C. R. Acad. Sci. Paris, t. 312, Série II, p. 1483-1489, 1991

Pédologie/*Pedology*

Relation pression capillaire-teneur en eau dans les milieux poreux fragmentés et identification du caractère fractal de la structure des sols

Michel Rieu et Garrison Sposito

Résumé – L'analyse de la distribution de la matière solide et de l'espace poral dans un objet fragmenté fractal permet d'établir une relation caractéristique entre la pression capillaire et la teneur en eau dans cet objet virtuel. Le fait que cette relation soit vérifiée dans le cas de sols de texture et origine diverses suggère que le caractère fractal de la structure des sols pourrait être un concept de portée générale en pédologie.

The water characteristic curve of fragmented porous media and the fractal nature of soil structure

Abstract – Introduction of fractal concepts of both the solid matrix and the pore space leads to a fractal expression for the water characteristic curve in a fractal fragmented porous medium. This expression was tested successfully on six field soils of diverse texture and origin. These first results suggest that the proposed fractal nature of soil structure may be a concept of broad validity.

Abridged English Version – The structure of soil and its close relationship to aeration and water movement have been studied intensively by soil physicists throughout the present century. Of perhaps most importance in these studies is the characterization of the soil fabric and its associated pore space. This classic problem in soil physics recently has taken on new dimensions with the recognition that, because soil is both a fragmented material and a porous medium, a fractal representation may be especially appropriate ([2] to [5]).

In this paper, we outline a general theoretical framework for a fractal representation of soil as both a fragmented natural material and a porous medium. We begin with a description of virtual pore size-fractions in a self-similar fragmented porous medium that permits a straightforward introduction of fractal concepts of both the solid matrix and the pore space. The self-similarity property means that, for each virtual pore size-fraction, a constant number N of smaller, similar volumes V_{i+1} (or pore volumes P_{i+1}) can be associated with any volume V_i (or P_i). Simply put, every volume V_i contains N volumes V_{i+1} and one associated pore volume P_i. The volume P_i comprises pore elements that are distributed in a regular manner around the volumes V_{i+1}. In turn, each volume V_{i+1} contains N volumes V_{i+2} and one associated pore volume P_{i+1} and so on. We define a linear similarity ratio, denoted r, which relates successive volumes (or pore volumes):

$$(1)\qquad V_{i+1}/V_i = P_{i+1}/P_i = r^3.$$

If we consider m steps of fragmentation, every volume V_i may be expressed by:

$$(2)\qquad V_i = \sum_{j=i}^{j=m-1} N^{j-i} P_j + N^{m-i} V_m \qquad (0 \leq i \leq m-1)$$

where $\sum_{j=i}^{j=m-1} N^{j-i} P_j$ represents the pore space produced by fragmentation and $N^{m-i} V_m$ is a residual solid volume. These concepts lead to equations for the porosity and bulk density

Note présentée par Georges Pédro.

0764-4450/91/03121483 $ 2.00

in a fractal porous medium in terms of a characteristic fractal dimension, D defined as [3]:

$$\mathrm{D} \equiv \log \mathrm{N} / \log (1/r). \tag{3}$$

If the largest self-similar particle diameter is denoted d_0 and the smallest d_m, the porosity of a particle of diameter d_i is:

$$\Phi(d_i) = 1 - d_m^{3-\mathrm{D}}\, d_i^{\mathrm{D}-3} \tag{4}$$

and its bulk density is:

$$\rho_i = \rho_m\, d_m^{3-\mathrm{D}}\, d_i^{\mathrm{D}-3} \tag{5}$$

where ρ_m is the bulk density of the particle of diameter d_m. Equations (4) and (5) are consistent with similar results ([4], [6], [7]).

