

THÈSE de DOCTORAT

présentée à

UNIVERSITÉ PARIS 7 - Denis Diderot

par

M'barek ADIOUI

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : Biomathématiques

**Modélisation et Etude Mathématique et Informatique de comportements
Collectifs.
Alignement dans un banc de poissons**

Soutenance le : 26 janvier 2004
Devant le jury composé de :

Khashayar Pakdaman	Président et Directeur de thèse	Université Paris 7
Hassan HBID	Co-Directeur de Thèse	Université Cadi Ayyad de Marrakech
Claude LOBRY	Rapporteur	Université Nice
Ryszard RUDNICKI	Rapporteur	Polish Academy of sciences
Jean Pierre TREUIL	Examineur	GEODES-IRD
Nadia RAISSI	Examineur	Université Kénitra
Khalil EZZINBI	Invité	Université Cadi Ayyad de Marrakech

Ce travail est dédié à la mémoire du Professeur

OVIDE ARINO

Remerciements

Ovide Arino nous a quitté le lundi 29 septembre 2003 à Bedelewo en Pollogne. C'est une disparition prématurée pour un directeur de thèse aimé et estimé de tous, plein de vie et de projets. Ce qui comptait pour lui n'était pas tant ses réalisations passées. Il était tourné vers l'avenir avec des projets toujours plus nombreux. Ovide Arino donnait l'impression de ne jamais s'arrêter. Il était toujours là quand on le sollicitait, prêt à aider, à conseiller. C'était quelqu'un sur qui on pouvait compter et qui ne ménageait ni peine, ni effort pour épauler ceux qui en avaient besoin. Ovide Arino m'a donné la chance de travailler sur un sujet passionnant et m'a guidé tout au long de cette thèse. Depuis mon DEA, je me suis senti encadré et porté par cette personne avec qui j'ai eu un immense plaisir à discuter, augmenter et clarifier mes idées, et qui a su toujours me communiquer un élan d'enthousiasme nécessaire pour repartir de l'avant dans les moments difficiles. Ovide Arino, malheureusement disparu brusquement. Sa disparition est une perte irréparable. Suite à ce drame, Khashayar Pakdaman a bien voulu accepter de remplacer Ovide Arino comme directeur de thèse, et de la mener jusqu'à sa soutenance. Il m'a apporté à chacune de nos rencontres des conseils pertinents. Je lui en suis très reconnaissant. Je remercie Hassan Hbid, d'avoir accepté de co-encadrer cette thèse et de m'avoir toujours encouragé dans mon travail. J'ai été très marqué autant par ses qualités professionnelles que humaines. Je remercie J. Pierre Treuil avec qui j'ai l'opportunité et le plaisir de travailler. Il a suivi mon travail durant ces quatre années de thèse. J'ai beaucoup apprécié ses qualités scientifiques et humaines. Il a contribué pour beaucoup au développement de ce travail (plus particulièrement toute la partie " Modèle informatique, résultats et analyse

résultats”), en m’inculquant les bases des systèmes multi-agents. Pour tout cela (et pour le reste!), je le remercie infiniment. Claude Lobry et Ryszard Rudnicki ont accepté d’être les

rapporteurs de cette thèse, malgré des emplois du temps dignes de leur renommée scientifiques! Je les remercie tous les deux très vivement. Nadia Raissi et Khalil Ezzinbi ont fait un grand honneur en acceptant de faire une lecture critique de ma thèse et de se constituer membres du jury, je les en remercie vivement. Mes remerciements s’adressent aussi à tous les membres du laboratoire LPSSD, de l’UFR Mathématiques appliquées et du département de Mathématiques, enseignants (E. Ait Dads, M. Khaladi, H. Bouslous, S.

Amraoui, M. El Alaoui-Talibi, Y. Ouknine, A. Rhandi, M. Aït Babram, L. Maniar, M. Erraoui) étudiants et secrétaires pour leur coopération. Les quelques présentations orales

que j’ai pu faire devant eux ont été enrichissantes en questions et en remarques. Je remercie sincèrement et très vivement UR GEODES de l’IRD Bondy, qui m’accueilli pendant toute la durée de ma thèse. J’ai bénéficié de l’ouverture d’esprit de chacun des membres de l’UR. C’est un lieu de travail où se côtoient différentes disciplines, différentes

approches de modélisation, un lieu au sein duquel j’ai pu découvrir et apprécier la modélisation individu-centrée. Je remercie en particulier Edith Perrier, chef d’UR, pour m’avoir permis de mener à bien mes recherches. Sa vivacité d’esprit et son dynamisme m’ont beaucoup apporté. Je ne voudrais pas oublié Alain Cardon. J’ai toujours trouvé des

oreilles attentives toujours curieuses de mon travail, J’associe dans mes remerciements Gaston Pichon, Marie Piron, Stéphanie Carrière, Christian Mullon, Cristophe Cambier, J.

Paul Gouteux pour tous ce qu’ils m’ont appris. Qu’ils reçoivent toute mon amitié.

J’adresse des remerciements particuliers à Chantal Bernard spécialiste du web. Merci pour

tous les figures que tu as scannées et retouchées, merci encore pour tous les services quotidiens que tu nous rends. Je n'oublie pas aussi de te remercier pour les 8 bons plats de gâteaux, que tu as préparé pour ma soutenance. Un remerciement spécial à Kathy Beaumont, une secrétaire merveilleuse. Que toutes les personnes que j'ai rencontré pendant ces quatre ans, de Marrakech, de Bondy, de Tlemcen soient remerciées pour les discussions et échanges qui m'ont permis de progresser. Un grand merci à Françoise Pelletier et Michel Gosselin qui travaillent sans relâche pour que le réseau informatique fonctionne bien. De nombreuses personnes du centre IRD de Bondy ont participé de près ou de loin au bon déroulement de cette thèse. Ma gratitude va également à Rafael Bravo, Pierre Auger et Eva Sanchez pour leur soutien et leurs encouragements. J'adresse une pensée particulière à ma famille et à mes amis (en France et au Maroc) qui m'ont toujours encouragé et soutenu dans mes choix.

En fin c'est grâce à toi, Fatima, que j'ai connu pendant toutes ces années soutien et amour sans lesquels tout ceci n'aurait aucun sens. Merci d'avoir été patiente, d'avoir compris pourquoi je ne passais pas plus de temps avec toi

A la mémoire de mon père

A ma mère

A mon épouse

A mes frères et soeur

A mes chers enfants

NASSIM et ANISSA

Plan

La thèse s'articule autour de quatre parties.

- *La première partie* (chapitre 1 à 3) s'attache à présenter l'état de l'art du phénomène d'agrégation et d'alignement et les méthodes d'étude. On expose dans le premier chapitre les raisons, les mécanismes mis en jeu dans la formation des bancs, les organes de communication utilisés, les structures et l'organisation à l'intérieur des bancs. Le second chapitre présente les démarches de modélisation développées en parallèle dans l'étude d'alignement. La première est la modélisation mathématique basée sur la construction d'expressions analytiques, la seconde est la modélisation informatique basée sur la programmation d'un simulateur de type IBM (individual based-model) et son exploitation. Le troisième chapitre est une revue des travaux réalisés sur les modèles continus et les modèles discrets ainsi que sur les propriétés émergentes des interactions entre les différents types d'individus : le phénomène d'agrégation et d'alignement. Certains de ces résultats nous aident à expliciter la problématique sous-jacente. C'est pour cela que nous les exposons.
- *La seconde partie* (chapitres 4 et 5) concerne l'analyse mathématique. Le quatrième chapitre est une partie de notre travail publié dans le *Journal of differential Equations* (Adiou et al, 2003). Nous montrons un résultat d'existence et d'unicité du modèle très proche de celui présenté initialement par D. Grünbaum (1998). L'équation du modèle est quasi linéaire avec une nonlinéarité non locale. Le cinquième chapitre montre que le modèle possède une transition de phase conduisant du désordre (où les individus sont orientés aléatoirement dans tout l'espace) à l'ordre (où le groupe commence à

prendre une direction pour former un groupe mono-orienté). Ce changement de phase est lié au paramètre $\lambda = \frac{\beta}{d}$: rapport du facteur de correction (ou d'apprentissage) β et coefficient de diffusion d . Quand ce paramètre est progressivement augmenté à partir de zéro, on a d'abord la situation où les poissons s'orientent au hasard (la force aléatoire domine) ; puis, lorsque λ dépasse un certain seuil : $\lambda_0 = \frac{\pi}{2}$ un (pattern) d'orientation apparaît, qui se précise quand on augmente encore le paramètre (la force comportementale domine).

- *La troisième partie* (chapitres 6 à 8) concerne la modélisation informatique. Le sixième chapitre présente une formulation lagrangienne du modèle d'alignement ainsi que l'explicitation rigoureuse du passage au modèle eulérien. Le septième chapitre présente le simulateur IBM conçu et utilisé pour représenter d'une façon virtuelle (informatique) les comportements individuels d'alignement. La structure informatique du simulateur et son fonctionnement sont brièvement exposés. A partir de ce simulateur, différentes expérimentations sont menées. La présentation et l'interprétation des résultats essentiels de ces expérimentations font l'objet du huitième chapitre.
- *La quatrième partie* (chapitre 9 à 10) s'attache à proposer la conclusion que l'on peut tirer de ce travail (chapitre 9). En fin, le dixième chapitre regroupe quelques outils mathématiques qui sont utilisées dans la seconde partie.

Abstract

In this work we deal with some of the mathematical aspects of the phenomenon of social organization. We are mainly interested in the alignment behavior, that is the process by which an individual turns to adapt its orientation to that of its neighbors. There are two general frameworks when modelling such problems : the Lagrangian viewpoint and the Eulerian one. In this contribution, a mixed Lagrangian-Eulerian approach was undertaken. The Lagrangian model (also known as individual based model, IBM) is given via a system of stochastic differential equations. The Eulerian model (PDE) describes fluxes of individuals structured by the angular orientation of their body with respect to a fixed direction in a plane. The main qualitative outcome of this work establishes the onset of alignment, starting off at some value of a correction parameter, as a result of a transcritical bifurcation.

Table des matières

Table des figures	viii
I Ecologie et méthodes d'étude	1
1 Contexte bio-écologique	2
1.1 De l'observation au modèle	3
1.1.1 Observations	3
1.1.2 L'utilité de la modélisation	6
1.2 Mécanismes de la formation de bancs	6
1.3 Organisation dans un banc	12
1.3.1 Comment varie la densité dans un banc ?	12
1.3.2 Ce qu'il en coûte d'être un leader	16
1.4 Les organes de communication chez les poissons	17
1.5 Les contraintes de la vie en groupe	18
1.6 Conclusion	19
2 Approches eulériennes et lagrangiennes	21
2.1 Modèles lagrangiens	23
2.1.1 Historique et motivation	23
2.1.2 IBM et Mathématique	26
2.1.3 IBM et Informatique	27
2.2 Modèles eulériens	28
2.3 D'une approche à l'autre	30
2.4 Conclusion	32
3 Modèles d'alignement et d'agrégation	35
3.1 Modèles lagrangiens du comportement agrégatif	37
3.1.1 Aspect Newtonien	37
3.1.2 Aspect biologique	42
3.2 Modèles eulériens	51
3.2.1 Modèles d'agrégation	54

3.2.2	Modèles d'alignement	64
3.3	Conclusion	68
II Analyse mathématique¹		70
4	Problème de Cauchy	73
4.1	Introduction	73
4.2	Existence, unicité et positivité	81
4.2.1	Préliminaires	81
4.2.2	Existence locale des solutions	84
4.2.3	Existence globale des solutions	91
4.2.4	Régularité	99
5	Résultats qualitatifs	104
5.1	Solutions stationnaires, stabilité et bifurcation	104
5.1.1	Formulation du problème de point fixe	105
5.1.2	Résultats préparatoires	107
5.1.3	Spectre	112
5.1.4	Stabilité et bifurcation	115
5.1.5	Calcul de la branche bifurquée, estimation de l'espérance et de la variance	117
5.2	Remarques finales	124
III Modèle informatique, résultats et analyse des résultats²		126
6	Formulation lagrangienne du modèle d'alignement	127
6.1	Introduction	127
6.2	De la description lagrangienne microscopique à la description eulérienne macroscopique	129
7	Simulateur de comportements d'alignement	135
7.1	Le modèle du simulateur	136
7.2	Algorithme et dynamique du simulateur	138
7.2.1	La métaphore du robot	138
7.2.2	Son application au problème étudié	139
7.3	Principe et architecture du simulateur	142

¹Le travail présenté dans les deux chapitres suivants, est reproduit d'un article publié dans le *Journal of Differential Equations*, 188(2003) 406 – 446.

²Le travail présenté dans cette partie a donné lieu à deux articles :
M. Adiou, J.P Treuil and O. Arino, Alignment in a fish school : a mixed Lagrangien-Eulerian approach (Ecological modelling, 167(2003) 19 – 32.).
M. Adiou, The interplay between individual based computer simulation and mathematical analysis in a fish school, Actes du 6^{ème} Colloque Africain sur la recherche en Informatique, proceedings de CARI, (2002) 385 – 393. publié dans les proceedings de CARI, (2002).

7.3.1	Interface du simulateur	142
7.3.2	Organigramme des classes du simulateur	143
7.4	Conclusion	144
8	Simulations et résultats	146
8.1	Présentation des scénarios simulés	146
8.1.1	L'espace des paramètres d'entrée	146
8.1.2	Les caractéristiques du comportement :	148
8.1.3	Les conditions d'expérimentation :	148
8.1.4	Les scénarios exploités	149
8.2	Résultats	149
8.2.1	Valeur moyenne de l'écart type	150
8.3	Analyse du comportement du temps de stabilisation	152
8.3.1	Moyenne du temps de stabilisation	152
8.3.2	Variabilité du temps de stabilisation	154
8.4	Effet de la densité	154
8.4.1	Ecart type et variabilité	154
8.4.2	Temps de stabilisation et variabilité	156
8.5	Interprétation des résultats	157
8.5.1	Validité des valeurs des paramètres testés	157
8.5.2	Existence de deux types de comportements	159
8.5.3	Conditions de transitions entre les deux types de comportements	161
8.5.4	Influence de la taille du banc	164
	IV Conclusion générale et Outils mathématiques	167
9	Conclusion générale	168
10	Outils mathématiques	173
10.1	A : Rappels sur les semi-groupes	173
10.1.1	Semi-groupe fortement continu	173
10.1.2	Semi-groupe compact	178
10.1.3	Opérateurs sectoriels ou de type (ϕ, M)	179
10.1.4	Semi-groupe analytique	180
10.1.5	Puissances fractionnaires	181
10.1.6	Problème de Cauchy	184
10.1.7	Régularité de la solution intégrale dans les semi-groupes analytiques	186
10.2	B : Rappels sur la théorie de la bifurcation	188
10.2.1	Bifurcation locale	188
10.2.2	Bifurcation globale	191
10.3	C : Rappels sur les équations différentielles stochastiques	192
10.3.1	Processus stochastiques	192
10.3.2	Filtration et adaptation	194
10.3.3	Equations différentielles stochastiques (ESD)	196

Bibliographie

Table des figures

1.1	<i>Une image aérienne de la variation de l'aire horizontale d'un agrégat d'harengula au cours d'une heure.</i>	7
1.2	<i>Effet de dilution. (a) Relation entre le taux de d'attaque par les perches sur le groupe de "killifish" (en pointillé = observé; continue = prédicé). (b) Proportion de "killifish" capturée par les perches suivant les différentes tailles du groupe.</i>	8
1.3	<i>Comparaison de la rapidité de trouver la nourriture entre les poissons rouges (en haut) et les vairons (en bas). Les points représentent les milieux et les quartiles.</i>	11
1.4	<i>Structure de la densité dans un banc de harengs.</i>	13
1.5	<i>Compression d'un agrégat pendant une réaction de fuite du prédateur</i>	14
1.6	<i>L'étirement du banc à travers la formation de lacunes internes.</i>	15
1.7	<i>Initiation de nouvelles directions dans un banc de poissons</i>	16
1.8	17
2.1	<i>Evolution temporelle de la distribution des fréquences de tailles de deux populations de perches.</i>	33
3.1	<i>Mouvements fondamentaux du groupe. a) Mouvement en amibe, b) Mouvement en tore, c) Mouvement rectiligne.</i>	41
3.2	<i>Les effets des exposants K_a et K_r sur l'allure des fonction d'attraction et de répulsion.</i>	44
3.3	<i>Les quatre types de comportement fondamentaux</i>	46
3.4	<i>Mécanismes de réactions.</i>	47
3.5	<i>Le concept d'opération du modèle de décision "D-model" et modèle en moyenne "A-model".</i>	48
3.6	<i>Comparaison de la polarisation dans le modèle en moyenne (ligne en pointillés) et dans le modèle de décision (ligne continue).</i>	50
3.7	<i>la dispersion du banc (Viscido et al., 2002). Le groupe se divise en plusieurs groupes plus que le nombre de voisins dont chaque individu tient en compte devient petit.</i>	52

3.8	<i>Polarisation du banc (Viscido et al., 2002). Le groupe devient moins polarisé quand le nombre de voisins dont chaque individu tient en compte est assez élevé.</i>	52
3.9	<i>Mouvement aléatoire le long d'une droite</i>	55
3.10	<i>Initialement les positions et orientations sont aléatoirement distribuées. Influence des paramètres ε_1 et ε_2 sur la dynamique des individus.</i>	68
7.1	<i>Métaphore du robot.</i>	139
7.2	<i>Circuit de l'information.</i>	140
7.3	<i>Attributs et méthodes des objets créés par la classe <<poisson>>.</i>	141
7.4	<i>Interface du simulateur</i>	143
7.5	<i>Organigramme des classes du simulateur.</i>	144
8.1	<i>Diagramme de phase montrant deux régions : stable et instable comme fonction de λ et de $d = 0.011, 0.11, 1.1$. Ces figures sont obtenues après 100,000 pas de temps, pour un groupe de 100 individus.</i>	151
8.2	<i>Moyenne écart type en fonction du paramètre λ. Ces valeurs sont obtenues après 100,000 pas de temps, pour un groupe de taille $N = 100$ et pour $d = 0.011, 0.11, 1.1$.</i>	152
8.3	<i>Temps de stabilisation en fonction de λ pour $d = 0.011, 0.11, 1.1$ après 100,000 pas de temps, pour un groupe de taille $N = 100$.</i>	153
8.4	<i>Diagramme de phase montrant deux régions : stable et instable comme fonction de λ et de $d = 0.011, 0.11$. Ces figures sont obtenues après 100,000 pas de temps, pour un groupe de 1000 individus.</i>	155
8.5	<i>Comparison de la valeur moyenne de l'écart type en fonction de λ entre le groupe de taille $N = 100$ et le groupe de taille $N = 1.000$. Ces courbes sont obtenues après 100,000 pas de temps, et $d = 0.011, 0.11$.</i>	156
8.6	<i>Comparison de la variabilité de l'écart type en fonction de λ entre le groupe de taille $N = 100$ et le groupe de taille $N = 1.000$. Ces courbes sont obtenues après 100,000 pas de temps, et $d = 0.011, 0.11$.</i>	157
8.7	<i>Comparison du temps de stabilisation en fonction de λ entre le groupe de taille $N = 100$ et le groupe de taille $N = 1.000$. Ces courbes sont obtenues après 100,000 pas de temps, et $d = 0.011, 0.11$.</i>	158
8.8	<i>Comparison de la variabilité du temps de stabilisation en fonction de λ entre le groupe de taille $N = 100$ et le groupe de taille $N = 1.000$. Ces courbes sont obtenues après 100,000 pas de temps, et $d = 0.011, 0.11$.</i>	159
8.9		162
8.10		164

Première partie

Ecologie et méthodes d'étude

Chapitre 1

Contexte bio-écologique

Le phénomène d'agrégation est une question très étudiée en écologie animale et en biologie. Dans les dix dernières années, on peut citer notamment (D.Grunbaum et A.Okubo (1994) ; G.Flierl, D.Grunbaum, S.Levin et D.Olson (1999), Fréon *et al.* (1999); Huth et Wissel, 1992, 1994 ; Viscido *et al.* (2002); Mogilner *et al.*, (1996) ; Edelstein-Keshet, Ermentrout et Mogilner (1990, 1995, 1996). Mais l'intérêt pour la modélisation et l'étude des phénomènes d'agrégation de particules déborde largement le champ de l'écologie : il touche la physiologie, la médecine et la biologie avec, par exemple, les phénomènes d'alignement liés à la scarification (J.Dallon et J.Sherratt, 1998), la vascularisation d'une tumeur (M.Holmes et B.Sleeman, 2000) ou encore la formation du cytosquelette à l'intérieur d'une cellule (A.Suciu *et al.*, 1997, Mogilner, 1996).

1.1 De l'observation au modèle

1.1.1 Observations

Plusieurs animaux, durant une grande partie de leur vie, vivent en groupe et s'organisent suivant une géométrie qui met en relief le phénomène d'alignement. On peut citer par exemple : les insectes, les criquets, les poissons.... Vivre en groupe pour la presque totalité des espèces pélagiques est un phénomène naturel. Shaw (1978) a estimé que plus de 25% des espèces pélagiques, approximativement 4000 espèces, passent la plus grande partie de leur vie en groupe, c'est le cas notamment de l'anchois, du chinchard, du hareng, du kril, de la sardine, du maquereau, et du thon. Ce comportement est principalement observé au stade juvénile (Burgess & Shaw, 1979). Au stade larvaire, par contre, ce comportement ne se manifeste pas, ce qui s'explique par le fait que, d'une part, les poissons n'ont pas pleinement développé leurs systèmes sensoriels et leurs organes de déplacement, ils les développent graduellement au cours du premier stade critique de leur cycle de vie, et d'autre part, du fait de leur petite taille et de leur faible capacité à se déplacer à cause des forces de viscosité marines, les larves sont passives et sont donc facilement transportées par le courant. Rappelons que les forces de viscosité sont exprimées par le nombre de *Reynolds* \mathcal{R} , qui dépend de la taille et de la vitesse de l'objet. $\mathcal{R} = \frac{vL\rho}{\eta}$, où ρ et η désignent respectivement la masse volumique et la viscosité du fluide, v , la vitesse d'un objet par rapport au fluide, et L la dimension caractéristique de l'objet. Pour $\mathcal{R} < 10$, les forces de viscosité sont dominantes, pour $10 < \mathcal{R} < 200$, les forces de viscosité sont moyennes et au dessus de ce nombre, on peut les considérer négligeables.

Le développement ou l'apprentissage du comportement agrégatif varie d'une espèce

à l'autre, c'est une fonction du temps passé entre l'éclosion de la larve et le moment où le banc est complètement établi. Ici, un banc de poissons est l'agrégation spatiale d'un certain nombre d'individus, de même orientation, régulièrement espacés les uns les autres, et nageant à une même vitesse. Certaines larves comme les larves du *guppy d'ovipares* dans la rivière de Trinidad sont capables d'acquies rapidement ce comportement, immédiatement après l'éclosion (Magurran & Seghers, 1990). Les *menidias*, dans l'Atlantique, commencent à vivre en groupe presque 20 jours après leur éclosion, c'est à dire après avoir acquis une taille de 10 à 12mm. Les *harengs* vivent en groupe quand leur taille atteint 35 à 40mm (Gallego & Health, 1994) et les *vairons* se mettent en groupe après le premier mois de leur vie (Magurran, 1986).

Un outil important pour la mise en évidence du mécanisme de formation des bancs de poissons et leur abondance est l'acoustique à haute fréquence.

L'acoustique marine et ses multiples usages

La fonction première des équipements acoustiques pour la pêche est de détecter ou de déterminer à quel endroit et sous l'action de quels processus océanographiques particuliers se concentre la nourriture des espèces pélagiques. Ces appareils permettent de sonder jusqu'à 1000 mètres de profondeur et plus, alors que les méthodes optiques, comme les caméras, sont limitées même dans des eaux limpides à quelques dizaines de mètres seulement (Pitcher *et al.* (1999)). Les premiers sondeurs ont fait leur apparition entre les deux guerres mondiales à la suite des travaux du physicien français Paul Langevin (Marchal (1985)). Cependant, il fallut attendre la période d'après guerre pour que la détection acoustique soit utilisée pour localiser les organismes vivants, et notamment les poissons. Deux méthodes sont essentiellement

utilisées.

Comptage des échos : le comptage des échos est une technique relativement simple. La condition de base est que les poissons soient suffisamment éloignés les uns des autres pour que leurs échos soient disjoints : à un écho doit correspondre un poisson et un seul. Le signal de détection est enregistré sur une bande magnétique pour effectuer les mesures en laboratoire. Alors, connaissant le volume insonifié, on peut en déduire la densité en nombre par unité de volume. Cette méthode est inapplicable dans le cas de grandes concentrations (Marchal (1985)).

Echo-intégration : Lorsque la densité des poissons est telle qu'un écho peut provenir de plusieurs poissons à la fois, le simple comptage ne peut plus être utilisé. On vérifie expérimentalement que l'intensité d'un écho revenant d'un volume contenant plusieurs cibles est proportionnelle au nombre de cibles contenues dans ce volume, si elles sont toutes identiques (Marchal (1985)).

L'acoustique peut aussi être un outil précieux dans l'étude des relations entre les prédateurs et leurs proies. Le cas de la pêcherie des thons de l'Atlantique équatorial, plus précisément au large des côtes africaines fournit un bon exemple de l'utilisation de l'acoustique dans les relations prédateurs-proies (Marchal *et al.* (1996)). Cette pêcherie exploite une concentration saisonnière de thons. On peut supposer que les thons se concentrent dans cette zone parce qu'ils y trouvent une nourriture abondante : la présence régulière et abondante d'un poisson mésopélagique, *Vinciguerria nimbaria*, dans les estomacs de ces thons conforte cette hypothèse. La détection acoustique a permis de découvrir qu'en fait ces petits poissons restent de jour dans les couches superficielles, en formant des petits bancs au

niveau de la thermocline.

1.1.2 L'utilité de la modélisation

Les données récoltées en mer sont limitées dans le temps et l'espace. En effet, les moyens logistiques actuels ne permettent pas d'échantillonner l'océan de façon continue et en trois dimensions. Ces contraintes limitent l'utilisation de la méthode acoustique. D'autres méthodes d'observations existent (images satellitales). Toutes les méthodes d'observation présentent des limitations sérieuses, du fait de l'immensité des zones à explorer et de la mobilité des espèces. La modélisation mathématique et informatique apparaît alors comme un moyen complémentaire à l'observation in situ capable d'expliquer les mécanismes et de permettre une meilleure utilisation des observations.

1.2 Mécanismes de la formation de bancs

La nécessité de vivre en groupe peut s'expliquer par plusieurs raisons :

- **Protection face aux prédateurs** : Devenir membre d'un groupe, en l'occurrence d'un banc, et le rester sont une nécessité impérieuse pour la plupart des poissons marins : en se "fondant" dans la masse, ils maximisent la probabilité d'échapper aux pêcheurs et aux prédateurs. Lorsqu'un groupe isolé constitué d'individus d'une espèce est peu abondant, il aura tendance à s'agréger à un groupe plus abondant, même si ce groupe est constitué d'individus d'une autre espèce. La tendance des petits poissons pélagiques ayant une taille voisine à se regrouper en bancs, même s'ils appartiennent à des espèces différentes, est révélatrice de cet impératif. Plusieurs hypothèses ont

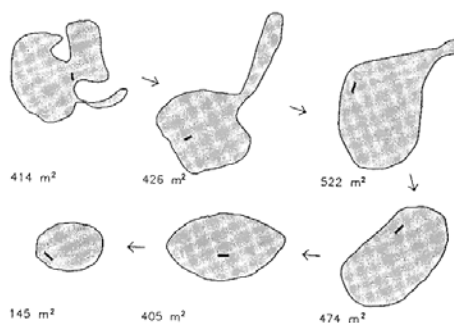


FIG. 1.1: Une image aérienne de la variation de l'aire horizontale d'un agrégat d'harengula au cours d'une heure.

été proposées pour expliquer les avantages de la vie en groupe (Olson, 1964 ; Breder, 1967 ; Cushing & Harden Jones, 1968). Il est vraisemblable que le banc adopte une forme propre à réduire la probabilité de détection par les prédateurs. Plusieurs auteurs (Breder, 1959, 1976 ; Cushing & Harden Jones, 1968 ; Radakov, 1973) considèrent que cela est accompli par la forme sphérique. Partridge et Pitcher (1980) estiment que c'est la forme d'un ellipsoïde aplati qui réduit mieux la probabilité d'être découvert. Oshihimo (1996) a observé que la mesure de l'axe horizontal était environ cinq fois celle de l'axe vertical dans un banc d'anchois (*Engraulis japonicus*), qui est distribué dans une eau peu profonde ($< 50m$ de profondeur) dans la mer de Chine. Cette forme est rarement constante, elle change continuellement. Fréon *et al.* (1992) ont observé, à partir d'une vue aérienne, que la forme du banc d'harengula (*Harengula clupeola*) dans une baie peu profonde en Martinique, passe d'une forme non structurée à une forme compacte, pleine, de type ovoïde. En une heure, la surface occupée par le banc a varié de $145m^2$ à $522m^2$ (Figure 1.1). Betram (1978) ; Foster & Trecherne (1981) soutiennent l'idée que la probabilité d'être victime durant une attaque diminue quand la taille du

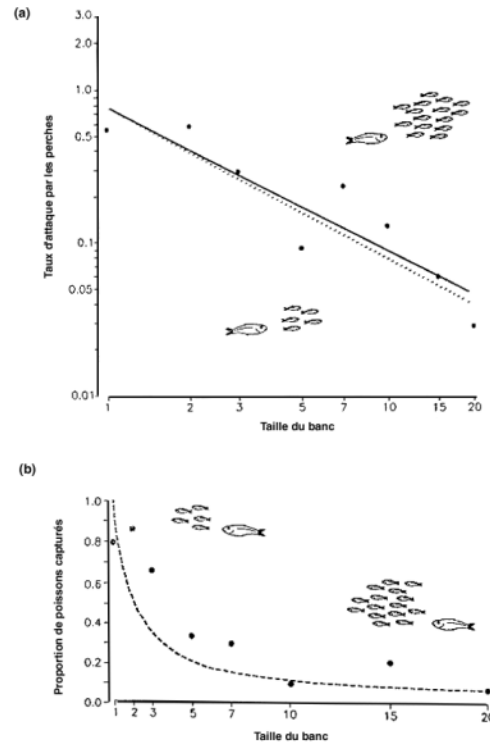


FIG. 1.2: *Effet de dilution. (a) Relation entre le taux de d'attaque par les perches sur le groupe de "killifish" (en pointillé = observé; continue = prédicé). (b) Proportion de "killifish" capturée par les perches suivant les différentes tailles du groupe.*

banc (nombre d'individus dans le banc) augmente. Morgan & Godin (1985) montrent qu'un tel effet a été mis en évidence expérimentalement entre les perches blanches (*Morone americana*) et leurs proies (*Fundulus diaphanus*). Le nombre d'attaques par proie décroît quand la taille du banc augmente par l'effet de dilution, suivant une pente proche de -1 , sur une échelle log-log (Figure 1.2). Autrement dit, le taux d'attaque par les proies est approximativement constant et donc indépendant de la taille du groupe. L'évaluation de l'avantage sélectif de la formation de bancs qui résulterait de la dilution reste un sujet controversé (voir par exemple, Pitcher, 1986; Fréon *et al.*, 1999). Turner & Pitcher (1986) ont suggéré que l'avantage de vivre en groupe peut être

favorisé par l'effet d'abattement "attack abatement" qui combine l'effet de dilution et de recherche. Ainsi, un poisson solitaire pourrait en bénéficier en se joignant au groupe bien que la probabilité de détection soit la même.

Plusieurs prédateurs sont capables d'attaquer leurs proies à une vitesse plus rapide que la vitesse d'éclatement du banc. Mais leur vitesse est ralentie par des prises de décision qui s'imposent quand les proies se divisent en deux ou plus de deux groupes prenant des directions différentes (Pitcher, 1986). D'autre part, la réaction de fuite est transmise dans le banc à une vitesse plus grande que l'attaque par les prédateurs, par exemple. La vitesse de transmission du signal de fuite dans le banc de proies est presque 3 fois plus importante que la vitesse d'attaque des perches. Lorsque les proies sont poursuivies, enfermées, ou menacées d'une manière ou d'une autre, elles développent des stratégies pour éviter la collision et donc elles s'enfuient dans toutes les directions et après une certaine distance, elles se rassemblent à nouveau (Fréon *et al.*, 1999).

Il est clair que les poissons ressentent la peur, qui joue un rôle dans l'acquisition du comportement d'évitement. Si un vairon a été attaqué une fois par un brochet, l'odeur d'un brochet suffit à lui faire prendre la fuite. Les perches apprennent rapidement à éviter les hameçons simplement en voyant d'autres s'y faire prendre (Pitcher, 1986).

- **Coopérativité pour la recherche de nourriture :** Parmi les principaux problèmes que rencontrent les organismes aquatiques, il y a la recherche de régions disposant d'un niveau approprié de ressources comme la nourriture, l'oxygène, la lumière.....Une façon d'y faire face repose sur la recherche collective. Plusieurs travaux témoignent

que la probabilité de trouver un amas de nourriture croît avec la densité de poissons : plusieurs yeux localisent plus facilement la nourriture (Pitcher *et al.*, 1982). Autrement dit, la localisation de la nourriture est plus rapide quand la taille du groupe est plus grande (Fréon *et al.*, 1999 ; Pitcher, 1993 ; Pitcher, 1984). Mais cette rapidité de localisation varie d'une espèce à l'autre. Pitcher, dans un article paru en 1982, compare la rapidité de localisation de la nourriture dans deux groupes, les *vairons* et les *poissons rouges*. Il observe, d'une part, qu'elle est fonction de la densité dans les deux groupes, d'autre part, que les *vairons* trouvent plus rapidement leur nourriture que les *poissons rouges*. Comme les indices de comportement dans ces organismes n'ont pas été explorés qualitativement, il est vraisemblable que l'arrêt de l'activité de recherche par le poisson, ou l'émission de signaux d'alarmes à ses congénères est un indice de présence de nourriture. Lorsque la nourriture est localisée, le banc de poissons se relâche et des petits agrégats ("shoals") se forment. Ce phénomène a été observé, par exemple, dans les bancs de *harengs* (Fréon *et al.*, 1992). L'anchois préserve sa structure en bancs même quand il s'alimente. La même observation a été faite chez les poissons piscivores, qui souvent recherchent et attaquent en groupe (Fréon *et al.*, (1999)), (*Figure 1.3*).

- **Concentration des individus en vue de la reproduction :** Lorsque la température de l'eau atteint un certain seuil, les bancs se rassemblent dans des zones peu profondes et riches en herbiers pour se préparer à frayer. Pour pondre, les poissons aiment se sentir en sécurité. D'où, la nécessité de se regrouper. C'est un mécanisme qui maximise la probabilité de trouver facilement un partenaire. Cela est avantageux

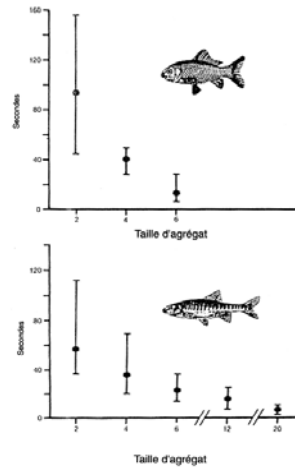


FIG. 1.3: Comparaison de la rapidité de trouver la nourriture entre les poissons rouges (en haut) et les vairons (en bas). Les points représentent les milieux et les quartiles.

pour les espèces pélagiques qui passent une grande partie de leur vie à se déplacer sur de grandes distances. En effet, comme la période de ponte est relativement courte, vivre dans un banc pour trouver un partenaire est très important.

- **Avantages hydrodynamiques :** Vivre en groupe permet d’explorer de plus larges zones à moindre coût énergétique. Il y a aussi plusieurs hypothèses concernant la position de l’individu relativement à ses voisins immédiats, lui permettant d’épargner son énergie hydrodynamique (Fréon *et al.*,1999 ; Pitcher, 1993). De ce fait, les poissons ont tendance à maintenir entre eux une distance constante. Les poissons nagent ensemble préférentiellement à une distance à leurs plus proches voisins de l’ordre de $0.3BL$. Nager avec des poissons de taille comparable peut permettre d’économiser l’énergie puisque cela assure une plus grande homogénéité des performances (notamment la vitesse de nage), mais cela peut aussi refléter le fait que les individus d’un même banc ont partagé pendant une partie importante de leur existence des conditions analogues

(Pitcher, 1993).

- **Migration :** La direction moyenne d'un banc est beaucoup plus stable que la direction individuelle, cela favorise une bonne précision de migration pour le banc. On peut observer ce mécanisme dans les espèces pélagiques comme les harengs, les capelans, qui vivent en bancs souvent immenses. On observe des bancs de thons surtout au printemps, à cause de l'influence des courants marins sur la migration des poissons (Fréon *et al.*, 1999).

1.3 Organisation dans un banc

1.3.1 Comment varie la densité dans un banc ?

En utilisant des observations par sonar, Cushing (1977) a établi que dans un banc de maquereaux, la densité d'abondance est plutôt hétérogène. Cela a été confirmé aussi par écho-intégration, par les photographies à haute résolution, qui montrent que la distribution de la densité dans les bancs de capelans varie d'une façon considérable (Serebrov, 1984; Fréon *et al.*, 1992; Misund, 1993). On trouve des régions à haute densité comme on trouve des régions vides, des vacuoles (*Figure 1.4*). Des observations similaires ont été faites dans le Pacifique sur les bancs d'anchois (Graves, 1977). Cette variation de densité dans un banc est une réponse à la dynamique de déplacement en paquets (Misund, 1993). En effet, suite à une forte dynamique et à un changement de positions brusque entre les individus dans le banc, en réponse à plusieurs facteurs tels la différence individuelle de nutriment, chaque individu a tendance à égaliser sa vitesse avec celle des autres et à maintenir une distance constante avec ses voisins. Mais, comme l'information n'est pas simultanée et le niveau d'excitation

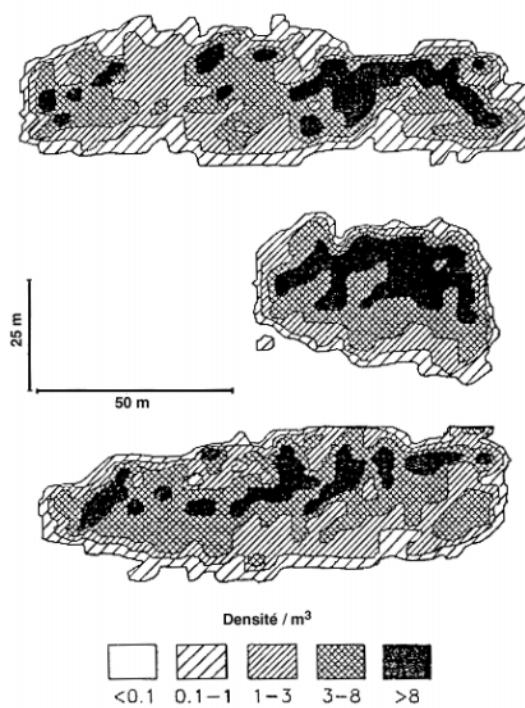


FIG. 1.4: *Structure de la densité dans un banc de harengs.*

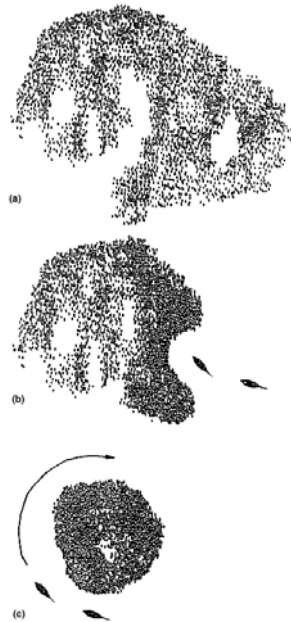


FIG. 1.5: *Compression d'un agrégat pendant une réaction de fuite du prédateur*

varie entre les différentes régions, une dynamique de déplacement en paquets se produit (Hunter, 1969 ; Patridge, 1981). La vitesse dans le banc et la variation de densité peuvent être importantes quand un banc change de direction, ou en s'approchant d'un amas de nourriture ou en réaction aux prédateurs. Des régions à haute densité ou vides à l'intérieur du banc peuvent être ainsi le résultat de la dynamique de ce type de déplacement.

Fréon *et al.* (1992) ont expliqué les variations internes de densité par les mécanismes de compression et d'expansion. Quand le banc est confronté à un danger, un phénomène de compression se produit et donc la distance "inter-individuelle" diminue (*Figure 1.5*). Quand la peur et le stress sont ressentis, la distance inter-individuelle décroît rapidement pour atteindre un minimum et les vacuoles disparaissent rapidement. Comme la réaction ne

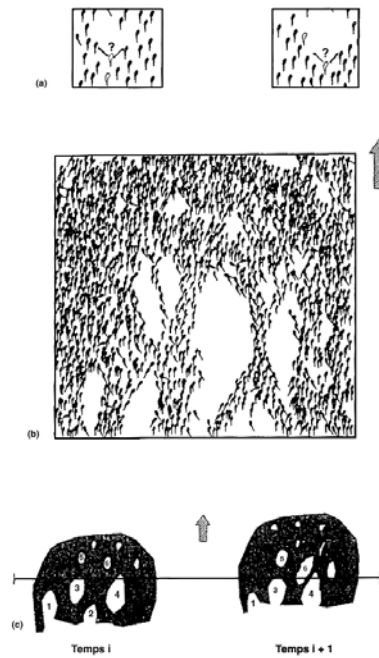


FIG. 1.6: *L'étirement du banc à travers la formation de lacunes internes.*

se transmet pas instantanément dans le banc, plusieurs stimuli répétés sont nécessaires pour comprimer tout le banc. Quand, au contraire, aucun danger ne menace le groupe, le comportement individuel commence à prendre place, le banc s'étire et la distance inter-individuelle atteint son maximum. Le phénomène de dilatation se produit : les individus de nouveau acquièrent les uns par rapport aux autres des positions relatives fixes et donc de petites vacuoles se forment (*Figure 1.6*). Les poissons dont les voisins sont agités et excités sont confrontés au même problème, mais la difficulté d'adapter les distances entraîne l'apparition de grandes vacuoles.

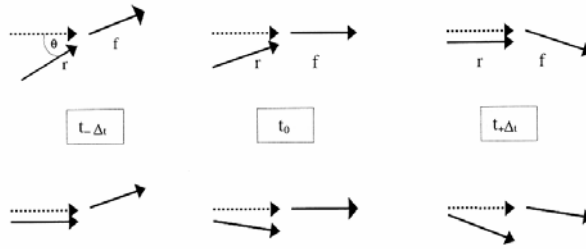
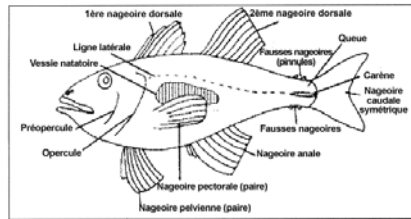


FIG. 1.7: *Initiation de nouvelles directions dans un banc de poissons*

1.3.2 Ce qu'il en coûte d'être un leader

L'existence d'un leader n'est pas une propriété inhérente à la vie d'un banc. C'est une réponse à plusieurs facteurs tels la différence individuelle de nourriture. Ici, on appelle leader tout individu qui est à l'origine du choix par un ou plusieurs autres individus d'une nouvelle direction. Pour identifier les individus influençant sur le comportement d'un banc, on peut utiliser la méthode de corrélation. Cette technique peut éventuellement être utilisée pour détecter l'influence de chaque individu sur le groupe. On peut citer par exemple l'article de Bumman and Krause (1993), qui rapportent l'expérience menée sur un groupe de *gardons* (*Figure 1.7*). La direction moyenne du poisson f du "devant" et celle du poisson r du "derrière" sont observées à trois instants successifs ($t_0 - \Delta t$, t_0 , $t_0 + \Delta t$). La direction de r est comparée à celle de f à l'instant t_0 (les pointillés) (*Figure 1.7*).

