteurs propres de A, Principe de Rayleigh.

L'approche variationnelle présente l'avantage de fournir une caractérisation simple du spectre ponctuel de A. Elle est utilisée depuis Rayleigh pour les calculs de perturbation de configuration de référence. Notons toutefois que le terme "principe de Rayleigh" est parfois utilisé dans une acception différente. Yosida, par exemple, page 321, l'utilise dans un sens très particulier. De nombreux auteurs en Mathématiques appliquées (voir Weinstein & Stenger) couvrent sous ce terme les caractérisations par Min-Max auxquelles doivent être, pour le moins, associés les noms de Weyl, Poincaré et Ritz. Notre acception se rattache à celle des géophysiciens.

On considère donc l'opérateur de l'élasto-gravité associé à une planète, présentant éventuellement une inclusion fluide, et l'on suppose que les hypothèses (22) sont satisfaites. Désignons par a' la forme définie par :

$$a'(u,v) = a(u,v) + (\text{grad}\psi(u)|\text{grad}\psi(v))_{L^2(\mathbb{R}^3)}/4\pi G$$

La proposition 7 montre que :

$$a'(u,v) = a(u,v) + (\text{grad}\psi(u)|v) \quad (23)$$

en notant $(|)$ le produit scalaire dans $L^2(V, dm)$.

a' est donc la forme obtenue dans le cadre de l'approximation de Cowling, c'est à dire en négligeant la redistribution des masses. Elle peut s'exprimer de diverses manières (voir propositions 11,12,14), mais il doit être clairement entendu que la variable $\psi(u)$ est à proscrire, quoi qu'il en soit. Rappelons que $D(a)$ est l'espace E (cf. proposition 14) qui se réduit à $H^1(V)$ dans le cas d'une planète partout solide. Dans tous les cas on obtient la :

Proposition 17 :

Soient $u \in D(A)$ ($u \neq 0$), $\psi \in H^1(\mathbb{R}^3)$ et $\omega \in \mathbb{C}$. Alors

a- les propositions suivantes sont équivalentes :

1- $Au = \omega^2 u$,

2- $\forall v \in D(a)$ (ou D dense dans $D(a)$), $a(u,v) = \omega^2 (u|v)$,

3- $J(u) = \frac{1}{2} \{a(u,u) - \omega^2 (u|u)\}$ est stationnaire au point u dans $D(a)$.

b- ainsi que :

4- $Au = \omega^2 u$ et $\psi = \psi(u)$,

5- $J(u,\psi) = \frac{1}{2} \{a'(u,u) - (\text{grad}\psi|u) - (u|\text{grad}\psi) + (\text{grad}\psi|\text{grad}\psi)_{L^2(\mathbb{R}^3)}/4\pi G - \omega^2 (u|u)\}$

est stationnaire au point (u,ψ) dans $D(a) \times W^1(\mathbb{R}^3)$ (ou $D(a) \times H^1(\mathbb{R}^3)$).

Preuve :

a- L'équivalence (1-2) découle directement du premier théorème de représentation (proposition 9). Montrons l'équivalence (2-3).

L'application : $\forall u \in L^2(V), u \rightarrow (u|u)$, est dérivable et admet : $\forall v \in L^2(V) u \rightarrow 2\text{Re}((u|v))$, comme dérivée au point u . Puisque la topologie de $D(a)$ est plus fine que celle de $L^2(V)$, on en déduit que l'application : $\forall u \in D(a), u \rightarrow (u|u)$, est également dérivable et admet :

$\forall v \in D(a), v \rightarrow 2\text{Re}(a(u,v))$, comme dérivée au point u . Par ailleurs, puisque l'application quadratique $u \rightarrow a(u,u)$ est continue dans $D(a)$, elle est dérivable dans $D(a)$ et sa dérivée est :

$$\forall v \in D(a), v \rightarrow 2\text{Re}(a(u,v)).$$

Il en résulte que J est stationnaire en u si, et seulement si :

$$\forall v \in D(a) \text{Re}(a(u,v) - \omega^2 (u|v)) = 0,$$

ou encore, en considérant iv , si, et seulement si :

$$\forall v \in D(a) a(u,v) = \omega^2 (u|v).$$

Ce qui clôt la démonstration du point a.

b- Grâce à des arguments analogues à ceux développés au point a, il est clair que $J(u,\psi)$ est dérivable dans $D(a) \times W^1(\mathbb{R}^3)$ et que sa dérivée au point (u,ψ) est :

$$\forall (v,\phi) \in D(a) \times W^1(\mathbb{R}^3) :$$

$$(v,\phi) \rightarrow \text{Re}(a'(u,v) - (\text{grad}\psi|v) - \omega^2 (u|v)) + \text{Re}((\text{grad}\psi|\text{grad}\phi)_{L^2(\mathbb{R}^3)}/4\pi G - (u|\text{grad}\phi)) .$$

De sorte que $J(u,\psi)$ est stationnaire au point (u,ψ) si, et seulement si :

$$\text{Re}(a'(u,v) - (\text{grad}\psi|v) - \omega^2(u|v)) = 0 \quad \forall u \in D(a) ,$$

$$\text{Re}((\text{grad}\psi|\text{grad}\phi)_{L^2(\mathbb{R}^3)}/4\pi G - (u|\text{grad}\phi)) = 0 \quad \forall \phi \in W^1(\mathbb{R}^3) ,$$

et, considérant à nouveau iv et $i\psi$, si, et seulement si :

$$a'(u,v) - (\text{grad}\psi|v) - \omega^2 (u|v) = 0 \quad \forall u \in D(a) ,$$

$$(\text{grad}\psi|\text{grad}\phi)_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 4\pi G(u|\text{grad}\phi) \quad \forall \phi \in W^1(\mathbb{R}^3) .$$

En vertu de la proposition 7b, de la densité de $H^1(\mathbb{R}^3)$ dans $W^1(\mathbb{R}^3)$ et de la définition (23) de a' , cette dernière proposition est équivalente à la proposition 5. Ce qui prouve le point b. ■

III ÉTUDE D'UNE CLASSE DE PROBLÈMES SPECTRAUX NON LINÉAIRES ET DES PROBLÈMES D'ÉVOLUTION ASSOCIÉS.

Nous nous consacrons dans ce chapitre à l'étude du problème d'évolution :

$$\partial_{tt}u + 2B(\partial_t u) + Au = f(t) ,$$

où B est un opérateur continu antisymétrique et A un opérateur borné inférieurement, auto-adjoint. L'étude des solutions libres stationnaires, c'est à dire des modes propres, nous conduit au problème spectral associé à la famille :

$$L(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda B + A .$$

On reconnaît bien sûr, dans ce problème, une généralisation de celui correspondant à l'étude de l'évolution d'une planète autour d'un équilibre en rotation uniforme. Dans ce cas, en effet, B est l'opérateur défini par :

$$\forall u \in L^2(V), u \rightarrow \Omega \wedge u \in L^2(V) ,$$

et A l'opérateur de l'élasto-gravité que l'on a étudié au chapitre précédent.

Il existe une vaste littérature sur l'étude de ce type de problème. Pour une grande part, elle est consacrée au cas matriciel et débouche sur une caractérisation par Min-Max du spectre (voir, entre autres, Duffin, Rogers et Zhuralev). En ce qui concerne le cas fonctionnel, beaucoup moins de résultats semblent avoir été obtenus. Nous renvoyons à l'article de Einsenfeld (1973) pour une bibliographie fournie sur le sujet. Pour notre part, nous avons tiré profit des articles de Turner, Barston, Rogers et de Dyson & Schutz ainsi que de l'ouvrage de Bogнар. Turner a étudié la famille $F(\lambda) + A$ où $F(\lambda)$ est un polynôme en λ et A un opérateur Hermitien compact positif. Il a, dans ces conditions, obtenu une caractérisation par Min-Max du spectre et la complétude des modes. Barston, quant à lui, a obtenu des caractérisations partielles par Min-

Max de valeurs propres, dans le cas de la famille $\lambda^2 + 2\lambda B + A$, avec A et B auto-adjoints. Nos résultats s'appuient essentiellement sur la compacité de la résolvante de A ou d'une de ses restrictions et sur le deuxième théorème de représentation. Nous obtenons de la sorte une caractérisation du spectre ou d'une partie du spectre par Min-Max et nous montrons que la famille des vecteurs propres est surcomplète et attachée à une résolution de l'identité dans un espace produit. Ainsi se trouve justifiée la décomposition en somme de modes, obtenue formellement par Wahr dans le cas des vibrations terrestres.

1- Généralités.

Commençons par préciser un certain nombre de définitions. On considère, d'une part, un opérateur A auto-adjoint, borné inférieurement, associé au triplet variationnel $(D(a), a, H)$ et, d'autre part, une application à valeur dans $L(H)$, analytique dans un ouvert O de C :

$$\forall \lambda \in O \subseteq C, \lambda \rightarrow F(\lambda) \in L(H).$$

On définit l'ensemble résolvant ρ et le spectre associés à la famille $\{F(\lambda) + A\}$ par :

$$\rho = \{ \lambda \in O \subseteq C : \text{Ker}\{F(\lambda) + A\} = \{0\} \text{ et } (F(\lambda) + A)^{-1} \in L(H) \} \text{ et } \sigma = O \setminus \rho.$$

On définit alors l'application résolvante par :

$$\forall \lambda \in \rho : \lambda \rightarrow R(\lambda) = (F(\lambda) + A)^{-1} \in L(H).$$

Précisons que l'ensemble résolvant, le spectre et la résolvante de A, seront, quant à eux, respectivement notés : $\rho(A)$, $\sigma(A)$, $R_\lambda(A)$, afin de les distinguer.

Nous rassemblons dans la proposition suivante, un certain nombre de propriétés élémentaires :

Proposition 1 :

a- ρ est un ouvert de C, $R(\lambda)$ est analytique dans ρ et :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \rho \times \rho \quad R(\lambda) - R(\mu) = -R(\lambda).(F(\lambda) - F(\mu)).R(\mu) \quad , \quad R'(\lambda) = -R(\lambda).F'(\lambda).R(\lambda) .$$

b- Soit $\lambda \in \bar{\rho} \setminus \rho$. Il existe une suite (λ_i) de ρ telle que :

$$\lambda_i \rightarrow \lambda \text{ et } \|R(\lambda_i)\| \rightarrow +\infty .$$

c- Si $F(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda B$, avec B continu et $O = C$, le spectre σ est identique à celui de l'opérateur T de $H \times H$ défini par :

$$T = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & -2B \end{bmatrix} \text{ avec } D(T) = D(A) \times H, \text{ et :}$$

$$\forall \lambda \in \rho (= \rho(T)) \quad R_\lambda(T) = \begin{bmatrix} -R(\lambda).(\lambda + 2B) & -R(\lambda) \\ I - \lambda R(\lambda) & -\lambda R(\lambda) \end{bmatrix}$$

Preuve :

a- Soit $\lambda_0 \in \rho$. Considérons la factorisation suivante :

$$(F(\lambda) + A) = (F(\lambda_0) + A).(I + R(\lambda_0).(F(\lambda) - F(\lambda_0))) .$$

Puisque :

$$R(\lambda_0).(F(\lambda) - F(\lambda_0)) \in L(H) ,$$

$$(I + R(\lambda_0).(F(\lambda) - F(\lambda_0)))(D(A)) \subseteq D(A),$$

$$(I + R(\lambda_0).(F(\lambda) - F(\lambda_0)))(x) \in D(A) \Rightarrow x \in D(A),$$

$F(\lambda) + A$ est continument inversible dans H , dès que $I + R(\lambda_0).(F(\lambda) - F(\lambda_0))$ l'est, en particulier dès que :

$$\|R(\lambda_0)(F(\lambda) - F(\lambda_0))\| < 1 .$$

La continuité de $\lambda \rightarrow F(\lambda)$ implique donc que ρ est ouvert et que σ est fermé dans O .

Soient, par ailleurs, deux éléments λ et μ de ρ . On déduit simplement :

$$\begin{aligned}
 R(\lambda) &= R(\lambda).(F(\mu) + A).R(\mu) \\
 &= R(\lambda).(F(\lambda) + A + F(\mu) - F(\lambda)).R(\mu) \\
 &= R(\mu) - R(\lambda).(F(\lambda) - F(\mu)).R(\mu) .
 \end{aligned}$$

L'analyticité de $R(\lambda)$ en découle, puisqu'il apparaît qu'alors $R(\lambda)$ est dérivable dans ρ et que :

$$R'(\lambda) = - R(\lambda).F'(\lambda).R(\lambda) .$$

b- Nous le prouvons par l'absurde. Supposons donc qu'il existe un voisinage compact $V'(\lambda)$ de λ et une constante c tels que :

$$\forall \mu \in V(\lambda) = V'(\lambda) \cap \rho \quad \|R(\mu)\| \leq c.$$

Considérons alors une suite λ_i de $V(\lambda)$ qui converge vers λ . On déduit du point a que :

$$R(\lambda_i) - R(\lambda_j) = - R(\lambda_i).(F(\lambda_i) - F(\lambda_j)).R(\lambda_j) , \quad (1)$$

et donc que :

$$\|R(\lambda_i) - R(\lambda_j)\| \leq c^2 |\lambda_i - \lambda_j| .$$

La suite $R(\lambda_i)$ est ainsi une suite de Cauchy qui converge vers un opérateur continu R de l'espace de Banach $L(H)$. Montrons que $R = (F(\lambda) + A)^{-1}$.

Tout d'abord, par passage à la limite dans l'expression (1), on déduit que :

$$R(\lambda_i) - R = - R(\lambda_i).(F(\lambda_i) - F(\lambda)).R ,$$

et donc que, d'une part, :

$$\text{Ker}(R) = \{0\} , \text{ puisque : } Rx = 0 \Rightarrow R(\lambda_i)x = 0, \quad (2)$$

et, d'autre part, que :

$$\text{Im}(R) \subseteq \text{Im}(R(\lambda_i)) = D(A). \quad (3)$$

On déduit de plus de l'égalité :

$$\forall x \in D(A), R(\lambda_i).(F(\lambda_i) + A)x = x ,$$

par passage à la limite, que :

$$\forall x \in D(A), R.(F(\lambda) + A)x = x ,$$

puisque $\|(F(\lambda_i) + A)x\| \leq c^{i*}$, indépendamment de i . En vertu de (3), il en découle que :

$$\forall x \in H, R.(F(\lambda) + A).Rx = Rx ,$$

puis grâce à (2) que :

$$\forall x \in H, (F(\lambda) + A).Rx = x .$$

En conclusion, $R = (F(\lambda) + A)^{-1}$ et $\lambda \in \rho$, ce qui contredit l'hypothèse et achève la démonstration du point *b*.

c- Une simple inspection de l'expression proposée pour $R_\lambda(T)$ montre que, quel que soit λ appartenant à ρ , $R_\lambda(T)$ est continu et que :

$$\text{Im}(R_\lambda(T)) \subseteq D(T) , R_\lambda(T).(T-\lambda) = I_{D(T)} \text{ et } (T-\lambda).R_\lambda(T) = I .$$

Ce qui prouve que $\rho \subseteq \rho(T)$.

Soit maintenant un élément λ de $\rho(T)$. Posons :

$$R_\lambda(T) = \begin{bmatrix} X & Y \\ V & W \end{bmatrix}$$

où X, Y, V, W sont des éléments de $L(H)$. Des égalités :

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ V & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda & I \\ -A & -(\lambda + 2B) \end{bmatrix} = I_{D(T)} ,$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & I \\ -A & -(\lambda + 2B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ V & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} ,$$

on déduit que :

$$-\lambda X - Y.A = I_{D(A)} \quad , \quad X = Y.(\lambda + 2B) \quad , \quad \lambda V = -W.A \quad , \quad V - W.(\lambda + 2B) = I \quad ,$$

ainsi que :

$$-A.Y - (\lambda + 2B).W = I \quad , \quad W = \lambda Y \quad , \quad A.X = -(\lambda + 2B).V \quad , \quad -\lambda X + V = I \quad .$$

Substituant, dans chacune de ces séries d'égalités, la seconde dans la première, il en résulte que :

$$Y.(\lambda^2 + 2\lambda B + A) = -I_{D(A)} \quad , \quad (\lambda^2 + 2\lambda B + A).Y = -I \quad ,$$

avec toujours :

$$X = Y.(\lambda + 2B) \quad , \quad W = \lambda Y \quad , \quad V = I + \lambda Y.(\lambda + 2B) \quad .$$

Cela montre que λ appartient à ρ et que :

$$Y = -R(\lambda) \quad .$$

Il en découle l'expression proposée pour $R_\lambda(T)$ et que $\rho(T) \subseteq \rho$. ■

Il est intéressant de remarquer que, si B est antisymétrique, l'opérateur $-iT$ est formellement symétrique pour la forme sesquilinéaire symétrique de $D(a) \times H$ définie par :

$$\forall ((u,v), (u',v')) \in D(a) \times H : ((u,v) | (u',v')) = a(u,u') + (v|v') \quad .$$

En effet, si (u,v) et (u',v') appartiennent à $D(a) \times D(A)$:

$$(-iT(u,v) | (u',v')) = i\{a(u,v') - a(v,u')\} + 2i(B(v)|v') \quad .$$

On peut, comme pour le point c , montrer que $\sigma = \sigma(T')$, où T' est l'opérateur de $H \times H$ défini par :

$$T = \begin{bmatrix} -B & I \\ (B^2 - A) & -B \end{bmatrix} \text{ avec } D(T) = D(A) \times H \text{ et :}$$

$$\forall \lambda \in \rho, R_\lambda(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I \\ \lambda + B \end{bmatrix} R(\lambda) [\lambda + B \quad I].$$

Si B est antisymétrique, $-iT$ est formellement symétrique pour la forme sesquilinéaire symétrique de $D(a) \times H$ définie par :

$$\forall ((u,v),(u',v')) \in D(a) \times H : ((u,v)|(u',v')) = a(u,u') - (B^2u|u') + (v|v') - (Bu|v') - (v|B(u')).$$

Le seul résultat général dont on dispose sur le spectre σ , lorsque $F(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda B$ et que B est continu antisymétrique, est un théorème dû à Dyson & Schutz qui constitue une généralisation du théorème du cercle de Howard (voir aussi Barston). Nous en précisons la démonstration et en proposons une autre.

Proposition 2 (Dyson & Schutz) :

Soient A un opérateur auto-adjoint et B un opérateur continu antisymétrique dans H. Soit σ le spectre associé à la famille $\lambda^2 + 2\lambda B + A$. Alors :

a- $\sigma \subseteq i\mathbb{R} \cup \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\text{Im}(\lambda)| \leq \|B\| \}$

b- Si A est borné inférieurement par $\gamma(A) = \gamma(a)$:

$\lambda \in \sigma \text{ et } \lambda \notin i\mathbb{R} \Rightarrow |\lambda|^2 \leq \text{Max}(0, -\gamma(A))$.

Preuve 1 (d'après Dyson & Schutz) :

Il est facile de voir (cf. le début de la deuxième preuve) que l'on peut trouver des points de ρ aussi loin de l'origine qu'on le souhaite .

Soit maintenant un point λ appartenant à $\bar{\rho} \setminus \rho$. En vertu de la proposition 1b, il existe une suite (λ_i) de complexes dans ρ et une suite de vecteurs e_i dans H, telles que :

$$\|e_i\| = 1, \lambda_i \rightarrow 0, \|R(\lambda_i)e_i\| \rightarrow +\infty.$$

Considérons la suite de vecteurs ξ_i définis, pour i suffisamment grand, par :

$$\xi_i = \frac{R(\lambda_i)e_i}{\|R(\lambda_i)e_i\|}$$

et posons $L(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda B + A$. On obtient alors :

$$\|\xi_i\| = 1 \quad , \quad \|L(\lambda_i)\xi_i\| \rightarrow 0 .$$

et donc :

$$(L(\lambda_i)\xi_i | \xi_i) \rightarrow 0 ,$$

Or :

$$(L(\lambda_i)\xi_i | \xi_i) = \lambda_i^2 + 2b_i\lambda_i + a_i ,$$

en notant a_i et b_i les deux suites de réels :

$$a_i = a(\xi_i, \xi_i) \quad \text{et} \quad b_i = (-iB\xi_i | \xi_i) .$$

Convenons de désigner par un indice $_1$ la partie réelle et par un $_2$ la partie imaginaire. On obtient finalement :

$$\lambda_{1i}^2 - \lambda_{2i}^2 - 2b_i\lambda_{1i} + a_i \rightarrow 0 ,$$

$$\lambda_{1i}(\lambda_{2i} + b_i) \rightarrow 0 ,$$

$$\lambda_{1i} \rightarrow \lambda_1 \quad , \quad \lambda_{2i} \rightarrow \lambda_2 .$$

De sorte que :

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{ou bien} \quad b_i \rightarrow -\lambda_2 \quad \text{et} \quad a_i \rightarrow -(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) .$$

On en déduit le résultat, puisque :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad |b_i| \leq \|B\| \quad , \quad \text{et dans le cas du point } b, \quad a_i \geq \gamma(A). \quad \blacksquare$$

Nous proposons maintenant une autre démonstration, constructive, mais plus longue. Preuve 2 :

Soit $\mu \in \rho(A)$. Une simple factorisation conduit à :

$$L(\lambda) = (A - \mu)(I + C(\lambda, \mu)),$$

en notant $C(\lambda, \mu) = R_\mu(A)(\lambda^2 + 2\lambda B + \mu)$. Il est clair que :

$C(\lambda, \mu) \in L(H)$, $(I + C(\lambda, \mu))(D(A)) \subseteq D(A)$ et que :

$$(I + C(\lambda, \mu))(x) \in D(A) \Rightarrow x \in D(A).$$

De sorte que $L(\lambda)$ est inversible si c'est le cas de $I + C(\lambda, \mu)$ dans H , et donc, dès que la norme de $C(\lambda, \mu)$ est strictement plus petite que 1. Par ailleurs, du fait que A est auto-adjoint :

$$\|R_\mu(A)\| = \frac{1}{\text{dist}(\mu, \sigma(A))} .$$

Une première condition suffisante, pour l'appartenance de λ à ρ , apparait donc :

$$\exists \mu \in \rho(A) : \|\lambda^2 + \mu + 2\lambda B\| < \text{dist}(\mu, \sigma(A)) .$$

Montrons maintenant que :

$$\|\lambda^2 + \mu + 2\lambda B\| \leq \text{Max}(\|\lambda^2 + \mu \pm 2i\lambda\| \|B\|) .$$

En effet, si $\|u\| = 1$:

$$\begin{aligned} \|(\lambda^2 + \mu + 2\lambda B)u\|^2 &= |\lambda^2 + \mu|^2 + 4|\lambda|^2 \|Bu\|^2 + 4 \text{Re}\{\bar{\lambda}(\lambda^2 + \mu)(u|Bu)\} \\ &\leq |\lambda^2 + \mu|^2 + 4|\lambda|^2 \|B\|^2 + 4 |\text{Im}\{\bar{\lambda}(\lambda^2 + \mu)\}| \|B\| . \end{aligned}$$

Or :

$$\|\lambda^2 + \mu \pm 2i\lambda\| \|B\|^2 = |\lambda^2 + \mu|^2 + 4|\lambda|^2 \|B\|^2 \mp 4 \|B\| |\text{Im}\{\bar{\lambda}(\lambda^2 + \mu)\}| .$$

Ce qui nous conduit à l'inégalité annoncée et à la condition suivante, suffisante pour l'apparte-

nance de λ à ρ :

$$\exists \mu \in \rho(A) : \text{Max}\{ |\lambda^2 + \mu \pm 2i\lambda \|B\| | \} < \text{dist}(\mu, \sigma(A)) \quad (4)$$

Passons maintenant à la preuve du point a :

a- On utilise simplement que pour un opérateur auto-adjoint :

$$\text{dist}(\mu, \sigma(A)) \geq |\text{Im}(\mu)| .$$

On déduit de (4) que $\lambda \in \rho$, dès que :

$$\exists \mu : \text{Im}(\mu) \neq 0 \text{ et } \text{Max}\{ |\lambda^2 + \mu \pm 2i\lambda \|B\| | \} < |\text{Im}(\mu)| .$$

Chacune des deux inégalités $|\lambda^2 + \mu \pm 2i\lambda \|B\| | < |\text{Im}(\mu)|$ détermine l'intérieur d'une parabole de base l'axe réel et de foyer le point d'affixe $-\lambda^2 \mp 2i\lambda \|B\|$, à moins que l'un de ces points soit sur l'axe réel, auquel cas l'ensemble correspondant est vide. Ces deux ensembles auront donc une intersection, en dehors de l'axe réel, non vide si, et seulement si, :

$$\text{Im}(\lambda^2 + 2i\lambda \|B\|) \cdot \text{Im}(\lambda^2 - 2i\lambda \|B\|) > 0 .$$

Ce qui revient à :

$$\lambda_1^2 (\lambda_2^2 - \|B\|^2) > 0$$

ou bien encore, à :

$$\lambda_1 \neq 0 \text{ et } |\lambda_2| > \|B\| .$$

Ce qui prouve le point a.

b- On suppose donc que $\gamma(A) > -\infty$. Ainsi :

$$\text{Re}(\gamma(A) - \mu) > 0 \Rightarrow \text{dist}(\mu, \sigma(A)) > |\gamma(A) - \mu| .$$

On en déduit, grâce à (4), une nouvelle condition suffisante, relative à l'appartenance de λ à ρ :

$$\exists \mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\mu - \gamma(A)) < 0 \text{ et } \operatorname{Max}\{ |\lambda^2 + \mu \pm 2i\lambda \|B\| | \} < |\mu - \gamma(A)|. \quad (5)$$

Soient m_+ le point d'affixe $2i\lambda \|B\| - \lambda^2$, m_- celui d'affixe $-2i\lambda \|B\| - \lambda^2$ et m_0 celui d'affixe $\gamma(A)$. Les deux dernières inégalités déterminent cette fois les deux demi-plans limités, respectivement, par la médiatrice de m_0m_+ et celle de m_0m_- , ne contenant pas m_0 . Les trois inégalités peuvent donc être conjointement vérifiées si, et seulement si, le demi axe réel croissant d'origine m_0 est extérieur à l'angle convexe des vecteurs m_0m_+ et m_0m_- . Or, une condition nécessaire et suffisante pour que ce demi-axe soit intérieur à cette angle est :

$$\exists \alpha \in [0,1] \quad \alpha(y_+ - y_-) + y_- = 0 \quad \alpha(x_+ - x_-) + x_- \geq 0$$

en posant :

$$\begin{aligned} x_+ + iy_+ &= -\lambda^2 + 2i\lambda \|B\| - \gamma(A) \\ x_- + iy_- &= -\lambda^2 - 2i\lambda \|B\| - \gamma(A) \end{aligned}$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} x_{\pm} &= \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \gamma(A) \mp 2 \|B\| \lambda_2 \\ y_{\pm} &= \pm 2 \|B\| \lambda_1 - 2\lambda_1\lambda_2. \end{aligned}$$

Cela revient à :

$$y_+y_- \leq 0, \quad \frac{x_-y_+ - x_+y_-}{y_+ - y_-} \geq 0,$$

et finalement à :

$$\lambda_1^2 (\lambda_2^2 - \|B\|^2) \leq 0 \quad |\lambda|^2 + \gamma(A) \leq 0. \quad (6)$$

La condition (5) est donc équivalente à :

$$|\lambda_2| > \|B\| \quad \text{ou} \quad |\lambda|^2 > \operatorname{Max}(0, -\gamma(A)).$$

Le point b se trouve ainsi démontré. ■

2-Utilisation de la compacité.

Précisons tout d'abord que l'on convient de noter par $\text{Inf}\{ \}$ (respectivement $\text{Sup}\{ \}$) la borne inférieure (respectivement supérieure) d'une expression. On utilise la notation Min (respectivement Max) pour préciser que la borne est atteinte. Quand on n'a pas à le supposer a priori, on ne précisera pas afin de ne pas induire de fautes logiques.

On suppose maintenant que l'injection de $D(a)$ dans H est compacte. On obtient alors la :

Proposition 3 :

Supposons que l'application : $\lambda \in O \rightarrow F(\lambda) \in L(H)$ soit analytique dans O et que l'injection de $D(a)$ dans H soit compacte. Alors :

a- Le spectre σ est ponctuel et chaque valeur propre est de multiplicité finie.

b- Supposons que quel que soit λ appartenant à $I \subseteq O$, $F(\lambda)$ soit auto-adjoint. Alors :

$\lambda \in I \cap \sigma \Leftrightarrow \text{Inf}_{S \subseteq D(a)} \dim S = m \text{ Max}_{\|u\|=1} \{ (F(\lambda)u|u) + a(u,u) \} = 0$,
et la borne inférieure est atteinte.

Preuve :

a- Soit un réel $\mu < \gamma(A)$. Une simple factorisation conduit à :

$$F(\lambda) + A = (A - \mu)^{1/2} \cdot (C(\lambda, \mu) + I) \cdot (A - \mu)^{1/2} \quad \text{avec : } C(\lambda, \mu) = R_\mu(A)^{1/2} \cdot (F(\lambda) + \mu) \cdot R_\mu(A)^{1/2}.$$

Remarquons que :

$$x \in D(A) \Leftrightarrow x \in D(a) \text{ et } (A - \mu)^{1/2}x \in D(a) , \\ (I + C(\lambda, \mu))(D(a)) \subseteq D(a) ,$$

$$(I + C(\lambda, \mu))(x) \in D(a) \Rightarrow x \in D(a) ,$$

et qu'en vertu du deuxième théorème de représentation, $(A - \mu)^{1/2}$ est un isomorphisme topologique de $D(a)$ sur H . De plus, puisque $R_\mu(A)$ est compact dans H , $R_\mu(A)^{1/2}$ l'est également. En effet, d'après le théorème spectral relatif aux opérateurs bornés, auto-adjoints (voir par exemple Dixmier), $R_\mu(A)^{1/2}$ est limite forte de polynômes en $R_\mu(A)$. Il en résulte que $C(\lambda, \mu)$ est également compact dans H . Ainsi :

- Si $I + C(\lambda, \mu)$ n'est pas inversible dans H , -1 est valeur propre de $C(\lambda, \mu)$, ce qui implique que λ est une valeur propre de même multiplicité associée à la famille $F(\lambda) + A$.
- Si $I + C(\lambda, \mu)$ est continûment inversible dans H , il réalise, d'après les remarques précédentes, une bijection de $D(a)$ sur $D(a)$, si bien que, toujours en vertu des remarques précédentes, $F(\lambda) + A$ est continûment inversible.

Le spectre est donc ponctuel et chaque valeur propre est de multiplicité finie.

b- Considérons un élément λ de $I \cap \sigma$ et un réel suffisamment négatif μ , de manière à ce que l'opérateur $C(\lambda, \mu)$, qui intervient dans la factorisation décrite au point a, soit auto-adjoint négatif. Puisque cet opérateur est compact, la théorie de Riesz montre que :

$$\forall \mu \leq \mu_0(\lambda) < \gamma(A), \exists m \in \mathbb{N}^* : -1 = \text{Inf}_{S \subseteq H \text{ dim} S = m} \text{Max}_{u \in S} \left\{ \frac{(C(\lambda, \mu)u|u)}{(u|u)} \right\} ,$$

et la borne inférieure est atteinte. Ceci équivaut à :

$$\forall \mu \leq \mu_0(\lambda) < \gamma(A), \exists m \in \mathbb{N}^* :$$

$$0 = \text{Inf}_{S \subseteq H \text{ dim} S = m} \text{Max}_{u \in S} \left\{ \frac{((F(\lambda) + \mu)R_\lambda^{1/2}u|R_\lambda^{1/2}u) + (u|u)}{(u|u)} \right\} ,$$

et, grâce au deuxième théorème de représentation, à :

$$\forall \mu \leq \mu_0(\lambda) < \text{Min}(\gamma(A), 0), \exists m \in \mathbb{N}^* :$$

$$0 = \text{Inf}_{S \subseteq D(a) \text{ dim} S = m} \text{Max}_{u \in S} \left\{ \frac{(F(\lambda)u|u) + a(u, u)}{(u|u) - a(u, u)/\mu} \right\} .$$

Soit m la dimension correspondant à $\mu = \mu_0(\lambda) < \text{Min}(\gamma(A), 0)$. Alors :

$\forall \mu \leq \mu_0(\lambda), \forall S \subseteq D(a)$ avec $\dim S = m$:

$$0 \leq \text{Max}_{u \in S} \left\{ \frac{(F(\lambda)u|u) + a(u,u)}{(u|u) - a(u,u)/\mu} \right\} \leq \text{Max}_{u \in S} \left\{ \frac{(F(\lambda)u|u) + a(u,u)}{(u|u) - a(u,u)/\mu_0} \right\},$$

et :

$$\forall \mu \leq \mu_0(\lambda) : 0 = \text{Inf}_{S \subseteq D(a) \dim S = m} \text{Max}_{u \in S} \left\{ \frac{(F(\lambda)u|u) + a(u,u)}{(u|u) - a(u,u)/\mu} \right\}.$$

Cela montre que l'on peut inverser l'ordre des quantificateurs dans la proposition qui devient alors :

$\exists m \in \mathbb{N}^* : \forall \mu \leq \mu_0(\lambda) < \text{Min}(\gamma(A), 0) :$

$$0 = \text{Inf}_{S \subseteq D(a) \dim S = m} \text{Max}_{u \in S} \left\{ \frac{(F(\lambda)u|u) + a(u,u)}{(u|u) - a(u,u)/\mu} \right\}.$$

Montrons maintenant que l'on peut s'affranchir de μ . Posons, tout d'abord :

$$f_{\mu}(u) = \frac{(F(\lambda)u|u) + a(u,u)}{(u|u) - a(u,u)/\mu} \quad \text{et} \quad f(u) = \frac{(F(\lambda)u|u) + a(u,u)}{(u|u)}.$$

De l'égalité :

$$f(u) - f_{\mu}(u) = f(u) \frac{a(u,u)}{a(u,u) - \mu(u|u)},$$

et de la compacité de la boule unité d'un espace de dimension finie, on déduit que :

$$\forall u \in S \text{ avec } \dim S = m, \forall \mu \in \mathbb{R}^- \text{ avec } \mu \leq \text{Min}(\mu_0(\lambda), 2\gamma(A)) : |f(u) - f_{\mu}(u)| \leq \text{Max}_S |f(u)|.$$

Cela prouve que, lorsque μ tend vers $-\infty$, f_{μ} converge uniformément vers f dans chaque sous espace S de dimension m de $D(a)$ et donc que :

$$\inf_{S \subseteq D(a) \text{ dim} S = m} \max_{u \in S} \|u\|=1 f(u) = 0.$$

Si l'on suppose, réciproquement, que cela est vérifié, on déduit tout d'abord que :

$$\forall S \subseteq D(a) \text{ avec dim} S = m : \max_{u \in S} \|u\|=1 f(u) \geq 0 ,$$

Or pour $\mu \leq \mu_0(\lambda) < \gamma(A)$, on obtient aisément que :

$$\forall u \in S : \frac{(F(\lambda)u|u) + a(u,u)}{a(u,u) - \mu(u|u)} = f(u) \frac{(u|u)}{a(u,u) - \mu(u|u)} , \quad 0 \leq \frac{(u|u)}{a(u,u) - \mu(u|u)} \leq \frac{1}{\gamma(A) - \mu_0} ,$$

et donc que :

$$\forall S \subseteq D(a) \text{ avec dim} S = m : 0 \leq \max_S \left\{ \frac{(F(\lambda)u|u) + a(u,u)}{a(u,u) - \mu(u|u)} \right\} \leq \frac{\max_S f(u)}{\gamma(A) - \mu_0} .$$

Ainsi :

$$0 = \inf_{S \subseteq D(a) \text{ dim} S = m} \max_{u \in S} \left\{ \frac{(F(\lambda)u|u) + a(u,u)}{a(u,u) - \mu(u|u)} \right\} ,$$

ce qui nous ramène aux équivalences précédentes et achève la démonstration du point b. ■

Remarquons que la factorisation utilisée pour la démonstration du point a reste valable, même si A n'est pas à résolvante compacte. Il apparait également, d'après cette démonstration, que si λ appartient au spectre σ , alors $I + C(\lambda, \mu)$ n'est pas inversible continument dans H, et que λ est une valeur propre si, et seulement si, -1 est une valeur propre de $C(\lambda, \mu)$. La démonstration du point b montre alors que l'on a une caractérisation par Min-Max d'une valeur propre λ , dès que c'est le cas pour la valeur propre -1 associée à l'opérateur $C(\lambda, \mu)$.

Il découle également de cette factorisation que $L(\lambda)^{-1}$ est, pour tout λ appartenant à ρ , continu de H dans D(a).

La proposition précédente peut être précisée dans le cas où : $F(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda B$, avec B continu et antisymétrique, grâce à l'utilisation de quotients de Rayleigh généralisés. Commençons par quelques définitions. Soit :

$$D = \{ u \in D(a) : \|u\| = 1 \text{ et } a(u,u) + (iBu|u)^2 \geq 0 \} .$$

Puisque A est borné inférieurement et que l'injection de $D(a)$ dans H est compacte, $a(u,u)$ ne peut être négatif que sur un sous-espace de dimension finie. On peut donc introduire :

$$m_0 = \text{Min} \{ m \in \mathbf{N} : \forall S \subseteq D(a) \text{ avec } \dim S = m, S \cap D \neq \emptyset \} ,$$

les fonctions réelles définies sur D par :

$$\forall u \in D, p^\pm(u) = (iBu|u) \pm ((iBu|u) + a(u,u))^{1/2} ,$$

ainsi que :

$$\gamma^+ = \text{Min}_D p^+(u) , \quad \gamma^- = \text{Max}_D p^-(u) ,$$

et enfin pour $m \geq m_0$:

$$\omega_m^+ = \text{Inf}_{S \subseteq D(a) \text{ dim} S = m} \text{Max}_{S \cap D} \{p^+(u)\} , \quad \omega_m^- = \text{Sup}_{S \subseteq D(a) \text{ dim} S = m} \text{Min}_{S \cap D} \{p^-(u)\} .$$

Il est évident que :

$$\gamma^+ \geq - \|B\| \text{ et } \gamma^- \leq \|B\| ,$$

que ω_m^+ est une suite croissant de γ^+ vers $+\infty$ et que ω_m^- est une suite décroissant de γ^- vers $-\infty$. Soient m_0^+ le plus petit entier supérieur à m_0 qui rend ω_m^+ supérieur à γ^- et m_0^- le plus petit entier supérieur à m_0 qui rend ω_m^- inférieur à γ^+ . On obtient alors la :

Proposition 4 :

Supposons que l'injection de $D(a)$ dans H soit compacte et considérons $F(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda B$ définie sur \mathbf{C} et B continu et antisymétrique. Alors :

a- Le spectre σ est inclus dans la réunion de l'axe imaginaire et de l'ensemble J :

$$J = \{ \lambda \in \mathbf{C} : |\lambda|^2 \leq \text{Max}(0, -\gamma(a)) \text{ et } |\text{Im}(\lambda)| \leq \|B\| \} .$$

Il est symétrique par rapport à l'axe imaginaire.

$i\omega \in \sigma \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^* : 0 = \text{Inf}_{S \subseteq D(a) \text{ dim} S = m} \text{Max}_{\|u\|=1} \{-\omega^2 + 2i\omega(Bu|u) + a(u,u)\}$,
 et la borne inférieure est atteinte. σ n'a pas de points d'accumulation hors de J .

si A et B sont réels, σ est symétrique par rapport à l'axe réel.

b- plus précisément :

$$i\omega \in \sigma \text{ et } \omega \in]-\infty, \gamma^+[\Leftrightarrow \exists m \geq m^-_0 : \omega = \omega^-_m$$

$$i\omega \in \sigma \text{ et } \omega \in]\gamma^-, +\infty[\Leftrightarrow \exists m \geq m^+_0 : \omega = \omega^+_m,$$

et les bornes sont atteintes. Dans le cas où A et B sont réels :

$$\gamma^+ + \gamma^- = 0, m^+_0 = m^-_0 \text{ et } \omega^+_m = -\omega^-_m.$$

c- si $\gamma(a) (= \gamma(A)) \geq 0$, alors $D = D(a)$, $m^+_0 = m^-_0 = \dim(\text{Ker}(A)) + 1$ et le spectre σ est discret et constitué des suites $\{\omega^+_m\}_{m \geq m^+_0} \cup \{\omega^-_m\}_{m \geq m^-_0}$ et de 0 ($\dim \text{Ker}(A)$ fois). Si A et B sont réels σ est exactement $\{\omega^+_m\}_{m \in \mathbb{N}^*} \cup \{\omega^-_m\}_{m \in \mathbb{N}^*}$, la valeur 0 étant comptée le double de sa multiplicité.

Preuve :

a- Le premier point résulte de la proposition 2. Il peut d'ailleurs être montré directement puisque l'on sait que le spectre est ponctuel. La symétrie du spectre provient du fait que l'opérateur $\lambda^2 + 2\lambda B + A$ est continument inversible si, et seulement si, c'est le cas pour son

adjoint : $\bar{\lambda}^2 - 2\bar{\lambda}B + A$. Le deuxième point est une application de la proposition 3b avec :

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda B \text{ et } I = i\mathbb{R}.$$

Soit λ un point d'accumulation de σ . En vertu du point a, il existe une suite de vecteurs x_i de $D(A)$ et une suite de valeurs propres λ_i tels que :

$$\lambda_i \rightarrow \lambda, \|x_i\| = 1, x_i \rightarrow x \text{ (faiblement) et :}$$

$$C(\lambda_i, \mu) = R_\mu(A)^{1/2}(\lambda_i^2 + 2\lambda_i B + \mu).R_\mu(A)^{1/2}(x_i) = -x_i.$$

Montrons que x_i converge fortement vers x qui est un vecteur propre associé à la valeur propre λ . En effet, $C(\lambda, \mu)$ est compact et :

$$\begin{aligned} \|C(\lambda, \mu)(x) - C(\lambda_i, \mu)(x_i)\| &\leq \|C(\lambda, \mu)(x - x_i)\| + \|C(\lambda, \mu) - C(\lambda_i, \mu)\|, \\ \|C(\lambda, \mu) - C(\lambda_i, \mu)\| &\leq \|R_\mu\| |\lambda - \lambda_i| \{ |\lambda + \lambda_i| + 2 \|B\| \}, \end{aligned}$$

de sorte que $x_i (= -C(\lambda_i, \mu)(x_i))$ tend fortement vers $-C(\lambda, \mu)(x)$ qui est donc égal à x . Tenant maintenant compte de :

$$\forall i: \lambda_i^2 x_i + 2\lambda_i B(x_i) + A(x_i) = 0,$$

on obtient aisément que :

$$(\lambda_i + \bar{\lambda}_j)((\lambda_i - \bar{\lambda}_j)(x_i | x_j) + 2(B(x_i) | x_j)) = 0.$$

Il est clair que l'on peut restreindre la suite λ_i de telle manière que $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$, si bien que passant à la limite dans la dernière égalité, on est conduit à :

$$\lambda - \bar{\lambda} + 2(B(x) | x) = 0,$$

puis tenant compte de :

$$\lambda^2 + 2\lambda(B(x) | x) + a(x, x) = 0,$$

à :

$$\lambda - \bar{\lambda} = -2(B(x) | x) \text{ et } |\lambda|^2 = -a(x, x).$$

On prouve ainsi que λ appartient à J .

Enfin dans le cas où A et B sont réels, on remarque que : $\lambda^2 + 2\lambda B + A$ est continûment inversible si, et seulement si, $\bar{\lambda}^2 + 2\bar{\lambda} \bar{B} + \bar{A}$ ($= \bar{\lambda}^2 + 2\bar{\lambda} B + A$) l'est. Ce qui prouve la symétrie de σ par rapport à l'axe réel et clôt la démonstration du point a .

b- Posons pour x appartenant à $D(a)$ de norme 1 et ω appartenant à \mathbf{R} :

$$f(\omega, x) = -\omega^2 + 2\omega(iB(x) | x) + a(x, x).$$

Pour x fixé dans D , l'équation réelle $f(\omega, x) = 0$ a deux racines réelles : $p^-(x)$ et $p^+(x)$, et l'on obtient simplement :

$$x \in D(a), \|x\| = 1, f(\omega, x) = 0 \Leftrightarrow x \in D, \omega = p^-(x) \text{ ou } \omega = p^+(x) \quad (7a)$$

$$x \in D(a), \|x\| = 1, f(\omega, x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in D, \omega \in [p^-(x), p^+(x)] \quad (7b)$$

$$x \in D(a), \|x\| = 1, f(\omega, x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D, \omega \in]-\infty, p^-(x)] \cup [p^+(x), +\infty[\\ \text{ou bien :} \\ x \in D(a) \setminus D, \|x\| = 1 \end{cases} \quad (7c)$$

Soit maintenant un réel $\omega > \gamma^-$ tel que $i\omega$ soit élément du spectre. On déduit du point a que :

$$\exists m \in \mathbb{N}^* : \text{Min}_{S \subseteq D(a) \text{ dim} S = m} \text{Max}_{x \in S, \|x\|=1} \{f(\omega, x)\} = 0 \quad (8)$$

et donc que :

$$\forall S \subseteq D(a) \text{ avec } \text{dim} S = m, \text{Max}_{S \cap D} \{f(\omega, x)\} \geq 0,$$

puis, d'après (7b), que si l'on note x_S le point de S où le maximum est réalisé :

$$x_S \in D \text{ et : } \text{Min}_S \{p^-(x)\} \leq p^-(x_S) \leq \omega \leq p^+(x_S) \leq \text{Max}_S \{p^+(x)\}.$$

On obtient ainsi :

$$m \geq m_0 \text{ et } \omega \leq \text{Inf}_{S \subseteq D(a) \text{ dim} S = m} \text{Max}_{S \cap D} \{f(\omega, x)\}.$$

Soit maintenant S_0 le sous espace de dimension m sur lequel la borne de (8) est atteinte. On a :

$$\forall x \in S_0, f_\omega(x) \leq 0 \text{ et } \exists x_0 \in S_0 : f(\omega, x_0) = 0.$$

Puisque $\omega > \gamma^-$, ω ne peut être que $p^+(x_0)$ et quel que soit x appartenant à $S_0 \cap D$: $p^+(x) \leq \omega$.

Il en résulte que :

$$\omega = \text{Max}_{S_0 \cap D} \{p^+(x)\} = \text{Min}_{S \subseteq D(a) \text{ dim} S = m} \text{Max}_{S \cap D} \{p^+(x)\} = \omega_m^+.$$

Pour la réciproque, on utilise essentiellement un argument de Barston. Supposons que :

$$\omega > \gamma^-, \omega = \omega_m^+ . \quad (9)$$

Il apparait d'emblée, en vertu de (7b), que pour $m \geq m_0$ ($\omega_m^+ > \gamma^-$) :

$$\forall S \subseteq D(a) \text{ avec } \dim S = m : \text{Max}_{x \in S, \|x\|=1} \{f(\omega_m^+, x)\} \geq 0 .$$

Etant donné un réel $\epsilon > 0$, on déduit de (9) que :

$$\exists S \subseteq D(a) \text{ avec } \dim S = m : \forall x \in S \quad p^+(x) \leq \omega_m^+ + \epsilon ,$$

de sorte que pour chaque x de S :

$$\text{- ou bien } p^+(x) \leq \omega_m^+$$

- ou bien $\omega_m^+ \leq p^+(x) \leq \omega_m^+ + \epsilon$, et d'après le théorème des accroissements finis :

$$f(p^+(x), x) - f(\omega_m^+, x) = \frac{\partial f}{\partial \omega}(\omega, x) (p^+(x) - \omega_m^+) \quad \text{avec : } \omega_m^+ \leq \omega \leq \omega_m^+ + \epsilon ,$$

et donc :

$$f(\omega_m^+, x) = 2(\omega - (iB(x)|x)) (p^+(x) - \omega_m^+) .$$

En résumé :

$$\forall \epsilon > 0, \exists S \text{ avec } \dim S = m : \text{Max}_{x \in S, \|x\|=1} \{f(\omega_m^+, x)\} \leq 2(\omega_m^+ + \epsilon + \|B\|) \epsilon ,$$

et ainsi :

$$\text{Inf}_{S \subseteq D(a), \dim S = m} \text{Max}_{x \in S, \|x\|=1} \{f(\omega_m^+, x)\} = 0 .$$

La démonstration, dans le cas où $\omega < \gamma^+$, est strictement analogue.