Calculation of the saturated water content of a size fraction k and application of the Laplace equation yield an expression for the soil water characteristic of the size-fraction:

$$h_k(\theta_k) = h_0\,[(1-\Phi)+\theta_k]^{1/(\mathrm{D}-3)} \qquad (0 \leqq k \leqq m-1) \tag{6}$$

where $h_0 = h_0(\theta_0)$, $\theta_0 = \Phi$ is the porosity of the medium and

$$\theta_k = (d_k/d_0)^{3-\mathrm{D}} - (d_m/d_0)^{3-\mathrm{D}} \tag{7}$$

is the saturation water content of size-fraction k having the characteristic particle diameter d_k.

The model expression for the water characteristic was tested on six field soils of diverse texture and origin. The resulting model fits were excellent for all the soils, except at water contents very near saturation, where the hypothesis of self similarity may break down (Table and *Fig.*). Fractal dimensions ranging from 2.758 to 2.968 were found, with the value of D increasing as the texture becomes finer (higher content of fine particles). These first results suggest that the proposed fractal nature of soil structure may be a concept of broad validity, although further research is needed to establish the limits of the fractal domain of particle size conclusively.

La structure fragmentaire du sol est très généralement reconnue. Depuis longtemps les pédologues ont étudié intensivement les propriétés des agrégats du sol et de leur assemblage afin de rendre compte « de la variation de la structure ou du degré d'agrégation du sol » [1]. Ce problème classique de la physique du sol peut être abordé sous un éclairage nouveau en raison du fait que le sol étant à la fois un milieu fragmenté et un assemblage poreux, une représentation fractale de sa structure paraît tout à fait appropriée ([2] à [5]).

I. Caractéristiques d'une fragmentation auto-semblable. — La structure du sol peut être décrite comme l'assemblage d'éléments de tailles diverses séparés par un système complexe de fissures. Un premier réseau décompose le sol en éléments distincts dont la forme est fonction de l'orientation des fissures. Ces éléments initiaux sont eux-mêmes décomposés en éléments de plus en plus petits par des fissures de plus en plus fines... Si le système de fissures est auto-semblable, le premier réseau de fissures est reproduit semblablement à lui-même au sein de chaque nouvel élément de sol, par $m-1$ stades successifs. A chaque stade, la maille du réseau ainsi que la largeur des fissures sont réduites dans un rapport constant, noté r, tel que un réseau entier soit contenu à l'intérieur d'une maille du réseau précédent. Un élément solide résultant du premier stade de fragmentation (stade 0), dont le volume est noté V_0, le diamètre moyen d_0, et la densité apparente ρ_0, est décomposé au stade suivant en un nombre N d'éléments de volume V_1 et de diamètre d_1, séparés par des fissures dont la largeur est notée f_0. Il résulte de l'auto-similitude du système de fissures que la forme des éléments de volume V_1 est semblable à celle de l'élément de volume V_0. Chaque élément de volume V_1 est lui-même décomposé en N éléments de volume V_2 etc. Au stade $m-1$, les éléments de volume V_m, séparés par des fissures de largeur f_{m-1}, ne sont pas fragmentés. Leur densité est notée ρ_m.

On obtient ainsi une structure virtuelle imbriquée où tout élément de volume V_i et de diamètre d_i inclut un nombre constant N d'éléments de volume V_{i+1} et de diamètre d_{i+1}, séparés par un réseau de fissures de largeur f_i dont le volume total est $P_i = V_i - NV_{i+1}$. Chaque élément de volume V_{i+1} contenant un volume de fissures P_{i+1}, on peut aussi associer N volumes P_{i+1} à tout volume P_i. En fin de compte, tout volume V_i est composé de N^{m-i} éléments de volume V_m séparés par un réseau de fissures imbriquées dont la largeur varie de f_i à f_{m-1}. Les stades successifs de la fragmentation révèlent des incréments d'espace vide au sein de l'élément de volume V_i de sorte que l'on peut écrire :