L'existence d'un leader dans un groupe peut s'expliquer aussi par le comportement d'ajustement de la distance. Dans les conditions normales, un poisson préserve une distance de 0.5 à 1.0 BL (BL =longueur moyenne d'un individu) avec ses voisins. Un poisson affamé va avoir tendance à ne pas respecter cette règle; il va ainsi entraîner derrière lui d'autres poissons qui cherchent à diminuer l'écart. De ce fait, le poisson affamé devient le leader



Morphologie d'un poisson typique (téléostéen). D'après J. Nicholls, dans *Guide de la faune et de la flore littorales des mers d'Europe*, éd. Delachaux & Niestlé, Paris, 1979.

FIG. 1.8:

involontaire d'un banc (Krause *et al* (2000)).

Hamilton (1971) a affirmé que dans un groupe, les leaders sont exposés au danger plus que leurs congénères. Le risque de prédation par les prédateurs varie d'une position à l'autre (Bumann *et al* (1997)). Krause *et al* (1998) estiment que le taux de risque chez les leaders est de 80%.

1.4 Les organes de communication chez les poissons

Les oreilles internes des poissons perçoivent tout un monde aquatique que les humains ne peuvent appréhender sans l'aide d'hydrophones. Dépourvus de cordes vocales, les poissons communiquent néanmoins entre eux. En comprimant leur vessie gazeuse, en faisant grincer leurs dents, en frottant ensemble certaines de leurs arêtes, ils produisent des sons. Les vocalisations des poissons communiquent des états comme l'alarme ou la soumission, en même temps que l'espèce, la taille et l'identité individuelle du locuteur (*Figure 1.8*).

La ligne latérale, organe sensitif que la plupart des poissons possèdent de chaque

côté du corps, formée de poils sensibles alignés de la tête à la queue, détecte elle aussi les vibrations. Pendant la nage, elle signale au poisson les objets proches grâce aux vibrations qu'ils renvoient, autorisant ainsi la navigation et la localisation précise des proies dans l'obscurité. De nombreuses espèces de poissons ont des centaines de récepteurs électriques sur la peau, qui leur permettent de détecter la forme du champ qu'ils produisent eux-mêmes. Un objet moins conducteur, tel une roche, forme une ombre dans le champ ; un objet plus conducteur, tel une proie, apparaît comme un point brillant. L'image électrique que perçoit le poisson lui indique le lieu, la taille, la vitesse et la direction de déplacement de l'objet (J. Dunar, 1991).

Les organismes marins émettent des sons pour se communiquer entre eux, se repérer dans leur environnement, en connaître les caractéristiques, repérer et identifier leurs proies. Certains organismes (par exemple, les rorquals) émettent régulièrement des infrasons caractéristiques, de haute intensité, qui se propagent sur de grandes distances dans la mer. La localisation de ces sources sonores peut être effectuée via un réseau d'hydrophones qui sont déployés dans l'aire d'étude, de la même façon que la marine nationale repère des sous-marins ou que les géophysiciens calculent les épicentres des tremblements de terre à partir des ondes sonores qu'ils génèrent.

1.5 Les contraintes de la vie en groupe

De nombreuses données issues des pêches dans le monde soulignent que sardines et anchois ne cohabitent jamais en grande quantité dans une même région océanique. Plusieurs hypothèses ont été émises pour expliquer de telles différences de biomasses. Des

études conduites par des chercheurs de l'IRD au large du Sénégal, de la côte d'Ivoire et, très récemment, de l'Afrique du sud, permettent pour la première fois de formuler une hypothèse : les contraintes imposées par la vie en banc constitueraient un mécanisme clé de ces fluctuations (Fiche scientifique, 1999). Il a été observé à plusieurs reprises que lorsqu'une espèce devient peu abondante, elle a tendance à s'agréger en un banc constitué d'espèces différents. Se maintenir dans un banc où domine une autre espèce constitue cependant un piège pour l'espèce minoritaire. Celle-ci, pour rester membre du banc, doit se plier au style de vie de l'espèce dominante même si cela ne lui convient pas. Ainsi, par exemple, lorsque l'anchois est associé à un banc de sardines très migratrices, l'anchois, relativement sédentaire, peut être obligé de migrer dans des zones où l'environnement lui est moins favorable ou même franchement défavorable (pour son alimentation par exemple). A l'inverse, des sardines "piégées" dans un banc d'anchois pourront difficilement se déplacer, comme elles en ont l'habitude, vers les zones où elles se reproduisent où elles se nourrissent.

1.6 Conclusion

Comprendre les mécanismes de la formation de bancs est un élément essentiel à la compréhension du fonctionnement des écosystèmes marins. En effet, les bancs sont des unités de population qui jouent un rôle fondamental dans certaines étapes de la vie d'une espèce (reproduction, fuite vis à vis de prédateurs, coopérativité pour la recherche de nourriture,...). Cette problématique est un des sujets de recherche d'intérêt, sur lequel plusieurs efforts sont consentis. La structure en banc est un élément essentiel de la dynamique de population de nombreuses espèces de poissons, notamment les petits poissons pélagiques comme l'anchois,

et doit être introduite dans les modèles de dynamique de population de ces espèces pour que l'on puisse réellement progresser sur la voie de l'estimation et de la prédiction des stocks. Sur la modélisation des bancs, beaucoup reste à faire. Les pistes possibles sont nombreuses : le fonctionnement même d'un banc, sa relation avec l'espace ou avec d'autres bancs, ses caractéristiques physiques, géométriques, et d'autres aspects, devraient émerger des modèles. La modélisation mathématique de la formation de bancs et leur dynamique est l'objectif à long terme de notre travail. Cet objectif est abordé d'une manière progressive, le phénomène de formation de banc est décomposé en plusieurs parties considérées, dans un premier temps, indépendamment les unes des autres. Deux questions sont actuellement étudiées : 1) l'alignement, c'est à dire, le mécanisme par lequel les poissons se polarisent, par exemple en réponse à une stimulation provenant du milieu extérieur et qui n'est pas perçue ni perceptible instantanément par tous les individus du banc ; 2) l'agrégation des individus, les mécanismes par lesquels les bancs se forment et se maintiennent. Dans cette thèse, nous nous sommes focalisés sur l'alignement.

Pour conclure, deux démarches de modélisation sont utilisées dans ce travail. La première est la modélisation mathématique basée sur la construction d'expressions analytiques, la seconde est la modélisation informatique basée sur l'élaboration d'un monde virtuel (modèle de simulation de type IBM (individual based-model)) et son exploration par simulation. Ces deux démarches ont été développées en parallèle dans le modèle d'alignement, elles ont conduit à deux modèles qui ont ensuite été comparés. La description de ces approches fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Approches eulériennes et lagrangiennes

Dans la littérature sur les comportements agrégatifs, il existe deux types de modèles mathématiques (Grunbaum, 1994, Flierl *et al.*, 1998, Okubo *et al.*, 1994) : modèles individus-centrés (Huston *et al.*, 1988) ou modèles de configuration des états individuels (Metz et Diekmann, 1986) et modèles classiques à variables d'état (Huston *et al.*, 1988) ou modèles de distribution des états individuels (Metz et Diekmann, 1986). Ces représentations sont deux façons différentes d'appréhender une même réalité, en se plaçant au niveau des individus, dans le premier cas, au niveau de la population, dans l'autre. Ces deux grands types de modèles sont parfois désignés respectivement par modèles lagrangiens pour les premiers par modèles eulériens pour les seconds. C'est cette terminologie que nous adaptons ici et nous préciserons pourquoi. La distinction lagrangien / eulérien est illustrée classiquement comme suit : on considère une population de particules se déplaçant dans un milieu

ambient, sous l'action de champs qui peuvent être déterministes ou stochastiques, ou les deux. L'évolution au cours du temps des positions des particules peut être étudiée à travers :

1) Le suivi de chaque particule, au cours du temps

2) L'observation des flux de particules en chaque point de l'espace. Il s'agit donc ici de se positionner en un point de l'espace et de " regarder " passer les particules.

Dans le premier cas, on est capable de dire à chaque instant où se trouve telle ou telle particule, c'est l'approche lagrangienne. Dans le deuxième cas, on renonce à déterminer la position des particules, on décrit simplement la distribution des particules dans l'espace et les variations temporelles de cette distribution, c'est l'approche eulérienne. Bien entendu, la question se pose de savoir si ces deux approches sont équivalentes. Cette question sera envisagée plus loin.

Cette distinction a une traduction sur le terrain : il y a des expériences lagrangiennes et des expériences eulériennes. Le marquage de poissons ou d'autres animaux par des colorants, par des marques fixes ou des dispositifs de repérage à distance, sont autant de moyens de déterminer le trajet ou une partie du trajet d'individus, et d'obtenir ainsi des réalisations expérimentales de trajectoires lagrangiennes. Les prélèvements, uniques ou répétés dans le temps, d'échantillons de plancton ou de poissons, fournissent des données réelles de modèles eulériens. Ces exemples montrent aussi que le choix d'une approche n'est pas uniquement une question de méthodologie, mais peut être aussi influencé par le procédé de recueil des données.

2.1 Modèles lagrangiens

2.1.1 Historique et motivation

Les modèles lagrangiens sont classiquement connus en physique, notamment en hydrodynamique sous le nom des modèles particulaires ou stochastiques. Ce vocabulaire est ensuite adopté en écologie depuis 1980, en assimilant les individus aux particules, et sont devenus une approche de modélisation indépendante dans le champ d'écologie depuis une décade (Huston *et al.*, 1988, DeAngelis et Gross, 1992, Grimm, 1999). Les modèles lagrangiens sont une classe de modèles dans lesquels les trajectoires des individus sont calculées, selon des équations qui peuvent incorporer à la fois les lois physiques (conservation du moment) et les comportements sociaux (attraction, répulsion, tendance à s'aligner sur les voisins) (Grunbaum, 1994, Flierl *et al.*, 1998, Okubo *et al.*, 1994). Ils conduisent à des équations de transport, déterministes ou stochastiques; récemment, ils ont connu un développement important sous la forme de modèles de simulation informatique individu-centrés (IBM, pour «individual-based models»). Ces modèles sont aussi appelés dans certaines disciplines "orientés-objets" ou "orientés-agents" (Ferber, 1995). On utilise aussi parfois le terme de modèles micro-analytiques (Collins & Jefferson, 1991) pour désigner les simulations individus-centrés pour bien indiquer que les représentations se situent au niveau de l'individu, ces derniers interagissant aussi bien entre eux qu'avec l'environnement simulé. Dans ces modèles, on met en scène un nombre aussi grand que possible d'individus d'une population, chacun décrit par des caractéristiques numériques ou autres, évoluant dans un environnement lui aussi décrit par un ensemble de propriétés. Les caractéristiques des différents individus et celles de l'environnement sont structurées en autant d'objets dans la

mémoire d'un programme informatique. Des règles régissent les changements qui affectent ces objets sous l'action des divers mécanismes modélisés. Elles précisent les conditions, vitesses et modalités de ces changements. Dans cette dynamique, le comportement des individus peut dépendre des attributs locaux ou globaux de l'environnement. A l'inverse les individus peuvent changer leur environnement local (Lorek *et al.*, 1998).

De nombreux travaux ont vu le jour cette dernière décennie pour faire le bilan de l'apport scientifique des modèles individus-centrés (Grimm, 1999). Dans ce contexte, plusieurs questions sont posées : Puisqu'on souhaite incorporer les détails biologiques basés sur les individus, pourquoi ne pas simuler les individus eux-mêmes ? Comment formaliser la réalité biologique selon laquelle un individu quelconque d'une population donnée n'interagit pas de manière équivalente avec tous ses congénères ? Comment l'influence de l'environnement, qui agit au niveau local sur chaque individu, est elle répercutée au niveau de la population ?

L'idée selon laquelle les propriétés d'un système quelconque peuvent se déduire des propriétés de ses constituants élémentaires et des relations qui existent entre ses composants de base n'est pas récente (Lomnicki, 1991). Au contraire, c'est une "théorie" connue depuis longtemps notamment en philosophie des sciences sous l'appellation de "réductionnisme". Rappelons que le développement actuel de l'écologie réactive un vieux débat entre deux paradigmes : le holisme et le réductionnisme (Bergandi, 1998). De nombreux écologistes travaillant sur les écosystèmes défendent en effet l'idée que "le tout est plus que la somme des parties" (Ethrenfels, 1890). Selon cette hypothèse, les écosystèmes auraient des propriétés uniques (on parle de propriétés émergentes) qui ne sont pas réductibles aux seules propriétés

de leurs composantes. Cette approche est également quantifiée de holistique par référence au concept de holisme créé par Jan Smuts (1926) (Lévêque, 2001). D'autres écologistes, en revanche, considèrent que ce n'est pas le cas et que l'ensemble n'est rien d'autre que la somme de ses composantes.

Présente dans de nombreuses disciplines scientifiques, la démarche réductionniste reste encore regardée avec méfiance en biologie et en écologie (Lomnicki, 1992). Il est donc intéressant se demander pourquoi cette méthode largement connue, est apparue si tard dans ces disciplines ? Quelques biologistes (par exemple, Mayr 1982), ont rejeté la théorie de réductionnisme, comme étant un concept qui ignore les interrelations entre les organismes, par exemple, en biologie moléculaire, biochimie, biophysique qui sont des champs important de la biologie. Caplan (1988) estime que la méfiance à l'encontre de la méthode réductionniste en écologie tient à un malentendu relatif à l'importance des interactions entre les éléments de base d'un système. En effet, le réductionnisme ne se contente pas d'identifier ces éléments, et leurs propriétés, mais il étudie également les relations qui les unissent (Lomnicki, 1992). Quoiqu'il en soit, ces deux visions du monde correspondent à des stratégies de recherches tout à fait différents. L'approche IBM peut être considérée comme une application de la méthodologie réductionniste, qui fait émerger les propriétés d'un système à partir des considérations fondées sur les individus le constituant et leurs interactions (Lomnicki, 1992; Grimm, 1999). En se référant encore au travail de Grimm (1999), on peut justifier le choix des IBM principalement par deux grandes raisons : la première, c'est que certains caractéristiques importantes (la variabilité et les interactions entre les individus, l'influence locale de l'environnement) ne sont pas facile à prendre en compte ou à intégrer dans les mo-

dèles classiques à variables d'état, où chaque individu est supposé avoir la même influence sur les autres individus d'une certaine classe. La seconde, est de principe, c'est le principe de l'unicité de l'individu et de sa relation locale avec l'environnement (DeAngelis et Gross, 1992).

La première motivation est de nature "pragmatique" ; elle vise à surmonter la difficulté pour modéliser certains phénomènes touchant aux caractéristiques des populations par des approches à variables d'état globales.

La seconde raison, une raison de fond, "paradigmatique" ; tient au fait que la compréhension de certaines propriétés des populations nécessite la prise en compte de la variabilité individuelle. La motivation est la même en ayant l'hypothèse simplificatrice de mélange parfait des individus de chaque classe (Grimm (1999)).

2.1.2 IBM et Mathématique

Les modèles IBM mettent en oeuvre généralement un grand nombre d'individus dans le temps et/ou l'espace, et manipulent donc une quantité d'informations importantes. Cette complexité des modèles IBM, en termes de nombre de paramètres, de fonctions et d'événements explicitement formulés ne permet pas dans la plupart des cas de dégager des solutions analytiques du système (Grunbaum, 1998, Okubo *et al.*, 1994). Les difficultés sont de nature mathématiques. Même pour des modèles de complexité réduite, par exemple ceux qui se traduisent par des systèmes d'équations différentielles ou d'équations différentielles stochastiques, en dehors de tout autre mécanisme, les possibilités de l'analyse mathématique restent limitée.

Les modélisateurs prennent donc essentiellement l'approche simulation pour éla-

borer et exploiter les modèles IBM, et s'écartent donc des outils d'analyse mathématique (Huston *et al.*, 1988). Il s'avère cependant que ces outils peuvent apporter des enseignements et validités partiellement les simulations. Une méthode en effet pour assurer la validité d'un simulateur est de le faire tourner sur un cas simple que l'on sait résoudre analytiquement.

2.1.3 IBM et Informatique

Huston *et al.* (1988) voient les perspectives de l'approche individu-centrée dans le développement des ordinateurs et de la possibilité d'appliquer les outils de simulations numériques et les solutions numériques. De fait, le développement des modèles IBMs est intimement lié à une amélioration continue des techniques et du matériel informatique qui accroissent leurs potentialités. Ces potentialités permettent de construire les "micro-mondes artificiels" dont il est possible de contrôler toutes les caractéristiques, et de reproduire des séries d'expérimentations (Ferber (1995)).

Pour Ferber, un agent est une entité informatique qui est capable de percevoir et d'agir sur son environnement, qui ne dispose que d'une représentation partielle de cet environnement (et parfois aucune), qui peut être communiquer avec d'autres agents, qui poursuit un objectif individuel, qui possède des compétences, qui peut éventuellement se reproduire, et dont le comportement est la conséquence de ses objectifs, de sa perception, de ses représentations, de ses compétences et des communications qu'il peut avoir avec les autres agents (Ferber, 1995). On distingue généralement les agents cognitifs des agents réactifs. Les premiers sont capables de prendre des décisions à partir des informations qui leur ont été directement communiquées par des agents de leurs univers. A l'inverse, les agents réactifs dont leur comportement est réduit à un stimulus/réponse et ne disposent

pas de capacités leur permettant de connaître les autres agents et d’avoir des représentations détaillées sur le monde dans lequel ils évoluent. Le lecteur intéressé par ce type de modèles ou la classification des agents peut consulter par exemple (Ferber, 1995 ; Treuil *et al.*, 2001). Un système multi-agent est la mise en interaction au sein d’un ordinateur ou sur un réseau de plusieurs agents. L’approche par simulation multi-agent consiste à simuler un système réel par une collection d’agents en interaction. Chaque agent représente alors un individu, un groupe d’individus ou une partie de l’environnement du monde réel simulé.

2.2 Modèles eulériens

Les modèles eulériens décrivent le flux d’une propriété continue, (dans le comportement animal, cela représente la concentration animale ou la densité de population ou autre), à l’aide du formalisme mathématique, e.g. de l’espace-temps continu des EDP (équations aux dérivées partielles) (e.g. Kawasaki 1978, Cohen & Murray 1981, Alt 1985, Turchin 1989). Le point de vue eulérien, dans un sens élargi, s’intéresse ainsi à l’évolution de phénomènes au cours du temps en des points fixes de l’espace. Les modèles mathématiques, où les équations spécifient ce qui se passe en chaque unité fixe d’espace, sont général et abstraits. Ils se concentrent souvent sur des questions générales sur l’écologie, dérochant ainsi des détails du système réel. Dans l’approche eulérienne, la variable d’état est la densité ” spatiale ” des individus. Le terme ” spatial ” doit s’entendre ici dans un sens élargi : il correspond à la variété constituée par les points dans un espace composite, produit de l’espace physique et des espaces ” âge ”, ” taille ”, etc. L’intégrale de la densité étendue à un volume V donne la population totale contenue dans ce volume à un instant donné. Autrement dit, les individus

situés au même point de l'espace des états individuels (e.g. même position physique, même âge, même taille) sont exposés au même environnement, que celui-ci soit abiotique, ou créé par d'autres individus (Metz & De Roos 1992, Wissinger 1992, Grimm 1999). Les modèles eulériens que nous obtenons se traduisent aussi bien par des équations matricielles (modèles de Leslie par exemple) que par des équations différentielles ou aux dérivées partielles (les modèles de Verhulst et McKendrick- von Foerster, par exemple). Bien que l'analyse mathématique de ce type de modèles, tant sur le plan quantitatif que sur le plan qualitatif, ait connu un large développement grâce aux avancées des méthodes théoriques (méthodes de points fixes, de théories de semigroupes, théories spectrale, ...etc) et numériques (méthodes d'éléments finis, volumes finis, différences finies), les modèles de densités constituent des approximations de la réalité, puisqu'ils se basent sur des prises de moyennes et s'appuyer donc sur les lois des grands nombres et des lois de probabilité.

Dans cette approche, l'équation d'état est obtenue en décrivant la variation instantanée de population dans un volume arbitraire. L'équation principale dans les modèles eulériens est l'équation de réaction-diffusion-advection, où diffusion et advection sont le résultat commun du comportement individuel et de l'influence de l'environnement ; et la dynamique de la population est modélisée par le terme de réaction. Lorsque l'on catégorise les déplacements des individus d'une population pélagique en séparant les mouvements collectifs orientés (dits advectifs) de la dispersion plus ou moins isotrope (mouvements diffusifs), il convient en outre de distinguer, par exemple, l'advection due à la dynamique des masses d'eau (i.e., qui entraînent des groupes d'organismes "passivement transportés") de "l'advection comportementale", engendrée par une locomotion active. De la même manière,

on rencontrera un continuum de mouvements dispersifs, depuis la "diffusion physique" jusqu'à la "diffusion biologique".

Les modèles eulériens de type EDP considèrent un espace continu et temps continu. Il existe aussi nombre de modèles eulériens à espace discret, et temps discret. Une approche bien identifiée est celle des réseaux d'automates cellulaires. L'espace y est représenté dès le départ de la modélisation (et non par application d'un schéma numérique) par un ensemble régulier des cellules spatialisées. Ils sont toujours homogènes et denses (toutes les cellules sont semblables). Les cellules peuvent prendre différents états, et donc représenter les concepts comme vide ou occupée, leur évolution est contrôlée par une fonction de transition sur le voisinage identique pour toutes les cellules. La distinction importante est donc de savoir si la simulation est basée sur une décomposition dense et uniforme de l'espace, ou basée sur des individus identifiés distribués dans cet espace (Graig Reynolds, 1997).

2.3 D'une approche à l'autre

L'intégration d'un modèle lagrangien déterministe fournit la position à l'instant t en fonction de la position à un instant passé t_0 . Supposant connue la distribution initiale de la population, il est théoriquement possible de calculer la distribution à tout instant ultérieur, c'est-à-dire de déterminer la représentation eulérienne de la population. Inversement, le passage de l'eulérien vers le lagrangien est loin d'être aussi évident et peut même ne pas avoir lieu. Il se peut en effet qu'un modèle eulérien ne soit l'émergence d'aucun modèle lagrangien. Ici entre en considération un élément important des modèles : la notion d'échelle. De l'individu à la population ou même aux communautés d'individus, les niveaux d'observa-

tions et leur contenu sont très variés. Ils se différencient par la richesse des données utilisées dans la description du phénomène à chaque niveau, depuis à une extrémité, la densité globale de la population (1 seul paramètre) jusqu'à à l'autre extrémité, les caractéristiques génétiques et de position de chaque individu. On utilise les termes "structure", "variable de structure" pour ces variables servant à caractériser les individus permettant de diviser à tout instant (on dit aussi structurer) la population en groupes, chaque groupe étant caractérisé par une valeur commune de la variable de structure à cet instant. On a par exemple les modèles structurés par l'âge, les modèles structurés par la taille ou le poids ou une grandeur caractéristique, ou encore les modèles structurés par l'âge et la taille. L'absence de structure correspond aux modèles globaux dans lesquels les variables d'état sont simplement les densités des populations étudiées à tout instant. L'analogie lagrangien de ces structures est la considération de groupes d'individus, traités comme des méta-individus, se déplaçant dans un milieu ambiant sous l'action d'un champ moyennisé au niveau des groupes.

Caswell & John considèrent (1992) que pour pouvoir traiter l'état d'une population comme étant une fonction de la distribution des états individuels, on doit poser l'hypothèse simplificatrice du "mélange parfait" ou "de champ moyen", qui se traduit par le fait que les individus sont interchangeables ; ou encore rattacher l'hypothèse du mélange parfait à l'hypothèse d'homogénéité de l'environnement : tous les individus subissent les mêmes conditions. L'approche à variable d'état néglige le fait que les individus diffèrent dans beaucoup de leurs caractéristiques tout au long de leur cycle de vie. Ces hypothèses d'interchangeabilité, d'égalité des individus et de réaction comportementale à l'environnement, peuvent se trouver prise en défaut ; les résultats des modèles eulériens continus et des

modèles lagrangiens individus-centrés sont alors différents. Un exemple paradigmatique est celui proposé par DeAngelis et Rose (1992). Mais, il existe dans la littérature de nombreux autres exemples (Durrett et Levin, 1994). Pour illustrer l'importance que peut en revêtir les différences entre individus lorsqu'on étudie une population, nous exposons ici un exemple proposé par DeAngelis et Rose (1992). L'expérience a été faite sur deux échantillons de 250 jeunes perches issues d'une même population, qui sont placées dans deux aquariums et soumises aux mêmes conditions environnementale pendant 48 jours. Par l'approche de la modélisation à variable d'état, les conclusions sont les mêmes pour ces deux échantillons, du fait qu'ils proviennent d'une même population et que leur distribution initiales de fréquences de tailles sont très similaires. On voit pourtant qu'au cours du temps, ces deux distributions prennent des allures très différentes (*figure 2.3*). Une interprétation possible de ce résultat est liée à la possibilité de cannibalisme des plus grands poissons à l'encontre des plus petits. Des simulations effectuées à partir d'un modèle individus-centré permettent en outre aux auteurs de reproduire ce phénomène. Un autre exemple, permettant d'expliquer l'influence de la variabilité individuelle, a été montré par Begon et Wall (1987), dans un modèle de compétition entre deux espèces.

2.4 Conclusion

En résumé, représentation lagrangienne et représentation eulérienne sont deux façons différentes d'appréhender une même réalité, en se plaçant au niveau des individus, dans le premier cas, au niveau de la population, dans l'autre. Si l'on considère que tous les individus qui vivent dans le même type d'habitat sont interchangeables (ou au moins cette

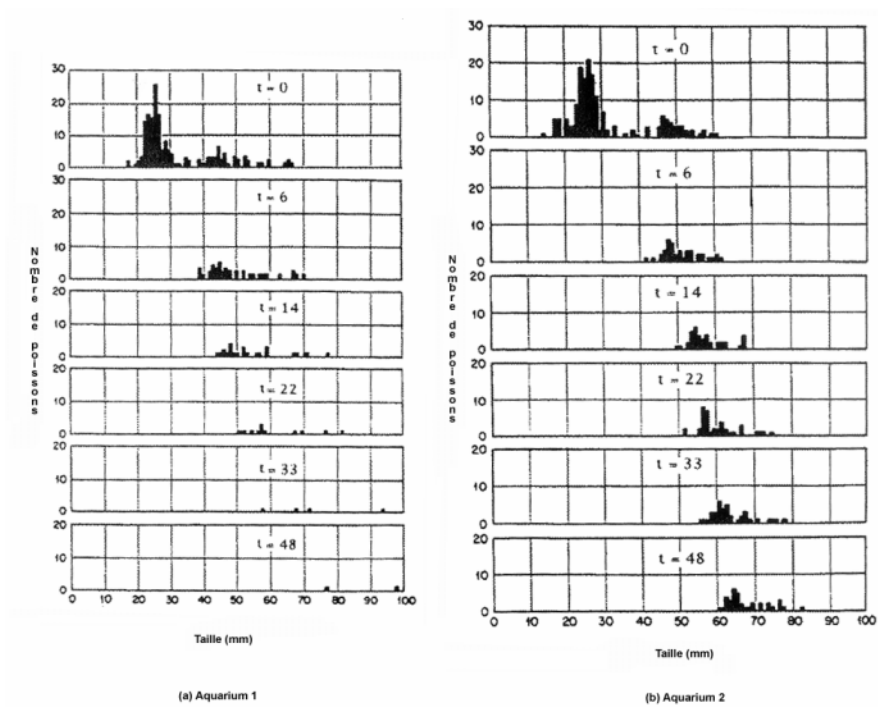


FIG. 2.1: *Evolution temporelle de la distribution des fréquences de tailles de deux populations de perches.*

hypothèse n'est pas incompatible avec les objectifs de la modélisation envisagée), alors on choisira plutôt un modèle de distribution des états individuels tels que les modèles matriciels de Leslie ou ceux aux dérivées partielles. Sinon, on choisira un modèle de configuration des états individuels qui permettent de suivre toutes les "trajectoires" individuelles. Ces différences ont leur traduction en termes d'observations et de données, lesquelles peuvent expliquer que dans certains cas l'une des approches s'impose sur l'autre. Il est donc important d'être capable de passer de l'une à l'autre des représentations, parce que chacune d'elles présente, dans les applications, un intérêt propre : ainsi, les prélèvements de plancton, en milieu aquatique, comme le comptage de cellules dans un cytomètre de flux, sont des opérations eulériennes, dont on peut chercher à extraire des informations lagrangiennes sur le cycle de vie d'une espèce ou d'une cellule. Le suivi des trajectoires d'un nombre significativement élevé d'individus d'une population peut, à l'inverse, permettre d'estimer l'évolution d'ensemble de la population.

Ma préoccupation ici a été de ne pas développer ces approches indépendamment l'une de l'autre, mais de chercher autant que possible à les croiser, les comparer, parfois peut être à les opposer, et surtout à m'appuyer à l'occasion sur l'une pour faire progresser l'autre.

Chapitre 3

Modèles d'alignement et d'agrégation

Les groupements de particules "homologues" en structures ayant des propriétés distinctes émergentes, l'importance de ces groupements dans la dynamique des populations où ils sont observés ont -assez récemment- attiré l'attention des chercheurs dans des domaines aussi variés que la biologie cellulaire, l'écologie animale, végétale, la sociologie (sciences sociales) et le trafic routier (D.Grunbaum et A.Okubo, 1994 ; G.Flierl, D.Grunbaum, S.Levin et D.Olson, 1999 ; Fréon *et al.*, 1999; Huth et Wissel, 1992, 1994 ; Viscido *et al.*, 2002; Mogilner *et al.*, 1996 ; Edelstein-Keshet, Ermentrout et Mogilner, 1990, 1995, 1996; J.Dallon et J.Sherratt, 1998 ; M.Holmes et B.Sleeman, 2000; H.G Othmer et A. Stevens, 1997, T. Hillen et A. Stevens, 2000). Sans doute, l'exemple le plus étudié à ce jour est celui de la formation de spores par *dictyostelium discoideum* (H.G Othmer et A. Stevens, 1997, T. Hillen et A. Stevens, 2000). C'est une "amibe" (être unicellulaire) qui se reproduit par fission. Dans un

milieu riche en nutriments, elle produit rapidement de grandes colonies -apparemment- sans interactions.

Si le nutriment vient à manquer, une action de "conservation" est mise en oeuvre dont les étapes sont les suivantes : des individus commencent à émettre un signal chimique. Ces individus jouent le rôle de centres organisateurs. Les substances chimiques libérées diffusent dans le milieu : un gradient de concentration s'établit depuis chaque centre organisateur vers la périphérie. Les amibes se déplacent dans le sens du gradient et se rassemblent autour des centres organisateurs. Là, d'autres processus sont mis en oeuvre que nous n'allons pas détailler davantage. La littérature sur ce phénomène fascinant est énorme (Martiel et Goldbeter, 1987 ; Anderson et Chaplain, 1998 ; Bretschneider et al., 1999 ; Dallon et Othmer, 1997 ; Weijer, 1999). Très récemment, les amibes ont été choisies comme sujet d'expérience dans l'étude des mutations génétiques qui peuvent se manifester par des patterns différents. Tout aussi spectaculaires sont les groupements terrestres, aériens ou marins. Les causes, les mécanismes de l'évolution qui ont façonné les comportements individuels et sociaux concourant à la formation de bancs de poissons, des hôtes, de "volées" d'oiseaux, ne sont pas connus. Mais la dynamique d'un banc, l'arrivée de nouveaux individus, leur départ, la coalescence de deux bancs, ainsi que la fission, sont aujourd'hui des phénomènes étudiés (Aoki, 1986 ; Huth et Wissel, 1992, 1994 ; Viscido *et al.*, 2002). Les observations peuvent permettre d'imaginer des mécanismes "locaux", lesquels peuvent à leur tour déboucher sur des hypothèses globales. Les travaux d'Okubo (1980, 1986) et ses collaborateurs ont posé les bases théoriques de la dynamique des agrégats d'animaux. Le paradigme fondamental assimile les individus à des particules dans un champ de forces de natures et de grandeurs

très variées. Il y a des forces d'attraction, des forces de répulsion, des forces qui produisent le mouvement vers d'autres individus, des forces qui s'opposent aux mouvements. Un principe fondamental qui vient de la mécanique est que les forces agissant sur un individu s'équilibrent et que les individus acquièrent rapidement les uns par rapport aux autres une vitesse constante, des positions relatives fixes.

3.1 Modèles lagrangiens du comportement agrégatif

3.1.1 Aspect Newtonien

Dans plusieurs modèles lagrangiens (voir chapitre précédent) d'agrégation animale, la base de l'expression du mouvement est l'équation de Newton, i.e., chaque individu i suit la seconde loi de Newton

$$F_i = m \frac{d^2 x_i}{dt^2}, \quad (3.1)$$

F_i est la force totale s'exerçant sur lui. Cette force est la résultante de plusieurs effets, de nature biologique, comportementale ou environnementale (e.g. Sakai, 1973 ; Suzuki & Sakai, 1973 ; Inagaki *et al.*, 1976 ; Okubo, 1986 ; Niwa, 1991, 1993, 1996). x_i est sa position et m sa masse. Il est utile de considérer cette expression générale comme référence dans l'examen de la diversité des modèles d'agrégation et d'alignement. A côté des forces environnementales (gravité, viscosité, la nourriture, la lumière, etc) d'origine physique, il y a les forces générées par le comportement de l'animal. Ce comportement est décomposé en différentes tendances identifiables et formalisées par des descriptions mathématiques séparées :

- une force de locomotion spontanée, $F_{i,l}$, destinée à maintenir une vitesse de natation

- constante, comprimant les forces de viscosité ;
- une force d’agrégation ou de groupement, $F_{i,g}$, traduisant l’attraction sociale ou la répulsion entre les individus ;
 - une force de cohésion, $F_{i,a}$, les individus cherchent à maintenir une distance constante en ajustant leurs vitesses relatives ;
 - une force due à des stimulations externes, provenant de l’environnement, $F_{i,e}$, tendance directionnelle, par exemple, en réponse à des gradients chimiques ou biologiques ;
 - une force aléatoire, $F_{i,r}$, qui traduit la stochasticité du comportement et de l’environnement.

La forme de ces forces varie d’un modèle à l’autre. Donnons quelques exemples et références :

**Premier exemple* : modèle de Matuda et Sannomiya (1980, 1985) :

$$F_{i,g} = \sum_{j=1}^N b(r_{ij}) f(\Phi_{ij}) \frac{x_j - x_i}{r_{ij}},$$

$r_{ij} = |x_j - x_i|$ est la distance séparant les individus i et j ,

$$b(r_{ij}) = \frac{k_b(r_{ij} - \alpha)}{(r_{ij} - \alpha)^2 + \beta^2}, \quad f(\Phi_{ij}) = 1 - \frac{(1 - \cos \Phi_{ij})^2}{2}.$$

Donc, les interactions sont répulsives pour $r_{ij} \leq \alpha$. A partir de la distance α , les interactions sont attractives et atteignent leur maximum en $\alpha + \beta$. La sensibilité à l’orientation est définie par $f(\Phi_{ij})$, les réactions sont maximales pour les voisins qui arrivent en face, et minimales pour ceux qui sont derrière.

- La force de cohésion est donc

$$F_{i,a} = \sum_{j \in M_i} c(r_{ij}) f(\Phi_{ij}) \frac{x_j - x_i}{M_i},$$

où

$$M_i = \sum_{j=1}^N \frac{(1 - \text{sgn}(r_{ij} - \sigma))}{2}$$

est le nombre d'individus qui sont dans la boule de rayon σ . σ représente le seuil de distance du champ de vision. Cette force $F_{i,a}$ est pondérée par la fonction $c(r_{ij})$, donnée par

$$c(r_{ij}) = k_c \left[1 - \left(\frac{(1 - \cos(\frac{\pi r_{ij}}{\sigma}))}{2} \right)^2 \right] \frac{(1 + \text{sgn}(\sigma - r_{ij}))}{2}.$$

Les réactions à une stimulation externe sont décrites par

$$F_{i,e} = p e_f. \quad (3.2)$$

Ici, p et e_f sont, respectivement, la grandeur et la direction de la stimulation.

**Deuxième exemple* : dans le même contexte, Sakai (1973) et Suzuki & Sakai (1973) ont suggéré un autre modèle. La dynamique d'un individu i du groupe $i = (1, 2, \dots, N)$ ayant la position $x_i(t)$ à l'instant t est donnée par :

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} + mk \frac{dx_i}{dt} = F_{i,c} + F_{i,r}. \quad (3.3)$$

Les forces comportementales $F_{i,c}$ sont les suivantes :

Force de locomotion spontanée, $F_{i,l}$:

$$F_{i,l} = a \frac{\frac{dx_i}{dt}}{\left| \frac{dx_i}{dt} \right|}.$$

a est une constante positive appelée le coefficient de poussée. Quand l'individu est en mouvement avec une vitesse constante sous l'action unique de $F_{i,l}$, sa "vitesse propre" v_0 est donnée par $\frac{a}{km}$.

Force de regroupement, $F_{i,g}$:

$$F_{i,g} = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N Q(r_{ij}) \frac{(x_j - x_i)}{r_{ij}},$$

avec

$$Q(r_{ij}) = \begin{cases} -c_0 r_{ij} (c_0 > 0) & \text{si } 0 < r_{ij} < r_0 \\ c > 0 & \text{si } r_0 < r_{ij} < r_1 \\ 0 & \text{si } r_1 < r_{ij}. \end{cases}$$

Force de cohésion, $F_{i,a}$. Cette force agit si les voisins de l'individu i sont à l'intérieur d'une sphère d'influence, et est exprimée par

$$K_{ia} = \frac{1}{M_i} \sum_{j \in V_i} h \left(\frac{dx_j}{dt} - \frac{dx_i}{dt} \right)$$

où h est le coefficient de la force de cohésion et M_i est le nombre d'individus qui sont dans la sphère centrée en x_i , de rayon l_i et de volume V_i ($V_i = \frac{4}{3}\pi l_i^3$). Ainsi, l'équation (3.2) devient :

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} + mk \frac{dx_i}{dt} = a \frac{\frac{dx_i}{dt}}{\left| \frac{dx_i}{dt} \right|} + \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N Q(r_{ij}) \frac{(x_j - x_i)}{r_{ij}} + \frac{1}{M_i} \sum_{j \in V_i} h \left(\frac{dx_j}{dt} - \frac{dx_i}{dt} \right) + F_{i,r}. \quad (3.4)$$

Les résultats de simulations ont mis en évidence l'existence de trois structures agrégatives fondamentales (Sakai (1973) et Suzuki & Sakai (1973)) (*Figure 3.1*) :

- Mouvement de l'amibe. Quand la force aléatoire domine $f_{i,c}$, le centre de masse des animaux se déplace de manière imperceptible et la forme de la structure fluctue autour d'un patron circulaire.
- Mouvement en "tore". Quand $f_{i,c}$ domine la force aléatoire, il y a rotation autour d'un centre vide, et donc la population prend la forme caractéristique d'un beignet Américain le "doughnut".

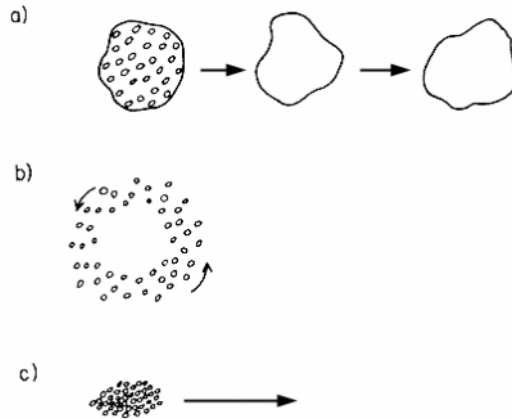


FIG. 3.1: *Mouvements fondamentaux du groupe. a) Mouvement en amibe, b) Mouvement en tore, c) Mouvement rectiligne.*

- Mouvement rectiligne. Quand les individus sont soumis aux forces de cohésion, le groupe dans son ensemble tend à se mettre en mouvement rectiligne.

Troisième exemple : Niwa (1996) a développé un modèle newtonien similaire à celui de Sakai (1973) et Suzuki & Sakai (1973) (3.2). L'étude est faite ici pour le poisson. La dynamique de chaque poisson i du groupe ($i = 1, 2, \dots, N$) assimilé à une particule de vitesse $v_i(t)$ à l'instant t est régie par l'équation (Niwa, 1996) :

$$\frac{dv_i}{dt} = f_{i,l} + f_{i,g} + f_{i,p} + f_{i,r}.$$

La force de locomotion spontanée, $f_{i,l}$ est donnée par :

$$f_{i,l} = k(1 - \beta v_i^2)v_i,$$

où k est la constante de relaxation représentant la vitesse de convergence vers l'équilibre; β^{-1} est la vitesse à l'équilibre, $\beta^{-1} = v_{i,e}^2$ ($v_{i,e}$ vitesse d'un individu i à l'équilibre).

La force de cohésion, $f_{i,p}$, est donnée par :

$$f_{i,p} = J(V - v_i),$$

où V est la vitesse moyenne du centre de masse du groupe ($V = \sum_{j=1}^N v_j$) et J est le coefficient de cohésion.

3.1.2 Aspect biologique

Une caractéristique commune aux modèles lagrangiens d'agrégation est que les forces résultant des interactions sociales sont fonctions des distances de séparation et/ou des orientations relatives entre les individus. Une propriété naturelle est qu'il existe une distance maximum limite (qui peut varier, par exemple en raison des conditions environnementales) au delà de laquelle les individus sont incapables de détecter leurs congénères. Cette limite d'interaction qui peut être vue comme une distance de sensibilité, établit une longueur d'échelle qui, de son côté, peut jouer un rôle fondamental dans la structure du groupe. Au sein d'un groupe, les poissons ajustent leur position en fonction de leurs congénères. Chaque poisson essaie de garder une "inter-distance" (distance d'équilibre, où la répulsion est équilibrée par l'attraction) avec ses voisins. Cette inter-distance maintenue entre les individus peut avoir des conséquences, par exemple, sur la vitesse de communication dans le groupe, la vitesse de réaction à un amas de nourriture et aussi sur la vitesse d'éclatement du groupe et d'évitement du danger. Nous allons maintenant détailler davantage quelques modèles d'attraction\répulsion :

Modèles d'attraction\répulsion

Plusieurs formulations ont été proposées pour définir les modèles d'attraction et de répulsion. Parr en (1927) fut le premier à définir la notion de groupe cohésif en milieu aquatique comme étant le résultat d'un équilibre entre les forces d'attraction et de répulsion, mais sans donner l'expression de ces forces. Breder (1951, 1954) a développé le concept de Parr, en faisant une analyse newtonienne (en assimilant les individus à des molécules) et en décrivant l'interaction mutuelle F entre deux individus sous la forme :

$$F = -a + \frac{d}{d^2},$$

où a et b sont des constantes strictement positives et d est la distance séparant les individus. Le premier terme ($-a$) est le terme d'attraction ; le second $\left(\frac{d}{d^2}\right)$ est de répulsion. A une distance $d_e (= \left(\frac{b}{a}\right)^2)$, il y a équilibre et donc $F = 0$. Pour $d < d_e$, il y a répulsion, et pour $d > d_e$, il y a attraction. Sakai (1973) établit un modèle d'attraction\répulsion en supposant que la fonction de répulsion varie linéairement avec la distance séparant les individus. L'attraction est constante. Warburton (1991) supposait que les distances au delà desquelles la répulsion (resp. en deça desquelles l'attraction) n'agit pas sont confondues ; i.e. il n'existe pas de zone où il y a ni attraction, ni répulsion. Ces fonctions peuvent être modélisées comme suit (Warburton, 1991) :

$$\begin{aligned} A &= M_a \left[1 - \left(1 - \left[\frac{D}{D_{\max}} \right] \right)^{K_a} \right]^{\frac{1}{K_a}} \\ R &= M_r \left[1 - \left(1 - \left[\frac{D}{D_{\max}} \right] \right)^{K_r} \right]^{\frac{1}{K_r}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

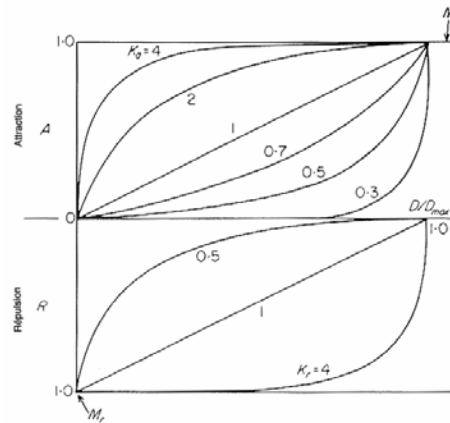


FIG. 3.2: Les effets des exposants K_a et K_r sur l'allure des fonction d'attraction et de répulsion.