Si A et B sont réels :

$$\forall u \in D(a) : \bar{u} \in D(a) \text{ et } (iB(\bar{u})|u) = - (iBu|u) , p^\pm(u) = - p^\mp(\bar{u}) ,$$

ce qui montre que :

$$\omega_m^+ = - \omega_m^- , \gamma^- = \gamma^+ \text{ et } m_0^- = m_0^+ .$$

c- Si $\gamma(a) \geq 0$, le point a montre que le spectre est ponctuel. De plus $\gamma^+ \geq 0$, $\gamma^- \leq 0$, $m_0^+ = m_0^- = \dim(\text{Ker}(A)) + 1$. Le point b implique le résultat.

Si de plus A et B sont réels :

$$\forall u \in \text{Ker}(A) : \bar{u} \in \text{Ker}(A) \text{ et } p^\pm(u) = - p^\mp(\bar{u}) = (iBu|u) \pm |(iBu|u)|.$$

De sorte que pour $m \leq m_0 : \omega_m^+ = \omega_m^- = 0$. ■

Supposons maintenant que l'injection de l'orthogonal du noyau de A dans H est compacte. Plus généralement soit $D(a) = E_1 \oplus E_2$, avec injection compacte de E_1 dans H et E_2 inclus dans $\text{Ker}(A)$.

Notons H_1 la fermeture dans H de E_1 et H_2 la fermeture de E_2 . Ainsi :

$$H = H_1 \oplus H_2 .$$

Considérons à nouveau la famille quadratique $L(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda B + A$, où B est continu et anti-symétrique. Soit :

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} ,$$

la décomposition de B dans : $H = H_1 \oplus H_2$. Il est clair que :

$$B_{11} = - B_{11}^* , B_{22} = - B_{22}^* , B_{12} = - B_{21}^* .$$

On définit maintenant :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(-2B_{22}) , F(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda(B_{11} - 2 B_{12} (\lambda + 2B_{22})^{-1} B_{21}) \in L(H_1) ,$$

avec (cf. proposition 3) : $I = i\mathbb{R} \setminus \sigma(-2B_{22})$.

Il est évident que $\|B_{ij}\| \leq \|B\|$ et donc que $\sigma(-2B_{22}) \subseteq i[-2\|B\|, 2\|B\|]$. Etant donné un vecteur appartenant à E_1 de norme 1 dans H et un réel ω tel que $|\omega| > 2\|B_{22}\|$, définissons alors la fonction :

$$f(\omega, x) = (F(i\omega)x|x) + a(x, x) = -\omega^2 + 2\omega b(\omega, x) + a(x, x),$$

avec :

$$b(\omega, x) = (iB_{11}(x)|x) + 2((\omega - 2iB_{22})^{-1}B_{21}(x)|B_{21}(x)).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \omega}(\omega, x) &= 2 \left[b(\omega, x) + \omega \frac{\partial b}{\partial \omega}(\omega, x) - \omega \right] \text{ et que :} \\ &= 2 \{ (iB_{11}x|x) + 2(R(iB_{22})B_{21}x|B_{21}x) - \omega \} \end{aligned}$$

où R est la fonction :

$$X \rightarrow R(X) = (\omega - 2X)^{-1} - \omega(\omega - 2X)^{-2}.$$

Puisque iB_{22} est continu et autoadjoint, il est clair que :

$$\sigma(R(iB_{22})) = R(\sigma(iB_{22}))$$

et donc que :

$$\omega' \in \sigma(R(iB_{22})) \Leftrightarrow \exists \omega_0 \in \sigma(iB_{22}) : \omega' = -\frac{2\omega_0}{(\omega - 2\omega_0)^2}.$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} 2(R(iB_{22})B_{21}x|B_{21}x) &\leq \frac{\|B_{21}\|^2}{2\omega} && \text{si } \omega > 2\|B_{22}\| && \} \\ & && && \} (10) \\ 2(R(iB_{22})B_{21}x|B_{21}x) &\geq -\frac{\|B_{21}\|^2}{2\omega} && \text{si } \omega < 2\|B_{22}\| && \} \end{aligned}$$

Cela montre que :

$$\omega < - \text{Max} \{ 2 \|B_{22}\| , - \|B_{11}\| + (\|B_{11}\|^2 + 2 \|B_{21}\|^2)^{1/2} \} \Rightarrow \forall x \in E_1 \quad \frac{\partial f}{\partial \omega} f(\omega, x) > 0$$

et :

$$\omega > \text{Max} \{ 2 \|B_{22}\| , - \|B_{11}\| + (\|B_{11}\|^2 + 2 \|B_{21}\|^2)^{1/2} \} \Rightarrow \forall x \in E_1 \quad \frac{\partial f}{\partial \omega} f(\omega, x) < 0 .$$

Du fait que :

$$\text{Max} \{ 2 \|B_{22}\| , - \|B_{11}\| + (\|B_{11}\|^2 + 2 \|B_{21}\|^2)^{1/2} \} \leq 2 \|B\| ,$$

on en déduit que l'équation en ω , pour x fixé dans E_1 , $f(\omega, x) = 0$ a au plus une racine, que l'on notera $p^+(x)$ quand elle existe, strictement supérieure à $2 \|B\|$, et au plus une strictement inférieure à $-2 \|B\|$, que l'on notera quand elle existe $p^-(x)$. Soient :

$$D_+ = \{ x \in E_1 : \|x\| = 1 \text{ et } p^+(x) \text{ existe} \},$$

$$D_- = \{ x \in E_1 : \|x\| = 1 \text{ et } p^-(x) \text{ existe} \},$$

Du fait que, d'une part :

$$\forall x \in E_1 \quad |-\omega^2 + 2\omega b(\omega, x)| \leq \frac{|\omega|^3}{|\omega| - 2 \|B\|} , \tag{11}$$

et que, d'autre part, A_1 est borné inférieurement et à résolvante compacte, il existe un plus petit entier m_0^+ et un plus petit entier m_0^- tels que :

$$m \geq m_0^+ \Rightarrow \forall S \subseteq E_1 \text{ avec } \dim S = m, S \cap D_+ \neq \emptyset$$

$$m \geq m_0^- \Rightarrow \forall S \subseteq E_1 \text{ avec } \dim S = m, S \cap D_- \neq \emptyset .$$

Dans le cas contraire, en effet, $a(x, x)$ serait négatif sur un sous espace de $D(a)$ de dimension infinie; ce qui ne peut être.

Il est maintenant possible de définir :

$$\forall m \geq m_0^+ \quad \omega_m^+ = \text{Inf}_{S \subseteq E_1, \dim S = m} \text{Max}_{S \cap D_+} \{p^+(x)\} ,$$

$$\forall m \geq m_0^- \quad \omega_m^- = \text{Inf}_{S \subseteq E_1, \dim S = m} \text{Max}_{S \cap D_-} \{p^-(x)\} .$$

Ce qui nous met en mesure d'énoncer la :

Proposition 5 :

Supposons que $D(a) = E_1 \oplus E_2$, que l'injection de E_1 dans H_1 soit compacte et que E_2 soit inclus dans le noyau de A . Soient A_1 l'opérateur auto-adjoint restriction de A à H_1 , σ_1 le spectre attaché à la famille $\{F(\lambda) + A_1\}$ dans H_1 et σ celui associé à la famille $L(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda B + A$. Alors :

a- $\sigma_1 \subseteq \sigma_p$ (spectre ponctuel de $L(\lambda)$), $\sigma \setminus \sigma_1 \subseteq \{0\} \cup \sigma(-2B_{22})$ et chaque valeur propre de $L(\lambda)$ dans σ_1 est de multiplicité finie.

b- $i\omega \in \sigma_1 \cap i\mathbb{R} \Leftrightarrow i\omega \notin \sigma(-2B_{22})$ et :

$$0 = \inf_{S \in E_1, \dim S = m} \max_{u \in S, \|u\|=1} \{-\omega^2 + 2i\omega((B_{11}u|u) + 2((i\omega + 2B_{22})^{-1}B_{21}u|B_{21}u))\} + a(u,u)$$

et la borne est atteinte.

c- $i\omega \in \sigma_1$ et $\omega > 2\|B\| \Leftrightarrow \exists m \geq m_0^+$ et $\omega = \omega_m^+$,

$i\omega \in \sigma_1$ et $\omega < -2\|B\| \Leftrightarrow \exists m \leq m_0^-$ et $\omega = \omega_m^-$,

$m \rightarrow +\infty \Rightarrow \omega_m^+ \rightarrow +\infty, \omega_m^- \rightarrow -\infty$ et :

$$|\omega_m^+ - \min_{S \subseteq E_1, \dim S = m} \max_{u \in S, \|u\|=1} \{(iB_{11}u|u) + ((iB_{11}u|u)^2 + a(u,u))^{1/2}\}| \rightarrow 0$$

$$|\omega_m^- - \max_{S \subseteq E_1, \dim S = m} \min_{u \in S, \|u\|=1} \{(iB_{11}u|u) - ((iB_{11}u|u)^2 + a(u,u))^{1/2}\}| \rightarrow 0.$$

Preuve :

a- Cherchons à résoudre dans H l'équation : $(\lambda^2 + 2\lambda B + A)u = v$. Décomposant u et v dans $H_1 \oplus H_2$ sous la forme $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$, on est conduit à :

$$(\lambda^2 + 2\lambda B_{11} + A_1)u_1 + 2\lambda B_{12}u_2 = v_1,$$

$$2\lambda B_{21}u_1 + \lambda(\lambda + 2B_{22})u_2 = v_2.$$

De sorte que si λ est différent de 0 et n'appartient pas au spectre de $-2B_{22}$:

$$u_2 = (\lambda + 2B_{22})^{-1} \{v_2/\lambda - 2B_{21}(u_1)\}, \quad (F(\lambda) + A_1)(u_1) = v_1 - 2B_{12}(\lambda + 2B_{22})^{-1}(v_2).$$

En vertu de la proposition 3, le spectre σ_1 de $\{F(\lambda) + A_1\}$ est ponctuel. Cela implique que dans l'hypothèse où $\lambda \notin \{0\} \cup \sigma(-2B_{22})$, λ est élément du spectre si, et seulement si, il est élément de σ_1 . Dans ce cas λ est également une valeur propre de σ et les vecteurs propres qui lui sont associés sont de la forme :

$$u_2 = -2(\lambda + 2B_{22})^{-1} B_{21}(u_1) \quad \text{avec : } (F(\lambda) + A_1)(u_1) = 0 \quad \text{et } u_1 \neq 0 .$$

Ce qui achève la démonstration du point a grâce, à nouveau, à la proposition 3.

b- C'est, d'après le point a, une simple application de la proposition 4.

c- La démonstration est, à des détails près, analogue à celle de la proposition 4b. Il découle tout d'abord aisément des différentes définitions données en préambule que :

$$x \in E_1, \|x\| = 1, f(\omega, x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_+ \text{ et } \omega > 2 \|B\| \\ \text{ou bien :} \\ x \in D_- \text{ et } \omega < 2 \|B\| \end{cases}$$

Supposons que :

$$0 = \inf_{S \subseteq E_1, \dim S = m} \text{Max}_{x \in S, \|x\|=1} \{f(\omega, x)\} ,$$

et, pour fixer un cas, l'autre étant similaire, que $\omega > 2 \|B\|$. On déduit, tout comme pour la proposition 4b, que :

$$m \geq m_0^+ \text{ et } \forall S \subseteq E_1 \text{ avec } \dim S = m \quad \omega \leq \text{Max}_{D_+ \cap S} \{p_+(x)\} .$$

Si S_0 est le sous espace de dimension m pour lequel le minimum est obtenu, on a :

$$\forall x \in S_0 \quad f(\omega, x) \leq 0 \quad \text{et } \exists x_0 \in S_0 : f(\omega, x_0) = 0 .$$

Cela implique que, d'une part, puisque $\omega > 2 \|B\|$, $\omega = p^+(x)$, et que, d'autre part, puisque $f(\omega, x) \leq 0$:

$$\forall s \in D_+ \cap S : p^+(x) \leq \omega .$$

Il en résulte finalement que : $\omega = \omega_m^+$.

Quant à la réciproque, il suffit de remarquer que, en vertu de (10), pour tout ϵ strictement positif,

$\left| \frac{\partial f}{\partial \omega}(\omega, x) \right|$ est uniformément bornée quand ω décrit l'intervalle $[\omega_m^+, \omega_m^+ + \epsilon]$. Le reste de

la démonstration est strictement analogue à celle de 4b.

Par ailleurs, d'après l'inégalité (11) et puisque A_1 est borné inférieurement et à résolvante compacte, il existe un rang m à partir duquel tous les sous espaces de E_1 de dimension m contiennent un vecteur normalisé pour lequel $f(\omega, x) \geq 0$. Cela montre que $\omega_m^+ \geq \omega$ et donc que la suite (ω_m^+) croît jusqu'à l'infini. Reste à montrer le dernier point.

Il découle de la définition de $p^+(x)$ que, pour m suffisamment grand :

$$p^+(x) = b(p^+(x), x) + \{(b(p^+(x), x)^2 + a(x, x))^{1/2} .$$

De la définition de $b(p^+(x), x)$, on tire également :

$$\delta = | b(p^+(x), x) - (iB_{11}x|x) | \leq \frac{2 \|B\|^2}{p^+(x) - 2 \|B\|} .$$

De sorte que :

$$\begin{aligned} | \{b(p^+(x), x) + a(x, x)\}^{1/2} - \{(iB_{11}x|x) + a(x, x)\}^{1/2} | &\leq \\ &\leq \text{Max} \{(\delta^2 + 2\delta \|B\|)^{1/2}, (\delta^2 + 2\delta |b(p^+(x), x)|)^{1/2}\} , \\ &\leq 4 \|B\|^3 \frac{p^+(x) + \|B\|}{(p^+(x) - 2 \|B\|)^2} , \end{aligned}$$

et finalement que :

$$\begin{aligned} | p^+(x) - (iB_{11}x|x) - \{(iB_{11}x|x)^2 + a(x, x)\}^{1/2} | &\leq \\ &\frac{2(\|B\|)}{p^+(x) - 2 \|B\|} (\|B\| + \{\|B\|(p^+(x) + \|B\|)\}^{1/2}) . \end{aligned}$$

Ce qui prouve que :

$$| \omega_m^+ - \text{Min}_{S \subseteq E_1, \dim S = m} \text{Max}_{u \in S, \|u\|=1} \{ (iB_{11}u|u) + ((iB_{11}u|u)^2 + a(u,u))^{1/2} \} | \rightarrow 0,$$

lorsque $m \rightarrow + \infty$.

La démonstration est similaire pour ce qui est de ω_m^- . ■

3-Résolution de l'identité associée au spectre σ .

On considère dans ce paragraphe la famille $L(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda B + A$ avec B continu et anti-symétrique et l'on suppose que $\gamma(A) = \gamma(a) = 0$, et que 0 est une valeur propre, isolée dans $\sigma(A)$. C'est, par exemple, le cas lorsque A est à résolvante compacte. Nous ne traiterons pas le cas où $\gamma(A) > 0$ qui est sensiblement plus simple puisqu'il ne nécessite pas un passage au quotient. Il est évident que les résultats sont alors identiques.

Rappelons tout d'abord la définition d'une chaîne de Jordan associée à une famille quadratique $L(\lambda)$. On renvoie à Bogнар (pp 172 et suivantes), notre source en l'occurrence, pour plus de précision. Etant donnée une valeur propre λ associée à la famille $L(\lambda)$, on appelle chaîne de Jordan une famille de p vecteurs $(x_j)_{j=0, p-1}$ dans $D(A)$, telle que :

$$(\lambda^2 + 2\lambda B + A)x_j + 2(\lambda + B)x_{j-1} + x_{j-2} = 0, \quad 0 \leq j \leq p - 1, \quad x_{-1} = x_{-2} = 0.$$

On vérifie alors sans peine que le champ :

$$v(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{t^j}{j!} x_{p-1-j},$$

est solution de :

$$\partial_{tt} v + B(\partial_t v) + Av = 0.$$

Il est également très simple de montrer que x_j constitue une chaîne de Jordan associée à la valeur propre λ de $L(\lambda)$ si, et seulement si, la famille $\{(x_j, \lambda x_j + x_{j-1})\}$ est une chaîne de Jordan attachée à la même valeur propre λ pour l'opérateur T (cf. proposition 1) :

$$T(x_j, \lambda x_j + x_{j-1}) = \lambda(x_j, \lambda x_j + x_{j-1}) + (x_{j-1}, \lambda x_{j-1} + x_{j-2}).$$

Montrons maintenant la :

Proposition 6 :

Supposons que $\gamma(a) = 0$ et que 0 est valeur propre isolée dans $\sigma(A)$. Alors :

a- $D(a)/\text{Ker}(A) \times H$ muni du produit scalaire $((\hat{u}, v) | (\hat{u}', v')) = a(u, u') + (v | v')$ est un espace de Hilbert et sa topologie est équivalente à la topologie canonique.

b- Soient J la surjection canonique de H sur $H/\text{Ker}(A)$, \hat{A} l'opérateur induit par l'équivalence nucléaire : $\forall \hat{u} \in D(A)/\text{Ker}(A) \hat{A}(\hat{u}) = Au$ et \hat{T} l'opérateur défini par :

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} 0 & J \\ -\hat{A} & -2B \end{bmatrix} \text{ avec } D(\hat{T}) = D(A)/\text{Ker}(A) \times D(a) .$$

L'opérateur $-i\hat{T}$ est auto-adjoint dans $D(a)/\text{Ker}(A) \times H$ et $\sigma(\hat{T}) \subseteq \sigma$.

c- $\sigma_p(\hat{T}) = \sigma_p$ (à 0 près). Plus précisément :

$$\lambda \neq 0, \hat{T}(\hat{u}, v) = \lambda(\hat{u}, v) \Leftrightarrow \hat{u} = \hat{v}/\lambda, L(\lambda)v = 0,$$

$$\text{Ker}(\hat{T}) = \left\{ \left(\begin{bmatrix} -2A^{-1} \\ (\text{Ker}A)^\perp Bv \end{bmatrix}, v \right), v \in S = \text{Ker}(A) \cap (B(\text{Ker}A))^\perp \right\} \text{ et}$$

$\left\{ \begin{bmatrix} -2A^{-1} \\ (\text{Ker}A)^\perp Bv \end{bmatrix}, v \right\}$ constitue une chaîne de Jordan attachée à la valeur 0 pour $L(\lambda)$.

d- La résolution de l'identité associée à $-i\hat{T}$ induit une famille $E(\lambda)$ d'opérateurs continus auto-adjoints de H qui est continue à droite et telle que :

$$\lambda \rightarrow -\infty \Rightarrow E(\lambda) \rightarrow 0, \lambda \rightarrow +\infty \Rightarrow E(\lambda) \rightarrow I, \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow E(\lambda_1) < E(\lambda_2),$$

pour tout couple (u, v) dans $H \times H$, $(E(\lambda)u | v)$ est à variation bornée, de variation totale inférieure à $\|u\| \|v\|$ et :

$$(u | v) = \int_{\mathbf{R}} d(E(\lambda)u | v), u \in D(a) \Leftrightarrow \int_{\mathbf{R}} |\lambda|^2 d(E(\lambda)u | u) < +\infty,$$

$$\forall (u, v) \in D(a) \times D(a) : (Bu | v) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \lambda d(E(\lambda)u | v).$$

Preuve :

a- Puisque A est fermé, $\text{Ker}(A)$ est fermé dans H et donc a fortiori dans $D(a)$ et dans $D(A)$. Il

en résulte que $D(a)/\text{Ker}(A) \times H$ est un espace de Hilbert isomorphe à $\text{Ker}(A)^\perp \cap D(a) \times H$. Or, puisque 0 est isolé dans le spectre, la restriction de A à $\text{Ker}(A)^\perp$ est H coercive :

$$\exists \gamma > 0 : \forall u \in \text{Ker}(A)^\perp \quad a(u,u) \geq \gamma \|u\|^2 .$$

Cela montre que $D(a)/\text{Ker}(A)$ peut être muni, de manière équivalente, du produit scalaire :

$$a(\hat{u}, \hat{v}) = a(u,v) ,$$

et prouve le point a.

b- Soit :

$$T = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & -2B \end{bmatrix} \text{ avec } D(T) = D(A) \times D(a) .$$

Puisque $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(A) \times \{0\}$, la relation d'équivalence nucléaire permet d'introduire l'opérateur \hat{T} de $D(a)/\text{Ker}(A) \times H$, défini par :

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} 0 & J \\ -\hat{A} & -2B \end{bmatrix} \text{ avec } D(\hat{T}) = D(A)/\text{Ker}(A) \times D(a) ,$$

et où J désigne la surjection canonique de H dans $H/\text{Ker}(A) \times H$ et \hat{A} l'opérateur défini par :

$$\forall \hat{u} \in D(A)/\text{Ker}(A) \quad \hat{A}\hat{u} = Au .$$

Il est très simple de vérifier (voir remarque suivant la proposition 1) que $-iT$, et donc $-i\hat{T}$, est symétrique. Reste à montrer qu'il est auto-adjoint. Pour ce faire, on cherche à préciser son spectre. Pour λ ($\lambda \neq 0$) n'appartenant pas au spectre de $L(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda B + A$, définissons les opérateurs $R_1(\lambda)$, $R_2(\lambda)$, $R_3(\lambda)$, par :

$$- R_1(\lambda) : H \rightarrow D(a)/\text{Ker}(A) , R_1(\lambda) = J.R(\lambda).$$

$R(\lambda)$ étant continu de H dans D(a) (voir remarque suivant la proposition 3), $R_1(\lambda)$ est continu.

- $R_2(\lambda) : D(a)/\text{Ker}(A) \rightarrow D(a)/\text{Ker}(A)$, $R_2(\lambda)\hat{x} = (R(\lambda).(\lambda + 2B)x)^\wedge$.

La définition est consistante car si y appartient à $\text{Ker}(A)$:

$$L(\lambda)(y/\lambda) = \lambda y + 2By ,$$

de sorte que :

$$y/\lambda = R(\lambda).(\lambda + 2B)y \in \text{Ker}(A). \quad (12)$$

De plus, puisque $R(\lambda).(\lambda + 2B)$ est continu de $D(a)$ dans $D(a)$, R_2 est continu.

- $R_3(\lambda) : D(a)/\text{Ker}(A) \rightarrow H$, $R_3(\hat{x}) = x - \lambda R(\lambda).(\lambda + 2B)x$.

La consistance de la définition est à nouveau assurée par la relation (12). $R(\lambda).(\lambda + 2B)$ étant continu de $D(a)$ dans H , l'opérateur R_3 est également continu.

On vérifie alors facilement, grâce à la proposition 1, que :

$$R_\lambda(\hat{T}) = \begin{bmatrix} -R_2(\lambda) & -R_1(\lambda) \\ R_3(\lambda) & -\lambda R(\lambda) \end{bmatrix} .$$

Cela montre que $\sigma(\hat{T}) \subseteq \sigma \cup \{0\}$. Or, en vertu de la proposition 2 (ou 3), σ est inclus dans l'axe imaginaire. Il en résulte finalement que $\sigma(-i\hat{T}) \subseteq \mathbf{R}$ et donc que $-i\hat{T}$ est auto-adjoint.

c- On obtient sans peine que :

$$\hat{T}(\hat{u}, v) = \lambda(\hat{u}, v) , \quad \lambda \neq 0$$

\Leftrightarrow

$$\hat{v} = \lambda \hat{u} \quad ; \quad \lambda v + 2Bv + Av = 0 \quad , \quad \lambda \neq 0 .$$

\Leftrightarrow

$$\hat{u} = \hat{v}/\lambda \quad , \quad \lambda^2 v + 2\lambda Bv + Av = 0 .$$

Cela montre que les valeurs propres non nulles de \hat{T} et de $L(\)$ coïncident et que les vecteurs propres de \hat{T} sont de la forme :

$$(\hat{v}/\lambda, v)$$

où v est un vecteur propre de $L(\lambda)$.

Considérons maintenant le cas $\lambda = 0$.

$$\hat{T}(\hat{u}, v) = 0 \Leftrightarrow v \in \text{Ker}(A) \text{ et } Au + 2Bv = 0.$$

Puisque la restriction de A à $(\text{Ker}A)^\perp$ est coercive et donc inversible dans $(\text{Ker}A)^\perp$, on en déduit que :

$$(\hat{u}, v) = (-2 \left[A^{-1}_{\text{Ker}A^\perp} Bv \right]^\wedge, v), \quad v \in \text{Ker}(A) \text{ et } Bv \in (\text{Ker}A)^\perp,$$

ce qui montre que $v \in \text{Ker}(A) \cap (B(\text{Ker}A))^\perp$

d- Soient $P(\lambda)$ la résolution de l'identité associée à $-i\hat{T}$ dans $D(a)/\text{Ker}(A) \times H$ et Q l'opérateur défini par :

$$D(a)/\text{Ker}(A) \times H \rightarrow H, \quad Q(\hat{u}, v) = v.$$

Il est évident que :

$$Q^*v = (0, v), \quad Q \cdot Q^* = I_H.$$

Posons :

$$E(\lambda) = Q \cdot P(\lambda) \cdot Q^*.$$

De sa forme même, on déduit que $E(\lambda)$ est continu et auto-adjoint dans H et que :

$$\lambda \rightarrow +\infty \Rightarrow E(\lambda) \rightarrow I, \quad \lambda \rightarrow -\infty \Rightarrow E(\lambda) \rightarrow 0.$$

De plus :

$$\forall (u, v) \in H \times H, \quad ((E(\lambda)u | v) = (P(\lambda)Q^*u | Q^*v),$$

si bien que, en vertu des propriétés de la famille $P(\lambda)$:

$$\lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow E(\lambda_1) < E(\lambda_2) ,$$

et que pour tout couple de vecteurs de H , la fonction $(E(\lambda)u|v)$ est à variation bornée, de somme inférieure à $\|Q^*u\| \|Q^*v\| = \|u\| \|v\|$.

Il en découle notamment que :

$$\forall (u,v) \in H \times H \quad (u|v) = \int_{\mathbf{R}} d(E(\lambda)u|v) ,$$

Du fait que la résolution de l'identité de $D(a)/\text{Ker}(A) \times H$ est attachée à $-i\hat{T}$, il apparait que :

$$u \in D(a) \Leftrightarrow (0,u) \in D(\hat{T}) \Leftrightarrow \int_{\mathbf{R}} |\lambda|^2 d(E(\lambda)u|u) < +\infty .$$

Puis, utilisant que :

$$\forall (u,v) \in D(a) \times D(a) : (\hat{T}(0,u)|(0,v)) = \int_{\mathbf{R}} \lambda d(P(\lambda)(0,u)|(0,v)) ,$$

on obtient :

$$\forall (u,v) \in D(a) \times D(a) : 2(Bu|v) = - \int_{\mathbf{R}} \lambda d(E(\lambda)u|v) . \blacksquare$$

Remarquons que l'on peut étendre cette proposition au cas où 0 est point d'accumulation du spectre à condition de montrer que l'espace $D(a)/\text{Ker}(A) \times H$, muni du produit scalaire $((\hat{u},v) | (\hat{u}',v')) = a(u,u') + (v|v')$, est complet.

Lorsque le spectre σ est ponctuel, on obtient ainsi une famille génératrice (au sens Hilbertien) de H . Cette famille n'est pas orthogonale. Néanmoins, nombre de propriétés des bases Hilbertiennes sont conservées. Précisons que l'on appelle famille surcomplète une famille qui génère, sous la forme de série de vecteurs proportionnels aux différents éléments de la famille, tout vecteur de H et telle que chacun de ses éléments peut être généré de la sorte par l'ensemble des autres vecteurs de la famille. On renvoie à l'article de Daubechies, Grossmann & Meyer (1986) pour de plus amples détails sur ce type de famille. Dans ces conditions, on a la :

Proposition 7 :

Supposons que $\gamma(a) = 0$, que 0 est isolé dans le spectre de A et que le spectre de L est ponctuel. Les valeurs propres de L sont toutes imaginaires. Convenons de les noter sous la forme $i\omega$. Alors :

La famille des vecteurs propres est surcomplète. Plus précisément, si

$\{(-i\hat{\nu}_j/\omega_j, v_j), (-2\left[A^{-1}_{(\text{Ker}A)^\perp} Bv_n\right]^\wedge, v_n)\}_{j,n}$ est une base orthonormée Hilbertienne de vecteurs propres de \hat{T} et si l'on convient que les indices n et m se rapportent exclusivement à l'espace $S = \text{Ker}(A) \cap (B(\text{Ker}A))^\perp$ (cf. proposition 6), on a :

$$a(v_i, v_j) + \omega_i \omega_j (v_i | v_j) = \omega_i \omega_j \delta_{ij} \quad , \quad (13a)$$

$$(\omega_i + \omega_j)(v_i | v_j) - 2(iBv_i | v_j) = 2\sqrt{\omega_i \omega_j} \delta_{ij} \quad , \quad (13b)$$

$$4(Bv_n | A^{-1}_{(\text{Ker}A)^\perp} Bv_m) + (v_n | v_m) = \delta_{nm} \quad , \quad (13c)$$

$$(v_j | v_n) = -\frac{2i}{\omega_j} (v_j | Bv_n) \quad , \quad (13d)$$

$$\forall u \in H \quad u = \sum_j (u | v_j) v_j + \sum_n (u | v_n) v_n \quad , \quad (13e)$$

$$u \in D(a) \Leftrightarrow \sum_j \omega_j^2 |(u | v_j)|^2 < +\infty \quad , \quad (13f)$$

$$\forall u \in D(a) \quad Bu = -\frac{i}{2} \sum_j \omega_j (u | v_j) v_j \quad , \quad (13g)$$

$$\forall u \in D(A) \quad \sum_j a(u, v_j) \frac{v_j}{\omega_j} = \sum_{j,n} \omega_j (u | v_j) (v_j | v_n) v_n = 2i \sum_n (Bu | v_n) v_n \quad , \quad (13h)$$

$$\forall i, n \quad \omega_i (v_i | v_n) = - \sum_j \omega_j (v_i | v_j) (v_j | v_n) \quad . \quad (13i)$$

Preuve :

Soient $w_j = (-i\hat{v}_j/\omega_j, v_j)$ les vecteurs propres de \hat{T} associés à ses valeurs propres $i\omega_j$ non nulles. Soient $w_n = (-2 \left[A^{-1} \left(\text{Ker} A \right)^\perp Bv_n \right]^\wedge, v_n)$ une base Hilbertienne de $\text{Ker}(\hat{T})$. On convient naturellement de répéter ω_j un nombre de fois égal à sa multiplicité et de normaliser les vecteurs w_j et w_n pour la norme produit. La famille $\{w_j, w_n\}_{j,n}$ constitue ainsi une base Hilbertienne de $D(a)/\text{Ker}(A) \times H$ si bien que :

$$a(v_i, v_j) + \omega_i \omega_j (v_i | v_j) = \omega_i \omega_j \delta_{ij}, \quad (13a)$$

$$4(Bv_n | A^{-1} \left(\text{Ker} A \right)^\perp Bv_m) + (v_n | v_m) = \delta_{nm}, \quad (13c)$$

$$(v_j | v_n) = -\frac{2i}{\omega_j} (v_j | Bv_n), \quad (13d)$$

$$\forall w \in D(a)/\text{Ker}(A) \times H : w = \sum_j ((u | w_j)) w_j + \sum_n ((u | w_n)) w_n.$$

Si l'on considère des champs de la forme $w = (0, u)$ et $w = (\hat{u}, 0)$, on obtient :

$$\forall u \in H \quad u = \sum_j (u | v_j) v_j + \sum_n (u | v_n) v_n \quad (13e)$$

$$\forall u \in D(a) \quad \sum_j ia(u, v_j) v_j / \omega_j = 2 \sum_n (u | Bv_n) v_n, \quad (14)$$

Par ailleurs, on déduit de la proposition 6 que :

$$u \in D(a) \Leftrightarrow \sum_j \omega_j^2 |(u | v_j)|^2 < +\infty, \quad (13f)$$

et que :

$$\forall u \in D(a) : -2Bu = \sum_j i\omega_j (u | v_j) v_j. \quad (13g)$$

De :

$$a(v_i, v_j) + 2i\omega_i (Bv_i | v_j) - \omega_i^2 (v_i | v_j) = 0,$$

$$a(v_i, v_j) + 2i\omega_j (Bv_j | v_i) - \omega_j^2 (v_i | v_j) = 0,$$

on déduit que :

$$\omega_i \neq \omega_j \Rightarrow (\omega_i + \omega_j)(v_i | v_j) - 2i(Bv_i | v_j) = 0$$

et grâce à (13a) que :

$$\omega_i = \omega_j \Rightarrow 2\omega_i(v_i | v_j) - 2i(Bv_i | v_j) = \omega_i \delta_{ij}.$$

Ce qui prouve (13b). Combinant (13d) et (13g), nous sommes conduit à :

$$\begin{aligned} \omega_i(v_i | v_n) &= -2i(Bv_i | v_n) \\ &= - \sum_j \omega_j(v_i | v_j)(v_j | v_n). \end{aligned} \tag{13i}$$

De plus, en vertu des expressions (14) et (13f), on obtient :

$$\begin{aligned} \forall u \in D(a) \quad \sum_j a(u, v_j)v_j/\omega_j &= 2 \sum_n i(Bu | v_n)v_n \\ &= \sum_{j,n} \omega_j(u | v_j)(v_j | v_n)v_n, \end{aligned} \tag{13h}$$

ce qui termine la démonstration. ■

4- Caractérisation variationnelle des vecteurs propres.

On considère à nouveau dans ce paragraphe un problème de la forme $F(\lambda) + A$, avec F analytique dans $O \subseteq \mathbb{C}$ et A auto-adjoint, borné inférieurement. On obtient, sans peine, une généralisation de la caractérisation du paragraphe 7 du chapitre précédent :

Proposition 8 :

Soient $u \in D(A)$ ($u \neq 0$) et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

a- Les propositions suivantes sont équivalentes :

1- $(F(\lambda) + A)u = 0$,

2- $\forall v \in D(a)$ (ou D dense dans $D(a)$) $((F(\lambda)+A)u|v) = 0$.

b- Si $\lambda \in I$ (cf. proposition 3) alors 1 et 2 sont équivalents à :

3- $Ju = \frac{1}{2} \{a(u,u) + (F(\lambda)u|u)\}$ est stationnaire au point u de $D(a)$.

Preuve :

Elle est analogue à celle de la proposition 17 du chapitre 2. Il suffit de noter, pour le point 3, que la dérivée de $(F(\lambda)u|u)$ est la fonction : $v \rightarrow 2\text{Re}\{(F(\lambda)u|v)\}$ dans H et $D(a)$. ■

5- Problème d'évolution associé.**Proposition 9 :**

Soient A un opérateur auto-adjoint positif tel que 0 soit isolé dans le spectre et B un opérateur continu antisymétrique. Considérons le problème :

$$\forall w \in D(a) : (v|w)'' + 2(Bv|w) + a(v,w) = (f|w) \quad , \quad v(0) = v_0 \quad \dot{v}(0) = v_1 \quad . \quad (P)$$

a- Si $f \in C^0([0, +\infty[, H)$ et $(v_0, v_1) \in D(a) \times H$, le problème (P) admet une solution unique dans $C^0([0, +\infty[, D(a)) \cap C^1([0, +\infty[, H)$ qui vérifie :

$$\|v(t)\| \leq \|v_0\| + t\|v_1 + 2Bv_0\| + \int_0^t (t-s) \|f(s)\| \, ds \quad .$$

b- Si l'on suppose simplement que A est borné inférieurement mais que

$f \in C^1([0, +\infty[, H)$ et que $(v_0, v_1) \in D(A) \times D(a)$, alors :

$$v \in C^0([0, +\infty[, D(A)) \cap C^1([0, +\infty[, D(a)) \cap C^2([0, +\infty[, H) \text{ et : } \ddot{v} + 2B\dot{v} + Av = f \quad .$$

Preuve :

a- Etant donné $f \in C^0([0, +\infty[, H)$ et $(v_0, v_1) \in D(a) \times H$, montrons tout d'abord l'équivalence des problèmes :

$$\left. \begin{aligned} v \in C^0([0, +\infty[, D(a)) \cap C^1([0, +\infty[, H) \quad , \quad v(0) = v_0 \quad , \quad \dot{v}(0) = v_1 \\ (v|u)'' + 2(Bv|u) + a(v, u) = (f|u) \quad \forall t \in]0, +\infty[\end{aligned} \right\} \quad (P)$$

et :

$$\left. \begin{aligned} w \in C^0([0, +\infty[, D(A)/Ker(A) \times D(a)) \cap C^1([0, +\infty[, D(a)/Ker(A) \times H) \\ \dot{w} = \hat{T}w + (0, \int_0^t f(s)ds + v_1 + 2Bv_0 \quad , \quad w_0 = (\hat{0}, v_0) \end{aligned} \right\} \quad (P')$$

avec : $w = ((\int_0^t v(s)ds)^\wedge, v(t))$ et où $D(A)$ est muni de la norme du graphe.

En effet si $v \in C^0([0, +\infty[, D(a)) \cap C^1([0, +\infty[, H)$ est solution de (P), on obtient par intégration dans \mathbf{R} et en vertu la continuité de B dans H et de celle de a dans $D(a)$:

$$(v|u) + 2(Bv|u) + a(\int_0^t v(s)ds, u) = (\int_0^t f(s)ds|u) + (v_1|u) + 2(Bv_0|u) .$$

Il découle alors du premier théorème de représentation que :

$$\int_0^t v(s)ds \in D(A) \quad \text{et} \quad A(\int_0^t v(s)ds) = \int_0^t f(s)ds + v_1 + 2Bv_0 - \dot{v} - 2Bv .$$

Remarquant que l'application $t \rightarrow \int_0^t f(s)ds$ appartient à $C^1([0, +\infty[, H)$, il est clair d'après

l'expression de $A(\int_0^t v(s)ds)$ que l'application $t \rightarrow \int_0^t v(s)ds$ appartient à $C^0([0, +\infty[, D(A))$.

Posant $w(t) = ((\int_0^t v(s)ds)^\wedge, v(t))$ et tenant compte de l'expression de \hat{T} (cf. proposition 6),

cela nous conduit au problème (P').

Réciproquement si $w = (\hat{v}, v)$ est solution du problème (P') :

$$v \in C^0([0, +\infty[, D(a)) \cap C^1([0, +\infty[, H), v(0) = v_0, \hat{v}'(t) = \hat{v}$$

$$\text{et } \hat{v} = -Av' - 2Bv + \int_0^t f(s)ds + 2Bv_0 + v_1.$$

On en déduit que :

$$\hat{v}' = (\int_0^t v(s)ds)^\wedge, \hat{v}(0) = v_1,$$

et que :

$$\forall u \in D(a) : (\hat{v}|u) = -a(v', u) - 2(Bv|u) + (\int_0^t f(s)ds + 2Bv_0 + v_1|u)$$

La fonction $t \rightarrow (\hat{v}|u)$ est donc dérivable pour tout u et :

$$(\hat{v}|u)' = -a(v, u) - 2(B\hat{v}|u) + (f|u),$$

v est donc solution du problème (P).

Considérons maintenant le problème (P'). Remarquons que d'une part :

$$(0, \int_0^t f(s)ds + 2Bv_0 + v_1) \in C^1([0, +\infty[, D(a)/\text{Ker}(A) \times H) \text{ et que, d'autre part, } -i\hat{T} \text{ est auto-}$$

adjoint dans $D(a)/\text{Ker}(A) \times H$ (cf. proposition 6). Le théorème de Stone nous permet donc d'affirmer l'existence et l'unicité de la solution du problème (P) et donc de celle du problème (P'). De plus puisque la solution de (P') est de la forme :

$$w(t) = \exp(t\hat{T}) w(0) + \int_0^t \exp((t-s)\hat{T}) \left(0, \int_0^s f(r) dr + v_1 + 2Bv_0 \right) ds .$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \|v(t)\| &\leq \|w(t)\| \leq \|w(0)\| + \int_0^t \int_0^s \|f(r)\| dr ds + t \|v_1 + 2Bv_0\| \\ &= \|v_0\| + t \|v_1 + 2Bv_0\| + \int_0^t (t-s) \|f(s)\| ds . \end{aligned}$$

b- C'est une simple application du théorème de perturbation bornée de Trotter Kato et correspond à l'approche classique (voir Dautray & Lions volume 3). On considère l'opérateur T_0 de $D(a) \times H$, défini par :

$$T_0 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } D(T_0) = D(A) \times H$$

On munit $D(a) \times H$ de la norme dont le carré est :

$$\|(u,v)\|_{\lambda_0}^2 = a(u,u) + \lambda_0 \|u\|^2 + \|v\|^2 \quad \lambda_0 > -\gamma(a) .$$

On peut alors montrer (cf. Dautray & Lions, Vol. III) que T_0 génère un semi groupe de classe C^0 .

Puisque

$$T = T_0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2B \end{bmatrix} ,$$

le théorème de perturbation bornée montre alors que T génère un semi groupe de classe C^0 .

Le théorème de Hill-Yosida permet de conclure. ■

Supposons maintenant, comme dans la proposition 7, que le spectre de $L(\cdot)$ est ponctuel, on obtient alors la :

Proposition 10 :

Dans les conditions et avec les notations de la proposition 7, l'unique solution du problème (P), s'exprime sous la forme :

$v(t) =$

$$\sum_j v_j \left\{ (v_0 | v_j) e^{i\omega_j t} + \frac{i}{\omega_j} (v_1 + 2Bv_0 | v_j) (1 - e^{i\omega_j t}) + \frac{i}{\omega_j} \int_0^t (f(s) | v_j) (1 - e^{i\omega_j(t-s)}) ds \right\} +$$

$$+ \sum_n v_n \left\{ (v_0 | v_n) + t (v_1 + 2Bv_0 | v_n) + \int_0^t (f(s) | v_n) (t-s) ds \right\}, \quad (15)$$

Preuve :

On considère comme dans la proposition 7 une base hilbertienne de $D(a)/\text{Ker}(A) \times H$:

$$\{w_j = (-i\hat{\nu}_j/\omega_j, v_j), w_n = (-2 \left[A^{-1} \left(\text{Ker} A \right)^\perp B v_n \right], v_n)\}_{j,n}$$

constituée de vecteurs propres de l'opérateur :

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} 0 & J \\ -\hat{A} & 2B \end{bmatrix}, \text{ (cf. proposition 6).}$$

D'après la proposition 9, $w(t) = \left(\left(\int_0^t v(s) ds \right)^\wedge, v(t) \right)$ est solution de :

$$\dot{w} = \hat{T}w + (0, h)$$

$$\text{avec } h = \int_0^t f(s) ds + v_1 + 2Bv_0 \text{ et } w_0 = (0, v_0) \quad (16)$$

Par projection sur la base, on obtient :

$$\begin{aligned} ((\dot{w}|w_j)) &= i\omega_j((w|w_j)) + (((0,h)|w_j)) \\ ((\dot{w}|w_n)) &= (((0,h)|w_n)) \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} w(t) = \sum_j w_j \{ (v_0|v_j)e^{i\omega_j t} + \frac{i}{\omega_j} ((h(t)|v_j) - (h(0)|v_j)e^{i\omega_j t} - \int_0^t e^{i\omega_j(t-s)} (f(s)|v_j) ds) \} \\ + \sum_n w_n \{ (v_0|v_n) + t(h(t)|v_n) - \int_0^t s(f(s)|v_n) ds \} , \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} v(t) = \sum_j v_j \{ (v_0|v_j)e^{i\omega_j t} + \frac{i}{\omega_j} (v_1 + 2Bv_0|v_j)(1 - e^{i\omega_j t}) + \frac{i}{\omega_j} \int_0^t (f(s)|v_j) (1 - e^{i\omega_j(t-s)}) ds \} + \\ + \sum_n v_n \{ (v_0|v_n) + t(v_1 + 2Bv_0|v_n) + \int_0^t (f(s)|v_n) (t-s) ds \} , \end{aligned}$$

où la normalisation des v_j et des v_n correspond à la norme produit :

$$a(v_i, v_i) + \omega_i^2(v_i|v_i) = \omega_i^2 ,$$

c'est à dire :

$$2(v_i|v_i) + \frac{2i}{\omega_i} (Bv_i|v_i) = 1$$

et :

$$4(Bv_n|A^{-1}_{(\text{Ker}A)^\perp} Bv_n) + (v_n|v_n) = 1 . \blacksquare$$

Si l'on suppose que $v_0 = v_1 = 0$, on est donc conduit à :

$$v(t) = \sum_j v_j \frac{i}{\omega_j} \int_0^t (f(s)|v_j) (1 - e^{i\omega_j(t-s)}) ds + \sum_n v_n \int_0^t (f(s)|v_n) (t-s) ds . \quad (17)$$

Remarquons pour finir que le problème :

$$\dot{v} + 2Bv + Av = f, \quad v \in D(A)$$

peut prendre la forme :

$$\dot{w} = \exp(tB) (B^2 - A) \exp(-tB)w$$

avec :

$$w = \exp(tB)v \in \exp(tB)(D(A)),$$

où l'opérateur $\exp(tB)$ est unitaire. La difficulté est maintenant que le domaine dépend de t .

IV. MODES PROPRES DE LA TERRE OU D'UNE PLANÈTE.

Nous précisons dans ce chapitre comment les résultats obtenus dans les chapitre précédents s'appliquent au cas de la Terre ou plus généralement d'une planète. On montre notamment comment les critères de Min-Max permettent d'appréhender le mode de Chandler et la Nutation libre du noyau externe.

1. Introduction.

Historiquement l'étude du spectre des vibrations d'un corps solide élastique autogravitant remonte aux travaux de Poisson (1829), de Lamb (1882, négligeant l'auto-gravitation) et de Bromwich (1898, tenant compte de l'auto-gravitation pour un corps incompressible).

Love fait dans son livre "Some problems of Geodynamics" (1911) une étude complète du spectre dans le cas d'un corps solide sphérique et homogène. Cela ouvre la voie à la description de la zone sismique du spectre des vibrations terrestres, c'est à dire des vibrations libres de période inférieure à 54 minutes environ. C'est dans un enregistrement du séisme du Kamtchatka de novembre 1952 que fut identifié pour la première fois un mode propre par Benioff. Ceci donna un regain d'intérêt pour les calculs numériques de modes sismiques à partir de modèles de Terre obtenus par l'interprétation des temps de parcours des fronts d'onde conduisant à l'excellente prédiction théorique du spectre constatée après le séisme du Chili en 1960 (cf. Pekeris & Jarosh (1958), J.G.R. 66, (1961)). De nombreux travaux furent également entrepris sur la dualité modes-rai (Brune (1964), Ben-Menahem (1964)).