(1) $$V_i = \sum_{j=i}^{j=m-1} N^{j-i} P_j + N^{m-i} V_m \qquad (0 \leqq i \leqq m-1)$$

où $\sum_{j=i}^{j=m-1} N^{j-i} P_j$ exprime l'espace poral produit par la fragmentation et $N^{m-i} V_m$ un volume résiduel d'éléments non fragmentés. On vérifie que :

(2) $$d_{i+1}/d_i = f_{j+1}/f_j = r \qquad (0 \leqq i \leqq m)$$

et

(3) $$V_{i+1}/V_i = P_{j+1}/P_j = r^3 \qquad (0 \leqq j \leqq m-1)$$

II. Propriétés de la fragmentation auto-semblable. — Lorsque un diamètre $d_k = d_0 r^k$ est multiplié par r, le nombre total N_k d'éléments de diamètre $d_i > d_k$ est multiplié par N. La distribution des éléments résultant de la fragmentation est de la forme :

(4) $$N_k(d_i > d_k) \approx d_k^{-D}$$

Cette loi de distribution est caractéristique des objets fractals résultant d'une fragmentation [2]. La dimension fractale D mesure simultanément l'irrégularité et la fragmentation de l'objet [3]. D est défini par [3] :

(5) $$D \equiv \log N / \log(1/r)$$

ou encore :

(6) $$N r^D = 1.$$

La masse $M(d_i)$ d'un élément de diamètre d_i et de densité apparente ρ_i est donnée par [équation (1)] :

(7) $$M(d_i) \equiv \rho_i V_i = N^{m-i} \rho_m V_m \qquad (0 \leqq i \leqq m).$$

La porosité résultant de la fragmentation de tout élément de diamètre d_i peut s'exprimer par [équation (1)] :

(8) $$\Phi(d_i) = 1 - N^{m-i} V_m / V_i \qquad (0 \leqq i \leqq m)$$

et la surface volumique totale de cet élément est :

(9) $$S(d_i) = N^{m-i} \alpha d_m^2 / \beta d_i^3 \qquad (0 \leqq i \leqq m)$$

où α et β sont des coefficients géométriques tels que la surface externe d'un élément de diamètre d_k soit αd_k^2 et son volume βd_k^3. En combinant les équations (2), (6) et (7) la densité apparente de l'élément de diamètre d_i peut s'écrire :

(10) $$\rho_i = \rho_m \, d_m^{3-D} \, d_i^{D-3}$$

et les équations (8) et (9) prennent la forme :

(11) $$\Phi(d_i) = 1 - d_m^{3-D} \, d_i^{D-3}$$

(12) $$S(d_i) = (\alpha/\beta) \, d_m^{2-D} \, d_i^{D-3}$$

L'équation (10) exprime que **la distribution de la masse est fractale :** les volumes V_m de densité ρ_m sont organisés de façon à former des agrégats dont la fissuration croît avec leur taille d_i. Il en résulte que la porosité de fragmentation est elle-même fractale [équation (11)]. La totalité de cette porosité est accessible, si bien que la surface externe des agrégats se confond avec l'enveloppe du volume poral et que la surface volumique est fractale [équation (12)]. Ces observations rejoignent des résultats similaires ([4], [6], [7]). La particularité du milieu fragmenté étudié ici est que aussi bien sa masse que sa porosité ou sa surface spécifique ont la même dimension fractale. En un mot, c'est sa structure qui est fractale.

III. Pression capillaire dans un milieu fragmenté fractal. — Lorsqu'un milieu de ce type voit sa porosité se remplir d'eau et si l'on considère que le liquide pénètre progressivement dans les fissures sans que de l'air y reste piégé, la teneur en eau d'un élément de taille d_0 peut s'écrire :

(13) $$\theta_i = (1/V_0)\,[N^i (V_i - N^{m-i} V_m)] \qquad (0 \leqq i \leqq m)$$

où l'index i signifie que toutes les fissures de largeur $\leqq fi$ sont remplies d'eau. L'équation [13] peut être réécrite sous la forme :