A est l'attractivité, R la répulsivité, M_a est l'attraction maximum possible, M_r la répulsion maximum possible, D est la distance entre deux individus, D_{\max} la distance seuil entre attraction et répulsion (distance à partir de laquelle l'attraction atteint son maximum et la répulsion son minimum). Les valeurs K_a et K_r sont des paramètres (Figure 3.2).

Quant au modèle de décision d'Aoki (1982), il distingue trois types de réactions : la répulsion, l'orientation parallèle, et l'attraction. Ce modèle a ensuite été repris par Huth et Wissel dans un "modèle en moyenne" (1992, 1994). Nous allons décrire en détail ces deux derniers modèles qui sont de fait les plus cités dans la littérature.

Modèle de décision et modèle en moyenne

Nous allons présenter ces deux modèles qui illustrent les problématiques et les réponses qui ont été apportées dans le cas de bancs de poissons. A cet effet, nous introduisons dans ce chapitre les notations que l'on retrouvera dans la description de tous les exemples. On fixe a priori la taille du banc : on travaillera avec un groupe de N individus, chaque

individu étant repéré par un numéro $i = 1, 2, \dots, N$. On restreint l'étude à la dimension deux, les individus sont dans un plan horizontal, et sont à l'instant initial disposés aléatoirement dans ce plan.

$r_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$ la position à l'instant t ;

$v_i(t)$ la vitesse à l'instant t .

Le temps évolue de manière discrète par pas de longueur Δt à partir d'un temps initial que nous ramenons à 0. Il sera commode d'utiliser la lettre t pour représenter un temps quelconque, mais t sera un multiple de Δt .

$r_{ij} = |r_i(t) - r_j(t)|$ est la distance entre les individus i et j ;

$\sphericalangle(a, b)$ est l'angle orienté entre deux vecteurs a et b , défini modulo 2π ;

$\bar{a} = \frac{1}{N} \sum_{j \in N} a_j$ est la moyenne arithmétique des a_j .

δ_r est la distance de répulsion maximale;

δ_a est la distance d'attraction minimale;

δ_M la distance d'attraction maximale;

δ_v la distance de perception maximale;

ω est l'angle mort du poisson ($\omega = 30^\circ$) (voir (*Figure3.3*));

β_{ij} est l'angle duquel le poisson i doit se tourner sous l'influence de j ;

λ est le nombre seuil de voisins (le nombre préféré de voisins);

σ est le paramètre de dispersion;

θ_i est l'orientation d'un individu i ;

$p(\theta_i)$ est la densité de probabilité de distribution de la variable θ_i .

A chaque pas de temps Δt , le poisson prend des décisions en fonction de la position, de

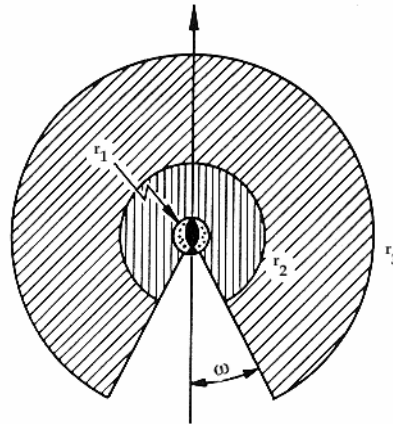


FIG. 3.3: Les quatre types *de comportement fondamentaux*

l'orientation et de la vitesse de ses voisins. Dans le modèle de Huth et Wissel (1992, 1994), on distingue quatre types de réactions : répulsion, orientation parallèle, attraction et recherche (*Figure 3.3*) :

A un instant donné, si deux poissons i et j sont, à une distance $r_{ij} \leq \delta_r$ l'un de l'autre, ils vont s'efforcer d'agir pour que r_{ij} augmente jusqu'à dépasser strictement la valeur δ_r . On suppose aussi que dès que $r_{ij} > \delta_r$, les forces de répulsion entre les deux poissons sont annulées.

On suppose : $\delta_a > \delta_r$. Quand la distance entre i et j est telle que

$$\delta_r < r_{ij} \leq \delta_a,$$

les deux poissons ne ressentent, l'un vis à vis de l'autre, ni répulsion ni attraction. On se trouve dans la gamme des distances d'un banc "à l'équilibre". S'il y a mouvement des poissons i et j , chaque individu va contrôler son mouvement de manière à maintenir la distance r_{ij} dans l'intervalle $]\delta_r, \delta_a]$. Il va donc chercher à se déplacer "parallèlement" à son

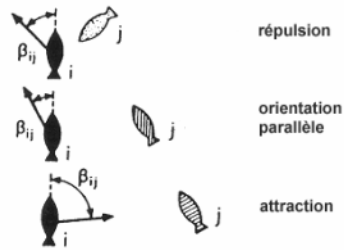


FIG. 3.4: Mécanismes de réactions.

voisin, c'est le mécanisme d'alignement.

Quand la distance mutuelle entre deux poissons dépasse le seuil δ_a , $\delta_a < r_{ij} < \delta_v$, il va se créer entre eux des forces dont l'action est de réduire la distance. Ce sont donc des forces d'attraction. Ces forces agissent dans la limite de perception visuelle, donc tant que :

$$r_{ij} < \delta_v.$$

Quand $r_{ij} > \delta_v$, les deux poissons ne se voient plus et donc leur déplacement l'un par rapport à l'autre est purement au hasard (recherche) (*Figure 3.4*).

Des valeurs typiques sont : $\delta_r = 0.5BL$, $\delta_a = 2BL$, $\delta_v = 5BL$ et $\omega = 30^\circ$. Toutefois, ces valeurs varient d'une espèce à l'autre. Par exemple, dans le groupe de maquereaux ("*tachurus japonicus*"), la longueur du corps varie entre 13 et 31cm, avec une moyenne de 20cm, et chez les maquereaux ("*scomber*") de 14 à 23cm, avec une moyenne de 16cm. Pour ces deux espèces, le nombre δ_r/BL est presque de l'ordre de 1.51 (Aoki 1986). La distance mutuelle est donc plus grande que les valeurs de 0.5–0.9BL obtenues dans plusieurs espèces de poissons (Huth et Wissel (1992, 1994)). Graves (1977) rapporte que dans un banc d'anchois, la distance mutuelle est de 1.2BL.

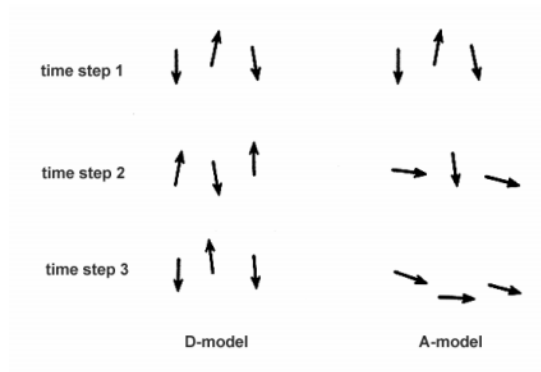


FIG. 3.5: Le concept d'opération du modèle de décision "D-model" et modèle en moyenne "A-model".

Le modèle d'Aoki (1982) est :

$$p(\theta_i) = \sum_{j \in \lambda} \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp -\frac{(\theta_i - \beta_{ij})^2}{2\sigma^2},$$

Si un poisson perçoit plus de λ voisins, il en sélectionne λ suivant des règles de priorité : la priorité frontale ("front priority") formalise l'hypothèse, suggérée notamment par Olst & Hunter (1970), Tembruck (1983) suivant laquelle le poisson choisit d'abord ceux qui sont placés devant lui. Ceux qui sont plus éloignés ou sont dans son angle mort, sont négligés et donc n'ont pas d'influence sur son comportement.

Dans le modèle en moyenne (Huth et Wissel, 1992, 1994), chaque poisson est soumis à l'influence de tous ses voisins (*Figure 3.5*). La distribution de probabilité $p(\theta_i)$ est donnée par :

$$p(\theta_i) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{dans la zone de recherche} \\ \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\theta_i - \overline{\beta_{ij}})^2}{2\sigma^2} \right\} & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

où $\overline{\beta_{ij}} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \in \lambda} \theta_{ij}$. La vitesse absolue g_i d'un poisson i suit statistiquement une distribu-

tion de Gauss

$$p(g_i) = \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(g_i - \bar{v})^2}{2\sigma_v^2} \right\},$$

avec

$$\bar{v}(t) = \min \left\{ v_{\max}, \frac{1}{\lambda} \sum_{j \in \lambda} v_j(t) \right\}.$$

$v_i(t)$ étant le vecteur vitesse à l'instant t . La vitesse à l'instant $t + \Delta t$ est donnée par la formule

$$v_i(t + \Delta t) = g_i D(\theta_i) \frac{v_i(t)}{|v_i(t)|}.$$

$D(\theta_i)$ est la matrice de rotation d'angle θ_i . La nouvelle position du poisson i à l'instant $t + \Delta t$ est donc

$$r_i(t + \Delta t) = r_i(t) + \Delta t v_i(t + \Delta t).$$

Les paramètres typiques utilisés par (Aoki, 1986 ; Huth et Wissel, 1992, 1994) sont : $\sigma = 15^\circ$, $\lambda = 4$, $\sigma_v = 0.2BL/s$, $v_{\max} = 1.3BL/s$, $\Delta t = 0.5s$ et la taille du groupe $N = 9$. Au début de la simulation, les individus sont dispersés aléatoirement dans une surface de $4.5BL \times 4.5BL$. Huth et Wissel ont comparé ces deux modèles en s'appuyant sur deux indicateurs : la polarisation et la dispersion.

La polarisation, p , est définie comme la moyenne arithmétique de l'écart de l'angle de chaque poisson, à la direction moyenne du groupe, sv (angle moyen, Hunter, 1966)

$$p(t) = \langle (sv, v_i^\circ(t)) \rangle,$$

avec

$$sv(t) = \overline{\sum_{i=1}^n v_i^\circ(t)}.$$

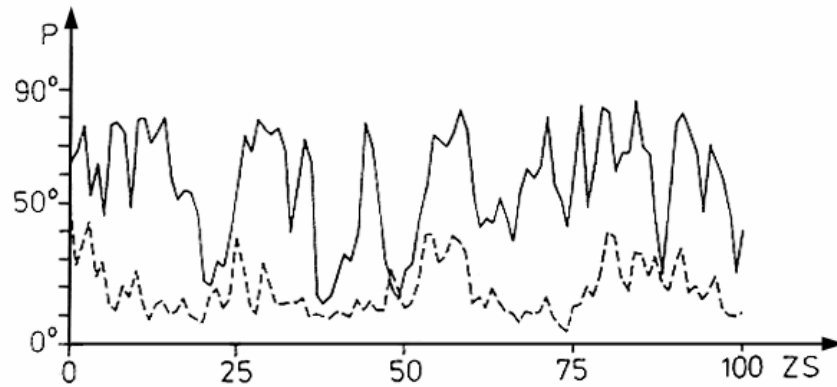


FIG. 3.6: Comparaison de la polarisation dans le modèle en moyenne (ligne en pointillés) et dans le modèle de décision (ligne continue).

La direction moyenne du groupe est calculée en faisant la somme du vecteur d'orientation $v_i^\circ(t)$ pour chaque poisson. Pour $P = 0^\circ$, l'orientation parallèle est optimale : tous les poissons ont la même orientation. Pour $P = 90^\circ$, la polarisation est nulle, il n'y a aucune direction privilégiée.

La dispersion, a , est définie comme la moyenne quadratique de la distance de chaque poisson au centre de masse de son groupe

$$a(t) = \sqrt{[r_i(t) - s(t)]^2},$$

$s(t)$ étant le centre de masse du groupe. Dans un groupe à forte cohésion de neuf poissons, $a \approx 1BL$.

Dans le modèle de décision, $P \approx 50^\circ$ et dans le modèle en moyenne $P \approx 20^\circ$ (Figure 3.6).

Le modèle en moyenne confirme approximativement les résultats expérimentaux. En effet, Van Olst & Hunter ont établi que dans un banc ayant une forte orientation parallèle, les valeurs de la polarisation varient de 10° à 20° (1970). Des résultats analogues sont établis dans (Hunter, 1966) et (Pitcher & Wyche, 1983). D'autre part, dans les deux modèles, la

dispersion $a \approx 1BL$.

Dans le contexte du nombre de voisins influençant l'aspect du groupe, nous rappelons brièvement le travail de Viscido *et al.* (2002). Dans ce travail, la force sociale $f_{i,j}$ que l'individu i exerce sur j , est :

$$f_{i,j} = \begin{cases} m_r r_{ij} - F_{\max} & \text{si } r_{ij} < \delta_r, \\ 0, & \text{si } \delta_r \leq r_{ij} \leq \delta_a \\ m_a r_{ij} - m_a \delta_a, & \text{si } \delta_a < r_{ij} < D_M, \\ F_{\max}, & \text{si } D_M \leq r_{ij} \leq D_V, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Ici

D_M est la distance d'attraction maximale (où la force attractive est égale à F_{\max} (force maximale));

m_r est la pente de la droite de répulsion ;

m_a est la pente de la droite d'attraction;

$\delta_a = \delta_r + 1$ (l'unité étant le BL).

Quelques résultats qualitatifs de (Viscido *et al.*, 2002) sont présentés dans les figures suivantes (*Figure 3.7*) et (*Figure 3.8*).

3.2 Modèles eulériens

La dynamique spatio-temporelle d'une distribution de densité $\rho(x, t)$ (*i.e.* l'évolution de $\rho(x, t)$ dans l'espace et dans le temps) dans un espace de dimension un est modélisée

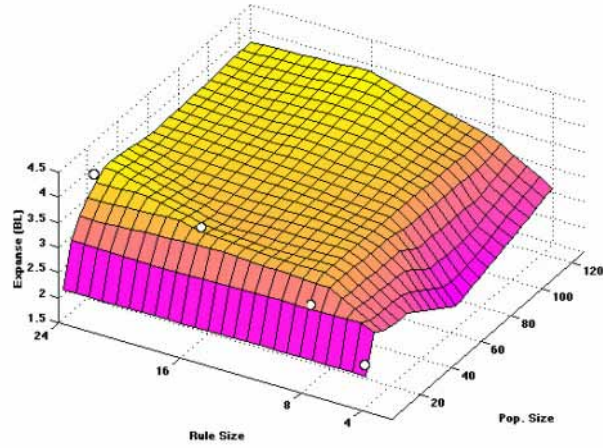


FIG. 3.7: la dispersion du banc (Viscido et al., 2002). Le groupe se divise en plusieurs groupes plus que le nombre de voisins dont chaque individu tient en compte devient petit.

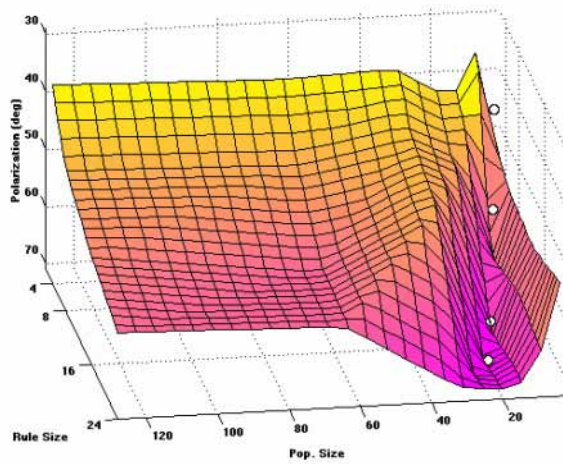


FIG. 3.8: Polarisation du banc (Viscido et al., 2002). Le groupe devient moins polarisé quand le nombre de voisins dont chaque individu tient en compte est assez élevé.

par l'équation de conservation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x} + r = -\frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + r,$$

où J représente le flux des individus, U la vitesse moyenne, et r est la contribution de la densité locale à la dynamique et au changement de l'état du système. La densité de probabilité ρ en un point x est donnée par

$$\rho(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{Pr}\{\text{un individu en un point } x' \in (x, x + \Delta x)\}}{\Delta x}, \quad (3.6)$$

où les individus sont supposés distribués d'une façon continue dans l'espace et dans le temps, sans chevauchement (Papoulis, 1984). A l'instant t , le nombre d'individus observés dans un intervalle (x_a, x_b) au cours d'une expérience donnée, est une variable aléatoire de moyenne

n_{ab}

$$\eta_{ab} = E\{n_{ab}\} = \int_{x_a}^{x_b} \rho(x', t) dx'. \quad (3.7)$$

L'objectif de l'approche eulérienne est de modéliser le flux de densité en un point x , dans un domaine D où les individus interagissent et obéissent à quelques algorithmes de comportement lagrangien (Grunbaum et Okubo, 1994). Dans la littérature, les modèles eulériens non locaux de comportement agrégatif (Kawasaki, 1978; Cohen et Murray, 1981; Levin et Segel, 1985; Murray, 1989; Mogilner et Edelstein-Keshet, 1986; Lui, 1983; Greegan and Lui, 1984; Mimura et Yamaguti, 1982; Turchin, 1986; Grunbaum et Okubo, 1994; Flierl *et al.*, 1998) sont de la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} [V(\rho) \rho] + B(\rho). \quad (3.8)$$

Dans ce travail nous entendons par modèle non local un modèle décrit par des équations dans lesquelles la variation de l'état en un point est exprimée en fonction des valeurs dans

un voisinage spatial ou temporel, ou les deux, ou encore dans un voisinage d'un point dans un espace (age, taille, orientation angulaire, etc).

L'équation (3.8) gouverne la dynamique spatio-temporelle d'une densité de population $\rho(x, t)$, où x est la variable spatiale. Le premier terme dans le membre de droite de (3.8) décrit le mouvement aléatoire, avec un coefficient de diffusion $D(\rho)$. Le second terme est la vitesse densité-dépendante du mouvement advectif $V(\rho)$, et le troisième est un terme de démographie. En général, le terme de réaction $B(\rho)$ est supposé négligeable (plus exactement le temps d'observation du banc est supposé petit par rapport aux événements démographiques), autrement dit, l'échelle de temps du mouvement est petite (par rapport au processus de vie et de mort des organismes) (Mogilner et Edelstein-Keshet, 1999).

Le paramètre de diffusion $D(\rho)$ dépend de la densité (Bertsh *et al.*, 1984, 1985) et donc la mobilité aléatoire change en réponse à la densité. Cela a été observé, par exemple, dans les cellules bactériennes (Odell, 1980; Sherratt, 1994). La dépendance en la densité dans le terme d'advection signifie que la vitesse des organismes est ajustée à la densité de la population locale. Dans les essaims myxobactériens, par exemple, les taux d'essaimage sont des fonctions croissantes de la densité (Kaiser et Crosby, 1983).

Avant d'aborder les modèles d'alignement, on présente quelques modèles mathématiques d'agrégation.

3.2.1 Modèles d'agrégation

Dans ce paragraphe, nous commençons par un bref historique des modèles d'agrégation. Puis, nous détaillons deux exemples, le premier met en lumière la représentation du hasard. Nous suivons ici la présentation originale de Turchin (1989). Le deuxième modèle

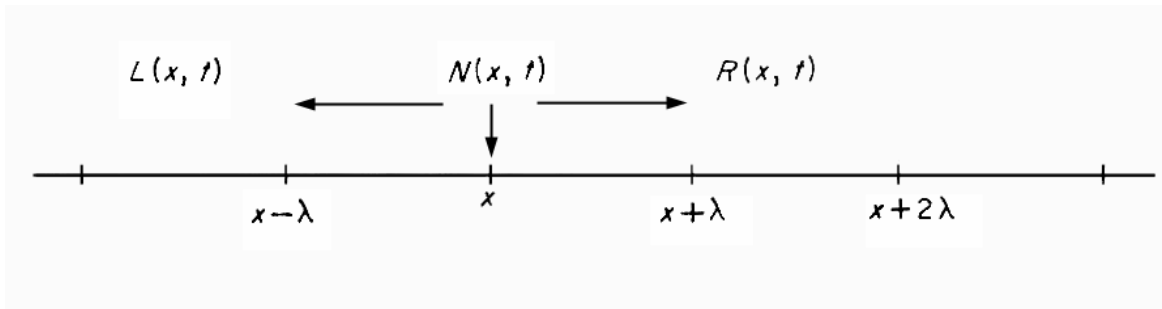


FIG. 3.9: *Mouvement aléatoire le long d'une droite*

met davantage l'accent sur la représentation des processus agrégatifs.

Marche aléatoire "random walk" avec attraction entre les individus

On considère une population d'animaux distribués le long d'une droite. Soit $\rho(x, t)$ la densité de probabilité des individus qui ont la position x , à l'instant t . Durant un pas de temps τ , chaque individu peut faire un saut de longueur λ fixe, à droite avec une probabilité $R(x, t)$, et à gauche avec une probabilité $L(x, t)$, ou reste à sa place avec une probabilité $N(x, t)$ (Figure 3.9). On suppose que le mouvement des organismes est influencé par une des conditions suivantes :

- (i) En l'absence d'individus dans les positions adjacentes, chaque individu se déplace à droite ou à gauche avec la même probabilité, i.e. $Prob \{ \text{aller à droite} \} = Prob \{ \text{aller à gauche} \} = \frac{1}{2}$;
- (ii) En présence de congénères dans une ou dans les deux positions adjacentes, l'animal se dirige dans une des positions avec une probabilité conditionnelle k (conditionnée par la présence d'autres animaux), ou ignore les voisins avec une probabilité $1 - k$.

Sous la condition de densité locale faible ($\rho \ll 1$), on a

$$\begin{aligned} R(x, t) &= \frac{1}{2}r(x, t) + k\rho(x + \lambda, t) \\ L(x, t) &= \frac{1}{2}r(x, t) + k\rho(x - \lambda, t), \end{aligned} \tag{3.9}$$

où $r(x, t)$ représente la composante aléatoire du mouvement. Sachant que

$$R(x, t) + L(x, t) + N(x, t) + r(x, t) = 1,$$

il en résulte

$$r(x, t) = 1 - N(x, t) - k\rho(x + \lambda, t) - k\rho(x - \lambda, t).$$

Quand la densité de la population locale augmente, par exemple du fait de l'agrégation, l'équation (3.9) n'est plus vérifiée, puisque la probabilité de présence de congénères à droite ou à gauche ne peut plus être négligée. D'autre part, lorsque la densité de la population est élevée, l'attraction entre les individus diminue, ou même se transforme en répulsion. Dans cette situation, on peut supposer que k est une fonction décroissante de $\rho(x, t)$.

En l'absence de naissance et de mort, $\rho(x, t)$ satisfait à l'équation suivante :

$$\rho(x, t) = N(x, t - \tau)\rho(x, t - \tau) + R(x - \lambda, t - \tau)\rho(x - \lambda, t - \tau) + L(x + \lambda, t - \tau)\rho(x + \lambda, t - \tau). \tag{3.10}$$

Cette équation peut être utilisée pour prédire l'évolution de $\rho(x, t)$ dans le temps (itération numérique sur un ordinateur). Cependant, la résolution analytique présente des difficultés : de ce fait, on a recours à l'approximation de diffusion (Segel, 1978 ; Okubo, 1980, 1984). Pour obtenir l'équation de diffusion de l'équation (3.9), on suppose que λ et τ sont suffisamment

petits par rapport, respectivement, à x et t . Sous des hypothèses de régularité, on utilise le développement de Taylor à l'ordre deux des expressions $\rho(x \pm \lambda, t - \tau)$

$$\begin{aligned}\rho(x - \lambda, t - \tau) &= \rho(x, t) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) - \tau \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t) + \lambda \tau \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \rho(x, t) + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho(x, t) + \dots \\ \rho(x + \lambda, t - \tau) &= \rho(x, t) + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) - \tau \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t) - \lambda \tau \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \rho(x, t) + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho(x, t) + \dots\end{aligned}\quad (3.11)$$

Substituant l'équation (3.11) à (3.10), on trouve

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} [\delta(x, t) \rho(x, t)] + \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\mu(x, t) \rho(x, t)] + O(\lambda^3) \quad (3.12)$$

avec l'aléa $\delta(x, t) = R(x, t) - L(x, t)$ et la mobilité

$$\mu(x, t) = R(x, t) + L(x, t) = 1 - N(x, t).$$

$O(\lambda^3)$ désigne les termes d'ordre λ^3 et plus. Pour calculer $\delta(x, t)$, on substitue $R(x, t)$ à $L(x, t)$ dans l'équation (3.9), et on utilise le développement de Taylor à l'ordre deux :

$$\begin{aligned}\delta(x, t) &= R(x, t) - L(x, t) \\ &= k [\rho(x + \lambda, t) - \rho(x - \lambda, t)] \\ &= 2k\lambda \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) + O(\lambda^3).\end{aligned}\quad (3.13)$$

Remplaçant $\delta(x, t)$, dans l'équation (3.12), par sa valeur ; on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) &= \frac{-2\lambda^2}{\tau} \frac{\partial}{\partial x} \left[k \rho(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) \right] + \frac{\lambda^2}{2\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\mu(x, t) \rho(x, t)] \\ &\quad + \frac{\lambda}{\tau} \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) O(\lambda^3) + \frac{O(\lambda^3)}{\tau}.\end{aligned}\quad (3.14)$$

Si on suppose que λ et τ tendent vers 0 en respectant la condition $\lambda^2 = O(\tau)$ et plus précisément, si l'on suppose $\lim_{\lambda, \tau \rightarrow 0} \frac{\lambda^2}{2\tau} = D > 0$ (Okubo 1980) et comme $\frac{O(\lambda^3)}{\tau} \rightarrow 0$, l'équation (3.14) devient à la limite

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = -4D \frac{\partial}{\partial x} \left[k \rho(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) \right] + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\mu(x, t) \rho(x, t)]. \quad (3.15)$$

Le premier terme dans le membre de droite de (3.15) représente le mouvement agrégatif dans le sens du gradient croissant de la population $k \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t)$, et le second terme représente le mouvement aléatoire, de taux μ . Le mouvement répulsif, qui traduit le fait que les animaux ont tendance à s'éloigner de leurs congénères (i.e. effectivement en multipliant k par -1) résulte du mouvement dirigé dans le sens décroissant du gradient de la population. $k = cste$ paraît être une hypothèse peu réaliste dans une population dispersée, ou réellement agrégée. Turchin (1989) suppose que k est une fonction linéaire de la densité :

$$k(\rho) = k_0 \left(1 - \frac{\rho}{\omega}\right) \quad (3.16)$$

k_0 étant le degré maximum de grégarisme (en $u = 0$), et ω la densité seuil qui marque la séparation entre comportement agrégatif et comportement dispersif. En introduisant (3.16) dans (3.15), avec $d = 1$, on obtient une équation de type "agrégation-diffusion" (ADE) de la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\Phi(\rho)], \quad (3.17)$$

avec

$$\Phi(\rho) = \left(\frac{\mu}{2}\right) \rho - k_0 \rho^2 + \left(\frac{2k_0}{3\omega}\right) \rho^3. \quad (3.18)$$

L'analyse faite par Turchin (1989) montre que l'agrégation a lieu si

$$\Phi'(\rho) = \left(\frac{\mu}{2}\right) - 2k_0 \rho + \left(\frac{2k_0}{\omega}\right) \rho^2 < 0,$$

en d'autres termes, si

$$4k_0 \left(k_0 - \frac{\mu}{\omega}\right) > 0 \Leftrightarrow k_0 \omega > \mu, (k_0 > 0).$$

Cette condition indique que le comportement agrégatif dépend de la force d'agrégation mesurée par $k_0\omega$ et de la force de dispersion due au mouvement aléatoire, mesurée par μ . Si la tendance agrégative k_0 est faible, ou si le seuil de densité ω à partir duquel le mouvement devient répulsif est aussi faible, alors le mouvement aléatoire domine, *i.e.* les animaux tendent à se déplacer dans le sens du gradient de la densité faible.

Dans le modèle (3.17), la vision des animaux est limitée à la longueur du pas de marche λ . Cette restriction paraît peu réaliste ; lorsque λ est petit, notamment, le champ de vision dépasse largement λ et les organismes peuvent, dans certains cas, percevoir leur congénères à de grandes distances, en utilisant par exemple des "signaux acoustiques" (Thornhill & Alcock, 1983). Posons $kH(s)$ pour la probabilité qu'un individu à la position s soit perçu, avec $\int_0^{+\infty} H(s)ds = 1$. Donc, la probabilité qu'un individu occupant la position x perçoive tous les individus qui sont dans un voisinage à droite est : $\int_0^{+\infty} kH(s)\rho(x+s, t)ds$. Donc, dans ce cas $\delta(x, t)$ devient

$$\delta(x, t) = k \left[\int_0^{+\infty} H(s)\rho(x+s, t)ds - \int_0^{+\infty} H(s)\rho(x-s, t)ds \right]. \quad (3.19)$$

Cette expression a été utilisée par Kawasaki (1978), mais en supposant $H(s) = \text{const}$, *i.e.* la probabilité de perception ne diminue pas avec la distance. Autrement dit, chaque organisme a une parfaite connaissance de toute la population. En utilisant le développement de Taylor des termes $\rho(x+s, t)$ et $\rho(x-s, t)$ à l'ordre quatre, la formule (3.19) devient :

$$\delta(x, t) = 2k \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) \right) \int_0^{+\infty} sH(s)ds + \frac{k}{3} \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} \rho(x, t) \right) \int_0^{+\infty} s^3 H(s)ds + \int_0^{+\infty} H(s)O(s^5)ds. \quad (3.20)$$

Dans le cas où $H(s)$ est une Gaussienne, *i.e.*,

$$H(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right),$$

l'équation (3.19) s'écrit

$$\delta(x, t) = \frac{2k}{\sqrt{2\pi}}\sigma \frac{\partial}{\partial x}\rho(x, t) + \frac{2k}{3\sqrt{2\pi}}\sigma^3 \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\rho(x, t) \right) + O(\sigma^5).$$

Pour σ petit, on retrouve l'équation (3.13).

Equation du télégraphe et comparaison avec un modèle de diffusion pure

La propriété la plus troublante de la diffusion pure est qu'elle autorise un déplacement non borné : il existe une probabilité > 0 , même si elle est infiniment petite qu'un individu franchisse une distance infiniment grande en un temps arbitraire. En outre, les déplacements individuels à microéchelle sont supposés être effectués "sans mémoire", *i.e.*, l'individu est dépourvu d'inertie et peut instantanément "choisir aléatoirement" une nouvelle orientation indépendante de la précédente. Une alternative à ce modèle est l'équation du télégraphe, qui a été établie par Goldstein (1951), puis étudiée par Othmer *et al.* (1988) dans le cadre des phénomènes de déplacement d'individus. Ce modèle tient compte du fait qu'un organisme ne parcourt qu'une distance finie en un temps fini, et qu'à microéchelle il tend à conserver une certaine corrélation entre les orientations de ses déplacements élémentaires successifs (correlated random walk). Notons γ la vitesse (finie) des mouvements individuels, et λ le taux individuel (fini) des changements d'orientation. Les animaux font des déplacements de longueur δ , au cours de l'intervalle de temps τ . Un animal continue son mouvement avec une probabilité p , ou dans le sens contraire avec une probabilité q ($q = 1 - p$). Pour τ petit, $p = 1 - \lambda\tau$ et $q = \lambda\tau$. Notons par $\alpha(x, t)$ et $\beta(x, t)$ respectivement, la densité des animaux qui arrivent de la gauche, ou de la droite sur la position

x :

$$\alpha(x, t + \tau) = p\alpha(x - \delta, t) + q\beta(x - \delta, t) \quad (3.21)$$

et

$$\beta(x, t + \tau) = p\beta(x + \delta, t) + q\alpha(x + \delta, t). \quad (3.22)$$

En utilisant le développement de Taylor à l'ordre deux pour les équations (3.21) et (3.22),

on obtient

$$\alpha(x, t) + \tau \frac{\partial}{\partial t} \alpha(x, t) + O(\tau) = p \left[\alpha(x, t) - \delta \frac{\partial}{\partial x} \alpha(x, t) + O(\delta) \right] + q \left[\beta(x, t) - \delta \frac{\partial}{\partial x} \beta(x, t) + O(\delta) \right]$$

et

$$\beta(x, t) + \tau \frac{\partial}{\partial t} \beta(x, t) + O(\tau) = p \left[\beta(x, t) + \delta \frac{\partial}{\partial x} \beta(x, t) + O(\delta) \right] + q \left[\alpha(x, t) + \delta \frac{\partial}{\partial x} \alpha(x, t) + O(\delta) \right].$$

Substituons $p = 1 - \lambda\tau$ et $q = \lambda\tau$ et prenons la limite quand δ et τ tendent vers zéro, on

obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha(x, t) + \frac{\delta}{\tau} \frac{\partial}{\partial x} \alpha(x, t) = \lambda\beta(x, t) - \lambda\alpha(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \alpha(x, t) + \gamma \frac{\partial}{\partial x} \alpha(x, t) \quad (3.23)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} \beta(x, t) - \frac{\delta}{\tau} \frac{\partial}{\partial x} \beta(x, t) = \lambda\alpha(x, t) - \lambda\beta(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \beta(x, t) - \gamma \frac{\partial}{\partial x} \beta(x, t). \quad (3.24)$$

La densité d'animaux $S(x, t)$ en un point x à l'instant t est: $S(x, t) = \alpha(x, t) + \beta(x, t)$, puis-

qu'un animal à la position x peut arriver de la droite ou de la gauche de x . En substituant,

puis en retranchant l'équation (3.23) à (3.24), on trouve

$$2\lambda\gamma \frac{\partial}{\partial x} (\alpha(x, t) - \beta(x, t)) = -2\lambda \frac{\partial}{\partial t} (\alpha(x, t) + \beta(x, t)), \quad (3.25)$$

et

$$\gamma \frac{\partial}{\partial t} (\alpha(x, t) + \beta(x, t)) + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x} (\alpha(x, t) + \beta(x, t)) = -2\lambda\gamma (\alpha(x, t) - \beta(x, t)). \quad (3.26)$$

En dérivant (3.25) par rapport à t , on obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\alpha(x, t) + \beta(x, t)) + \gamma \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} (\alpha(x, t) + \beta(x, t)) = 0, \quad (3.27)$$

et dérivant l'équation (3.26) par rapport à x , on trouve

$$\gamma \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} (\alpha(x, t) + \beta(x, t)) + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\alpha(x, t) + \beta(x, t)) = -2\lambda\gamma \frac{\partial}{\partial x} (\alpha(x, t) - \beta(x, t)). \quad (3.28)$$

En substituant au premier terme son expression en fonction de $\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$ (3.27) et au membre de droite son expression en fonction de $\frac{\partial S}{\partial t}$ (3.25), on arrive à l'équation du télégraphe

$$\frac{\partial}{\partial t} S(x, t) = \frac{-1}{2\lambda} \frac{\partial^2}{\partial t^2} S(x, t) + \frac{\gamma^2}{2\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x^2} S(x, t). \quad (3.29)$$

L'équation du télégraphe est en réalité une équation hyperbolique, ce qui correspond parfaitement à l'hypothèse fondamentale de déplacement à vitesse finie. Dans le modèle (3.29), les individus possèdent d'autant plus d'inertie que le taux λ est petit, et ils "résistent" alors d'autant mieux aux changements d'orientation. Une comparaison du modèle de diffusion pure et de l'équation du télégraphe a été faite par E.E. Holmes (1993).

Modèle de Mogilner et Edelstein-Keshet

Mogilner et Edelstein-Keshet (1999) considèrent le modèle général suivant :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(\rho) \frac{\partial}{\partial x} \rho \right] - \frac{\partial}{\partial x} [V(\rho) \rho],$$

où, la vitesse du mouvement advectif est de la forme

$$V(\rho) = a_e \rho + (A_a - A_r \rho) \int_{x-r}^{x+r} K_0(x-x') \rho(x', t) dx'. \quad (3.30)$$

La vitesse dépend de la densité de population. La dépendance est nonlinéaire, et est combinaison d'effets locaux et non locaux. Le terme non local représente l'effet moyen produit par la population située dans un voisinage d'un individu donné. Ce terme est multiplié par la quantité $(A_a - A_r \rho)$ qui marque la nature attractive ou répulsive de l'effet non local selon que la densité en x est inférieure ou supérieure à une valeur seuil.

Les coefficients positifs A_a et A_r désignent respectivement l'attraction et la répulsion entre les individus du banc, et a_e est le coefficient du terme local. Les dimensions sont : $[a_e]$, $[A_a]$ =vitesse/densité, $[A_r]$ =vitesse/densité². Le noyau d'agrégation K_0 est une fonction impaire traduisant la force d'interaction entre les individus ; K_0 est défini par

$$K_0(y) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{2}r\right) \text{sign}(y) & -r \leq y \leq r \\ 0 & |y| > r. \end{cases}$$

Le terme de répulsion est non-linéaire, i.e. proportionnel au produit du facteur non-local et de la densité locale. Cela signifie que, quand la densité locale est faible, il n'y a presque pas de répulsion, alors que la répulsion devient plus importante que l'attraction quand la densité locale augmente. Si la densité locale est égale à $\bar{\rho} = \frac{A_a}{A_r}$, alors il y a un équilibre entre l'attraction et la répulsion et les termes non-locaux disparaissent dans l'expression. Mogilner et Edelstein-Keshet, (1999) ont montré que pour obtenir un profil réaliste (i.e., densité stable au centre, nette rupture de densité sur les marges), la dépendance en la densité de la répulsion entre individus doit être plus forte que celle de leur attraction mutuelle.

En l'absence de diffusion, $D = 0$, Mogilner et Edelstein-Keshet (1999) ont aussi montré

l'existence de solutions du type "front d'onde". Une telle solution s'écrit sous la forme

$$\rho(x, t) = \rho(x - tV_{drift}) = \bar{\rho}H_L(x - tV_{drift}), \quad (3.31)$$

où, $H_L(x - tV_{drift})$ est une bande rectangulaire "rectangular pulse" :

$$H_L(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1, & 0 \leq y \leq L \\ 0, & y > L. \end{cases}$$

On vérifie sans peine que pour qu'une fonction de la forme (3.31) soit solution, il faut que, son amplitude, $\bar{\rho}$ soit donnée par

$$\bar{\rho} = \frac{A_a}{A_r},$$

et que la vitesse de la bande, V_{drift} soit constante,

$$V_{drift} = a_e \bar{\rho} = a_e \frac{A_a}{A_r}.$$

La largeur du banc est alors $L = \frac{N}{\bar{\rho}}$. Mogilner et Edelstein-Keshet (1999) établissent dans ces conditions qu'à une vitesse constante $a_e \frac{A_a}{A_r}$ se superpose un déplacement du banc conforme aux contraintes précédemment définies, à condition que la diffusion demeure suffisamment faible.

3.2.2 Modèles d'alignement

Les modèles d'alignement ont leur origine en biologie cellulaire. On peut citer par exemple les travaux de Edelstein-Keshet *et al.*, (1990, 1995, 1996) ; Geigant *et al.*, (1999) et Grunbaum (1998). Dans ces modèles, la distribution spatiale est homogène et le mouvement dans l'espace est négligeable (excepté dans le modèle de Mogilner *et al.*, 1996). Cette

simplification est justifiée si l'échelle du déplacement dans l'espace est négligeable par rapport à celle des mouvements de rotation des individus autour de leur centre de gravité. Ces modèles décrivent la dynamique de la distribution angulaire de cellules en interaction (ou autres types d'individus ou objets) Mogilner *et al.*, 1996 et Edelstein-Keshet, Ermentrout et Mogilner (1990, 1995, 1996). Nous distinguons trois types de modèles :

**Modèles du type I* : dans ces modèles, deux classes de cellules ont été considérées : cellules libres et cellules fixées. On utilise le terme de particule libre pour indiquer que la particule est susceptible de répondre à l'action d'une force (produite par l'environnement ou d'autres particules). Elle est fixée dans le cas contraire. On note $C(\theta, t)$, $P(\theta, t)$ la densité de cellules libres (respectivement fixées) faisant à l'instant t , un angle θ avec un axe privilégié. Quand une cellule libre d'angle θ interagit avec une autre cellule d'angle θ' , elle peut soit s'aligner avec elle, soit garder sa direction. La probabilité d'alignement dépend de $\theta' - \theta$. On note : γ , le taux de dissociation des cellules fixées en cellules libres ; $\beta_i (i = 1, 2)$, la force du taux d'alignement pour les cellules P , respectivement pour les cellules C ; ε le paramètre de rotation aléatoire des cellules libres. Les variations des flux de C et de P sont régies par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P(\theta, t) &= \beta_1 CK * C + \beta_2 PK * C - \gamma P, \\ \frac{\partial}{\partial t}C(\theta, t) &= \varepsilon \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} - \beta_1 CK * C - \beta_2 PK * C + \gamma P.\end{aligned}$$

$\beta_1 C(K * C)$ désigne le taux de fixation des cellules libres par interaction avec d'autres cellules libres et $-\beta_2 P(K * C)$ le taux de fixation des cellules libres par interaction avec les cellules fixées. La fonction noyau K est strictement positive, paire et atteint son maximum en $\theta = 0$. La notation $*$ représente la convolution sur l'espace des fonctions périodiques, de

période 2π :

$$(f * g)(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \theta')g(\theta') d\theta'.$$

**Modèles du type II* : On ne considère ici qu'une seule catégorie de cellules, représentée par la fonction de densité $C(\theta, t)$. L'équation du modèle dans ce cas est

$$\frac{\partial}{\partial t} C(\theta, t) = \varepsilon \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} - \frac{\partial}{\partial \theta} [C(W * C)]. \quad (3.32)$$

On suppose que W est une fonction impaire, $W(0) = W(\pi) = 0$ et

$$W(\theta) \begin{cases} < 0 \text{ si } 0 < \theta < \pi \\ > 0 \text{ si } -\pi < \theta < 0. \end{cases}$$

L'équation (3.32) décrit un champ d'attraction vers les concentrations les plus élevées.

**Modèles du type III* : ces modèles peuvent être vus comme une simplification de modèles du type II; on néglige les interactions de nature locale et la variation de l'orientation est instantanée. Comme dans les modèles de type II, on ne considère qu'une seule densité C .