Il semble que ce soient Alterman et al. (1959) qui ont montré les premiers la possibilité théorique de périodes plus élevées en prenant en compte le caractère fluide du noyau externe. Considérant en effet un modèle à manteau et noyau homogènes, ils obtiennent une période propre de 100,9 minutes pour un mode sphéroïdal d'ordre 2 (S_2^2) du noyau. Pekeris et Accad (1971) ont fait une description plus générale de ces modes, dans le cadre de la symétrie sphérique et en introduisant le paramètre local de Brunt-Väissälä, familier aux astrophysiciens.

Denis (1971), comme on l'a rappelé au chapitre II, a proposé une description de ces différents modes. Ainsi le spectre comprend, outre le spectre sismique (p), tel le spectre des modes de gravité (g) correspondant à des oscillations confinées dans le noyau externe et le spectre des modes de Kelvin associé aux interfaces fluide-fluide et solide-fluide.

En configuration sphérique, il est d'usage de classer les modes de même ordre angulaire l par ordre de fréquence croissante. On note ainsi ${}_nT_l$ les modes toroïdaux du manteau et ${}_{\pm n}S_l$ les modes sphéroïdaux. L'ordre n d'un mode toroïdal, ou d'un mode sphéroïdal d'une boule liquide, est directement lié au nombre de noeuds du mode, puisqu'il est régi par un opérateur de Sturm - Liouville. Ce n'est plus le cas des modes sphéroïdaux d'un corps comprenant une partie solide. Denis (1974) essaye de classer les modes sphéroïdaux d'un solide en deux groupes. L'un se rattache aux modes de type (g) et l'autre aux modes de type (p). En effet le module d'incompressibilité κ et la masse volumique ρ étant fixés, les modes sismiques évoluent en se dissociant vers les classes (p) et (g) lorsque la rigidité μ tend vers 0. Dans cet ordre d'idée, mais avec un point de vue pragmatique de sismologue, Okal (1978) propose une classification des modes en 5 familles d'après leurs propriétés physiques. Cette classification comprend :

- Les modes K du noyau, inobservables, à forte vitesse de groupe qui se répartissent en branches régulières. La première branche (${}_2S_{16}, {}_2S_{17}, {}_2S_{18}...$) correspond aux modes de Stoneley (ou de Kelvin) associés à l'interface noyau-manteau. La deuxième (${}_2S_2, {}_3S_3, {}_3S_4, {}_3S_5, {}_4S_6, {}_4S_7, {}_4S_8, {}_5S_8...$) comprend les modes de Stoneley associés à l'interface graine-noyau externe. Les autres branches sont constituées de modes confinés à la graine.
- Les modes C (colatitudinaux) qui correspondent à une vibration de la Terre essentiellement en cisaillement, à faible vitesse de groupe ($< 5\text{ km/s}$) et s'apparentent aux modes toroïdaux de même nombre angulaire.
- les modes V (verticaux) à fort déplacement radial, et à vitesse de groupe de l'ordre de 10 à 18 km/s dont les prototypes sont les déplacements purement radiaux.
- Les modes R (Rayleigh) qui s'agencent régulièrement (ce qui est pratique pour l'interpolation) en branches, dont la principale forme les ondes de Rayleigh classiques, et correspondent à de relativement faibles vitesses de phase et de groupe.
- les modes H (hybrides), rebut inclassable à vitesse de phase de l'ordre de 16 à 25 km/s.

L'influence de la rotation terrestre et de l'ellipticité sur le spectre sismique est relativement faible. Elle est donc bien décrite par un calcul de perturbation (Backus & Gilbert (1961), Dahlen (1968, 1969), Woodhouse (1976), Woodhouse & Dahlen (1978) et chapitre V). Le premier à avoir montré sa grande importance sur les modes du noyau est semble-t-il Smylie (1974). Dans le cadre de la symétrie sphérique et d'un noyau homogène il a en effet montré que les harmoniques ('undertones') du mode sphéroïdal d'ordre 2, ${}_nS_2^2$ ont une limite en période finie (et non plus infinie comme en l'absence de rotation). Son travail ne tenant pas compte des couplages entre modes, donne comme limite 36 heures environ. Cette limite est ramenée à 20 heures par Crossley (1975) grâce à la prise en compte du couplage avec les modes toroïdaux T_3^2 . Johnson et Smylie (1977) parviennent à tenir compte de 6 termes de couplages entre modes par un principe variationnel et diminuent encore cette limite.

Des études de même type tenant compte de l'ellipticité ont été menées par Shen (1976, 1978), Shen et Mansinha (1976), Smith (1977) et Wahr (1981).

Les résultats numériques concernant les modes du noyau apparaissent comme extrêmement dépendant de la manière de prendre en compte le terme de Coriolis. Cela a incité un certain effort théorique. Olson (1977) a étudié ces modes pour un manteau et une graine homogènes en négligeant la composante tangentielle de la vitesse de rotation. Il a ainsi obtenu les solutions en terme de fonctions de Hough. Plus récemment des études plus théoriques ont été menées dans le cadre d'équations simplifiées par des arguments d'ordre physique. C'est le cas de Crossley & Rochester (1980), Friedlander & Siegmann (1982), Friedlander (1985), qui ont utilisé l'approximation de Boussinesq, et de Smylie & Rochester (1982) qui ont introduit l'équation "subsismique".

On trouvera dans l'article de Wahr (1981) la description la plus complète des modes. Il apparaît, outre les modes déjà indiqués (voir aussi Hopkins (1839), Hough (1895), Sludskii (1896), Poincaré (1910), Slichter (1961), Melchior (1973), Toomre (1974), Dahlen & Smith (1975), Smith (1976, 1977), Sasao & Wahr (1981), Chao (1983)) :

- le groupe des modes quasi-rigides comprenant, mis à part les translations uniformes non cinématiquement admissibles, les quasi-rotations qui forment 2 modes physiques :

. la nutation de l'ensemble de la Terre, ou "Tilt over mode" qui correspond à un changement de direction dans l'espace Galiléen de l'axe de rotation et est donc associée à la fréquence $|\Omega|$.

. "l'axial Spin mode" de fréquence nulle qui correspond à une rotation fixe de la Terre autour de son axe.

- la nutation libre du noyau qui peut être vue comme le "Tilt over mode" du noyau seul. Elle est perturbée par la non symétrie des interfaces avec le manteau et la graine et induit des déformations qui tendent à la ralentir. Elle correspond donc à une nutation du noyau associée à une fréquence légèrement plus grande que Ω . Dans l'espace Galiléen, l'axe de rotation du noyau décrit très lentement un cône dans le sens prograde.

- les modes de Slichter qui sont essentiellement constitués des translations de la graine dans le noyau externe.

Notons que l'hypothèse de diverses symétries sphériques permet de multiplier les nutations dans les différentes parties de la Terre. Par exemple si l'on suppose que la graine possède cette symétrie, on est amené à considérer ses nutations libres.

Sur le plan observationnel, on a été jusqu'à ces derniers temps dans l'impossibilité de faire des observations cohérentes sur les modes du noyau et de Slichter. On notera toutefois les travaux de pionniers de Richter (1983) et de Melchior & Ducarme (1986). Richter a analysé vingt mois d'enregistrement d'un gravimètre supraconducteur et n'a rien vu de significatif. Quant à Melchior & Ducarme ils ont décelé plusieurs pics spectraux aux environs de douze heures de période dans une série de trois ans d'enregistrement de même type. Seul un pic à 13.9 heures de période perdure 60 jours après les deux tremblements de Terre profonds présents dans la série. Ils attribuent cette période à un mode de Slichter. Quoi qu'il en soit il semble probable que se développera, parallèlement aux réseaux internationaux sismologiques du type de Géoscope ou d'IRIS, un réseau de gravimètres supraconducteurs qui permettra une meilleure séparation entre le spectre du noyau et le spectre des marées (cf. Rochester & Crossley (1987)).

Terminons ce paragraphe par la mise en place préalable à la description mathématique des modes. Nous avons vu au chapitre II que le cadre naturel de l'étude mathématique de l'opérateur de l'élasto-gravité A était $L^2(V, dm)$, l'espace des champs à énergie cinétique relative finie. Convenons de noter respectivement par B et L_λ , comme au chapitre III, l'opérateur : $u \rightarrow \Omega \wedge u$ et la famille : $\lambda \rightarrow L_\lambda = \lambda^2 + 2\lambda B + A$.

Puisque A et B sont des opérateurs réels, le spectre de L_λ est symétrique par rapport à l'axe réel. Ainsi $i\omega$ est valeur propre si et seulement si $-i\omega$ l'est, et les sous espaces propres correspondants se déduisent par conjugaison complexe. Il ressort de l'étude du problème d'évolution (voir proposition 10 du chapitre précédent) qu'un mode physique de fréquence propre ω est représenté par deux vecteurs propres conjugués associés aux deux valeurs propres $\pm i\omega$. Si $w(i\omega)$ et $\bar{w}(-i\omega)$ sont ces vecteurs, le mode propre réel est de la forme :

$$v(t) = c^{te} \{ w e^{i\omega t} + \bar{w} e^{-i\omega t} \} = c^{te} \left\{ \frac{w + \bar{w}}{2} \cos \omega t - \frac{w - \bar{w}}{2i} \sin \omega t \right\}. \quad (1)$$

Considérons deux vecteurs t et k fixes dans R^3 , on obtient :

$$B(t + k \wedge x) = \Omega \wedge t + (\Omega \cdot x)k - (\Omega \cdot k)x.$$

De sorte que si $(e_1, e_2, e_3 = \frac{\Omega}{|\Omega|})$ est le repère orthonormé associé aux axes d'inertie :

$$B(\Omega) = 0, \quad B(e_1 \pm i e_2) = \mp i \Omega (e_1 \pm i e_2). \quad (2)$$

On en déduit que l'espace des translations uniformes réduit L_λ . En effet, on obtient grâce à la proposition 13c du chapitre 2 :

$$L_0(\Omega) = 0 \text{ et } L_{\pm i \Omega}(e_1 \pm i e_2) = 0.$$

Il est important de remarquer que cet espace réduit aussi bien B que A. Cela permet de restreindre, sans encombre, l'étude de la famille L_λ à l'espace H des déplacements cinématiquement admissibles qui lui est orthogonale dans $L^2(V, dm)$:

$$H = \{ u \in L^2(V, dm) : \int_V u \, dm = 0 \},$$

puisque H réduit alors A ainsi que B.

On vérifie sans peine que des quasi-rotations sont modes propres de L_λ . Il résulte en effet de la proposition 13b,c du chapitre II et de (2) que :

$$L_0(\Omega \wedge \cdot) = 0, L_{\pm\Omega}((e_1 \pm e_2) \wedge \cdot) = 0.$$

Le vecteur propre réel $\Omega \wedge \cdot$ constitue "l'axial spin mode" de fréquence nulle. Le mode physique associé aux vecteurs propres $(e_1 \pm ie_2) \wedge \cdot$ est le "Tilt-over-mode". En effet d'après (1) le déplacement physique associé à ce mode est de la forme :

$$u(x,t) = c^{te} r(t) \wedge x$$

avec :

$$r(t) = \cos(\Omega t) e_1 - \sin(\Omega t) e_2.$$

Ainsi le vecteur r tourne dans le sens rétrograde à la fréquence Ω dans le repère (e_1, e_2) . Il est donc fixe dans l'espace Galiléen. Ce mode est bien associé à un changement de direction de l'axe de rotation dans cet espace.

2. Cas d'une planète solide. Mouvement Chandlerien.

A est alors défini par le triplet variationnel : $(H^1(V) \cap H, a, H)$ où les diverses expressions de a sont données dans les propositions (11) et (12) du chapitre II.

Nous supposons que A est positif dans H . Ce qui n'est pas acquis a priori. En effet, comme nous l'avons remarqué déjà à la suite de la proposition 13 du chapitre II cela suppose, par exemple, que I_3 est la plus grande valeur principale d'inertie et que :

$$\int_V \{ 9d_i^i k_k + 2\text{tr}(\sigma_0) - \rho\phi' \} dV \geq 0,$$

où $d_i^i k_k$ est le module d'incompressibilité, ϕ' le potentiel de la pesanteur et σ_0 la précontrainte.

Cette hypothèse est néanmoins très vraisemblable. On déduit alors des propositions 4 et 6 du chapitre III la :

Proposition 1 :

a- Le spectre des oscillations libres est discret. Les fréquences propres constituent une suite croissante (ω_m) :

$$\omega_m = \text{Min}_{S \subseteq D(A) \text{ dim } S = m} \text{Max}_{u \in S} \{p(u)\}$$

$$\text{avec } p(u) = \frac{(iBu|u) + ((iBu|u) + a(u,u))^{1/2}}{(u|u)},$$

et à chacune de ses fréquences propres n'est associé qu'un nombre fini de modes physiques.

b- La famille des vecteurs propres est surcomplète dans H et celle des modes génère $L^2_{\mathbb{R}^3}(V, dm) \cap H$.

Dans le cas où A n'est pas positif, la proposition 4 du chapitre III ne permet pas d'exclure une instabilité dynamique, c'est à dire que certaines fréquences propres aient une partie imaginaire non nulle. Une étude mathématique reste à faire pour préciser - exactement - les conditions d'apparition d'une telle instabilité. (Par exemple on voit facilement que lorsque A et B commutent sur D(A) cette condition est : A - B² non positif) .

Revenant au cas A ≥ 0, l'expression obtenue pour ω_m permet de préciser les premiers modes :

Proposition 2 :

On a les estimations suivantes pour les premières fréquences propres :

$$\omega_1 = 0 \quad (\Omega \wedge \cdot)$$

$$\omega_2 \leq \left\{ \frac{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2} \right\}^{1/2}$$

$$\omega_3 \leq \Omega .$$

ω_2 est la fréquence de Chandler. Le mode associé correspond au mouvement d'Euler pour un corps élastique. Ainsi l'élasticité a tendance à diminuer la fréquence.

Preuve :

On a déjà vu au paragraphe 1 que "l'axial spin mode" $\Omega \wedge \cdot$ est associé à la fréquence 0.

D'après la proposition 1 :

$$\omega_2 \leq \text{Max}_{S_2} p(u) \quad \text{et} \quad \omega_3 \leq \text{Max}_{S_3} p(u) ,$$

pour tout sous-espace S_2, S_3 de dimension respective 2 et 3 de $D(a)$. On choisit pour S_3 l'espace des quasi-rotations et pour S_2 un sous espace de la forme :

$$S_2 = \{ u(x) = (k + c\Omega) \wedge x \quad \text{avec} \quad k \cdot \Omega = 0 \} .$$

Observons que :

$$\forall u \in S_2 = a(u,u) = a(k \wedge x, k \wedge x)$$

puisque :

$$A(\Omega \wedge x) = 0 ,$$

et que :

$$\begin{aligned} (Bu|u) &= (B(k \wedge x)|k \wedge x) + 2ic \text{Im} \left\{ \int_V \Omega \cdot x (k \wedge \Omega) \cdot x \, dm \right\} \\ &= (B(k \wedge x)|k \wedge x) \end{aligned}$$

du fait que Ω est une direction principale d'inertie. Il s'ensuit que :

$$p(u) = p(k \wedge x) \frac{\|k \wedge x\|^2}{\|k \wedge x + c \Omega \wedge x\|^2} ,$$

et donc que le Maximum de $p(u)$ sur S_2 est atteint lorsque $c = 0$.

Il en résulte que

$$\omega_2 \leq \text{Min}_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2} \{ b + (b^2 + a)^{1/2} \}$$

$$\omega_3 \leq \text{Max}_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2} \{ b + (b^2 + a)^{1/2} \}$$

avec :

$$u(x) = (e_1 + (\alpha + i\beta)e_2) \wedge x ,$$

$$a = \frac{a(u, u)}{(u|u)} = |\Omega|^2 \frac{(I_3 - I_2) + (\alpha^2 + \beta^2)(I_3 - I_1)}{I_3 + (\alpha^2 + \beta^2)I_2} ,$$

$$b = \frac{(iBu|u)}{(u|u)} = \beta|\Omega| \frac{I_1 + I_2 - I_3}{I_1 + (\alpha^2 + \beta^2)I_2} .$$

La stationnarité de $(b + (b^2 + a)^{1/2})$ se traduit par :

$$4b'(ab' - ba') = a'^2 \quad \text{et} \quad 2b + \frac{a'}{b'} \leq 0 ,$$

en désignant par ' la dérivation par rapport à α ou par rapport à β . Cela conduit à :

$$\alpha^2(I_1 + I_2(\alpha^2 + \beta^2)) \{4I_2(I_3 - I_1)\beta^2 + (I_2 - I_1)^2\} = 0 ,$$

$$(I_1 + (\alpha^2 - \beta^2)I_2) \{(I_1 + (\alpha^2 - \beta^2)I_2) (I_3 - I_2 + (\alpha^2 + \beta^2)(I_3 - I_1)) - 2\beta^2(I_1 + I_2 - I_3)(I_2 - I_1)\} - \beta^2(I_2 - I_1)(I_1 + (\alpha^2 + \beta^2)I_2) = 0 ,$$

avec la condition $2b + \frac{a'}{b'} \leq 0$.

Le Minimum est atteint pour :

$$\alpha = 0, \quad \beta = - \left\{ \frac{I_1}{I_2} \frac{I_3 - I_2}{I_3 - I_1} \right\}^{1/2} \quad (I_3 \geq I_1, I_3 \geq I_2)$$

$$a = |\Omega|^2 \frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)(I_1 + I_2)}{I_1 I_2 (2I_3 - I_1 - I_2)},$$

$$b = - |\Omega| \left\{ \frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2} \right\}^{1/2} \frac{I_1 + I_2 - I_3}{2I_3 - I_1 - I_2}.$$

Le Maximum est atteint pour :

$$\alpha = 0, \beta = 1,$$

$$a = |\Omega|^2 \frac{2I_3 - I_1 - I_2}{I_1 + I_2},$$

$$b = |\Omega| \frac{I_1 + I_2 - I_3}{I_1 + I_2}.$$

On en déduit que :

$$\omega_2 \leq \omega_e = |\Omega| \left\{ \frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_3} \right\}^{1/2}$$

et que d'après la formule (1) du premier paragraphe, l'estimation du mode physique est :

$$v(t) = c^{te} r(t) \wedge x$$

$$\text{avec } r(t) = \{ (I_2(I_3 - I_1))^{1/2} \cos(\omega_e t) + (I_1(I_3 - I_2))^{1/2} \sin(\omega_e t) \}.$$

$r(t)$ a donc un mouvement prograde.

Quant à ω_3 on obtient :

$$\omega_3 \leq |\Omega|,$$

ce qui correspond au "Tilt over mode" . ■

3. Cas de la Terre. Mouvement Chandlerien. Nutation libre du Noyau.

L'opérateur de l'élasto-gravité est alors défini par le triplet variationnel $(D(a), a, H)$ où les diverses expressions de a sont données dans la proposition 14 du chapitre II et :

$$D(a) = \{ u \in H : u_S \in H^1(V_S), u_F \in H(\text{div}, V_F, L^2(\Sigma_F \cup \partial V_F)) \text{ et } [u.n] = 0 \text{ sur } \partial V_F \cap \partial V_S \}$$

Les résultats que nous avons obtenus concernent essentiellement le cas où le noyau externe est supposé isentropique. Dans ce cas on définit :

$$E_2 = \{ u \in D(a) : u_S = 0, \text{div}(\rho u_F) = 0 \text{ et } n.u_F = 0 \text{ sur } \Sigma_F \cup \partial V_F \},$$

$$H_2 = \overline{E_2} \text{ (fermeture dans } L^2(V, dm) \text{)},$$

$$E_1 = E_2^\perp \cap D(a) \text{ (}\perp \text{ au sens de } L^2(V, dm) \text{)},$$

$$= \{ u \in D(a) : u_F \in H(\text{div}, V_F, L^2(\Sigma \cup \partial V_F)) \cap H_0(\text{div } 0, V_F)^\perp(\text{usuel}), \\ [u.n] = 0 \text{ sur } \partial V_S \cap \partial V_F \},$$

$$H_1 = \overline{E_1} \text{ (dans } L^2(V, dm) \text{)}$$

$$= \{ u \in H : u_F \in \text{grad}(H^1(V_F)) \}.$$

Si l'on suppose que le noyau externe est dépourvu d'interface, l'espace E_1 se réduit à (voir la remarque suivant la proposition 15 du chapitre II) :

$$E_1 = \{ u \in H : u_S \in H^1(V_S), u_F \in \text{grad}(H^2(V_F)) \text{ et } [u.n] = 0 \text{ sur } \partial V_S \cap \partial V_F \}$$

$$= \{ u \in H^1(V_S \cup V_F) \cap H : \text{Rot } u_F = 0 \text{ et } [u.n] = 0 \text{ sur } \partial V_S \cap \partial V_F \}.$$

Pratiquement, dans ce cas :

$$\forall u \in H : u = u_1 + u_2$$

avec :

$$u_1|_{V_F} \in \text{grad}(H^2(V_F)) \quad [u_1, n] = 0 \text{ sur } \partial V_S \cap \partial V_F ,$$

$$\rho u_2|_{V_F} \in \text{Rot}(H^1(V_F)) \quad u_2 \cdot n = 0 \text{ sur } \partial V_S \cap \partial V_F ,$$

$$\text{et } (u_1|u_2) = 0 .$$

On suppose, comme pour le cas d'une planète entièrement solide, que A est positif dans H . Cela appelle les mêmes commentaires et les mêmes implications qu'au paragraphe précédent. Le noyau de A est alors dans le cas général :

$$\text{Ker } A = E_2 \oplus C \{ \Omega \wedge x \} .$$

Si l'on suppose que l'axe de rotation est axe de symétrie, le noyau devient :

$$\text{Ker } A = E_2 \oplus C\{\Omega \wedge x|_{\text{mant.}}\} \oplus C\{\Omega \wedge x|_{\text{graine}}\} .$$

Soient B_{ij} les différentes composantes de l'opérateur B dans $H_1 \oplus H_2$. Montrons que :

$$\| B_{11} \| = \| B \| = \Omega . \tag{3}$$

Considérons :

$$\text{Ker}(B_{12}) = \{ u \in H_1 : Bu \in H_1 \} ,$$

on déduit facilement que :

$$S_1 = \{ u \in H : \text{div}u_F = 0 , \text{Rot}u_F = 0 , \Omega \cdot u_F = 0 \text{ et } [u] = 0 \text{ sur } \partial V_F \cap \partial V_S \} \subseteq \text{Ker}(B_{12}) .$$

Il est clair que :

$$B(S_1) = B_{11}(S_1) \subseteq S_1 .$$

Considérons les éléments de S_1 de la forme :

$u_1 = (\partial_1 f(x_1, x_2), \partial_2 f(x_1, x_2), 0)$ avec $\Delta f = 0$ dans V ,

on obtient facilement que :

$$B^2 u_1 = B_{11}^2 u_1 = |\Omega|^2 u_1$$

et donc que :

$$|\Omega|^2 \leq \|B_{11}^2\| \leq \|B_{11}\|^2 \leq |\Omega|^2 .$$

Ce qui conduit à (3).

On déduit de la proposition 5 du chapitre III la :

Proposition 3 :

a- Le spectre des oscillations libres comprend :

. 0 qui est valeur propre de multiplicité infinie.

. Le spectre σ_1 de la famille de H_1 :

$$L_{i\omega} = -\omega^2 + 2\omega\{(iB_{11} - 2B_{12}(\omega - 2iB_{22})^{-1}B_{21}) + A\} ,$$

qui est ponctuel et caractérisé par le critère :

$$\omega \in \sigma_1 \Leftrightarrow \exists m \in \mathbf{N} : \text{Inf}_{\{S \subseteq D(a), \dim S = m\}} \text{Max}_{\{u_1 \in S\}} f(\omega, u_1) = 0 \quad (4)$$

avec :

$$f(\omega, u_1) = \frac{(L_{i\omega} u_1 | u_1)}{(u_1 | u_1)} = \frac{-\omega^2(u_1 | u_1) + 2\omega\{(iB_{11} u_1 | u_1) + 2((\omega - 2iB_{22})^{-1} B_{21} u_1 | B_{21} u_1)\} + a(u_1, u_1)}{(u_1 | u_1)} \quad (5)$$

et le Inf est atteint.

De plus, à chaque fréquence propre de σ_1 n'est associé qu'un nombre fini de modes physiques. Ces modes sont de la forme :

$$\left\{ \frac{u_1 + \bar{u}_1}{2} - (\omega - 2iB_{22})^{-1} B_{21} u_1 - (\omega + 2iB_{22})^{-1} B_{21} \bar{u}_1 \right\} \cos \omega t - \\ - \left\{ \frac{u_1 - \bar{u}_1}{2i} - (i\omega + 2B_{22})^{-1} B_{21} u_1 + (i\omega - 2B_{22})^{-1} B_{21} \bar{u}_1 \right\} \sin \omega t ,$$

où u_1 est un vecteur propre de $L_{i\omega}$.

Les fréquences propres de σ_1 supérieures à $2|\Omega|$ constituent une suite croissant indéfiniment $(\omega_m)_{m \geq m_0}$ telle que :

$$\omega_m \simeq \text{Min}_{\{s \subseteq D(a), \dim s = m\}} \text{Max}_{\{u_1 \in s, \|u_1\| = 1\}} \{ (iB_{11}u_1 | u_1) + ((iB_{11}u_1 | u_1)^2 + a(u_1, u_1))^{1/2} \}, \text{ lorsque } m \rightarrow +\infty .$$

$$b- \sigma \setminus \{0\} \cup \sigma_1 \subseteq \sigma(2iB_{22}) .$$

En résumé, la partie du spectre plus grande que $2|\Omega|$ est discrète, constituée de la suite $(\omega_m)_{m \geq m_0}$. C'est la partie sismique du spectre des oscillations libres. Les autres éléments du spectre sont soit des fréquences propres décrites par le critère (4) pour $m < m_0$, soit élément du spectre de $2iB_{22}$ et 0 qui est fréquence propre de multiplicité infinie.

On remarquera que l'effet de couplage avec le noyau disparaît asymptotiquement.

Pour illustrer le critère de Min-Max, plaçons nous dans le cas particulier de la symétrie axiale et supposons que dans le noyau externe la masse volumique reste constante sur les ellipsoïdes d'équation :

$$s = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2/2k^2 .$$

Cette hypothèse est ad hoc car elle est incompatible avec l'équilibre hydrostatique, puisque l'ellipticité reste constante, mais elle permet de respecter l'hypothèse d'isotropie du noyau externe. Supposons de plus, comme le suggère l'expérience, que sur l'orthogonal des déplacements quasi-rigides généré par la famille : $\{ \Omega \wedge x|_{\text{graine}}, \Omega \wedge x|_{\text{mant.}}, e_1 \wedge x, e_2 \wedge x \}$ on ait : $A \geq 24 |\Omega|$. Le détail de la démonstration de la proposition 5 du chapitre III montre que : $m_0 = 5$.

Il est clair que pour $m = 1$ et $m = 2$,

$$\text{Min}_{\{s \subseteq D(a), \dim s = m\}} \text{Max}_{\{u_1 \in s\}} f(0, u_1) = 0$$

puisque :

$$\Omega \wedge x|_{\text{graine ou mant.}} \in E_1 \cap \text{Ker } A$$

et que :

$$\forall u_1 \in E_1 \quad a(u_1, u_1) \geq 0 .$$

Reste le cas de $m = 3$ et $m = 4$.

Commençons par calculer : $f(\omega, (e_1 + ce_2) \wedge x)$. Pour ce faire décomposons dans $E_1 \oplus E_2$ les vecteurs :

$$u(x) = (e_1 + ce_2) \wedge x = (cx_3, -x_3, x_2 - cx_3) . \quad (6)$$

Soit :

$$u_F = \text{grad} p + \frac{1}{\rho} \text{rot} v \quad \text{avec} \quad \frac{\partial p}{\partial n} = u.n \quad \text{sur} \quad \partial V_S \cap \partial V_F .$$

p est l'unique solution de :

$$\text{div}(\rho u) = \text{div}(\rho \text{grad} p) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial p}{\partial n} = u.n \quad \text{sur} \quad \partial V_S \cap \partial V_F .$$

Ce qui conduit à :

$$\text{grad} \rho \cdot (u - \text{grad} p) = \rho \Delta p \quad \text{avec} \quad \frac{\partial p}{\partial n} = u.n \quad \text{sur} \quad \partial V_S \cap \partial V_F .$$

Puisque :

$$\text{grad} \rho \wedge \text{grad} s = 0 ,$$

et donc que :

$$\text{grad} \rho \wedge n = 0 \quad \text{sur} \quad \partial V_F \cap \partial V_S ,$$

on cherche p qui vérifie :

$$\Delta p = 0 \text{ et } (u - \text{grad} p) \cdot \text{grad} p = 0 .$$

Cela nous mène à :

$$p = \beta(-cx_1 + x_2)x_3 \text{ avec } \beta = \frac{1-k^2}{1+k^2}$$

puis à :

$$u_1|_F = \text{grad} p = \beta (-cx_3, x_3, x_2 - cx_1) , \quad (7a)$$

$$u_2|_F = (u - u_1)|_F = (cx_3(1 + \beta), -x_3(1 + \beta), (x_2 - cx_1)(1 - \beta)) . \quad (7b)$$

L'orthogonalité de u_1 et de u_2 dans $L^2(V, dm)$ détermine β . En effet :

$$\begin{aligned} (u_1|u_2) &= \beta \int_{V_F} -(1 + \beta)(1 + |c|^2)x_3^2 + (x_2 - cx_1)(x_2 - \bar{c}x_1)(1 - \beta) dm \\ &= \beta(1 + |c|^2)(I_3^F - I_1^F - \beta I_1^F) = 0 , \end{aligned}$$

et donc :

$$\beta = \frac{I_3^F - I_1^F}{I_1^F} , \quad k^2 = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} ,$$

en désignant par I_1^F, I_3^F les valeurs principales d'inertie du noyau externe. β est l'ellipticité dynamique du noyau externe.

Utilisant le même type de raisonnement, on montre sans trop de peine que :

$$B_{11}u_1|_F = \frac{-|\Omega|\beta(1 - \beta)}{2} (x_3, cx_3, x_1 + cx_2) ,$$

$$B_{21}u_1|_F = \frac{|\Omega|\beta(1 + \beta)}{2} (-x_3, -cx_3, \frac{1 - \beta}{1 + \beta}(x_1 + cx_2)) ,$$

puis que :

$$(i\omega + 2B_{22})^{-1}B_{21}u_1|_F = \frac{|\Omega|\beta}{2(|\Omega|^2(1 + \beta^2) - \omega^2)} (-x_3(1 + \beta)\gamma, -x_3(1 + \beta)\delta, (1 - \beta)(\gamma x_1 + \delta x_2)), \quad (8)$$

avec :

$$\gamma = c|\Omega|(1 + \beta) + \omega i \quad \delta = c\omega i - (1 + \beta)|\Omega|.$$

Il en résulte que :

$$(u_1|u_1) = (I_1^S + I_1^F\beta^2)(1 + |c|^2),$$

$$\begin{aligned} 2i\omega(B_{11}u_1|u_1) &= 2i\omega(\beta_{11}u_1|u_1)_F + 2i\omega(Bu|u)_S \\ &= + 2\omega\Omega\beta^2(1 - \beta)c_2I_1^F + 2\omega\Omega(2I_1^S - I_3^S)c_2 \\ &= 2\omega\Omega c_2(\beta^2(1 - \beta)I_1^F + 2I_1^S - I_3^S), \end{aligned}$$

$$4i\omega((i\omega + 2B_{22})^{-1}B_{21}u_1|B_{21}u_1) = |\Omega|^2I_1^F(1 - \beta)^2\beta^2\omega \frac{\omega(1 + |c|^2) + 2c_2|\Omega|(1 + \beta)}{\omega^2 - |\Omega|^2(1 + \beta)^2},$$

$$a(u,u) = |\Omega|^2(I_3 - I_1)(1 + |c|^2),$$

et donc, d'après 5, que :

$$\begin{aligned} (I_1^S + I_1^F\beta^2) f(\omega, u_1) &= \frac{2c_2\omega\Omega}{1 + c_1^2 + c_2^2} \left\{ (2I_1^S - I_3^S) + \beta^2(\beta - 1)I_1^F \frac{\omega^2}{|\Omega|^2(1 + \beta)^2 - \omega^2} \right\} - \\ &\quad - (I_1^S + I_1^F\beta^2)\omega^2 + |\Omega|^2(I_3 - I_1) + \frac{\omega^2|\Omega|^2\beta^2(\beta^2 - 1)}{|\Omega|^2(1 + \beta)^2 - \omega^2} I_1^F. \end{aligned} \quad (9)$$

Considérons maintenant le champ de vecteur de E_1 :

$$v(x) = u_1(c,x) + \alpha \Omega \wedge x|_{\text{mant.}} + \beta \Omega \wedge x|_{\text{graine}}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

On obtient facilement que :

$$f(\omega, v) = f(\omega, u_1) \cdot \frac{I_1^S + I_1^F \beta}{I_1^S + I_1^F \beta + (|\alpha|^2 + |\beta|^2) |\Omega|^2 I_1^S} .$$

De sorte que, d'après (4), les éventuelles fréquences propres ω associées à $m = 3$ vérifient :

$$\forall c \in \mathbf{C} : f(\omega, u_1(c)) \geq 0 , \quad (10)$$

et que celles associées à $m = 4$:

$$\text{Max}_{\{c \in \mathbf{C}\}} f(\omega, u_1(c)) \geq 0 . \quad (11)$$

L'expression (9) montre que $f(\omega, u_1(c))$ ne dépend de c qu'au travers de la fonction $\frac{c_2}{1 + |c|^2}$ qui décrit l'intervalle $[-1/2, 1/2]$. Les extremums de $f(\omega, u_1(c))$ correspondent à $c = \pm i$. Puisque

$$f(-\omega, u_1(\bar{c})) = f(\omega, u_1(c)) ,$$

le signe est indifférent. Le choix de $c = i$ conduit à :

$$f(\omega, u_1(i)) = -2\omega^2(I_1^S + I_1^F \beta^2) + 2\omega |\Omega| \{ 2I_1^S - I_3^S + (2I_1^F - I_3^F) \beta^2 \} + \quad (12)$$

$$+ 2|\Omega|^2 \{ I_3 - I_1 - \beta^2(\beta^2 - 1) I_1^F \} - 2|\Omega|^3 \frac{(\beta+1)^2(\beta-1)\beta^2 I_1^F}{\omega - |\Omega|(1+\beta)} ,$$

$$= \frac{I_1^S}{I_1^S + I_1^F \beta^2} \frac{\omega - |\Omega|}{\omega - |\Omega|(1+\beta)} \left\{ \frac{I_1^F}{I_1^S} \beta (|\Omega|^2(1+\beta) + \beta\omega|\Omega| - \beta\omega^2) - \right.$$

$$\left. - \left(\omega + \frac{I_3^S - I_1^S}{I_1^S} |\Omega| \right) (\omega - |\Omega|(1+\beta)) \right\} . \quad (13)$$

La courbe représentant $f(\omega, u_1(i))$ est présentée en figure 2. On voit clairement l'effet de la résonance due au noyau externe. A une parabole, que l'on obtiendrait seule en l'absence de fluide, s'ajoute une hyperbole d'asymptote verticale $\omega = |\Omega|(1+\beta)$.

Il se trouve, par ailleurs que les valeurs qui rendent $f(\omega, u_1(i))$ positif sont celles pour lesquelles $f(\omega, u_1(c))$ est maximum en $f(\omega, u_1(i))$. Les zéros de la fonction $f(\omega, u_1(i))$ sont :

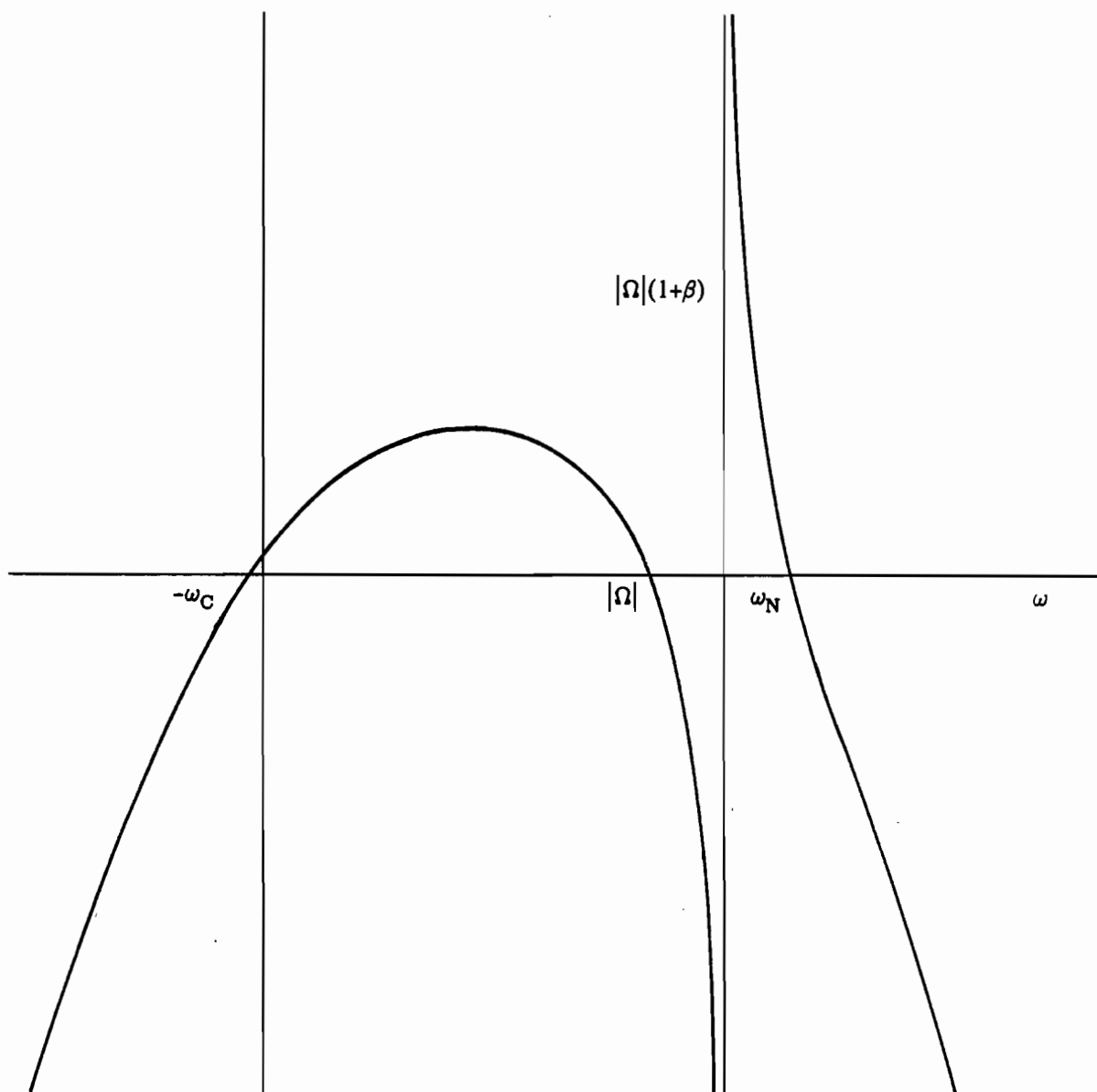


Figure 2 : Courbe représentative de la fonction de ω , $f(\omega, u_1(i))$.

$$\omega = |\Omega| , \quad (14a)$$

$$\omega = \omega_N = |\Omega| \left\{ 1 + \frac{I_3^F - I_1^F}{I_1^F} \frac{I_3}{I_1^S} \left[1 + 2 \frac{I_3^F - I_1^F}{I_1} + \dots \right] \right\} \quad (14b)$$

$$\omega = -\omega_C = -|\Omega| \frac{I_3 - I_1}{I_1^S} \left\{ 1 - \frac{I_3^F - I_1^F}{I_1} + \dots \right\} \quad (14c)$$

Reprenant le critère (10) avec $c = 0$ (voir l'expression (5)) et $c = \pm i$, on déduit que toute fréquence propre associée à $m = 3$ vérifie :

$$\omega \leq \omega_C \quad (15)$$

Pour $m = 4$, le critère (11) devient quant à lui :

$$\begin{aligned} \omega \leq |\Omega| & \quad \text{a } \} \\ \text{ou} & \quad \text{b } \} \\ |\Omega|(1 + \beta) < \omega \leq \omega_N & \quad \text{b } \} \end{aligned} \quad (16)$$

Les estimations des vecteurs propres associés sont de la forme (cf. proposition 3) :

$$u = u_1 - 2(i\omega + 2B_{22})^{-1}B_{21}u_1 ,$$

ce qui conduit compte tenu de (5), (7a) et (8) à :

$$u_S = (ix_3 , -x_3 , x_2 - ix_3) , \quad (17)$$

$$u_F = \frac{\omega\beta}{|\Omega|(1 + \beta) - \omega} (ix_3 , -x_3 , x_2 - ix_3) + (0 , 0 , \frac{2(\Omega - \omega)\beta}{|\Omega|(1 + \beta) - \omega} (x_2 - ix_3)) .$$

Le mode physique associé est, quant à lui, (voir la proposition 3) de la forme :

$$u_g = r(t) \wedge x ,$$

(18)

$$u_F = \frac{-\omega\beta}{\omega - |\Omega|(1 + \beta)} r(t) \wedge x + \frac{2(\omega - |\Omega|)\beta}{\omega - |\Omega|(1 + \beta)} (x_2 \cos(\omega t) + x_3 \sin(\omega t)) e_3 .$$

avec :

$$r(t) = \cos(\omega t) e_1 - \sin(\omega t) e_2 .$$

L'estimation (15) est celle de la fréquence de Chandler. L'expression (18) montre que le mouvement est négligeable dans la partie fluide et qu'il est de même nature dans le manteau et dans la graine. Il est clair que le mouvement de la graine est lié à l'ellipticité de l'interface graine-noyau externe que nous avons supposée identique à celle de l'interface noyau manteau. L'estimation (16a) correspond au "Tilt over mode" comme le confirme (18). Reste la plage (16b) qui correspond à la nutation libre du noyau (voir Toomre (1974) pour un historique et une description du mode ainsi que Hinderer et al. (1982)). L'expression (18) nous montre que le mouvement physique est approximativement de la forme :

$$u_g = r(t) \wedge x$$

$$u_F = - \frac{I_1^S}{I_1^F} r(t) \wedge x \simeq -10 r(t) \wedge x .$$

Il faut bien prendre conscience que, mis à part le "Tilt over mode", rien ne prouve l'existence ni l'unicité de ces modes.

L'expression (5) montre que, u_1 étant fixé, la fonction $f(\omega, u_1)$ peut présenter une asymptote verticale au niveau de chaque valeur propre de $-2iB_{22}$. De plus l'estimation (10) du chapitre III montre que cette fonction est décroissante, indépendamment de u_1 , dès que $\omega > (\sqrt{3}-1)|\Omega|/2$. Il s'ensuit qu'elle peut présenter nombre de zéros inférieurs à $2|\Omega|$. Sont-ils associés à des modes ? Y a-t-il, par exemple, toute une famille de modes chandleriens ? La question reste ouverte. En tous cas ces éventuelles fréquences propres doivent vérifier les inégalités (16).

Passons au cas d'une inclusion non isentropique. On définit alors :

$$E_2 = \{ u \in D(a) : u_s = 0, \rho u_F \in H_0(\text{div}0, V_F) \text{ et } s.u_F = 0 \},$$

$$E_1 = E_2^\perp \cap D(a) = \{ u \in D(a) : s.\text{Rot}(u)_F = 0 \},$$

$$H_1 = \overline{E_1},$$

$$H_2 = \overline{E_2} \text{ (fermeture dans } H \text{ au sens de } L^2(V, dm) \text{)}.$$

Comme on la montré dans la proposition (16) du chapitre II :

$$E_2 \subseteq \text{Ker } A.$$

On peut comme dans le cas isentropique (voir proposition 3) décomposer le spectre en :

- $\{0\}$ qui est de multiplicité infinie ,
- σ_1 : le spectre de la famille $L_{i\omega}$ dans H_1 ,

$$\text{et } \sigma \setminus \sigma_1 \subseteq \sigma(-2B_{22}) \cup \{0\}.$$

Mais, puisque l'injection de E_1 dans H_1 n'est pas compacte, on ne peut plus affirmer que le spectre de σ_1 est ponctuel. Il est néanmoins vraisemblable que le critère de Min-Max (4) est encore valable, le Inf n'étant atteint que dans le cas d'une valeur propre. La question reste ouverte.

4. Caractérisation variationnelle des fréquences propres.

Une telle caractérisation variationnelle est essentielle pour les calculs de perturbation de configuration. Aussi en trouve-t-on de toute sorte dans la littérature géophysique (cf. Pekeris & Jarosh (1958), Backus & Gilbert (1967), Dahlen (1968), Woodhouse (1976), Dziewonski & Sailor (1976), Woodhouse & Dahlen (1978), Johnson & Smylie (1977)).

Pour notre part, reprenant les propositions (17) du chapitre II et (8) du chapitre III nous obtenons la :

Proposition 4 :

Considérons l'application sesquilinéaire définie sur $D(a) \times W^1(\mathbb{R}^3)$ ou $(D(a) \times H^1(\mathbb{R}^3))$:

$$\forall ((u, \psi), (u', \psi')) \in D(a) \times W^1(\mathbb{R}^3) \quad ((u, \psi), (u', \psi')) \rightarrow J((u, \psi), (u', \psi')) = a'(u, u') - (\text{grad}\psi|u') - (u|\text{grad}\psi') + (\text{grad}\psi|\text{grad}\psi')_{L^2(\mathbb{R}^3)} / 4\pi G + 2\omega(iBu|u') - \omega^2(u|u') .$$

On a les équivalences suivantes :

- 1- $-\omega^2 u + 2i\omega Bu + Au = 0$ et $\psi = \psi(u)$,
- 2- $J((u, \psi), (u', \psi'))$ est stationnaire au point $((u, \psi), (u, \psi))$ dans $D(a) \times W^1(\mathbb{R}^3)$ ou $D(a) \times H^1(\mathbb{R}^3)$
- 3- $\forall (u', \psi') \in D(a) \times W^1(\mathbb{R}^3) \quad J((u, \psi), (u', \psi')) = 0$.