(14) $$\theta_i = (d_i/d_0)^{3-D} - (d_m/d_0)^{3-D}$$

La pression de l'eau dans les fissures vérifie la loi de Laplace. Sa variation peut être exprimée par la relation :

(15) $$h_k = \mathrm{Cte}/f_k$$

si bien que l'on peut écrire :

(16) $$h_k = h_0 \, (f_0/f_k)$$

ou [équation (2)] :

(17) $$h_k = h_0 \, r^{-k}$$

où h_0 est la pression capillaire lorsque la teneur en eau θ_0 est égale à la porosité de l'élément de volume V_0. On a alors [équation (11)] :

(18) $$\theta_0 = \Phi(d_0) = 1 - (d_m/d_0)^{3-D}$$

En combinant les équations [14], [17] et [18] on obtient :

(19) $$h_k = h_0 \, [(1-\theta_0) + \theta_k]^{1/(D-3)} \qquad (0 \leqq k \leqq m-1)$$

où le terme $(1-\theta_0)$ représente la teneur en solide.

Dans un milieu fragmenté fractal, **la pression de l'eau varie exponentiellement en fonction de la somme des teneurs en solide et en eau.** En outre, parce qu'elle est fondée sur les équations (17), (14) et (18), l'équation (19) exprime simultanément l'auto-similitude du système de fissures et le caractère fractal de la structure de tout milieu fragmenté auquel elle s'applique. La dimension de cette structure est égale au coefficient D de l'exposant de l'équation (19) et son rapport d'auto-similitude est déterminée par l'équation (17).

TABLEAU

Ajustement de l'équation (19) à la relation $h(\theta)$ de sols de textures différentes.
Adjustment of equation (19) *to the* $h(\theta)$ *relation for soils of different textures.*

Sol	Texture	Modèle Fractal	Modèle Expér. ([a])	Dimension fractale	Réf.
Dieri	Sableuse	$11{,}5\,(1-0{,}434+\theta)^{-4{,}1375}$	1,05 ***	2,758	[11]
Katoure	Sablo-argileuse	$40{,}6\,(1-0{,}409+\theta)^{-8{,}271}$	0,93 ***	2,879	[13]
Ariana	Limono-sableuse	$22{,}0\,(1-0{,}460+\theta)^{-9{,}559}$	0,92 ***	2,895	[12]
Panoche	Arg.-lim.-sab.	$22{,}9\,(1-0{,}454+\theta)^{-15{,}80}$	0,99 ***	2,937	[14]
Yolo	Limono-argileuse	$8{,}18\,(1-0{,}434+\theta)^{-21{,}531}$	1,00 ***	2,954	[15]
Fullerton	Argilo-limoneuse	$0{,}57\,(1-0{,}447+\theta)^{-71{,}988}$	1,01 ***	2,986	[16]

([a]) Pente de la droite de corrélation entre les valeurs modélisées et expérimentales.

IV. Identification du caractère fractal de la structure du sol. — Depuis l'introduction du concept d'objet fractal [8], des distributions fractales d'éléments fragmentés [équation (4)] ont été fréquemment reconnues dans le sol ([2], [5], [9], [10]). L'ajustement de l'équation (19) aux valeurs de la teneur en eau et de la pression capillaire mesurées *in situ* par des procédés non destructifs, permet de vérifier simultanément l'existence d'un facteur d'échelle dans la largeur des fissures et le caractère fractal de la structure du sol.

Six exemples de modélisation de la relation pression capillaire-teneur en eau sont présentés ici, pour des sols de texture et d'origine très différentes (tableau et *fig.*).