La dynamique de $C(\theta, t)$ est régie par l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} C(\theta, t) = \varepsilon \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} + C(Q(C) * C), \quad (3.33)$$

où

$$Q(C)(\theta, \theta') = L(C(\theta) - C(\theta'))G(\theta - \theta').$$

Le noyau de convolution est le produit de deux fonctions. Dans les trois types de modèles, deux processus opposés sont combinés : le premier est une agitation, et le second est un champ moyen attractif dirigé par un gradient de densité croissante. Pour ε ($\varepsilon > 0$) inférieur à une valeur seuil, les modèles de types I et III ont des caractéristiques communes : un

nombre de pics de directions fixes et de grande amplitude ont été observés ; ce comportement contraste avec celui des modèles de type II où initialement plusieurs pics d'orientation apparaissent puis convergent graduellement pour former un seul pic (les individus prennent la même direction).

Une extension de ces modèles, i.e., introduisant l'espace, a été proposée, par exemple, dans un travail de (Mogilner *et al.*, 1996). Nous allons présenter l'extension du modèle de type II. Le lecteur peut consulter le travail de (Mogilner *et al.*, 1996) pour plus de détails. On définit par $C(r, \theta, t)$ la densité de particules ayant à l'instant t , la position r , et faisant l'angle θ par rapport à un axe fixe. ε_i ($= 1, 2$) représente le paramètre de diffusion par rapport à l'espace (respectivement) par rapport à l'angle. β est le taux d'alignement. K définit un opérateur linéaire de $L^1(\mathbb{R} \times [0, 2\pi])$ dans $L^1(\mathbb{R} \times [0, 2\pi])$:

$$K(\Phi)(r, \theta) = (K * \Phi)(r, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' \int_D K(r' - r, \theta', \theta) C(r', \theta') dr'.$$

Dans Mogilner *et al.*, (1996), le noyau $K(r' - r, \theta', \theta)$ est de la forme :

$$K(r' - r, \theta', \theta) = K_1(r' - r)K_2(\theta' - \theta).$$

Il est naturel de supposer que la force des interactions des particules en interaction diminue quand la distance mutuelle augmente. D'où le choix fait par Mogilner *et al.*, (1996)

$$K_1(r) = \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right).$$

Sous ces hypothèses, (3.32) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} C(r, \theta, t) = \varepsilon_1 \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[C \frac{\partial}{\partial \theta} (W * C) \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left[C \frac{\partial}{\partial r} (W * C) \right]. \quad (3.34)$$

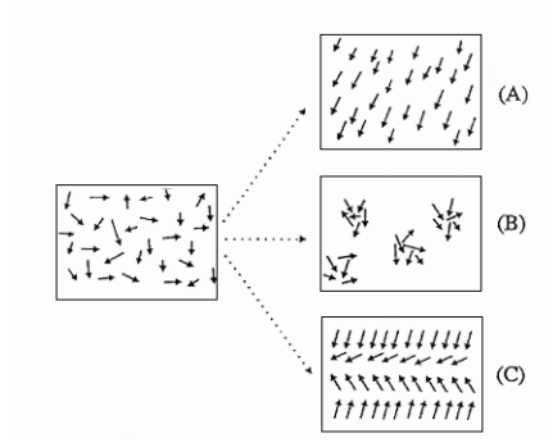


FIG. 3.10: *Initialement les positions et orientations sont aléatoirement distribuées. Influence des paramètres ε_1 et ε_2 sur la dynamique des individus.*

Dans ce modèle, les termes non-linéaires décrivent les mécanismes d'agrégation et d'alignement ; à l'inverse, les termes de diffusion traduisent la dispersion des particules et introduisent une perturbation dans leur ordre et dans leur organisation. En étudiant l'équation (3.34), trois cas se présentent suivant l'intensité des paramètres ε_1 et ε_2 (*Figure 3.10*) :

- i) $\varepsilon_1 < \bar{\varepsilon}_1$ ($\bar{\varepsilon}_1$ une valeur seuil), un patron d'orientation est observé et la distribution spatiale reste homogène (i.e., les particules s'alignent mais sans s'agréger). (scénario A).
- ii) $\varepsilon_1 > \bar{\varepsilon}_1$ et $\varepsilon_2 < \bar{\varepsilon}_2$ ($\bar{\varepsilon}_2$ une valeur seuil) : formation des "shoals" (genre essaims) c'est-à-dire formation des groupes sans alignement. (scénario B).
- iii) $\varepsilon_1 < \bar{\varepsilon}_1$ et $\varepsilon_2 < \bar{\varepsilon}_2$, il y a formation de patches de particules alignées. (scénario C)

3.3 Conclusion

Le phénomène des groupements de particules et les mécanismes d'alignement suscitent actuellement un grand intérêt dans plusieurs disciplines, et notamment en écologie. Ce chapitre est une revue des travaux réalisés sur la modélisation de ce phénomène. Nous

avons illustré par quelques exemples les questions abordées et nous avons aussi montré la nécessité d'intégrer ce phénomène à des modèles de dynamique de populations. Certains de ces travaux nous aident à comprendre nos résultats. C'est pour cela nous les citons.

Dans notre travail, nous nous sommes intéressés au phénomène d'alignement dans un banc de poissons. Le modèle mis en oeuvre pour l'étude du phénomène d'alignement est une modification, une généralisation, d'un modèle proposé initialement par D.Grünbaum (1998). Nous présentons ce modèle dans le chapitre suivant. L'extension a porté sur les coefficients du modèle qui, dans le travail de D.Grünbaum, sont supposés constants : nous avons introduit une dépendance par rapport au paramètre de structure qui est l'angle de la ligne du corps du poisson avec une orientation fixe. Cette dépendance permet de "pondérer" la perception par le poisson des orientations différentes de la sienne, en accordant un poids prépondérant aux orientations "voisines". Une caractéristique commune entre ces modèles d'alignement est que dans ces modèles deux processus opposés sont représentés : le premier est une agitation, et le second est un champ moyen attractif dirigé par un gradient de densité croissante et qui est représenté par le produit du gradient par un terme de convolution. Le but de ces modèles continus d'alignement était d'abord de montrer analytiquement l'existence de la transition de phase entre un état désordonné et un état ordonné.

Deuxième partie

Analyse mathématique¹

¹Le travail présenté dans les deux chapitres suivants, est reproduit d'un article publié dans le *Journal of Differential Equations*, 188(2003) 406 – 446.

Dans cette partie, on s'est intéressé au modèle d'orientation animale. Il représente l'arrangement d'un large groupe d'individus, un banc de poissons, suivant une variable de structure θ . La variable θ représente l'angle que fait le corps du poisson avec un axe privilégié. On suppose que les individus sont disposés dans un volume, à des niveaux différents. La variable d'état du problème est $u(\theta, t)$ qui, pour chaque t , est une densité de probabilité en θ . On doit donc veiller au respect, à tout instant, de la condition

$$\int_0^{2\pi} u(\theta, t) d\theta = 1.$$

L'équation principale du modèle est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(\theta, t) &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (D(\theta)u(\theta, t)) \\ &\quad - \beta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(u(\theta, t) \left[\int_{\theta}^{\theta+\pi} F(\theta')u(\theta', t) d\theta' - \int_{\theta-\pi}^{\theta} F(\theta')u(\theta', t) d\theta' \right] \right). \end{aligned}$$

Le terme de diffusion $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (D(\theta)u(\theta, t))$ peut se décomposer en deux termes :

$\frac{\partial}{\partial \theta} (D(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} u(\theta, t))$ représentant la dispersion de Fick et pourrait s'expliquer par une difficulté à trouver la bonne orientation.

$\frac{\partial}{\partial \theta} (D'(\theta)u(\theta, t))$ est le terme d'advection induit par l'environnement.

Le deuxième terme du modèle dépendant en la densité est un terme de transport. Les poissons sont donc transportés suivant le champ

$$\left[\int_{\theta}^{\theta+\pi} F(\theta')u(\theta', t) d\theta' - \int_{\theta-\pi}^{\theta} F(\theta')u(\theta', t) d\theta' \right].$$

$\beta \int_{\theta}^{\theta+\pi} F(\theta')u(\theta', t) d\theta'$: champ d'attraction créée par les individus qui sont sur la gauche,
 $\beta \int_{\theta-\pi}^{\theta} F(\theta')u(\theta', t) d\theta'$: champ d'attraction créée par les individus qui sont sur la droite.

Chaque poisson fait le compte des individus entre θ et $\theta + \pi$ et les individus entre $\theta - \pi$ et

θ . Cette quantité est pondérée par $F(\theta)$; fonction du poids de l'environnement, la viqueur avec laquelle compter ces voisins. On suppose que D et F sont 2π -périodiques. En fin, la probabilité est périodique en θ , de période 2π , ce qui se traduit ainsi

$$u(\theta + 2\pi, t) = u(\theta, t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(\theta + 2\pi, t) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(\theta, t).$$

Les résultats mathématiques sont développés dans les deux chapitres suivants qui font l'objet d'un travail publié dans un journal de mathématique (Journal of Differential Equations, Adiou et al, 2003). Les deux résultats essentiels sont :

1) La justification rigoureuse de la possibilité de calculer les états successifs en partant d'un état initial quelconque (en termes mathématiques, nous avons montré que le problème de Cauchy est «bien posé»). La présence du terme quasi-linéaire dans le modèle, complique son étude mathématique. Pour l'existence de solutions nous avons utilisé la méthode des approximations successives dans un espace fonctionnel convenable.

2) La justification et la détermination de l'alignement quand le facteur de correction (ou, d'apprentissage) β de la population atteint puis dépasse une valeur seuil. Dans cette étude, nous avons mis en évidence le rôle du paramètre d'alignement $\lambda = \frac{\beta}{d}$. Quand ce paramètre est progressivement augmenté depuis zéro, on a d'abord la situation où les poissons s'orientent au hasard (la force aléatoire domine); puis, lorsque λ dépasse un certain seuil : $\lambda_0 = \frac{\pi}{2}$ un (pattern) d'orientation apparaît, qui se précise quand on augmente encore le paramètre (la force comportementale domine).

Chapitre 4

Problème de Cauchy

4.1 Introduction

In this paper, we perform the analysis of a model of animal orientation. The model is close to one discussed by Grunbaum in [41]. It represents the arrangement of a large group of individuals, a fish school for example, according to a structuring variable which is the angle made by the oriented axis associated to any given individual (from tail to head), supposedly lying in horizontal position, with a fixed horizontal oriented axis. The fixed oriented axis may be, for example, the direction of the gradient of temperature, or generally it is a direction which a single individual would tend to follow, when looking for a more favorable environment. The problem is that the individual is not alone, it is surrounded by many others, and may have a lower perception of the environmental cues; this is the price to be paid for being in a group. But, it counts on the group to help it find its way towards a better environment. A standing hypothesis of the model is that the group is very big and, homogeneous at some scale so that the state variable will be the proportion of individuals,

per volume unit, having a certain angle orientation. The scale defined by the volume unit is a piece of volume within which all individuals can see each other's orientation. To be more specific, some definitions and notations have to be introduced. Throughout the paper, the variable θ represents the angle made by the tail-to-head orientation with the fixed environmental gradient, and the population is described and structured by the proportion density function at time t , $u(\theta, t)$: that is to say, for any θ_1, θ_2 , with $0 \leq \theta_2 - \theta_1 < 2\pi$,

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} u(\theta, t) d\theta$$

is the proportion of the population (per volume unit) which, at time t , points in one of the directions θ of the interval $[\theta_1, \theta_2]$. Clearly, $u(\theta, t)$ must be periodic in θ , with period 2π .

The problem to be investigated in section 2 of the paper, designated as (*CP*) (for Cauchy problem), is made up of the three equations (4.1)-(4.2)-(4.3) stated next

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(\theta, t) &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (D(\theta)u(\theta, t)) \\ &- \beta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(u(\theta, t) \left[\int_{\theta}^{\theta+\pi} F(\theta')u(\theta', t) d\theta' - \int_{\theta-\pi}^{\theta} F(\theta')u(\theta', t) d\theta' \right] \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

for $(\theta, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$. The functions $D(\theta)$ and $F(\theta)$ are a.e. positive and periodic with period 2π . Further properties of these functions will be stated and discussed next. The following equations specify the periodicity in θ ,

$$u(\theta, t) = u(\theta + 2\pi, t), \quad \frac{\partial}{\partial \theta} u(\theta, t) = \frac{\partial}{\partial \theta} u(\theta + 2\pi, t), \quad \text{on } (0, \infty), \quad (4.2)$$

and the initial condition

$$u(\theta, 0) = u_0(\theta), \quad \text{in } (0, 2\pi). \quad (4.3)$$

The above conditions together with the periodicity of the coefficients allow us to restrict the study of the problem on the interval $[0, 2\pi]$ and extend the solution to the whole real

axis by periodicity.

Let us now discuss the model. In order to understand the rationale underlying such a model, it is necessary to keep in mind that the population is so crowded that any individual movement, even turning around its center of gravity, may impact on other individuals around. In such a world, it is best to stay “parallel”. But being parallel to a bunch of individuals around means following these individuals, and there is a risk associated with this. An orientation analog of the avoidance mechanism leads then to a Fickian dispersion or repulsion mechanism contributing to the flux by a quantity proportional to the gradient of concentration of the population. Opposed to this repulsive effect are two other mechanisms : the first one is entailed by some perception of the environment, it adds up to the flux in proportion to some gradient of favorability ; the second one is the analog of a gregarious effect, individuals tend to adopt the dominant orientation . It is modeled by the second member of the right hand side of equation (4.1) . We will come back to it after we discuss in a little more detail the first two effects. These are accounted for in the first member of the right hand side of equation (4.1) . To see this, let us drop for a moment the time dependence in this member. We may write it as

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(D(\theta)u(\theta)) = \frac{d}{d\theta}(D(\theta)\frac{d}{d\theta}u(\theta)) + \frac{d}{d\theta}(D'(\theta)u(\theta)).$$

Therein, $\frac{d}{d\theta}(D(\theta)\frac{d}{d\theta}u(\theta))$ is the (Fickian) dispersive term and $-\frac{d}{d\theta}(D'(\theta)u(\theta))$ is the environmental-induced advection. While there is no fundamental reason for these two distinct processes to be modelled by a single function $D(\theta)$, it may be the case that it is so : for example, if the Fickian coefficient is approximately constant, large compared to the environment coefficient, D may be defined as the sum of both. This is the view taken here, $D(\theta)$ will be assumed in

the form

$$D(\theta) = D_0 + D_1 f(\theta),$$

with D_0 and D_1 , positive constants, D_1 suitably smaller than D_0 , f positive, bounded and 2π -periodic, so that D be far from 0 and ∞ . For simplicity, we also assume that f is in $W^{2,\infty}(0, 2\pi)$, or equivalently, the same property for D . On occasion, we will use such a weighted scalar product with D as a weight

$$\langle \varphi, \psi \rangle_D = \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \psi(\theta) D(\theta) d\theta \quad (4.4)$$

The notations $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$ and $\|\cdot\|_D$ will be used accordingly. With the assumptions on D , the underlying Hilbert space is the standard space $L^2(0, 2\pi) =_{\text{def}} X$. The notations $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and $\|\cdot\|$ correspond to the usual scalar product and its associated norm in X . We now turn to the second term in the right hand side of equation (4.1). For notational purposes, we define the operator g_F as follows

$$g_F(\varphi)(\theta) = \int_{\theta}^{\theta+\pi} F(\theta') \varphi(\theta') d\theta' - \int_{\theta-\pi}^{\theta} F(\theta') \varphi(\theta') d\theta', \quad (4.5)$$

g_F is well defined as soon as F is a measurable, bounded function. We also assume that F is continuous. It is then straightforward to check that g_F sends 2π -periodic functions into themselves. One can also easily check that in terms of the weighted scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$, it holds that

$$\langle g_F(\varphi), \psi \rangle_F = - \langle \varphi, g_F(\psi) \rangle_F \quad (4.6)$$

that is, g_F is antisymmetric in the space of 2π -periodic functions endowed with this weighted (not necessarily definite) scalar product. If, in particular, we take $F = 1$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ is just the

usual scalar product \langle, \rangle and we have

$$(g_1)^* = -g_1. \quad (4.7)$$

Evidently, $g_1(1) = 0$, so using (4.6) with $\psi = 1$, we have, for each 2π -periodic function φ ,

$$\int_0^{2\pi} g_1(\varphi)(\theta) d\theta = 0. \quad (4.8)$$

The interpretation of g_F is the following : for each θ , the first integral on the right hand side of (4.5) is the weighted integral of the population (in the volume unit) whose orientation is on the ‘left’ of θ , and the second one is, accordingly, the weighted integral of the population whose orientation is on the ‘right’ of θ . So, g_F gives the sign of the rate of change of the orientation as a result of gregarious behavior, combined with an environment-induced preference modeled by $F(\theta)$. If $F = 1$, the integrals are just evaluating the proportions of individuals whose orientation is on the ‘left’ of θ and on the ‘right’ of θ , and the effect modelled by g_1 is that individuals will tend to turn ‘right’ or ‘left’ dependent upon whether $g_1 < 0$ or > 0 . The parameter β in front of the integral can be viewed as an intensity factor which sets up the relative importance of the gregarious behavior compared to the other factors.

Our goal in this paper is to perform an analytic study of (CP) . Two aspects have to be considered :

- 1) Existence of solutions, that is, the Cauchy problem associated to the equation.

This is a quasilinear problem with nonlinearities in the first order term, which can be

represented as an abstract Cauchy problem,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + B[D'u(t) - \beta u(t)g_F(u(t))] \\ u(0) = u_0 \in X \end{cases} \quad (4.9)$$

with $u(t)$ used for $u(., t)$. The operator $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ is defined by

$$\begin{aligned} Aw &= \frac{d}{d\theta} \left(D(\cdot) \frac{d}{d\theta} \right) w, \\ \mathcal{D}(A) &= \{w \in H^2(0, 2\pi) : w(0) = w(2\pi) \text{ and } w'(0) = w'(2\pi)\}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

and the operator $B : \mathcal{D}(B) \subset X \rightarrow X$ by

$$\begin{aligned} Bw &= \frac{d}{d\theta} w, \\ \mathcal{D}(B) &= \{w \in H^1(0, 2\pi) : w(0) = w(2\pi)\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

$H^1(0, 2\pi)$ and $H^2(0, 2\pi)$ denote usual Sobolev functions spaces [48]. $\mathcal{D}(B)$ (resp. $\mathcal{D}(A)$) can be identified to the subspace, in $H^1_{loc}(\mathbb{R})$, of the 2π -periodic functions, resp. the subspace, in $H^2_{loc}(\mathbb{R})$, of the 2π -periodic functions. Throughout the paper, we will use the Banach space structure endowed to $\mathcal{D}(B)$ by the graph norm

$$|\phi|_{\mathcal{D}(B)} = \|\phi\| + \left\| \frac{d\phi}{d\theta} \right\|$$

We will also use the well known fact that $\mathcal{D}(B)$ imbeds continuously in the space of continuous functions, with

$$|v|_{\infty} \leq \frac{4}{3}\pi^{3/2} |v|_{\mathcal{D}(B)}, \quad \forall v \in \mathcal{D}(B). \quad (4.12)$$

We point out that the operator A does not commute with B (unless D is constant); this complicates the treatment of the problem (see also remark at the end of section 2). However,

the following easily derived formula relating A and B will be useful

$$\langle Bu, DBu \rangle = -\langle u, Au \rangle, \forall u \in \mathcal{D}(A). \quad (4.13)$$

The main existence result will be derived using successive approximations in a space of continuous functions from some suitable interval $[0, t_0]$ (where $t_0 > 0$ will be chosen later on) into $\mathcal{D}(B)$. On occasion, we will use the notation $Y = C([0, t_0], \mathcal{D}(B))$. A crucial, while obvious, fact, when handling the nonlinearity, is that $g_F : \mathcal{D}(B) \rightarrow \mathcal{D}(B)$, continuously, so there exists a constant δ , so that

$$|g_F(\phi)|_{\mathcal{D}(B)} \leq \delta |\phi|_{\mathcal{D}(B)}, \forall \phi \in \mathcal{D}(B). \quad (4.14)$$

We will also prove a regularity result, namely : if $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, then the solution is classical. Global existence fails in many nonlinear situations. It holds here for nonnegative solutions. The fact, mentioned earlier in the introduction, that $u(\theta, t)$ is indeed a proportion, namely, that

$$u(\tilde{\theta}, t) \geq 0 \text{ and } \int_{\tilde{\theta}}^{\tilde{\theta}+2\pi} u(\theta, t) d\theta = 1, \forall \tilde{\theta}, \forall t \geq 0 \quad (4.15)$$

will be shown to hold when the same assumptions are made on $u_0 : u_0(\theta) \geq 0$ and $\int_0^{2\pi} u_0(\theta) d\theta = 1, \forall \theta$ (theorem 2.1, theorem 2.3).

2) Asymptotic behavior and existence of a stable steady state. We envision the situation as follows : below a certain threshold value of the gregarious behavior intensity β , the dispersion dominates and the population organizes itself asymptotically as if there were no gregarism. The solution then should tend to a limit, a steady state. For example, if we assume that $D(\theta) = \overline{D}$ (i.e., the mean value of $D(\cdot)$), that is $\overline{D} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D(\theta) d\theta$ and

$F(\theta) = 1$, $\bar{U}(\theta) = \frac{1}{2\pi}$ is the only trivial steady-state, that is, an individual's orientation is equally distributed in all directions. One can see that this solution exists for all values of β , and is stable for β small enough, but one suspects that past some β , stability is lost, and other steady-states arise. This is when the action of the repulsion moderated by the interplay of environment and gregarism produces another structure. Although the program seems reasonable, it involves a number of technical steps which make it difficult to complete in the most general situation. As an illustration of the plausibility of the above-mentioned scenario, a particular example has been considered. In order to describe what is going on in more detail, we first restrict ourselves to the case when $D(\theta) = \bar{D} = \text{constant}$. We then perform the study in terms of the parameter $\lambda = \frac{\beta}{\bar{D}}$. We show that the trivial equilibrium $\bar{U} = \frac{1}{2\pi}$ is asymptotically stable if $\lambda < \frac{\pi}{2}$ and unstable if $\lambda > \frac{\pi}{2}$. So, the question arises : How is stability or instability affected at $\lambda = \frac{\pi}{2} = \lambda_0$? Using a bifurcation theorem (see theorem 1.7 [19]), we prove that (λ_0, \bar{U}) is an odd type ([19]) bifurcation point. Therefore, a branch of nontrivial steady-state (λ, U) branches off from this point. We prove that the branch is supercritical and the solutions on the branch near $\lambda = \lambda_0$ are stable. Near $\lambda = \lambda_0$, the bifurcated solutions read

$$U(\theta) = \frac{1}{2\pi} + C \cos \theta + o(C)$$

for some constant $C = C(\lambda) > 0$. In terms of the model, this means that when the ratio λ exceeds some threshold value λ_0 , then the group starts to acquire a distinctive shape with one dominant direction. We then briefly justify the fact that the local branch can be extended to a larger branch which is unbounded in λ , so that is, for each $\lambda > \lambda_0$, there exists a nontrivial steady-state.

The organization of the paper is as follows : section 2 deals with existence, uniqueness and positivity ; section 3 (chapter 5) is devoted to the study of the stability of the trivial steady-state as a function of the parameter β and the onset of a branch of non trivial steady-states, as well as the computation of some quantities (the average angular orientation and the dispersion about it). Section 4 (chapter 5) is the conclusion which, in particular, has some comments about the interpretation of the result in terms of spatial location and pattern : it may be useful to anticipate these and warn the reader that there is no connection between space and pattern, more precisely space has not been accounted for in the model, thus, unsurprisingly, is not playing any role in our results.

Finally, a number of notations and assumptions that have been stated in the introduction will be used throughout the text without further notice.

4.2 Existence, unicité et positivité

4.2.1 Préliminaires

The system (4.1)-(4.2)-(4.3)-(4.15) will be studied via the theory of operator semigroups. For that, let us recall standard definitions and some relevant results of the semigroup theory. We refer to Pazy [83], Engel and Nagel [30], Henry [48] or Friedman [36] for further information on this subject.

Let X be a Banach space and let \mathcal{A} be a closed linear operator, with a dense domain $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. We consider the inhomogeneous initial value problem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = \mathcal{A}u(t) + f(t) & t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (4.16)$$

with $u_0 \in X$ and $f \in L^1(0, T; X)$.

Definition 1 Suppose \mathcal{A} is the infinitesimal generator of a C^0 -semigroup $T(t)$. Then

1) $u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$ is called a mild solution of the Cauchy problem (4.16).

2) u is called a classical solution of (4.16) if u is continuous on $[0, \infty)$, continuously differentiable on $]0, \infty[$, $u(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $t > 0$ and u satisfies equation (4.16).

We now turn back to (CP).

Proposition 2 The operator A defined by (4.10) is the generator of an analytic semigroup of contractions in X , $(T(t))_{t \geq 0}$, compact for $t > 0$. The restrictions $T(t)|_{\mathcal{D}(B)}$ send $\mathcal{D}(B)$ into itself and are uniformly bounded in $\mathcal{D}(B)$ (that is, there exists $C_1 \geq 0$, such that, $|T(t)|_{\mathcal{D}(B)}|_{\mathcal{D}(B)} \leq C_1$, for $t \geq 0$).

Proof. The first part is standard. We include a proof for completeness. A has a dense domain, since $C_c^\infty([0, 2\pi]) \subset \mathcal{D}(A)$ and is dense in X . It is clear that if u and v are in $\mathcal{D}(A)$,

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$$

via integration by parts. Hence A is symmetric. One can also easily show, using a standard argument [30] that $R(I + A) = X$. So, A is symmetric, maximal and has a dense domain, which implies that A is self-adjoint. Thus A is the generator of an analytic semigroup $(T(t))_{t \geq 0}$. So $T(t)$ is continuous in the uniform operator topology for $t > 0$. In order to show that $T(t)$ is compact for $t > 0$, it is thus enough, by virtue of theorem 2.3.1 [83], to establish that A has a compact resolvent, which follows from both $\mathcal{D}(A) \subset H^2(0, 2\pi)$ and the compactness of the canonical injection $H^2(0, 2\pi) \hookrightarrow X$.

Let us now prove the second part of the proposition. From $\langle Au, u \rangle \leq 0, \forall u \in \mathcal{D}(A)$, we conclude that $T(t)$ is a family of contractions on the space X . So,

$$\|T(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0. \quad (4.17)$$

To show boundedness in $\mathcal{D}(B)$, it is convenient to represent $T(t)$ in terms of the eigenvalues of A , which we denote $-\omega_j^2$. To each eigenvalue $-\omega_j^2$, an eigenvector ϕ_j is associated and it holds that

$$A\phi = \sum_{j=1}^{\infty} -\omega_j^2 \langle \phi, \phi_j \rangle \phi_j, \quad \phi \in \mathcal{D}(A), \quad (4.18)$$

and

$$T(t)\phi = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\omega_j^2 t} \langle \phi, \phi_j \rangle \phi_j, \quad \phi \in X.$$

Using the weighted inner product, defined by formula (4.4), one can easily check

$$\begin{aligned} \|BT(t)\phi\|_D^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} e^{-2\omega_j^2 t} |\langle \phi, \phi_j \rangle|^2 \|B\phi_j\|_D^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |\langle \phi, \phi_j \rangle|^2 \|B\phi_j\|_D^2 \\ &= \|B\phi\|_D^2, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(B), \end{aligned}$$

which, leads to

$$\|BT(t)\phi\| \leq C_0 |\phi|_{\mathcal{D}(B)}, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(B),$$

(for some constant C_0 independent on ϕ and t). This together with inequality (4.17), leads to

$$|T(t)\phi|_{\mathcal{D}(B)} \leq C_1 |\phi|_{\mathcal{D}(B)}, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(B) \quad (4.19)$$

(for some constant C_1 independent on ϕ and t). This completes the proof of the proposition.

■

We now turn to (CP). The solving of this problem involves two steps : first, one deals with local existence, which is shown to hold under very mild regularity assumptions on the nonlinearity ; next, a noncontinuation principle will be established which will ensure solutions exist on as long a time interval as desired.

To prove local existence of solutions for problem (18), we write it in integral form by using the variation of constants formula

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)B [D'u(s) - \beta u(s)g_F(u(s))] ds. \quad (4.20)$$

4.2.2 Existence locale des solutions

This subsection is concerned with local existence of solutions to the integral equation (4.20). For this purpose, we start by establishing some useful estimates.

Lemma 3 1) *There exists a constant M , such that, for all $u, v \in \mathcal{D}(B)$, we have*

$$\|B[ug_F(u)] - B[v g_F(v)]\| \leq M \max(|u|_{\mathcal{D}(B)}, |v|_{\mathcal{D}(B)}) |u - v|_{\mathcal{D}(B)}.$$

2) *There exists a positive constant Q , such that, for all $u \in \mathcal{D}(B)$, it holds that*

$$\|B[ug_F(u)]\| \leq Q |u|_{\mathcal{D}(B)} \|u\|.$$

3) *There exists a positive constant C , such that, for all $u \in X$, it holds that*

$$\|BT(t)u\| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \|u\|, \forall t > 0. \quad (4.21)$$

Proof. Let $u, v \in \mathcal{D}(B)$. We may write the expression $B[ug_F(u)] - B[v g_F(v)]$ as

$$\begin{aligned} B[ug_F(u)] - B[v g_F(v)] &= B[(u - v)g_F u] + B[v g_F(u - v)] \\ &= B(u - v)g_F u + (u - v)Bg_F u \\ &\quad + Bv g_F(u - v) + vBg_F(u - v). \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} \|B[ug_F(u)] - B[v g_F(v)]\| &\leq \{\|B(u-v)\| + \|u-v\|\} \max(|g_F u|_\infty; |B g_F u|_\infty) \\ &\quad + \{\|Bv\| + \|v\|\} \max(|g_F(u-v)|_\infty; |B g_F(u-v)|_\infty). \end{aligned} \quad (4.22)$$

We now estimate each of the terms of $\max(|g_F u|_\infty; |B g_F u|_\infty)$ and $\max(|g_F(u-v)|_\infty; |B g_F(u-v)|_\infty)$ of the right hand side of (4.22) separately.

As a result of Hölder's inequality, we get

$$|g_F u|_\infty \leq \sqrt{2\pi} |F|_\infty \|u\| \quad \text{and} \quad |g_F(u-v)|_\infty \leq \sqrt{2\pi} |F|_\infty \|u-v\|. \quad (4.23)$$

On the other hand, we have, via the inequality

$$|B g_F u|_\infty \leq 4 |F|_\infty |u|_\infty,$$

combined with (4.12) that

$$|B g_F u|_\infty \leq \frac{16}{3} \pi^{3/2} |F|_\infty |u|_{\mathcal{D}(B)} \quad \text{and} \quad |B g_F(u-v)|_\infty \leq \frac{16}{3} \pi^{3/2} |F|_\infty |u-v|_{\mathcal{D}(B)} \quad (4.24)$$

Then, inequality (4.22) becomes

$$\|B[ug_F(u)] - B[v g_F(v)]\| \leq M \max(|u|_{\mathcal{D}(B)}, |v|_{\mathcal{D}(B)}) |u-v|_{\mathcal{D}(B)}$$

(for some positive constant M independent on u and on v), which is the desired inequality.

2) To achieve the desired inequality (which is a slight improvement, compared to the one just obtained), we write the expression $B[ug_F(u)]$ as

$$B[ug_F(u)] = (Bu)g_F(u) + uB g_F(u),$$

which immediately yields

$$\|B[ug_F(u)]\| \leq \|Bu\| |g_F u|_\infty + \|u\| |Bg_F u|_\infty.$$

From inequalities (4.23) and (4.24), we conclude that there exists a positive constant Q , such that

$$\|B[ug_F(u)]\| \leq Q |u|_{\mathcal{D}(B)} \|u\|, \quad \forall u \in \mathcal{D}(B).$$

3) In view of (4.13), we have

$$\|Bu\|^2 \leq C_1 \|Au\| \|u\|, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A) \quad (4.25)$$

(for some constant C_1 independent on u). Analyticity of the semigroup $T(t)$ implies existence of a constant C_2 such that, for $t > 0$

$$\|AT(t)\| \leq \frac{C_2}{t}. \quad (4.26)$$

Then, it follows via (4.25), combined with (4.26) that

$$\|BT(t)u\|^2 \leq C_1 \frac{C_2}{t} \|T(t)u\| \|u\|, \quad \forall u \in X, \quad \forall t > 0.$$

This together with inequality (4.17), leads to

$$\|BT(t)u\| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \|u\|, \quad \forall u \in X, \quad \forall t > 0, \quad (4.27)$$

(for some constant C independent on u and t). This completes the proof of the lemma. ■

Theorem 4 *For every $R > 0$, there exists $t_0 > 0$, $t_0 = t_0(R)$, such that, for each $u_0 \in \mathcal{B}_{\mathcal{D}(B)}(R)$, (i.e., the ball of radius R centered at 0 of $\mathcal{D}(B)$), the Cauchy problem (4.20) has a unique mild solution u defined on the interval $[0, t_0]$. Moreover, the map $u_0 \rightarrow u$ is Lipschitz continuous from $\mathcal{B}_{\mathcal{D}(B)}(R)$ into Y . Finally, $\int_0^{2\pi} u(\theta, t) d\theta = \int_0^{2\pi} u_0(\theta) d\theta$, for all $t \geq 0$.*

Proof. The approach to be taken in the proof is based on the method of successive approximations. Let $u_0 \in \mathcal{B}_{\mathcal{D}(B)}(R)$ and define a sequence $(u_n)_{n \geq 1}$ by

$$u_{n+1}(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)B [D'u_n(s) - \beta u_n(s)g_F(u_n(s))] ds. \quad (4.28)$$

Assume that the sequence u_n is bounded in Y , namely, that there exist $t_0 > 0$ and γ to be determined later on, such that :

$$|u_n(t)|_{\mathcal{D}(B)} \leq \gamma R, \quad \forall n \geq 1 \text{ and } \forall t \in [0, t_0].$$

We have from (4.28), combined with (4.17), that

$$\begin{aligned} & \|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| \\ & \leq t \sup_{0 \leq s \leq t} [\|B(D'u_n(s) - D'u_{n-1}(s))\| + \|B(\beta u_n(s)g_F(u_n(s)) - \beta u_{n-1}(s)g_F(u_{n-1}(s)))\|], \\ & \forall t \geq 0 \text{ and } n \geq 1. \end{aligned}$$

Denote $L = \max(|D'|_{\infty}, |D''|_{\infty})$, which by the assumptions made in the introduction is finite.

Then, according to part 1) of lemma 3, we have

$$\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| \leq t(L + \beta M \gamma R) \sup_{0 \leq s \leq t} |u_n(s) - u_{n-1}(s)|_{\mathcal{D}(B)}, \quad \forall t \geq 0 \text{ and } n \geq 1.$$

We also have

$$\begin{aligned} & \|B(u_{n+1}(t) - u_n(t))\| \\ & \leq \left\| \int_0^t BT(t-s)B [D'u_n(s) - \beta u_n(s)g_F(u_n(s)) - D'u_{n-1}(s) + \beta u_{n-1}(s)g_F(u_{n-1}(s))] ds \right\|, \\ & \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

which gives, in view of (4.21),

$$\begin{aligned} & \|B(u_{n+1}(t) - u_n(t))\| \\ & \leq \int_0^t \frac{C}{\sqrt{t-s}} \sup_{0 \leq s \leq t} [\|B(D'u_n(s) - D'u_{n-1}(s))\| + \|B(\beta u_n(s)g_F(u_n(s)) - \beta u_{n-1}(s)g_F(u_{n-1}(s)))\|] ds \\ & \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Using part 1) of lemma 3 again, we arrive at

$$\|B(u_{n+1}(t) - u_n(t))\| \leq (\beta M \gamma R + L) 2C\sqrt{t} \sup_{0 \leq s \leq t} |u_n(s) - u_{n-1}(s)|_{\mathcal{D}(B)}.$$

Combining the above two inequalities, we obtain

$$\begin{aligned} & |u_{n+1}(t) - u_n(t)|_{\mathcal{D}(B)} \\ & \leq [(\beta M \gamma R + L) (2C\sqrt{t} + t)] \sup_{0 \leq s \leq t} |u_n(s) - u_{n-1}(s)|_{\mathcal{D}(B)}, \quad \forall t \geq 0 \text{ and } n \geq 1. \end{aligned}$$

Then, by choosing $t_0 > 0$ small enough so that

$$[(\beta M \gamma R + L) (2C\sqrt{t_0} + t_0)] < \frac{1}{2}, \quad (4.29)$$

the sequence $(u_{n+1}(t) - u_n(t))$ is the general term of an absolutely convergent series in Y .

To complete the proof of the theorem, we have to show that the sequence $u_n(t)$ remains bounded in $\mathcal{D}(B)$.

From (4.28), one has

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(t)|_{\mathcal{D}(B)} & \leq \sup_{0 \leq s \leq t_0} |T(s)u_0|_{\mathcal{D}(B)} + \left\| \int_{\tau}^t T(t-s)B[D'u_n(s) - \beta u_n(s)g_F(u_n(s))] ds \right\| \\ & \quad + \left\| B \int_0^t T(t-s)B[D'u_n(s) - \beta u_n(s)g_F(u_n(s))] ds \right\|, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Using this inequality, we will show that one can find $\gamma > 0$ and $t_0 > 0$, so that $|u_n(t)|_{\mathcal{D}(B)} \leq \gamma R$, $\forall t \in [0, t_0]$ and $n \geq 1$. In fact, let us assume that $|u_n(t)|_{\mathcal{D}(B)} \leq \gamma R$, $\forall t \in [0, t_0]$. Then, in view of (4.21), combined with (4.19) and (4.17), we obtain

$$|u_{n+1}(t)|_{\mathcal{D}(B)} \leq C_1 R + [t + 2\sqrt{t}C] (\beta \max \{|g_F u_n(s)|_\infty, |B g_F u_n(s)|_\infty\} + L) \sup_{0 \leq s \leq t} |u_n(s)|_{\mathcal{D}(B)}, \forall t \geq 0.$$

Applying (4.23) and (4.24), we get

$$|u_{n+1}(t)|_{\mathcal{D}(B)} \leq C_1 R + \gamma R [2C\sqrt{t_0} + t_0] \left(\beta \frac{16}{3} \pi^{\frac{3}{2}} |F|_\infty \gamma R + L \right), \forall t \in [0, t_0].$$

Therefore, by choosing $t_0 > 0$ so that (4.29) holds and

$$[2C\sqrt{t_0} + t_0] \left(\beta \frac{16}{3} \pi^{\frac{3}{2}} |F|_\infty \gamma R + L \right) < \frac{1}{2}, \quad (4.30)$$

we arrive at

$$|u_{n+1}(t)|_{\mathcal{D}(B)} \leq C_1 R + \frac{1}{2} \gamma R, \text{ for } t \leq t_0.$$

The inequality will be extended to $n + 1$ if we can choose both γ large enough for

$$C_1 R + \frac{1}{2} \gamma R \leq \gamma R \text{ (which holds as soon as } \gamma \geq 2C_1)$$

and $t_0 > 0$ such that (4.29) and (4.30) hold which, once γ has been chosen, can always be accomplished. So, assuming γ and t_0 been chosen as indicated, the first claim of the proof is proved.

Now, let v be another mild solution of (18) on $[0, t_0]$ with the initial value $v_0 \in \mathcal{B}_{\mathcal{D}(B)}(R)$. From (4.28), combined with (4.17), we have

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u_0 - v_0\| + t_0 \sup_{0 \leq s \leq t_0} [\|B(D'u(s) - D'v(s))\| + \|B(\beta u(s)g_F(u(s)) - \beta v(s)g_F(v(s)))\|], \forall t \in [0, t_0]$$

which gives, in view of part 1) of lemma 3

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u_0 - v_0\| + t_0 (L + \beta M \gamma R) \sup_{0 \leq s \leq t_0} |u(s) - v(s)|_{\mathcal{D}(B)}, \forall t \in [0, t_0].$$

Using (4.21), we obtain

$$\|B(u(t) - v(t))\| \leq \|B(u_0 - v_0)\| + (\beta M \gamma R + L) 2C\sqrt{t_0} \sup_{0 \leq s \leq t_0} |u(s) - v(s)|_{\mathcal{D}(B)}, \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Therefore

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)|_{\mathcal{D}(B)} &\leq |u_0 - v_0|_{\mathcal{D}(B)} \\ &+ [(\beta M \gamma R + L) (2C\sqrt{t_0} + t_0)] \sup_{0 \leq s \leq t_0} |u(s) - v(s)|_{\mathcal{D}(B)}, \quad \forall t \in [0, t_0], \end{aligned}$$

which immediately yields

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq s \leq t_0} |u(s) - v(s)|_{\mathcal{D}(B)} &\leq |u_0 - v_0|_{\mathcal{D}(B)} \\ &+ [(\beta M \gamma R + L) (2C\sqrt{t_0} + t_0)] \sup_{0 \leq s \leq t_0} |u(s) - v(s)|_{\mathcal{D}(B)}. \end{aligned}$$

Then, for $\gamma > 0$ and $t_0 > 0$ chosen as above, we have

$$|u(t) - v(t)|_{\mathcal{D}(B)} \leq |u_0 - v_0|_{\mathcal{D}(B)} + \frac{1}{2} \sup_{0 \leq s \leq t_0} |u(s) - v(s)|_{\mathcal{D}(B)}, \quad \forall t \in [0, t_0].$$

So,

$$|u(t) - v(t)|_{\mathcal{D}(B)} \leq 2|u_0 - v_0|_{\mathcal{D}(B)}, \quad \forall t \in [0, t_0],$$

which yields both the uniqueness of u and the Lipschitz continuity of the map $u_0 \rightarrow u$ in the ball $\mathcal{B}_{\mathcal{D}(B)}(R)$.

Finally, by integration of equation (4.1) on both sides, from 0 to 2π , one can see that

$$\frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} u(\theta, t) d\theta = 0,$$

that is,

$$\int_0^{2\pi} u(\theta, t) d\theta = \int_0^{2\pi} u_0(\theta) d\theta, \quad \text{for all } t \geq 0.$$

This completes the proof of the theorem. ■

4.2.3 Existence globale des solutions

This subsection is concerned with the extension of solutions to the integral equation (4.20). Our first result in this direction is the following theorem.

Theorem 5 *For every $u_0 \in \mathcal{D}(B)$, the abstract Cauchy problem (18) has a unique mild solution on a maximal interval of existence $[0, t_{\max}[$.*

If $t_{\max} < \infty$ then

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} \sup |u(t)|_{\mathcal{D}(B)} = \infty.$$

Proof. First, we note that a mild solution of equation (18) defined on a closed interval $[0, \tau]$ can be extended to a larger interval $[0, \tau + \delta]$, with $\delta > 0$, by defining $u(t)$ on $[\tau, \tau + \delta]$, as $u(t) = w(t)$, where $w(t)$ is the solution of the integral equation

$$w(t) = T(t - \tau)u(\tau) + \int_{\tau}^t T(t - s)B [D'w(s) - \beta w(s)g_F(w(s))] ds.$$

Existence and uniqueness of solutions on a maximal interval of existence follow from the noncontinuation principle; namely letting $[0, t_{\max})$ be the maximal interval of existence to which the mild solution $u(\cdot)$ of Cauchy problem (18) can be extended, we have the following alternative :

either $t_{\max} = \infty$, or $t_{\max} < \infty$ and

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} \sup |u(t)|_{\mathcal{D}(B)} = \infty.$$

We will prove the second part of the alternative

$$\text{if } t_{\max} < \infty \text{ then } \lim_{t \rightarrow t_{\max}} \sup |u(t)|_{\mathcal{D}(B)} = \infty.$$

The proof is done by contradiction. Indeed, if $t_{\max} < \infty$, and $\lim_{t \rightarrow t_{\max}} \sup |u(t)|_{\mathcal{D}(B)} < \infty$, then $|u(t)|_{\mathcal{D}(B)}$ would be uniformly bounded on $[0, t_{\max}[$.

$$\text{Let } N = \sup_{0 \leq s \leq t_{\max}} |D'u(s) - \beta u(s)g_F(u(s))|_{\mathcal{D}(B)}.$$

Given any $\rho > 0$, so that $0 < \rho < t < t' < t_{\max}$, using standard algebra, we obtain

the following inequality :

$$\begin{aligned} |u(t) - u(t')|_{\mathcal{D}(B)} &\leq |T(t)u_0 - T(t')u_0|_{\mathcal{D}(B)} \\ &+ \left| (T(\rho) - T(t' - t + \rho)) \int_0^{t-\rho} T(t-s-\rho)B [D'u(s) - \beta u(s)g_F(u(s))] ds \right|_{\mathcal{D}(B)} \\ &+ \left| \int_{t-\rho}^t (T(t-s) - T(t'-s))B [D'u(s) - \beta u(s)g_F(u(s))] ds \right|_{\mathcal{D}(B)} \\ &+ \left| \int_t^{t'} T(t'-s)B [D'u(s) - \beta u(s)g_F(u(s))] ds \right|_{\mathcal{D}(B)}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

We now estimate each of the terms of the right hand side of (4.31) separately. In view of

(4.21), there exists a constant $C > 0$, such that $|T(t)u|_{\mathcal{D}(B)} \leq \frac{C}{\sqrt{t}} |u|_{\mathcal{D}(B)}$, $0 < t < t_{\max}$.