Dans ces expressions :

$$D(a) = \{u \in H : u_g \in H^1(V_g) , u_F \in H(\text{div}, V_F, L^2(\Sigma_F \cup \partial V_F)) \text{ et } [u.n] = 0 \text{ sur } \partial V_F \cap \partial V_g\}$$

$$a'(u, v) =$$

$$\int_{V_g} \pi^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{v}_l + S\{(\rho g_0' - \text{grad}\pi_0).D\bar{v}(u) + (\rho g_0' + \text{grad}\pi_0).u \text{ div}(\bar{v}) + (g_0'.u)(\bar{v}. \text{grad}\rho)\} dV$$

$$+ \int_{\Sigma_g} S\{(g_0'.u)(\bar{v}.n)\} [\rho] d\Sigma + \int_{\partial V_g \cap \partial V_F} S\{(\bar{v}.n)(u_g.g_0') [\rho] d\Sigma + [\rho](g_0'.n) \int_{\Sigma_F} (u.n)(\bar{v}.n) d\Sigma$$

$$- \int_{\partial V} S\{(g_0'.u)(\bar{v}.n)\} \rho d\Sigma + \int_{V_F} \kappa \text{div}(u)\text{div}(\bar{v}) + S\{2\rho g_0'.u \text{div}(\bar{v}) + (g_0'.u)(\bar{v}. \text{grad}\rho)\} dV .$$

Si l'on utilise un espace test de la forme $D \times W^1(\mathbb{R}^3)$ où D comprend les champs dont les restrictions à V_F sont dans $H^1(V_F)$, $a'(u, v)$ peut s'écrire :

$$a'(u, v) = \int_V \pi^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{v}_l - S\{(\rho D g_0'.u.\bar{v} + (D\bar{v}(u) - u \text{div}(\bar{v})).\text{grad}\pi_0)\} dV -$$

$$- \int_{\partial V_F \cap \partial V_g} S\{(u.n)[\bar{v}].\text{grad}_{\Sigma} p_0\} d\Sigma .$$

Preuve :

La démonstration de l'équivalence de (a) et (b) est strictement analogue à celle de la proposition 17 du chapitre II. On introduit simplement le terme $2\omega(iBu|u')$ en plus. Ceci ne présente pas d'inconvénient puisqu'il est dérivable dans L^2 . L'équivalence (b,c) résulte du caractère sesqui-linéaire de J dans l'espace $D(a) \times W^1(\mathbb{R}^3)$ que l'on n'a pas exploité dans la proposition 17 du chapitre 2.

La dérivée de J dans $D(a) \times H^1(\mathbb{R}^3)$ est :

$$\forall (u', \psi') \in D(a) \times H^1 \quad (u', \psi') \rightarrow 2 \operatorname{Re}\{J((u, \psi), (u', \psi'))\} .$$

la considération de $i(u'\psi')$ pour tout $(u'\psi')$ montre que (b) est équivalent à (c). ■

Pratiquement c'est le point c qui sera utile. Si l'on se restreint au cas hydrostatique, en prenant $D = \{u \in H^1(V_S \cup V_F) : [u.n] = 0 \text{ sur } \partial V_S \cap \partial V_F \text{ et } \Sigma_F\}$, on obtient :

$$\forall (u', \psi') \in D \times H^1(\mathbb{R}^3) : \int_V -\omega^2 u \cdot \bar{u}' + 2i\omega(\Omega, u, \bar{u}') + d^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{u}'_l + \\ + \rho S \{u \cdot g_0' \operatorname{div}(\bar{u}') - \bar{u}' \cdot \operatorname{grad}(u \cdot g_0')\} - \operatorname{grad} \psi \cdot \bar{u}' - \operatorname{grad} \psi' \cdot u \, dV + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{grad}(\psi) \cdot \operatorname{grad}(\psi')}{4\pi G} \, dV = 0.$$

avec :

$$d^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{u}'_l = \kappa \operatorname{div}(u) \operatorname{div}(\bar{u}') \text{ dans } V_F .$$

Ce critère présente l'énorme avantage de ne comporter aucune intégrale de surface, tout en tenant compte des zones fluides et correspond au critère utilisé par Backus & Gilbert (1967 appendice A) dans le cas isotrope.

Il est équivalent au critère utilisé par Woodhouse & Dahlen (1978) qui peut être dérivé de la deuxième formulation variationnelle de la proposition 14b du chapitre II, puisque les modes propres sont réguliers.

Signalons pour finir que ce type de caractérisation repose essentiellement sur le caractère semi-borné de A . Il ne peut donc pas être utilisé, a priori, dans le cas d'un écoulement stationnaire quelconque dans le noyau externe.

5. Problème d'évolution.

Les résultats obtenus au chapitre III prouvent l'existence et l'unicité du problème d'évolution dans le cas d'une planète présentant une inclusion fluide isentropique. La proposition 7 du chapitre III nous montre également l'importance de l'espace :

$$S = \text{Ker } A \cap (B(\text{Ker } A))^\perp = \text{Ker } A \cap B^{-1}((\text{Ker } A)^\perp) ,$$

qui est l'espace associé aux chaînes de Jordan. En effet si u appartient à S , alors :

$$v(t) = u t - 2 A^{-1}_{(\text{Ker } A)^\perp} B u$$

est solution du problème d'évolution homogène. Les géophysiciens parlent alors de modes séculaires. Ce sont de plus les seuls vecteurs propres associés à la fréquence nulle qui interviennent dans la décomposition de H (voir la proposition (7) du chapitre III (13d)). Précisons S . En général :

$$S = \{u \in D(a) : u_S = 0 , \text{div}(\rho u_F) = 0 , \text{Rot}(\Omega \wedge u)_F = 0 \text{ et} \\ u_F \cdot n = 0 \text{ sur } \partial V_S \cap \partial V_F \} \oplus C \{ \Omega \wedge x \} .$$

Si l'on suppose que l'axe de rotation est axe de symétrie, il faut remplacer dans la formule précédente $C \{ \Omega \wedge x \}$ par $C \{ \Omega \wedge x |_{\text{mant.}} \} \oplus C \{ \Omega \wedge x |_{\text{graine}} \}$ et l'on peut décrire exactement S . Pour simplifier supposons de plus que le noyau externe ne présente pas d'interface et que la masse volumique ρ est constante du côté fluide sur $\partial V_F \cap \partial V_S$.

Utilisant les coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) dans V_F , la condition $\text{Rot}(\Omega \wedge u) = 0$ conduit à :

$$u = \Omega \wedge \text{grad}(f(r, \phi)) + c \Omega , \tag{19a}$$

la condition $\text{div}(\rho u) = 0$ à :

$$\frac{\partial_r \rho}{r} \frac{\partial_\phi f}{r} - \partial_z(\rho c) = 0, \quad (19b)$$

et la condition aux limites à :

$$\partial_z c = 0 \text{ sur } \partial V_F \cap \partial V_S. \quad (19c)$$

$c = 0$, $\partial_\phi f = 0$ est toujours solution. Pour qu'il y ait toute une autre famille de solutions, il faut et il suffit que pour tout r :

$$\int_{z_1(r)}^{z_2(r)} \partial_r \rho(r,s) ds + \left[\frac{\rho(r,z(r)) \partial_r \rho(r,z(r))}{\partial_z \rho(r,z(r))} \right]_1^2 = 0$$

en désignant par $z_1(r)$ et $z_2(r)$ les cotes des interfaces bordant une même zone fluide.

Il en résulte qu'en dehors de cette situation exceptionnelle :

$$u \in S \Leftrightarrow \exists (\alpha_1, \alpha_2, f) \in C^2 \times \{f \in H^1(V_F), \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0, \frac{\partial f}{\partial z} = 0\} :$$

$$u = \alpha_1 \Omega \wedge x|_{\text{mant.}} + \alpha_2 \Omega \wedge x|_{\text{graine}} + \Omega \wedge \text{grad}(f(r))|_{\text{noyau ext.}}$$

Dans le noyau externe, il s'agit des champs toroïdaux cylindriques. D'après la forme du mouvement associé on voit qu'il représente, en fait, la vitesse. Ceci est simplement dû à la formulation du premier ordre en déplacement. On retrouve ainsi que les mouvements convectifs à vitesse toroïdale cylindrique perdurent en l'absence de viscosité. On peut donc s'attendre à ce qu'ils contribuent de manière non-négligeable au mouvement convectif dans le noyau externe.

Dans le cas d'une planète purement solide, l'espace S se réduit au vecteur $\Omega \wedge x$, c'est à dire à "l'axial spin mode".

Quoi qu'il en soit si l'on suppose, comme c'est le cas en Sismologie, que la partie du spectre $\sigma \cap \sigma(-2B_{22})$ est ponctuelle (voir proposition 5 du chapitre III), ce qui est très probable car $\sigma(-2B_{22})$ est vraisemblablement ponctuel, et que $v_0 = v_1 = 0$, la proposition 10 du chapitre III prouve que :

$$v(t) = \sum_j v_j \frac{i}{\omega_j} \int_0^t (f(s)|v_j) (1 - e^{i\omega_j(t-s)}) ds + \sum_n v_n \int_0^t (f(s)|v_n) (t-s) ds$$

où les v_n constituent une base Hilbertienne de S et :

$$a(v_i, v_j) + \omega_i \omega_j (v_i | v_j) = \omega_i \omega_j \delta_{ij} ,$$

$$4(Bv_n | A^{-1}_{(\text{Ker}A)^\perp} Bv_m) + (v_n | v_m) = \delta_{nm} .$$

Si l'on suppose de plus que $f(t)$ appartient à l'image de A , alors :

$$\forall n \quad (f(t)|v_n) = 0$$

et donc :

$$v(t) = \sum_j v_j \frac{i}{\omega_j} \int_0^t (f(s)|v_j) (1 - e^{i\omega_j(t-s)}) ds$$

$$= \sum_j -i \frac{v_j}{\omega_j} \int_0^t (f(s)|v_j) e^{i\omega_j(t-s)} ds + \sum_j \frac{i}{\omega_j} (f(s)|v_j) v_j .$$

Soit $u(t)$ l'élément de $(\text{Ker}A)^\perp$ tel que $f(t) = Au(t)$. $u(t)$ est à chaque instant le déplacement statique correspondant à la sollicitation $f(t)$. On déduit de la relation (13g) du chapitre III que :

$$\sum_j \frac{i}{\omega_j} (f(s)|v_j) v_j = \sum_j \frac{i}{\omega_j} a(u(s), v_j) v_j$$

$$= \sum_{j,n} i\omega_j (u(s)|v_j) (v_j | v_n) v_n = 2 \sum_n (Bu | v_n) v_n \in S .$$

Par ailleurs :

$$\omega^2(u(s)|v_j) = (f(s)|v_j) - 2i\omega_j(u(s)|Bv_j)$$

et donc :

$$\sum_j \frac{i}{\omega_j} (f(s)|v_j) v_j = \sum_{j,n} \frac{i}{\omega_j} (f(s)|v_j)(v_j|v_n) v_n + 2(u(s)|Bv_j)(v_j|v_n) v_n .$$

Ainsi

$$v(t) = \sum_j v_j \frac{i}{\omega_j} \int_0^t (f(s)|v_j) (1 - e^{i\omega_j(t-s)}) ds \quad (20a)$$

$$= \sum_j -i \frac{v_j}{\omega_j} \int_0^t (f(s)|v_j) e^{i\omega_j(t-s)} ds + \sum_{j,n} \int_0^t \left\{ \frac{i}{\omega_j} (f(s)|v_j) + 2(A^{-1}_{(\text{Ker}A)^\perp} f(s)|Bv_j) \right\} (v_j|v_n) v_n ds . \quad (20b)$$

avec : $4(Bv_n | A^{-1}_{(\text{Ker}A)^\perp} Bv_n) + (v_n|v_n) = \delta_{n,n}$.

Ce résultat est à comparer à celui obtenu (équation 6-6) par Wahr (1981). Remarquons d'emblée que sa description de l'espace S est incorrecte, sauf dans le cas purement solide. Néanmoins si l'on utilise une base orthormale (v'_m) dans L^2 pour représenter S - ce qui est possible puisque ce sous espace est fermé dans L^2 - on obtient que :

$$\sum_j \frac{i}{\omega_j} (f(s)|v_j)v_j = \sum_{m,j} \frac{i}{\omega_j} (f(s)|v_j)(v_j|v'_m)v'_m ,$$

puisque ce vecteur est élément de S. Cela conduit à :

$$v(t) = \sum_j -i \frac{v_j}{\omega_j} \int_0^t (f(s)|v_j) e^{i\omega_j(t-s)} ds + \sum_{j,m} \int_0^t \frac{i}{\omega_j} (f(s)|v_j)(v_j|v'_m)v'_m ds ,$$

avec $(v'_m|v'_m) = \delta_{mm}$. Sous cette forme notre résultat est analogue à celui de Wahr; seul son choix spécifique de la base v'_m est incorrect.

Si l'on décrit une source sismique sous la forme :

$$f(t) = H(t) M_0 \text{grad}(\delta(x-x_s)) ,$$

où M_0^{pq} est le tenseur moment sismique, on obtient :

$$(f(t)|v_j) = H(t) M_0^{pq} \eta_{pq}^{(j)}(x_s) = H(t) s_j$$

et donc, d'après (20a) :

$$v(t) = \sum_j \frac{s_j}{\omega_j^2} (1 + i\omega_j t - e^{i\omega_j t}) v_j . \tag{21}$$

Ce qui conduit dans le cas d'une excitation réelle à :

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_j \frac{s_j}{\omega_j} \frac{1 + i\omega_j t - e^{i\omega_j t}}{2(\omega_j \|v_j\|^2 - (i\Omega \wedge v_j|v_j))} v_j , \\ &= \sum_{j \geq 1} \text{Re} \left\{ \frac{s_j}{(\omega_j \|v_j\|^2 - (i\Omega \wedge v_j|v_j))} \left[\frac{1 - e^{i\omega_j t}}{\omega_j} + it \right] v_j \right\} , \end{aligned} \tag{22}$$

où l'on a explicité la normalisation :

$$a(v_j, v_j) + \omega_j^2 (v_j|v_j) = \omega_j^2 ,$$

et donc, puisque v_j est vecteur propre associée à la valeur propre ω_j :

$$2(\omega_j (v_j|v_j) - (i\Omega \wedge v_j|v_j)) = \omega_j .$$

Ce résultat est analogue à ceux obtenus par Wahr (1981, équation 6-14) et Dahlen (1980). On notera tout de même le choix malheureux de Wahr pour la famille v'_m qu'il emploie à nouveau. Néanmoins cela n'affecte pas la variation du taux de rotation dans une zone "Δ" de la Terre puisque, d'une part, ce terme correspond au terme linéaire en temps et que, d'autre part, on

l'obtient par projection orthogonale dans $L^2(V, dm)$ sur la direction de $\Omega \wedge x|_{\Delta}$. Ainsi :

$$\delta\Omega_{\Delta} = \operatorname{Re} \left(\sum_{j \geq 1} \frac{is_j}{\omega_j \|v_j\|^2 - (i\Omega \wedge v_j | v_j)} \frac{(v_j | \Omega \wedge x|_{\Delta})}{\|\Omega \wedge x|_{\Delta}\|^2} \right) \quad (23)$$

Quant au cas où le noyau externe n'est pas isentropique le problème reste ouvert. Les modes séculaires correspondent alors à l'espace :

$$S = \operatorname{Ker} A \cap B^{-1}(\operatorname{Im} A) .$$

Il est vraisemblable qu'il apparait du spectre essentiel près de l'origine. De plus s'il se confirme qu'il y a du spectre continu, comme c'est le cas pour une boule liquide (cf. Chapitre II, paragraphe 6), la mesure spectrale peut être singulière, ce qui compliquerait l'étude du problème d'évolution. Rappelons néanmoins qu'un signal sismique n'est que très peu lié à cette partie du spectre. Par contre l'étude de cette zone spectrale reste essentielle pour la compréhension mécanique du noyau.

V. MÉTHODE DE PERTURBATION POUR UNE CONFIGURATION PROCHE DE LA SYMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Les méthodes de perturbation ont été largement développées en mécanique classique et quantique. Nous renvoyons à l'ouvrage de Kato pour les aspects théoriques.

Une vaste littérature est également consacrée en mathématique appliquée aux perturbations de domaines et aux déformations virtuelles. Citons entre autres Hadamard (1910), Garabedian & Schiffer (1953), Polya & Schiffer (1953), Kac (1966), Joseph (1967) et Cea (1973).

En géophysique, mis à part les travaux de pionnier de Dahlen (1968, 1969), il faut signaler les articles de Dziewonsky & Sailor (1976), Woodhouse (1976), Woodhouse & Dahlen (1978), de Dahlen & Sailor (1979) et de Woodhouse (1980) pour ce qui est des corrections d'ellipticité et de rotation ainsi que ceux de Woodhouse & Dahlen (1978), de Jordan (1978), de Woodhouse & Girnius (1982), de Mochizuki (1986), de Montagnier (1986), de Tanimoto (1986) et de Snieder & Romanowicz (1987) pour les hétérogénéités latérales.

On ne trouvera donc, dans le fond, rien de bien original dans ce chapitre. Il se trouve cependant, qu'hétérogénéité latérale mise à part, on observe depuis peu (Ritzwoller et al. (1986), Giardini et al. (1987)) nombre de "splittings anormaux" (par rapport aux formules actuellement utilisées) de modes sphéroïdaux. Le noyau est généralement invoqué pour en rendre compte. Nous nous sommes donc efforcé de reprendre ces calculs de perturbation en utilisant les résultats du premier paragraphe du chapitre I et la caractérisation variationnelle du paragraphe 4 du chapitre IV. Cela fournit également une dérivation originale des équations de Clairaut et leur extension au cas orthotrope au premier et deuxième ordre. On obtient aussi l'expression des perturbations des fréquences propres dues à l'ellipticité en général et dans le cadre orthotrope en particulier. On notera une différence, pratiquement négligeable, dans le terme de perturbation gravitationnelle avec l'expression obtenue par Woodhouse & Dahlen (1978) qui fait actuellement référence dans le cas isotrope. Nous analysons l'influence d'un mouvement convectif dans le noyau et concluons par l'expression de la perturbation Lagrangienne du signal.

1. Perturbations de rotation et de paramètres.

Dans ce paragraphe, on suppose que la configuration sphérique est conservée. Cela permet d'éviter une formulation faible. Afin de pouvoir utiliser l'alternative de Fredholm on doit se restreindre aux valeurs propres isolées de A . C'est le cas de toutes lorsque l'on suppose que le noyau est isentropique. Par contre on doit se restreindre aux fréquences sismiques dans le cas général.

Désignons respectivement par :

- ω_x la fréquence propre associée au nombre quantique $x = (\ell, n, \epsilon)$ où ℓ est l'ordre angulaire, n l'ordre radial et ϵ spécifie le type du mode, $\epsilon = 1$ pour sphéroïdal et $\epsilon = -1$ pour toroïdal ;
- V_x le sous espace propre de dimension $2\ell + 1$ associé à ω_x ;
- P_x le projecteur orthogonal sur V_x dans $L^2(V, dm)$.

On considère maintenant une évolution virtuelle qui respecte la position spatiale (cf chapitre I paragraphe 1). Soit $u_{x,m}(t)$ l'une des $(2\ell + 1)$ branches de vecteurs propres associées à la fréquence propre ω_x :

$$-\omega_{x,m}^2(t)u_{x,m}(t) + 2\omega_{x,m}(t)iB(t)u_{x,m}(t) + A(t)u_{x,m}(t) = 0, B(0) = 0 ; \quad (1)$$

on obtient par dérivation virtuelle :

$$(A - \omega_x^2)\delta u_{x,m} = (2\omega_x \delta \omega_{x,m} - 2i\omega_x \delta B - \delta A)u_{x,m} .$$

Si ω_x est isolé, $(A - \omega_x^2)$ est un isomorphisme topologique de $V_x^\perp \cap D(A)$ sur V_x^\perp ; on notera par $(A - \omega_x^2)^{-1}$ son inverse :

$$(A - \omega_x^2)^{-1} : V_x^\perp \rightarrow V_x^\perp \cap D(A) .$$

Ainsi :

$$(2\omega_x \delta \omega_{x,m} - 2\omega_x i \delta B - \delta A)u_{x,m} \in V_x^\perp , \quad (2)$$

et donc :

$$P_x(\delta A + 2\omega_x i\delta B)u_{x,m} = 2\omega_x \delta\omega_{x,m} u_{x,m} \tag{3}$$

Posons :

$$H = (\delta A + 2\omega_x i\delta B)$$

$$H^{\alpha\alpha'} = P_x H P_x'$$

$$H^x = H^{\alpha\alpha'}$$

Il est d'usage d'appeler H^x "l'opérateur de splitting" de la fréquence ω_x . C'est un opérateur auto-adjoint de l'espace V_x de dimension $(2\ell + 1)$.

L'expression (2) nous montre que les différents $2\omega_x \delta\omega_{x,m}$ sont les $(2\ell + 1)$ valeurs propres ($|m| \leq \ell$) de H^x , associées aux vecteurs propres $u_{x,m}$.

Ainsi :

$$\delta\omega_{x,m} = \frac{1}{2\omega_x} \frac{(H^x u_{x,m} | u_{x,m})}{\|u_{x,m}\|^2} \tag{a }$$

$$(1 - P_x)\delta u_{x,m} = - (A - \omega_x^2)^{-1} (1 - P_x) H u_{x,m} \tag{b } (4)$$

$$\delta u_{x,m} = - (A - \omega_x^2)^{-1} (1 - P_x) H u_{x,m} + \sum_{m'} (\delta u_{x,m} | u_{x,m'}) u_{x,m'} \tag{c }$$

De l'orthogonalité des vecteurs propres dans l'espace produit (cf chapitre III proposition 7, 13a) on déduit que :

$$(\delta A u_{x,m} | u_{x,m'}) + \omega_x^2 \{ (u_{x,m} | \delta u_{x,m'}) + (\delta u_{x,m} | u_{x,m'}) + (\delta \rho u_{x,m} | u_{x,m'})_{L^2} \} = \omega_x \{ \delta\omega_{x,m'} + \delta\omega_{x,m} \} .$$

On déduit également de (2) que :

$$2\omega_x \sum_{x,m:\omega_x=\omega} \delta\omega_{x,m} = \sum_{x:\omega_x=\omega} \text{tr } H^x \quad (5)$$

Cela donne l'expression de la translation d'un paquet de multiplets associé au "splitting" des modes.

Il est d'usage d'utiliser comme V_x , la base des vecteurs harmoniques sphériques d'ordre ℓ : $v_{x,m}$. Sur cette base l'opérateur de "splitting" est représenté par la matrice :

$$H_{mm'}^x = \frac{(\delta A v_{x,m} | v_{x,m'}) + 2\omega_x (i\delta B v_{x,m} | v_{x,m'})}{(v_{x,m} | v_{x,m})^{1/2} (v_{x,m'} | v_{x,m'})^{1/2}}$$

Une nouvelle dérivation virtuelle de l'expression (1) nous conduit à :

$$(A - \omega_x^2) \delta_2 u_{x,m} = -2(\delta A - 2\omega_x \delta\omega_{x,m} + 2\omega_x i\delta B) \delta u_{x,m} + \\ + (2\omega_x \delta_2 \omega_{x,m} + 2(\delta\omega_{x,m})^2 - 4i\delta B \delta\omega_{x,m} - 2i\omega_x \delta_2 B - \delta_2 A) u_{x,m} .$$

Cela montre que :

$$P_x \{-2(\delta A - 2\omega_x \delta\omega_{x,m} + 2\omega_x i\delta B) \delta u_{x,m} + \\ + (2\omega_x \delta_2 \omega_{x,m} + 2(\delta\omega_{x,m})^2 - 4i\delta B \delta\omega_{x,m} - 2i\delta_2 B \omega_x - \delta_2 A) u_{x,m}\} = 0 ,$$

et donc, grâce à (4b) que :

$$\{2\omega_x \delta_2 \omega_{x,m} + 2(\delta\omega_{x,m})^2\} \|u_{x,m}\|^2 = -2((A - \omega_x^2)^{-1} (1 - P_x) H u_{x,m} | (1 - P_x) H u_{x,m}) + \\ + 4\delta\omega_{x,m} (i\delta B u_{x,m} | u_{x,m}) + ((\delta_2 A + 2\omega_x i\delta_2 B) u_{x,m} | u_{x,m}) ,$$

ce qui conduit à :

$$2\{\omega_x \delta_2 \omega_{x,m} + (\delta_1 \omega_{x,m})^2\} \|u_{x,m}\|^2 = -2 \sum_{\omega_{x'} \neq \omega_x} \frac{\|H^{x'} u_{x,m}\|^2}{\omega_{x'}^2 - \omega_x^2} + 4\delta\omega_{x,m} (i\delta B u_{x,m} | u_{x,m}) + \\ + ((\delta_2 A + 2\omega_x i\delta_2 B) u_{x,m} | u_{x,m}) . \quad (6)$$

puis en vertu de (4a) à :

$$\frac{1}{2} \delta_2(\omega^2_{x,m}) = - \sum_{\omega_{x'} \neq \omega_x} \frac{\|H^{x'} u_{x,m}\|^2}{(\omega^2_{x'} - \omega^2_x) \|u_{x,m}\|^2} + \frac{1}{\omega_x} \frac{(i\delta B u_{x,m} | u_{x,m})}{\|u_{x,m}\|^2} \frac{(H^x u_{x,m} | u_{x,m})}{\|u_{x,m}\|^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{((\delta_2 A + 2\omega_x i\delta_2 B) u_{x,m} | u_{x,m})}{\|u_{x,m}\|^2},$$

$$\delta\omega^2_{x,m} = \delta_1\omega^2_{x,m} + \frac{1}{2} \delta_2\omega^2_{x,m}$$

$$= \frac{(H^x u_{x,m} | u_{x,m})}{\|u_{x,m}\|^2} \left(1 + \frac{1}{\omega_x} \frac{(i\delta B u_{x,m} | u_{x,m})}{\|u_{x,m}\|^2} \right) - \sum_{\omega_{x'} \neq \omega_x} \frac{\|H^{x'} u_{x,m}\|^2}{(\omega^2_{x'} - \omega^2_x) \|u_{x,m}\|^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{((\delta_2 A + 2\omega_x i\delta_2 B) u_{x,m} | u_{x,m})}{\|u_{x,m}\|^2}. \tag{7}$$

On remarque l'effet de résonance en $(\omega^2_{x'} - \omega^2_x)$ bien classique pour une théorie du deuxième ordre. Cet effet peut être exagéré dans le cas de deux fréquences très proches ; la formule est alors inutilisable. Il se peut aussi que dans le cas d'un noyau non isentropique on doive remplacer la somme sur les modes du noyau par l'intégrale spectrale (voir la proposition 16 du chapitre II) :

$$\int_{\lambda \in \sigma_e(A)} \frac{(dE_\lambda (1 - P_x) H u_{x,m} | (1 - P_x) H u_{x,m})}{\lambda - \omega_x^2}.$$

Dans le cas où $\delta B = \delta_2 B = \delta_2 A = 0$, on obtient la translation moyenne du carré de la fréquence :

$$\delta\omega^2_x = \frac{1}{2\ell + 1} \left(\text{tr}(H^x) - \sum_{\omega_{x'} \neq \omega_x} \frac{\text{tr}(H^{x'} H^x)}{\omega^2_{x'} - \omega^2_x} \right).$$

Dahlen (1969), Luh (1973, 1974), Woodhouse (1980), remarquant les grands couplages intervenant entre modes voisins, ont proposé la "quasi-degeneracy theory" qui consiste simplement à supposer que les fréquences ω_x pour $x \in K$ sont identiques, en désignant par K l'ensemble des multiplets interférants. On obtient dans ce cas au deuxième ordre, en désignant par $|K|$ le cardinal de K :

$$|K| \delta\omega_K^2 = \frac{1}{2\ell + 1} \left(\sum_{x \in K} \text{tr}(H^x) - \sum_{x' \notin K} \frac{\text{tr}(H^{x'} H^{x'})}{\omega_{x'}^2 - \omega_x^2} \right).$$

puisque le dernier terme est antisymétrique en x, x' .

Dans le cas où l'on s'intéresse seulement au terme de rotation, on tire de (7) :

$$\delta\omega_{x,m}^2 = \frac{(H^x u_{x,m} | u_{x,m})}{\|u_{x,m}\|^2} + 2 \frac{(i\delta B u_{x,m} | u_{x,m})^2}{\|u_{x,m}\|^4} - \sum_{\omega_{x'} \neq \omega_x} \frac{\|H^{x'} u_{x,m}\|^2}{(\omega_{x'}^2 - \omega_x^2) \|u_{x,m}\|^2},$$

ou bien encore au deuxième ordre, d'après (4a) et (6) :

$$\delta\omega_{x,m} = \frac{(i\delta B u_{x,m} | u_{x,m})}{\|u_{x,m}\|^2} + \frac{1}{2\omega_x} \left\{ \frac{(i\delta B u_{x,m} | u_{x,m})^2}{\|u_{x,m}\|^2} - \sum_{x': \omega_{x'} \neq \omega_x} \frac{\|H^{x'} u_{x,m}\|^2}{(\omega_{x'}^2 - \omega_x^2) \|u_{x,m}\|^2} \right\}. \quad (8)$$

Ce qui correspond au résultat de Dahlen & Sailor (1979).

2. Perturbations de configuration. Equations de Clairaut, cas orthotrope.

Commençons par traiter le cas isotrope. On considère une configuration sphérique en équilibre hydrostatique. L'équation d'équilibre est donc :

$$\text{grad } p = \rho g', \quad g' = g_0, \quad (9)$$

où p est le champ de pression et g_0 celui de gravité en l'absence de rotation. On considère une évolution virtuelle :

$$t \rightarrow x(t), \quad \xi = \frac{dx}{dt}(t)$$

telle que :

$$\begin{aligned} \delta_1 \rho &= 0 , \\ \delta_1 \mathbf{g} &= \Omega^2 \mathbf{x} - \Omega \cdot \mathbf{x} \, \Omega + \text{grad} \delta_e \phi + D\mathbf{g}_0(\xi) , \end{aligned} \tag{10}$$

avec :

$$\Delta \phi = - 4\pi G \rho$$

et donc :

$$\Delta \delta_e \phi = 4\pi G \, \xi \cdot \text{grad} \rho . \tag{11}$$

On suppose de plus que la transformation préserve le rayon moyen de chaque surface d'équidensité.

Pour préciser les conditions aux limites de (11) perturbons la formulation faible :

$$\langle \Delta \phi | \psi \rangle = - \langle 4\pi G \rho | \psi \rangle \quad \forall \psi \in D(\mathbb{R}^3).$$

Cela conduit à :

$$\langle \Delta \delta_e \phi | \psi \rangle = 4\pi G \langle \text{grad} \rho \cdot \xi | \psi \rangle .$$

Or :

$$\langle \Delta \delta_e \phi | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_\rho} \psi \Delta \delta_e \phi \, dV + \int_{\Sigma_\rho} [\psi \, \text{grad} \delta_e \phi \cdot \mathbf{n}] \, d\Sigma$$

et :

$$4\pi G \langle \text{grad} \rho \cdot \xi | \psi \rangle = 4\pi G \int_{V \setminus \Sigma_\rho} \text{grad} \rho \cdot \xi \, \psi \, dV + 4\pi G \int_{\Sigma_\rho} [\rho] \psi \xi \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma .$$

On en déduit donc que :

$$[\text{grad} \delta_e \phi - 4\pi G \rho \xi] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_\rho . \tag{12}$$

En somme la configuration de référence est statique et sphérique et la perturbation virtuelle correspond à la prise en compte de la force centrifuge sans changement de la valeur de la masse

volumique ni du rayon moyen. Il est important de remarquer que cela permet de décrire au premier ordre toute configuration proche de la configuration sphérique. Il suffit pour cela de ramener les surfaces d'équidensité à la sphère de même rayon moyen.

La dérivation virtuelle de l'expression (9) conduit, compte tenu de (10), (11), (12) et de la proposition 1 du chapitre I à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \text{grad}(\delta_1 p) &= \text{grad}(\xi \cdot g_0 + \delta_e \phi) + \Omega^2 x - \Omega \cdot x \Omega & \text{a) } \\ \Delta(\delta_e \phi) &= 4\pi G \text{grad} \rho \cdot \xi & \text{b) } \\ [\text{grad} \delta_e \phi - 4\pi G \rho \xi] \cdot n &= 0 & \text{c) } \end{aligned} \quad (13)$$

On suppose, comme c'est loisible, que :

$$\xi = h e_r .$$

Il en résulte que $\delta_1 p$ est une fonction de $r = |x|$ seulement. De plus :

$$|\Omega|^2 x - \Omega \cdot x \Omega = \frac{2}{3} |\Omega|^2 x - \text{grad} \left[\frac{|\Omega|^2 |x|^2}{3} P_2^0(\cos \theta) \right] . \quad (14)$$

Reportant cette expression dans (13a), il en découle que :

$$\text{grad} \left\{ \xi \cdot g_0 + \delta_e \phi - \frac{|\Omega|^2 |x|^2}{3} P_2^0(\cos \theta) \right\} + \left\{ \frac{2|\Omega|^2}{3} - \frac{1}{\rho |x|} \frac{d}{dr}(\delta_1 p) \right\} x = 0 .$$

On choisit :

$$\delta_1 p = \frac{2}{3} |\Omega|^2 \int_b^r \rho(s) s ds ,$$

où b désigne le rayon de la configuration de référence, de manière à éliminer le deuxième terme et donc le terme d'ordre 0 dans le développement en harmonique sphérique de h . On en déduit que :

$$\begin{aligned} \xi \cdot g_0 + \delta_e \phi - \frac{|\Omega|^2 |x|^2}{3} P_2^0(\cos\theta) &= c^{te} = 0 & a \} \\ \delta_1 g' &= \frac{1}{\rho} \text{grad } \delta_1 p - D\xi^*(g_0) = \frac{2(|\Omega|^2 |x|)}{3} - D\xi^*(g_0) & b \} (15) \\ \delta_e \phi &= -G \int_V \frac{\text{grad} \rho' \cdot \xi'}{|x-x'|} dx' - G \int_{\Sigma_\rho} \frac{[\rho'] \xi' \cdot n'}{|x-x'|} d\Sigma' & c \} \end{aligned}$$

(On montre que la constante intervenant dans (14a) est nulle en remarquant que $\delta_e \phi(0) = 0$, $g_0(0) = 0$ et $\xi(0) = 0$.)

Reprenant le système (13) nous sommes ainsi conduit à :

$$\begin{aligned} \Delta \delta_e \phi &= 4\pi G \text{grad} \rho \cdot \xi & a \} \\ [\text{grad}(\delta_e \phi) - 4\pi G \rho \xi] \cdot n &= 0, & b \} (16) \\ \delta_e \phi &= -hg_0 + \frac{|\Omega|^2 |x|^2}{3} P_2^0(\cos\theta) & c \} \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \Delta(h \cdot g) &= -4\pi G \text{grad} \rho \cdot \xi & a \} \\ \delta_e \phi &= -hg_0 + \frac{|\Omega|^2 |x|^2}{3} P_2^0(\cos\theta) & b \} (17) \\ [\text{grad}(\delta_e \phi) - 4\pi G \rho \xi] \cdot n &= 0 & c \} \end{aligned}$$

Il résulte de (14c) que :

$$h(x) = \frac{|\Omega|^2 |x|^2}{3g} P_2^0(\cos\theta) + \frac{G}{g} \int_V \frac{\xi' \cdot \text{grad} \rho'}{|x-x'|} dV' + \frac{G}{g} \int_{\Sigma} \frac{[\rho'] \xi' \cdot n}{|x-x'|} d\Sigma'$$

et donc que :

$$h(b) = \frac{|\Omega|^2 b^2}{3g} P_2^0(\cos\theta) - \frac{G}{g_0} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{P_\ell^0}{b^{\ell+1}} \int_0^b \rho d(h_\ell r^{\ell+2}). \tag{18}$$

Ce qui conduit au signe près à l'équation (21) page 197 du livre de Jeffreys en posant : $\epsilon = 3h/2r$. La différence de signe est purement conventionnelle, Jeffreys n'ayant pas utilisé les polynomes de Lagrange classiques. On en conclut, suivant Jeffreys, que le développement en harmoniques sphériques de h ne contient qu'un terme d'ordre 2. On pose donc :

$$h = h_2(r) P_2^0(\cos\theta) .$$

Le développement de (17a) conduit alors, compte tenu de :

$$\dot{g}_0 = -\frac{2g_0}{r} - 4\pi G\rho \quad (19a)$$

$$\dot{g}'_0 = -4\pi G\rho + \frac{6g_0}{r^2} + \frac{8\pi G\rho}{r} \quad (19b)$$

à l'équation de Clairaut :

$$\ddot{h}_2 - \frac{2\dot{h}_2}{r} \left(1 + \frac{4\pi G\rho r}{g_0}\right) - 4 \frac{h_2}{r^2} = 0 , \quad (20a)$$

c'est à dire à :

$$\ddot{\epsilon}_2 + 6 \frac{\dot{\epsilon}_2}{r} \frac{\rho}{\rho_0} + 6 \frac{\epsilon_2}{r^2} \left[\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right] = 0 , \quad (20b)$$

en posant :

$$\rho_0 = -\frac{3}{4} \frac{g_0}{\pi r G} ,$$

et en notant par un point la dérivation radiale.

Puisque :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\rho}{\rho_0} = 1 ,$$

on déduit aisément que :

$$\epsilon(0) = \text{cte} , h(0) = 0 .$$

Par ailleurs l'équation (17b,c) fournit la condition de transmission à chaque discontinuité de ρ :

$$[\dot{h}_2] = 0$$

On obtient notamment à la surface libre $r = b$:

$$(\delta_e \phi_2)'(b) - 4\pi G \rho h_2(b) + \frac{3}{b} \delta_e \phi_2(b) = 0 ,$$

puisque $\delta_e \phi$ est harmonique à l'extérieur de la configuration. On en conclut, grâce à (17b) que :

$$\dot{h}_2(b) + \frac{h_2(b)}{b} = \frac{5}{3} \frac{|\Omega|^2 b}{g_0(b)} = - \frac{5}{3} \frac{|\Omega|^2 b^3}{GM} \tag{21a}$$

et que :

$$b\dot{\epsilon}_2(b) + 2\epsilon_2(b) = \frac{5}{2} \frac{|\Omega|^2 b}{g_0(b)} = - \frac{5}{2} \frac{|\Omega|^2 b^3}{GM} . \tag{21b}$$

Considérons maintenant le cas orthotrope. L'équation d'équilibre prend la forme :

$$D_i(\sigma^{ij}) + \rho g'^j = 0 , \quad g' = g_0 ,$$

ce qui conduit par perturbation virtuelle grâce à la proposition 1 du chapitre 1 et en remarquant que la contraction est intrinsèque, à :

$$\begin{array}{l} D_i(\delta_1 \sigma^{ij}) - D_p \sigma^{ij} D_i \xi^p + \rho \delta_1 g'^j = 0 \qquad \text{a } \} \\ \delta_1 g'^j = \text{grad}(\delta_e \phi) + D g_0(\xi) + |\Omega|^2 x - \Omega . x \Omega \qquad \text{b } \} \text{ (22)} \\ \Delta(\delta_e \phi) = 4\pi G \text{grad} \rho . \xi \quad [\text{grad} \delta_e \phi - 4\pi G \rho \xi] . n = 0 \qquad \text{c } \} \end{array}$$

On suppose comme précédemment que $\delta_1 \rho = 0$, que la contrainte reste orthotrope avec la normale à la surface d'équidensité comme axe d'orthotropie. Soit :

$$P = I + Q$$

la matrice de passage de la base locale sphérique à une nouvelle base tangente à la nouvelle configuration et de même norme. On obtient au 1er ordre en $D\xi$:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & g^{11}D_2\xi_1 & g^{11}D_2\xi_1 \\ -g^{22}D_2\xi_1 & 0 & 0 \\ -g^{33}D_3\xi_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23a)$$

En effet, l'expression 2.12b du chapitre I montre que :

$$\delta_1 e_1 = -D\xi^*(e_1) + D_1\xi^1 e_1 .$$

Par ailleurs, puisque l'on passe d'une base orthogonale à une autre de même norme :

$$(I + Q)^{-1} = (I + Q)^*$$

et :

$$(I + Q)^{-1} \simeq I - Q .$$

De sorte que, au premier ordre :

$$Q^* = -Q .$$

Ainsi :

$$g_{ii}Q^i_j g^{jj} = -Q^j_i .$$

On en déduit finalement que :

$$\forall i, Q^i_i = 0 ,$$

$$Q^\alpha_1 = -g^{\alpha\alpha}D_\alpha\xi_1, \quad Q^1_\alpha = g^{11}D_\alpha\xi_1 .$$

La valeur du coefficient $Q^3_2 = -Q^2_3$ est libre et correspond à la possibilité de rotation autour de la nouvelle normale. Cela est d'ailleurs indifférent dans le cadre de l'orthotropie. On adopte la valeur 0, et un déplacement virtuel ξ purement radial :

$$\xi = \xi_1 e_1 = h e_1 .$$

Ainsi :

$$D_1 \xi^1 = \dot{h} , D_1 \xi_\alpha = 0 , D_\alpha \xi^1 = \nabla_\alpha h , D_\alpha \xi^\alpha = h/r . \quad (23b)$$

de sorte que :

$$Q^i_j = \begin{bmatrix} 0 & \nabla_2 h & \nabla_3 h \\ -\nabla^2 h & 0 & 0 \\ -\nabla^3 h & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (23c)$$

On obtient alors :

$$(\delta_1 \sigma)^{ij} = \delta_1 \sigma_N g^{ij} + \delta_1 (\sigma_T - \sigma_N) g^i_\alpha g^j_\beta + Q^i_m \sigma^{mj} + Q^j_m \sigma^{im}$$

et donc :

$$(\delta_1 \sigma)^{11} = \delta_1 \sigma_N , \delta_1 \sigma^{1\alpha} = \delta_1 \sigma^{\alpha 1} = (\sigma_T - \sigma_N) (\text{grad}_T h)^\alpha , (\delta_1 \sigma)^{\alpha\beta} = \delta_1 \sigma_T g^{\alpha\beta} . \quad (24)$$

On note :

$$y = \sigma_T - \sigma_N ,$$

et l'on suppose que $\delta_1 \sigma_N$ n'est fonction que de r . Cela revient à supposer que σ_N reste constant sur les surfaces d'équidensité et peut être rattaché à une hypothèse d'isostasie.

Calculons $D_1(\delta_1 \sigma^{ij})$:

$$\begin{aligned} * D_1(\delta_1 \sigma^{i1}) &= D(\delta_1 \sigma^{11}) + D_\alpha(\delta_1 \sigma^{\alpha 1}) \\ &= \partial_1(\partial \sigma_N) + \nabla_\alpha(\delta \sigma^{\alpha 1} + \Gamma_{\alpha 1}^\alpha \delta_1 \sigma_N + \Gamma_{\alpha\alpha}^1 \delta_1 \sigma^{\alpha\alpha}) \\ &= \partial_1(\delta_1 \sigma_N) + y \Delta_T h - \frac{2}{r} \delta_1 y . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * D_i(\delta_1 \sigma^{i\beta}) &= D_i \delta \sigma^{i\beta} + D_\alpha(\delta \sigma^{\alpha\beta}) \\
 &= D_1(y g^{\alpha\beta} D_\alpha h) + \nabla_\alpha(\delta_1 \sigma^{\alpha\beta}) + 3y/r g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha h \\
 &= \text{grad}_T(\partial_1(yh) + 2yh/r + \delta_1 y)^\beta .
 \end{aligned}$$

Calculons maintenant $D_p \sigma^{ij} D_i \xi^p$:

$$\begin{aligned}
 * D_p \sigma^{i1} D_i \xi^p &= D_1 \sigma^{11} D_1 \xi^1 + D_\alpha \sigma^{\beta 1} D_\beta \xi^\alpha \\
 &= -(\rho g_0 - 2y/r) \partial_1 h + (\Gamma_{\alpha 1}^\alpha \sigma_N + \Gamma_{\alpha\alpha}^1 \sigma_T g^{\alpha\alpha}) h/r \\
 &= (2y/r - \rho g_0) \partial_1 h - 2yh/r^2 ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * D_p \sigma^{i\beta} D_i \xi^p &= D_1 \sigma^{\alpha\beta} D_\alpha \xi^1 \\
 &= \partial_1 \sigma_T g^{\beta\alpha} \nabla_\alpha h \\
 &= \partial_1 \sigma_T (\text{grad}_T h)^\beta
 \end{aligned}$$

L'équation (22a) prend alors la forme :

$$\begin{aligned}
 \text{grad} \left\{ \delta_e \phi + g_0 h - \frac{|\Omega|^2 r}{3} P_2^0(\cos\theta) \right\} + \\
 + (\gamma(\Delta_T h - 2\dot{h}/r + 2h/r^2) - 2\delta_1 \gamma/r) e_r + \text{grad}_T z = 0 ,
 \end{aligned} \tag{25}$$

avec :

$$\gamma = \frac{y}{\rho} = \frac{\sigma_T - \sigma_N}{\rho} \tag{26}$$

$$z = \gamma \dot{h} + \delta_1 \gamma = \frac{\sigma_T - \sigma_N}{\rho} \dot{h} + \frac{\delta_1(\sigma_T - \sigma_N)}{\rho} . \tag{27}$$

et en supposant que :

$$(\delta_1 \gamma)_0 = 0 \quad \text{et} \quad \delta_1 \sigma_N = \frac{2}{3} |\Omega|^2 \int_r^b \rho(s) s ds .$$

Du fait que d'après (22b) et (14) :

$$\delta_1 g' = \text{grad} \left\{ \delta_e \phi + gh + \frac{|\Omega|^2 r^2}{3} (1 - P_2^0(\cos\theta)) \right\} - D\xi^*(g_0)$$

on déduit de (25) que :

$$\delta_1 g' = \frac{2|\Omega|^2 r}{3} - D\xi^*(g_0) - \{\gamma(\Delta_T h + 2h/r^2) - 2z/r\}e_r + \text{grad}_T z \tag{28}$$

Il découle également de (25) que :

$$\delta_e \phi + g_0 h - \frac{|\Omega|^2 r^2}{3} P_2^0(\cos\theta) + z = f(r) = 0$$

(pour $\ell = 0$, $\delta_e \phi_\ell(0) = 0$, $h_\ell(0) = 0$ et $z_\ell(0) = 0$),

puis que :

$$z = \frac{|\Omega|^2 r^2}{3} P_2^0(\cos\theta) - \delta_e \phi - g_0 h \tag{a)}$$

$$\dot{z} = -\frac{2}{r} z + \gamma \left[\Delta_T h + \frac{2h}{r^2} \right] \tag{b)}$$

$$\Delta(g_0 h + z) = -4\pi g_0 \rho h \tag{c)}$$

Cela nous conduit finalement, grâce à (19), (27) et (22c) à :

$$\dot{h}_2 - \frac{2\dot{h}_2}{r} \left\{ 1 + \frac{4\pi G \rho r}{g_0} + \frac{2\gamma}{r g_0} \right\} - \frac{4h_2}{r^2} \left[1 + \frac{\dot{r}}{g_0} - \frac{2\gamma}{g_0 r} \right] = \frac{4}{g_0 r^2} z_2 \tag{a)}$$

$$\delta_1 y_2 = \rho z_2 - y \dot{h}_2 \quad , \quad z_2 = -\frac{4}{r^2} \int_0^r \gamma h_2(s) ds \tag{b)}$$

$$\delta_e \phi_2 = -g_0 h_2 + \frac{|\Omega|^2 r^2}{3} - z_2 \quad , \quad [(\delta_e \phi_2)' - 4\pi G \rho h_2] = 0 \tag{c)}$$

L'expression (28) de $\delta_1 g'$ prend donc la forme :

$$\delta_1 g' = 2 \frac{|\Omega|^2 r}{3} - D\xi^*(g_0) + \frac{4}{r^2} (\gamma h_2 + \frac{2}{r} \int_0^r \gamma h_2(s) ds) e_r - \frac{4}{r^2} \int_0^r \gamma h_2(s) \text{grad}_T P_2^0(\cos\theta) ds \quad (31)$$

Evaluons l'ordre de grandeur des différents termes :

$$\int_0^r \gamma h_2(s) ds \simeq \gamma \bar{h}_2 d,$$

en désignant par d l'épaisseur de la couche où apparaît un déviateur de contrainte, γ et \bar{h}_2 les valeurs moyennes de γ et de h_2 dans cette zone que l'on suppose située près de la surface extérieure. $\delta_1 g'$ est donc de l'ordre de :

$$\delta_1 g' \simeq \left[\frac{2}{3} |\Omega|^2 + 4 \frac{\gamma \bar{h}_2}{r^3} \right] r - D\xi^*(g_0) .$$

Si l'on estime à 10 kbars (10⁹S.I.) la valeur maximale pouvant être atteinte par y , on est conduit à une estimation pour $4 \frac{\gamma \bar{h}_2}{r^3}$ de l'ordre de 10⁻¹⁰ (S.I.). Ce qui peut être négligé devant $\frac{2}{3} |\Omega|^2$ qui est de l'ordre de 3.10⁻⁹ (S.I.).