On constate un excellent accord entre le modèle fractal [équation (19)] et les données expérimentales, bien que l'ajustement semble limité à un domaine restreint de teneurs en eau. Ces résultats impliquent que la structure des sols considérés ici est fractale, au moins dans un domaine d'échelles particulier. La limite supérieure de ce domaine peut être associée à une teneur en eau maximale, ou une largeur de fissures au-delà de laquelle l'auto-similitude n'est plus vérifiée. Au voisinage de la saturation en effet, la relation entre pression capillaire et teneur en eau peut être contrôlée par des macropores qui perdent leur eau à des pressions extrêmement faibles. Il en résulte une diminution notable de la teneur en eau, tandis que la variation de $h(\theta)$ est imperceptible. Ces pores de grande taille ont des caractéristiques géométriques différentes des pores plus petits et n'appartiennent pas au réseau auto-semblable des pores qui contrôlent la variation de $h(\theta)$ sur la majeure partie de la gamme de teneur en eau. Les données expérimentales analysées ici permettent de vérifier que le domaine fractal s'étend au moins sur deux ordres de grandeur de dimension linéaire sans qu'il soit possible de fixer une limite inférieure. Si celle-ci se situe vers des tailles de particules ou d'espaces extrêmement réduits, on est proche du cas, purement théorique, où le nombre de fragmentations n'est pas limité, ce qui se traduit par $d_m=0$ et $\theta_0=1$ [équation (18)] tandis que l'équation (19) devient :

$$(\theta_k/\theta_0)=(h_0/h_k)^{(3-\mathrm{D})} \tag{20}$$

L'équation (20) est identique à l'expression empirique de Brooks et Corey [17] : $[\theta(h)/\Phi]=(h_0/h)^{\lambda}$ dont l'exposant trouve ici l'interprétation fractale : $\boldsymbol{\lambda=3-\mathrm{D}}$.

Les espaces vides P_i créés par la fragmentation peuvent être exprimés sous la forme [équations (3) et (6)] :

$$\mathrm{P}_i=\mathrm{V}_i-\mathrm{NV}_{i+1}=\mathrm{V}_i(1-r^{3-\mathrm{D}}) \tag{21}$$

Plus D est voisin de 3, plus la valeur des incréments de porosité résultant des stades successifs de fragmentation est réduite et, pour une porosité donnée, le nombre des stades de fragmentation doit être plus élevé. En d'autres termes plus la dimension fractale se rapproche de la dimension Euclidienne, plus l'espace poral est finement divisé. **La différence $(3-D)$ peut ainsi être considérée comme caractéristique de la finesse de la porosité.** Sa valeur diminue lorsque la porosité devient plus fine et la pente des courbes $h(\theta)$ est alors plus redressée [équation (19) et *fig.*]. Ces résultats sont fréquemment observés dans le cas de sols de texture limoneuse ou argileuse (tableau).

Pour conclure, il semble qu'un milieu poreux apparemment hétérogène et de structure complexe comme le sol comporte en réalité, dans un domaine de tailles où le caractère fragmentaire de sa porosité est prédominant, des éléments d'organisation très robustes qui s'expriment en une structure fractale. L'ajustement statistique de l'équation (19) aux valeurs de pression capillaire et de teneur en eau mesurées dans un sol permet de s'en assurer ainsi que de déterminer la valeur de la dimension fractale de cette structure.

Nous remercions G. Pédro et M. Vauclin pour les discussions fructueuses que nous avons eu l'occasion d'échanger sur le sujet.