Therefore,

$$\begin{aligned} \left| (T(\rho) - T(t' - t + \rho)) \int_0^{t-\rho} T(t-s-\rho)B [D'u(s) - \beta u(s)g_F(u(s))] ds \right|_{\mathcal{D}(B)} \\ \leq \sqrt{t-\rho}CN |(T(\rho) - T(t' - t + \rho))|_{\mathcal{D}(B)}, \end{aligned}$$

$$\left| \int_{t-\rho}^t (T(t-s) - T(t'-s))B [D'u(s) - \beta u(s)g_F(u(s))] ds \right|_{\mathcal{D}(B)} \leq 2\sqrt{\rho}CN,$$

and

$$\left| \int_t^{t'} T(t'-s)B [D'u(s) - \beta u(s)g_F(u(s))] ds \right|_{\mathcal{D}(B)} \leq 2NC\sqrt{t'-t}.$$

Then, inequality (4.31) becomes

$$\begin{aligned}
|u(t) - u(t')|_{\mathcal{D}(B)} &\leq |T(t)u_0 - T(t')u_0|_{\mathcal{D}(B)} \\
&+ 2\sqrt{\rho}CN + \sqrt{t - \rho}MN |(T(\rho) - T(t' - t + \rho))|_{\mathcal{D}(B)} \\
&+ 2NC\sqrt{t' - t}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Analyticity of $T(t)$ entails that $t \rightarrow T(t)$ is continuous in the uniform operator topology from $]0, +\infty[$ into $\mathcal{D}(A)$. So, $|T(t)u_0 - T(t')u_0|_{\mathcal{D}(B)} \rightarrow 0$, and $|(T(\rho) - T(t' - t + \rho))|_{\mathcal{D}(B)} \rightarrow 0$ as $t, t' \rightarrow t_{\max}$. Since $0 < \rho < t$ is arbitrary, the right-hand side of (4.32) tends to zero as t, t' tend to t_{\max} . Therefore

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} u(t) \text{ exists (limit in } \mathcal{D}(B)),$$

which, according to the remark made in the beginning of the proof, would entail that the solution can be extended to the right of t_{\max} , in contradiction with the definition of t_{\max} .

This completes the proof of the theorem. ■

Global existence (i.e., the fact that the solutions are defined on the whole of $t > 0$) is established for positive solutions. For that, we will show, the boundedness of the solution $u(t)$ in the $\mathcal{D}(B)$ norm. This property, together with theorem 5, implies that $t_{\max} = \infty$. Prior to this, we will prove that (CP) preserves positiveness, which will be needed in the a priori estimates of the solutions.

Theorem 6 *(CP) preserves positiveness, that is : $u_0 \geq 0$ implies that $u(., t) \geq 0$ for all $t \geq 0$.*

Proof. Let $u(., t)$ be a solution of (CP) with initial value $u_0 \geq 0$; u^- , (resp. u^+) denoting the negative (resp. positive) part of u .

From

$$\int_0^{2\pi} u(\theta, t) d\theta = 1,$$

one has

$$\int_0^{2\pi} u^+(\theta, t) d\theta - \int_0^{2\pi} u^-(\theta, t) d\theta = 1,$$

that is,

$$\left| \int_{\theta}^{\theta+\pi} F(\theta') u(\theta', t) d\theta' - \int_{\theta-\pi}^{\theta} F(\theta') u(\theta', t) d\theta' \right| \leq 2 \|F(\cdot)\|_{\infty} (1 + 2\sqrt{2\pi} \|u^-(\cdot, t)\|). \quad (4.33)$$

Now multiplying (using inner products) both sides of (4.1) by $u^-(\theta, t)$, we have

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} u^-(\theta, t) \frac{\partial}{\partial t} u(\theta, t) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} u^-(\theta, t) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (D(\theta) u(\theta, t)) d\theta \\ & - \beta \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(u(\theta, t) \left[\int_{\theta}^{\theta+\pi} F(\theta') u(\theta', t) d\theta' - \int_{\theta-\pi}^{\theta} F(\theta') u(\theta', t) d\theta' \right] \right) u^-(\theta, t) d\theta. \end{aligned}$$

Using the obvious identity

$$-|u^-(\theta, t)|^2 = u^-(\theta, t)u(\theta, t),$$

and integrating from 0 to 2π , we obtain

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} |u^-(\theta, t)|^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} D(\theta) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} u^-(\theta, t) \right]^2 d\theta \\ & - \int_0^{2\pi} D'(\theta) u(\theta, t) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} u^-(\theta, t) \right] d\theta \\ & + \beta \int_0^{2\pi} u(\theta, t) \left[\int_{\theta}^{\theta+\pi} F(\theta') u(\theta', t) d\theta' - \int_{\theta-\pi}^{\theta} F(\theta') u(\theta', t) d\theta' \right] \frac{\partial}{\partial \theta} u^-(\theta, t) d\theta. \end{aligned}$$

We now have, via the identity,

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2, \quad (4.34)$$

combined with (4.33) that

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left(u(\theta, t) \left[\int_{\theta}^{\theta+\pi} F(\theta') u(\theta', t) d\theta' - \int_{\theta-\pi}^{\theta} F(\theta') u(\theta', t) d\theta' \right] \frac{\partial}{\partial \theta} u^-(\theta, t) \right) d\theta \\ & \leq \frac{4}{\varepsilon} |F(\cdot)|_{\infty}^2 \|u^-(\cdot, t)\|^2 (1 + 2\sqrt{2\pi} \|u^-(\cdot, t)\|)^2 + \varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial \theta} u^-(\cdot, t) \right\|^2. \end{aligned}$$

Moreover, one has via (4.34) and the fact that the functions $D(\cdot)$ and $D'(\cdot)$ in $[0, 2\pi]$ are bounded that

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} D'(\theta) u(\theta, t) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} u^-(\theta, t) \right] d\theta \\ & \leq |D'(\cdot)|_{\infty}^2 \frac{1}{\varepsilon} \|u^-(\cdot, t)\|^2 + \varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial \theta} u^-(\cdot, t) \right\|^2. \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} |u^-(\theta, t)|^2 d\theta & \leq -2 \int_0^{2\pi} D(\theta) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} u^-(\theta, t) \right]^2 d\theta \\ & \quad + |D'(\cdot)|_{\infty}^2 \frac{1}{\varepsilon} \|u^-(\cdot, t)\|^2 + \varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial \theta} u^-(\cdot, t) \right\|^2 \\ & \quad + 4 \frac{\beta}{\varepsilon} |F(\cdot)|_{\infty}^2 (1 + 2\sqrt{2\pi} \|u^-(\cdot, t)\|)^2 \|u^-(\cdot, t)\|^2 + \varepsilon \beta \left\| \frac{\partial}{\partial \theta} u^-(\cdot, t) \right\|^2, \end{aligned}$$

which immediately yields

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} |u^-(\theta, t)|^2 d\theta & \leq (-2D_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon) \left\| \frac{\partial}{\partial \theta} u^-(\cdot, t) \right\|^2 \\ & \quad + |D'(\cdot)|_{\infty}^2 \frac{1}{\varepsilon} \|u^-(\cdot, t)\|^2 \\ & \quad + 4 \frac{\beta}{\varepsilon} |F(\cdot)|_{\infty}^2 (1 + 2\sqrt{2\pi} \|u^-(\cdot, t)\|)^2 \|u^-(\cdot, t)\|^2. \end{aligned} \quad (4.35)$$

By choosing $\varepsilon > 0$ small enough, we can eliminate the term of the right hand side of (4.35)

containing $\frac{\partial}{\partial \theta} u^-(\theta, t)$. We arrive at the differential inequality

$$\frac{d}{dt} \|u^-(\cdot, t)\|^2 \leq L_0 \|u^-(\cdot, t)\|^2 (1 + \|u^-(\cdot, t)\|^2) \quad (4.36)$$

(for some constant L_0 , independent on $u^-(., t)$). Let

$$v(t) = \|u^-(., t)\|^2.$$

Then, inequality (4.36) becomes

$$v'(t) \leq L_0 v(t) (1 + v(t)),$$

so by integration, we get

$$\frac{v(t)}{1 + v(t)} \leq \frac{v(0)}{1 + v(0)} e^{L_0 t},$$

which, with

$$v(0) = 0,$$

yields that

$$v(t) \leq 0, \text{ for all } t > 0.$$

Therefore

$$\|u^-(., t)\| = 0, \text{ for all } t \geq 0,$$

that is, $u(., t) \geq 0$, for all $t \geq 0$, which completes the proof of the theorem. ■

Using the above result, we can give an estimate of the solutions as follows :

Proposition 7 *There exists a function $K : \mathbf{R}^+ \rightarrow]0, +\infty]$, non increasing, such that, if $u(., t)$ is a solution of (CP) with $u_0 \in \mathcal{D}(B)$ and $u_0 \geq 0$, then it holds that $|u(t)|_{\mathcal{D}(B)} \leq K_1(\|u_0\|) |u_0|_{\mathcal{D}(B)}$, for all $t \in [0, K(\|u_0\|)]$, where $K_1(x) = 2[C_1 + \exp(L_1 K(x))]$.*

Proof. The proof is done in two steps. First, we show that the solution is bounded in X norm on each bounded time interval. Then, we prove boundedness in the $\mathcal{D}(B)$ norm, using the result for the X norm.

Multiplying by $u(\theta, t)$ both sides of equation (4.1) and integrating from 0 to 2π , we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} u^2(\theta, t) d\theta &= \int_0^{2\pi} u(\theta, t) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} u(\theta, t) \right) d\theta + \int_0^{2\pi} u(\theta, t) \frac{\partial}{\partial \theta} (D'(\theta) u(\theta, t)) d\theta \\ &+ \beta \int_0^{2\pi} u(\theta, t) \left[\int_{\theta}^{\theta+\pi} F(\sigma) u(\sigma, t) d\sigma - \int_{\theta-\pi}^{\theta} F(\sigma) u(\sigma, t) d\sigma \right] \frac{\partial}{\partial \theta} u(\theta, t) d\theta. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Integrating by parts on the right hand side of (4.37), we get

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} u^2(\theta, t) d\theta &= - \int_0^{2\pi} D(\theta) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} u(\theta, t) \right)^2 d\theta + \int_0^{2\pi} u(\theta, t) \frac{\partial}{\partial \theta} (D'(\theta) u(\theta, t)) d\theta \\ &+ \beta \int_0^{2\pi} u(\theta, t) \left[\int_{\theta}^{\theta+\pi} F(\sigma) u(\sigma, t) d\sigma - \int_{\theta-\pi}^{\theta} F(\sigma) u(\sigma, t) d\sigma \right] \frac{\partial}{\partial \theta} u(\theta, t) d\theta. \end{aligned}$$

Using a similar argument to the one given in the proof of theorem 6, we arrive at the following inequality

$$\int_0^{2\pi} u(\theta, t) \frac{\partial}{\partial \theta} (D'(\theta) u(\theta, t)) d\theta \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{2\pi} u^2(\theta, t) d\theta + \varepsilon |D'(\cdot)|_{\infty}^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} u(\theta, t) \right)^2 d\theta,$$

and

$$\begin{aligned} &\beta \int_0^{2\pi} u(\theta, t) \left[\int_{\theta}^{\theta+\pi} F(\sigma) u(\sigma, t) d\sigma - \int_{\theta-\pi}^{\theta} F(\sigma) u(\sigma, t) d\sigma \right] \frac{\partial}{\partial \theta} u(\theta, t) d\theta \\ &\leq 4 \frac{\beta}{\varepsilon} |F(\cdot)|_{\infty}^2 \int_0^{2\pi} u^2(\theta, t) d\theta + \beta \varepsilon \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} u(\theta, t) \right)^2 d\theta. \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} u^2(\theta, t) d\theta &\leq \left(-D_0 + \varepsilon |D'(\cdot)|_{\infty}^2 + \beta \varepsilon \right) \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} u(\theta, t) \right)^2 d\theta \\ &+ \left(4 \frac{\beta}{\varepsilon} |F(\cdot)|_{\infty}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \int_0^{2\pi} u^2(\theta, t) d\theta. \end{aligned} \quad (4.38)$$

By choosing $\varepsilon > 0$ small enough, we can eliminate the term of the right hand side of (4.38) containing $\frac{\partial}{\partial \theta} u(\theta, t)$. We arrive at a differential inequality of the type

$$\frac{d}{dt} \|u^2(\cdot, t)\|^2 \leq 2L_1 \|u^2(\cdot, t)\|^2,$$

(for some constant L_1 , independent on $\|u(\cdot, t)\|$),

which leads to

$$\|u(\cdot, t)\| \leq e^{L_1 t} \|u_0\|. \quad (4.39)$$

Combining (4.19) and (4.21), we have from (4.20)

$$\|Bu(t)\| \leq C_1 |u_0|_{\mathcal{D}(B)} + C\sqrt{t} \sup_{0 \leq s \leq t} \|B [D'u(s) - \beta u(s)g_F(u(s))]\|, \quad \forall t \geq 0.$$

Then, according to part 2) of lemma 3, we have

$$\|Bu(t)\| \leq C_1 |u_0|_{\mathcal{D}(B)} + C\sqrt{t} \sup_{0 \leq s \leq t} [L + \beta Q \|u(s)\|] \sup_{0 \leq s \leq t} |u(s)|_{\mathcal{D}(B)}, \quad \forall t \geq 0.$$

Together with (4.39), we arrive at

$$\|Bu(t)\| \leq C_1 |u_0|_{\mathcal{D}(B)} + C\sqrt{t} \sup_{0 \leq s \leq t} [L + \beta Q \exp(L_1 t) \|u_0\|] \sup_{0 \leq s \leq t} |u(s)|_{\mathcal{D}(B)}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.40)$$

Define $K(r)$, for $r \geq 0$, as the unique t root (positive) of the equation

$$C\sqrt{t} [L + \beta Q r \exp(L_1 t)] = \frac{1}{2}.$$

Using again estimate (4.39) and (4.40), we conclude that

$$|u(t)|_{\mathcal{D}(B)} \leq 2(C_1 + \exp(L_1 K(\|u_0\|))) |u_0|_{\mathcal{D}(B)}, \quad \text{for all } t \in [0, K(\|u_0\|)].$$

This completes the proof of the proposition, with K_1 defined as mentioned. ■

4.2.4 Régularité

In subsection 2.3, we have proved that if the initial value is in $\mathcal{D}(B)$, then the solution takes its values in $\mathcal{D}(B)$. We can achieve a higher regularity of the mild solution of (CP) if we assume more regularity for the initial value. This is done in the next theorem.

Recall that a function $h : I \rightarrow X$ is Hölder continuous with exponent $\eta \in (0, 1)$ on I , where I is an interval, if there is a constant M such that ([83])

$$\|h(t) - h(s)\| \leq M |t - s|^\eta \text{ for } s, t \in I.$$

It is locally Hölder continuous if every $t \in I$ has a neighborhood in which h is Hölder continuous.

The following result describes the regularity of a mild solution of equation (18).

Theorem 8 *For every $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, the mild solution of equation (18) is a classical solution.*

Proof. If we show that the function

$$f(t) = B [D'u(t) - \beta u(t)g_F(u(t))]$$

is locally Hölder continuous from $(0, \infty)$ into $\mathcal{D}(B)$, then it follows from the theory of nonhomogeneous linear equations (see corollary 3.3 [83]) that the mild solution of (18) is a classical solution. That f is locally Hölder continuous on $(0, \infty)$ will follow if we prove that the map $t \rightarrow u(t)$ is locally Hölder continuous, from $(0, \infty)$ into $\mathcal{D}(B)$. Indeed, let $0 < t < t' \leq t_0$, with $t_0 = K(\|u_0\|)$ as in proposition 2.2. Then

$$\begin{aligned} f(t) - f(t') &= D''(u(t) - u(t')) + D'B(u(t) - u(t')) \\ &\quad - \beta [Bu(t) - Bu(t')]g_F(u(t)) - \beta [u(t) - u(t')]Bg_F(u(t)) \\ &\quad - \beta [g_F(u(t)) - g_F(u(t'))]Bu(t') - \beta [Bg_F(u(t)) - Bg_F(u(t'))]u(t'), \end{aligned}$$

which implies

$$\begin{aligned} \|f(t) - f(t')\| &\leq |u(t) - u(t')|_{\mathcal{D}(B)} \left[|g_F u(t)|_{\mathcal{D}(B)} + \max(|D'|_{\infty}, |D''|_{\infty}) \right] \\ &\quad + |g_F u(t) - g_F u(t')|_{\mathcal{D}(B)} |u(t')|_{\mathcal{D}(B)}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

In view of (4.14), we have

$$|g_F u(t) - g_F u(t')|_{\mathcal{D}(B)} \leq \delta |u(t) - u(t')|_{\mathcal{D}(B)}.$$

The fact that $t, t' \leq t_0$ entails

$$\left[|g_F u(t)|_{\mathcal{D}(B)} + \max(|D'|_{\infty}, |D''|_{\infty}) \right] + \delta |u(t')|_{\mathcal{D}(B)} \leq \xi$$

(for some constant ξ that can be chosen independent on u, t, t'). Then, inequality (4.41)

becomes

$$\|f(t) - f(t')\| \leq \xi |u(t) - u(t')|_{\mathcal{D}(B)}.$$

In order to estimate $|u(t) - u(t')|_{\mathcal{D}(B)}$, we note that the quantity $u(t) - u(t')$ can be broken down into the sum of three, from which the following inequality is derived :

$$\begin{aligned} |u(t) - u(t')|_{\mathcal{D}(B)} &\leq |T(t)u_0 - T(t')u_0|_{\mathcal{D}(B)} \\ &\quad + \left| \int_0^t (T(t-s) - T(t'-s))B [D'u(s) - \beta u(s)g_F(u(s))] ds \right|_{\mathcal{D}(B)} \\ &\quad + \left| \int_t^{t'} T(t'-s)B [D'u(s) - \beta u(s)g_F(u(s))] ds \right|_{\mathcal{D}(B)}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

The last member of the right hand side of (4.42) is estimated using

$$N = \sup_{0 \leq s \leq t_0} |D'u(s) - \beta u(s)g_F(u(s))|_{\mathcal{D}(B)}$$

and (4.21). We obtain

$$\left| \int_t^{t'} T(t' - s) B [D'u(s) - \beta u(s) g_F(u(s))] ds \right|_{\mathcal{D}(B)} \leq NC \sqrt{t' - t}. \quad (4.43)$$

In order to estimate

$$I = \left| \int_0^t (T(t - s) - T(t' - s)) B [D'u(s) - \beta u(s) g_F(u(s))] ds \right|_{\mathcal{D}(B)}.$$

we divide this quantity into the sum of three

$$\begin{aligned} I &\leq \left| \int_0^t T(s) (B [D'u(t - s) - \beta u(t - s) g_F(u(t - s))] \right. \\ &\quad \left. - B [D'u(t' - s) - \beta u(t' - s) g_F(u(t' - s))]) ds \right|_{\mathcal{D}(B)} \\ &\quad + \left| \int_0^{t' - t} T(s) B [D'u(t' + s) - \beta u(t' - s) g_F(u(t' - s))] ds \right|_{\mathcal{D}(B)} \\ &\quad + \left| \int_t^{t'} T(s) [D'u(t' - s) - \beta u(t' - s) g_F(u(t' - s))] ds \right|_{\mathcal{D}(B)} \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

In view of (4.21), it is clear that

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \sqrt{t' - t} \sup_{0 \leq s \leq t} |u(t' - s) - u(t - s)|_{\mathcal{D}(B)} \\ &\leq C \sqrt{t' - t} \sup_{0 \leq \sigma \leq t} |u(\sigma + t' - t) - u(\sigma)|_{\mathcal{D}(B)} \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$I_2 \leq 2NC \sqrt{t' - t}, \quad (4.45)$$

and

$$I_3 \leq 2NC \sqrt{t' - t}. \quad (4.46)$$

On the other hand, with $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, we have

$$\begin{aligned} T(t')u_0 - T(t)u_0 &= \int_t^{t'} T(s) A u_0 ds \\ BT(t')u_0 - BT(t)u_0 &= \int_t^{t'} BT(s) A u_0 ds. \end{aligned}$$

Using ((4.17) (resp. (4.21)), we can see that

$$\|T(t')u_0 - T(t)u_0\| \leq (t' - t) \|Au_0\| \quad (4.47)$$

respectively,

$$\begin{aligned} \|BT(t')u_0 - BT(t)u_0\| &\leq 2C \left(\sqrt{t'} - \sqrt{t} \right) \|Au_0\| \\ &\leq 2C \sqrt{t' - t} \|Au_0\|. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Combining (4.47) and (4.48), we obtain

$$|T(t')u_0 - T(t)u_0|_{\mathcal{D}(B)} \leq C_3 \sqrt{t' - t} |u_0|_{\mathcal{D}(A)}, \quad (4.49)$$

(for some positive constant C_3). Consequently, from (4.43) combined with (4.44), (4.45), (4.46) and (4.49), we arrive at the following inequality

$$\begin{aligned} |u(t') - u(t)|_{\mathcal{D}(B)} &\leq C_3 \sqrt{t' - t} |u_0|_{\mathcal{D}(A)} + 2NC \sqrt{t' - t} + C \sqrt{t' - t} \sup_{0 \leq \sigma \leq t} |u(\sigma + t' - t) - u(\sigma)|_{\mathcal{D}(B)}, \\ &\forall 0 \leq t \leq t' \leq t_0. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq \sigma \leq t} |u(\sigma + t' - t) - u(\sigma)|_{\mathcal{D}(B)} &\leq C_3 \sqrt{t' - t} |u_0|_{\mathcal{D}(A)} + 2NC \sqrt{t' - t} \\ &\quad + C \sqrt{t' - t} \sup_{0 \leq \sigma \leq t} |u(\sigma + t' - t) - u(\sigma)|_{\mathcal{D}(B)}, \quad \forall 0 \leq t \leq t' \leq t_0. \end{aligned}$$

By choosing $h_0 > 0$ such that

$$C \sqrt{h_0} < 1,$$

we obtain

$$\sup_{0 \leq \sigma \leq t} |u(\sigma + t' - t) - u(\sigma)|_{\mathcal{D}(B)} \leq K_2 \sqrt{t' - t}, \quad \forall 0 \leq t \leq t' \leq t_0, \quad t' - t \leq h_0$$

(for some constant K_2 that can be expressed in the form of $K_2 = K_2(|u_0|_{\mathcal{D}(A)})$).

which leads to

$$|u(t) - u(t')|_{\mathcal{D}(B)} \leq K_2 \sqrt{t' - t}, \quad \forall 0 \leq t \leq t' \leq t_0, \text{ such that } t' - t \leq h_0.$$

This yields Hölder continuity as defined from $[0, t_0]$ into $\mathcal{D}(B)$, from which the preparatory remark made at the beginning of the proof leads to the conclusion that u is a classical solution. ■

To conclude this section, we have proved that the Cauchy problem (18) is well posed in $\mathcal{D}(B)$. Solutions there are fixed points of strict contractions; initial values in $\mathcal{D}(A)$ yield classical solutions. This result has been obtained under a few assumptions on the operators A and B that can be satisfied by a variety of examples : in particular, there is no limitation on the dimension of the underlying physical space. The main problem we faced here was the fact that A and B do not commute. If, on the contrary, such a property is assumed, (for example, by taking for B a fractional power of $(-A)$) ([48]) and in addition, an estimate similar to (4.21),

$$\|BT(t)u\| \leq Ct^{-\alpha} \|u\|, \quad \forall t > 0 \text{ for some } \alpha < 1,$$

holds, then the integral equation (4.20) can be solved in X .

Chapitre 5

Résultats qualitatifs

This chapter is devoted to the study of the stability of the trivial steady-state as a function of the parameter β and the onset of a branch of non trivial steady-states, as well as the computation of some quantities (the average angular orientation and the dispersion about it). Section 5.2 is the conclusion which, in particular, has some comments about the interpretation of the result in terms of spatial location and pattern : it may be useful to anticipate these and warn the reader that there is no connection between space and pattern, more precisely space has not been accounted for in the model, thus, unsurprisingly, is not playing any role in our results.

5.1 Solutions stationnaires, stabilité et bifurcation

In this part, we deal with steady-state proportion densities. We investigate existence and multiplicity of steady-state solutions in terms of the parameter β . We find that besides a trivial steady-state which exists for all β , a branch of nontrivial ones emerges by

an odd type bifurcation (see theorem 1.7 [19]) near a value β_0 . We determine the direction of the bifurcation (supercritical) and we show that the variance is going down along the branch, that is, the obtained nontrivial steady-states represent the beginning of group's organization; variance of a certain arrangement is a possible measure of cost efficiency of that arrangement.

The proof requires a number of properties to be satisfied by the linearized operator. It is rather technical. In order to avoid cumbersome formulas further assumptions will be made from now on, namely : the functions D and F are supposed to be constant :

$$D(\theta) = \bar{D}; \quad F(\theta) = 1.$$

5.1.1 Formulation du problème de point fixe

With the above mentioned simplifications on F and D , we consider the problem made up of (4.1)-(4.2)-(4.3)-(4.15) and we look for equilibria, i.e., for solutions of the form $u(\theta, t) = U(\theta), \forall t$. Such solutions must satisfy the system :

$$\bar{D}U'(\theta) - \beta U(\theta) \left[\int_{\theta}^{\theta+\pi} U(\sigma) d\sigma - \int_{\theta-\pi}^{\theta} U(\sigma) d\sigma \right] = \gamma, \quad (5.1)$$

where γ is a constant to be determined, $\theta \in (0, 2\pi)$, with boundary conditions

$$U(0) = U(2\pi), U'(0) = U'(2\pi) \quad (5.2)$$

and

$$U(\theta) \geq 0, \text{ in } (0, 2\pi) \text{ and } \int_0^{2\pi} U(\theta) d\theta = 1. \quad (5.3)$$

We introduce the following operator \mathcal{F} defined by

$$\mathcal{F}(U)(\theta) = \int_0^\theta \frac{1}{D} \left[\int_\sigma^{\sigma+\pi} U(\sigma') d\sigma' - \int_{\sigma-\pi}^\sigma U(\sigma') d\sigma' \right] d\sigma. \quad (5.4)$$

In terms of the operator g_1 , defined by formula (4.5) for $F = 1$, $\mathcal{F}(U)$ reads

$$\mathcal{F}(U)(\theta) = \frac{1}{D} \int_0^\theta g_1(U)(\sigma) d\sigma, \quad (5.5)$$

which, in particular, in view of (4.8), yields

$$\mathcal{F}(U)(2\pi) = 0. \quad (5.6)$$

In terms of $\mathcal{F}(U)$, (5.1) can be written as

$$\frac{d}{d\theta} U(\theta) - \beta U(\theta) \frac{d}{d\theta} \mathcal{F}(U)(\theta) = \frac{\gamma}{D}.$$

By integration by parts and using the boundary condition, we arrive at

$$U(\theta) = U(0) \exp \beta (\mathcal{F}(U)(\theta)) + \frac{\gamma}{D} \int_0^\theta \exp \beta (\mathcal{F}(U)(\theta) - \mathcal{F}(U)(\sigma)) d\sigma. \quad (5.7)$$

Using the boundary condition (5.2) together with (5.6), we obtain

$$0 = \frac{\gamma}{D} \int_0^{2\pi} \exp \beta (\mathcal{F}(U)(2\pi) - \mathcal{F}(U)(\sigma)) d\sigma. \quad (5.8)$$

from which we deduce that

$$\gamma = 0.$$

Hence, (5.7) reduces to

$$U(\theta) = U(0) \exp \beta (\mathcal{F}(U)(\theta))$$

which, together with the normalization condition,

$$\int_0^{2\pi} U(\theta) d\theta = 1,$$

leads to

$$U(\theta) = \frac{\exp \beta (\mathcal{F}(U)(\theta))}{\int_0^{2\pi} \exp \beta (\mathcal{F}(U)(s)) ds} =_{\text{def}} \mathcal{H}(\beta, U) (\theta). \quad (5.9)$$

Then, from (5.9), the search for steady-state solutions is equivalent to finding fixed points of \mathcal{H} :

$$U = \mathcal{H}(\beta, U). \quad (5.10)$$

Remark 2. (i) We note that \mathcal{H} is of class C^∞ in (β, U) .

(ii) For any $\beta \in \mathbf{R}$, and any constant function $U = c$, we have $\mathcal{H}(\beta, U) = \frac{1}{2\pi}$. In particular, if we define $\bar{U} = \frac{1}{2\pi}$, it holds that $\mathcal{H}(\beta, \bar{U}) = \bar{U}$, for each β , that is, $U = \bar{U}$ is a trivial solution, for all β .

5.1.2 Résultats préparatoires

We just saw that the steady-state problem comes down to a fixed point problem for a map \mathcal{H} and that \mathcal{H} has a branch of trivial steady-states, $\bar{U} = \frac{1}{2\pi}$. We are going to determine a branch of non trivial steady-states emanating from the trivial branch at some value $\beta = \beta_0$. This requires a number of preliminary facts to be established, about the linearization of the map $\mathcal{H}(\beta, U)$ near \bar{U} . We start with a few notations and definitions. On occasion, we will use the following notation

$$\mathcal{L}(\beta) = D_u \mathcal{H}(\beta, \bar{U}). \quad (5.11)$$

Straightforward computation based on formula (5.9) gives

$$[\mathcal{L}(\beta)\xi](\theta) = \frac{\beta}{2\pi} \left[\mathcal{F}(\xi)(\theta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}(\xi)(s) ds \right]. \quad (5.12)$$

We denote

$$X_0 = \left\{ f \in X : \int_0^{2\pi} f(s) ds = 0 \right\} \quad (5.13)$$

For any operator G with values in X , we define the mean value operator, denoted \overline{G} ,

$$\overline{G}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(x)(s) ds \quad (5.14)$$

and we denote G_0 the projection of G onto the space X_0 parallel to the constant function space, that is to say,

$$G_0 = G - \overline{G} \quad (5.15)$$

Using (5.12), (5.14) and (5.15), we can see that the operator $\mathcal{L}(\beta)$ reads as

$$\mathcal{L}(\beta) = \frac{\beta}{2\pi} \mathcal{F}_0, \quad (5.16)$$

In terms of g_1 , defined by formula (4.5) for $F = 1$, and \mathcal{I} , the antiderivative operator defined by

$$(\mathcal{I}f)(\theta) = \int_0^\theta f(s) ds, \quad (5.17)$$

we have

$$\mathcal{F} = \frac{1}{D} \mathcal{I} \circ g_1. \quad (5.18)$$

Lemma 9 \mathcal{I} maps X_0 into X ; g_1 maps X into X_0 . Moreover, it holds that

$$\mathcal{I} \circ g_1 = g_1 \circ \mathcal{I} + \overline{(\mathcal{I} \circ g_1)}. \quad (5.19)$$

Proof. That \mathcal{I} maps X_0 into X is a well known fact about antiderivatives of periodic functions. It has been observed in the introduction that g_1 sends periodic functions to periodic functions and formula (4.8) expresses the fact that g_1 takes its values in X_0 . In order to check formula (5.19), it is enough to compute $\frac{d}{d\theta} \circ g_1 \circ \mathcal{I}$ and notice that

$$\frac{d}{d\theta} \circ g_1 \circ \mathcal{I} = g_1.$$

Applying the operator \mathcal{I} on both sides of the above identity, we conclude that, for any φ , we have

$$\mathcal{I} \circ g_1(\varphi) = g_1 \circ \mathcal{I}(\varphi) + c$$

for some constant $c = c(\varphi)$. Taking the mean value of both sides, and using the fact that g_1 maps into X_0 , we arrive at the expression

$$c = \overline{(\mathcal{I} \circ g_1)}(\varphi)$$

from which the desired formula follows immediately. Using the following obvious property, that is,

$$\overline{(\mathcal{I} \circ g_1)} = \overline{\mathcal{I}} \circ g_1 \tag{5.20}$$

and the fact that $g_1(1) = 0$, we get the following

$$\mathcal{I}_0 \circ g_1 = g_1 \circ \mathcal{I}_0 \tag{5.21}$$

on X_0 . ■

Lemma 10 \mathcal{I}_0 and g_1 map X_0 into X_0 . Moreover, the following hold

$$(\mathcal{I} \circ g_1)_0 = \mathcal{I}_0 \circ g_1 \tag{5.22}$$

$$(\mathcal{I}_0)^* = -\mathcal{I}_0; (g_1)^* = -g_1 \text{ on } X_0. \quad (5.23)$$

Proof. That \mathcal{I}_0 takes its values in X_0 follows immediately from the defining formula (5.15). For g_1 , see lemma 9. Formula (5.22) can be derived from the proof of lemma 9 using (5.20). The fact that g_1 is antisymmetric has already been mentioned in the introduction, see formula (4.7). Finally, the formula for \mathcal{I}_0^* can be checked by a direct computation of the adjoint operator of \mathcal{I}_0 . ■

We are now in position to draw the main consequences of the previous study for the operator $\mathcal{L}(\beta)$.

Proposition 11 $\mathcal{L}(\beta)$ is compact and self-adjoint on X_0 .

Proof. Expression (5.12) shows that $\mathcal{L}(\beta)$ is the difference of a multiple of \mathcal{F} and a finite rank operator. \mathcal{F} takes its values in the Sobolev space $H^2(]0, 2\pi[)$, which imbeds compactly in X . Hence, the compactness of $\mathcal{L}(\beta)$. From (5.16), (5.18) and (5.22), we have

$$\mathcal{L}(\beta) = \frac{\beta}{2\pi D} \mathcal{I}_0 \circ g_1$$

and, in view of (5.21) and (5.23), we obtain, as a result of the direct computation of the adjoint of $\mathcal{L}(\beta)$

$$(\mathcal{L}(\beta))^* = \frac{\beta}{2\pi D} (g_1)^* \circ (\mathcal{I}_0)^* = \frac{\beta}{2\pi D} g_1 \circ \mathcal{I}_0 = \frac{\beta}{2\pi D} \mathcal{I}_0 \circ g_1 = \mathcal{L}(\beta).$$

■

We end this preparatory section with a few computational remarks regarding \mathcal{H} .

From

$$\mathcal{H}\left(\beta, \frac{1}{2\pi} + u\right) = \mathcal{H}\left(\beta_0, \frac{1}{2\pi} + \frac{\beta}{\beta_0}u\right),$$

we obtain

$$\begin{aligned} D_\beta^j \mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi} + u) &= D_u^j \mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi} + \frac{\beta}{\beta_0} u) \left(\frac{u}{\beta_0} \right)^j \\ D_u^j \mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi} + u) &= \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^j D_u^j \mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi} + \frac{\beta}{\beta_0} u) \end{aligned}$$

which, in particular, leads to

$$\left(\frac{\partial}{\partial \beta} \right)^j \mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi}) = 0, \quad j \geq 1 \quad (5.24)$$

and

$$D_u^j \mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi}) = \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^j D_u^j \mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi}). \quad (5.25)$$

We also have

$$D_{u\beta}^2 \mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi} + u) = \frac{1}{\beta_0} D_u \mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi} + \frac{\beta}{\beta_0} u) + \frac{\beta}{(\beta_0)^2} D_u^2 \mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi} + \frac{\beta}{\beta_0} u) u,$$

which gives

$$D_{u\beta}^2 \mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi}) = \frac{1}{\beta_0} D_u \mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi}). \quad (5.26)$$

Moreover,

$$D_u \mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi} + u) \xi = \beta \mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi} + u) \mathcal{F}(\xi) - \frac{\beta \mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi} + u) \int_0^{2\pi} \Phi(\beta \mathcal{F}(u)) \mathcal{F}(\xi)}{\tilde{\Phi}(\beta \mathcal{F}(u))}, \quad (5.27)$$

with

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \exp u, \\ \tilde{\Phi}(f) &= \int_0^{2\pi} \Phi(f(x)) dx. \end{aligned}$$

Identity (5.25) for $j = 1$ shows that, if v denotes an eigenvector of $D_u \mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi})$ for the eigenvalue 1, then v is also an eigenvector of $D_u \mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi})$ for the value $\frac{\beta}{\beta_0}$. We again have

$$\begin{aligned}
D_u^2 \mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi} + u) \xi \zeta &= \beta^2 \mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi} + u) \left[\mathcal{F}(\zeta) - \frac{\int_0^{2\pi} \Phi(\beta \mathcal{F}(u)) \mathcal{F}(\zeta)}{\tilde{\Phi}(\beta \mathcal{F}(u))} \right] \left[\mathcal{F}(\xi) - \frac{\int_0^{2\pi} \Phi(\beta \mathcal{F}(u)) \mathcal{F}(\xi)}{\tilde{\Phi}(\beta \mathcal{F}(u))} \right] \\
-\beta^2 \mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi} + u) &\left\{ \frac{\int_0^{2\pi} \Phi(\beta \mathcal{F}(u)) \mathcal{F}(\zeta) \mathcal{F}(\xi)}{\tilde{\Phi}(\beta \mathcal{F}(u))} - \frac{\left(\int_0^{2\pi} \Phi(\beta \mathcal{F}(u)) \mathcal{F}(\xi) \right) \left(\int_0^{2\pi} \Phi(\beta \mathcal{F}(u)) \mathcal{F}(\zeta) \right)}{\left(\tilde{\Phi}(\beta \mathcal{F}(u)) \right)^2} \right\}.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

These formulas will be used in the sequel with appropriate values of β , ξ , ζ and u .

Furthermore, one can see that \mathcal{H} is phase-invariant, that is, introducing the phase-shift ρ_φ defined on X by:

$$\rho_\varphi U(\cdot) = U(\cdot + \varphi),$$

straightforward computation yields

$$\rho_\varphi \mathcal{H}(\beta, \cdot) = \mathcal{H}(\beta, \rho_\varphi(\cdot)).$$

So, if U is a fixed point of $\mathcal{H}(\beta, \cdot)$, then $\rho_\varphi U$ is also.

Changing now U into $(\sigma U)(\theta) = U(-\theta)$, we find that

$$\sigma \mathcal{H}(\beta, U) = \mathcal{H}(\beta, \sigma U).$$

So, $\mathcal{H}(\beta, \cdot)$ sends even functions to even functions. This property will be used in the sequel, when dealing with the bifurcation issue.

5.1.3 Spectre

As a result of proposition 11, we know that $D_u \mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi})$ is a compact and self-adjoint operator, so the spectrum of $\mathcal{L}(\beta)$ is reduced to a real point spectrum. Thus, the

eigenfunction problem reduces to looking for

$\xi \in X - \{0\}$, and $\mu \in \mathbf{R}$ such that

$$\mathcal{L}(\beta)(\xi) = \mu\xi. \quad (5.29)$$

Such a function is necessarily differentiable, and taking the derivative we obtain

$$\frac{\beta}{2\pi\overline{D}} \left[\int_{\theta}^{\theta+\pi} \xi(\sigma) d\sigma - \int_{\theta-\pi}^{\theta} \xi(\sigma) d\sigma \right] = \mu\xi'(\theta), \quad (5.30)$$

that is

$$\frac{\beta}{2\pi\overline{D}} g_1(\xi)(\theta) = \mu\xi'(\theta). \quad (5.31)$$

It is clear that $\mu\xi \in X_0$, which allows the possibility that $\mu = 0$ or $\int_0^{2\pi} \xi(\sigma) d\sigma = 0$.

Therefore,

$$\text{if } \mu \in \sigma(\mathcal{L}(\beta)), \mu \neq 0, \text{ then } \frac{\beta}{2\pi\overline{D}} g_1(\xi) = \mu\xi' \text{ and } \int_0^{2\pi} \xi(\theta) d\theta = 0.$$

Exploiting the fact that $\xi(\theta + 2\pi) = \xi(\theta)$ and $\int_0^{2\pi} \xi(\theta) d\theta = 0$, we obtain

$$\int_{\theta}^{\theta+\pi} \xi(\sigma) d\sigma = - \int_{\theta-\pi}^{\theta} \xi(\sigma) d\sigma. \quad (5.32)$$

Consequently, equation (5.31) becomes

$$\frac{2\pi\mu\overline{D}}{\beta} \xi'(\theta) = -2 \int_{\theta-\pi}^{\theta} \xi(\sigma) d\sigma, \quad (5.33)$$

which yields, using (5.32), that

$$\frac{2\pi\mu\overline{D}}{\beta} [\xi'(\theta) + \xi'(\theta + \pi)] = 0.$$

Then

$$\xi(\theta) + \xi(\theta + \pi) = C,$$

where C is a constant.

Since $\int_0^{2\pi} \xi(\theta) d\theta = 0$, it follows that $C = 0$, thus

$$\xi(\theta) = -\xi(\theta + \pi). \quad (5.34)$$

On the other hand, differentiating (5.33) and using (5.34), we deduce

$$\frac{2\pi\mu\bar{D}}{\beta}\xi''(\theta) = -4\xi(\theta). \quad (5.35)$$

The solutions of equation (5.35) can be written as :

$$\xi(\theta) = Ae^{\omega\theta} + Be^{-\omega\theta}, \quad (5.36)$$

where A and B are constants and $\omega^2 = \frac{-2\beta}{\mu\pi\bar{D}} \int_0^{2\pi} \xi(\theta) d\theta = 0$ yields that

$$\frac{A}{\omega}(e^{2\omega\pi} - 1) - \frac{B}{\omega}(e^{-2\omega\pi} - 1) = 0.$$

Using the fact that ξ is 2π -periodic, we get via (5.36)

$$A(e^{2\omega\pi} - 1)e^{\omega\theta} + B(e^{-2\omega\pi} - 1)e^{-\omega\theta} = 0 \text{ for all } \theta, \text{ with } \omega \neq 0.$$

So $A(e^{2\omega\pi} - 1) = 0$ and $B(e^{-2\omega\pi} - 1) = 0$. Then

$$e^{2\omega\pi} = 1.$$

Thus

$$2\omega\pi = i2k\pi, k \geq 1,$$

then

$$\omega = ik, k \geq 1.$$

Consequently, we arrive at

$$\mu_k = \frac{2\beta}{D\pi k^2}.$$

Via (5.36), the eigenfunction corresponding to μ_k is

$$\xi_k(\theta) = Ae^{ik\theta} + Be^{-ik\theta},$$

that is

$$\xi_k(\theta) = p \cos k\theta + q \sin k\theta, \quad p, q \in \mathbf{R}.$$

Moreover,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\beta)(\cos(k.))(\theta) &= \frac{\beta}{D\pi k^2}(1 - (-1)^k) \cos(k\theta) \\ \mathcal{L}(\beta)(\sin(k.))(\theta) &= \frac{\beta}{D\pi k^2}(1 - (-1)^k) \sin(k\theta), \end{aligned}$$

which in particular leads to

$$\mathcal{L}(\beta)(\cos(2j.)) = 0$$

$$\mathcal{L}(\beta)(\sin(2j.)) = 0.$$

Then the spectrum of $\mathcal{L}(\beta)$ is given by

$$\sigma(\mathcal{L}(\beta)) = \left\{ \mu_k, \mu_k = \frac{2\beta}{D\pi(2k+1)^2}, k \geq 0 \right\} \cup \{0\}, \quad (5.37)$$

and the eigenfunctions corresponding to μ_k are generated by $\{\cos(2k+1)\theta, \sin(2k+1)\theta\}$.