Ainsi, en pratique :

$$\delta_1 g' \simeq \frac{2}{3} |\Omega|^2 r - D\xi^*(g_0) , \quad (32)$$

comme dans le cas hydrostatique.

L'expression (30b) montre que $\delta_1 y$ dépend de la latitude. En fait $\delta_1 y_2$ est négligeable. En effet :

$$\left| \frac{\delta_1 y_2}{y} \right| \simeq \left| 4 \frac{d}{r} \frac{\bar{h}_2}{r} - \bar{h}_2 \right|$$

est de l'ordre de quelques 10⁻³. Ainsi σ_T reste constant au deuxième ordre sur les surfaces

d'égale densité de la configuration finale.

Par ailleurs le système (30) est peu adapté à une intégration numérique. Introduisons :

$$\alpha = \frac{\gamma}{rg_0} = \frac{\sigma_T - \sigma_N}{\rho r g_0} \quad (33a)$$

$$\beta = \frac{4\pi G \rho r}{g_0} \quad (\beta(0) = -3) \quad (33b)$$

$$u = \frac{z_2}{g_0} \quad (33c)$$

$$v = r\dot{h}_2 - 4\alpha h_2 . \quad (33d)$$

On déduit de (30a,b) que :

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= \beta \frac{u}{r} - 4\alpha \frac{h_2}{r} \\ \dot{h}_2 &= + 4\alpha \frac{h_2}{r} + \frac{v}{r} \\ \dot{v} &= 4 \frac{u}{r} + 4(1+\alpha\beta) \frac{h_2}{r} + (3+2\beta) \frac{v}{r} \end{aligned} \right\} (34)$$

h_2 est continu par hypothèse, u l'est d'après (30b) et (32c). Quant à v cela résulte de (30c). En effet d'après (30c) :

$$[-\dot{g}_0 h_2 - g_0 \dot{h}_2 - \dot{z}_2 - 4\pi G \rho h_2] = 0$$

Ce qui conduit d'après (19a, 33c et 34) à :

$$[-g_0 \dot{h}_2 + 4\alpha g_0 h_2 / r] = 0 ,$$

et donc, d'après (33d) à :

$$[v] = 0 .$$

A la frontière libre $r = b$, on a d'après (30c) :

$$\delta_e \dot{\phi}_2(b) - 4\pi G \rho h_2(b) + \frac{3}{b} \delta_e \phi_2(b) = 0 ,$$

et donc :

$$-\dot{h}_2(b) - \dot{u} - \frac{h_2(b)}{b} + (3\beta-1) \frac{u(b)}{b} - \frac{v(b)}{b} + 5 \frac{|\Omega|^2 b}{3g_0} = 0 .$$

c'est à dire :

$$(8\alpha-1) \frac{h_2(b)}{b} + (3\beta-1) \frac{u(b)}{b} - \frac{v(b)}{b} + 5 \frac{|\Omega|^2 b}{3g_0} = 0 . \quad (35)$$

Dans le noyau :

$$\alpha = 0 \text{ et } u = 0 .$$

Le système (34) se réduit à :

$$\dot{h}_2 = \frac{v}{r}$$

$$\dot{v} = \frac{4h_2}{r} + (3+2\beta) \frac{v}{r} .$$

Puise $\beta(0) = -3$, on en déduit que :

$$\dot{h}_2(0) = \dot{v}(0) .$$

L'expérience prouve (cf. Nagiboglu 1979, 1982) que le bon ordre de perturbation dans le cas de la Terre est le deuxième ordre. Notons qu'il est impossible de concilier dans le cadre purement hydrostatique les différents observables astronomiques J_2 et J_4 avec les modèles de densité usuels. Il nous faut donc considérer les perturbations du deuxième ordre. Commençons par le cas hydrostatique.

On pose :

$$\eta = \delta_1 \xi$$

et l'on suppose que :

$$\delta_{21} \rho = 0 .$$

On obtient par perturbation de (10) :

$$\delta_{21} g = 2|\Omega|^2 \xi - 2\Omega \cdot \xi \Omega + \text{grad } \delta_{2e} \psi + 2H(\delta_e \phi) \xi + D^2 g(\xi, \xi) + Dg(\eta) . \quad (36)$$

Précisons l'équation vérifiée par $\delta_{2e} \phi$. Pour ce faire perturbons au deuxième ordre la formulation faible :

$$\langle \Delta \phi | \psi \rangle = \langle 4\pi G \rho | \psi \rangle \quad \forall \psi \in D(\mathbb{R}^3) .$$

Cela conduit à :

$$\langle \delta_{2e} \phi | \psi \rangle = 4\pi G \langle (\eta - D\xi(\xi)) \cdot \text{grad } \rho - \xi \cdot \text{grad}(\xi \cdot \text{grad } \rho) | \psi \rangle .$$

Or :

$$\langle \Delta \delta_{2e} \phi | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_\rho} \psi \Delta \delta_{2e} \phi \, dV + \int_{\Sigma_\rho} [\psi \text{ grad } \delta_{21} \phi \cdot n] - [\delta_{2e} \phi \text{ grad } \psi \cdot n] \, d\Sigma ,$$

$$\langle \eta \cdot \text{grad } \rho | \psi \rangle = \int_{V \setminus \Sigma_\rho} \psi \eta \cdot \text{grad } \rho \, dV + \int_{\Sigma_\rho} [\rho] \psi \eta \cdot n \, d\Sigma$$

$$\langle D\xi(\xi) \cdot \text{grad } \rho | \psi \rangle = \int_{V \setminus \Sigma_\rho} \psi \text{ grad } \rho \cdot D\xi(\xi) \, dV + \int_{\Sigma_\rho} [\rho \psi \, D\xi(\xi) \cdot n] \, d\Sigma$$

et :

$$\langle \xi \cdot \text{grad}(\text{grad } \rho \cdot \xi) | \psi \rangle = \int_{V \setminus \Sigma_\rho} \xi \cdot \text{grad}(\text{grad } \rho \cdot \xi) \psi \, dV + \int_{\Sigma_\rho} [\psi \xi \cdot n \text{ grad } \rho \cdot \xi] - [\rho \text{ div}(\psi \xi) \xi \cdot n] \, d\Sigma .$$

Si bien que :

$$\begin{aligned}
\Delta\delta_{2e}\phi &= 4\pi G \{ \eta.\text{grad}\rho - 2D\xi(\xi).\text{grad}\rho - H(\rho)(\xi,\xi) \} && \text{dans } V \setminus \Sigma_\rho \text{ } \\
\Delta\delta_{2e}\phi &= 0 && \text{dans } \mathbf{R}^3 \setminus V \text{ } \\
[n.\text{grad}\delta_{2e}\phi] &= 4\pi G [\rho\eta - \rho D\xi(\xi) + \rho\xi\text{div}\xi - (\xi.\text{grad}\rho)\xi].n , [\delta_{2e}\phi] = -4\pi G[\rho] (\xi.n)^2 \text{ sur } \Sigma_\rho \text{ }
\end{aligned} \quad (37)$$

Par ailleurs la perturbation au deuxième ordre de (a) conduit, compte tenu de la proposition 2 (7) du chapitre I et de (36) à :

$$\begin{aligned}
\text{grad}(\delta_{21}p) - 2D\xi^*\text{grad}(\delta_1p) + 2D\xi^*D\xi^*(\rho g_0) - D\eta^*(\rho g_0) = \\
\rho \{ \text{grad}(\delta_{2e}\phi) + D^2g_0(\xi,\xi) + 2H(\delta_e\phi)\xi + Dg_0\eta + 2|\Omega|^2\xi - 2\Omega.\xi\Omega \} .
\end{aligned}$$

Tenant compte de :

$$\text{grad}(Dg_0(\xi).\xi) = 2(D\xi)^*Dg_0(\xi) + D^2g_0(\xi,\xi) ,$$

on obtient finalement :

$$\frac{1}{\rho} \text{grad}(\delta_{21}p) = \text{grad} \left\{ \delta_{2e}\phi + g_0.\eta - Dg_0\xi.\xi - 2g_0D\xi(\xi) + \frac{4}{3}|\Omega|^2r.\xi \right\} ,$$

c'est à dire :

$$\frac{1}{\rho} \text{grad}(\delta_{21}p) = \text{grad} \left\{ \delta_{2e}\phi + g_0f - (g_0h^2)' + \frac{4}{3}|\Omega|^2rh \right\} , \quad (38)$$

en désignant par un point la dérivation radiale et en posant :

$$\eta = f e_1 \text{ avec } f = \sum_{\ell} f_{\ell}(r) P_{\ell}^0(\cos\theta) .$$

Puisque :

$$h = h_2(r) P_2^0(\cos\theta) , \quad \delta_{21}p = (\delta_{21}p)_0(r) , \quad (\delta_{2e}\phi)_0 = 0 ,$$

et que :

$$(P_2^0)^2 = \frac{18}{35} P_4^0 + \frac{2}{7} P_2^0 + \frac{1}{5} P_0 ,$$

il en découle que :

$$\{g f_0 - \frac{1}{5}(g_0 h_2^2)\}' = \frac{1}{\rho}(\delta_{21}P)' \quad a \}$$

$$(\delta_{2e}\phi)_2 + g_0 f_2 - \frac{2}{7}(g_0 h_2^2)' + \frac{4}{3}|\Omega|^2 r h_2 = 0 \quad b \} (39)$$

$$(\delta_{2e}\phi)_4 + g_0 f_4 - \frac{18}{35}(g_0 h_2^2)' = 0 \quad c \}$$

On impose de plus :

$$f_0 = 0 ,$$

de manière à conserver le rayon moyen.

Utilisant (37a) qui prend la forme :

$$\Delta(\delta_{2e}\phi) + 4\pi G \{(\dot{\rho} h^2)' - \dot{\rho} \eta\} = 0$$

et que :

$$\{\Delta(f(r)P_l^0)\}' = \Delta(f(r)P_l^0)' + \frac{2\ell(\ell+1)}{r^3} f - \frac{2}{r^2} \dot{f} ,$$

il suit :

$$\dot{f}_2 - 2(1 + \frac{4\pi G \rho r}{g_0}) \frac{\dot{f}_2}{r} - \frac{4}{r^2} f_2 = \quad (40a)$$

$$2 \frac{2}{7} \{ \frac{2}{r} \dot{h}_2^2 - \frac{16}{r^3} h_2^2 + \frac{14}{r^2} h_2 \dot{h}_2 + \frac{4\pi G \rho}{g_0} (3\dot{h}_2^2 - \frac{3}{r^2} h_2^2) \} - \frac{8}{3} |\Omega|^2 (3 + \frac{4\pi G \rho r}{g_0}) \dot{h}_2 .$$

$$\dot{f}_4 - 2(1 + \frac{4\pi G \rho r}{g_0}) \frac{\dot{f}_4}{r} - \frac{18}{r^2} f_4 = 2 \frac{18}{35} (2 \frac{\dot{h}_2^2}{r} - 2 \frac{h_2^2}{r^3} + \frac{4\pi G \rho}{g_0} (3\dot{h}_2^2 + \frac{4}{r^2} h_2^2)) \quad (40b)$$

Quant aux conditions aux limites, on tire sans trop de peine de (37a) que :

$$[f_2] = [f_4] = 0 , \quad (41a)$$

$$[\dot{f}_2] = [\dot{f}_4] = 0 . \quad (41b)$$

Il est clair qu'au centre :

$$f_2(0) = 0 , f_4(0) = 0 . \quad (42)$$

A la surface libre $r = b$, on utilise (cf 37c) que :

$$\delta_e \phi(b) - \delta_e \phi_{\text{ext}}(b) = 4\pi G \rho h^2(b) ,$$

et que (cf. 39) :

$$(\delta_{2e} \phi)'_2 = \frac{2g_0}{b} f_2 + 4\pi G \rho f_2 - g_0 \dot{f}_2 + \frac{2}{7} (g_0 h_2^2)'' - \frac{4}{3} |\Omega|^2 (h_2 + b \dot{h}_2) ,$$

$$(\delta_{2e} \phi)'_4 = \frac{2g_0}{b} f_4 + 4\pi G \rho f_4 - g_0 \dot{f}_4 + \frac{18}{35} (g_0 h_2^2)'' ,$$

Cela conduit grâce à 20a et 21a à :

$$\dot{f}_2 + \frac{f_2}{b} = \frac{2}{7} \left(8 \left(\frac{h_2}{b} \right)^2 + 2 \frac{h_2}{b} \dot{h}_2 + 2 \dot{h}_2^2 \right) + \frac{4}{3} \frac{|\Omega|^2}{g_0} (4h_2 + b \dot{h}_2) , \quad (43a)$$

$$\dot{f}_4 + \frac{3f_4}{b} = \frac{18}{35} \left(4 \left(\frac{h_2}{b} \right)^2 + 6 \frac{h_2}{b} \dot{h}_2 + 2 \dot{h}_2^2 \right) . \quad (43b)$$

Formules qui correspondent avec des notations différentes aux résultats obtenus par Lanzano (1974, 1982). On notera que la condition aux limites (43a) diffère, tout au moins de prime abord, de celle obtenue par Kopal (1960) et utilisée par Nakiboglu (1979,1982).

Considérons pour finir le cas orthotrope. La perturbation au deuxième ordre de la condition d'équilibre conduit, compte tenu des résultats de la proposition 2 du chapitre I, à :

$$D_1(\delta_{21} \sigma^{ij}) - 2D_k(\delta_1 \sigma^{ij}) D_1 \xi^k + 2D_k \sigma_0^{ij} D_1 \xi^k D_1 \xi^l - D_k \sigma_0^{ij} D_1 \eta^k + \rho \delta_{21} g'^j = 0 , \quad (44)$$

avec, rappelons le (23b, 24) :

$$\delta_1 \sigma^{11} = \delta_1 \sigma_N, \delta_1 \sigma^{1\alpha} = (\sigma_T - \sigma_N) \text{grad}_T h^\alpha, \delta_1 \sigma^{\alpha\beta} = \delta_1 \sigma_T g^{\alpha\beta}, \quad (45a)$$

$$D_1 \xi^1 = \dot{h}, D_1 \xi_\alpha = 0, D_\alpha \xi_1 = \nabla_\alpha h, D_\alpha \xi^\alpha = h/r, \quad (45b)$$

$$D_1 \eta^1 = \dot{f}, D_1 \eta_\alpha = 0, D_\alpha \eta_1 = \nabla_\alpha f, D_\alpha \eta^\alpha = f/r. \quad (45c)$$

Il faut maintenant calculer au deuxième ordre la matrice de passage du repère tangent à la sphère à celui de même norme tangent à la surface déformée :

$$P = I + Q_1 + \frac{1}{2} Q_2. \quad (46)$$

Puisque P est orthogonale, on en déduit que :

$$Q_2^* = -Q_2 + 2Q_1^2. \quad (47)$$

Par ailleurs, de (cf chapitre 1 paragraphe 2) :

$$\delta_1 e_1 = - (D\xi)^* e_1 + (D\xi e_1 \cdot e_1) e_1,$$

on déduit par perturbation que :

$$\delta_{21} e_1 = - (D\eta)^* e_1 + (D\xi)^* (D\xi)^* e_1 - 2D_1 \xi^1 (D\xi)^* e_1 + \\ + \{ D_1 \eta^1 - 2(D\xi \cdot D\xi e_1 \cdot e_1) - (D\xi \cdot (D\xi)^* e_1 \cdot e_1) + 3(D_1 \xi^1)^2 \} e_1.$$

De plus, puisque :

$$(D\xi)^i_j = \begin{bmatrix} \dot{h} & \nabla_2 h & \nabla_3 h \\ 0 & h/r & 0 \\ 0 & 0 & h/r \end{bmatrix},$$

On obtient :

$$\delta_{21} e_1 = \left[-\nabla^\alpha h \nabla_\alpha h, -\nabla^2 f + 2 \frac{h}{r} \nabla^2 h, -\nabla^3 f + 2 \frac{h}{r} \nabla^3 h \right].$$

Enfin, puisque d'après (23c) :

$$(Q_1)^2 = \begin{bmatrix} -\nabla_\alpha h \nabla^\alpha h & 0 & 0 \\ 0 & -\nabla^2 h \nabla_2 h & -\nabla^2 h \nabla_3 h \\ 0 & -\nabla^3 h \nabla_2 h & -\nabla^3 h \nabla_3 h \end{bmatrix}$$

il résulte de (47) que :

$$(Q_2)^2_2 = -\nabla^2 h \nabla_2 h ,$$

$$(Q_2)^3_3 = -\nabla^3 h \nabla_3 h ,$$

$$(Q_2)^1_\alpha = \nabla_\alpha f - 2h/r \nabla_\alpha h ,$$

$$(Q_2)^3_2 + (Q_2)^2_3 = -2\nabla^3 h \nabla_2 h ,$$

et par raison de symétrie :

$$(Q_2)^3_2 = -\nabla^2 h \nabla_2 h , \quad (Q_2)^2_3 = -\nabla^2 h \nabla_3 h ,$$

de sorte que :

$$Q_2^i_j = \begin{bmatrix} -\nabla_\alpha h \nabla^\alpha h & -\nabla_2 f - 2h \nabla_2 h / r & -\nabla_3 f - 2h \nabla_3 h / r \\ -\nabla^2 f + 2h \nabla^2 h / r & -\nabla^2 h \nabla_2 h & -\nabla^2 h \nabla_3 h \\ -\nabla^3 f + 2h \nabla^3 h / r & -\nabla^3 h \nabla_2 h & -\nabla^3 h \nabla_3 h \end{bmatrix} . \quad (48)$$

Puisque :

$$\delta_1 \sigma^{ij} = P^i_k (\sigma_0^{kl} + \delta_1 \sigma_N g^{kl} + (\delta_1 \sigma_T - \delta_1 \sigma_N) g^k_\alpha g^l_\alpha) P^j_l ,$$

on obtient pour le terme de deuxième ordre :

$$\delta_{21} \sigma^{ij} = \delta_{21} \sigma_N g^{ij} + (\delta_{21} \sigma_T - \delta_{21} \sigma_N) g^i_\alpha g^j_\alpha + 2Q_1^i_m \delta_{11} \sigma^{mj} + 2Q_1^j_m \delta_{11} \sigma^{mi} + \\ + Q_2^i_m \sigma_0^{mj} + Q_2^j_m \sigma_0^{mi} + 2Q_1^i_l Q_1^j_k \sigma_0^{lk} ,$$

et finalement, grâce à (23c) et à (48) :

$$(\delta_{21}\sigma_N)^{ij} = \begin{bmatrix} \delta_2 \sigma_T^1 + 2y |\text{grad } h|^2 & y \nabla^2 f + t \nabla^2 h & y \nabla^3 f + t \nabla^3 h \\ y \nabla^2 f + t \nabla^2 h & \delta_2 \sigma_T^{22} - 2y \nabla^2 h \nabla^2 h & -2y \nabla^2 h \nabla^3 h \\ y \nabla^3 f + t \nabla^3 h & -2y \nabla^3 h \nabla^2 h & \delta_2 \sigma_T^{33} - 2y \nabla^3 h \nabla^3 h \end{bmatrix}, \quad (50)$$

avec :

$$t = \rho z - y(\dot{h} + h/r).$$

Calculons maintenant les différents termes intervenant dans (44) :

$$D_i(\delta_{21}\sigma^{ij}),$$

$$\begin{aligned} * D_i(\delta_{21}\sigma^{i1}) &= D_1(\delta_{21}\sigma^{11}) + D_\alpha(\delta_{21}\sigma^{\alpha 1}) \\ &= (\delta_{21}\sigma_N)' - 2/r \delta_{21}y + 2\dot{y} |\text{grad}_T h|^2 + 2y \text{grad}_T h \cdot \text{grad}_T \dot{h} + \\ &\quad + y \Delta_T f + 2(\rho z - y(\dot{h} + h/r)) \Delta_T h + 2\rho \text{grad}_T h \cdot \text{grad}_T z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * D_i(\delta_{21}\sigma^{i\beta}) &= D_1(\delta_{21}\sigma^{1\beta}) + D_\alpha(\delta_{21}\sigma^{\alpha\beta}) \\ &= \text{grad}_T((y f)' + 2y f/r)^\beta + 2(\rho z - (\dot{h} + h/r)) \text{grad}_T(\dot{h} + 2h/r)^\beta + \\ &\quad + 2((\rho z - (\dot{h} + h/r))' - \sigma_T \Delta_T h) \text{grad}_T h^\beta + \text{grad}_T(\delta_{21}\sigma_T)^\beta - 2\sigma_T \nabla^\alpha h \nabla_\alpha \nabla^\beta h, \end{aligned}$$

$$D_k(\delta_{1}\sigma^{ij}) D_i \xi^k,$$

$$\begin{aligned} * D_k(\delta_{1}\sigma^{i1}) D_i \xi^k &= D_1(\delta_{1}\sigma^{11}) D_1 \xi^1 + D_k(\delta_{1}\sigma^{\alpha 1}) D_\alpha \xi^k \\ &= (\delta_1 \sigma_N)' \dot{h} + (\dot{y} - 2y/r) |\text{grad}_T h|^2 + y \text{grad}_T h \cdot \text{grad}_T \dot{h} + hy/r \Delta_T h + 2h/r^2 \delta_1 \sigma_N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * D_k(\delta_{1}\sigma^{i\beta}) D_i \xi^k &= D_1(\delta_{1}\sigma^{1\beta}) D_1 \xi^1 + D_k(\delta_{1}\sigma^{\alpha\beta}) D_\alpha \xi^k \\ &= \text{grad}_T((y h)' - 2yh/r)^\beta + (\delta_1 \sigma_T)' (\text{grad}_T h)^\beta + \\ &\quad + h/r (\text{grad}_T \delta_1 \sigma_T)^\beta + 3y/r (\text{grad}_T h)^\beta, \end{aligned}$$

$$D_k \sigma_0^{ij} D_i \xi^k D_j \xi^l ,$$

$$\begin{aligned} * D_k \sigma_0^{i1} D_i \xi^k D_j \xi^l &= D_1 \sigma_0^{i1} D_i \xi^1 D_j \xi^l + D_k \sigma_0^{\alpha 1} D_i \xi^k D_\alpha \xi^l \\ &= (2y/r - \rho g_0) h^2 - 2h^2 y / r^3 , \end{aligned}$$

$$* D_k \sigma_0^{i\beta} D_i \xi^k D_j \xi^l = \dot{\sigma}_T (h + h/r) (\text{grad}_T h)^\beta$$

$$D_k \sigma_0^{ij} D_i f^k ,$$

$$* D_k \sigma_0^{i1} D_i f^k = (2y/r - \rho g_0) \dot{f} - 2yf/r^2 ,$$

$$* D_k \sigma_0^{i\beta} D_i f^k = \dot{\sigma}_T (\text{grad}_T f)^\beta .$$

Rappelons que y est numériquement du premier ordre si bien que $\delta_1 y$ et z sont numériquement du deuxième ordre. Tenant compte de ces dernières expressions, de (36) et de :

$$\delta_1 \sigma_N = \frac{2}{3} |\Omega|^2 \int_r^b \rho(s) s ds ,$$

$$(\delta_1 \phi)'' - (gh)'' + \frac{2}{3} |\Omega|^2 P_2^0 + z'' = 0 ,$$

il découle de (44), au deuxième ordre effectif, l'expression (38) comme dans le cas hydrostatique.

Il est d'usage (cf. Nakiboglu, Lanzano et Kopal) de fixer $f_0 = -h_2^2/5$ de manière à conserver la masse au deuxième ordre. Nous ne suivrons pas ces auteurs puisque nous avons choisi de fixer le rayon moyen. Il s'ensuit une variation de la masse au deuxième ordre. En effet, d'après la proposition 3 (12) du chapitre I, on déduit que :

$$\begin{aligned} \delta_2 M &= \int_V \rho \{ \text{div} \xi_2 + (\text{div} \xi_1)^2 - \text{tr}(D\xi_1 \cdot D\xi_1) \} dV \\ &= \frac{8\pi}{5} \int_0^b h_2 (h_2 + 2rh_2) \rho dr , \end{aligned} \tag{51}$$

si bien que la masse correspondant à la configuration réelle est :

$$M = 4\pi \int_0^b \left\{ \frac{h_2^2}{5} + \frac{2}{5} r h_2 \dot{h}_2 + r^2 \right\} \rho dr . \quad (52)$$

Rappelons que le potentiel extérieur du champ de gravité prend la forme (cf. Moritz (1980)) :

$$V(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell, m} \frac{1}{r^{\ell+1}} \{ a_{\ell, m} R_{\ell}^m(\theta, \phi) + b_{\ell, m} S_{\ell}^m(\theta, \phi) \}$$

avec :

$$a_{\ell, m} = \frac{G}{2\ell+1} \int_V r^{\ell} R_{\ell}^m(\theta, \phi) \rho dV \quad , \quad b_{\ell, m} = \frac{G}{2\ell+1} \int_V r^{\ell} S_{\ell}^m(\theta, \phi) \rho dV ,$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} R_{\ell}^m(\theta, \phi) R_{\ell}^m(\theta, \phi) \sin\theta \, d\theta d\phi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} S_{\ell}^m(\theta, \phi) S_{\ell}^m(\theta, \phi) \sin\theta \, d\theta d\phi = 4\pi .$$

La perturbation au deuxième ordre de la configuration sphérique se traduit, au niveau du potentiel, par l'introduction de deux coefficients non nuls : $a_{2,0}$, $a_{4,0}$. On obtient en effet, grâce à la proposition 3 du premier paragraphe du chapitre I, que :

$$\delta_1 a_{\ell,0} = \frac{G}{\sqrt{2\ell+1}} \int_V r^{\ell} P_{\ell}^0(\cos\theta) \{ \dot{h} + (2+\ell)h/r \} \rho dV$$

$$\delta_{21} a_{\ell,0} = \frac{G}{\sqrt{2\ell+1}} \int_V r^{\ell-2} P_{\ell}^0(\cos\theta) \{ (\ell^2+3\ell+2)h^2 + 2(\ell+2)r h \dot{h} + (\ell+2)r \dot{h} + r^2 \ddot{h} \} \rho dV ,$$

si bien que :

$$\delta_1 a_{2,0} = \frac{4\pi}{5\sqrt{5}} G \int_0^b (\dot{h}_2 + 4h_2/r) \rho r^4 \, dr , \quad (53a)$$

$$\delta_{21}a_{2,0} = \frac{4\pi}{5\sqrt{5}} G \int_0^b \left[\frac{24}{7} h_2^2 + \frac{16}{7} r h_2 \dot{h}_2 + 4r f_2 + r^2 \dot{f}_2 \right] \rho r^2 dr , \quad (53b)$$

$$\delta_{21}a_{4,0} = \frac{4\pi}{27} G \int_0^b \left[\frac{108}{7} h_2^2 + \frac{216}{35} r h_2 \dot{h}_2 + 6r f_4 + r^2 \dot{f}_4 \right] \rho r^4 dr , \quad (53c)$$

et :

$$\delta_{21}a_{0,0} = \frac{8\pi}{5} G \int_0^b h_2 (h_2 + 2r \dot{h}_2) \rho dr , \quad (53d)$$

ce qui correspond à la perturbation de la masse. En somme, on obtient

$$a_{2,0} = \frac{4\pi}{35\sqrt{5}} G \int_0^b \left\{ r^2 \dot{h}_2 + 4r h_2 + \frac{12}{7} h_2^2 + \frac{4}{7} r h_2 \dot{h}_2 + 28r f_2 + 7r^2 \dot{f}_2 \right\} \rho r^2 dr , \quad (54a)$$

$$a_{4,0} = \frac{2\pi}{27} G \int_0^b \left\{ \frac{108}{7} h_2^2 + \frac{216}{35} r h_2 \dot{h}_2 + 6r f_4 + r^2 \dot{f}_4 \right\} \rho r^4 dr . \quad (54b)$$

3. Correction d'ellipticité pour un modèle de Terre orthotrope.

L'étude du problème de la dépendance des valeurs propres d'un opérateur différentiel elliptique par rapport au domaine support remonte aux travaux de Rayleigh (1894) et de Hadamard (1910). Hadamard a considéré le cas d'un bord régulier et défini une cinématique du bord en introduisant un déplacement normal. Garabedian & Schiffer (1953) voulant traiter le cas de bord moins régulier ont considéré une déformation intérieure du domaine. Il s'est développé depuis une vaste littérature sur le sujet (Polya & Schiffer (1953), Joseph (1967) et Cea (1973) entre autres).

Considérons un modèle de Terre sphéroïdal proche de la configuration sphérique, en rotation uniforme de vecteur Ω . On introduit comme au premier chapitre, paragraphe 1, ou au para-

graphe précédent, une évolution virtuelle qui fait passer de la configuration de référence sphérique au modèle de Terre. Adoptant un champ de vitesse virtuelle de la forme $\xi = h e_1$ et supposant que la masse volumique reste inchangée ($\delta_1 \rho = 0$), on a montré au paragraphe précédent que $h = h_2(r) P_2^0(\cos\theta)$ vérifiait les équations (34,35) qui constituent une généralisation de l'équation de Clairaut. On suppose que l'axe d'orthotropie reste normal aux surfaces d'équidensité et que les différents paramètres d'élasticité A, C, F, L, N sont invariants dans la transformation :

$$\delta_1 A = \delta_1 C = \delta_1 F = \delta_1 L = \delta_1 N = 0 .$$

Rappelons que la matrice de passage de la base locale de référence à la nouvelle base est :

$$P = I + Q$$

où l'expression de Q est donnée en (23c).

Soit b^{ijkl} le tenseur de l'élasticité (cf chapitre I, paragraphe 2, 2.50b). On obtient alors :

$$\delta_1 b^{ijkl} = Q_m^i b^{mjkl} + Q_m^j b^{imkl} + Q_m^k b^{ijml} + Q_m^l b^{ijkm} , \tag{55}$$

en remarquant que les coordonnées de b restent inchangées dans la nouvelle base.

Soit $u_{x,m}(t)$ ($\omega_{x,m}(t)$) l'une des $(2\ell+1)$ branches de vecteurs propres associées à la fréquence propre ω_x dans la configuration de référence. En utilisant la caractérisation variationnelle obtenue au chapitre IV, paragraphe 4 (proposition 4) on obtient :

$$\forall (u', \psi') \in D(a) \times H^1(\mathbb{R}^3) : J_x((u, \psi), (u', \psi')) = 0 \tag{56}$$

avec :

$$J_x((u, \psi), (u', \psi')) = K((u, \psi), (u', \psi')) + 2\omega_x(iBu|u') - \omega_x^2(u|u') , \tag{57a}$$

$$K((u, \psi), (u', \psi')) = a'(u, u') - (grad\psi|u') - (u|grad\psi) + (grad\psi|grad\psi')_{L^2(\mathbb{R}^3)}/4\pi G \tag{57b}$$

et (cf chapitre I paragraphe 2 64a) :

$$\begin{aligned}
 a'(u,v) = & \int_V b^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{v}_l + \rho S \{ u \cdot g_0' \operatorname{div}(\bar{u}) - \bar{v} \cdot \operatorname{grad}(u \cdot g_0') \} + \\
 & + (\sigma_N - \sigma_T) \{ \operatorname{tr}(W^2) u_N \bar{v}_N - \operatorname{grad}_T u_N \cdot \operatorname{grad}_T \bar{v}_N - S \{ u_N \bar{v}_T \cdot \operatorname{grad}_T \operatorname{tr}(W) \} \} dV . \quad (57c)
 \end{aligned}$$

Par dérivation virtuelle de (56) et tenant compte de $\delta_1 \rho = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 J_x((u_{x,m}, \psi(u_{x,m})), (\delta_1 u', \delta_1 \psi')) + J_x((\delta_1 u_{x,m}, \delta_1 \psi(u_{x,m})), (u', \psi')) - \\
 - \omega_x \delta \omega_{x,m}(u_{x,m} | u') + 2\omega_x (i \delta B u_{x,m} | u') + \hat{K}((u_{x,m}, \psi(u_{x,m})), (u', \psi')) = 0 . \quad (58)
 \end{aligned}$$

en convenant de noter :

$$\hat{K}((u, \psi), (u', \psi')) = \delta_1 K((u, \psi), (u', \psi')) - K((\delta_1 u, \delta_1 \psi), (u', \psi')) - K((u, \psi), (\delta_1 u', \delta_1 \psi')) \quad (59)$$

Il faut remarquer que ni $\delta_1 u_{x,m}$ ni $\delta_1 u'$ ne sont dans $D(a)$. Si bien que la caractérisation (56) n'est pas applicable. On obtient néanmoins la :

Proposition 1 :

$$\text{-a } J_x((u_{x,m}, \psi(u_{x,m})), (\delta_1 u', \delta_1 \psi')) = - \int_{\Sigma} (s_{x,m} \cdot n) D\xi[\bar{u}'] \cdot n \, d\Sigma$$

$$\text{-b } J_x((\delta_1 u, \delta_1 \psi), (u_{x',m}, \psi'(u_{x',m}))) = - \int_{\Sigma} (\bar{s}_{x',m} \cdot n) D\xi[u] \cdot n \, d\Sigma + (\omega_{x'}^2 - \omega_x^2) (\delta_1 u | u_{x,m})$$

où $s_{x,m}$ est le vecteur "contrainte normale" associé à $u_{x,m}$ par l'équation 2.52 du paragraphe 2 du chapitre I.

Preuve (formelle) :

Remarquons tout d'abord que sur toute interface Σ où intervient un fluide :

$$[\delta_1 u'] \cdot n = [\delta_1 (u' \cdot n)] - \delta_1 n \cdot [u'] = n \cdot D\xi[u'] .$$

Introduisons :

$$v = \delta_1 u' + w$$

où w est champ à support dans le voisinage intérieur de chaque interface ($r = r_0$) où intervient un fluide et est localement de la forme :

$$w = (n.D\xi[u])_{r_0} \exp \left\{ - \frac{(r-r_0)^2}{\xi^2} \right\} n ,$$

de sorte que v appartient à $D(a)$.

Remarquons que :

$$\forall (i, \alpha) : \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^b D_\alpha w^i f \, dr = 0 \quad , \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^b w^i f \, dr = 0$$

et que :

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^b D_1 w_1 f \, dr = \sum_{r_0} f(r_0) (n.D\xi[u])_{r_0} .$$

La caractérisation variationnelle (56) montre que :

$$J((u_{x,m}, \psi(u_{x,m})) , (\delta u' , \delta \psi')) = - \lim_{\xi \rightarrow 0} J((u_{x,m}, \psi(u_{x,m})) , (w, 0)) ,$$

On en déduit, grâce aux expressions (57) que :

$$J((u_{x,m}, \psi(u_{x,m})) , (\delta u' , \delta \psi')) = - \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_V b^{ij11} D_i u_{x,mj} D_1 \bar{w}_1 \, dV .$$

Rappelons que :

$$b^{11ij}D_i u_j = s.n$$

où s désigne le vecteur "contrainte radiale", associé au vecteur u , introduit au chapitre I paragraphe 2 (2.52). Il s'ensuit que :

$$J((u_{x,m}, \psi(u_{x,m})) , (\delta u', \delta \psi')) = - \int_{\Sigma} (s_{x,m} \cdot D\xi[\bar{u}']) d\Sigma ,$$

ce qui démontre le point a .

Pour démontrer b , il suffit alors de remarquer que :

$$J_x((\delta_1 u, \delta_1 \psi) , (u_{x',m}, \psi(u_{x,m}))) = (\omega_{x'}^2 - \omega_x^2) + J_{x'}((\delta_1 u, \delta_1 \psi) , (u_{x',m}, \psi(u_{x,m}))) \quad \blacksquare$$

On déduit de l'expression (58) et du point a de cette dernière proposition que :

$$\forall u' \in V_x : 2\omega_x \delta\omega_{x,m} (u_{x,m} | u') = h^x(u_{x,m}, u') \quad (60)$$

où $h^x(u, u')$ est la forme sesquilinéaire définie par :

$$h^x(u, u') = 2\omega_x (i\delta B u | u') - \int_{\Sigma} (n.s(u))(D\xi[\bar{u}'] \cdot n + (n.s(\bar{u}'))(D\xi[u] \cdot n) d\Sigma + \hat{K}((u, \psi(u)) , (u', \psi(u'))) . (61)$$

Dans le sous espace V_x , la forme h^x est associée à un opérateur Hermitien H^x . L'expression (60) montre donc que les différents $2\omega_x \delta\omega_{x,m}$ sont les $2\ell+1$ valeurs propres de H^x associées aux vecteurs propres $u_{x,m}$. Dans le cas où il existe d'autres x' tels que $\omega_{x'} = \omega_x$ il faut étendre H^x à $\oplus_{x':\omega_{x'}=\omega_x} V_{x'}$. On généralise ainsi l'expression de l'opérateur de "splitting" obtenue au premier paragraphe au cas d'une formulation faible et l'on obtient :

$$\delta\omega_{x,m} = \frac{1}{2\omega_x} \frac{h^x(u_{x,m}, u_{x,m})}{\|u_{x,m}\|^2} .$$

On déduit également de l'expression (58) et de la proposition 1b que :

$$\forall u' \in V_{x'} : 2\omega_x((- \delta\omega_{x,m} + i\delta B) u_{x,m}|u') + (\omega_{x'}^2 - \omega_x^2) (\delta_1 u_{x,m}|u') - \int_{\Sigma} (n.s(u_{x,m}))(n.D\xi[\bar{u}']) + (n.s(\bar{u}'))(n.D\xi[u_{x,m}]) d\Sigma + \hat{K}((u_{x,m}, \psi(u_{x,m})), (u', \psi(u'))) = 0 .$$

Tenant compte de :

$$(u_{x,m}|u') = 0 ,$$

on en déduit que :

$$(\delta_1 u_{x,m}|u') = \frac{h^x(u_{x,m}, u')}{\omega_x^2 - \omega_{x'}^2} , \tag{62}$$

ce qui généralise également l'expression obtenu au premier paragraphe.

Il reste maintenant à calculer explicitement $\hat{K}((u, \psi), (u', \psi'))$. On tire des expression (57b,c) que :

$$K((u, \psi), (u', \psi')) = \int_V M_1 dV + \int_{R^3} M_2 dV , \tag{63a}$$

avec :

$$M_1 = b^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{u}'_l + \rho S(u.g_0' \text{div} \bar{u}' - \bar{u}' \text{grad}(u.g_0')) + (\sigma_N - \sigma_T) (\text{tr}(W^2) u_N \bar{v}_N - \text{grad}_T u_N . \text{grad}_T \bar{v}_N - S(u_N \bar{v}_T . \text{grad}_T \text{tr}(W))) - \bar{u}' \text{grad} \psi - u . \text{grad} \psi' , \tag{63b}$$

$$M_2 = \frac{\text{grad} \psi . \text{grad} \psi'}{4\pi G} . \tag{63c}$$

$(\sigma_N - \sigma_T)$ est probablement de l'ordre d'un terme de perturbation dans le cas de la Terre , on négligera donc ce terme dans l'expression de M_1 . On obtient alors la :

Proposition 2 :

$$\hat{K}((u, \psi), (u', \psi')) = \int_V \hat{M}_1 + \hat{M}_2 + (M_1 + M_2) \operatorname{div} \xi \, dV - \int_{\partial V} \frac{\xi \cdot n}{4\pi G} \{ \operatorname{grad}_T \psi \cdot \operatorname{grad}_T \psi' - \chi \chi' \} d\Sigma$$

avec :

$$M_1 = b^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{u}'_l + \rho S(u \cdot g_0' \operatorname{div} \bar{u}' - \bar{u}' \operatorname{grad}(u \cdot g_0')) - \bar{u}' \operatorname{grad} \psi - u \operatorname{grad} \psi'$$

$$M_2 = \frac{\operatorname{grad} \psi \cdot \operatorname{grad} \psi'}{4\pi G}$$

$$\begin{aligned} \hat{M}_1 = S(\delta_1(b)^{ijkl} D_i u_j D_k \bar{u}'_l - 2b^{mjkl} D_m \xi^i D_i u_j D_k \bar{u}'_l + \rho u \delta_1 g' \operatorname{div} \bar{u}' - \rho u \cdot g_0 \operatorname{tr}(D\bar{u}' \cdot D\xi) + \\ + \rho D\xi(\bar{u}') \cdot \operatorname{grad}(u \cdot g_0) - \rho \bar{u}' \cdot \operatorname{grad}(u \cdot \delta_1 g') + 2\rho D\xi(\bar{u}') \cdot \operatorname{grad} \psi + 2i\omega\rho(\Omega \wedge u) \cdot \bar{u}') \end{aligned}$$

$$\hat{M}_2 = - S \left\{ \frac{D\xi(\operatorname{grad} \psi) \cdot \operatorname{grad} \psi'}{2\pi G} \right\}$$

et où χ est défini dans le paragraphe 2 (équation 2.38) du chapitre I.

Preuve :

On déduit d'emblée de l'expression (63a) de K et de la proposition 3 du chapitre I que :

$$\hat{K}((u, \psi), (u', \psi')) = \int_V (\hat{M}_1 + M_1 \operatorname{div} \xi) \, dV + \int_{\mathbf{R}_3} (\hat{M}_2 + M_2 \operatorname{div} \xi) \, dV .$$

De (44c) on déduit en vertu de la proposition 1 (3) du chapitre I que :

$$\hat{M}_2 = - S \left\{ \frac{D\xi(\operatorname{grad} \psi) \cdot \operatorname{grad} \psi'}{4\pi G} \right\} .$$

Il en résulte que :

$$\int_{\mathbf{R}_3 \setminus V} \hat{M}_2 + M_2 \operatorname{div} \xi \, dV = S \left\{ \int_{\mathbf{R}_3 \setminus V} \frac{\operatorname{grad} \psi \cdot \operatorname{grad} \psi'}{4\pi G} \operatorname{div} \xi - \frac{D\xi(\operatorname{grad} \psi) \cdot \operatorname{grad} \psi'}{4\pi G} \, dV \right\}$$

$$= - \int_{\partial V} S(\xi \cdot n \frac{\text{grad}\psi \cdot \text{grad}\psi'}{4\pi G}) d\Sigma -$$

$$- \frac{1}{2\pi G} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus V} S(\text{grad}\psi \cdot D(\text{grad}\psi')(\xi) + D\xi(\text{grad}\psi') \cdot \text{grad}\psi) dV$$

où n est orienté vers l'extérieur de V,

$$= - S(\int_{\partial V} \xi \cdot n \frac{\text{grad}\psi \cdot \text{grad}\psi'}{4\pi G} d\Sigma)$$

$$= - \frac{1}{2\pi G} S(\int_{\mathbb{R}^3 \setminus V} \text{grad}(\text{grad}\psi' \cdot \xi) \cdot \text{grad}\psi dV)$$

$$= - S(\int_{\partial V} \xi \cdot n \frac{\text{grad}\psi \cdot \text{grad}\psi'}{4\pi G} - \frac{(\text{grad}\psi \cdot n)(\text{grad}\psi' \cdot \xi)}{2\pi G} d\Sigma) ,$$

en tenant compte de :

$$\Delta\psi = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus V .$$

Ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus V} (\hat{M}_2 + M_2 \text{div}\xi) dV = - \int_{\partial V} \frac{\xi \cdot n}{4\pi G} \{ \text{grad}_T \psi \cdot \text{grad}_T \psi' - (\text{grad}\psi \cdot n)(\text{grad}\psi' \cdot n) \}$$

$$= - \int_{\partial V} \frac{\xi \cdot n}{4\pi G} \{ \text{grad}_T \psi \cdot \text{grad}_T \psi' - \chi\chi' \} d\Sigma$$

puisque (cf I 2.58) :

$$D_1\psi = \chi + 4\pi G\rho u_1$$

$$= \chi \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus V .$$

On en déduit que :

$$\hat{K}((u, \psi) , (u' \psi')) = \int_V \hat{M}_1 + \hat{M}_2 + (M_1 + M_2) \text{div}\xi - \int_{\partial V} \frac{\xi \cdot n}{4\pi G} \{ \text{grad}_T \psi \cdot \text{grad}_T \psi' - \chi\chi' \} d\Sigma .$$

De l'expression (44b) de M_1 et de la proposition 1 du chapitre I, on déduit finalement que :

$$\hat{M}_1 = S(\delta_1(b)^{ijkl}D_i u_j D_k \bar{u}'_l - 2b^{mjkl}D_m \xi^i D_i u_j D_k \bar{u}'_l + \rho u \delta_1 g' \operatorname{div} \bar{u}' - \rho u \cdot g_0 \operatorname{tr}(D\bar{u}' \cdot D\xi) + \rho D\xi(\bar{u}') \cdot \operatorname{grad}(u \cdot g_0) - \rho \bar{u}' \cdot \operatorname{grad}(u \cdot \delta_1 g') + 2\rho D\xi(\bar{u}') \cdot \operatorname{grad} \psi + 2i\omega\rho(\Omega \wedge u) \cdot \bar{u}') . \quad \blacksquare$$

Remarquons que cette proposition est applicable en toute généralité dans le cas hydrostatique.