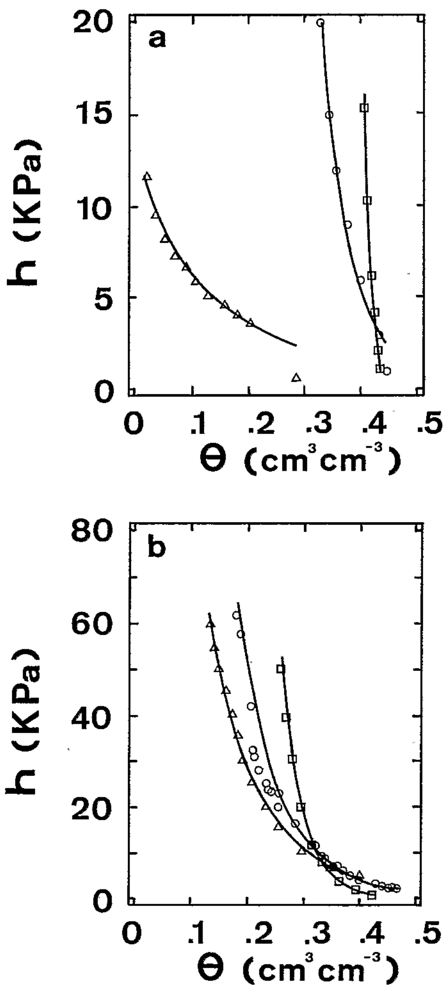
Note remise le 1er février 1991, acceptée le 16 avril 1991.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] R. B. ALDERFER, *Soil Sci.*, 62, 1946, p. 151-168.
[2] D. L. TURCOTTE, *Pure Applied Geophys.*, 131, 1989, p. 171-196.
[3] B. B. MANDELBROT, *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman, San Francisco, 1983.
[4] J. FEDER, *Fractals*, Plenum Press, New York, 1988.
[5] M. RIEU et G. SPOSITO, *Soil Sci Soc. Amer. J.*, 1991 (sous presse).
[6] R. JULLIEN et R. BOTET, *Aggregation and fractal aggregates*, World Scientific, Singapore, 1987.
[7] M. BEN OHOUD et H. VAN DAMME, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 311, série II, 1990, p. 665-670.
[8] B. B. MANDELBROT, *Science*, 156, 1967, p. 636-638.
[9] W. K. HARTMANN, *Icarus*, 10, 1969, p. 201-213.
[10] S. W. TYLER et S. W. WHEATCRAFT, *Soil Sci. Amer. J.*, 1989, p. 987-996.
[11] G. VACHAUD, C. DANCETTE, S. SONKO et J. L. THONY, *An. Agro.*, 29, 1978, p. 1-36.
[12] H. BOUSNINA, *Mém. Inst. Nat. Agr.*, Tunis, 1984.
[13] P. BOIVIN, *Thèse*, Univ. Paris-VI, 1990.
[14] D. R. NIELSEN, J. M. DAVIDSON, J. W. BIGGAR et R. J. MILLER, *Hilgardia*, 35, 1964, p. 491-506.
[15] M. E. LARUE, D. R. NIELSEN et R. M. HAGAN, *Agron. J.*, 60, 1968, p. 625-629.
[16] R. J. LUXMOORE, T. GRIZZARD et M. R. PATTERSON, *Soil Sci. Soc. Amer. J.*, 45, 1981, p. 692-698.
[17] R. H. BROOKS et A. T. COREY, *Hydr. Pap., Colorado State Univ.*, Fort Collins, Col., 1964.

M. R. : *Laboratoire d'Hydrophysique des Sols, ORSTOM, 70, route d'Aulnay*, 93143 *Bondy Cedex;*

G. S. : *Department of Soil Science, University of California, Berkeley, C.A.* 94720 *U.S.A.*



Ajustement de l'équation (19) (courbes) aux valeurs expérimentales de la pression capillaire pour les sols référencés sur le tableau. (*a*) Dieri-Sénégal (triangles), Panoche-U.S.A. (cercles) et Fullerton-U.S.A. (carrés); (*b*) Katoure-Sénégal (triangles), Ariana-Tunisie (cercles) et Yolo-U.S.A. (carrés).

Adjustment of equation (19) (*curves*) *to experimental values of capillary pressure for soils referred to in Table.* (*a*) *Dieri-Senegal* (*triangles*), *Panoche-U.S.A.* (*circles*) *and Fullerton-U.S.A.* (*squares*); (*b*) *Katoure-Senegal* (*triangles*), *Ariana-Tunisie* (*circles*) *and Yolo-U.S.A.* (*squares*).