5.1.4 Stabilité et bifurcation

We will now apply the results gathered in subsections 3.2 and 3.3 to the study of stability and bifurcation of steady states of problem (5.10). Using an observation made at

the end of subsection 3.2, we are going to work in a space smaller than X_0 , namely, the space, denoted X_0^{ev} , of even functions, defined as follows

$$X_0^{ev} = \{f \in X_0 : f \text{ is even} \}.$$

The restriction of $\mathcal{L}(\beta)$ to X_0^{ev} , denoted $\mathcal{L}_{ev}(\beta)$, is still compact and self-adjoint. Then, in that case, the eigenspace for the eigenvalue μ_k is reduced to $\{\cos(2k+1)\theta\}$, and μ_k has algebraic multiplicity equal to 1 (5.37). We are now seeking nontrivial solutions, possibly emerging from $U = \bar{U}$ at some value of β where this solution becomes unstable. This goes through a bifurcation analysis starting from the study of the linearization of equation (5.10) near $U = \bar{U}$. Let us first recall the following definitions and a classical stability condition :

Definition 12 [56] a) For a linear bounded operator L , the spectral radius of L , denoted by $r(L)$, is the supremum of $\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(L)\}$.

b) The fixed point 0 of a map $K : X \rightarrow X$ is (Lyapunov) stable iff for every neighborhood \mathcal{U} of 0 , there exists another neighborhood $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ of 0 such that $K^n(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}$, $\forall n \geq 0$.

c) The fixed point 0 is exponentially stable iff there exists a neighborhood \mathcal{V} of 0 , $\gamma > 0$ and $k \in (0, 1)$ such that 0 is Lyapunov stable and $\forall x \in \mathcal{V}$, $\|K^n(x)\|_X \leq \gamma k^n$, $n \rightarrow \infty$.

Lemma 13 [56] Let $K : X \rightarrow X$ be differentiable at 0 and satisfy $K(0) = 0$, and let $D(K)(0) = L$ be its Frechet derivative at 0 . If the spectrum of L lies in a compact subset of the open unit disc, then 0 is exponentially stable.

From the analysis made in subsection 3.3, one can see that

$$r(\mathcal{L}_{ev}(\beta)) = \frac{2\beta}{\pi D}$$

corresponding to $k = 0$. Let $\beta_0 \left(= \frac{\pi \bar{D}}{2} \right)$ denote the value of the parameter for which $r(\mathcal{L}_{ev}(\beta)) = 1$. Then, according to lemma 13, it follows that the equilibrium $\frac{1}{2\pi}$ is exponentially stable if $\beta < \beta_0$ and unstable if $\beta > \beta_0$. We are now in a position to conclude on bifurcation.

Theorem 14 $\left(\beta_0, \frac{1}{2\pi} \right)$ is a bifurcation point of steady state solutions of equation (5.10), that is to say, in each neighborhood of $\left(\beta_0, \frac{1}{2\pi} \right)$ there begin the theorem $\left(\beta_0, \frac{1}{2\pi} \right)$ is a bifurcation point of steady state solutions of equation (5.10), that is to say, in each neighborhood of $\left(\beta_0, \frac{1}{2\pi} \right)$ there exists a pair (β, U) , $U \neq \frac{1}{2\pi}$, such that $U = \mathcal{H}(\beta, U)$.

Proof. Differentiability of \mathcal{H} together with (5.12) and (5.16) allow to write \mathcal{H} , near (β_0, \bar{U}) as follows :

$$\mathcal{H}(\beta, U) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\beta}{\beta_0} \mathcal{L}_{ev}(\beta_0)(U - \bar{U}) + \mathcal{G}(\beta, U),$$

in which $\lim_{(\beta, U) \rightarrow (\beta_0, \bar{U})} \frac{\mathcal{G}(\beta, U)}{\|U - \bar{U}\|} = 0$. $\mathcal{L}_{ev}(\beta_0)$ is compact and $r(\mathcal{L}_{ev}(\beta_0)) = 1$ is an eigenvalue with odd multiplicity (equal to one). Then, the conditions of a classical bifurcation theorem (theorem 1.7 [19]) are fulfilled, thus a bifurcation of nontrivial steady states takes place at $\left(\beta_0, \frac{1}{2\pi} \right)$. This completes the proof of the theorem. ■

5.1.5 Calcul de la branche bifurquée, estimation de l'espérance et de la variance

We will now give more detailed information about the bifurcation branch emanating from $\left(\beta_0, \frac{1}{2\pi} \right)$ and we will compute the expectation and the variance on the local branch. We will first show that one can represent the branch in terms of a smooth function

$\beta = \beta(s)$. We will then compute a few derivatives of $\beta(s)$ at $s = 0$. The computation requires some care, due to the fact that $\beta(s)$ is known implicitly only and depends heavily on the preparatory results collected in subsection 3.2.

Calcul de la branche bifurquée

As we have already noticed in subsection 3.4, it will be sufficient to restrict ourselves to X_0^{ev} . Thanks to proposition 11, $\mathcal{L}_{ev}(\beta)$ is compact and self-adjoint. $N(I - \mathcal{L}_{ev}(\beta_0))$ is one-dimensional generated by $v = \frac{\cos(\cdot)}{\sqrt{\pi}}$, and so, compactness and self-adjointness imply that, if we denote $S = R(I - \mathcal{L}_{ev}(\beta_0))$, S is closed and is a supplementary subspace of $\mathbf{R}v$ in X_0^{ev} , invariant through $\mathcal{L}_{ev}(\beta_0)$, and $I - \mathcal{L}_{ev}(\beta_0)$ is an isomorphism from S onto itself. Finally, S is just characterized as the orthogonal space of $\mathbf{R}v$, $S = \{v\}^\perp$.

By writing $U = \frac{1}{2\pi} + u$ and $u = sv + \sigma$, with $\sigma \in S$, the equation $U = \mathcal{H}(\beta, U)$

breaks down into two equations :

$$\begin{cases} s = \left\langle v, \mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi} + sv + \sigma) - \frac{1}{2\pi} \right\rangle \\ \sigma = \mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi} + sv + \sigma) - \frac{1}{2\pi} - \left\langle v, \mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi} + sv + \sigma) - \frac{1}{2\pi} \right\rangle v. \end{cases} \quad (5.38)$$

Applying the implicit function theorem to the second equation of (5.38), we can solve it for σ near $(\beta_0, 0)$: it yields $\sigma = \sigma(\beta, s)$, $\sigma(\beta, 0) = 0$. Differentiating the second equation of (5.38) with respect to s , we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial s}_{/s=0} &= D_u \mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi}) \left(v + \frac{\partial \sigma}{\partial s}_{/s=0} \right) - \left\langle v, D_u \mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi}) \left(v + \frac{\partial \sigma}{\partial s}_{/s=0} \right) \right\rangle v \\ &= D_u \mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi}) \frac{\partial \sigma}{\partial s}_{/s=0}. \end{aligned}$$

For $\frac{\beta}{\beta_0}$ close to 1, $I - D_u \mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi})$ is an isomorphism from S onto itself. Then $\frac{\partial \sigma}{\partial s}_{/s=0} = 0$.

Therefore $\sigma(\beta, s) = O(s^2)$. Now, let us insert $\sigma = \sigma(\beta, s)$ in the first equation of (5.38), to

arrive at the *bifurcation equation*

$$s = \left\langle v, \mathcal{H}\left(\beta, \frac{1}{2\pi} + sv + \sigma(\beta, s)\right) - \frac{1}{2\pi} \right\rangle.$$

We first show that one can represent the branch in terms of a function $\beta = \beta(s)$.

To see this, consider the function

$$\mathcal{B}(s, \beta) = \frac{\left\langle v, \mathcal{H}\left(\beta, \frac{1}{2\pi} + sv + \sigma(\beta, s)\right) - \frac{1}{2\pi} \right\rangle}{s}, \quad s \neq 0,$$

which extends continuously to $s = 0$ as $\mathcal{B}(0, \beta) = \frac{\beta}{\beta_0}$. For $s \neq 0$, the *bifurcation equation* reads as

$$\mathcal{B}(s, \beta) = 1.$$

We have $\mathcal{B}(0, \beta_0) = 1$ and $\frac{\partial}{\partial \beta} \mathcal{B}(0, \beta_0) = \frac{1}{\beta_0} \neq 0$ and \mathcal{B} is of class C^∞ (see Remark 2 (i)).

So, the implicit function theorem applies and ensures that near $(0, \beta_0)$, the solutions (s, β) of the equation $\mathcal{B}(s, \beta) = 1$ lie in the graph of a function $\beta = \bar{\beta}(s)$ such that $\bar{\beta}(0) = \beta_0$ and $\bar{\beta}(s)$ is of class C^∞ . Accordingly, we denote $\bar{\sigma}(s) = \sigma(\bar{\beta}(s), s)$. Our final goal is to compute a few derivatives of the function $\bar{\beta}(s)$. In terms of $\bar{\sigma}$ and $\bar{\beta}$, the *bifurcation equation* can be written as

$$s = \left\langle v, \mathcal{H}(\bar{\beta}(s), \frac{1}{2\pi} + sv + \bar{\sigma}(s)) - \frac{1}{2\pi} \right\rangle. \quad (5.39)$$

Differentiating the bifurcation equation (5.39) two times with respect to s , we get

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle v, D_u^2 \mathcal{H}(\bar{\beta}(s), \frac{1}{2\pi} + sv + \bar{\sigma}(s))(v + \bar{\sigma}'(s))^2 \right\rangle + \left\langle v, D_u \mathcal{H}(\bar{\beta}(s), \frac{1}{2\pi} + sv + \bar{\sigma}(s)) \bar{\sigma}''(s) \right\rangle \\ &+ \left\langle v, \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \mathcal{H}(\bar{\beta}(s), \frac{1}{2\pi} + sv + \bar{\sigma}(s)) \left(\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial s} \right)^2 \right\rangle + \left\langle v, \frac{\partial}{\partial \beta} \mathcal{H}(\bar{\beta}(s), \frac{1}{2\pi} + sv + \bar{\sigma}(s)) \left(\frac{\partial^2 \bar{\beta}}{\partial s^2} \right) \right\rangle \\ &+ 2 \left\langle v, D_{u\beta}^2 \mathcal{H}(\bar{\beta}(s), \frac{1}{2\pi} + sv + \bar{\sigma}(s)) \left(\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial s} \right) (v + \bar{\sigma}'(s)) \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Using (5.24), (5.25) and (5.26), combined with the fact that $\bar{\sigma}(\cdot)$ and its derivatives belong to S the supplementary subspace of $\mathbf{R}v$ in X_0^{ev} , invariant through $D_u\mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi})$, formula (5.40) comes down to

$$0 = \left\langle v, D_u^2\mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi})v^2 \right\rangle + \frac{2}{\beta_0} \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial s} \Big|_{s=0}. \quad (5.41)$$

On the other hand, using (5.28), we obtain

$$D_u^2\mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi})v^2 = 2 \cos^2(\theta) - 1,$$

which implies that

$$\left\langle v, D_u^2\mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi})v^2 \right\rangle = 0. \quad (5.42)$$

Together with (5.41), the above equality leads to $\frac{\partial \bar{\beta}(0)}{\partial s} = 0$. Then,

$$\bar{\beta}(s) = \beta_0 + O(s^2).$$

Using the Taylor expansion, up to order three, of $\mathcal{H}(\beta, \frac{1}{2\pi} + u)$ in u in the right hand side of the *bifurcation equation*, substituting $sv + \sigma$ for u and using the fact that $\sigma(\beta, s) = O(s^2)$, then substituting $\bar{\beta}(s)$ for β , we arrive at

$$s = s \frac{\bar{\beta}(s)}{\beta_0} + \left\langle v, D_u^2\mathcal{H}(\bar{\beta}(s), \frac{1}{2\pi})sv\bar{\sigma}(s) \right\rangle + \frac{s^3}{6} \left\langle v, D_u^3\mathcal{H}(\bar{\beta}(s), \frac{1}{2\pi})v^3 \right\rangle + o(s^3),$$

which can be rewritten as

$$s \frac{(\beta_0 - \bar{\beta}(s))}{\beta_0} = \left\langle v, D_u^2\mathcal{H}(\bar{\beta}(s), \frac{1}{2\pi})sv\bar{\sigma}(s) \right\rangle + \frac{s^3}{6} \left\langle v, D_u^3\mathcal{H}(\bar{\beta}(s), \frac{1}{2\pi})v^3 \right\rangle + o(s^3). \quad (5.43)$$

Dividing both sides of (5.43) by s^3 and evaluating the limit at $s = 0$, we obtain

$$-\frac{\bar{\beta}''(0)}{2\beta_0} = \left\langle v, D_u^2\mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi})v \frac{\bar{\sigma}''(0)}{2} \right\rangle + \frac{1}{6} \left\langle v, D_u^3\mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi})v^3 \right\rangle. \quad (5.44)$$

Let us now turn to the estimation of the first term of the right hand side of (5.44). Straight-forward computation gives $\overline{\sigma}''(0) = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}(\beta_0, 0)$. Differentiating the second equation of (5.38) with respect to s , we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}(\beta_0, 0) &= D_u^2 \mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi})v^2 + D_u \mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi}) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}(\beta_0, 0) \\ &\quad - \left\langle v, D_u^2 \mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi})v^2 \right\rangle v - \left\langle v, D_u \mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi}) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}(\beta_0, 0) \right\rangle v. \end{aligned}$$

Via (5.42), combined with the fact that $\sigma(\cdot)$ and its derivatives belong to S the supplementary subspace of $\mathbf{R}v$ in X_0^{ev} , invariant through $D_u \mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi})$, we arrive at

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}(\beta_0, 0) = D_u^2 \mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi})v^2 + D_u \mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi}) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}(\beta_0, 0). \quad (5.45)$$

Denote, for a moment, ξ the function $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}(\beta_0, 0)$ and differentiate both sides of equation (5.45) with respect to θ to obtain, via (5.28), (5.12) and (5.5)

$$\xi'(\theta) = -2 \sin(2\theta) + \frac{1}{4} g_1(\xi)(\theta). \quad (5.46)$$

Using the fact that $g_1(P) = 0$, for each polynomial or series P in $\sin(2n\theta)$ and $\cos(2n\theta)$ (see formula (4.5)), one can see that $\xi(\theta) = \cos(2\theta)$ is a particular solution of (5.46). So, the general solution of equation (5.46) is

$$\xi(\theta) = \cos(2\theta) + \xi_c(\theta), \quad (5.47)$$

where $\xi_c(\theta)$ denotes an arbitrary solution of the homogenous equation associated with (5.46). One can immediately see that this equation is analogous to the eigenfunction problem (5.29) for $\beta = \beta_0$. Using (5.29), (5.31) and (5.37), we arrive at the following expression

$$\xi_c(\theta) = A \cos(\theta) + B \sin(\theta).$$

The additional restriction to even functions yields $B = 0$, and the requirement that ξ be in S leads to $A = 0$. So, we get

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}(\beta_0, 0) = \cos(2\theta),$$

from which, using formula (5.28) with the fact that $g_1(P) = 0$ therefore $\mathcal{F}(P) = 0$, for each polynomial or series P in $\sin(2\theta n)$ and $\cos(2\theta n)$, we obtain

$$\left\langle v, D_u^2 \mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi}) v \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}(\beta_0, 0) \right\rangle = 0.$$

Therefore

$$-\frac{\bar{\beta}''(0)}{2\beta_0} = \frac{1}{6} \left\langle v, D_u^3 \mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi}) v^3 \right\rangle.$$

Using (5.28) and (5.27) again, we get

$$D_u^3 \mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi}) v^3 = 4\pi^2 v^3 - 6\pi v,$$

which yields that

$$\left\langle v, D_u^3 \mathcal{H}(\beta_0, \frac{1}{2\pi}) v^3 \right\rangle = -3\pi.$$

Then,

$$\bar{\beta}(s) = \beta_0 + \frac{\pi}{2} \beta_0 s^2 + o(s^2). \quad (5.48)$$

The result reads, in terms of $\lambda = \bar{\lambda}(s) = \frac{\bar{\beta}(s)}{D}$, as

$$\bar{\lambda}(s) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} s^2 + o(s^2). \quad (5.49)$$

Consequently the branch of nontrivial solutions emanating from $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2\pi}\right)$ is supercritical (i.e., takes place for $\lambda > \frac{\pi}{2}$).

Estimation de l'espérance et de la variance

In this part, we will compute the expectation and the variance on the local branch.

Let $U_s(\cdot)$ be the bifurcated solution of (5.10) for $s > 0$ small. The expected value of U_s , E_s is by definition

$$\begin{aligned} E_s &= \int_{-\pi}^{+\pi} \theta U_s(\theta) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} \theta \left(\frac{1}{2\pi} + s \cos \theta + o(s) \right) d\theta. \end{aligned}$$

Then

$$E_s = o(s).$$

The variance V_s is the integral

$$\begin{aligned} V_s &= \int_{-\pi}^{+\pi} (\theta - E_s)^2 U_s(\theta) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} (\theta - o(s))^2 \left(\frac{1}{2\pi} + s \cos \theta + o(s) \right) d\theta \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 4\pi s + o(s). \end{aligned}$$

The expectation and the variance can be computed in terms of λ . In view of (5.49), one then obtains the following approximate expressions

$$E(\lambda) = o\left(\sqrt{\lambda - \lambda_0}\right); \quad V(\lambda) = \frac{\pi^2}{3} - 4\pi \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_0)}{\lambda_0^2}}. \quad (5.50)$$

On the other hand, the computation of the same quantities on the trivial branch leads respectively to :

$$E = 0 \text{ and } V = \frac{\pi^2}{3},$$

that is : a slight deviation from uniform distribution can be seen in the angular mean value becoming possibly non zero, while the angular dispersion is going below the value $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, giving a rough estimate of the gain incurred by the fish when playing the gregarious strategy.

So far we have only considered local results, i.e., existence of solutions in a small neighborhood of a bifurcation point. However, it is possible to show existence of an extended branch of non trivial solutions, as a result of a global bifurcation theorem (see theorem 1.6 [87]). In fact, in view of $U \geq 0$ and $\int_0^{2\pi} U(\theta)d\theta = 1$, it may be easily seen that $\mathcal{H}(\beta, U)$ is uniformly bounded on bounded β intervals; on the other hand, $\mathcal{H}(0, U) = \frac{1}{2\pi}$ (immediate from (5.9)), that is, the only feasible fixed point of $\mathcal{H}(0, U)$ is \bar{U} . So, theorem 1.6 in [87] allows us to conclude that, if \mathcal{C} denotes the connected component of the set of non trivial fixed point having (β_0, \bar{U}) in its closure, then \mathcal{C} is unbounded in β : for each $\beta > \beta_0$, one can show that $\mathcal{H}(\beta, U)$ has a fixed point $U \neq \bar{U}$.

5.2 Remarques finales

Let us first consider the results of the above two sections together. In section 2, we proved that the Cauchy problem associated with the system of equations (4.1)-(4.2)-(4.3) is well-posed in a suitable function space. Indeed, we have discussed existence, uniqueness and positivity of solutions. We have also seen that the value of the integral of the solution is a constant, so that the solution remains a proportion density for all positive time. Section 3 focused on the study of the stability of the trivial solution as a function of the parameter β . Assuming that $D(\theta) = \bar{D}$ and $F(\theta) = 1$, the trivial steady-state is the constant function $\bar{U} = \frac{1}{2\pi}$, that is, an individual's orientation is uniformly distributed in all directions. It was shown that stability is lost as the parameter β crosses a certain threshold β_0 and a set of nontrivial steady states emerges near this value. In fact, below that value β_0 , the dispersion dominates and the population organizes itself asymptotically as if there were no

gregarism. We have shown that the branch of nontrivial steady-state solutions emerging from that trivial solution is supercritical. Close to $\beta = \beta_0$, the bifurcated solutions read as :

$$U(\theta) = \frac{1}{2\pi} + C(\beta) \cos \theta + o(C(\beta)) \text{ with a constant } C(\beta) > 0 \text{ for } \beta > \beta_0.$$

As a final remark, we comment on the interpretation to be given to the solutions in the context of the physical environment of the fish. The angle θ characterizes the angular orientation of an individual fish body, lying supposedly in a horizontal plane, with respect to a fixed direction, arbitrarily chosen. This has nothing to do with the actual location of the fish in the water volume. In what concerns the steady-state solutions, a privileged direction has emerged from the preparatory study, namely a symmetry axis has been found which has been used as the origin for the orientation of angles. But, this axis is by no means connected to a specific horizontal direction in the sea. Not only could this symmetry axis be supported by any one of the horizontal directions but there is also no relationship between a given orientation and the actual location of fish having this orientation. Introducing some rules linking spatial locations and tail-to-head orientations of fish will be the subject of future research.

Troisième partie

Modèle informatique, résultats et analyse des résultats¹

¹Le travail présenté dans cette partie a donné lieu à deux articles :

M. Adioui, J.P Treuil and O. Arino, Alignment in a fish school : a mixed Lagrangien-Eulerian approach (Ecological modelling, 167(2003) 19 – 32.).

M. Adioui, The interplay between individual based computer simulation and mathematical analysis in a fish school, Actes du 6^{ème} Colloque Africain sur la recherche en Informatique, proceedings de CARI, (2002) 385 – 393. publié dans les proceedings de CARI, (2002).

Chapitre 6

Formulation lagrangienne du modèle d'alignement

6.1 Introduction

Le but du présent chapitre est de représenter en termes lagrangiens le comportement des individus et d'essayer de formaliser un modèle directement à ce niveau, en intégrant les hypothèses sous-jacentes au modèle eulérien introduit dans les chapitres antérieurs. Le principe mis en jeu dans le modèle eulérien d'alignement des bancs est de partir d'une population immobile, constituée d'individus orientés dans toutes les directions possibles, et de décrire en termes de densités sur les directions les processus de réorientation qui très rapidement vont aboutir à un groupe mono-orienté, capable de se déplacer, sous l'action d'un stimulus externe, dans une seule et même direction.

Dans le modèle lagrangien, on considère une population immobile de N individus ($N \in$

$\mathbb{N} - \{0\}$), qui sont à l'instant initial disposés aléatoirement dans un plan horizontal. Le temps évolue de manière discrète par pas de longueur Δt à partir d'un temps initial que nous ramenons à 0. Il sera commode d'utiliser la lettre t pour représenter un temps quelconque, t sera un multiple de Δt . Chaque individu est repéré par un numéro k ($k = 1, 2, \dots, N$), ayant à l'instant t une orientation $\theta_N^k(t) : (\theta_N^k(t))_{1 \leq k \leq N}$ est la famille des orientations.

On suppose que pour chaque k ($k = 1, 2, \dots, N$), $\{\theta_N^k(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ est un processus stochastique. L'équation lagrangienne du modèle d'alignement s'exprime sous la forme d'une équation différentielle stochastique :

$$d\theta_N^k(t) = F[\theta_N^1(t), \theta_N^2(t), \dots, \theta_N^N(t)] (\theta_N^k(t)) dt + [\sqrt{2d}] dW^k(t), \quad k = 1, \dots, N, \quad (6.1)$$

où les $W^k(t)$ sont des mouvements browniens standards, indépendants et $2d$ est la variance commune. La fonction "drift" F dans notre modèle est donnée par :

$$F = \beta \frac{(\nu^1 - \nu^2)}{N}, \quad (6.2)$$

avec

$$\begin{aligned} \nu^1(\theta) &= \sum_{l=1}^N 1_{]-\pi, 0]} (\theta - \theta_N^l(t)) \\ \nu^2(\theta) &= \sum_{l=1}^N 1_{]0, \pi]} (\theta - \theta_N^l(t)). \end{aligned}$$

$1_{]-\pi, 0]}$ (resp. $1_{]0, \pi]}$) est la fonction indicatrice de l'intervalle $]-\pi, 0]$ (resp. $]0, \pi]$), i.e $1_{]-\pi, 0]}(\theta) = 1$ si $\theta \in]-\pi, 0]$, et 0 sinon, et β représente le coefficient de correction.

L'objectif de ce chapitre est d'établir le passage du modèle microscopique d'alignement (6.1)

à sa version eulérienne :

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\sigma, t) = d \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} U(\sigma, t) - \beta \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(U(\sigma, t) \left[\int_{\sigma-\pi}^{\sigma} U(\theta, t) d\theta - \int_{\sigma}^{\sigma+\pi} U(\theta, t) d\theta \right] \right).$$

Dans un premier temps, dans le but d'expliquer ce passage, nous rassemblons au chapitre 10, quelques résultats connus sur les processus stochastiques, les trajectoires d'un mouvement brownien, l'intégrale stochastique et les équations différentielles stochastiques, en nous inspirant des ouvrages (Friedman, 1975; Øksendal, 1998; Metivier, 1968) et en nous basant principalement sur une présentation faite par (Capasso, 2000)). A l'aide de ces résultats, nous présentons ensuite le passage rigoureux du modèle lagrangien ou modèle eulérien.

6.2 De la description lagrangienne microscopique à la description eulérienne macroscopique

On introduit la fonction

$$G(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \theta \in]-\pi, 0], \\ -1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

prolongée par 2π -périodicité. Donc, (6.2) peut s'écrire :

$$\frac{(\nu^1 - \nu^2)}{N} = G * \frac{\sum_{l=1}^N \delta_{\theta_N^l(t)}}{N},$$

(δ_p désigne la mesure de Dirac en un point p), d'où

$$F \left[(\theta_N^l(t))_{1 \leq l \leq N} \right] (\theta_N^k(t)) = \beta \left(G * \frac{\sum_{l=1}^N \delta_{\theta_N^l(t)}}{N} \right) (\theta_N^k(t)), \quad (6.3)$$

On définit

$$\theta_N : t \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \theta_N(t) = \frac{\sum_{l=1}^N \delta_{\theta_N^l(t)}}{N}$$

appelé le processus empirique du système à N individus.

Un outil fondamental pour parvenir au modèle continu résulte de la formule d'Itô. On

considère la fonction $f(\theta_N^k(t), t)$, ($f \in C_b^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$), où les trajectoires $\{\theta_N^k(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ de particules vérifient l'équation différentielle stochastique (6.1).

On a :

$$\begin{aligned} f(\theta_N^k(t), t) &= f(\theta_N^k(0), 0) \\ &+ \int_0^t F[(\theta_N(s))](\theta_N^k(s)) \nabla f(\theta_N^k(s), s) ds \\ &+ \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial s} f(\theta_N^k(s), s) + d \frac{\partial^2}{\partial s^2} f(\theta_N^k(s), s) \right] ds \\ &+ \sqrt{2d} \int_0^t \nabla f(\theta_N^k(s), s) dW_s. \end{aligned} \quad (6.4)$$

On définit

$$\langle \mu, g \rangle = \int g(x) \mu(dx), \quad (6.5)$$

pour toute mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ et toute fonction suffisamment régulière $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

En utilisant (6.3) et (6.5), de l'équation (6.4) résulte la formulation faible de la variation dans le temps de $\theta_N(t)$, pour toute fonction $f \in C_b^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$:

$$\begin{aligned} \langle \theta_N(t), f(\cdot, t) \rangle &= \langle \theta_N(0), f(\cdot, 0) \rangle \\ &+ \int_0^t \langle \theta_N(s), \beta[G * \theta_N(s)] \nabla f(\cdot, s) \rangle ds \\ &+ \int_0^t \left\langle \theta_N(s), d \frac{\partial^2}{\partial s^2} f(\cdot, s) + \frac{\partial}{\partial s} f(\cdot, s) \right\rangle ds \\ &+ \frac{\sqrt{2d}}{N} \int_0^t \sum_{k=1}^N \nabla f(\theta_N^k(s), s) dW^k(s). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Considérons le terme

$$M_N(f, t) = \frac{\sqrt{2d}}{N} \int_0^t \sum_{k=1}^N \nabla f(\theta_N^k(s), s) dW^k(s);$$

c'est une martingale par rapport à la filtration naturelle du processus $\{\theta_N^k(t), t \in \mathbb{R}^+\}$. On

peut donc appliquer l'inégalité de Doob pour avoir :

$$E \left[\sup_{t \leq T} |M_N(f, t)| \right]^2 \leq \frac{8d \|\nabla f\|_{\infty}^2 T}{N}.$$

Par passage à la limite en N à $+\infty$, $M_N(f, \cdot) \rightarrow 0$ (convergence en moyenne quadratique).

En effet, en appliquant (10.3), on a

$$\begin{aligned} E \left[\sup_{t \leq T} |M_N(f, t)| \right]^2 &\leq E \left[\sup_{t \leq T} M_N(f, t)^2 \right] \\ &\leq 4E \left[M_N(f, t)^2 \right] \\ &\leq \frac{8d}{N^2} E \left[\left(\int_0^T \sum_{k=1}^N \nabla f(\theta_N^k(s), s) dW^k(s) \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

D'autre part, on sait que

$$\begin{aligned} E \left[\left(\int_0^T \sum_{k=1}^N \nabla f(\theta_N^k(s), s) dW^k(s) \right)^2 \right] &\leq E \left[\sum_{k=1}^N \left(\int_0^T \nabla f(\theta_N^k(s), s) dW^k(s) \right)^2 \right] \\ &\quad + 2E \left[\sum_{\substack{k, k' = 1 \\ k < k'}}^N \int_0^T \nabla f(\theta_N^k(s), s) dW^k(s) \int_0^T \nabla f(\theta_N^{k'}(s), s) dW^{k'}(s) \right]. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} I_1 &= E \left[\sum_{k=1}^N \left| \int_0^T \nabla f(\theta_N^k(s), s) dW^k(s) \right|^2 \right] \\ I_2 &= E \left[\sum_{\substack{k, k' = 1 \\ k < k'}}^N \int_0^T \nabla f(\theta_N^k(s), s) dW^k(s) \int_0^T \nabla f(\theta_N^{k'}(s), s) dW^{k'}(s) \right]. \end{aligned}$$

Il est clair que

$$\begin{aligned}
I_2 &= E \left[\sum_{\substack{k, k' = 1 \\ k < k'}}^N \int_0^T \nabla f \left(\theta_N^k(s), s \right) dW^k(s) \int_0^T \nabla f \left(\theta_N^{k'}(s), s \right) dW^{k'}(s) \right] \\
&= \sum_{\substack{k, k' = 1 \\ k < k'}}^N E \left[\int_0^T \nabla f \left(\theta_N^k(s), s \right) dW^k(s) \int_0^T \nabla f \left(\theta_N^{k'}(s), s \right) dW^{k'}(s) \right].
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
&E \left(\int_0^T \nabla f \left(\theta_N^k(s), s \right) dW^k(s) \int_0^T \nabla f \left(\theta_N^{k'}(s), s \right) dW^{k'}(s) \right) \\
&= E \left[\sum_{j, j' = 1}^{\infty} \nabla f \left(\theta_N^k(s_j), s_j \right) \left(W^k(s_{j+1}) - W^k(s_j) \right) \nabla f \left(\theta_N^{k'}(s_{j'}), s_{j'} \right) \left(W^{k'}(s_{j'+1}) - W^{k'}(s_{j'}) \right) \right] \\
&= \sum_{j, j' = 1}^{\infty} E \left[\nabla f \left(\theta_N^k(s_j), s_j \right) \left(W^k(s_{j+1}) - W^k(s_j) \right) \nabla f \left(\theta_N^{k'}(s_{j'}), s_{j'} \right) \left(W^{k'}(s_{j'+1}) - W^{k'}(s_{j'}) \right) \right] \\
&= \sum_{\substack{j, j' = 1 \\ j \neq j'}}^{\infty} E \left[\nabla f \left(\theta_N^k(s_j), s_j \right) \left(W^k(s_{j+1}) - W^k(s_j) \right) \right. \\
&\quad \left. \nabla f \left(\theta_N^{k'}(s_{j'}), s_{j'} \right) \left(W^{k'}(s_{j'+1}) - W^{k'}(s_{j'}) \right) \right] \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\infty} E \left[\nabla f \left(\theta_N^k(s_j), s_j \right) \nabla f \left(\theta_N^{k'}(s_j), s_j \right) \left(W^k(s_{j+1}) - W^k(s_j) \right) \left(W^{k'}(s_{j+1}) - W^{k'}(s_j) \right) \right].
\end{aligned}$$

Or, les $(W^k)_k$ sont indépendants, on a

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{j, j' = 1 \\ j \neq j'}}^{\infty} E \left[\nabla f \left(\theta_N^k(s_j), s_j \right) \left(W^k(s_{j+1}) - W^k(s_j) \right) \right. \\
& \quad \left. \times \nabla f \left(\theta_N^{k'}(s_{j'}), s_{j'} \right) \left(W^{k'}(s_{j'+1}) - W^{k'}(s_{j'}) \right) \right] \\
&= \sum_{\substack{j, j' = 1 \\ j \neq j'}}^{\infty} \left\{ E \left[\nabla f \left(\theta_N^k(s_j), s_j \right) \left(W^k(s_{j+1}) - W^k(s_j) \right) \right] \right. \\
& \quad \left. \times E \left[\nabla f \left(\theta_N^{k'}(s_{j'}), s_{j'} \right) \left(W^{k'}(s_{j'+1}) - W^{k'}(s_{j'}) \right) \right] \right\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De même :

$$\sum_{j=1}^{\infty} E \left[\nabla f \left(\theta_N^k(s_j), s_j \right) \nabla f \left(\theta_N^{k'}(s_j), s_j \right) \left(W^k(s_{j+1}) - W^k(s_j) \right) \left(W^{k'}(s_{j+1}) - W^{k'}(s_j) \right) \right] = 0.$$

Ainsi

$$E \left[\sum_{\substack{k, k' = 1 \\ k < k'}}^N \int_0^T \nabla f \left(\theta_N^k(s), s \right) dW^k(s) \int_0^T \nabla f \left(\theta_N^{k'}(s), s \right) dW^{k'}(s) \right] = 0. \quad (6.7)$$

Par l'isométrie d'Itô (10.7), on a

$$\begin{aligned} I_1 &= E \left[\sum_{k=1}^N \left(\int_0^T \nabla f \left(\theta_N^k(s), s \right) dW^k(s) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{k=1}^N E \left[\int_0^T \nabla f \left(\theta_N^k(s), s \right)^2 ds \right] \\ &\leq TN \|\nabla f\|_\infty^2, \end{aligned}$$

ce qui entraîne, en vertu de (6.7),

$$E \left[\sup_{t \leq T} |M_N(f, t)| \right]^2 \leq \frac{8d \|\nabla f\|_\infty^2 T}{N}.$$

Supposons maintenant que le processus empirique $\{\theta_N(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ tend, quand $N \rightarrow \infty$, vers un processus déterministe $\{\Theta(t), t \in \mathbb{R}^+\}$, de densité de probabilité $U(\sigma, t)$:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \theta_N(t), f(\cdot, t) \rangle &= \langle \Theta(t), f(\cdot, t) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\sigma, t) U(\sigma, t) d\sigma, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Comme conséquence on a

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \theta_N(t), \beta [G * \theta_N(s)] \nabla f(\cdot, s) \rangle &= \langle \Theta(t), \beta [G * \Theta(s)] \nabla f(\cdot, s) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} (U(\sigma, s) \beta [G * U(\cdot, s)](\sigma)) \nabla f(\sigma, s) d\sigma \end{aligned}$$

En appliquant les résultats ci-dessus, l'équation (6.6), devient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(\sigma, t) U(\sigma, t) d\sigma &= \int_{\mathbb{R}} f(\sigma, 0) U(\sigma, 0) \sigma d\sigma \\ &= \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} (U(\sigma, s) \beta [G * U(\cdot, s)](\sigma)) \nabla f(\sigma, s) d\sigma \\ &= \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \left[d \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} f(\sigma, s) U(\sigma, s) + \frac{\partial}{\partial s} f(\sigma, s) U(\sigma, s) \right] d\sigma \end{aligned}$$

qui est une version faible du modèle eulérien

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\theta, t) = d \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} U(\theta, t) - \beta \frac{\partial}{\partial \theta} (U(\theta, t) [G * U(\theta, t)]).$$

Chapitre 7

Simulateur de comportements d'alignement

Notre simulateur est un outil d'experimentation permettant de représenter d'une façon virtuelle (informatique) les comportements individuels d'alignement. Ce simulateur, conçu au cours de cette thèse, a été mis en oeuvre à l'aide du langage orienté objet JAVA. Il consiste en un modèle individu-centré (IBM) décrivant les mouvements angulaires d'un grand nombre d'individus (constituant la population virtuelle) cherchant à adopter l'orientation majoritaire environnante.

Un simulateur IBM de formation de bancs de poissons (simulateur ICHTYUS), montrant comment il est possible de comprendre leur constitution et leur évolution à partir d'une population aléatoire répartie dans l'espace, a été élaboré il y a quelques années dans une collaboration entre J. P. Treuil, P. Fréon, et J. Ferber (Ferber, 1994). ICHTYUS a guidé notre travail, mais le coeur de notre simulateur s'appuie sur la version discrète du modèle

de Grunbaum (1998). Il a été développé dans un double intérêt :

- 1) faire une comparaison avec les résultats obtenus par l'analyse mathématique,
- 2) établir d'autres résultats qui ne sont pas mis en évidence par cette même analyse.

Dans ce chapitre, nous rappelons le modèle sous jacent, puis la structure informatique du simulateur et son fonctionnement.

7.1 Le modèle du simulateur

Ce modèle est la version discrétisé temporellement du modèle à temps continu présenté et discuté dans les chapitres précédents (4-5-6). On travaille donc avec un groupe de N individus, chaque individu étant repéré par un numéro i ($i = 1, 2, \dots, N$) ayant chacun à l'instant t , l'angle $\theta_N^i(t)$. Les individus sont au départ orientés de façon aléatoire. Le temps évolue de manière cette fois discrète par pas temporel Δt à partir d'un temps initial que nous ramenons à 0. Il sera commode d'utiliser la lettre t pour représenter un temps quelconque, mais t sera un multiple de Δt .

Le modèle lagrangienne implémenté est :

$$\theta_N^i(t + \Delta t) = \theta_N^i(t) + \Theta^i \sqrt{2d\Delta t} + \beta \frac{(\nu_i^1(t) - \nu_i^2(t))}{N}, \quad (7.1)$$

où, $(\Theta^i)_{1 \leq i \leq N}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées Gaussiennes centrées réduites;

β est l'amplitude de la force d'alignement des poissons;

d est le paramètre de diffusion d (qui traduit l'effet aléatoire du milieu sur l'orientation);

ν_i^1 est le nombre d'individus j tel que :

$$-\pi \leq \theta_N^j(t) - \theta_N^i(t) < 0, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (7.2)$$

et ν_i^2 le nombre d'individus j tel que :

$$0 \leq \theta_N^j(t) - \theta_N^i(t) < \pi, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (7.3)$$

L'équation (7.1) est bien la discrétisation temporelle du modèle Lagrangien

$$d\theta_N^i(t) = \beta \frac{(\nu_i^1(t) - \nu_i^2(t))}{N} dt + \sqrt{2d} (dW^i(t)). \quad (7.4)$$

Rappelons que le temps évolue de manière cette fois discrète par pas temporel Δt : $t \in \{0, \Delta t, \dots, N\Delta t = T\}$. La marche de Wiener $(W(t))_{t \geq 0}$ est le processus défini par $W(0) = 0$ et pour $t \geq \Delta t$,

$$W(t) = W(t - \Delta t) + \varepsilon(t) \sqrt{\Delta t}, \quad (7.5)$$

où :

i) $\varepsilon(t)$ est une v.a de Bernouilli telle que

$$P(\varepsilon(t) = 1) = P(\varepsilon(t) = -1) = \frac{1}{2},$$

ii) (ou bien) $\varepsilon(t)$ est une distribution Gaussienne centrée réduite ($E(\varepsilon(t)) = 0$ et $V(\varepsilon(t)) = 1$). Dans notre cas, nous avons supposé $\varepsilon(t) = \Theta$.

Donc (18) devient :

$$W^i(t) = W^i(t - \Delta t) + \Theta^i \sqrt{\Delta t},$$

ou encore

$$dW_t^i = \Theta^i \sqrt{\Delta t}.$$

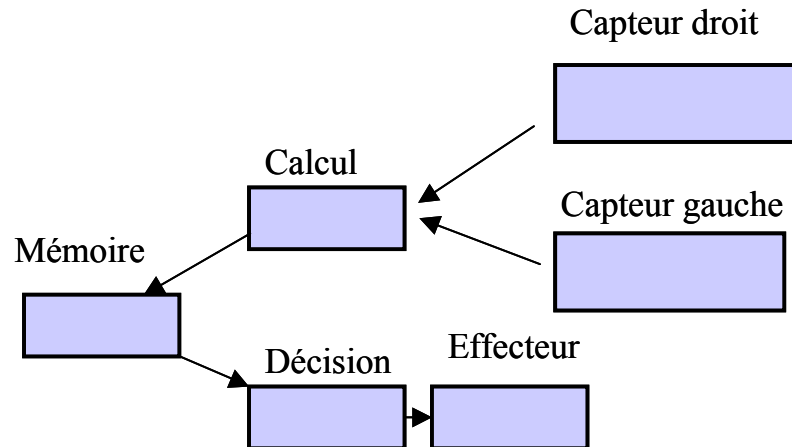
Par conséquent, d'après (7.4), on obtient la formule

$$\begin{aligned}\theta_N^i(t + \Delta t) &= \theta_N^i(t) + \beta \frac{(\nu_i^1(t) - \nu_i^2(t))}{N} \Delta t + \sqrt{2d} [W^i(t + \Delta t) - W^i(t)] \\ &= \theta_N^i(t) + \beta \frac{(\nu_i^1(t) - \nu_i^2(t))}{N} \Delta t + \Theta^i \sqrt{2d\Delta t}.\end{aligned}$$

7.2 Algorithme et dynamique du simulateur

7.2.1 La métaphore du robot

L'implémentation de l'équation (7.1) est inspiré des systèmes multi-agents : programmer le poisson comme un agent. En d'autre termes, c'est mettre en oeuvre une métaphore dans laquelle les poissons sont programmés comme s'ils étaient des robots dans un environnement réel (Treuil *et al.*, 2001; Martinoli et Deneubourg, 2002). Les robots sont capables de décider eux mêmes de leurs actions à partir de la perception locale qu'ils ont de leur environnement, selon des règles de comportements. Aussi sont ils dotés d'organes sensoriels (capteurs), d'organes de mémoire, d'organes de décision et d'organes d'action (effecteurs) leur permettant de réagir aux changements de l'environnement et d'interagir entre eux. L'application de cette métaphore nous conduit donc à programmer des poissons virtuels dotés de capteurs, de mémoires, d'organes de décision, d'effecteurs évoluant dans un environnement qui bien sûr doit être lui même simulé (*Figure 7.1*). Il faut définir et programmer l'influence qui exerce l'environnement sur les capteurs, celle qui exerce chaque poisson virtuel sur l'environnement à travers ses effecteurs, enfin la réaction de l'environnement à l'action des effecteurs.