Dans le cas orthotrope, tenant compte des expressions (32, 55, 63) on déduit de la proposition 2, au bout d'un calcul fastidieux et en reprenant les notations du paragraphe 2 du chapitre I, que :

$$\begin{aligned} \hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \operatorname{div} \xi(M_1 + M_2) = & S(2\bar{s}'_T \cdot ((\operatorname{grad}_T u_N - \frac{u_T}{r})(\dot{h} - \frac{h}{r}) + (\frac{h}{r} - \frac{\dot{h}}{2}) \frac{s_T}{L} + \frac{s_N}{L} \operatorname{grad}_T h) + \\ & + (A - 2N - \frac{Fz}{C}) \bar{D}'(\dot{h}D + 2(\operatorname{grad}_T u_N - \frac{u_T}{r}) \cdot \operatorname{grad}_T h) + 2\frac{\bar{s}'_N}{C} (F(\dot{h} - \frac{h}{r})D + s_N(\frac{h}{r} - \frac{\dot{h}}{2}) + \\ & + F(\operatorname{grad}_T u_N - u_T) \cdot \operatorname{grad}_T h) + \rho \bar{u}'_N (u_N (g_0(\dot{h} - \frac{2h}{r} + \frac{4h}{r^2}) - \omega^2(\dot{h} + \frac{2h}{r}) - \frac{2}{3}|\Omega|^2 - 8\pi G\rho\dot{h}) + \\ & + D(g_0 \frac{h}{r} + \frac{2}{3}|\Omega|^2 r) - 2\dot{h}\chi - 2\operatorname{grad}_T \psi \cdot \operatorname{grad}_T h) + \rho \bar{u}'_T \cdot (\operatorname{grad}_T h(2\chi - g_0(D + 5\frac{u_N}{r})) + \\ & + u_N g_0 \operatorname{grad}_T \dot{h} - \operatorname{grad}_T u_N (\frac{2}{3}|\Omega|^2 r + g_0(\dot{h} + \frac{h}{r})) - \omega^2 u_T (\dot{h} + 2\frac{h}{r}) - 2(\dot{h} + \frac{h}{r}) \operatorname{grad}_T \psi) + \\ & + \frac{\chi\chi'}{4\pi G} (\frac{2h}{r} - \dot{h}) - \chi' \frac{\operatorname{grad}_T h \cdot \operatorname{grad}_T \psi}{2\pi G} + \dot{h} \frac{\operatorname{grad}_T \psi \cdot \operatorname{grad}_T \psi'}{4\pi G} + \\ & + \rho g_0 \bar{u}'_T \cdot \operatorname{grad}_T (\dot{h} u_N + u_T \cdot \operatorname{grad}_T h) + 2N \dot{h} \eta'^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta} + 4\eta^{\alpha\beta} \nabla_\alpha h (N(\nabla_\beta u_N - \frac{u_\beta}{r}) - s_\beta) \} , \quad (64) \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$D = \operatorname{div}_T u_T + 2\frac{u_N}{r} ,$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (D_\alpha u_\beta + D_\beta u_\alpha) .$$

On peut montrer par ailleurs que :

$$S\left\{ \int_{\Sigma} f \eta'^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta} d\Sigma \right\} =$$

$$S\left\{ \int_{\Sigma} \left\{ \frac{\bar{u}'_N}{r} D - \frac{1}{2} \bar{u}'_T \cdot \left(\Delta_T + \text{grad}_T \text{div}_T + \frac{1}{r^2} \right) u_T - \frac{\bar{u}'_T \cdot \text{grad}_T u_N}{r} \right\} f - \nabla_\alpha f \eta'^{\alpha\beta} u_\beta d\Sigma \right\} \quad (65)$$

et que :

$$S\left\{ \int_{\Sigma} \nabla_\alpha f \eta'^{\alpha\beta} u_\beta d\Sigma \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} S\left\{ \int_{\Sigma} \bar{u}'_T \cdot \left\{ 2 \text{grad}_T f \frac{u_N}{r} - \frac{1}{2} u_T \Delta_T f - \text{grad}_T f \text{div}_T u_T \right\} - \bar{u}'^\alpha u^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta f d\Sigma \right\}$$

$$= \frac{1}{2} S\left\{ \int_{\Sigma} \bar{u}'_T \cdot \left\{ \text{grad}_T f \left(\frac{u_N}{r} - D \right) - \frac{u_T}{2} \Delta_T f \right\} - \bar{u}'^\alpha u^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta f d\Sigma \right\} . \quad (66)$$

Tenant compte de (55), (56) et intégrant par partie le 3ème terme avant la fin de (64), on déduit en vertu de (61) que :

$$h^x(u, u') = \int_V S\left\{ 2s'_T \cdot \left(\text{grad}_T u_N - \frac{u_T}{r} \right) \left(\dot{h} - \frac{h}{r} \right) + \left(\frac{h}{r} - \frac{\dot{h}}{2} \right) \frac{s'_T}{L} + \frac{u_T}{2} \Delta_T h - \right.$$

$$\left. - \text{grad}_T h \cdot \left(\frac{s'_N}{L} + 4 \frac{u_N}{r} - D \right) \right\} + \bar{D}' \cdot \left((A - 2N - \frac{F^2}{C}) (\dot{h} D + 2(\text{grad}_T u_N - \frac{u_T}{r}) \cdot \text{grad}_T h) - \right.$$

$$\left. 2N \text{grad}_T h \cdot \text{grad}_T u_N \right) + 2 \frac{s'_N}{C} \left(F \left(\dot{h} - \frac{h}{r} \right) D + s_N \left(\frac{h}{r} - \frac{\dot{h}}{2} \right) + F \left(\text{grad}_T u_N - \frac{u_T}{r} \right) \cdot \text{grad}_T h \right) +$$

$$+ \bar{u}'_N \left(\rho u_N (g_0 (\dot{h} + \frac{4h}{r^2}) - \omega^2 (\dot{h} + \frac{2h}{r}) - \frac{2}{3} |\Omega|^2 - 8\pi G \rho \dot{h}) + D(\rho g_0 (\frac{h}{r} - \dot{h}) + \frac{2N\dot{h}}{r} + \frac{2}{3} \rho |\Omega|^2 r) \right.$$

$$\left. - 2\rho \dot{h} \chi - 2\rho \text{grad}_T \psi \cdot \text{grad}_T h + 8 \frac{N}{r} (\text{grad}_T h \cdot \text{grad}_T u_N) \right) + \bar{u}'_T \cdot \left(\text{grad}_T h (2D(\frac{N}{r} - \rho g_0) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{u_N}{r} (3\rho g_0 + \frac{8N}{r}) + 2\rho\chi + \text{grad}_T \dot{h} (\rho u_N g_0 + N(D - 4\frac{u_N}{r})) - \text{grad}_T u_N (\frac{2}{3}\rho|\Omega|^2 r + \rho g_0 (\dot{h} + \frac{h}{r}) + \\
& + 2N\frac{\dot{h}}{r} + N\Delta_T h) + (-\rho\omega^2 (\dot{h} + \frac{2h}{r}) - \dot{h}N)(\Delta_T + \text{grad}_T \text{div}_T + \frac{1}{r^2}) + \frac{N}{2} (\dot{h} + \frac{2h}{r}) \Delta_T u_T - \\
& - 2\rho (\dot{h} + \frac{2h}{r}) \text{grad}_T \psi + \frac{\chi\chi'}{4\pi G} (\frac{2h}{r} - \dot{h}) - \chi' \frac{\text{grad}_T h \cdot \text{grad}_T \psi}{2\pi G} + \dot{h} \frac{\text{grad}_T \psi \cdot \text{grad}_T \psi'}{4\pi G} + \\
& + N \bar{u}^\alpha u^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta \dot{h} - 2(N(\text{grad}_T u_N - \frac{u_T}{r}) - s_T)^\alpha u^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta h + 2\rho i(\Omega \wedge u) \cdot \bar{u}' \} dV - \\
& - \int_{\partial V} \frac{h}{4\pi G} \{ \text{grad}_T \psi \text{grad}_T \psi' - \chi\chi' \} d\Sigma - \int_\Sigma S \{ 2s_N(\text{grad}_T h \cdot [\bar{u}']) \} d\Sigma . \quad (67)
\end{aligned}$$

* Cas d'un mode Toroidal.

Dans ce cas (cf chapitre I paragraphe 2).

$$u = y_7(r) \text{Rot}(rY_\ell^m) \quad \text{et} \quad s = y_8(r) \text{Rot}(rY_\ell^m) .$$

Utilisant que :

$$h = h_2(r) P_2^0(\cos\theta) ,$$

$$\dot{h}_2 = \frac{h_2(1+\eta)}{r} ,$$

où η désigne ici le paramètre de Radau, et que :

$$\int_\Sigma P_2^0(\cos\theta) Y_\ell^m \bar{Y}'_\ell{}^{m'} d\Sigma = A_\ell^m \delta_m^{m'} , \quad (68a)$$

$$\int_\Sigma P_2^0(\cos\theta) \text{Rot}(rY_\ell^m) \text{Rot}(r\bar{Y}'_\ell{}^{m'}) d\Sigma = B_\ell^m \delta_m^{m'} , \quad (68b)$$

$$\int_\Sigma \text{Rot}(rY_\ell^m)^\alpha \text{Rot}(r\bar{Y}'_\ell{}^{m'})^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta h d\Sigma = - \frac{2B_\ell^m + \ell(\ell+1) - 3m^2}{r^2} \delta_m^{m'} , \quad (68c)$$

$$\int_{\Sigma} (\Omega \wedge \text{Rot}(rY_{\ell}^m)).\text{Rot}(rY_{\ell}^{m'}) d\Sigma = -|\Omega| \text{im} \delta_m^{m'} , \quad (68d)$$

$$A_{\ell}^m = \frac{\ell(\ell+1) - 3m^2}{(2\ell+1)(2\ell+3)} , \quad (68e)$$

$$B_{\ell}^m = (\ell(\ell+1)-3)A_{\ell}^m , \quad (68f)$$

on déduit des expressions (60) et (67) que :

$$2\omega_x \delta\omega_{x,m} \int_0^b \ell(\ell+1) y_7^2 \rho r^2 dr = \quad (69a)$$

$$= \int_0^b y_7^2 \{ B_{\ell}^m (\eta+1) \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{r^2} N - (\eta+3) \left(\frac{N}{r^2} (5B_{\ell}^m + \ell(\ell+1) - 3m^2) + \rho\omega^2 B_{\ell}^m + m|\Omega|r \right) +$$

$$+ y_8^2 \frac{1-\eta}{L} B_{\ell}^m - \frac{2y_7 y_8}{r} \{ (\eta+5)B_{\ell}^m + \ell(\ell+1) - 3m^2 \} rh_2 dr .$$

$$= A_{\ell}^m \int_0^b y_7^2 \{ (\eta+1)(\ell(\ell+1)-3)(\ell-1)(\ell+2) \frac{N}{r^2} - (\eta+3) \left(\frac{N}{r^2} (9\ell^2+13\ell-12) + \rho\omega^2(\ell(\ell+1)-3) \right) + \quad (69b)$$

$$+ y_8^2 \frac{1-\eta}{L} (\ell(\ell+1)-3) - \frac{2y_7 y_8}{r} \{ (\eta+5)(\ell(\ell+1)-3) + (2\ell+1)(2\ell+3) \} rh_2 dr + 2m|\Omega| \int_0^b y_7^2 r^2 dr .$$

Ce résultat constitue une généralisation du résultat de Woodhouse & Dahlen (1978) au cas orthotrope.

* Cas d'un mode Sphéroïdal.

On considère dans ce cas :

$$u = y_1 Y_{\ell}^m e_r + y_3 \text{grad}_T(Y_{\ell}^m r) ,$$

$$s = y_2 Y_{\ell}^m e_r + y_4 \text{grad}_T(Y_{\ell}^m r) ,$$

$$\psi = y_5 Y_{\ell}^m , \quad \chi = y_6 Y_{\ell}^m .$$

On en déduit que :

$$D = \text{div}_T u_T + \frac{2}{r} u_N = \left[\frac{2}{r} y_1 - \frac{\ell(\ell+1)}{r} y_3 \right] Y_{\ell}^m .$$

Utilisant que :

$$\int_{\Sigma} \text{grad}_T(Y_{\ell}^m r) \text{grad}_T(\bar{Y}_{\ell}^m r) d\Sigma = \ell(\ell+1) , \quad (70a)$$

$$\int_{\Sigma} \text{grad}_T(P_2^0(\cos\theta)) \cdot \text{grad}_T(Y_{\ell}^m) \bar{Y}_{\ell}^{m'} r^2 d\Sigma = 3A_{\ell}^m \delta_m^{m'} , \quad (70b)$$

$$\int_{\Sigma} P_2^0(\cos\theta) \text{grad}_T(Y_{\ell}^m r) \cdot \text{grad}_T(\bar{Y}_{\ell}^{m'} r) d\Sigma = B_{\ell}^m \delta_m^{m'} , \quad (70c)$$

$$\int_{\Sigma} (\Omega \wedge (y_1 e_r + y_3 \text{grad}_T Y_{\ell}^m)) \cdot (y_1' e_r + y_3' \text{grad}_T Y_{\ell}^{m'}) d\Sigma = -|\Omega| \text{im}(y_3 y_3' + y_3 y_1' + y_1 y_3') \delta_m^{m'} \quad (70d)$$

et que :

$$\begin{aligned} \frac{h_2(b)}{4\pi G} \{ y_6^2(b) A_{\ell}^m - y_5^2/b^2 B_{\ell}^m \} b^2 - \sum_{\text{disc.}} 6A_{\ell}^m y_2 [y_3] r_d h_2(r_d) = \\ = A_{\ell}^m \int_0^b \frac{\ell+4}{4\pi G} \frac{d}{dr} (h_2 y_5^2) + 6 \frac{d}{dr} (y_2 y_3 h_2 r) dr , \quad (70e) \end{aligned}$$

on déduit des expressions (60) et (67) grâce à (29b) que u est un vecteur propre de H^* et que :

$$\begin{aligned}
 2\omega_x \delta\omega_{x,m} \int_0^b \{y_1^2 + \ell(\ell+1) y_3^2\} \rho r^2 dr &= A \ell^m \int_0^b \frac{y_1^2}{r} \{4(\eta+4)(A - N \frac{F^2}{C}) + 10\rho g_0 r - \rho\omega^2 r^2(\eta+3)\} \\
 &+ r y_2^2 \frac{1-\eta}{C} + \frac{y_3^2}{r} \{ \ell(\ell+1)(\ell(\ell+1)(\eta+1)(A - \frac{F^2}{C}) - 6(A - \frac{F^2}{C}) - 2N(7\eta + 13) - \rho\omega^2 r^3(\eta+3)) + \\
 &+ 12N(2\eta+5) - 3\rho\omega^2 r^2(\eta+3)\} + r y_4^2 \frac{1-\eta}{\ell} (\ell(\ell+1)-3) + \frac{y_5^2}{4\pi G r} (1+\eta)(4-\ell(\ell+1)) + \\
 &+ 2y_1 y_2 (2\eta \frac{F}{C} + 3(\frac{F}{C} - 1)) + \frac{y_1 y_3}{r} \{12(A - 4N - \frac{F^2}{C}) + 6\rho g_0 r(\eta+2) - 6\rho\omega^2 r^2 + \\
 &+ \ell(\ell+1)(-2(2\eta+5)(A - N - \frac{F^2}{C}) + 18N - 2\rho g_0 r)\} + 2y_1 y_4 \{ \ell(\ell+1)\eta - 3(\eta+2 + 2\frac{F}{C}) \} - \\
 &- 2\ell(\ell+1)\rho y_1 y_5 - 2\rho r y_1 y_6 (\eta+1) + y_2 y_3 \{ -\frac{2F}{C} (\ell(\ell+1)\eta-3) + 6(\eta+1) \} + \frac{6}{C} r y_2 y_4 + \\
 &+ 2y_3 y_4 \{ 3(\eta+6) - \ell(\ell+1)(\eta + 3 - 3\frac{F}{C}) \} - 2y_3 y_5 \rho (\eta+3)(\ell(\ell+1)-3) - 2\rho \ell(\ell+1) r y_3 y_6 h_2 dr + \\
 &+ \frac{2}{3} |\Omega|^2 \int_0^b \{y_1^2 - 2\ell(\ell+1)y_1 y_3\} \rho r^2 dr + 2m|\Omega| \int_0^b \{y_3^2 + 2y_1 y_3\} \rho r^2 dr . \quad (71)
 \end{aligned}$$

Ce résultat généralise au cas orthotrope le résultat de Woodhouse & Dahlen (1978). On notera toutefois une différence avec le résultat de ces auteurs pour les termes gravitationnels. Plus précisément, sauf erreur de notre part :

$$\begin{aligned}
 2\omega_x \{ \delta\omega_{x,m}(71) - \delta\omega_{x,m}(W.D.) \} \int_0^b \{y_1^2 + \ell(\ell+1)y_3^2\} \rho r^2 dr &= \\
 &= A \ell^m \int_0^b \frac{y_5^2}{4\pi G r} (1+\eta)(4-\ell(\ell+1)) - 2\rho y_3 y_5 (\ell(\ell+1)-3) h_2 dr . \quad (72)
 \end{aligned}$$

On remarquera que la différence de signe est simplement liée à la définition de h_2 .

Reprenant alors les notations de Dahlen & Sailor (1979), les corrections d'ellipicité et de rotation des fréquences propres prennent ainsi la forme :

$$\delta\omega_{x,m} = \omega_x \{ a_x + m b_x + m^2 c_x \} , \quad (73)$$

avec dans le cas d'un mode Toroidal :

$$a_x = \int_0^b y_7^2 \{ (\eta+1)(\ell(\ell+1)-3)(\ell-1)(\ell+2) \frac{N}{r^2} - (\eta+3) \left(\frac{N}{r^2} (9\ell^2+13\ell-12) + \rho\omega^2(\ell(\ell+1)-3) \right) +$$

$$y_8^2 \frac{1-\eta}{L} (\ell(\ell+1)-3) - \frac{2y_7y_8}{r} \{ (\eta+5)(\ell(\ell+1)-3) + (2\ell+1)(2\ell+3) \} rh_2 dr / (2\omega_x^2(2\ell+1)(2\ell+3) \int_0^b y_7^2 r^2 dr)$$

$$b_x = \frac{|\Omega|}{\omega_x^2 \ell(\ell+1)},$$

$$c_x = - \frac{3}{\ell(\ell+1)} a_x,$$

et dans le cas sphéroïdal :

$$a_x = \frac{\ell(\ell+1)}{2\omega_x^2(2\ell+1)(2\ell+3)} \int_0^b \frac{y_1^2}{r} \{ 4(\eta+4)(A - N \frac{F^2}{C}) + 10\rho g_0 r - \rho\omega^2 r^2(\eta+3) \} + r y_2^2 \frac{1-\eta}{C}$$

$$+ \frac{y_3^2}{r} \{ \ell(\ell+1)(\ell(\ell+1)(\eta+1)(A - \frac{F^2}{C}) - 6(A - \frac{F^2}{C}) - 2N(7\eta + 13) - \rho\omega^2 r^2(\eta+3)) + 12N(2\eta+5) -$$

$$- 3\rho\omega^2 r^2(\eta+3) \} + r y_4^2 \frac{1-\eta}{\ell} (\ell(\ell+1)-3) + \frac{y_5^2}{4\pi G r} (1+\eta)(4-\ell(\ell+1)) + 2y_1 y_2 \{ 2\eta \frac{F}{C} + 3(\frac{F}{C} - 1) \}$$

$$+ \frac{y_1 y_3}{r} \{ 12(A - 4N - \frac{F^2}{C}) + 6\rho g_0 r(\eta+2) - 6\rho\omega^2 r^2 + \ell(\ell+1)(-2(2\eta+5)(A - N - \frac{F^2}{C}) +$$

$$+ 18N - 2\rho g_0 r) \} + 2y_1 y_4 \{ \ell(\ell+1)\eta - 3(\eta+2 + 2\frac{F}{C}) \} - 2\ell(\ell+1)\rho y_1 y_5 - 2\rho r y_1 y_6(\eta+1) +$$

$$+ y_2 y_3 \{ -\frac{2F}{C}(\ell(\ell+1)\eta-3) + 6(\eta+1) \} + \frac{6}{C} r y_2 y_4 + 2y_3 y_4 \{ 3(\eta+6) - \ell(\ell+1)(\eta+3 - 3\frac{F}{C}) \}$$

$$- 2y_3 y_5 \rho(\eta+3)(\ell(\ell+1)-3) - 2\rho\ell(\ell+1)r y_3 y_6 h_2 dr / \int_0^b \{ y_1^2 + \ell(\ell+1)y_3^2 \} \rho r^2 dr ,$$

$$b_x = \frac{|\Omega|}{\omega_x^2} \int_0^b \{ y_3^2 + 2y_1 y_3 \} \rho r^2 dr / \int_0^b \{ y_1^2 + \ell(\ell+1)y_3^2 \} \rho r^2 dr ,$$

$$c_x = -\frac{3}{\ell(\ell+1)} a_x + \frac{1}{3} \frac{|\Omega|^2}{\omega_x^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{3} |\Omega| b_x .$$

Les termes $|\Omega|^2$ et $|\Omega| b_x$ sont à négliger dans une approche au premier ordre. Si l'on en tient compte, il faut également tenir compte des couplages entre modes (cf. paragraphe 1 et Dahlen & Sailor (1979) où les formules explicites sont données). Ceci n'est, a priori, valable que dans le cas d'un noyau externe isentropique. Rappelons que, si l'on se restreint aux perturbations de premier ordre, a_x et c_x sont liés par :

$$c_x = -\frac{3}{\ell(\ell+1)} a_x .$$

Il en résulte que :

$$\sum_{m=-\ell}^{m=\ell} (a_x + m^2 c_x) = (2\ell+1)(a_x + \ell(\ell+1) c_x/3) = 0 ,$$

si bien que :

$$\sum_m \delta\omega_{x,m} = 0 .$$

Cette relation est connue sous le nom de "diagonal sum rule" (cf. Gilbert (1971)). Elle est à l'origine du concept de modèle de référence à symétrie sphérique, puisqu'elle montre que la valeur moyenne des fréquences propres d'un multiplet est inchangée par des perturbations du premier ordre, de moyenne sphérique nulle.

Le calcul effectif de l'éventuelle correction à apporter à a_x (Woodhouse & Dahlen (1978), Dahlen & Sailor (1979) et (71)) dans le cas d'un mode sphéroïdal, montre qu'elle n'excède que rarement 1% de sa valeur. Ce qui est négligeable, a_x étant déjà une correction de l'ordre de 10^{-3} , et n'est donc pas de nature à expliquer les "splittings anormaux".

4 "Splittings" anormaux.

Ritzwoller et al. (1987) ont montré que de nombreux multiplets présentaient des "splittings" anormaux. L'ordre de grandeur des perturbations relatives anormales des simplets est de l'ordre de 10^{-3} . Nous avons regroupé dans le tableau ci-dessous les modes concernés (d'après le tableau 4 de l'article de Ritzwoller et al.). Nous indiquons pour chaque mode la part, en pourcentage, de l'énergie élastique du noyau externe et de la graine, de l'énergie de surface à l'interface noyau-manteau et à l'interface noyau-graine, en suivant la formulation donnée dans la proposition 14 du chapitre II. La figure 2 montre, quant à elle, la disposition des fréquences propres de ces différents multiplets par rapport aux deux branches de Stoneley et des branches de la graine (cf Okal 1978).

	<i>Fréquence en mHz</i>	<i>En. elast. noyau en %</i>	<i>En. elast. graine en %</i>	<i>En. surface noy. mant. en %</i>	<i>En. surface Noy. gr. en %</i>
${}_1S_7$	1.65522	6.7	10^{-5}	2.2	10^{-8}
${}_1S_8$	1.79897	7.	10^{-6}	2.5	10^{-9}
${}_2S_3$	1.24343	22.	1.25	0.9	$4 \cdot 10^{-5}$
${}_2S_4$	1.37974	14.5	0.03	1.3	$8 \cdot 10^{-7}$
${}_3S_2$	1.10598	26.5	10.	0.3	0.05
${}_4S_4$	2.27963	15.5	0.1	0.001	$2 \cdot 10^{-6}$
${}_5S_6$	3.01203	1.4	0.001	0.003	10^{-6}
${}_6S_3$	2.82171	46.7	1.8	0.5	$8 \cdot 10^{-6}$
${}_{10}S_2$	4.04100	47.4	8.9	0.3	$4 \cdot 10^{-6}$
${}_{11}S_4$	4.76597	47.	1.5	0.1	$8 \cdot 10^{-6}$
${}_{11}S_5$	5.07232	45.4	0.9	0.06	$4 \cdot 10^{-6}$
${}_{13}S_2$	4.84397	43.6	9.7	0.02	$2 \cdot 10^{-5}$
${}_{13}S_3$	5.19406	47.3	4.6	0.005	10^{-6}
${}_3S_1$	0.04427	41.	0.3	0.2	0.01
${}_8S_1$	2.87284	45.1	7.9	0.2	$4 \cdot 10^{-6}$

fréquences

en

milliHertz :

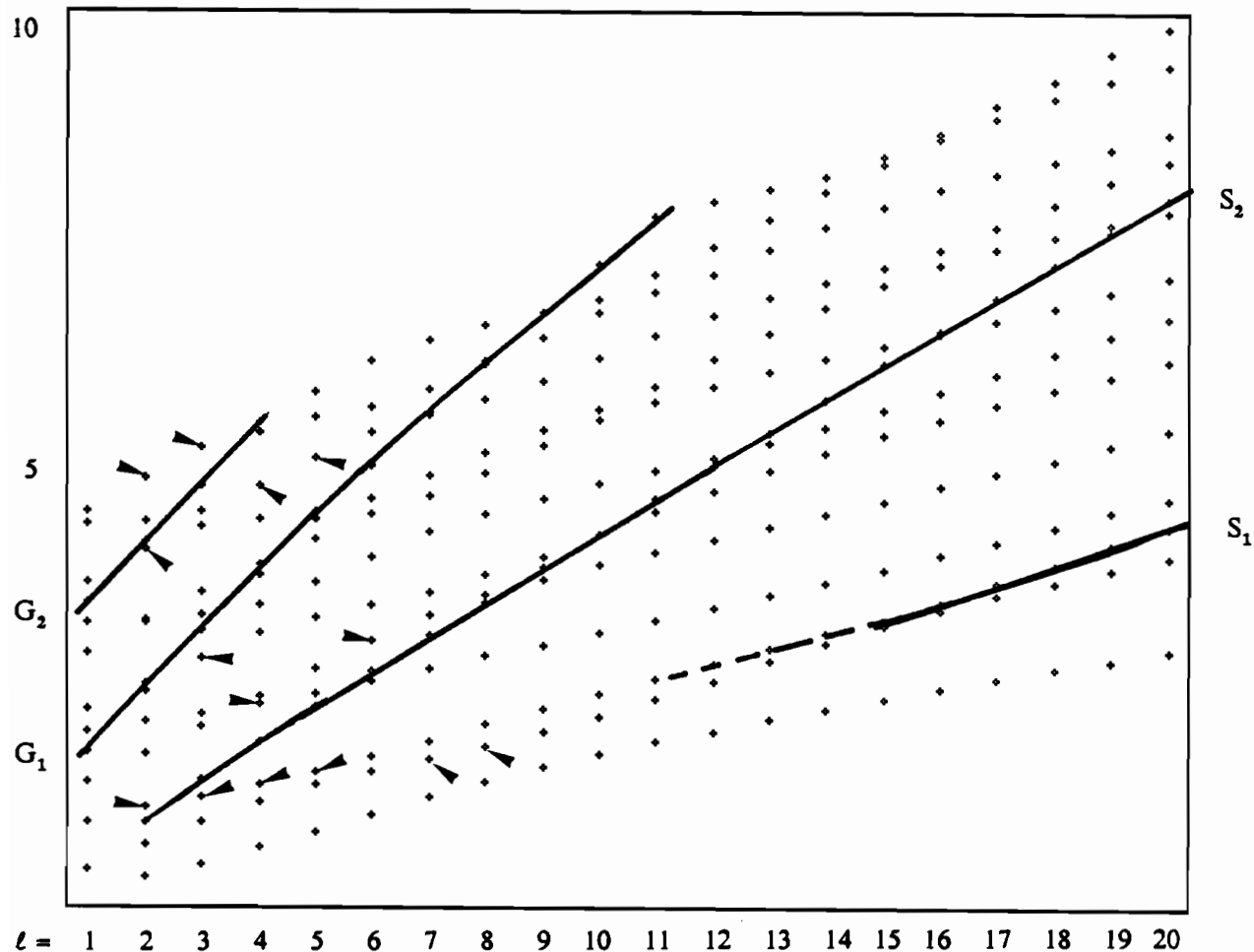


figure 3 : Position des fréquences propres des modes anormalement "splittés" par rapport aux branches de Stoneley S_1 (noyau-manteau), S_2 (noyau-graine) et de la graine G_1, G_2 .

Deux familles semblent se dégager grosso modo. L'une est constituée des modes précurseurs de la branche de Stoneley correspondant à l'interface noyau-manteau (1er et 2ème harmoniques). Ces modes sont caractérisés par une forte énergie (quelques %) sur cette interface, une faible énergie dans la graine et guère plus de 25% de l'énergie dans le noyau en général. L'autre est constituée de modes qui présentent plus de 50% de l'énergie dans le noyau, une faible énergie aux interfaces et une énergie souvent non négligeable dans la graine.

Reste ${}_5S_6$, le loup blanc de ces modes, avec 1,5% de l'énergie dans le noyau. A contrario, notons que le multiplet ${}_6S_1$, perçu comme "normal" par Ritzwoller et al. (cf leur tableau 4), présente plus de la moitié de son énergie dans le noyau dont 8% dans la graine. C'est aussi le cas de ${}_3S_1$ qui a 40% de son énergie dans le noyau externe.

Il semble a priori impossible de concevoir un splitting anormal du mode ${}_5S_6$ qui n'ait pas son origine dans le manteau. Pour ce qui est de ${}_3S_1$ et de ${}_6S_1$, on notera que leur ordre angulaire est 1. Il reste néanmoins raisonnable de penser que les anomalies qui affectent l'ensemble de ces multiplets provient pour une large part du noyau externe. Quelles sont les origines possibles ? On peut invoquer la convection dans le noyau liée à l'existence du champ magnétique et à des hétérogénéités latérales de densité d'une part, et des effets d'interface d'autre part.

Détaillons de plus près l'influence de la convection en supposant que l'on reste proche de la configuration sphérique. Pour obtenir l'expression de la perturbation de configuration correspondante on est conduit à perturber virtuellement ($\delta_1\rho = 0$) les équations (1b,c) du paragraphe 4 du chapitre I. En notant maintenant v le champ de vitesse dans le noyau externe pour ne pas le confondre avec le champ de perturbations ξ , cela nous mène à :

$$\frac{1}{\rho} \text{grad}(\delta_1 p) - D\xi^*(g_0) = \delta_1 g \quad (74a)$$

avec :

$$\delta_1 g = Dg_0(\xi) + \text{grad}\delta_e\phi + \Omega^2 r - \Omega.r \Omega - 2\Omega \wedge v - Dv(v) + g_{\text{lorentz}} \quad (74b)$$

La perturbation doit être conçue comme une perturbation de trajectoire (voir le paragraphe 4 du chapitre I) dans le noyau externe.

L'action dynamique de la convection et l'accélération associée à la force de Lorentz sont donc à comparer à l'accélération centrifuge. Si le champ magnétique est relativement bien connu à l'interface noyau-manteau (cf. Le Mouél et al. (1985)), il ne semble pas exister de consensus sur son intensité à l'intérieur du noyau. Le doute porte essentiellement sur sa partie toroïdale. En tout cas il ne semble pas que la force de Lorentz puisse dépasser de beaucoup le terme de Coriolis $\Omega \wedge v$.

Tout revient donc à comparer v avec $|\Omega| |r|$ qui est de l'ordre de 100 m/s dans le noyau externe. v est de l'ordre de 10^{-4} m/s à la surface noyau-manteau (Gire et al. (1986)) et des vitesses supérieures à 1 m/s paraissent déraisonnables. On ne voit donc pas comment l'équation (74a,b) pourrait être numériquement différente de l'équation de Clairaut (13,20). En d'autre terme le champ magnétique et la vitesse de convection n'ont aucune influence sur la forme de la Terre au premier et, probablement même, au deuxième ordre. On ne peut donc envisager un effet appréciable dû à des hétérogénéités latérales de la densité qui ne soient déjà prises en compte par la correction d'ellipticité.

On déduit du paragraphe I et du chapitre I 4.13, 4.14 que le seul terme du premier ordre en v qui apparaît dans l'expression de "l'opérateur de splitting" est dans $\delta_1 B$ (cf. paragraphe I et chapitre I 4.13, 4.14) :

$$(\delta_1 B u | u') = \int_V Du(\rho v) \cdot \bar{u}' dV + \left(\int_V (\Omega \wedge u) \cdot \bar{u}' \rho dV \right)$$

avec, rappelons le :

$$v = 0 \text{ dans } V_S, \text{ div}(\rho v) = 0 \text{ dans } V_F \text{ et } v \cdot n = 0 \text{ sur } \partial V_S \cap \partial V_F .$$

La matrice de splitting est alors non diagonale. En effet, posons :

$$u = y_1(r) Y_\ell^m e_r + y_3(r) \text{grad}_T(Y_\ell^m r)$$

$$u' = y_1(r) Y_\ell^m e_r + y_3(r) \text{grad}_T(Y_\ell^m r)$$

$$\xi = x_1(r) Y_\lambda^\mu e_r + x_3(r) \text{grad}_T(Y_\lambda^\mu r) + x_7(r) \text{Rot}(Y_\lambda^\mu r) .$$

Reprenant les notations de Phinney & Burridge (1973) on obtient :

$$\begin{aligned} u &= \left\{ y_1 Y_\ell^{0,m} e_0 + \sqrt{\ell(\ell+1)/2} y_3 Y_\ell^{\epsilon,m} e_r \right\} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \\ &= U_\ell^{\alpha,m} Y_\ell^{\alpha,m} e_\alpha \quad \text{avec : } \alpha = \epsilon, 0 . \end{aligned}$$

Il s'agit de calculer :

$$I = \int_V \text{Du}(\xi v) \cdot \bar{u}' \, dV .$$

D'après Phinney & Burridge (1973) :

$$D^\beta u^\alpha = U_\ell^{\alpha|\beta,m} Y^{(\alpha+\beta),m}$$

on en déduit que :

$$\text{Du}(\xi v) \cdot \bar{u}' = (-1)^\beta U^{\alpha|\beta,m} \bar{U}_\ell^{\alpha,m'} X_\lambda^{-\beta,\mu} Y_\ell^{(\alpha+\beta),m} \bar{Y}_\ell^{\alpha,m'} Y_\lambda^{-\beta,\mu} .$$

L'intégrale de surface est connue :

$$\int_\Sigma Y_\ell^{(\alpha+\beta),m} \bar{Y}_\ell^{\alpha,m'} Y_\lambda^{-\beta,\mu} \, d\Omega = GF_{\alpha\beta}$$

avec :

$$F_{\alpha\beta} = (-1)^\alpha \begin{bmatrix} \ell & \ell & \lambda \\ -\alpha & \alpha+\beta & -\beta \end{bmatrix} \quad (75a)$$

$$G = (-1)^\mu 4\pi \begin{bmatrix} \ell & \ell & \lambda \\ -m' & m & \mu \end{bmatrix} . \quad (75b)$$

Les symboles de Wigner ne sont non nuls que si :

$$\mu = m' - m \quad , \quad 0 \leq \lambda \leq 2\ell .$$

Il vient ensuite :

$$dI = (-1)^\beta GF_{\alpha\beta} U_\ell^{\alpha|\beta.m} \bar{U}_\ell^{\alpha.m'} X_\lambda^{-\beta.(\mu-m)} \rho r^2 dr$$

$$U_\ell^{\alpha|\beta} = \dot{U}_\ell^\alpha \delta^{0\beta} + \delta^{\epsilon\beta} \{ \Omega_{\alpha+(\epsilon+1)/2} U_\ell^\alpha - \delta^{\alpha(-\epsilon)} U_\ell^0 - \delta^{0\alpha} U_\ell^\epsilon \} / r$$

avec :

$$\Omega_p(\ell) = \sqrt{(\ell+p)(\ell-p+1)}/2$$

$$\Omega_0(\ell) = \Omega_1 = \Omega_{1+\epsilon}/2 = \sqrt{\ell(\ell+1)}/2 \tag{76}$$

$$\Omega_2(\ell) = \Omega_{-1} = \Omega_{3\epsilon+1}/2 = \sqrt{(\ell-1)(\ell+2)}/2 .$$

Omettant les indices évidents, nous obtenons :

$$dI = G\rho r^2 dr \{ F_{\alpha 0} \dot{U}^\alpha \bar{U}^\alpha X^0 - \{ F_{\epsilon\epsilon} \Omega_2(\ell) U^\epsilon \bar{U}^\epsilon + F_{-\epsilon\epsilon} (\Omega_0(\ell) U^{-\epsilon} - U^0) \bar{U}^{-\epsilon} + F_{0\epsilon} (\Omega_0(\ell) U^0 - U^\epsilon) \bar{V}^0 \} X^{-\epsilon}/r \}$$

Par antisymétrie, on en déduit que :

$$I = \frac{1}{2} \int_0^b G\rho r dr \{ F_{\alpha 0} (X^0 (\dot{U}^\alpha \bar{U}^\alpha - U^\alpha \bar{U}^\alpha) r + (X^\epsilon - X^{-\epsilon}) \{ F_{\epsilon\epsilon} \Omega_2(\ell) U^\epsilon \bar{U}^\epsilon + F_{-\epsilon\epsilon} \Omega_0(\ell) U^{-\epsilon} \bar{U}^{-\epsilon} + F_\epsilon \Omega_0(\ell) U^0 \bar{U}^0 \} + \{ F_{-\epsilon\epsilon} (U^0 \bar{U}^{-\epsilon} X^{-\epsilon} - U^{-\epsilon} \bar{U}^0 X^\epsilon) + F_{0\epsilon} (U^\epsilon \bar{U}^0 X^{-\epsilon} - U^0 \bar{U}^\epsilon X^\epsilon) \} \} .$$

Revenant aux composantes classiques :

$$U^0 = y_1 \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \quad , \quad U^\epsilon = \Omega_0(\ell) \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} y_3 \quad ,$$

$$X^0 = x_1 \sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}} \quad , \quad X^\epsilon = \Omega_0(\lambda) \sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}} (x_3 + \epsilon i x_7) \quad ,$$

on déduit de l'expression de I, en posant $\lambda = 2k-1$, que :

$$H_{mm'}^x = -\frac{(2\ell+1)\omega_x}{\pi} \sqrt{\frac{4k-1}{\pi}} \sum_{k=1}^{\ell} \text{GF}_{10}\Omega_0^2(\ell) \int_0^b x_{7,2k-1} (y_1^2 - k(2k-1)y_3^2) \rho r dr$$

$$/ \int_0^b (y_1^2 + \ell(\ell+1)y_3^2) \rho r^2 dr$$

et enfin, grâce à (75) et (76), que :

$$H_{mm'}^x = -(-1)^{m'}(2\ell+1) \omega_x \sum_{k=1}^{\ell} \sqrt{\frac{k(2k-1)(4k-1)(\ell-k+1)(2(\ell+k)+1)}{\pi}} \begin{pmatrix} \ell & \ell & 2k-1 \\ -m' & m & m'-m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2k-1 & \ell & \ell+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^b x_{7,2k-1}^{m'-m} (y_1^2 - k(2k-1)y_3^2) \rho r dr / \int_0^b (y_1^2 + \ell(\ell+1)) \rho r^2 dr \quad (77)$$

Au premier ordre, la vitesse n'intervient donc dans le noyau que par ses composantes impaires toroïdales. C'est d'ailleurs cette partie de la vitesse qui est la plus importante. Pour se faire une idée de l'ordre de grandeur de ce terme, nous avons utilisé le champ de vitesse proposé par Le Mouel et al. (1987) en configuration sphérique. Ce champ a été obtenu par prolongement dans le noyau des résultats obtenus par Gire et al. (1986) à l'interface avec le manteau. Pour effectuer le prolongement ces auteurs ont supposé que dans l'équation d'équilibre stationnaire $Dv(v)$ et g_{lorentz} sont négligeables devant $\Omega \wedge v$. Ils montrent que le champ de vitesse est déterminé dès que l'on connaît les fonctions composantes du développement de v_r en harmoniques sphériques :

$$v_r = \sum_{\ell, m} f_{\ell}^m(r) Y_{\ell}^m.$$

Tout revient donc à déterminer ces coefficients f_{ℓ}^m . La seule information dont on dispose a priori est qu'ils sont nuls aux interfaces. La connaissance du champ à l'interface avec le manteau et la condition de stationnarité donnent accès à leur dérivée radiale. Il est donc logique d'adopter le polynôme du deuxième degré ainsi déterminé, encore que ce soit physiquement arbitraire puisque cela conduit à séparer radialement le noyau en deux zones convectives. C'est ce que l'on a fait pour les composantes non zonales ($m \neq 0$). Le champ toroïdal zonal à l'interface avec le manteau étant pratiquement symétrique par rapport au plan équatorial (les harmoniques impairs dominant largement), il a été prolongé cylindriquement puisque ces mouvements sont peu susceptibles d'être atténués (cf. chapitre IV). Bref, l'ordre de grandeur du

mouvement est de l'ordre de 10^{-4} m/s. Cela conduit à des perturbations de fréquence $(\delta\omega/\omega)$ de l'ordre de quelques 10^{-6} . Explorant numériquement l'opérateur de "splitting" (grâce à une méthode spectrale que développe Ph. Lognonne) , des couplages non négligeables apparaissent entre modes "anormaux" ou avec les modes de la graine. La figure 3 montre d'ailleurs que la distribution des fréquences "anormales" est pour l'instant trimodale (1.5, 2.5, 5 mHz) et suggère de tels couplages, quelle qu'en soit la cause.

En résumé, le mouvement convectif ne peut avoir qu'une influence directe sur les modes. Il ne peut y avoir, à moins de renoncer à l'hypothèse de "fluidité", d'effet de masse volumique. L'ordre de grandeur de la vitesse minimum susceptible d'expliquer les anomalies de "splitting" est de quelques 10^{-2} m/s. Ce qui n'est pas d'emblée impensable quoi que deux ordres de grandeur plus grand que celui actuellement admis.

Restent les effets d'interface qui pourrait être liés à des phénomènes chimiques. Remarquons qu'ils impliquent un fort déviateur dans la zone solide frontière ; ils seraient donc évanescents. Les arguments qui peuvent être invoqués en faveur d'une telle origine sont d'une part que le mode ${}_5S_6$ ne présente que 1.5% d'énergie dans le noyau (il est néanmoins couplé avec d'autres modes "anormaux") et que, d'après la formule 2.68 du chapitre I, seul le déviateur et la rigidité ont un effet strictement nul pour $\ell = 1$.

5 Perturbation Lagrangienne du signal.

Considérons maintenant, dans le cas d'un noyau isentropique, une perturbation générale de paramètres, de rotation et d'ellipticité. On peut reprendre l'analyse faite au paragraphe 3, en introduisant maintenant (cf. (57),(61)) :

$$h^x(u, u') = 2\omega_x(i\delta B u | u') - \int_{\Sigma} (n.s(u))(D\xi[\bar{u}'] \cdot n + (n.s(\bar{u}'))(D\xi[u] \cdot n) d\Sigma + \\ + \hat{K}((u, \psi(u)) , (u', \psi(u'))) - \omega^2(\delta\rho u | u')_{L^2(V)} \quad (78)$$

et où apparaissent cette fois dans \hat{K} les termes dus à $\delta_1\rho$ et $\delta_1 b^{ijkl}$ (hét. lat.).

On peut montrer, comme au paragraphe 3, que les vecteurs $u_{x',m'}$ avec $\omega_{x'} = \omega_x$, sont les différents vecteurs propres de H^x , l'opérateur induit par h^x dans $\oplus_{x':\omega_{x'}=\omega_x} V_{x'}$, les valeurs

propres correspondantes étant les différents $2\omega_x \delta\omega_{x',m'}$. On peut également montrer que pour $\omega_x \neq \omega_{x'}$:

$$(\delta_1 u_{x,m} | u_{x',m'}) = \frac{h^x(u_{x,m}, u_{x',m'})}{\omega_{x',m'}^2 - \omega_x^2} . \quad (79)$$

Soit v le signal généré par une source sismique dans une configuration proche de la configuration sphérique avec noyau isentropique. On déduit de l'équation (21) du chapitre IV que :

$$\dot{v}(\tau) = \text{Re} \sum_{x,m} (f | u_{x,m}(\tau)) e^{i\omega_{x,m}(\tau)t} u_{x,m}(\tau) , \quad (80)$$

avec :

$$f(t) = f H(t)$$

et où les $u_{x,m}(\tau)$ représentent les différentes branches de vecteurs propres associées à ω_x , paramétrisées par le temps virtuel τ , chaque vecteur $u_{x,m}$ correspondant à l'état de référence étant de norme 1 dans $L^2(V, dm)$. Pour ce faire on doit normaliser à $\sqrt{2}$ les vecteurs $(-\hat{u}_{x,m}/\omega_{x,m}, u_{x,m})$ dans l'espace $D(a)/\text{Ker}(A) \times H$. Cela conduit en effet d'après la proposition 7 (13b) du chapitre III à :

$$(\omega_{x,m} + \omega_{x',m'})(u_{x,m} | u_{x',m'}) - 2(iB u_{x,m} | u_{x',m'}) = 2\omega_x \delta_x^{x'} \delta_m^{m'} . \quad (81)$$

De sorte que dans l'état de référence :

$$(u_{x,m} | u_{x',m'}) = \delta_x^{x'} \delta_m^{m'} . \quad (82)$$

On remarquera que le 1/2 qui devrait apparaître dans (80) est compensé par le fait que la somme devrait être étendue à la série des fréquences opposées $-\omega_{x,m}$.

La perturbation virtuelle de (80) autour de la configuration de référence conduit à :

$$\begin{aligned} \delta_1 \dot{v} &= \operatorname{Re} \sum_{x,m} \{ (f| \delta_1 u_{x,m}) u_{x,m} + (f| u_{x,m}) \delta_1 u_{x,m} + it \delta_1 \omega_{x,m} (f| u_{x,m}) u_{x,m} \} e^{i\omega_x t} \\ &= \operatorname{Re} \sum_{x,m} e^{i\omega_x t} \{ it \delta \omega_{x,m} (f| u_{x,m}) u_{x,m} + \sum_{x': \omega_{x'} = \omega_x, m'} (f| u_{x,m}) ((u_{x,m} | \delta_1 u_{x',m'}) + (\delta_1 u_{x,m} | u_{x',m'})) u_{x',m'} \\ &\quad + \sum_{x': \omega_{x'} \neq \omega_x, m'} (f| u_{x',m'}) (u_{x',m'} | \delta_1 u_{x,m}) u_{x,m} + (f| u_{x,m}) (\delta_1 u_{x,m} | u_{x',m'}) u_{x',m'} \} . \end{aligned}$$

La perturbation virtuelle de l'expression (81), compte tenu de (82) et de la proposition 3 du chapitre I, montre que :

$$\begin{aligned} (\delta_1 u_{x,m} | u_{x',m'}) + (u_{x,m} | \delta_1 u_{x',m'}) &= - (\delta \rho u_{x,m} | u_{x',m'})_{L^2(V)} - (\operatorname{div}(\xi) u_{x,m} | u_{x',m'}) + \\ &\quad + \frac{2}{\omega_x + \omega_{x'}} (i \delta B u_{x,m} | u_{x',m'}) . \end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque les $u_{x,m}$ sont vecteurs propres de H^x , on déduit que :

$$\delta \omega_{x,m} u_{x,m} = \frac{1}{2\omega_x} \sum_{x': \omega_{x'} \neq \omega_x} h^x(u_{x,m}, u_{x',m'}) u_{x',m'} .$$

Il en résulte, tenant également compte de (79) que :

$$\begin{aligned} \delta_1 \dot{v} &= \operatorname{Re} \sum_{x,m} \left\{ \sum_{x': \omega_{x'} = \omega_x, m'} \left(\frac{ith^x(u_{x,m}, u_{x',m'}) + 2(i \delta B u_{x,m} | u_{x',m'})}{2\omega_x} - (\delta \rho u_{x,m} | u_{x',m'})_{L^2(V)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\operatorname{div}(\xi) u_{x,m} | u_{x',m'}) (f| u_{x,m}) u_{x',m'} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{x': \omega_{x'} \neq \omega_x, m'} \frac{(f| u_{x',m'}) h^x(u_{x',m'}, u_{x,m}) u_{x,m} + (f| u_{x,m}) h^x(u_{x,m}, u_{x',m'}) u_{x',m'}}{\omega_x^2 - \omega_{x'}^2} \right\} e^{i\omega_x t} . \end{aligned} \tag{83}$$

Ce qui, dans le cas d'un noyau isentropique, généralise aux perturbations de crotation et d'ellipticité le résultat de Woodhouse (1983).

VI. MÉTHODES D'INVERSION ET PROBABILITÉ CONDITIONNELLE.

Les méthodes d'inversion ont pris de nos jours une grande importance dans les Sciences de la Terre puisque les observables sont obtenues à la surface du globe ou à bord de satellites. En effet le large développement des réseaux d'observations sismologiques, magnétiques, gravimétriques et l'exploitation des données spatiales ont rendu nécessaire une approche systématique des méthodes de traitement. Les problèmes qui se posent en Géophysique sont très mal posés car ils sont largement sous-déterminés ; il s'agit le plus souvent d'identifier un paramétrage fonctionnel, voire de reconstruire des interfaces à partir d'une collection finie de données d'observations. C'est dans ce contexte que Backus & Gilbert et Wiggins dans les années 1970 se sont intéressés à l'inversion d'un nombre fini de fonctionnelles linéaires. Ils ont mis en exergue un des concepts clefs de ce type de problème, celui de résolution. Depuis les méthodes classiques d'estimation, stochastique ou non, linéaire et non linéaire, ont pris peu à peu leur essor dans la discipline.

Il existe, dans le fond, deux approches, fondamentalement différentes dans leur esprit, du problème inverse.

L'une, que l'on peut qualifier de purement mathématique, s'intéresse à la description détaillée de la variété des modèles admissibles. Sans la moindre considération des erreurs ou de l'information plus ou moins floue que l'on peut fournir d'emblée sur le modèle, il s'agit de comprendre et de décrire la structure des solutions. Dans le domaine de la spectroscopie, connexe à la sismologie ("can we hear the shape of a drum" Kac (1966)), citons par exemple l'article de Sabatier (1978) ou encore les remarquables résultats obtenus récemment par Isaacson et Trubowitz (1983,1984) dans l'inversion du problème de Sturm-Liouville normalisé.

L'autre point de vue est plus pratique, à la fois un peu plus fin et beaucoup plus grossier. On renonce ici à préciser plus avant la description des modèles théoriquement admissibles mais on cherche à apprécier grosso modo l'extension des modèles physiquement acceptables, compte-

tenu des erreurs de toutes sortes et de l'a priori physique. Cette approche conduit naturellement à la description probabiliste. La manière la plus rigoureuse de rendre compte des différentes informations de nature physique et d'estimer le flou (ou l'"erreur") sur le modèle "solution", sans être (même inconsciemment) tributaire de la paramétrisation adoptée, est en effet d'utiliser la théorie de la mesure dans sa formulation probabiliste. On renvoie à Tarantola & Valette (1982) et aux premiers chapitres du livre de Tarantola pour un développement de ce point.

Nous nous proposons de développer ici les grandes lignes de ce deuxième point de vue. Notre sentiment est que le bon concept mathématique à utiliser est celui de probabilité conditionnelle. Cela nous conduit à une démarche de type bayésien. Il nous semble néanmoins que l'utilisation de la probabilité conditionnelle peut être rendue plus directe et couvrir des situations un peu plus larges que dans l'approche bayésienne classique. Nous renvoyons au cours de probabilité de l'Ecole polytechnique de Métivier et Neveu ou au livre de Neveu, pour les définitions et les résultats relatifs aux probabilités conditionnelles. Indiquons néanmoins que la situation typique de l'utilisation du concept de probabilité conditionnelle est celui où l'on considère deux éléments aléatoires définis sur un même espace probabilisé, à valeur dans deux espaces mesurés X_1 et X_2

$$X_1 : (X, \Sigma, \rho) \rightarrow X_1$$

$$X_2 : (X, \Sigma, \rho) \rightarrow X_2 .$$

L'objet du concept de probabilité conditionnelle est alors de rendre compte du supplément d'information apporté sur l'élément X_2 par une information sur X_1 .

I. Inversion en terme de probabilité conditionnelle. Le cas discret.

Soit X l'espace vectoriel isomorphe à \mathbb{R}^{n+m} des différentes grandeurs choisies pour décrire numériquement l'expérience physique considérée. Dans la plupart des cas cet espace se présente comme le produit $D \times M$, D étant l'espace des grandeurs d observées et M celui des paramètres de modélisation m .

On définit sur X une mesure μ qui représente la mesure d'information nulle et qui sert de base (de mesure) dans notre approche. Cette mesure traduit l'état de non-connaissance physique. C'est souvent la mesure de Lebesgue, mais ce n'est pas systématique, un jeu de changement de variable suffit à l'illustrer (voir Tarantola & Valette (1982)) pour plus de détails.

On suppose disposer de plus d'une information a priori qui représente la connaissance des différentes grandeurs avant ou suite à l'expérience physique. Cette information est la simple traduction des mesures physiques pour les grandeurs observables et décrit notre degré de connaissance a priori des paramètres du modèle. Cette information est représentée mathématiquement par une mesure de densité ρ par rapport à μ .

Une théorie physique s'exprime, idéalement, par le fait qu'une certaine fonction :

$$\forall x \in X, x \rightarrow f(x) \in Y$$

s'annule. Dans le cas où paramètres et observables sont séparés, elle prend la forme :

$$f(d,m) = d - g(m) = 0 \in D.$$

Par ailleurs $y = f(x) (= d - g(m))$ est un élément aléatoire.

On définit alors l'information a posteriori comme étant la probabilité conditionnelle sur x (ou sur m) étant donné $y = 0$, c'est à dire étant donné l'information apportée par la théorie. Elle est représentée par une mesure de base μ .

Dans le cas où :

$$X = D \times M, d - g(m) = 0,$$

et où l'on suppose que :

$$\mu = \mu_D \otimes \mu_M \text{ et } \rho(x) = \rho_D(d) \rho_M(m),$$

c'est à dire que les informations sur les données et le modèle sont indépendantes, on obtient la :

Proposition 1 :

L'information a posteriori prend la forme :

$$\mu'_{\mathbf{M}}(dm) = c^{cte} \rho_{\mathbf{D}}(g(m)) \rho_{\mathbf{M}}(m) \mu_{\mathbf{M}}(dm) . \quad (1)$$

Preuve :

Le couple aléatoire

$$(m, y) = (m, d - g(m))$$

admet la loi :

$$\rho_{\mathbf{D}}(y + g(m)) \rho_{\mathbf{M}}(m) \mu_{\mathbf{D}}(dy) \mu_{\mathbf{M}}(dm) .$$

Il suffit alors d'appliquer un résultat classique (cf Neveu et Métivier par exemple) ■

Le cas gaussien est particulièrement intéressant. Dans ce cas :

$$\mu'(dm) = c^{te} \exp \{-E_m\} \mu(dm) . \quad (2)$$

avec :

$$E_m = \frac{1}{2} \{ C_d^{-1}(d_0 - g(m)).(d_0 - g(m)) + C_m^{-1}(m - m_0).(m - m_0) \} . \quad (3)$$

en notant d_0 et m_0 les espérances et C_d , C_m les opérateurs d'autocorrélation supposés définis positifs.

L'information a posteriori n'est gaussienne que si g est linéaire. Dans le cas contraire on peut néanmoins approcher localement la loi par des lois gaussiennes, si l'on suppose que g est de classe C^2 .

Pour ce faire, il faut tout d'abord déterminer les maximums de vraisemblance, c'est à dire les modèles \hat{m} pour lesquels $E(m)$ admet un minimum strict. Ce qui conduit à résoudre un problème de moindres carrés généralisés.

Un développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de chacun des \hat{m} montre ensuite que :

$$E(m) - E(\hat{m}) - \frac{1}{2} H_{\hat{m}}(m - \hat{m}, m - \hat{m}) = o(\|m - \hat{m}\|^2),$$

et donc que :

$$\mu'(dm) = c^{te} \exp\{-E(\hat{m})\} \exp\{o(\|m - \hat{m}\|^2)\} \exp\left\{-\frac{1}{2} H_{\hat{m}}(m - \hat{m}, m - \hat{m})\right\} \mu(dm). \quad (4)$$

en notant $H_{\hat{m}}$ le Hessien de E en \hat{m} qui est défini positif puisque E y est strictement minimum.

Il apparait ainsi que la loi a posteriori est localement tangente à la gaussienne de centre \hat{m} et d'opérateur d'autocorrélation $H_{\hat{m}}^{-1}$. Un calcul élémentaire montre de plus que :

$$\text{grad } E(m) = G_{\hat{m}}^* C_d^{-1}(g(m) - d_0) + C_m^{-1}(m - m_0), \quad (5)$$

$$H(\hat{m}) = G_{\hat{m}}^* C_d^{-1} G_{\hat{m}} + C_m^{-1} + (K_{\hat{m}}(\cdot)) C_d^{-1}(g(m) - d_0) \quad (6)$$

en notant $G_{\hat{m}}$ la dérivée de g en \hat{m} et $K_{\hat{m}}$ l'opérateur bilinéaire symétrique dérivé seconde en \hat{m} .

Enfin, la probabilité relative de chacune de ces zones de solutions $(\hat{m}, H_{\hat{m}}^{-1})$ peut être appréciée grâce aux différents facteurs $\exp\{-E(\hat{m})\}$.

Par ailleurs, en analogie avec la physique statistique, il s'est développé des méthodes pour décrire asymptotiquement des lois du type de (2) dans le cas où g est fortement non-linéaire (Kirkpatrick et al. (1982)). Il s'agit essentiellement (voir Geman & Geman (1983)), de construire un processus de Markov dans M qui converge en loi vers (2) indépendamment de son initialisation. Ce processus peut être légèrement modifié de manière à tenir compte d'une température

virtuelle T en dénominateur de "l'énergie" $E(m)$. On peut alors montrer (Geman & Geman) que si au cours de l'évolution du processus, $T(t)$ tend vers 0 moins vite que $1/\text{Log}t$ alors le processus converge vers le minimum absolu de E . On trouvera dans les articles de Rothman (1984, 1985) une adaptation de ces idées à un problème de prospection pétrolière.

2. Moindres carrés généralisés

Nous avons vu au paragraphe précédent que la description de l'information a posteriori nécessite la résolution d'un problème de moindres carrés. Il s'agit de rendre minimum :

$$E(m) = C_m^{-1}(m-m_0).(m-m_0) + C_d^{-1}(d_0-g(m)).(d_0-g(m))$$

Plus généralement cherchons à minimiser :

$$\begin{array}{l} \chi^2 = C^{-1}(x-x_0).(x-x_0) \\ \text{sous la contrainte :} \\ f(x) = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \} \\ \} \\ \} \end{array} \right\} (7)$$

Sous cette forme il est clair que cela revient à chercher les points de la variété

$$\Gamma = \{ x \in X : f(x) = 0 \}$$

qui sont localement les plus proches de x_0 au sens de la métrique induite par C^{-1} .

Supposons que f est de classe C^1 dans un voisinage de Γ et que la dérivée de f , A_y , est surjective en tout point y de Γ . Les points y de Γ qui rendent cette distance stationnaire vérifient :

$$\begin{array}{l} P_y(y - x_0) = 0 \\ f(y) = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \} \\ \} \\ \} \end{array} \right\} (8)$$

où P_y désigne le projecteur orthogonal, relativement à la métrique issue de C^{-1} , sur l'espace tangent à Γ en y que l'on notera $T_y(\Gamma)$. Nous avons montré (Tarantola & Valette (1982)) que :

$$P_y = I - CA_y^*(A_yCA_y^*)^{-1}A_y$$

et que (8) est équivalent à :

$$y = x_0 - CA_y^*(A_y CA_y^*)^{-1}\{A_y(y - x_0) - f(y)\} . \quad (10)$$

Reste à étudier la dépendance de y à x_0 et de vérifier que χ^2 est minimum. C'est l'objet de la :

Proposition 2 :

Supposons que f est de classe C^2 dans un voisinage ouvert V de X . Soit $(x_0, y_0) \in \Gamma \times V$ un couple de points de X vérifiant (10) et tel que l'opérateur L_{y_0} défini par :

$$v \rightarrow L_{y_0}(v) = -P_{y_0}C(K_{y_0}(v))^* \left[A_{y_0} CA_{y_0}^* \right]^{-1} A_{y_0} (y_0 - x_0) . \quad (11)$$

est inversible. Alors :

a- Il existe un voisinage ouvert de (x_0, y_0) tel que dans ce voisinage la solution de (10) prend la forme $y = h(x)$ où h est de classe C^1 et de dérivée $h'(x) = L_y P_y$.

b- $L_{y_0} P_{y_0}$ est auto-adjoint pour le produit scalaire induit par C^{-1} et il est non négatif si et seulement si $\|y - x_0\|_{C^{-1}}$ est localement minimum sur Γ .

Preuve :

a- Considérons la fonction ϕ de $X \times X$ dans X , définie par :

$$\phi(x, y) = y - x - CA_y^*(A_y CA_y^*)^{-1}\{A_y(y - x) - f(y)\}$$

ϕ est de classe C^2 dans $X \times V$. Utilisant les règles de dérivation élémentaires (voir Cartan par exemple) on déduit que :

$$\phi'_x(x, y)(\delta x) = -P_y(\delta x) . \quad (11a)$$

$$\phi'_y(x, y)(\delta y) = \delta y - CA_y^*(A_y CA_y^*)^{-1}K_y(\delta y, y - x) - C(K_y(\delta y))^*(A_y CA_y^*)^{-1}\{A_y(y - x) - f(y)\}$$

$$\begin{aligned}
& + CA_y^*(A_y CA_y^*)^{-1} K_y(\delta y, CA_y^*(A_y CA_y^*)^{-1}(A_y(y-x) - f(y))) \\
& + CA_y^*(A_y CA_y^*)^{-1} A_y C(K_y(\delta y))^*(A_y C A_y^*)^{-1}(A_y(y-x) - f(y)) \quad (11b) \\
= & \delta y - CA_y^*(A_y C A_y^*)^{-1} K_y(\delta y, \phi(x, y)) - P_y C(K_y(\delta y))^*(A_y CA_y^*)^{-1}(A_y(y-x) - f(y)) .
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\phi'_y(x_0, y_0) = L_{y_0} ,$$

est donc un automorphisme de X . Le théorème des fonctions implicites permet de conclure.

b- Puisque A_y est surjective pour $y \in \Gamma$ le théorème des fonctions implicites montre qu'il existe une paramétrisation de Γ au voisinage de y_0 de la forme :

$$\forall y \in Y \quad y \rightarrow g(y) \in \Gamma ,$$

où g est de classe C^2 et où :

$$g(0) = y_0 .$$

Tout revient à étudier localement la fonction :

$$\forall \alpha \in X, \alpha \rightarrow d(\alpha) = \|g(\alpha) - x_0\|_{C^{-1}}^2 .$$

Le Hessien de d est :

$$H(d)(\xi_1, \xi_2) = 2 \{C^{-1}(y_0 - x_0)g''(0)(\xi_1, \xi_2) + C^{-1}g'(0)\xi_1 \cdot g'(0)\xi_2\} \quad (12)$$

d réalise un minimum local strict en α si $H(d)$ est strictement positif et si d ne le réalise pas $H(d)$ n'est pas positif. Puisque $g'(0)$ est un isomorphisme de Y sur $T_{y_0}(\Gamma)$ il est équivalent de considérer la forme de $T_{y_0}(\Gamma) \times T_{y_0}(\Gamma)$ définie par :

$$\forall (v_1, v_2) \in T_{y_0}(\Gamma) \times T_{y_0}(\Gamma) , \Psi(v_1, v_2) = \frac{1}{2} H(d)(g'(0)^{-1}v_1, g'(0)^{-1}v_2) \quad (13)$$

Précisons maintenant l'expression de Ψ . On déduit d'emblée (13) et de (12) que :

$$\Psi(v_1, v_2) = C^{-1}(y_0 - x_0) \cdot g''(0)(g'(0)^{-1}v_1, g'(0)^{-1}v_2) + C^{-1}v_1 \cdot v_2$$

Par double dérivation en $\alpha = 0$ de la relation :

$$f \circ g = 0$$

on déduit que :

$$K_{y_0}(g'(0) \bullet, g'(0) \bullet) = -A_{y_0} g''(0)(\bullet, \bullet). \quad (14)$$

Tenant compte de cette dernière relation et de (10) on obtient alors que :

$$C^{-1}(y_0 - x_0) \cdot g''(0)(g'(0)^{-1}v_1, g'(0)^{-1}v_2) = - \left[A_{y_0} C A_{y_0}^* \right]^{-1} A_{y_0} (y_0 - x_0) \cdot K_{y_0}(v_1, v_2).$$

De sorte que :

$$\Psi(v_1, v_2) = C^{-1}v_1 \cdot v_2 - \left[A_{y_0} C A_{y_0}^* \right]^{-1} A_{y_0} (y_0 - x_0) \cdot K_{y_0}(v_1, v_2). \quad (15)$$

Il découle par ailleurs de (9) et de (11) que :

$$C^{-1}L_{y_0} P_{y_0} v_1 \cdot v_2 = C^{-1}P_{y_0} v_1 \cdot v_2 - C^{-1}P_{y_0} C (K_{y_0}(P_{y_0} v_1))^* \left[A_{y_0} C A_{y_0}^* \right]^{-1} A_{y_0} (y_0 - x_0) \cdot v_2.$$

Tenant alors compte de l'auto-adjonction du projecteur P_{y_0} par rapport au produit scalaire issu de C^{-1} , c'est à dire de :

$$P_{y_0} P_{y_0} = P_{y_0} \quad \text{et} \quad P_{y_0} C = C P_{y_0}^*,$$

il en résulte que :

$$C^{-1}L_{y_0}P_{y_0}v_1 \cdot v_2 = C^{-1}P_{y_0}v_1 \cdot P_{y_0}v_2 - \left[A_{y_0}CA_{y_0}^* \right]^{-1}A_{y_0}(y_0 - x_0) \cdot K_{y_0}(P_{y_0}v_1, P_{y_0}v_2) . \quad (16)$$

Il apparait donc que $L_{y_0}P_{y_0}$ est auto-adjoint par rapport au produit scalaire issu de C^{-1} et que la restriction de la forme bilinéaire (16) à $T_{y_0}(\Gamma)$ est Ψ .

Enfin puisque L_{y_0} est un automorphisme, le noyau de $C^{-1}L_{y_0}P_{y_0}$ est l'orthogonal de $T_{y_0}(\Gamma)$ (par rapport à C^{-1}). Ainsi Ψ est définie positive sur $T_{y_0}(\Gamma)$ si et seulement si $L_{y_0}P_{y_0}$ est non négatif. Cela montre que d réalise un minimum local strict en α si et seulement si $L_{y_0}P_{y_0}$ est non négatif. ■

Pour résoudre (10) nous avons proposé (voir Tarantola & Valette (1982)) d'utiliser un algorithme de point fixe qui prend alors la forme :

$$x_{k+1} = x_0 + CA_k^*(A_kCA_k^*)^{-1}\{A_k(x_k - x_0) - f(x_k)\} . \quad (17)$$

Dans le cas explicite ($X = D \times M$), il se ramène à un algorithme de type quasi-Newton, déjà utilisé par Rodgers (1976) en géophysique :

$$m_{k+1} = m_k + (C_m^{-1} + G_k^*C_d^{-1}G_k)^{-1}\{G_k^*C_d^{-1}(d_0 - g(m_k)) - C_m^{-1}(m_k - m_0)\} , \quad (18a)$$

$$m_{k+1} - m_0 = (C_m^{-1} + G_k^*C_d^{-1}G_k)^{-1}G_k^*C_d \{d_0 - g(m_k) + G_k(m_k - m_0)\} , \quad (18b)$$

$$m_{k+1} - m_0 = C_mG_k^*(C_d + G_kC_mG_k^*)^{-1} \{d_0 - g(m_k) + G_k(m_k - m_0)\} . \quad (18c)$$

Bien entendu, dans les problèmes de très grande taille de tels algorithmes ne sont pas d'utilisation aisée puisqu'ils nécessitent l'inversion d'un système linéaire. Il faut néanmoins remarquer qu'il n'est pas toujours nécessaire de construire numériquement la matrice $C_d + G_kC_mG_k^*$ pour inverser le système. Par exemple, une méthode de type gradient conjugué nécessite seulement d'appliquer $C_d + G_kC_mG_k^*$ à tout vecteur, ce qui est souvent beaucoup plus rapide. Reste, bien entendu, le vaste champ des méthodes directes d'optimisation de E . (voir par exemple Ciarlet et aussi Tarantola pour une bibliographie et une adaptation de ces méthodes à la Géophysique).

3. Le point de vue de l'estimation. Compromis erreur-résolution.

Il se trouve que si l'on adopte a priori une covariance honnête, les erreurs a posteriori sont souvent énormes. Aussi est-il courant de restreindre l'espace modèle. Pour préciser ce point considérons un système de fonctionnelles linéaires continues sur un espace modèle constitué de fonctions vectorielles spatiales. Par exemple :

$$\mathbf{M} = L^2(V) \text{ et } \mathbf{d} = G(\mathbf{m}) = \int_V \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{m}(\mathbf{x}) dV \in \mathbf{R}^n$$

où $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ est une matrice à coefficients dans $L^2(V)$.

Posons :

$$\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{m}_0 + L(\mathbf{d}_0 - G\mathbf{m}_0) . \quad (19)$$

où \mathbf{d}_0 et \mathbf{m}_0 sont choisis comme référence et L est un opérateur linéaire de \mathbf{R}^n dans $L^2(V)$. On déduit de (19) que :

$$\hat{\mathbf{m}} - \mathbf{m}_0 = LG(\mathbf{m} - \mathbf{m}_0) - L(\mathbf{d} - \mathbf{d}_0) . \quad (20a)$$

$$\hat{\mathbf{m}} - \mathbf{m} = (LG - I)(\mathbf{m} - \mathbf{m}_0) - L(\mathbf{d} - \mathbf{d}_0) . \quad (20b)$$

en convenant de noter \mathbf{d} et \mathbf{m} ($\mathbf{d} = G\mathbf{m}$) le vecteur donné exact et le vrai modèle. L'opérateur LG est du type Hilbert-Schmidt, de noyau la matrice :

$$L(\mathbf{x}).\mathbf{K}(\mathbf{x}') .$$

On l'appelle "opérateur de résolution". L'expression (20a) montre en effet que $\mathbf{m} - \mathbf{m}_0$ est vu au travers de cet opérateur à un terme de bruit près, provenant des erreurs sur les données. Plus $L(\mathbf{x}).\mathbf{K}(\mathbf{x}')$ se rapproche de $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')I$ plus la résolution est bonne. D'où l'idée (cf. Backus & Gilbert (1970)) de déterminer L en chaque point \mathbf{x} par un critère de proximité du noyau de résolution à $\delta(\mathbf{x})I$. Bien entendu meilleure est cette résolution plus grand est le terme de bruit.

Pratiquement l'erreur sur les données est décrite par une mesure gaussienne de centre \mathbf{d}_0 et de matrice d'autocorrélation C_d . Une démarche peut être de choisir un opérateur L (opérateur de

type moindres carrés, de Lanczôs ou de Backus & Gilbert), de calculer le noyau de résolution associé en différents points caractéristiques, ce qui revient à apprécier la qualité de l'estimateur, puis de calculer l'erreur sur celui-ci provenant des données à savoir (cf 20 a) :

$$C_{\{\hat{m}-m_0-LG(m-m_0)\}} = LC_d L^* . \quad (21)$$

Il n'est, malgré tout, pas interdit d'adopter un a priori probabiliste relatif à M . D'une manière générale on définit un élément aléatoire à valeur dans un Hilbert H comme étant une application mesurable d'un espace probabilisé (Ω, Σ, p) dans H muni de la tribu borélienne,

$$\xi : \Omega \rightarrow H .$$

On peut plus généralement définir un processus de Hilbert comme étant une application linéaire continue de H dans $L^2(\Omega, \Sigma, p)$. A chaque élément aléatoire de carré intégrable de H on peut associer un processus de Hilbert par :

$$\xi \rightarrow X_\xi = (\xi |) .$$

La réciproque est fautive comme le montre la considération du bruit blanc.

Se donner un processus de Hilbert gaussien ξ revient à se donner sa moyenne ξ_0 et son opérateur d'autocorrélation C_ξ définis par :

$$\forall u \in H , (\xi_0 | u) = E\{\xi(u)\}$$

$$\forall (u, v) \in H^2 , (C_\xi u | v) = E\{(\xi(u) - \xi_0) \cdot (\xi(v) - \xi_0)\} .$$

C_ξ est un opérateur de Hilbert-Schmidt ; il est nucléaire si et seulement si le processus peut être représenté par un vecteur aléatoire dans H . A chaque processus on associe naturellement une mesure cylindrique qui n'est une vraie mesure que si le processus est représentable dans H .

On peut aussi définir une fonction aléatoire vectorielle sur V comme une famille de vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^n

$\forall x \in V : x \rightarrow X_x \in L^2(\Omega, \Sigma, p)$.

A cette fonction aléatoire correspond un noyau de covariance :

$$C(x, x') = E\{(X_x - E(X_x))(X_{x'} - E(X_{x'}))\}.$$

Ce noyau est symétrique et de type positif, c'est à dire que pour toute famille finie (x_i) de points de V et de vecteurs (k_i) on a :

$$\sum_{ij} C(x_i, x_j) h_j \cdot h_i \geq 0.$$

A une fonction aléatoire que l'on supposera de moyenne nulle par simplification, s'associe naturellement un processus de Hilbert. En effet soit :

$$H_0 = \{ f \in V^{\mathbb{R}^n} : f \text{ est mesurable et } \int_{V \times V} C(x, x') f(x') \cdot f(x) dx dx' < +\infty \}$$

et $H = \overline{H_0}$ le complété de H_0 pour ce produit scalaire. Généralement H est un espace de distribution. Remarquons alors que pour tout f dans H_0 :

$$\int_{V \times V \times \Omega} X_x(\omega) \cdot f(x) X_{x'}(\omega) \cdot f(x) dx dx' d\omega < +\infty,$$

puisqu'il s'agit de termes positifs. Grâce au théorème de Fubini on en conclut que l'application :

$$\xi : \forall f \in H_0, f \rightarrow \int_V X_x(\omega) \cdot f(x) dx \in L^2(\Omega, \Sigma, p)$$

est une isométrie. ξ se prolonge donc par continuité en un processus de Hilbert sur H . Ce processus admet l'opérateur C :

$$\forall f \in \mathbf{H}, f \rightarrow \int_V C(x, x') f(x') dx'$$

comme opérateur d'autocorrélation. $C^{1/2} (L^2(V))$ est l'espace d'Aronszajn associé au processus. Muni du produit scalaire :

$$((f|g)) = (C^{-1/2}f | C^{-1/2}g)_{L^2(V)}$$

c'est un espace de Hilbert pour lequel δ est continu. Il est simple en effet de vérifier que :

$$\forall f \in \text{Im } C^{1/2} : ((f | C(x, \cdot))) = f(x)$$

On parle également d'espace à noyau autoreproduisant de noyau $C(x, x')$.

On montre de plus (Aronszajn 1950) qu'il y a une correspondance bijective entre les noyaux symétriques de type positif et les espaces à noyau autoreproduisant.

Pour se donner un a priori sur $\mathbf{M} = L^2(V)$, il suffit donc de se donner un noyau de covariance, c'est à dire un noyau symétrique de type positif. On choisit souvent :

$$C(x, x') = \exp \left\{ - \frac{\|x - x'\|^2}{2\xi^2} \right\} \text{diag} (\sigma_i^2)$$

ou :

$$C(x, x') = \exp \left\{ - \frac{\|x - x'\|}{2\xi} \right\} \text{diag} (\sigma_i^2),$$

(Dans ce dernier cas $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{-1}(V)$ et $\text{Im } C^{1/2}(L^2(V)) = \mathbf{H}^1(V)$).

Cela permet de "régulariser" l'espace modèle en jouant sur de la longueur de corrélation a priori et fournit toute une famille d'estimateurs possibles. L'espace de régularisation dans la terminologie de Tikhonov est alors $\text{Im} (C^{1/2})$.

Considérons maintenant deux espaces de Hilbert H_1 , H_2 et un opérateur continu A de H_1 dans H_2 . Soit ξ un processus de Hilbert sur H_1 ; on définit $A\xi$ par :

$$\forall h_2 \in H_2 \quad A\xi(h_2) = \xi(Ah_2) \in L^2(\Omega, \Sigma, p) .$$

C'est un processus de Hilbert sur H_2 . Il est de plus clair que si ξ peut être représenté par un élément aléatoire de H_1 , la définition donnée pour $A\xi$ est cohérente. On montre alors simplement que :

$$E(A\xi) = AE(\xi) , \quad (22a)$$

$$C_{A\xi} = AC_\xi A^* . \quad (22b)$$

Revenons enfin à l'expression (20b) et supposons que m est processus de Hilbert sur M de moyenne m_0 et d'opérateur d'autocorrélation C_m . Puisque m et d sont indépendants, on déduit de (22) que :

$$\forall h \in M \quad E\{(\hat{m}-m)(h)\}^2 = C_{\hat{m}-m}(h,h) = (((LG-I)C_m(LG-I)^* + LC_dL^*)h | h) . \quad (23)$$

On cherche alors à déterminer l'opérateur L qui minimise cette espérance pour tout h . Un calcul élémentaire conduit à :

$$\chi(L,h) = C_{\hat{m}-m}(h,h) = (((L-L_0)(GC_mG^* + C_d)(L-L_0)^* + C_m - L_0(GC_mG^* + C_d)L_0^*)h | h) \quad (24)$$

avec :

$$L_0 = C_mG^*(GC_mG^* + C_d)^{-1} . \quad (25)$$

Remarquons que, puisque C_d est défini positif, L_0 est bien défini. Sous cette forme il est clair que le minimum de $\chi(L,h)$ est atteint pour $L = L_0$ indépendamment de h . Si C_m est nucléaire il en est de même de $C_{\hat{m}-m}$ et l'on peut évaluer directement sa trace.

La solution du problème d'estimation stochastique prend donc la forme :

$$(\hat{m} = L_0(d_0 - Gm_0), C_{\hat{m}-m}(L_0)) .$$

Il est fondamental de remarquer que l'opérateur de covariance :

$$C_{\hat{m}-m} = C_m - C_m G^* (C_d + G C_m G^*)^{-1} G C_m$$

décrit ici l'erreur entre \hat{m} et m . Alors que dans l'approche sans a priori, présentée plus haut, qui conduit à l'opérateur de covariance (21), il s'agit d'apprécier l'erreur sur l'estimateur proprement dit, indépendamment de sa qualité de résolution.

Dans le cas d'un espace D de dimension infinie où l'opérateur $(C_d + G C_m G^*)$ n'est pas inversible on montre (Balakrishnan chapitre VI) que :

$$\text{Inf } \chi(L, h) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi(L_\epsilon, h)$$

avec :

$$L_\epsilon = C_m G^* (G C_m G^* + C_d + \epsilon I_d)^{-1} . \quad (26)$$

Signalons également que Bertero & Viano (1978) ont donné des conditions suffisantes pour que L_ϵ admette une limite continue. Ce qui complète l'article plus formel mais antérieur de Franklin (1970).

Quoi qu'il en soit, on retombe sur la solution "moindres carrés". Une autre approche qui a été très employée en Sciences de la Terre est celle de l'inverse de Lanczôs (cf Wiggins par exemple). Rappelons que l'orthogonal du noyau de G dans M , que l'on notera S , est de dimension p , p étant le rang de G . La décomposition de Lanczôs montre que si l'on choisit une base orthogonale dans S , la matrice qui représente la restriction de G à valeur dans $D = R^n$ peut s'écrire :

$$G_S = U \Lambda V^* \quad (27a)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 VV^* &= V^*V = I_p \\
 UU^* &= U^*U = I_n
 \end{aligned}
 \tag{27b}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & & \alpha \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$$

les α_i étant les p valeurs singulières de G , c'est à dire les racines carrées des valeurs propres de GG^* .

On en déduit toute une famille d'estimateurs inverses à valeur dans S de la forme :

$$L_k = V_k \Lambda^{-1}_k V_k^* \quad 1 \leq k \leq p \tag{28a}$$

avec :

$$V = [V_k, V_0], \quad U = [U_k, U_0], \quad \Lambda_k = \text{diag}(\alpha_i)_{i=1,k}, \tag{28b}$$

où les (α_i) sont k valeurs singulières, U_k est la sous-matrice de U dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs propres de GG^* correspondants et V_k la sous matrice de V dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs propres de G^*G qui y correspondent également.

Le choix de $k = p$ conduit à l'inverse généralisé. Il s'avère toutefois que prendre k trop grand peut être néfaste et induire de trop grandes erreurs. Quel choix de valeurs singulières doit-on adopter ? Matsu'ura & Hirata (1982) ont proposé d'utiliser la description probabiliste gaussienne et de minimiser le "volume" de la covariance de \hat{m} - m (voir (23)). En fait on peut adopter le critère habituel de trace, c'est à dire minimiser la variance globale. Pour ce faire on se restreint comme précédemment à S et tenant compte de (23) on obtient :

$$C_{\hat{m}-m} = (L_k G - I) C_S (L_k G - I)^* + L_k C_d L_k^*$$

$$\begin{aligned}
 &= V_0 V_0^* C_S V_0 V_0^* + V_k \Lambda^{-1} U_k^* C_d U_k \Lambda^{-1} V_k^* \\
 &= VMV^*
 \end{aligned}$$

avec :

$$M = \begin{bmatrix} \Lambda^{-1} U_k^* C_d U_k \Lambda^{-1} & 0 \\ 0 & V_0 C_S V_0 \end{bmatrix}$$

Utilisant :

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) ,$$

il en découle aisément que :

$$\text{tr}(C_{\hat{m}-m}) = \sum_{i=1}^k \frac{\sigma_{di}^2}{\alpha_i^2} + \sum_{i=k+1}^p \sigma_{mi}^2 . \quad (29)$$

Cette expression montre que le meilleur estimateur de la famille est celui qui prend en compte exactement toutes les valeurs singulières telles que :

$$\alpha_i \geq \sqrt{\frac{C_d(u_i, u_i)}{C_m(v_i, v_i)}} \quad (30)$$

où v_i (resp. u_i) est le vecteur propre normalisé correspondant de G^*G (resp. GG^*). Cela correspond au critère de Matsu'ura & Hirata (1982) et montre que l'inversion de Lancz'os est moins bonne que celle des moindres carrés, à condition toutefois que l'a priori C_m soit honnête. Reste bien entendu la possibilité de se passer d'a priori sur le modèle et d'apprécier la résolution obtenue comme nous l'avons indiqué plus haut. Quoi qu'il en soit la méthode est numériquement désastreuse puisqu'elle implique la diagonalisation d'une matrice.

4. Inversion globale fonctionnelle

L'objet de ce paragraphe est de passer en revue quelques résultats d'inversion globale qui peuvent s'avérer fort utiles bien que rarement considérés. Le principal théorème est dû à Hadamard-Levy au moins dans son énoncé (cf Hadamard (1906) p.73). On en trouvera une démonstration rigoureuse dans le cadre des espaces de Banach dans l'article de Plastock ou celui de Radulescu & Radulescu (1979). Ce théorème est le suivant :

Théorème d'Hadamard-Levy-Plastock :

Soient E et F deux espaces de Banach et f une application de classe C^1 de E dans F telle que :

$$\forall x \in E : f'(x) \in \text{Isom}(E, F) \text{ et } \|f'(x)^{-1}\| \leq \omega(\|x\|)$$

où ω est une fonction croissante $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ qui vérifie :

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{\omega(s)} = +\infty .$$

Alors f est un difféomorphisme de E sur F .

Dans le cas où :

$$E = F = \mathbb{R}^n$$

il devient (voir Wu & Desoer pour une démonstration directe) :

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^1 .

f est un difféomorphisme de \mathbb{R}^n si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \det f'(x) \neq 0 \text{ et } \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|f(x)\| = +\infty .$$

Ce qui fournit une caractérisation particulièrement simple.

Le théorème de Hadamard-Levy-Plastock conduit également à nombre de résultats d'existence et d'unicité de problème de Cauchy (voir Radulescu & Radulescu) dans les espaces de Banach.

Cristea (1981) reprenant la démonstration de Radulescu & Radulescu a montré plus généralement que :

Théorème :

Soit $f : E \rightarrow F$ de classe C^1 telle que :

$$\forall x \in E : f'(x) \in \text{Isom}(E, F) \text{ et } \|f'(x)^{-1}\| \leq \omega(\|x\|)$$

où ω est une fonction continue de \mathbb{R}^+ dans $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

Convenons de noter :

$$\forall x \in E : R_x = \int_{\|x\|}^{+\infty} \frac{ds}{\omega(s)}.$$

Alors :

a- Pour tout x de E : $B(f(x), R_x) \subseteq f(E)$ et il existe un voisinage ouvert de x , V_x , telle que : $f, V_x \rightarrow B(f(x), R_x)$ est un difféomorphisme.

b- Si $\int_0^{+\infty} \frac{ds}{\omega(s)} = +\infty$ $V_x = E$ et $R_x = +\infty$.

Dans une optique plus proche de celle de l'estimation, Chavent (1983) a obtenu avec l'aide de Tartar le résultat suivant :

Soit $f : E \rightarrow F$, de classe C^2 et C un convexe fermé de E tels que :

$$\forall x \in C \quad \|f'(x)\| \leq \delta \quad \|f'(x)^{-1}\| \leq \alpha, \quad \forall x \in E \quad \|f''(x)\| \leq \beta, \quad \alpha\beta \text{ diam } C < 2\sqrt{2}.$$

Alors quelque soit $z \in F$ vérifiant : $d(z, f(C)) < \frac{1}{\alpha^2\beta} - \frac{\beta}{8} (\text{diam}C)^2$,

il existe un et seul élément x de C qui rende $\|f(x) - z\|$ minimum sur C .

En particulier f est un difféomorphisme de C sur $f(C)$.

5. Cadre fonctionnel et probabilité conditionnelle

Revenons maintenant à la problématique du paragraphe 3. Nous avons vu que la formule d'estimation classique (25) du cas linéaire continu :

$$\hat{m} = L_0(d_0 - Gm_0)$$

posait déjà quelques problèmes, puisque L_0 ne peut pas toujours être défini partout. Mandelbaum (1984) se restreignant au cas d'éléments aléatoires dans l'espace de Hilbert H , a montré que L_0 était un opérateur mesurable linéaire, c'est à dire défini sur $D(L_0)$ de probabilité 1. Il a de plus montré que \hat{m} est le centre de la loi de probabilité conditionnelle de covariance :

$$0 \leq C_m - C_m G^* (C_d + G C_m G^*)^{-1} G C_m \leq C_m.$$

Lehtinen et al. (1987) ont étendu ce résultat au cas de processus de Hilbert. Ce qui clot l'interprétation, en terme de probabilité conditionnelle, de l'article de Franklin.

Reste le cas non linéaire. Plaçons nous dans le cas où $D = \mathbb{R}^n$ et supposons que pour tout point x de V , la dérivée formelle de g , G_x est continue sur l'espace de régularisation $\text{Im } C_m^{1/2}$. Définissons :

$$\forall x \in V, \quad T_x = G_x C_m^{1/2}$$

qui est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

On peut alors montrer comme au paragraphe 2 (les théorèmes qui y sont utilisés sont en fait valable dans le cadre hilbertien) que toute solution \hat{m} du problème :

$$\|C_m^{1/2}(m-m_0)\|^2 + C_{d^{-1}}(d-d_0).(d-d_0) \text{ minimum}$$

sous la contrainte : $d = g(m)$ et $m - m_0 \in \text{Im } C_m^{1/2}$

est solution de :

$$m - m_0 = C_m^{1/2} T_m^* (C_d + T_m T_m^*)^{-1} \{d_0 - g(m) + G_m(m - m_0)\} .$$

Là encore, on peut utiliser l'algorithme :

$$m_{k+1} - m_0 = C_m G_k^* (C_d + T_k T_k^*)^{-1} \{d_0 - g(m_k) + G_k(m_k - m_0)\} . \quad (31)$$

Il me semble vraisemblable que, dans l'hypothèse où la dérivée seconde formelle de g est en tout point continue sur $\text{Im } C_m^{1/2}$, la loi a posteriori est tangente à une loi gaussienne de centre \hat{m} .

Ce type d'algorithme a été utilisé par Wahba (1973) pour résoudre des équations différentielles linéaires sur un interval réel. Elle a notamment étudié la convergence de la méthode lorsque le pas du maillage tend vers 0, en fonction de la régularité du noyau utilisé.

On peut l'étendre sans peine à un problème de contrôle de paramètre d'une équation aux dérivées partielles. Supposons en effet qu'un paramétrage p et un signal u soient liés par :

$$L_x(u,p) = 0 ,$$

où L_x est un opérateur aux dérivées partielles auquel on a intégré formellement les conditions aux limites et (ou) les observables.

Si l'on fixe un maillage de V , l'espace D est de dimension finie, on adopte pour espace M l'espace des champs (u,p) . Les dérivées de L_x par rapport à u : G_u^x , et par rapport à p : G_p^x sont également des opérateurs aux dérivées partielles. On vérifie sans peine que :

$$(G_u C_u^{1/2})^*(d^{x'}) (x) = \sum_{x'} d^{x'} G_u^{x'} K(x, x')$$

puis que :

$$(G_u C_u^{1/2})(G_u C_u^{1/2})^*_{xx'} = G_u^x G_u^{x'} C_u(x, x')$$

en notant K le noyau de $C^{1/2}$ et en supposant que $C(x, x')$ est suffisamment régulier. On obtient de même :

$$(G_p G_p^{1/2})(G_p C_p^{1/2})^*_{xx'} = G_p^x G_p^{x'} C_p(x, x').$$

L'algorithme (31) conduit alors à :

$$u_{k+1}(x) = u_0(x) + \sum_{x'} G_{u_k}^{x'} C_u(x, x') v^{x'}$$

$$p_{k+1}(x) = p_0(x) + \sum_{x'} G_{p_k}^{x'} C_p(x, x') v^{x'}$$

avec :

$$\sum_{x'} (C_d^{xx'} + G_u^x G_u^{x'} C_u(x, x') + G_p^x G_p^{x'} C_p(x, x')) v^{x'} = w^x$$

$$w^x = d_0^x + G_{p_k}^x (p_k - p_0) + G_{u_k}^x (u_k - u_0) - L_x(u_k, p_k)$$

Dans le cas où L est linéaire par rapport à u :

$$L_x(u_k, p_k) = G_{u_k}^x (u_k, p_k)$$

et

$$w^x = d^x + G_{p_k}^x (p_k - p_0) - G_{u_k}^x u_0 .$$

On prend $C_d^{xx'} = 0$ sauf au point x où intervient un observable mesuré. La covariance sur p correspond à un a priori physique. Ce n'est pas le cas pour u . Convenant d'adopter une covariance de la forme :

$$\exp \left\{ - \frac{\|x-x'\|^2}{2\xi^2} \right\} \Sigma^2 .$$

les expériences numériques nous ont montré qu'il fallait prendre ξ de l'ordre de une à deux fois le diamètre du maillage.

Remarquons pour finir que cette méthode s'apparente à une méthode de collocation puisque l'estimation est exactement solution de l'équation aux dérivées partielles en chaque point du maillage.



VII. UNE MÉTHODE D'ESTIMATION D'UN MODÈLE DE RÉFÉRENCE ORTHOTROPE À PARTIR DE FRÉQUENCES PROPRES TERRESTRES.

L'objet de ce chapitre est de présenter les grandes lignes d'une méthode d'inversion permettant l'établissement d'un modèle de Terre à symétrie sphérique à partir des observations de fréquences propres. Aucun programme de ce type n'est disponible en France à l'heure actuelle. Les programmes de calcul de modes propres en configuration sphérique sont d'ailleurs pour la plupart d'origine américaine et utilisés de manière plus ou moins aveugle. Ces programmes sont de deux types.

Il y a, d'une part, les programmes qui utilisent une méthode de tir (Saito, Masters & Gilbert). La propagation des mineurs d'ordre 2 du système (67) du chapitre I paragraphe 2 étant effectuée par une méthode de Runge-Kutta. L'utilisation de ces mineurs est une nécessité numérique dans ces méthodes puisque, tirant de l'origine, la condition de fréquence propre se traduit par l'annulation d'un déterminant d'ordre 3 à la surface.

D'autre part, certains programmes (programme de Wiggins par exemple) utilisent une formulation variationnelle sur des sous-espaces de splines cubiques.

Nous avons entrepris avec Ph. Lesage la mise au point de deux programmes d'inversion. L'un utilise le programme de Masters pour le problème direct ; l'autre inverse directement modes et paramètres. Nous présentons les points essentiels de cette dernière approche.

Il s'agit de déterminer les différents modules élastiques, le déviateur de précontrainte orthotrope, la densité ainsi que différents paramètres anélastiques à partir de données de valeurs moyennes de multiplets, de la masse de la Terre et des coefficients gravitationnels J_2 et J_4 . Le déviateur étant fortement contraint par la forme de la Terre, il est nécessaire d'en tenir compte dans des équations de Clairaut. Cela nous a amené (chapitre V) à adopter une approche au deuxième ordre de la figure de la Terre, par ailleurs jugée nécessaire (Nakiboglu 1982). C'est ce qui explique que l'on puisse estimer le coefficient J_4 .

1. Prise en compte de l'anélasticité.

L'anélasticité ne peut pas être négligée dans l'étude des oscillations propres (Anderson & Hart (1978), Liu et al. (1976) et Kanamori & Anderson (1977)). Nombre d'observations montrent de plus que le facteur de qualité ne dépend que très peu de la fréquence.

La manière la plus simple de prendre en compte un phénomène de dispersion est de considérer une relation différentielle du 1er ordre entre contrainte et déformation. Formellement, en ne considérant qu'une dimension, cette relation prend la forme :

$$\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau} = k \left(\dot{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\tau} \right) \quad \tau' \leq \tau \quad . \quad (1)$$

Cela conduit sans peine (Liu et al.) à :

$$\sigma(t) = k \frac{\tau'}{\tau} \epsilon(t) + k \left(1 - \frac{\tau'}{\tau} \right) \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')/\tau'} d(\epsilon(t')) \quad . \quad (2)$$

Dans le domaine des fréquences, il vient :

$$\hat{\sigma}(\omega) = k \left\{ 1 + \frac{1}{\tau} \frac{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} + i\omega \frac{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \right\} \hat{\epsilon}(\omega) \quad . \quad (3)$$

D'une manière générale on écrit :

$$\hat{\sigma}(\omega) = k(\omega) \hat{\epsilon}(\omega) \quad , \quad k(\omega) = k \left\{ 1 + d(\omega) + \frac{i}{Q(\omega)} \right\} \quad . \quad (4)$$

Dans le cas d'un processus linéaire on a donc :

$$d(\omega) = \frac{1}{r'} \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}}{\frac{1}{r'^2} + \omega^2} \quad (5a)$$

$$\frac{1}{Q}(\omega) = \omega \frac{\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r'^2} + \omega^2} . \quad (5b)$$

Puisque $Q(\omega)$ n'apparaît dans le cas de la Terre que peu sensible à ω , on ne peut adopter un tel comportement. L'idée est alors de considérer une distribution de processus linéaires (Nowik & Berry (1961), Liu & Anderson (1976)). Cette distribution est sensée rendre compte des différents processus physiques d'atténuation qui affectent une large échelle de fréquence. Rappelons aussi pour mémoire que Kjartansson (1979) a montré qu'une loi de fluage de la forme $\phi(t) = H(t)t^\beta$ conduit à un facteur de qualité exactement constant. Cela reste néanmoins ad hoc.