FIG. 7.1: *Métaphore du robot.*

7.2.2 Son application au problème étudié

Dans notre cas, l'application de la métaphore nous conduit à une structure très simplifiée des capteurs, mémoires, décisions et effecteurs ; chaque poisson virtuel repéré par un index i ($i = 1, 2, \dots, N$) possède un état observable de l'extérieur constitué de son orientation. Il reçoit respectivement dans son capteur droit et son capteur gauche, l'information constituée par les nombres ν_i^1 et ν_i^2 en utilisant les formules (7.2) et (7.3) à l'aide de deux capteurs droit et gauche. Il mémorise dans sa mémoire la différence algébrique $(\nu_i^1 - \nu_i^2)$. Il décide de la correction à effectuer compte de cette différence et cette correction est placée dans l'effecteur. L'environnement réagit à cette correction lue dans l'effecteur pour mettre à jour l'orientation dans l'état externe (*Figure 7.2*).

Les détails des attributs et méthodes des objets créés par la classe <<poisson>> sont expliqués dans (*Figure 7.3*).

Le cycle de ces opérations est effectué de façon synchrone : l'environnement met à jour

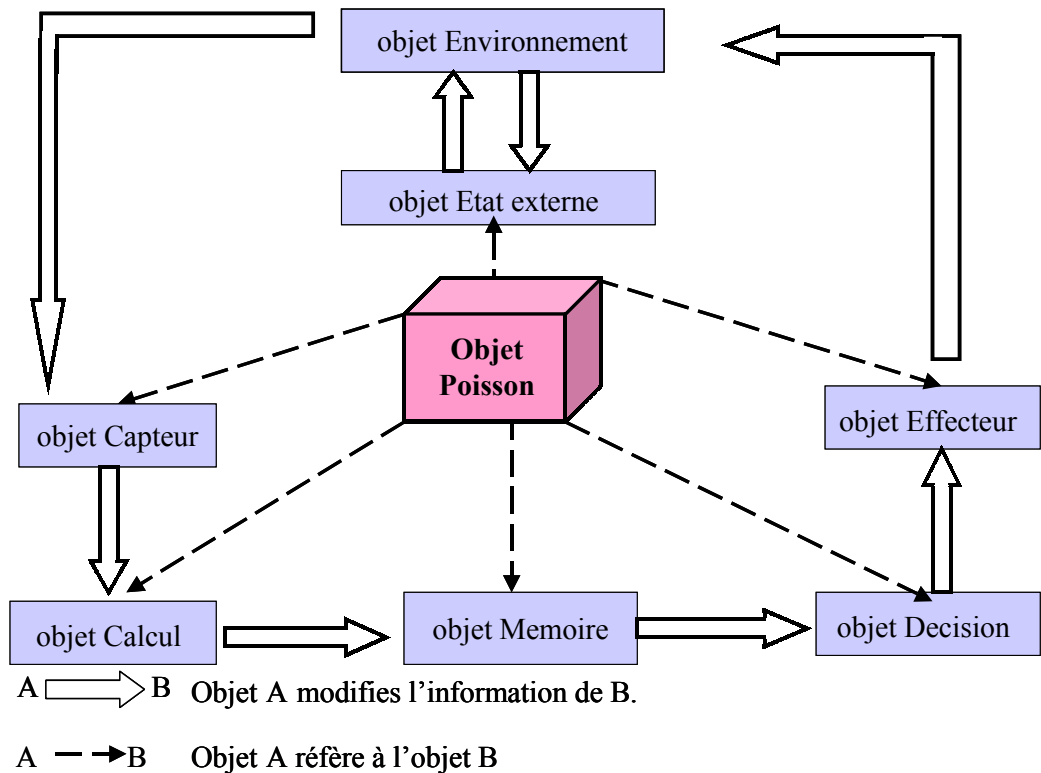


FIG. 7.2: *Circuit de l'information.*

tous les capteurs, puis chaque poisson modifie son effecteur à partir des informations reçues et enfin, lorsque tous les poissons ont effectué ces opérations, l'environnement met à jour toutes les orientations des poissons. Dans la mise à jour des capteurs, l'environnement possède un mécanisme d'optimisation (divisé en secteurs appelé médiateur) qui lui permet pour chaque poisson de ne pas avoir à rebalayer tous les autres pour calcul les nombres de droite et gauche. Ce mécanisme gagne un temps de calcul lorsqu'il y a un grand nombre d'individus.

Comme on l'a dit, les opérations effectuées pour chaque organe sont ici élémentaires, mais la structure est mise en place pour des mécanismes plus complexes. Par exemple,

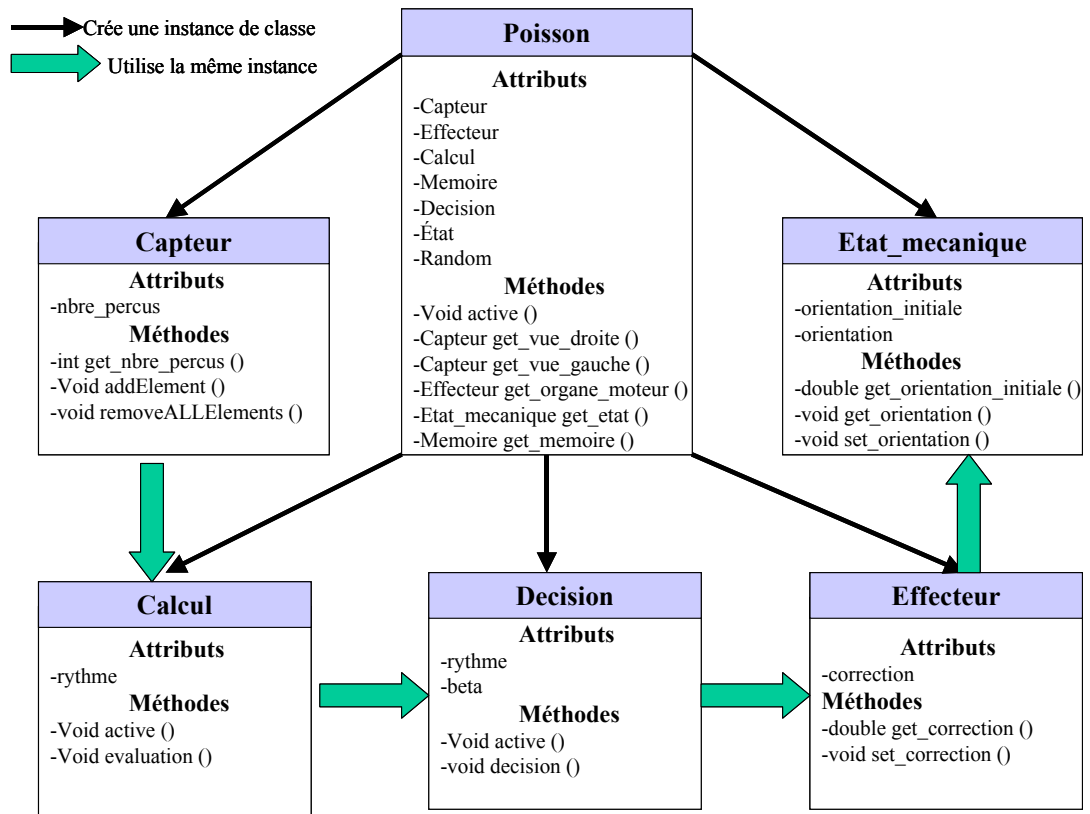


FIG. 7.3: *Attributs et méthodes des objets créés par la classe <<poisson>>.*

le poisson virtuel pourrait utiliser sa mémoire pour réagir avec un retard et non à la perception immédiate, le calcul de la correction pourrait être différent.

Le champ d'application du programme peut aisément dépasser le cadre des poissons et s'applique à d'autres cas, les oiseaux, lorsqu'ils effectuent un vol en formation, ou un comportement de foule.

7.3 Principe et architecture du simulateur

7.3.1 Interface du simulateur

Le simulateur est doté d'une interface, qui permet de positionner les scénarios que l'on veut tester, visualiser en temps réel le comportement d'alignement et suivre les évolutions de différents indicateurs. Cette interface se compose de trois fenêtres :

1) le "panneau de commande" : qui se décompose en trois parties :

i) les paramètres caractérisant le monde simulé et la durée de la simulation (durée de simulation, nombre d'individus, correction $\beta = (\frac{rad}{s})$, diffusion $d = (\frac{rad^2}{s})$);

ii) paramètres de discrétisation et d'optimisation (pas de temps de base, nombre de médiateurs);

iii) boutons de contrôle : nouvelle simulation (pour initialiser une simulation à partir des paramètres inscrits au tableau de commandes éventuellement à partir d'un fichier ; exécution (pour lancer l'exécution d'une simulation préalablement initialisée) ; pause (pour inspecter certains paramètres lors de cet arrêt) ; reprise (pour reprendre l'exécution momentanément interrompue ; sortie (pour sortir du programme) ;

2) la fenêtre "vue situation" : qui représente les orientations des individus. Elle permet donc d'observer l'état à chaque instant des orientations de chaque poisson ;

3) la fenêtre "vue évolution" : qui permet de visualiser l'évolution de la largeur angulaire de la distribution des orientations et l'orientation moyenne (*Figure 7.4*).

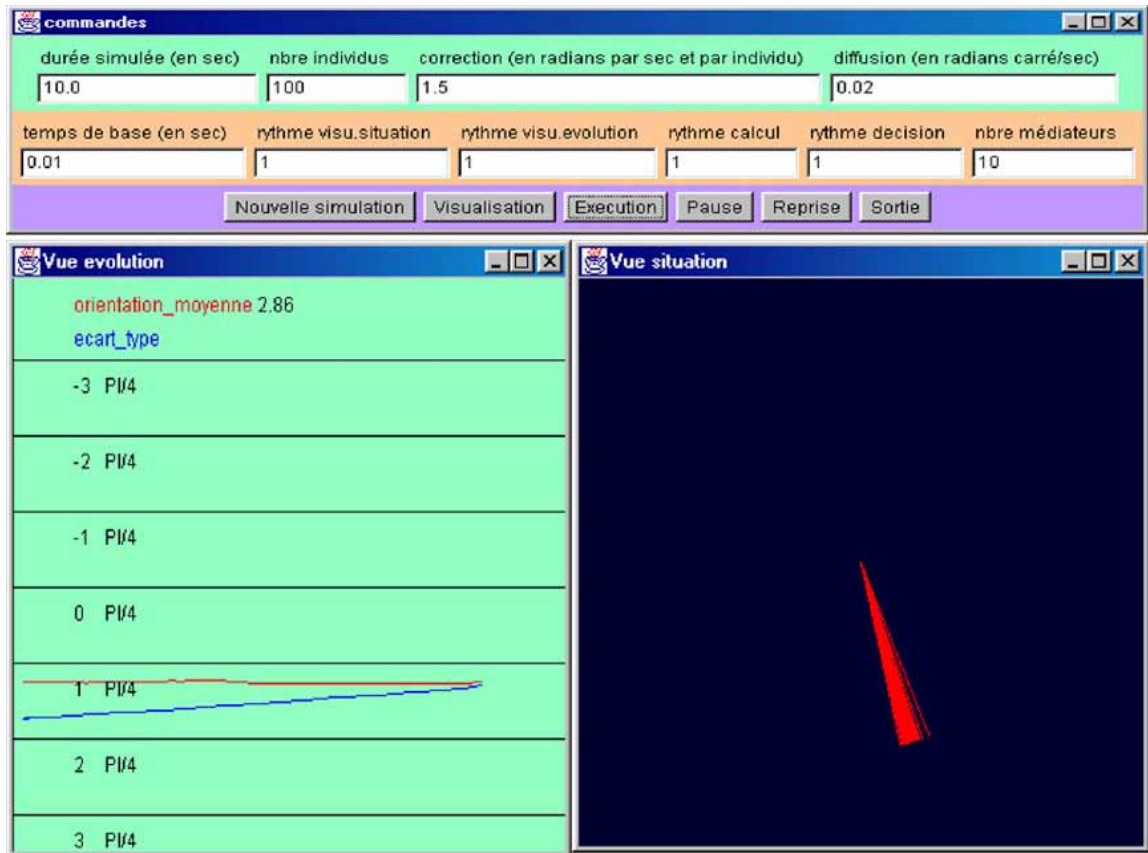


FIG. 7.4: Interface du simulateur

7.3.2 Organigramme des classes du simulateur

Ce programme est organisé en classes, constituant des morceaux de programme indépendants, pouvant être utilisés par d'autres classes. Pour être active, une classe doit être instanciée, c'est à dire qu'un objet de cette classe doit être créé. Ainsi, le lancement du programme instancie la classe principale *Agrégation*, c'est à dire qu'elle crée un objet de cette classe (Figure 7.5). L'objet *Agrégation* ainsi créé instancie à son tour la classe *Commandes* et crée et affiche le panneau de Commandes. L'objet *Commandes* instancie quant à lui la classe *Simulation*, par laquelle sont instantiées simultanément la classe *Population*, la classe

Environnement, la classe *Vue situation* et la classe *Vue evolution*. Ces deux derniers objets ouvrent les fenêtres de visualisation des résultats. L'objet *Population* instancie la classe *Poisson* autant de fois que nécessaire, selon le nombre de poissons à créer. L'objet *Environnement* instancie la classe *Médiateur* autant de fois que de médiateurs désirés. Chaque objet poisson instancie enfin autant de fois que nécessaire les classes *Capteurs*, *Mémoires*, *Calculs*, *Décisions*, *Effecteurs* et *Etat externes* (Figure 7.5).

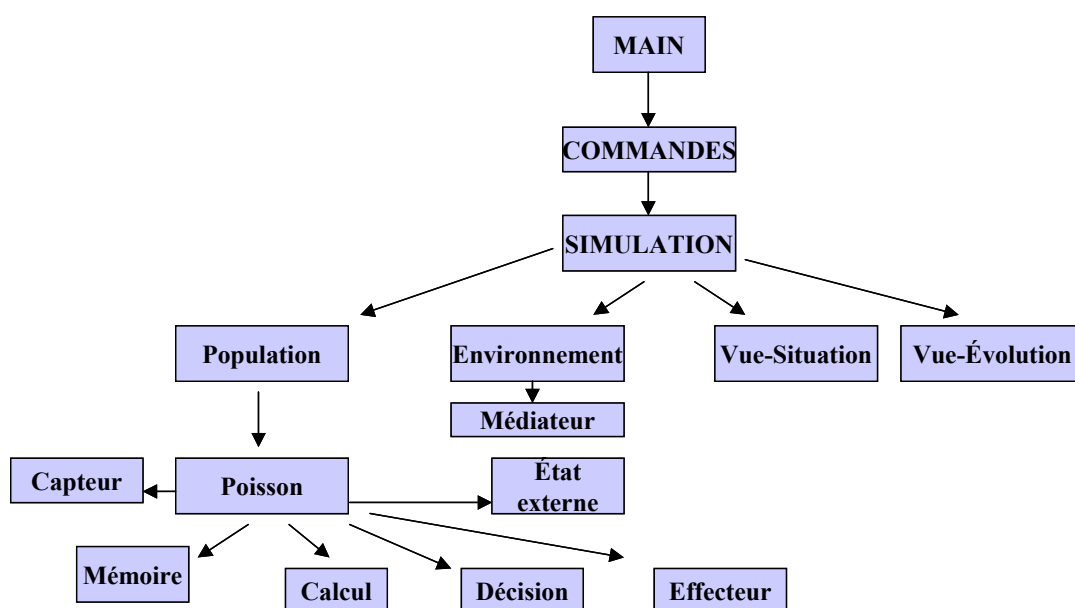


FIG. 7.5: Organigramme des classes du simulateur.

7.4 Conclusion

Le simulateur présenté a pour ambition de constituer un laboratoire virtuel d'étude de comportement d'alignement. Il permet d'expérimenter et de quantifier l'évolution de largeur angulaire de la distribution des orientations par différents quantificateurs. Il constitue

une interprétation individu-centrée discrète du modèle eulérien d'alignement analysé mathématiquement. Il est fondé sur une représentation explicite d'individus.

Un plan d'exploration systématique d'un ensemble de scénarios, caractérisé chacun par l'intensité de diffusion, l'intensité du comportement d'alignement directionnel des poissons et enfin la densité (le nombre de poissons mis en jeu) sont décrites dans le chapitre suivant. Nous avons étudié, pour chaque scénario, le comportement du système, à travers alignement (l'ouverture résiduelle du faisceau des directions prises), et le temps mis par le système pour atteindre l'état stationnaire manifestant cette ouverture résiduelle. Nous avons également étudié la manière dont ces grandeurs variaient d'une simulation à l'autre, pour les mêmes valeurs des paramètres. Nous avons donné pour chaque simulation les grandeurs en unité concrète (radians, secondes) pour permettre le rapprochement de ces résultats avec les données observés.

Chapitre 8

Simulations et résultats

Les résultats présentés dans ce chapitre constitue une synthèse des expériences menées à l'aide du simulateur IBM sur le comportement d'alignement présenté dans le chapitre précédent. L'objectif est d'étudier les grands traits dynamiques qui émergent au niveau de la population à partir de comportement modélisés au niveau individuel. L'exploration des données a été menée par le biais d'un plan d'expérience. Celui-ci définit les conditions de simulation, et les paramètres testés. Tout d'abord, nous présentons les scénarios simulés, suivi des résultats obtenues. Nous aborderons à la fin de ce chapitre, une discussion sur ces résultats et leurs validités.

8.1 Présentation des scénarios simulés

8.1.1 L'espace des paramètres d'entrée

L'étude mathématique montre que le rapport du coefficient β (taux d'alignement) sur le coefficient d représentant la <<force>> de diffusion, $\lambda = \frac{\beta}{d}$ joue un rôle important

dans le phénomène d'alignement. Nous avons établi l'existence d'un seuil λ_0 tel que pour $\lambda < \lambda_0$, la dispersion passive domine, et que pour $\lambda > \lambda_0$ l'alignement active domine : le groupe s'organise alors suivant une géométrie qui met en relief le phénomène d'alignement. L'intérêt de l'étude du modèle IBM (modèle individu centré) implémenté en langage de simulation JAVA est double :

- i) faire une comparaison avec les résultats obtenus par l'analyse mathématique
- ii) établir d'autres résultats qui ne sont pas mis en évidence par cette analyse.

De ce fait, nous sommes donc amenés à explorer différents scénarios dans un espace de paramètres constitué de :

- 1) la diffusion $d = \left[\frac{(\text{rad})^2}{s} \right]$
- 2) le rapport $\lambda = \frac{\beta}{d} = [\text{rad}]$
- 3) le nombre d'individus N

et à étudier le comportement du système selon différentes régions de cet espace.

Nous nous concentrons d'abord sur l'influence de d et de λ pour un nombre d'individus N fixé à 100. Nous étudions ensuite l'influence de ce dernier paramètre.

Un quatrième paramètre rentre aussi en jeu. Il s'agit de la durée du pas de temps de discrétisation. Ce paramètre peut faire l'objet d'une étude séparée, par les méthodes de l'analyse numérique. Nous avons fait l'étude pour deux valeurs, 0,01 et 0,1. Nous nous contentons ici de le fixer à 0,01 secondes, valeur suffisamment petite pour assurer la validité globale des résultats, mais nous discuterons aussi de l'effet du pas de temps.

Un scénario sera donc caractérisé par une valeur de d , une valeur de λ , et une valeur de N .

8.1.2 Les caractéristiques du comportement :

Pour chaque point (d, λ, N) de l'espace des paramètres d'entrée, nous étudions le comportement du système. L'observation des simulations à travers les deux écrans de visualisation montre d'abord qu'au bout d'un certain temps variable, s'établit toujours un état stationnaire concernant l'orientation et la largeur du faisceau des directions des N poissons. L'orientation moyenne de cet état stationnaire dépend des conditions initiales et ne constitue pas une variable significative.

Nous caractérisons donc le comportement par deux valeurs :

- 1) l'écart type W obtenu à près un temps suffisamment long pour que l'état stationnaire soit atteint.
- 2) le temps de stabilisation τ , c'est-à-dire le temps nécessaire pour atteindre ce régime stationnaire.

8.1.3 Les conditions d'expérimentation :

Des expérimentations préliminaires ont donné une estimation des temps nécessaires pour atteindre les états stationnaires dans différentes régions de l'espace (d, λ, N) . Ces explorations préliminaires ont également montré une certaine variabilité, aussi bien sur l'écart type que sur le temps de stabilisation. C'est la raison pour laquelle nous avons été amenés à faire au minimum 5 simulations par scénario. L'étude de cette variabilité fait également partie des résultats présentés.

8.1.4 Les scénarios exploités

Compte tenu de ces considérations, nous avons établi le plan d'expérience présenté dans le tableau suivant, donnant pour les différents scénarios (d, λ, N) le nombre de simulations conduites pour chacun d'entre eux et la durée simulée.

$d \backslash \lambda$	0.0	0.5	1.0	1.5	1.7	2.0	3.0	10	20	40
0.011	5 simulations 1000 s	//	//	//	//	//	//	//	//	//
0.11	5 simulations 1000 s	//	//	//	//	//	//	//	//	//
1.1	5 simulations 1000 s	//	//	//	//	//	//	//	//	//

Ce plan d'expérience répond aux objectifs suivants :

- 1) étudier le comportement du système autour de la valeur critique $\lambda_0 = \frac{\pi}{2}$, pour trois valeurs de d nettement différentes.
- 2) étudier le comportement pour de grandes valeurs de λ de loin de la valeur critique, pour laquelle l'alignement actif domine.

Le choix des valeurs de d est de couvrir les valeurs évoquées dans la littérature. L'idée est de prendre les valeurs s'étalant sur une large plage (rapport de 1 à 100), donc rapport de 1 à 10 sur l'écart type de l'aléa sur l'orientation. Nous y reviendrons dans la discussion sur la vraisemblance physique de ces valeurs.

8.2 Résultats

Nous présentons les résultats pour $N = 100$, et pour $N = 1000$ à titre de comparaison : dans chaque cas, nous focalisons d'abord sur l'écart type, ensuite sur le temps de

stabilisation.

8.2.1 Valeur moyenne de l'écart type

Analyse du comportement de l'écart type

Une différence apparaît d'emblée; elle concerne le comportement observé pour $d = 1.1$ (*Figure 8.2*), par rapport aux deux autres. Pour des valeurs de λ inférieur à 6, ce comportement est semblable aux deux autres pour $d = 0.011$ et $d = 0.11$. Au contraire pour des valeurs de λ loin de la valeur critique le comportement est totalement différent. Cela semble lié à de trop fortes valeurs du coefficient d'alignement. Pour $d = 1.1$, $\lambda \approx 6$, nous avons en effet $\beta = 6.6$. Ce même coefficient appliqué aux autres diffusions conduit à un comportement similaire. Il semble que ces valeurs de trop fortes introduisent une agitation très grande dans le faisceau des poissons pour qu'un ordre quelconque puisse se constituer. Cette hypothèse reste à confirmer.

En éliminant trop forte les valeurs de β nous établissons les résultats suivants :

- i) pour d fixé, W décroît quand λ augmente, particulièrement après 1,5
- ii) quand d varie pour λ fixé, l'ordre de grandeur de W reste le même. Aucun sens net de variation n'apparaît.
- iii) W dépend essentiellement du paramètre λ .
- iv) Existence pour ce paramètre d'un seuil se situant dans une plage allant de 1.5 à 1.7, donc d'un ordre de grandeur indépendant de d . Au dessous de ce seuil W diminue faiblement indépendamment du choix de d . Au dessus de ce seuil, la décroissance est plus rapide (*Figure 8.1*).

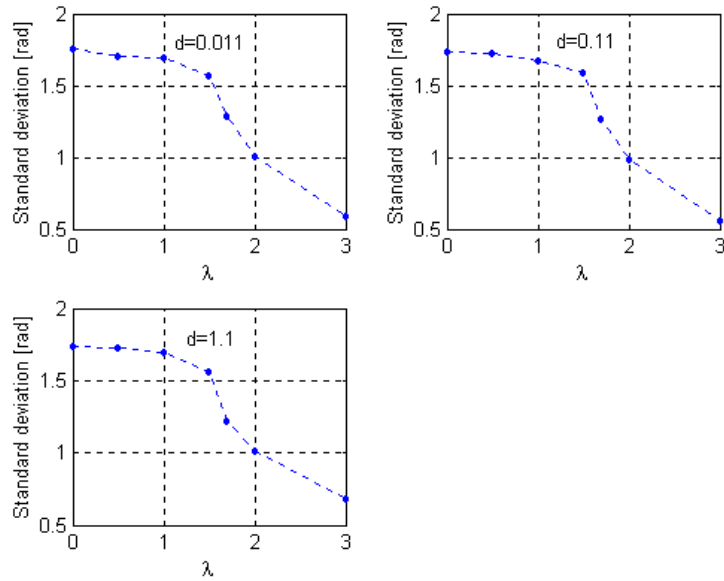


FIG. 8.1: Diagramme de phase montrant deux régions : stable et instable comme fonction de λ et de $d = 0.011, 0.11, 1.1$. Ces figures sont obtenues après 100,000 pas de temps, pour un groupe de 100 individus.

v) Un fort alignement c'est-à-dire un faisceau serré d'ouverture angulaire (mesuré par l'écart type) ne dépassant pas 2 degrés est obtenu pour des valeurs de $\lambda > 40$ (Figure 8.2).

Variabilité de l'écart type

Pour $N = 100$, l'analyse de 5 simulations que nous avons fait pour divers scénarios montre une variabilité des valeurs de l'écart type, comme ci indiqué dans la (Figure 8.6).

L'examen de ces résultats met d'abord en évidence le passage par un maximum, pour une valeur de λ de l'ordre de grandeur du seuil dégagé dans l'étude de l'écart type moyen. Au contraire, lorsque λ se situe aux extrêmes (maintien d'une grande dispersion ou forte agrégation) la variabilité de l'écart type est faible : dans le cas de grande valeurs de λ , la variabilité relative (rapportée à la valeur moyenne) n'est que de l'ordre de 10%. Ces

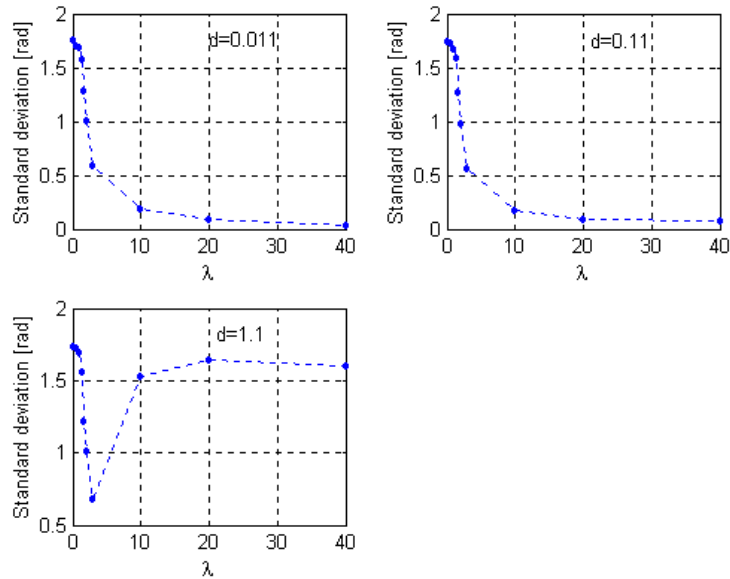


FIG. 8.2: Moyenne écart type en fonction du paramètre λ . Ces valeurs sont obtenues après 100,000 pas de temps, pour un groupe de taille $N = 100$ et pour $d = 0.011, 0.11, 1.1$.

résultats sont à mettre en rapport avec l'analyse du temps de stabilisation, faite ci dessous.

8.3 Analyse du comportement du temps de stabilisation

8.3.1 Moyenne du temps de stabilisation

Le temps de stabilisation a été obtenu de la manière suivante : pour chaque scénario, nous avons recommencé 5 nouvelles simulations et les avons arrêté dès lors que l'écart type atteignait la valeur moyenne calculée par les 5 premiers simulations. Cette méthode introduit une sous-estimation du temps dans les cas où l'on n'atteint pas cette écart type avant le temps maximum autorisé. Toutefois, ce cas de figure ne trouve que très rarement. Les valeurs représentées dans les graphiques sont donc les moyennes des valeurs obtenues. Les résultats concernant la moyenne des temps de stabilisation (exprimés en secondes) sont

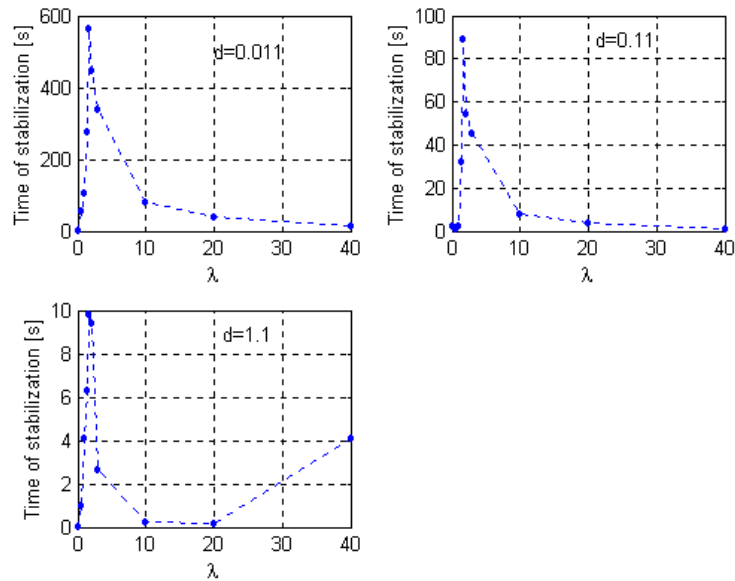


FIG. 8.3: Temps de stabilisation en fonction de λ pour $d = 0.011, 0.11, 1.1$ après 100,000 pas de temps, pour un groupe de taille $N = 100$.

présentés dans la (Figure 8.3). On peut résumer notre analyse à quatre remarques :

- i) Le nombre de pas de temps (100.000 pas de temps) que nous avons pris tout au long des expériences est largement suffisant.
- ii) Le tableau montre un temps de stabilisation passant par un maximum pour des valeurs de λ se situant dans une plage immédiatement postérieure au seuil critique, et ce pour toutes les valeurs de d étudiées.
- iii) Pour les valeurs de λ très loin de λ_c , le produit $\tau \times \lambda$ diminue : lorsque λ croît le temps de stabilisation diminue plus rapidement.
- iv) Pour λ fixé, le temps de stabilisation décroît quand d croît. Pour les valeurs basses de d , le maximum du temps de stabilisation est très important. Ainsi, pour $\lambda \approx 1.7$, nous obtenons respectivement pour $d = 0.011, d = 0.11, d = 1.1$, les valeurs respectivement

du temps de stabilisation en (secondes) : $\tau = 564.555$, $\tau = 89.301$, $\tau = 9.834$.

Ces résultats peuvent être interprétés comme suit : Quand λ atteint et dépasse une valeur critique λ_c , un point d'équilibre non trivial apparaît au voisinage de l'équilibre trivial $\frac{1}{2\pi}$. Pour $\lambda > \lambda_c$ mais proche de λ_c , l'équilibre trivial est instable, mais plutôt faiblement instable, tandis que l'équilibre non-trivial est faiblement stable. Donc, les solutions issues d'un voisinage de ces points d'équilibre vont s'éloigner plutôt lentement de l'équilibre trivial et converger plutôt lentement vers l'équilibre non-trivial. Du point de vue numérique, ceci se manifeste par un allongement de la durée de stabilisation qui peut donc servir à caractériser la valeur critique.

8.3.2 Variabilité du temps de stabilisation

Comme ci-indiqué dans la (*Figure 8.3*), la variabilité du temps de stabilisation est plus forte dans la plage comprise entre 1.5 et 1.7. On retrouve donc sur la variabilité du temps de stabilisation des résultats parallèles à ceux obtenus sur la variabilité de l'écart type et sur le temps de stabilisation lui-même, à savoir l'existence de maxima dans la zone du seuil critique sur λ (*Figure 8.6*, *Figure 8.8*).

8.4 Effet de la densité

8.4.1 Ecart type et variabilité

On constate que les résultats sur l'écart type et sa variabilité sont dans leur ordre de grandeur les mêmes que ceux obtenus précédemment pour $N = 100$. Les valeurs obtenues sont même pratiquement équivalentes pour λ supérieur au seuil critique. En deçà, on observe

que les valeurs de l'écart type sont supérieures, légèrement mais de façon nette, pour $N = 1000$ (*Figure 8.4, Figure 8.5*). On doit y voir l'effet mécanique de la densité : un plus grand nombre de poissons rapproche l'écart type de celui valable dans une distribution uniforme continue, qui est de l'ordre de 1,8. La courbe obtenue met particulièrement en évidence l'existence du seuil sur λ . La relative similarité de la variabilité de l'écart type entre les

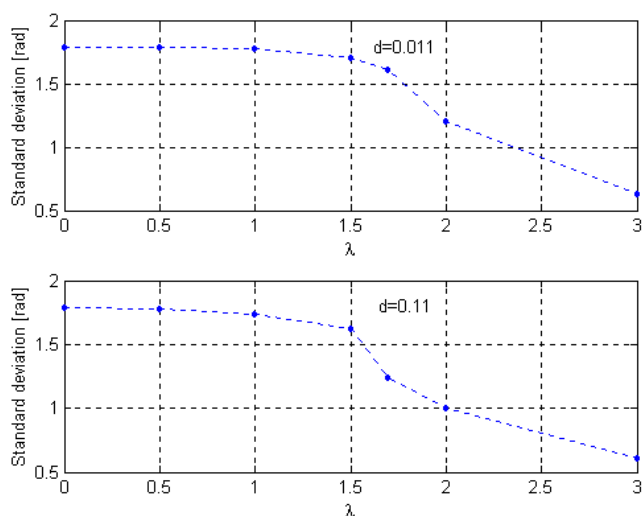


FIG. 8.4: Diagramme de phase montrant deux régions : stable et instable comme fonction de λ et de $d = 0.011, 0.11$. Ces figures sont obtenues après 100,000 pas de temps, pour un groupe de 1000 individus.

deux densités $N = 100$ et $N = 1000$ est aussi à constater. En face de cette persistance d'une certaine variabilité (au moins autour de la valeur critique), on peut se demander quelle est son origine. S'agit-il d'une variabilité entre les écarts asymptotiques obtenus pour chaque simulation ; ou s'agit-il d'une variabilité manifestant des oscillations résiduelles au sein d'une même simulation.

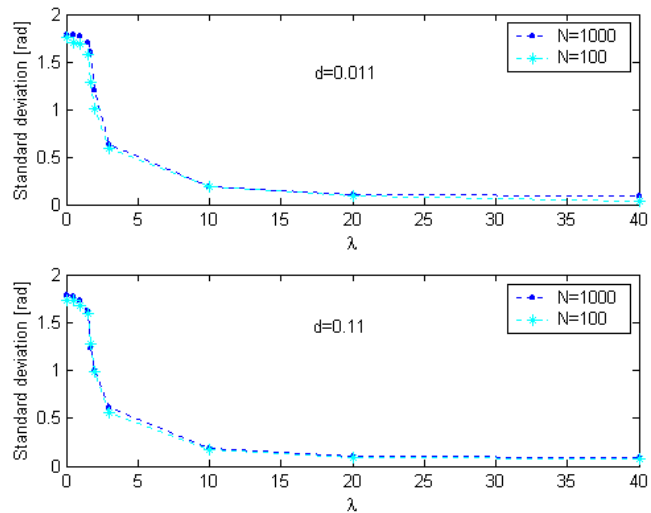


FIG. 8.5: *Comparison de la valeur moyenne de l'écart type en fonction de λ entre le groupe de taille $N = 100$ et le groupe de taille $N = 1.000$. Ces courbes sont obtenues après 100,000 pas de temps, et $d = 0.011, 0.11$.*

8.4.2 Temps de stabilisation et variabilité

Ils montrent que les temps de stabilisation ne sont pas différents dans leur ordre de grandeur de ceux obtenus pour $N = 100$ (Figure 8.7). Ceci est remarquable alors qu'on multiplie la densité par 10. Les différences les plus marquées se situent au voisinage de λ_c . Pour $d = 0,01$ par exemple, les temps de stabilisation correspondant respectivement à $N = 100$ et $N = 1000$ sont $\tau = 564,555$ et $\tau = 929,611$. Le temps de stabilisation augmente lorsque la taille du groupe devient plus importante, mais ceci reste vraie uniquement au voisinage de λ_c .

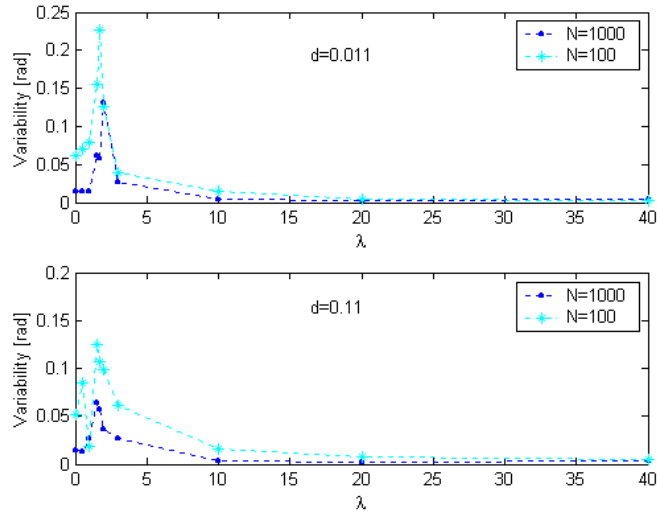


FIG. 8.6: *Comparison de la variabilité de l'ecart type en fonction de λ entre le groupe de taille $N = 100$ et le groupe de taille $N = 1.000$. Ces courbes sont obtenues après 100,000 pas de temps, et $d = 0.011, 0.11$.*

8.5 Interprétation des résultats

8.5.1 Validité des valeurs des paramètres testés

Les explorations présentés dans ce chapitre sont obtenues pour trois valeurs du paramètre de diffusion d ($\frac{(rad)^2}{s}$), $d = 0.011, 0.11, 1.1$. Pour en donner une interprétation concrète, ces valeurs correspondent respectivement au bout de $\frac{1}{100}s$, à une déviation angulaire moyenne, mesurée en degré, de $0.8497^\circ, 2.6887^\circ, 8.4971^\circ$ (rappelons que $\sigma = \frac{360}{2\pi}\sqrt{2d\Delta t}$ degrés). Dans la littérature (Huth et Wissel, 1992, 1994, Viscido *et al.*, 2002), la valeur de l'agitation aléatoire souvent évoquée induit une déviation angulaire moyenne de 15 degrés sur 0,5 secondes. Cette déviation angulaire correspond à un paramètre de diffusion $d = \left(\frac{2\pi}{360} \times 15\right)^2$, soit $d = 0.0685$ ($\frac{(rad)^2}{s}$) et donc en $\frac{1}{100}s$, à une déviation angulaire de 2.121 degrés. Les valeurs de d qui ont servi de bases aux simulations et en particulier les

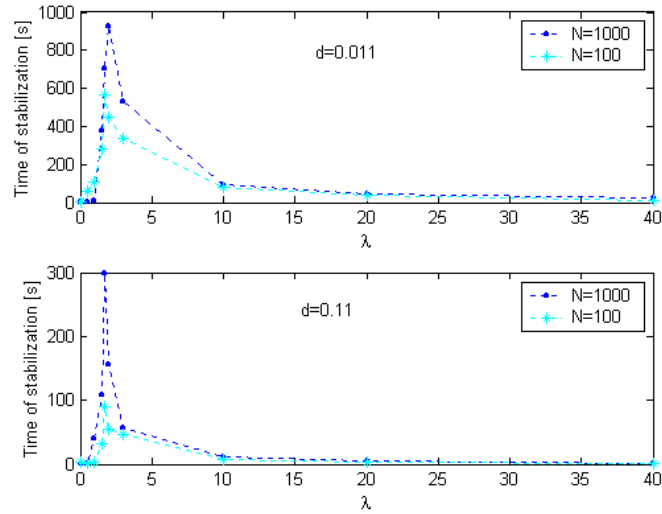


FIG. 8.7: *Comparison du temps de stabilisation en fonction de λ entre le groupe de taille $N = 100$ et le groupe de taille $N = 1.000$. Ces courbes sont obtenues après 100,000 pas de temps, et $d = 0.011, 0.11$.*

valeurs $d = 0.011, 0.11$, semblent bien encadrées celles qui ont pu être observées.

Par ailleurs, la plage des valeurs de λ allant de 0 à 40 exploitées dans nos expériences conduisent à des polarisations finales P (dans le vocabulaire du chapitre, l'écart type du faisceau des orientations mesurant leur parallélisme) allant de 180° ($\lambda = 0.0$) à 2° ($\lambda = 40$). Van Olst & Hunter ont établi que dans un banc fortement polarisé les valeurs de P sont comprises entre 10° et 20° (Huth et Wissel, 1992, 1994). Les mêmes auteurs donnent pour un banc de maquereaux, une polarisation de l'ordre de 8° à 12° (Huth et Wissel, 1992, 1994). Ces fourchettes correspondent à des valeurs de λ allant de 20 pour 8° à 10 pour 12° (pour $d = 0.011$), couvrant donc les valeurs évoquées dans la littérature.

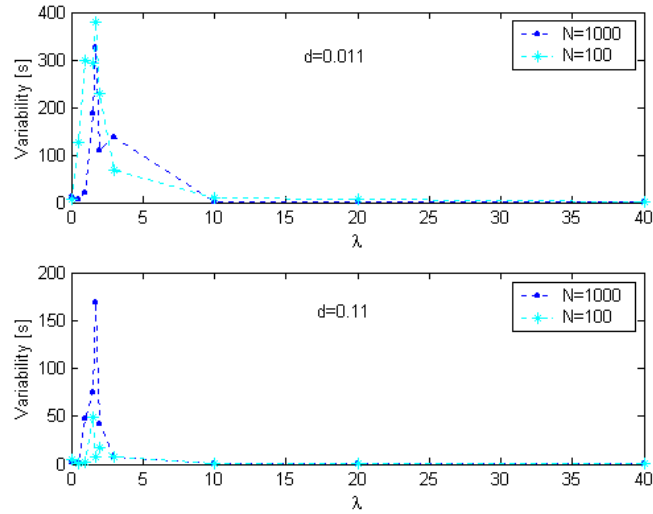


FIG. 8.8: *Comparison de la variabilité du temps de stabilisation en fonction de λ entre le groupe de taille $N = 100$ et le groupe de taille $N = 1.000$. Ces courbes sont obtenues après 100,000 pas de temps, et $d = 0.011, 0.11$.*

8.5.2 Existence de deux types de comportements

Notre modèle met en évidence une transition de comportement allant d'une dispersion aléatoire à une structure bien organisée.

Hara (Niwa, 1996) a observé une telle transition dans les bancs de sardines au sein de la mer du Japon : les sardines montrent au début des déplacements désordonnés "amoebic movements". A un certain moment, cette configuration de déplacements désordonnés change de structure, les poissons s'alignent et se mettent à se déplacer parallèlement et rapidement dans une même direction. Lorsque les sardines ont trouvé une zone riche en nourriture, le groupe se désagrège et perd sa polarisation. Lorsque la nourriture est épuisée, le groupe se reforme et se déplace de nouveau (Viscido *et al.*, 2002). Ces données montrent ainsi une alternance de deux types de structures agrégatives : une structure "shoal" caractérisé par une faible polarisation et une faible vitesse et une structure "school" caractérisé par une

grande vitesse et une forte polarisation (Fréon, P. and O.A. Misund, 1999).

Dans notre modèle, pour $\lambda \leq \lambda_c$, on obtient des structures agrégatives 'lâches' qui correspondent à celles désignées sous le terme shoal, pour lesquelles les directions des poissons constituent à chaque instant un faisceau assez large. Naturellement, dans la réalité, de telles structures lâches ne peuvent subsister que si les déplacements linéaires des poissons sont faibles, et que l'ouverture du faisceau des directions ne résulte que de la moyenne des changements individuels d'orientations. Cela met clairement en lumière le lien entre polarisation et vitesse de déplacement, qui sera discuté plus loin.