Considérons donc une distribution aléatoire de processus linéaires et supposons que les variables aléatoires k , $x = \frac{1}{r'}$ et $y = \frac{r'}{r}$ sont indépendantes. On tire alors de (5) que :

$$E(d(\omega)) = (E(y) - 1) \int_{\mathbf{R}^+} \frac{x^2}{x^2 + \omega^2} P_x(dx) , \quad (6a)$$

$$E\left[\frac{1}{Q(\omega)}\right] = \omega (1 - E(y)) \int_{\mathbf{R}^+} \frac{x}{x^2 + \omega^2} P_x(dx) , \quad (6b)$$

où P_x est la loi de x .

Si l'on adopte pour $\text{Log } x$ une loi plateau de demie longueur ξ on en déduit :

$$E(d(\omega)) = \frac{E(y) - 1}{4\xi} \text{Log} \left\{ \frac{\omega^2 + \omega_0^2 e^{2\xi}}{\omega^2 + \omega_0^2 e^{-2\xi}} \right\} \quad (7a)$$

$$E\left(\frac{1}{Q(\omega)}\right) = \frac{1 - E(y)}{2\xi} \operatorname{Arctg} \left\{ 2\omega_0\omega \frac{\operatorname{sh}\xi}{\omega^2 + \omega_0^2} \right\}. \quad (7b)$$

où $\frac{1}{\omega_0}$ est la médiane de la distribution. L'hypothèse d'une large distribution de temps caractéristiques de relaxation conduit à s'intéresser au comportement quand $\xi \rightarrow +\infty$. On obtient alors :

$$E(d(\omega)) \simeq \frac{E(y) - 1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{\xi} \operatorname{Log} \left[\frac{\omega}{\omega_0} \right] \right\}, \quad (8a)$$

$$E\left(\frac{1}{Q(\omega)}\right) \simeq \pi \frac{1 - E(y)}{4\xi}, \quad (8b)$$

et finalement d'après (4) à :

$$\begin{aligned} E(k(\omega)) &\simeq E(k) \left\{ 1 + E(d(\omega)) + i E\left(\frac{1}{Q(\omega)}\right) \right\} \\ &\simeq \frac{1}{2} E(k) (E(y) + 1) \left\{ 1 + \frac{2}{\pi Q_e} \operatorname{Log} \left[\frac{\omega}{\omega_0} \right] - \frac{i}{Q_e} \right\} \end{aligned} \quad (9a)$$

avec :

$$\frac{1}{Q_e} = \frac{\pi}{2\xi} \frac{1 - E(y)}{1 + E(y)}. \quad (9b)$$

Si l'on adopte pour x une loi de type lognormale de médiane $\frac{1}{\omega_0}$ et dont l'écart type de $\log \frac{x}{\omega_0}$ est ξ , on déduit de (6), après un calcul fastidieux que, lorsque $\xi \rightarrow +\infty$:

$$\frac{1}{Q(\omega)} \simeq \frac{1 - E(y)}{2\xi} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$d(\omega) \simeq \frac{E(y) - 1}{2} \left\{ 1 - \frac{2}{\xi\sqrt{2\pi}} \text{Log} \left[\frac{\omega}{\omega_0} \right] \right\}$$

et donc que :

$$E(k(\omega)) \simeq \frac{1}{2} E(k)(E(y) + 1) \left\{ 1 + \frac{2}{\pi Q_e} \text{Log} \left[\frac{\omega}{\omega_0} \right] - \frac{i}{Q_e} \right\}$$

avec :

$$\frac{1}{Q_e} = \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - E(y)}{1 + E(y)}.$$

Enfin si l'on adopte pour $\text{Log} \left[\frac{x}{\omega_0} \right]$ une loi de densité $\frac{1}{2\xi} \exp \left\{ -\frac{|z - z'|}{\xi} \right\}$ par rapport à la mesure de Lebesgue dz , on obtient :

$$E \left[\frac{1}{Q(\omega)} \right] \simeq \frac{\pi(1 - E(y))}{4\xi},$$

$$E(d(\omega)) \simeq \frac{E(y) - 1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{\xi} \text{Log} \left[\frac{\omega}{\omega_0} \right] \right\},$$

ce qui conduit aux formules (9).

Cela suggère que sous l'hypothèse que les fréquence de relaxation des différents processus intervenant ont une distribution statistique unimodale de large variance et de médiane ω_0 :

$$E(k(\omega)) \simeq k_e \left\{ 1 + \frac{2}{\pi Q_e} \log \left[\frac{\omega}{\omega_0} \right] - \frac{i}{Q_e} \right\}. \quad (10)$$

Dans le cas d'une distribution à plusieurs modes il suffit d'ailleurs de pondérer, ce qui conduit à :

$$E(k(\omega)) \simeq k_e \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \sum_j \frac{1}{Q_j} \log \left[\frac{\omega}{\omega_j} \right] - i \sum_j \frac{1}{Q_j} \right\}. \quad (11)$$

Quoi qu'il en soit on doit supposer que les facteurs de qualité sont grands, c'est à dire que l'atténuation est faible. Ce qui est le cas pour la Terre.

Enfin, puisque la Terre est faiblement anisotrope, on supposera que pratiquement seul le module d'incompressibilité κ et la rigidité μ sont affectés par l'anélasticité et donc que :

$$\kappa(\omega) = \kappa \left\{ 1 + \frac{2}{\pi Q_\kappa} \text{Log} \left[\frac{\omega}{\omega_\kappa} \right] - \frac{i}{Q_\kappa} \right\} \quad (12a)$$

$$\mu(\omega) = \mu \left\{ 1 + \frac{2}{\pi Q_\mu} \text{Log} \left[\frac{\omega}{\omega_\mu} \right] - \frac{i}{Q_\mu} \right\}. \quad (12b)$$

2. Paramétrisation.

Nous avons vu au chapitre précédent que le choix de la paramétrisation est essentiel dans le cas d'une inversion gaussienne. Les paramètres élastiques sont usuellement :

A , C , F , L , N .

Ceux qui interviennent directement dans l'équation de transport (67) paragraphe 2 du chapitre 1 sont :

$$\frac{1}{L} , \frac{1}{C} , N , \frac{F}{C} , A - N - \frac{F^2}{C} .$$

Par ailleurs la positivité de b^{ijkl} conduit à :

$$L \geq 0, N \geq 0, C \geq 0, A - N - \frac{F^2}{C} \geq 0. \quad (13)$$

On peut être tenté d'adopter ces paramètres complétés par F ou F/C avec des distributions de probabilité a priori en logarithme normal. Remarquant que si X et Y sont à distribution à logarithme normal il en est de même de $X^\alpha Y^\beta$, il faudrait idéalement déterminer des combinaisons de ce type qui soient indépendantes. Rien ne permet de faire un tel choix. Le plus raisonnable est alors d'adopter un choix qui linéarise au maximum les équations. Cela conduit à :

$$\frac{1}{L}, \frac{1}{C}, \frac{F}{C}, N, A - N - \frac{F^2}{C},$$

avec en plus :

$$\sigma_T - \sigma_N,$$

muni d'une loi gaussienne centrée en 0.

Un premier inconvénient de ce type de choix est que le déviateur de contrainte est muni d'une loi a priori différente des coefficients d'anisotropie. Plus grave le modèle n'est pas centré sur le cas isotrope, c'est à dire que l'estimateur a posteriori ne minimise pas la partie déviatorique du tenseur élastique indépendamment du modèle de référence.

On peut aussi remarquer que du fait que l'on dispose de bons modèles de Terre isotropes, les lois de type log-normal à faible variance seront pratiquement des gaussiennes. L'approche purement gaussienne est donc suffisante.

Un choix qui est devenu usuel, à la suite de Anderson (1961), est :

$$A, L, \xi = \frac{N}{L} = \left[\frac{\beta_H}{\beta_V} \right]^2, \phi = \frac{C}{A} = \left[\frac{\alpha_V}{\alpha_H} \right]^2, \eta = A - \frac{2L}{F}.$$

S'il est bien centré sur le cas isotrope, il présente cependant le grave inconvénient de privilégier

des directions particulières d'anisotropie de par le choix des paramètres indépendants.

Cherchons donc une paramétrisation gaussienne qui soit centrée sur le cas isotrope et ne privilégie pas un type particulier d'anisotropie. L'idée la plus naturelle (cf Backus 1982) est de se placer dans l'espace euclidien des tenseurs b^{ijkl} (cf chapitre I paragraphe 2 (50)) et de considérer la partie purement isotrope et la partie purement déviatorique. Dans l'espace des tenseurs orthotropes, le produit scalaire euclidien englobant prend la forme :

$$t.t' = 4(A - N)(A' - N) + CC' + 4FF' + 8LL' + 8NN' . \quad (14)$$

On peut alors vérifier sans peine que les tenseurs de coordonnées

$$\begin{aligned} (A, C, F, L, N) = & (1 , 1 , 1 , 0 , 0) , \\ & \left[\frac{4}{3} , \frac{4}{3} , -\frac{2}{3} , 1 , 1 \right] , \\ & (2 , -4 , -1 , 0 , 0) , \\ & \left[-\frac{2}{3} , -\frac{8}{3} , \frac{4}{3} , 1 , 0 \right] , \\ & \left[-\frac{7}{9} , \frac{8}{9} , -\frac{4}{9} , \frac{2}{3} , -1 \right] , \end{aligned}$$

sont deux à deux orthogonaux. Leurs normes respectives sont (dans le même ordre) :

$$3 , 2\sqrt{5} , 6 , 2\sqrt{6} , \frac{2}{3}\sqrt{30} . \quad (15)$$

Si l'on adopte cette famille comme base des tenseurs orthotropes, les coordonnées correspondantes s'expriment en fonction des coefficients A, C, F, L, N par :

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{4}{9}A + \frac{1}{9}C + \frac{4}{9}F - \frac{4}{9}N \\ \mu &= \frac{1}{15}A + \frac{1}{15}C - \frac{2}{15}F + \frac{2}{5}L + \frac{1}{3}N \\ \delta_1 &= \frac{2}{9}A - \frac{1}{9}C - \frac{1}{9}F - \frac{2}{9}N \end{aligned} \quad (16)$$

$$\delta_2 = -\frac{1}{9} A - \frac{1}{9} C + \frac{2}{9} F + \frac{1}{3} L + \frac{1}{9} N$$

$$\delta_3 = \frac{1}{15} A + \frac{1}{15} C - \frac{2}{15} F + \frac{2}{5} L - \frac{2}{3} N ,$$

auxquelles on ajoute :

$$\delta_4 = \sigma_T - \sigma_N .$$

Réciproquement on obtient :

$$A = \kappa + \frac{4}{3} \mu + 2 \delta_1 - \frac{2}{3} \delta_2 - \frac{7}{9} \delta_3 ,$$

$$C = \kappa + \frac{4}{3} \mu - 4 \delta_1 - \frac{8}{3} \delta_2 + \frac{8}{9} \delta_3 ,$$

$$F = \kappa - \frac{2}{3} \mu - \delta_1 + \frac{4}{3} \delta_2 - \frac{4}{9} \delta_3 , \quad (17)$$

$$L = \mu + \delta_2 + \frac{2}{3} \delta_3 ,$$

$$N = \mu - \delta_3 .$$

Les coefficients κ et μ correspondent au module d'incompressibilité et à la rigidité dans le cas isotrope. En fait κ doit être défini comme $\kappa = b_i^i k_k$; c'est ce terme qui intervient en effet dans le gradient d'entropie (voir le paragraphe 2 du chapitre 1). On remarquera aussi (voir la formule (30a) de ce même paragraphe) que δ_1 et δ_2 sont insensibles à l'anisotropie de précontrainte. Ils ne dépendent donc que de l'anisotropie intrinsèque (quadratique). C'est ce qui a guidé notre choix.

De manière à ne privilégier aucune direction d'anisotropie dans l'espace euclidien, on doit moduler les variances de ces différents coefficients en fonction des normes des tenseurs correspondants. On adopte donc :

$$\sigma_\mu = \frac{3}{2\sqrt{5}} \sigma_\kappa$$

$$\sigma_{\delta_2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{\delta_1}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\delta_3} &= 3 \sqrt{\frac{3}{10}} \sigma_{\delta_1} \\ \sigma_{\delta_4} &= \epsilon \sigma_{\delta_1} .\end{aligned}\tag{18a}$$

On découple de la sorte composantes déviatoriques et composantes isotropes du tenseur élastique. Ce qui est justifié par le fait que la partie isotrope est a priori beaucoup mieux connue que la partie déviatorique. Indiquons néanmoins qu'il faut prendre :

$$\sigma_{\delta_1} = \frac{1}{2} \sigma_{\kappa} ,\tag{18b}$$

si l'on veut ne privilégier a priori aucune de ces parties.

Cette paramétrisation donne de plus accès à un pourcentage intrinsèque d'anisotropie apparente ; le cosinus de l'angle du tenseur élastique avec le plan isotrope :

$$\frac{1}{\cos} = \sqrt{1 + 4 \frac{9 \delta_1^2 + 6 \delta_2^2 + \frac{10}{3} \delta_3^2}{9\kappa^2 + 20\mu^2}} .\tag{19}$$

On peut, bien sûr, si on le juge nécessaire, prendre en compte des informations provenant de considérations pétrologiques (cf Nataf et al. (1986) et Montagner & Anderson (1987)). Il nous semble néanmoins préférable de les incorporer à une paramétrisation d'emblée vierge de tout a priori anisotrope.

Nous complétons la paramétrisation par ρ muni d'une loi gaussienne (car ρ est bien connu a priori et les paramètres d'anélasticité (cf(12)) :

$$x_{\kappa} = \frac{1}{Q_{\kappa}} , \omega_{\kappa} , x_{\mu} = \frac{1}{Q_{\mu}} , \omega_{\mu} .$$

x_{κ} et x_{μ} étant affectés d'une distribution en Log-normale ainsi que ω_{κ} et ω_{μ} . Pratiquement ces paramètres sont associés à κ et à μ par l'expression (12) en ne retenant que la partie réelle.

Tous les paramètres sont supposés indépendants, et en tant que fonction du rayon ils sont munis

de noyau de type gaussien.

3 Inversion simultanée modes-paramètres.

Les équations qui caractérisent les modes propres de la Terre supposée à symétrie sphérique et orthopropre sont les équations (67) du paragraphe 2 du premier chapitre. La principale difficulté qui apparaît lorsque l'on suppose que le déplacement est un processus stochastique est liée au centre. Précisons ce point. Pour ce faire, définissons les fonctions $z_1(r)$, $z_3(r)$, $z_7(r)$ et $V_1^{\ell,m}$, $V_3^{\ell,m}$ et $V_7^{\ell,m}$ par :

$$z_1(r) = ry_1(r) \quad , \quad z_3(r) = ry_3(r) \quad , \quad z_7(r) = ry_7(r) \quad ,$$

$$V_1^{\ell,m} = Y_\ell^m e_r \quad , \quad V_3^{\ell,m} = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \text{grad}_T(Y_\ell^m e_r) \quad , \quad V_7^{\ell,m} = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \text{Rot}(Y_\ell^m e_r) \quad ,$$

de sorte que :

$$u = \sum_{\ell,m} z_1(r)V_1^{\ell,m} + z_3(r)V_3^{\ell,m} + z_7(r)V_7^{\ell,m} . \quad (20)$$

Supposons que le noyau de u soit :

$$C(x,x') = \sigma^2 I \exp\left\{-\frac{\|x-x'\|^2}{2\xi^2}\right\} .$$

Cherchons le noyau du vecteur $(z_1(r), z_3(r), z_7(r))$. On déduit de (20) que :

$$C_{ij}(r,\ell,m ; r',\ell',m') = \sigma^2 \exp\left\{-\frac{r^2+r'^2}{2\xi^2}\right\} \int_{\Sigma \times \Sigma} V_1^{\ell,m}(x) \cdot \bar{V}_j^{\ell',m'}(x') \exp\left\{\frac{rr'}{\xi^2} \cos\psi\right\} \frac{d\Sigma}{r^2} \frac{d\Sigma'}{r'^2}$$

en notant ψ l'angle (x,x') .

Supposons que : $f(\cos\psi) = \sum_{\ell} f_{\ell} P_{\ell}^0(\cos\psi)$.

On déduit du formalisme de James (1976) (une alternative à l'approche de Phiney & Burridge (1973)) que :

$$\int_{\Sigma \times \Sigma} f Y_{\ell}^m \bar{Y}_{\ell'}^{m'} e_r \cdot e_{r'} \frac{d\Sigma}{r^2} \frac{d\Sigma'}{r'^2} = \frac{4\pi}{2\ell+1} \left\{ \frac{\ell f_{\ell-1}}{2\ell-1} + \frac{(\ell+1)f_{\ell+1}}{2\ell+3} \right\} \delta_{\ell}^{\ell'} \delta_m^{m'}$$

$$\int_{\Sigma \times \Sigma} f \text{grad}_{\Sigma} \left[Y_{\ell}^m \right] \cdot \text{grad}_{\Sigma'} \left[\bar{Y}_{\ell'}^{m'} \right] \frac{d\Sigma}{r^2} \frac{d\Sigma'}{r'^2} = \frac{4\pi\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \left\{ \frac{\ell+1}{2\ell-1} f_{\ell-1} + \frac{\ell}{2\ell+3} f_{\ell+1} \right\} \delta_{\ell}^{\ell'} \delta_m^{m'}$$

$$\int_{\Sigma \times \Sigma} f Y_{\ell}^m e_r \cdot \text{grad}_{\Sigma'} \left[\bar{Y}_{\ell'}^{m'} \right] \frac{d\Sigma}{r^2} \frac{d\Sigma'}{r'^2} = \frac{4\pi\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \left\{ \frac{f_{\ell-1}}{2\ell-1} - \frac{f_{\ell+1}}{2\ell+3} \right\} \delta_{\ell}^{\ell'} \delta_m^{m'}$$

$$\int_{\Sigma \times \Sigma} \text{Rot} \left[Y_{\ell}^m e_r \right] \cdot \text{Rot} \left[\bar{Y}_{\ell'}^{m'} e_{r'} \right] \frac{d\Sigma}{r^2} \frac{d\Sigma'}{r'^2} = \frac{4\pi\ell(\ell+1)}{2\ell+1} f_{\ell} \delta_{\ell}^{\ell'} \delta_m^{m'}$$

Dans le cas qui nous concerne, on obtient (cf. Abramowitz & Stegun) :

$$f = \exp(z \cos\psi) , \quad z = \frac{\Gamma'}{\xi^2} ,$$

$$f_{\ell} = (2\ell+1) \frac{\sqrt{\pi}}{2z} I_{\ell+1/2}(z) .$$

On en déduit que :

$$C_{ij}(r, \ell, m ; r', \ell', m') = 0 \quad \text{si } \ell \neq \ell' \text{ et si } i=7 \text{ et } j \neq 7 \text{ ou } j=7 \text{ et } i \neq 7 ,$$

$$C_{11}^{\ell}(r, r') = \left[\psi_{\ell+1} + \frac{\ell}{z} \psi_{\ell} \right] \sigma^2 \xi^2 \exp \left\{ -\frac{(r-r')^2}{2\xi^2} \right\}$$

$$C_{13}^{\ell}(r, r') = \frac{\psi_{\ell}}{z} \sqrt{\ell(\ell+1)} \sigma^2 \xi^2 \exp \left\{ -\frac{(r-r')^2}{2\xi^2} \right\} \quad (21a)$$

$$C_{33}^{\ell}(r, r') = \left[\psi_{\ell+1} + \frac{\ell+1}{z} \psi_{\ell} \right] \sigma^2 \xi^2 \exp \left\{ -\frac{(r-r')^2}{2\xi^2} \right\}$$

$$C_{77}^{\ell} = \psi_{\ell} \sigma^2 \xi^2 \exp \left\{ -\frac{(r-r')^2}{2\xi^2} \right\},$$

avec :

$$\psi_{\ell}(z) = z e^{-z} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} I_{\ell+1/2}(z), \quad z = \frac{rr'}{\xi^2}.$$

On définit de même $z_5(r) = ry_5(r)$ et l'on suppose que le potentiel ϕ est gaussien dans V. Il en découle de manière analogue que :

$$C_{55}^{\ell}(r, r') = \sigma'^2 \xi^2 \psi_{\ell} \exp \left\{ \frac{(r-r')^2}{2\xi^2} \right\}. \quad (21b)$$

Remarquons que lorsque $z \rightarrow +\infty$ $\psi_{\ell}(z) \rightarrow 1/2$, de sorte que :

$$C_{13}(r, r') \rightarrow 0$$

$$C_{11}(r, r') \simeq C_{33}(r, r') \simeq C_{77}(r, r') \simeq \frac{\sigma^2 \xi^2}{2} \exp \left\{ \frac{(r-r')^2}{2\xi^2} \right\}. \quad (22)$$

$$C_{55}(r, r') \simeq \frac{\sigma'^2 \xi^2}{2} \exp \left\{ \frac{(r-r')^2}{2\xi^2} \right\}.$$

Par ailleurs au voisinage de $z = 0$:

$$\psi_{\ell}(z) = \frac{z^{\ell+1}}{(2\ell+1)!!} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{z^2}{1!(2\ell+3)} + \dots \right\}$$

ou bien encore :

(23)

$$\psi_{\ell}(z) = \frac{1}{2} (x_{\ell} + e^{-2z} y_{\ell})$$

avec :

$$x_{\ell+1} = x_{\ell-1} - \frac{2\ell+1}{z} x_{\ell} \quad , \quad y_{\ell+1} = y_{\ell-1} - \frac{2\ell+1}{z} y_{\ell} \quad ,$$

$$x_0 = 1 \quad , \quad x_1 = 1 - \frac{1}{z} \quad , \quad y_0 = -1 \quad , \quad y_1 = 1 + \frac{1}{z} \quad .$$

On choisit donc les variables z_1, z_3, z_5, z_7 et on adopte des covariances gaussiennes dans le noyau externe et le manteau que l'on raccorde aux expression (21a) dans la graine. Pratiquement on se sert de (23) pour faire les calculs dans la graine.

Il ne faut pas utiliser les variables z_2, z_4, z_6, z_8 car elles sont liées a priori à z_1, z_3, z_5, z_7 et l'on est alors contraint d'ajuster les écarts type, ce qui est extrême long ! Nous remettons donc (67) sur sa forme classique du deuxième ordre pour les variables z_1, z_3, z_5, z_7 . Pour chacune des valeurs moyennes des multiplets ω_x observés, ce système prend la forme :

$$L_r^x \left[z_1^x, p_j, \omega^x \right] = 0 \quad , \quad (24)$$

en incorporant les conditions de transmissions et de surface (cf paragraphe 2 du chapitre 1). Les conditions à l'origine sont implicitement vérifiées par le choix de la covariance. C'est un des avantages indéniables de cette approche.

Si l'on suppose que le paramétrage p_i est fixé dans la Terre, l'espace modèle devient :

$$\mathbf{M} = \{(\cdot, z_i, \cdot, \omega)\} \quad .$$

Utilisant l'approche du paragraphe 5 du chapitre précédent on détermine la fréquence propre la plus proche de la fréquence donnée a priori, ainsi que le mode qui lui correspond. L'a priori pour (z_i) peut être pris nul. On obtient ainsi une méthode de calcul direct des fréquences et des modes propres.

Si l'on cherche à déterminer les paramètres, l'espace modèle devient :

$$M = \{(\cdot, z_i, \dots, p_j, \dots, \omega^x, \cdot)\}$$

L'opérateur L est maintenant constitué de la collection des opérateurs L^x (22), des quelques opérateurs différentiels associés aux équations de Clairaut et à la gravité $|g_0|$ et des trois opérateurs intégraux associés à la masse, à $a_{2,0}$ et à $a_{4,0}$ (voir chapitre V,3). La procédure du chapitre précédent conduit alors à l'inversion d'un système apparemment gigantesque. En fait tenant compte de l'expression analytique particulière de la matrice, il n'est pas nécessaire de la calculer explicitement pour l'appliquer à un vecteur. Ceci permet d'utiliser une méthode de gradient conjugué que l'on préconditionne par les blocs diagonaux, sans tenir compte des termes provenant du paramétrage. Ce qui revient à ajuster les modes d'emblée à chaque itération.

- M. Abramowitz & I. Stegun, 1965, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New-York.
- R.A. Adams, 1975. Sobolev Spaces, Academic Press, New-York.
- S. Agmon, A. Douglas et L. Nirenberg, 1959, 1964, Estimates near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions.
I, Comm. Pure Appl. Math., 12, 623-727.
II, Comm. Pure Appl. Math., 17, 35-92.
- N.I. Akhiezer & I.M. Glazman, 1981, Theory of Linear Operators in Hilbert Space, 2 Volumes, Pitman, Londres.
- Z. Alterman, H. Jarosh & C.L. Pekeris, 1959, Oscillations of the Earth, Proc. R. Soc. A, 252, 80-95
- D.L. Anderson, 1961, Elastic Wave Propagation in Layered Anisotropic Media, J. Geophys. Res., 66, 2953.
- D. L. Anderson & R.S. Hart, 1978, Q of the Earth, J. Geophys. Res., 83, 5869-5882.
- N. Aronszajn, 1950, Theory of Reproducing kernels, Trans. A.M.S., 68, 337-404.
- G.E. Backus, 1970, A Geometrical Picture of Anisotropic Elastic Tensors, Rev. Geophys. Space Phys., 8, 633-671.
- G.E. Backus, 1982, Reply : Limits of Validity of First-Order Perturbation Theory for Quasi-P Velocity in Weakly Anisotropic Media, J. Geophys. Res., 87, 4641-4644.
- G.E. Backus & J.F. Gilbert, 1961, The Rotational Splitting of the Free Oscillations of the Earth, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 47, 362-371.
- G.E. Backus & J.F. Gilbert, 1967, Numerical Applications of a Formalism for Geophysical Inverse Problems, Geophys. J. R. astr. Soc., 13, 247-276.

G.E. Backus & F. Gilbert, 1968, The Resolving Power of Gross Earth Data, *Geophys. J. R. astron. Soc.*, 16, 169-205.

A.V. Balakrishnan, 1976, *Applied Functionnal Analysis*, Springer-Verlag, New-York.

Y. Bamberger, 1981, *Mécanique de l'Ingénieur II, Milieux Déformables*, Hermann, Paris.

E.M. Barston, 1973, Eigenvalue Problem for Lagrangian Systems. VII, *J. Math. Phys.*, Vol. 15, 6, 675-682.

E.M. Barston, 1976, Eigenvalue Problem for Lagrangian Systems. VIII, *J. Math. Phys.*, Vol. 18, 4, 750-755.

H. Benioff, B. Gutenberg and C.F. Richter, 1954, Progress report, *Trans. Amer. Geophys. Union.*, 35, 979-987.

H. Benioff, F. Press et S. W. Smith, 1961, Excitation of the Free Oscillations of the Earth by Earthquake, *J.G.R.*, 66, 605-620.

A. Ben Menahem, 1964, Mode-Ray Duality, *Bull. Seism. Soc. Amer.*, 54, 1315-1321.

H. Berger, J. Boulot and R. Ohayon, 1975, On a Spectral Problem in Vibration Mechanics : Computation of Elastic Tanks Partially Filled with Liquids. *J. Math. Anal. and Appl.*, 51, 2, 272-298.

M. Bertero & G.A. Viano, 1978, On Probabilistic Methods fo the Solution of Improperly Posed Problems, *Bolletino U.M.I.*, 5, 483-508.

J. Bognár, 1974, *Indefinite Inner Product Spaces*, Springer-Verlag, Berlin.

T.J. A Bromwich, 1898, On the Influence of Gravity on Elastic Waves, and, in Particular, on the Vibrations of an Elastic Globe, *Proc. London Math. Soc.*, Vol XXX.

J.M. Brune, 1964, Travel Times, Body Waves and Normal Modes of the Earth, *Bull. Seism. Soc. Amer.*, 54, 2099-2128.

- F. Busse, 1975, A Model of the Geodynamo, *Geophys. J.R. Astron. Soc.*, 42, 436-459.
- H. Cartan, 1967, *Cours de calcul différentiel*, Hermann, Paris.
- J. Cea, 1973, Identification de domaines, *Lecture Notes in Computer Science*, 3, Springer Verlag, Heidelberg.
- S. Chandrasekhar & N.R. Lebovitz, 1963, *Astroph. J.*, 138, 185.
- S. Chandrasekhar & N.R. Lebovitz, 1964, *Astroph. J.*, 140, 1517-1528.
- B. F. Chao, 1983, Normal Mode Study of the Earth's Rigid Body Motions, *J. Geophys. Res.*, 88, 9437-9442.
- G. Chavent, 1983, Local Stability of the Output Least Square Parameter Estimation Technic, *Mat. Applic. Comp.*, 2, 3-22.
- J. Chazarain & A. Piriou, 1981, *Introduction à la Théorie des Equations aux Dérivées Partielles Linéaires*, Gauthier-Villars, Paris.
- Y. Choquet-Bruhat, C. Dewitt-Morette & M. Dillard-Bleick, 1982, *Analysis, Manifolds and Physics*, North Holland, Amsterdam.
- J. Christensen-Dalsgaard, 1980, On Adiabatic Non-radial Oscillations with Moderate or Large ℓ , *Month. N. R. astr. Soc.*, 190, 765-791.
- J. Christensen-Dalsgaard, D. Gough & J. Toomre, 1985, Seismology of the Sun, *Science*, 229, 923-931.
- P. Ciarlet, 1982, *Introduction à l'Analyse Numérique Matricielle et à l'Optimisation*, Masson, Paris.
- T.G. Cowling, 1941, *Month. N. R. Astr. Soc.*, 101, 367-375.

- J.P. Cox, 1976, *A. Rev. Astr. Astrophys.*, 14, 247.
- M. Cristea, 1981, A Note on Global Inversion Theorems and Applications to Differential Equations, *Nonlinear Analysis T.M.A.*, Col. 5, 1155-1161.
- D.J. Crossley, 1975, The Free-oscillation at the Centre of the Earth, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 41, 153-163.
- D.J. Crossley, 1975, Core Undertones with Rotation, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 42, 477-488.
- D.J. Crossley & Rochester M.G., 1980, Simple Core Undertones, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 60, 129-161.
- F.A. Dahlen, 1968, The Normal Modes of a Rotating, Elliptical Earth, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 16, 329-367.
- F.A. Dahlen, 1969, The Normal Modes of a Rotating, elliptical Earth, *Geophys. J. R. Soc.*, 18, 397-436.
- F.A. Dahlen, 1972, Elastic Dislocation Theory for a Self-Gravitating Elastic Configuration with an Initial Static Stress Field, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 28, 357-383.
- F.A. Dahlen, 1980, Addendum to 'Excitation of the Normal Modes of a Rotating Earth Model by an Earthquake fault', *Geophys. J. R. Soc.*, 62, 719-721.
- F.A. Dahlen & M.L. Smith, 1975, The Influence of Rotation on the Free Oscillations of the Earth, *Phil. Trans. R. Soc.*, 279A, 583-629.
- F.A. Dahlen & R.V. Sailor, 1979, Rotational and Elliptical Splitting of the Free Oscillation Parameters, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 69,537-549.
- I. Daubechies, A. Grossmann & Y. Meyer, 1986, Painless Nonorthogonal Expansions, *J. Math. Phys.*, 27,1271-1283.

R. Dautray & J.L. Lions, 1984, *Analyse Mathématique et Calcul Numérique Pour les Sciences et les Techniques*, 3 tomes, Masson, Paris.

C. Denis, 1970, Sur les Solutions Sphéroïdales au Voisinage du Centre dans le Problème des Oscillations Libres d'une Sphère Rhéologique Autogravitante, *Bull. Soc. R. Sci. Liège* n°5-6, 288-298.

C. Denis, 1971, On Free Vibrations of the Earth with Periods above One Hour.

C. Denis, 1976, Sur les Propriétés Thermiques de la Terre et la Possibilité de Modes Ultralents Liés à la Présence d'une Asthénosphère, *Archives Sciences Luxembourg*, XXXVII, 31-47.

N. Dunford & J.T. Schwartz, 1963, *Linear Operators, Vol. II, Spectral Theory*, Wiley, New York.

B. Doubrovine, S. Novikov & A. Fomenko, 1982, *Géométrie Contemporaine, Vol. I*, ed. Mir, Moscou.

R.J. Duffin, 1955, A Minimax Theory for Overdamped Networks, *J. Rat. Mech. Anal.*, 4, 221-233.

J. Dyson & B. Schutz, 1979, Perturbations and Stability of Rotating Stars, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 368, 389-410.

A.M. Dziewonski & R.V. Sailor, 1976, Comments on the "The Correction of Great Circular Surface Wave Phase Velocity Measurements for the Rotation and Ellipticity of the Earth" by F.A. Dahlen, *J. Geophys. Res.*, 81, 26, 4947-4955.

I. Ekeland, 1984, *Le Calcul, l'Imprévu, Seuil, Coll. Science Ouverte*, Paris.

J. Einsfeld, 1969, A Completeness Theorem for an Integro-Differential Operator, *J. Math. Anal.*, 26, 357-375.

J. Einsfeld, 1973, Operator Equations and Nonlinear Eigen-parameters Problems, *J. Funct. Anal.*, 12, 475.

W. M. Elsasser, 1946, Induction Effects in Terrestrial Magnetism, *Phys. Rev.*, I 69, 106-116, II 70, 202-212.

C. Foias & R. Temam, 1978, Remarques sur les Equations de Navier-Stokes Stationnaires et les Phénomènes Successifs de Bifurcation. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Série 4, Vol. 5, N° 1*, 551-590.

J.N. Franklin, 1970, Well-posed Stochastic Extension of Ill-posed Linear Problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 31, 682-715.

J. Friedman & B. Schutz, 1978, Lagrangian Perturbation Theory of Nonrelativistic Fluids, *Astroph. J.*, 221, 937-957.

J. Friedman & B. Schutz, 1978, Secular Instability of Rotating Newtonian Stars, *Astroph. J.*, 222, 281-296.

S. Friedlander, 1982, Turning Surface Behaviour for Internal Waves Subject to General Gravitational Fields, *Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn.*, 21, 189-200.

S. Friedlander, 1985, Internal Oscillations of the Earth's Fluid Core, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 80, 345-361.

S. Friedlander & W. Siegmann, 1982, Internal Waves in a Rotating Stratified Fluid in an Arbitrary Gravitational Field, *Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn.*, 19, 267-291.

S. Friedlander & W. Siegmann, 1982, Internal Waves in a Contained Rotating Stratified Fluid, *J. Fl. Mech.*, 114, 123-156.

P.R. Garabedian & M. Schiffer, 1953, Variational Problems in the Theory of Elliptic Partial Differential Equations, *J. Rational Mech. and Anal.* 2, 137-171.

P.R. Garabedian & M. Schiffer, 1953, Convexity of Domain Functionals. *J. d'Analyse Mathématique*, 2, 281-368.

D Giardini, X. Li et J. Woodhouse, 1987, Three-dimensional Structure of the Earth from Splitting in Free-oscillation Spectra, *Nature*, 325, 405-411.

F. Gilbert, 1971, The Diagonal Sum Rule and Averaged Eigenfrequencies, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 23, 125-128, 1971.

F. Gilbert & A.M. Dziewonski, 1975, An Application of Normal Mode Theory to the Retrieval of Structural Parameters and Source Mechanisms for Seismic Spectra, *Phil. Trans. R. Soc. A*, 278, 187-269.

C. Gire, J.L. Le Mouél & T. Madden, 1986, Motions at the Core Surface Derived from SV Data, *Geophys. J.R. astr. Soc.*, 84, 1-29.

J. Hadamard, 1903, *Leçons sur la Propagation des Ondes*, Hermann, Paris.

J. Hadamard, 1906, Sur les transformations ponctuelles, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 34, 71-84.

J. Hadamard, 1910, *Leçon sur le Calcul des Variations*, Gauthiers-Villars et Oeuvres Complètes.

J. Hinderer, H. Legros et M. Almavict, 1982, A Search for Chandler and Nearly Diurnal Free Wobbles Using Liouville Equations, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 71, 303-332.

W. Hopkins, 1839, *Researches in Physical Geology*, *Phil. Trans R. Soc. London*, 129A, 381.

B.A. Hough, 1895, The Oscillations of a Rotating Ellipsoidal Shell Containing Fluid. *Phil. Trans. R. Soc.*, 186A, 469-506

D. Huet, 1976, *Décomposition spectrale et opérateurs*, P.U.F., Paris.

C. Hunter, 1977, On Secular Stability, Secular Instability, and Points of Bifurcation of Rotating Gaseous Masses, *Astroph. J.*, 213, 497-517.

E.L. Isaacson & E. Trubowitz, 1983, The Inverse Sturm-Liouville Problem.I, *Comm. Pure Appl. Math.*, XXXVI, 767-783.

E.L. Isaacson, H.P. Mc Kean & E. Trubowitz, 1984, The Inverse Sturm-Liouville Problem.II, *Comm. Pure Appl. Math.*, XXXVII, 1-11.

R. James & Z. Kopal, 1963, The Equilibrium Figures of the Earth and the Major Planets, *Icarus*, 1, 442-454.

H. Jeffreys, 1924, 1976 6^o Ed., *The Earth*, Cambridge University Press, London.

G. Jobert, 1976, Matrix Methods for Generally Stratified Media, *Geophys. J.R. astr. Soc.*, 47, 351-362.

I. M. Johnson & D. E. Smylie, 1977, A Variational Approach to Whole Earth Dynamics, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 50, 35-54.

T.H. Jordan, 1978, A Procedure for Estimating Lateral Variations from Low Frequency Eigenspectra Data, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 52, 441-455.

D. D. Joseph, 1968, Parameter and Domain Dependence of Eigenvalues of Elliptic Partial Differential Equations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol.24, 324-351.

Kac, 1966, Can One Hear the Shape of a Drum ?, *Ann. Math. Monthly*, 73, 1-23.

H. Kanamori & D.L. Anderson, 1977, Importance of Physical Dispersion in Surface Wave and Free Oscillation Problems, *Rev. Geophys. Space Phys.*, 15, 105-111.

E. Kjartansson, 1979, Constant Q-Wave Propagation and Attenuation, *J. Geophys. Res.*, 84, 4737-4748.

T. Kato, 1966, 1976 (2^o ed.), *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin.

H. Lamb, 1882, *The Vibrations of an Elastic Sphere*, *London Proc. Math. Soc.* vol.XIII.

P. Lanzano, 1974, The Equilibrium of a Rotating Body of Arbitrary Density, *Astrophys. and Space Science*, 29, 161-178.

- P. Lanzano, 1982, Deformations of an Elastic Earth, International Geophysics Series, Vol 31, Academic Press, N.Y.
- N.R. Lebowitz, 1965, On Schwarzschild's Criterion for the Stability of Gaseous Masses, *Astroph. J.*, 142, 229-242, 1257-1260.
- P. Ledoux, 1949, *Mém. Soc. Roy. Sc. Liège*, 4ème série, 9, 172-215.
- P. Ledoux & P. Smeyers, 1966, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 262B, 841-844.
- J.L. Le Mouél, 1984, Outer Core Geostrophic Flow and Secular Variation of Earth's Geomagnetic Field, *Nature*, 311, 734-735.
- J.L. Le Mouél, C. Gire, & T. Madden, 1985, Motions at Core Surface in the Geostrophic Approximation, 39, 270-287.
- J.L. Le Mouél, D. Jault & C. Gire, 1987, Sur la Forme des Mouvements Lents Animant le Fluide du Noyau Terrestre, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 305, II, 619-624.
- M.S. Lehtinen, L. Päivarinta & E. Somersalo, 1987, Linear Inverse Problems for Generalized Random Variables.
- J.L. Lions, 1957, *Lectures on Elliptic Partial Differential Equations*, Tata Institut, Bombay.
- J.L. Lions & Magenes E., 1968, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol.1, Dunod, Paris.
- H-P. Liu, D. L. Anderson & H. Kanamori, 1976, Velocity Dispersion due to Anelasticity ; Implications for Seismology and Mantle Composition, *Geophys. J.R. astr. Soc.*, 47, 41-58.
- A.E.H. Love, 1911, *Some Problem of Geodynamics*, Cambridge University Press.
- P.C. Luh, 1973, Free Oscillations of the Laterally Inhomogeneous Earth : Quasi-degenerate Multiplet Coupling, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 32, 187-202.

P.C. Luh, 1974, The Normal Modes of the Rotating Self-gravitating Inhomogeneous Earth, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 38, 187-224.

L.E. Malvern, 1969, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey.

A. Mandelbaum, 1984, Linear Estimators and Measurable Linear Transformations on a Hilbert Space, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, 3, 385-398.

J.E. Marsden & T.J.R. Hughes, 1983, *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, London.

M. Matsu'ura & N. Hirata, 1982, Generalized Least-squares Solutions to Quasi-Linear Inverse Problems with a Priori Information, *J. Phys. Earth*, 30, 451-468.

P. Melchior, 1973, *Physique et Dynamique Planétaires, Vol. 4 : Géodynamique*, Vander, Bruxelles.

M. Métivier & J. Neveu, 1980, *Cours de probabilité*, Ed. de l'Ecole Polytechnique.

E. Mochizuki, 1986, The Free Oscillations of an Anisotropic and Heterogeneous Earth. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 86, 167-176.

J.P. Montagnier, 1986, *Thèse d'Etat, Paris VI*.

J.P. Montagnier, 1987-1988, *Petrological constraints, soumis à Phys. Earth Planet. Interiors*.

S.M. Nakiboglu, 1979, Hydrostatic Figure and Related Properties of the Earth, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 57, 639-648.

S.M. Nakiboglu, 1982, Hydrostatic Theory of the Earth and its Mechanical Implications, *Phys. Earth and Plan. Int.*, 28, 302-311.

H.C. Nataf, I. Nakanishi & D.L. Anderson, 1986, Measurements of Mantle Wave Velocities and Inversion for Lateral Heterogeneities and Anisotropy, 3 : Inversion, *J. Geophys. Res.*, 91,

7261-7307.

J. Nečas, 1967, *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson, Paris.

J. Neveu, 1970, *Bases Mathématiques des Probabilités*, Masson, Paris.

L.V. Nikitin & E.M. Chesnokov, 1981, Influence of a Stressed Condition on the Anisotropy of Elastic Properties in a Medium, *Izv. Earth Phys.*, 17, 174-183.

R. Ohayon & R. Valid, 1984, True Symmetric Variational Formulations for Fluid-structure Interaction in Bounded Domains - Finite Element Results, in *Numerical Methods in Coupled Systems*, Ed. R.W. Lewis, P. Brettes et E. Hinton, Wiley.

E. A. Okal, 1978, A Physical Classification of the Earth's Spheroidal Modes, *J. Phys. Earth*, 26, 75-104.

P. Olson, 1977, Internal Waves in the Earth's Core, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 51, 183-215.

C. L. Pekeris & H. Jarosh, 1958, The Free Oscillations of the Earth, *Contributions in Geophysics in Honor of Beno Gutenberg*, 171-192, Pergamon N.W.

C. L. Pekeris, & Y. Accad, 1972, Dynamics of the Liquid Core of the Earth, *Phil. Trans. R. Soc. A*, 273, 237-260.

R. A. Phinney & R. Burridge, 1973, Representation of the Elastic-Gravitational Excitation of a Spherical Earth Model by Generalized Spherical Harmonics, *Geophys. J.R. astr. Soc.*, 34, 451-487.

H. Poincaré, 1910, Sur la précession des corps déformables, *Bull. astr.*, 17, 321-356.

S.D. Poisson, 1829, Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques, *Mémoire de l'Académie*, 8, 357-570.

G. Pólya & M. Schiffer, 1953, Convexity of Functionals by Transplantation. *J. d'Analyse Mathématique*, 3, 246-344

M. Radulescu & S. Radulescu, 1980, Global Inversion Theorems and Applications to Differential Equations, *Nonlinear Analysis T.M.A.*, Vol. 4 n°4, 951-967.

J.W. Rayleigh, 1894, *The Theory of Sound*, Cambridge.

M. Reed & B. Simon, 1972, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. I et IV, Academic Press, N.Y.

M. Ritzwoller, G. Masters & F. Gilbert, 1986, Observations of Anomalous Splitting and Their Interpretation in Terms of Aspherical Structure, *J. Geophys. Res.*, 91,10203-10228.

C.D. Rodgers, 1976, Retrieval of Atmospheric Temperature and Composition from Remote Measurements for Thermal Radiation, *Rev. Geoph. and Space Phys.*, 14, 4, 609-624.

E. H. Rogers, 1964, A Minimax Theory for Overdamped Systems, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16, 89-96.

E. H. Rogers, 1968, Variational Properties of Nonlinear Spectra, *J. Math. Mech.*, 18, 479-490.

D.H. Rothman, 1985, Nonlinear Inversion, Statistical Mechanics and Residual Statics Estimation, *Geophysics*, 50, 2797-2807.

D.H. Rothman, 1986, Automatic Estimation of Large Residual Statics Corrections, *Geophysics*, 51, 332-346.

P.C. Sabatier, 1978, Spectral and Scattering Inverse Problems, *J. Math. Phys.*, 19, 2410-2425.

T. Sasao & J. M. Wahr, 1981, An Excitation Mechanism for the Free "Core Nutation", *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 64, 729-746.

M. Schiffer, 1954, Variation of Domain Functionals, *Bull. Am. Math. Soc.*, 60, 303-328.

B.F. Schutz, 1983, Problems in Astrophysical Fluid Dynamics, in *Fluid Dynamics in Astrophysics and Geophysics*, Ed. Norman R. Lebovitz, *Lectures in Applied Mathematics*, Vol.20,

Am. Math. Soc.

L. Schwartz, 1973, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris.

P.Y. Shen, 1983, On Oscillations of the Earth's Fluid Core, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 75, 737-757.

F. Sludskii, 1896, De la Rotation de la Terre Supposée Fluide à son Intérieur, *Bull. Soc. Nat. Moscou*, 9, 285-318.

P. Smeyers, 1966, Les Oscillations Linéaires et Adiabatiques de la Sphère Homogène, *Bull. Acad. roy. Belgique, Cl. Sc., 5ème série*, 52, 1126-1142.

N.L. Smith, 1977, Wobble and Nutation of the Earth, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 50, 103-140.

D.E. Smylie, 1974, Dynamics of the Outer Core, *Veröff. Zent. Phys. Erde Akad. Wiss. DDR*, 30, 91-104.

R. Snieder & B. Romanowicz, 1987-1988, A New Formalism for the Effect of Lateral Heterogeneity on Normal Modes and Surface Waves - I: Isotropic Perturbations of Interfaces and Gravitational Perturbations, *Soumis à Geophys. J. R. astr. Soc.* .

D. E. Smylie & Rochester M. G., 1981, Compressibility Core Dynamics and the Subseismic Wave Equation, *Phys. Earth. Plan. Int.*, 24, 308-319.

M. Takeuchi & M. Saito, 1972, Seismic surface waves, in *Methods in Computational Physics*, Vol.II, Academic Press, New York.

T. Tanimoto, 1986, Free Oscillations of a Slightly Anisotropic Earth, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 87, 493-517.

A. Tarantola, 1987, *Inverse Problem Theory*, Elsevier, Amsterdam.

A. Tarantola & B. Valette, 1982, Inverse Problems = Quest for Information, *J. Geophys.*, 50, 159-170.