Pour $\lambda \geq \lambda_c$, on obtient des structures polarisées de type schools avec une homogénéité directionnelle forte. Par exemple, pour $d = 0.11$, un faisceau d'une ouverture de 2 degrés en écart type, en fait une polarisation très forte, est obtenu pour des valeurs de λ égales à 40, ce qui signifie concrètement, pour d égale à 0.11, en 0.01 seconde :

- i) une deviation angulaire entraînée par l'agitation aléatoire égale à 2.7 degrés.
- ii) un alignement entraînant une rotation de 0.022 radian soit 1.27 degrés par ordre de différence entre les densités directionnelles droite et gauche. Cette différence est au maximum égale à 1 pour les poissons dont l'orientation est la plus écartée de l'orientation moyenne : les poissons dont les orientations sont celles du bord du faisceau se rapprochent de l'orientation moyenne du faisceau de 1.27 degrés en $\frac{1}{100}s$, les poissons ayant des directions plus proches du centre se rapprochent bien sûr moins rapidement.

8.5.3 Conditions de transitions entre les deux types de comportements

Les constatations

Le simulateur nous permet de constater que les structures fortement polarisées de type schools peuvent se former à partir d'une formation de type shoals dans des temps qui peuvent être courts, s'exprimant en secondes ou au plus en dizaine de secondes. Ceci dès lors que les poissons, ont le contrôle sur le paramètre λ et peuvent le modifier rapidement de façon synchronisée. Cette observation conduit à deux questions.

La première est celle de la validité, ou du moins de la plausibilité de ces temps de réactions, en égard aux données de la littérature sur la vitesse des poissons.

La seconde est celle de la nature du contrôle que les poissons possèdent sur leur polarisation.

Temps de stabilisation et temps de perte de vue

Notre modèle précise la liaison entre la polarisation et la vitesse des poissons, évoquée dans la littérature (Huth et Wissel, 1992, 1994, Viscido *et al.*, 2002). Il est connu que, plus que les poissons vont vite, plus ils sont polarisés. Une forte polarisation évite en effet qu'à grande vitesse, les poissons ne se perdent rapidement de vue. Les simulations apportent des estimations quantitatives du temps nécessaire pour atteindre une polarisation donnée, et donc de juger de sa compatibilité avec une vitesse donnée. Soit ainsi t_v le temps nécessaire pour que deux poissons initialement distants de $1BL$ se perdent de vue, on suppose qu'ils se perdent de vue à $5BL$ (Rappelons que BL =longueur moyenne d'un individu), supposé être la distance maximale de perception. Si v est la vitesse linéaire de ces deux poissons et $\alpha = 2P$ l'angle qu'ils forment, on obtient facilement $t_v = \frac{2BL}{v \sin(P)}$. En suivant certains

données de la littérature, on peut prendre pour vitesse maximale du poisson v_{\max} égale à $1.3 \frac{BL}{s}$ (Huth et Wissel, 1992, 1994). Dans les conditions qui viennent d'être mentionnées, le temps de perte de vue est alors de 44s pour $d = 0.011$. Pour que le banc puisse se former ou éviter la dispersion, il est nécessaire que le temps de stabilisation (=temps de formation dans un banc polarisé) soit nettement plus petit que t_v . Nos expériences permettent d'établir les temps de stabilisation nécessaires pour atteindre une polarisation P donnée, dans les conditions de diffusion donnée par exemple les temps indiqués ci dessous :

Les données fournies par nos expériences permettent donc de constater que les temps de

	d=0.011	d=0.11
$\lambda=40, P=2^\circ-4^\circ$	12s	2s
$\lambda=20, P=4^\circ-8^\circ$	38s	4s
$\lambda=10, P=8^\circ-12^\circ$	80s	8s

FIG. 8.9:

formation (12s et 2s, selon les valeurs de d) d'une forte polarisation ($P = 2^\circ$) et inférieure au temps de perte de vue ($t_v = 44$) dans cette polarisation. Par contre, lorsqu'on considère des polarisations plus lâches (par exemple, $P = 10^\circ$, ce qui est encore considéré, on la vu comme une polarisation importante dans la littérature), nous obtenons des temps de formation de 80s et de 8s selon les valeurs de d , alors que dans ce cas, le temps de perte de vue est de 8.85 secondes. Les poissons se perdent de vue et donc se dispersent avant de s'aligner. Confirment à la relation $v = \frac{2BL}{t_v \sin(P)}$, pour que les temps de formation puissent être inférieure au temps de perte de vue pour une polarisation de 10° , il est nécessaire que les

vitesse soient seulement de l'ordre du $\frac{1}{10}$ (pour $d = 0.011$) ou de $\frac{2}{3}$ (pour $d = 0.11$) de la vitesse maximale indiquée dans la littérature.

Nos expériences ont tendance donc à surestimer la polarisation nécessaire pour maintenir un banc d'une vitesse donnée, ou, dans l'autre sens, à exiger, pour une polarisation donnée, une vitesse plus faible que celle mentionnée dans la littérature. L'écart peut sans doute être expliqué en tenant compte du fait que le processus de polarisation joue simultanément au processus de dispersion, et aussi en tenant compte de la disposition aléatoire des orientations. Il s'avère cependant que les temps de formation de bancs polarisés dégagés par nos expériences peuvent bien être mis en rapport avec les temps de perte de vue.

Le contrôle sur la polarisation

Nos résultats confèrent tableau donné précédemment montrent que le temps de stabilisation devient plus court lorsque le paramètre de diffusion augmente et ce quelque soit la valeur de λ . Ce temps de stabilisation semble en fait davantage lié au paramètre d'alignement au de correction β qu'au rapport $\lambda = \frac{\beta}{d}$ en lui même : pour des valeurs de λ supérieure à la valeur critique λ_c , le temps de stabilisation est inversement proportionnel à β ; comme le montre le tableau suivant qui découle du tableau ci dessus.

Pour atteindre une polarisation donnée (déterminée par λ) les poissons vont devoir développer une correction angulaire β moins grande dans des conditions d'agitation aléatoire moins élevée, et donc vont atteindre selon nos expériences cette polarisation en un temps plus long. Cette constatation qui peut paraître paradoxale amène à se poser la question suivante : Les poissons régulent-ils leurs comportement d'alignement sous les conditions d'agitation aléa-

	d=0.011	d=0.11
$\beta=0.11$	80s	
$\beta=0.22$	38s	
$\beta=0.44$	12s	
$\beta=1.1$		8s
$\beta=2.2$		4s
$\beta=4.4$		2s

FIG. 8.10:

toires rencontrées pour atteindre une polarisation donnée et fixe (l'objectif est alors cette valeur de polarisation) ? Ou bien ont ils une capacité fixe de correction (un β donné) et se polarisent plus au moins fortement selon les conditions d'agitation de l'environnement, mais dans des temps de stabilisation relativement similaires ?

8.5.4 Influence de la taille du banc

Comme indiqué au chapitre, nous avons supposé une perception totale : A l'intérieur du groupe qu'ils forment chaque poisson perçoit l'orientation de chacun des autres poissons. Cette hypothèse peut paraître insuffisamment réaliste. Chaque poisson ne peut percevoir dans la réalité que les orientations ou les changements d'orientations de ses plus proches voisins.

L'intention laisse passer cependant que si le temps de réaction des poissons à ces changements d'orientations est très court, la propagation de l'information concernant ces changements d'un bout à l'autre du banc va se faire rapidement, et que tout va se passer en fait comme si la perception était totale. Un raisonnement mathématique permet de formaliser

cette intention. Dans un modèle simplifié ou chaque poisson i ne perçoit que les changements d'orientations δ_{i-1} et δ_{i+1} des poissons d'indice $i-1$ et $i+1$, considérés comme les plus proches voisins. On suppose que la réaction du poisson i est donnée par la formule

$$\delta_i^{t+\Delta t} = \frac{\beta}{2} (\delta_{i-1}^t + \delta_{i+1}^t).$$

En réécrivant les valeurs de δ_{i-1}^t et δ_{i+1}^t en fonction de δ_{i-2}^t , δ_i^t et δ_{i+1}^t et en réitérant cette réécriture, on montre facilement que l'on peut écrire

$$\delta_i^{t+\Delta t} = \left(\frac{\beta}{2}\right)^{p+1} \sum_{k=0}^{p+1} C_{p+1}^k \delta_{i-(p+1)+2k}^{t-p\Delta t}.$$

Soit, en posant : $t' = t - p \Delta t$ et $\Delta t' = (p+1) \Delta t$

$$\delta_i^{t'+\Delta t'} = \left(\frac{\beta}{2}\right)^{p+1} \sum_{k=0}^{p+1} C_{p+1}^k \delta_{i-(p+1)+2k}^{t'}.$$

Il est clair que lorsque on donne la précision de la résolution temporelle, en passant de la résolution Δt à la résolution $(p+1) \Delta t$, la formule donnant la réaction du poisson i s'écrit en prenant en compte un voisinage beaucoup plus large. Très exactement on multiplie la taille du voisinage par $(p+1)$, le nombre de poissons considérés étant alors égal à $(p+2)$ si on compte les seuls poissons affectés d'un poids $\frac{C_{p+1}^k}{2^{p+1}}$ non nul, et $2p+3$ si on considère plus largement tous les poissons du voisinage. L'espace dans lequel les poissons sont ainsi positionnés dans le modèle précédent est implicitement un espace linéaire. Dans un modèle plus réaliste en deux dimensions et 4 voisins immédiats, le nombre de poissons pris en compte en écrivant les formules sur une résolution temporelle de $(p+1) \Delta t$ sera de $1 + 2(p+2)(p+1)$. Considérons par exemple dans ce cas, une résolution temporelle seulement 10 fois moins précisément $p+1 = 10$, revient à passer d'une perception rapprocher de 4 poissons à une perception s'étalant sur 221 poissons. Ce nombre serait encore supérieur en

considérant des voisinages dans un espace à 3 dimensions. Face à un groupe de poissons de taille N donnée, on peut donc supposer modéliser les interactions avec une résolution temporelle suffisamment grossière pour que tous les poissons du groupe soient pris en compte dans l'expression de chaque interaction que les poids affectés à chaque poisson dans ces interactions soient approximativement les mêmes.

Il resterait à élargir ces raisonnements par des données sur les temps de réactions des poissons aux mouvements de leurs voisins immédiats.

Quatrième partie

Conclusion générale et Outils mathématiques

Chapitre 9

Conclusion générale

Le problème étudié se situe dans le cadre général des phénomènes d'agrégation. Ces phénomènes se rencontrent dans des contextes très variés, allant de la formation des polymères à celles des files de voitures. Les comportements collectifs sont le résultat macroscopique des interactions microscopiques. Cette idée est apparue en écologie avec la notion de propriétés émergentes. Dans ce cadre, nous nous sommes limités à l'étude d'alignement de poissons dans un banc, c'est-à-dire, le mécanisme par lequel les poissons prennent une orientation commune, par exemple en réponse à une stimulation provenant du milieu extérieur. Partant d'une population éparpillée dans un volume d'eau, avec des individus orientés dans toutes les directions possibles, il s'agit de décrire les processus de réorientation qui très rapidement vont aboutir à un groupe mono-orienté, et qui se déplace sans se disperser dans une seule et même direction.

Les hypothèses à la base de notre modélisation nous ont conduit à séparer les processus d'attraction-répulsion entre poissons des processus d'alignement proprement dit.

Nous avons donc considéré un groupe de poissons déjà formé, à l'intérieur duquel les distances entre poissons voisins se situent dans la zone neutre : ni attraction ni répulsion, et où seul le processus d'alignement joue. En outre, nous avons fait l'hypothèse, que tous les poissons se voient les uns les autres à l'intérieur du groupe, hypothèse que nous avons également discuté.

Deux lignes de recherches ont été développées dans ce travail : Une modélisation et une analyse mathématiques d'une part ; une modélisation informatiques et une série de simulations sur ordinateur d'autre part. Nous avons ainsi construit et exploité sur ce problème d'alignement deux approches. La première est celle d'un modèle eulérien décrivant l'évolution d'une propriété continue, (une fonction de densité), à l'aide du formalisme mathématique, de l'espace-temps continu des EDP (équation aux dérivées partielles). Il s'agit d'un modèle proche de celui présenté initialement par D.Grünbaum (1998). Nous avons porté l'extension sur les coefficients du modèle qui, dans le travail de D.Grünbaum, sont supposés constants. Nous avons introduit une dépendance par rapport au paramètre de structure qui est l'angle de la ligne du corps du poisson avec une orientation fixe. Cette dépendance permet de "pondérer" la perception par le poisson des orientations différentes de la sienne, en accordant un poids prépondérant aux orientations "voisines". La variable d'état du problème est $u(\theta, t)$ qui, pour chaque instant t , donne une densité de probabilité en θ . La variable θ représente l'angle que fait le corps du poisson avec un axe privilégié. L'équation du modèle est quasi linéaire avec une nonlinéarité non locale. La seconde approche est basée sur un modèle de type lagrangien, dans lequel les trajectoires des N individus sont déterminées par un système de N équations différentielles stochastiques. Ce modèle stochas-

tique s'implémente informatiquement sous forme d'un simulateur qui permet de suivre dans le temps les variations d'orientations de chaque poisson pris individuellement. Ces deux représentations eulériennes et lagrangiennes sont deux façons différentes d'appréhender une même réalité, en se plaçant au niveau de la population, dans le premier cas, au niveau des individus, dans le deuxième cas.

Dans la première approche, d'un point de vue mathématique, deux résultats essentiels ont été établis.

1) La justification rigoureuse de la possibilité de calculer les états successifs en partant d'un état initial quelconque (en termes mathématiques, nous avons montré que le problème de Cauchy est «bien posé»). La présence du terme non linéaire dans le modèle, a rendu l'étude mathématique très difficile. On ne pouvait pas appliquer la méthode standard. Pour l'existence de la solution nous avons utilisé la méthode des approximations successives.

2) La détermination du comportement d'alignement en fonction de deux paramètres des équations : le paramètre de correction d'orientation ou force d'alignement β et le paramètre d'agitation aléatoire ou de diffusion d . Nous avons mis en évidence le rôle du ratio $\lambda = \frac{\beta}{d}$ et montré l'existence d'un effet de seuil sur λ : Quand λ augmente progressivement depuis 0, on a d'abord une situation où les poissons restent aléatoirement orientés de façon uniforme dans toutes les directions ; puis, lorsque λ dépasse un certain seuil : $\lambda_c = \frac{\pi}{2}$, un pattern d'orientation apparaît, qui se précise quand on augmente encore ce ratio. Nous avons pu évaluer précisément autour de λ_c la relation entre le pattern d'orientation (mesuré par l'écart type du faisceau des orientations) et la valeur de λ .

Dans les simulations basées sur la seconde approche, nous avons d'abord retrouvé

l'existence d'une transition de phase entre un état désordonné et un état dans lequel tous les poissons se déplacent dans la même direction. La mise en évidence de cet effet seuil sur le même ratio λ dans les simulations avec une valeur approximativement égale à λ_c est d'abord un indice de la validité de la programmation du simulateur. Les résultats des simulations corroborent les résultats mathématiques sur l'alignement. A l'inverse, les résultats mathématiques ont permis de préciser la valeur «seuil» simulée. D'un autre côté, l'analyse mathématique ne peut se poursuivre très loin le long de la branche de bifurcation, alors que le modèle IBM peut explorer le comportement très loin du point critique. Assuré ainsi par l'analyse mathématique de cette validité, nous avons pu alors l'exploiter pour des données ou des situations où l'analyse mathématique n'est pas conduite. Les données fournies par nos expériences ont montré des structures polarisées avec une homogénéité directionnelle forte (correspondant aux données mentionnées dans la littérature sur les bancs de poissons) pour des valeurs de λ loin de λ_c . De la même façon, la seconde approche nous a permis d'étudier le temps de stabilisation, c'est-à-dire le temps nécessaire pour atteindre le régime stationnaire ainsi que l'effet de la taille du banc. Les simulations nous ont apporté ainsi des estimations quantitatives du temps nécessaire pour atteindre une polarisation donnée, et donc de juger de sa compatibilité avec une vitesse donnée.

Enfin nous avons pu établir mathématiquement de façon rigoureuse le passage du modèle lagrangien au modèle eulérien. En montrant ainsi le lien théorique entre les deux approches et en exploitant au mieux leur propres apports, nous espérons avoir montré qu'elles se complètent et enrichissent notre connaissance du phénomène d'alignement. Notre travail est un exemple d'une complémentarité encore insuffisamment illustrée entre mathématiques

et modélisation individu-centrée.

Chapitre 10

Outils mathématiques

10.1 A : Rappels sur les semi-groupes

La plupart des résultats exposés dans cette section se trouvent dans Henry (1981), Nagel (1998) et Pazy (1983).

10.1.1 Semi-groupe fortement continu

Soit X un espace de Banach, muni de la norme $\|\cdot\|$. Dans toute la suite, on notera par Id , l'opérateur identité sur X .

Définition 15 (*semi-groupe fortement continu*) (Pazy (1983), page 2) *Etant donnée une famille $(T(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X , nous dirons que cette famille est un semi-groupe fortement continu sur X si et seulement si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) $T(t+s) = T(t)T(s)$ pour $t \geq 0$ et $s \geq 0$,

(ii) $T(0)x = x$, pour tout $x \in X$,

(iii) Pour tout $x \in X$ fixé, l'application: $t \longrightarrow T(t)x$ est continu sur $[0, \infty[$.

Un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés est aussi appelé C_0 semi-groupe. La même notion peut être définie dans le cas non linéaire.

Au semi-groupe $T(t)$, on fait correspondre la famille d'opérateurs A_h , pour $h > 0$, définie par

$$A_h \varphi = \frac{1}{h} (T(h)\varphi - \varphi), \text{ pour } h > 0 \text{ et pour } \varphi \in X.$$

Cette famille nous permet de définir le générateur infinitésimal d'un semi-groupe.

Définition 16 (*générateur du semi-groupe*)(Pazy (1983), page 3) *Le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est l'opérateur A défini sur le domaine*

$$D(A) = \left\{ x \in X, \lim_{h \rightarrow 0} A_h x \text{ existe} \right\},$$

par

$$\text{pour } x \in D(A), Ax = \lim_{h \rightarrow 0} A_h x.$$

L'espace $D(A)$ est muni de la norme du graphe $\|v\|_{D(A)} = \|v\| + \|Av\|$.

Exemple 17 *Si A est un opérateur borné, alors A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ où*

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} A^n. \quad (10.1)$$

Dans ce cas, $t \rightarrow T(t)$ est continue de \mathbb{R}^+ dans $\mathcal{L}(X)$ et est une famille des isomorphismes, réciproquement tout semi-groupe à famille des isomorphismes continu au sens de la norme d'opérateurs s'écrit de la forme (10.1) et son générateur infinitésimal est compact.

Nous allons rappeler des propriétés fondamentales d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ de générateur infinitésimal A , qui serviront pour la suite. Les preuves de ces résultats se trouvent entre autres dans les ouvrages Henry (1981), Nagel (1998) et Pazy (1983).

Théorème 10.1.1 (Pazy (1983), page 2, 3) Soient $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X et A son générateur infinitésimal. Alors on a les propriétés suivantes :

(i) $T(t)$ est exponentiellement borné, c'est-à-dire : il existe deux constantes réelles M et ω telles que : pour tout $t \geq 0$,

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}.$$

L'ensemble des nombres ω admissibles admet une borne-inférieure ω_0 ($-\infty \leq \omega_0 \leq +\infty$), appelé taux de croissance exponentielle du semi-groupe. ω_0 est donné par la formule suivante :

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \log \|T(t)\| = t > 0 \inf \frac{1}{t} \log \|T(t)\|.$$

(ii) Pour tout $x \in X$ et $t \geq 0$, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

(iii) pour tout $x \in X$ et $t \geq 0$, on a

$$\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$$

et

$$A \int_0^t T(s)x ds = T(t)x - x$$

(iv) pour tout $x \in D(A)$ et $t \geq 0$, $T(t)x \in D(A)$, donc $T(t)x$ est dérivable et on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T(t)x &= AT(t)x \\ &= T(t)Ax. \end{aligned}$$

(v) pour tout $x \in D(A)$ et $t \geq 0$, $s \geq 0$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau.$$

Corollaire 18 (Pazy (1983), page 5) Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X , alors $D(A)$ est dense dans X et A est un opérateur fermé.

Remarque 19 D'après le corollaire, le graphe A est un sous espace fermé du produit $X \times X$.

Alors, on peut munir $D(A)$ d'une structure d'espace de Banach en considérant sur $D(A)$ la norme, dite norme du graphe, définie par :

Pour tout $x \in D(A)$,

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\| + \|Ax\|.$$

Il est clair qu'un semi-groupe définit au plus un générateur infinitésimal. Le résultat suivant montre que la réciproque est vraie et qu'un semi-groupe linéaire est en fait caractérisé par son générateur infinitésimal, d'où l'expression :

Théorème 10.1.2 (Pazy (1983), page 6) Soient $(T(t))_{t \geq 0}$ et $(S(t))_{t \geq 0}$ deux semi-groupes fortement continus de même générateur infinitésimal A . Alors $T(t) = S(t)$ pour tout $t \geq 0$.

Le lien entre le semi-groupe et son générateur infinitésimal, est établi au moyen de la résolvante du générateur.

Définition 20 (Pazy (1983), page 20) Soit A un opérateur linéaire fermé dans X .

Définition 21 (a) L'ensemble résolvant de A , noté $\rho(A)$ est

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} / (\lambda Id - A)^{-1} \text{ existe et borné dans } X \right\},$$

i.e. l'ensemble des λ pour lesquels les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) $(\lambda Id - A)$ est injectif,

(ii) $R(\lambda Id - A) = X$,

(iii) $(\lambda Id - A)^{-1}$ est un opérateur borné.

Pour un opérateur fermé le théorème du graphe fermé donne (iii) à partir de (i) et (ii).

On définit pour $\lambda \in \rho(A)$, la résolvante de A par

$$R(\lambda, A) = (\lambda Id - A)^{-1}.$$

(b) Le spectre de A est l'ensemble $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

On sait que $\rho(A)$ est ouvert dans \mathbb{C} . Dans le cas général, tout peut arriver notamment, que $\rho(A) = \emptyset$.

Théorème 10.1.3 (Pazy (1983), page 8) (Hille-Yosida) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur fermé A , à domaine dense dans $D(A)$, soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu, est qu'il existe deux réels M et ω tels que :

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > \omega$, on a $\lambda \in \rho(A)$ et

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n},$$

pour tout $n \geq 1$.

Théorème 10.1.4 (Pazy (1983), page 8) Soient $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X , ω_0 le taux de croissance exponentielle et A générateur infinitésimal de $T(t)$. Alors,

(1) Pour tout $x \in X$ et $|\lambda| > \omega_0$, $p = \lambda + i\mu$, on a

$$R(p, A)x = \int_0^\infty e^{-pt} T(t)x dt.$$

(2) Pour tout $x \in D(A)$ et $\gamma > \max(0, \omega)$, on a

$$\int_0^t T(s)x ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt} R(p, A)x \frac{dp}{p}.$$

10.1.2 Semi-groupe compact

Définition 22 (Pazy (1983), page 48) Un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X est dit compact pour tout $t > t_0$ si $T(t) : X \rightarrow X$ est un opérateur compact pour tout $t > t_0$, $(T(t))_{t > 0}$ sur X est dit compact si $T(t)$ est compact pour tout $t > 0$.

Remarque 23 Si $(T(t))_{t \geq 0}$ est compact, alors en particulier Id est compact et X est nécessairement de dimension fini. Si $T(t_1)$ est compact pour un certain $t_1 > 0$, alors $T(t)$ est compact pour tout $t \geq t_1$.

Théorème 10.1.5 (Pazy (1983), page 48) Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe. Si $T(t)$ est compact pour tout $t > t_0$, alors $T(t)$ est continu au sens de la norme d'opérateurs pour tout $t > t_0$.

Théorème 10.1.6 (Pazy (1983), page 48) Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe et A son générateur infinitésimal. $(T(t))_{t > 0}$ est compact si et seulement si $T(t)$ est continue au sens de la norme d'opérateurs pour tout $t > 0$ et $R(\lambda, A)$ est compact pour un $\lambda \in \rho(A)$ (et donc tout).

Théorème 10.1.7 (Nagel (1998), page 109) Un opérateur linéaire A avec $\rho(A) \neq \emptyset$, est à résolvante compacte si $R(\lambda, A)$ est compact pour un $\lambda \in \rho(A)$.

Théorème 10.1.8 (Nagel (1998), page 109) Soient $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe sur X , A son générateur infinitésimal et de domaine $D(A)$ avec $\rho(A) \neq \emptyset$, on pose $X_1 = (D(A), \|\cdot\|_A)$.

les assertions suivantes sont équivalentes

(i) A est à résolvante compacte

(ii) Injection canonique $i : X_1 \hookrightarrow X$ est compacte.

10.1.3 Opérateurs sectoriels ou de type (ϕ, M)

Définition 24 (Henry (1981), page 18) Soit A un opérateur linéaire sur X . On dit que A est sectoriel si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) A est fermé, à domaine $D(A)$ dense dans X .

(ii) $\exists \phi \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\exists M \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$, tels que :

$$S_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \lambda \neq a \text{ et } \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi\} \subseteq \rho(A).$$

et :

$$\forall \lambda \in S_{a,\phi}, \quad \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}.$$

On dit aussi que A est de type (ϕ, M) . (Friedman, 1969, page 101).

Exemple 25 (1) Si A est un opérateur linéaire et borné sur X . Alors, A est sectoriel.

(2) Si A est un opérateur auto-adjoint à domaine dense dans un espace de Hilbert, et si A est borné, alors A est sectoriel.

Proposition 26 (Henry (1981), page 18) Si A est sectoriel sur X et B est un opérateur linéaire tel que :

- (i) $D(A) \subset D(B)$,
- (ii) $\forall x \in D(A), \forall \varepsilon > 0, \exists k(\varepsilon) > 0$

$$\|B(x)\| \leq \varepsilon \|A(x)\| + k(\varepsilon) \|x\|.$$

Alors, $A + B$ est sectoriel sur X .

10.1.4 Semi-groupe analytique

Définition 27 (Henry (1983), page 60) Un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Banach X , est dit semi-groupe analytique, si pour tout $t \geq 0$, les opérateurs $T(t)$ sont linéaires continus et vérifient

- (i) $T(0) = Id$, pour tout $t \geq 0$ et $s \geq 0$, $T(t + s) = T(t)T(s)$,
- (ii) $\forall x \in X, \lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$,
- (iii) $\forall x \in X$, l'application : $t \mapsto T(t)x$ est analytique sur $]0, \infty[$.

Théorème 10.1.9 (Henry (1981), page 20) Si $-A$ est un opérateur sectoriel sur X , alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique, noté $(T(t))_{t \geq 0}$, avec

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda,$$

où Γ est un contour dans $\rho(A)$ avec : $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \arg \lambda = \pm \theta$, pour un certain $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$. Et alors, $T(t)$ est analytique sur un secteur :

$$S = \{t \neq 0; |\arg t| < \varepsilon\},$$

contenant l'axe réel positif, et si $\forall \lambda \in \sigma(A), \operatorname{Re} \lambda > 0$, alors :

$$\|T(t)\| \leq ce^{-at} \quad \text{et} \quad \|AT(t)\| \leq \frac{c}{t}e^{-at}.$$

Ici c et a sont des constantes, indépendantes de t .

Réciproquement, si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique, alors $-A$ est sectoriel.

Proposition 28 (Henry (1981), page 20) pour qu'un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ soit analytique sur X , il suffit qu'il soit différentiable et que sa dérivée vérifie

$$\forall t \in]0, T], \|D_t T(t)u\| \leq c \frac{\|u\|}{t},$$

pour un certain $T > 0$.

10.1.5 Puissances fractionnaires

Définition 29 (Henry (1981), page 24) Soit A un opérateur sectoriel défini sur un espace de Banach X , tel que $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$. Pour tout $\alpha > 0$, on note l'opérateur $A^{-\alpha}$ défini par :

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t) dt,$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.

Théorème 10.1.10 (Henry (1981), page 25) Soit A un opérateur sectoriel sur X avec $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$, alors, pour tout $\alpha > 0$, $A^{-\alpha}$ est un opérateur injectif, linéaire et borné sur X .

De plus, on

(i) Pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $A^{-\alpha} A^{-\beta} = A^{-\beta} A^{-\alpha} = A^{-(\alpha+\beta)}$.

(ii) Si $0 < \alpha < 1$, alors $A^{-\alpha}$ peut s'écrire :

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} R(\lambda, A) d\lambda.$$

Définition 30 (Henry (1981), page 25) Soit A un opérateur sectoriel sur X avec $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$. On définit, la famille d'opérateurs $(A^\alpha)_{\alpha \geq 0}$ par : $A^0 = \operatorname{Id}$ et pour tout $\alpha > 0$, A^α est l'inverse de $A^{-\alpha}$ et $D(A^\alpha) = \operatorname{Im}(A^{-\alpha})$.

Proposition 31 (Henry (1981), page 26) On a les propositions suivantes :

- (1) Si $\alpha > 0$, A^α est un opérateur fermé, à domaine dense,
- (2) Si $\alpha \geq \beta$ alors, $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$,
- (3) $A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta}$ sur $D(A^{\alpha+\beta})$
- (4) Pour tout $t > 0$, $A^\alpha T(t) = T(t)A^\alpha$ sur $D(A^\alpha)$.

Théorème 10.1.11 (Henry (1981), page 26) Si $0 \leq \alpha \leq 1$ et $x \in D(A)$, alors

$$\|A^\alpha x\| \leq C \|Ax\|^\alpha \|x\|^{1-\alpha},$$

où C est une constante finie indépendante de α . Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C' \geq 0$, indépendante de α , telle que :

$$\|A^\alpha x\| \leq \varepsilon \|Ax\| + C' \varepsilon^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \|x\|.$$

Proposition 32 (Henry (1981), page 27) Soit A un opérateur sectoriel sur X avec $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$.

0. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) A^{-1} est compact,
- (ii) $A^{-\alpha}$ est compact pour tout $\alpha > 0$,
- (iii) $T(t)$ est compact pour tout $t > 0$.

Théorème 10.1.12 (Pazy (1983), page 74) Soit B un opérateur linéaire fermé tel que

$D(A^\alpha) \subset D(B)$, $0 < \alpha \leq 1$ alors

$$\|Bx\| \leq C \|A^\alpha x\| \quad \forall x \in D(A^\alpha)$$

et il existe une constante C_1 tel que pour tout $\rho > 0$ et $x \in D(A)$

$$\|Bx\| \leq C_1 [\rho^\alpha \|x\| + \rho^{\alpha-1} \|Ax\|].$$

Une condition suffisante pour que $D(A^\alpha) \subset D(B)$ est donnée par le théorème suivant :

Théorème 10.1.13 (Pazy (1983), page 75) Soit B un opérateur linéaire fermé tel que $D(A) \subset D(B)$. Si pour une constante γ , $0 < \gamma < 1$, et pour tout $0 < \rho_0 \leq \rho$ nous avons

$$\|Bx\| \leq C [\rho^\gamma \|x\| + \rho^{\gamma-1} \|Ax\|] \quad \forall x \in D(A)$$

alors

$$D(A^\alpha) \subset D(B) \quad \forall \gamma < \alpha \leq 1.$$

Théorème 10.1.14 (Pazy (1983), page 75) Soit $-A$ un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(T(t))_{t \geq 0}$. Si $0 \in \rho(A)$ alors,

(i) $T(t) : X \rightarrow D(A^\alpha)$ pour tout $t > 0$ et $\alpha \geq 0$.

(ii) Pour tout $x \in D(A^\alpha)$, $T(t)A^\alpha x = A^\alpha T(t)x$.

(iii) Pour tout $t > 0$ l'opérateur $A^\alpha T(t)$ est borné et

$$\|A^\alpha T(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t},$$

(iv) Pour $0 < \alpha \leq 1$ et $x \in D(A^\alpha)$ alors

$$\|T(t)x - x\| \leq C_\alpha t^\alpha \|A^\alpha x\|.$$

10.1.6 Problème de Cauchy

A un opérateur linéaire non borné, fermé dans X , de domaine $D(A)$ dense dans X .

On considère le problème (P) suivant :

Trouver u , vérifiant

$$\begin{cases} (i) \frac{du}{dt} = Au + f & \text{pour } t > 0, \\ (ii) u(0) = u_0, \end{cases}$$

u_0 et f donnés.

Remarque 33 *Classiquement la terminologie <<problème de Cauchy>> réfère à un problème du type (P) où A est un opérateur différentiel dans \mathbb{R}^n (Dautray, (1988) 8, page 473). Cette notion s'étend dans les deux directions puisque (P) couvre en particulier les cas suivants :*

1^{er} cas : L'opérateur A peut être un opérateur différentiel sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n (avec les conditions aux limites appropriées)

2^e cas : L'opérateur A peut être un opérateur abstrait dans un espace de Banach abstrait.

Problème homogène ($f = 0$)

Théorème 10.1.15 (Pazy (1983), page 104) *Soit $(A, D(A))$ le générateur d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur l'espace de Banach X .*

Pour tout $u \in D(A)$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (i) \frac{du}{dt} = Au & \text{pour } t > 0, \\ (ii) u(0) = u_0, \end{cases}$$

admet une unique solution $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow D(A)$ qui est de classe C^1 , comme application de $\mathbb{R}_+ \rightarrow X$, pour tout $u_0 \in D(A)$

$$u(t) = T(t)u_0.$$

Problème non homogène ($f \neq 0$)

Pour un tel cas on doit imposer des conditions sur f pour garantir l'existence d'une solution de (P) quand $u_0 \in D(A)$.

Définition 34 (Pazy, page 104) Soit $u_0 \in D(A)$ et $f \in L^1(0, T, X)$. La fonction $u \in C(0, T, X)$ définie par

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

est appelée la solution intégrable du problème (P) sur $[0, T]$.

Définition 35 (Pazy, page 104) Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est une solution classique du problème (P) sur $[0, T]$ si u est continue de $[0, T]$ dans X , $u(t) \in D(A)$ pour tout $t \in]0, T[$ et est continuellement différentiable sur $]0, T[$ et satisfait le problème (P) pour tout $t \in]0, T[$.

Théorème 10.1.16 (Pazy, page 107) Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 – semi – groupe $(T(t))_{t \geq 0}$.

(i) Si f est continûment différentiable sur $[0, T]$, alors le problème (P) a une et une seule solution u sur $[0, T]$, pour chaque $u_0 \in D(A)$.

(ii) Si $f \in L^1(]0, T[; X)$, f est continue sur $]0, T[$, $f(s) \in D(A)$ pour chaque $s \in]0, T[$ et $Af \in L^1(]0, T[; X)$, alors pour chaque $u_0 \in D(A)$ le problème (P) a une solution classique u et une seule sur $]0, T[$.

10.1.7 Régularité de la solution intégrale dans les semi-groupes analytiques

Dans l'étude des relations entre les solutions classiques et solutions intégrales du problème non homogène (P), nous introduisons les résultats suivants :

Théorème 10.1.17 (Pazy (1983), page 110) Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(T(t))_{t \geq 0}$ et $f \in L^p(0, T, X)$ avec $1 < p < \infty$. Si u est une solution intégrable du problème (P) alors u est Hölderienne d'exposant $\frac{p-1}{p}$ dans $[\varepsilon, T]$ pour tout $\varepsilon > 0$. Si de plus $u_0 \in D(A)$, alors u est Hölderienne de même exposant sur $[0, T]$.

Théorème 10.1.18 (Pazy (1983), page 111) Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(T(t))_{t \geq 0}$. Soit $f \in L^1(0, T, X)$ et supposons que pour tout $0 < t < T$ il existe un nombre δ_t et une fonction continue $W_t(\tau) : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ tel que

$$\|f(t) - f(s)\| \leq W_t(|t - s|)$$

et

$$\int_0^{\delta_t} \frac{W_t(\tau)}{\tau} d\tau < \infty.$$

Alors pour tout $u_0 \in X$, la solution intégrale du problème (P) est solution classique.

Une conséquence immédiate et importante de ce théorème est :

Corollaire 36 (Pazy (1983), page 113) Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(T(t))_{t \geq 0}$. Si $f \in L^1(0, T, X)$ est localement Höldérienne sur $]0, T[$ alors pour chaque $u_0 \in X$ le problème de Cauchy (P) a une unique solution.

On rappelle : Une fonction $f : I$ (I intervalle) $\rightarrow X$ est dite localement Höldérienne d'exposant $\vartheta, 0 < \vartheta < 1$ sur I , s'il existe une constante L tel que

$$\|f(t) - f(s)\| \leq L |t - s|^\vartheta \quad \text{pour } s, t \in I.$$

f est dite localement Höldérienne si pour tout $t \in I$, il existe un voisinage dans lequel f est Hölderienne. Si I est compact, f est Höldérienne sur I , si elle est localement Hölderienne. On dénote par $C^\vartheta(I : X)$ l'ensemble des fonctions Hölderiennes sur I .

Un autre résultat de la régularité est :

Théorème 10.1.19 (Pazy (1983), page 114) Soient A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(T(t))_{t \geq 0}$ et $f \in C^\vartheta([0, T] : X)$. Si u est une solution du problème (P) sur $[0, T]$ alors :

Theorem 37 (i) Pour tout $\delta > 0$, $Au \in C^\vartheta([0, T] : X)$ et $\frac{du}{dt} \in C^\vartheta([0, T] : X)$.

(ii) Si $u_0 \in D(A)$ alors Au et $\frac{du}{dt}$ sont continues sur $[0, T]$.

(iii) Si $u_0 = 0$ et $f(0) = 0$ alors $Au, \frac{du}{dt} \in C^\vartheta([0, T] : X)$.

10.2 B : Rappels sur la théorie de la bifurcation

La situation à laquelle nous nous intéressons dans cette section est la suivante : on considère un système différentiel dépendant de paramètres et on veut comprendre quelles modifications de forme subit le portrait de phase lorsque les paramètres varient.

Le problème (non-linéaire) auquel nous nous intéressons est du type :

$$u = G(\lambda, u) \quad (10.2)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in X$, un espace de Banach de norme $\|\cdot\|$. Dans cette section, on fait l'hypothèse

(H) suivante :

$G : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ une fonction continue de la forme

$$G(\lambda, u) = \lambda Ku + H(\lambda, u),$$

où K une application linéaire sur E . $\Omega \subset \mathbb{R} \times X$ un voisinage de $(\lambda_0, 0)$;

0 est une solution triviale du problème (10.2), c'est-à-dire $\forall \lambda \in \mathbb{R}, G(\lambda, 0) = 0$.

On note par : $C := \{(\lambda, 0) \mid 0 = G(\lambda, 0)\}$.

Bien entendu, la question se pose de savoir s'il existe d'autres solutions non-triviales du problème (10.2).

10.2.1 Bifurcation locale

Définition 38 (*Deimling (1985), page 380*) Soient X et Y deux espaces de Banach. $(\lambda_0, 0)$ est un point de bifurcation de (10.2) si et seulement si

$$(\lambda_0, 0) \in \overline{\{(\lambda, u) \in \Omega \mid u = G(\lambda, u) \text{ et } u \neq 0\}}.$$

Donc $(\lambda_0, 0)$ est un point de bifurcation de (10.2) \iff il existe une suite (λ_n, u_n) , $u_n \neq 0$, avec $u_n = G(\lambda_n, u_n)$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n, u_n) = (\lambda_0, 0)$.

λ_0 de multiplicité impaire

Théorème 10.2.1 (Deimling (1985), page 381) En plus de l'hypothèse (H), on suppose que :

Theorem 39 (i) $Id - \lambda_0 K$ est de Fredholm d'indice zéro et λ_0 est une valeur caractéristique isolée de K de multiplicité algébrique impaire

(ii)

$$\|H(\lambda, u_1) - H(\lambda, u_2)\| \leq \varphi(r) \|u_1 - u_2\|$$

si $(\lambda, u_1), (\lambda, u_2) \in \Omega$, $|\lambda - \lambda_0| \leq \rho$ et $u_1, u_2 \in \overline{B(0, r)}$ pour un certain r et pour une fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tel que $\varphi(r) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 0$.

Alors $(\lambda_0, 0)$ est un point de bifurcation de (10.2).

D'après ce théorème, il semble nécessaire de rappeler ces quelques définitions :

- Opérateurs de Fredholm (H. Brézis (1983), page 98) : Un opérateur $A \in L(X, Y)$ est de Fredholm, on note $A \in \text{Fred}(X, Y)$ si
 - (i) $N(A)$ (noyau de l'opérateur A) est de dimension finie
 - (ii) $R(A)$ (image de l'opérateur A) est de codimension finie (c'est-à-dire $R(A)$ admet un supplémentaire algébrique de dimension finie.
- Multiplicité : Soit T un opérateur compact sur X et soit $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. On montre que la suite $N((T - \lambda Id)^k)$, $k = 1, 2, \dots$ est strictement croissante jusqu'à un certain

rang fini p et qu'elle se stabilise ensuite (voir (H. Brézis (1983), page 99). On dit que p est l'ordre de λ . On appelle multiplicité géométrique de la valeur propre λ la dimension de $N(T - \lambda Id)$ et la multiplicité algébrique la dimension de $N((T - \lambda Id)^p)$; on vérifie qu'elles coïncident lorsque X est un espace de Hilbert et que T est auto-adjoint. Rappelons aussi pour un opérateur compact, $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$, avec $\sigma_p(T)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de T .

Remarque 40 (Deimling (1985), page 382) *La condition (ii) du théorème est satisfaite si $H(\lambda, u) = o(\|u\|)$ quand $u \rightarrow 0$ et H_u est continue dans un voisinage de $(\lambda_0, 0)$. L'Hypothèse sur K est satisfaite si K est compact et λ_0^{-1} est une valeur propre de multiplicité impaire.*

λ_0 de multiplicité simple

Théorème 10.2.2 (Deimling, page 381) *En plus de l'hypothèse (H), on suppose que H_λ , H_u , $H_{\lambda u}$ sont continues sur Ω et que les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) $H(\lambda, u) = 0(\|u\|)$ quand $u \rightarrow 0$, uniformément en λ voisin de λ_0 .

(ii) $Id - \lambda_0 K$ est de Fredholm d'indice zéro et λ_0 est une valeur caractéristique simple de K .

Alors $(\lambda_0, 0)$ est un point de bifurcation de (10.2) et il existe un voisinage de U de $(\lambda_0, 0)$ tel que

$$G^{-1}(0) \cap U = \{(\lambda_0 + \mu(t), tv + tz(t)) : |t| < \delta\} \cup \{(\lambda, 0) : (\lambda, 0) \in U\}$$

pour un $\delta > 0$, les fonctions $\mu(\cdot), z(\cdot)$ sont continues telles que $\mu(0) = 0$, $z(0) = 0$ et que l'image de $z(\cdot)$ est dans le complémentaire de $N(Id - \lambda_0 K) = \text{vect}\{v\}$.

Corollaire 41 *On suppose que les théorèmes ci-dessus sont vérifiés. Si la fonction H est de classe C^k au voisinage de $(\lambda_0, 0)$ pour un certain $k \geq 2$ alors les fonctions $\mu(\cdot), z(\cdot)$ définissant les branches de solutions non-triviaux sont de classe C^{k-1} . Si H est analytique alors $\mu(\cdot), z(\cdot)$ le sont.*

10.2.2 Bifurcation globale

On considère toujours l'équation (10.2). Le théorème de bifurcation global fut apparaître pour la première fois, dans une édition Russe en 1956 par Krasnosel'skii. Mais le premier théoème de bifurcation global a été donné par Rabinowitz (1971).

Théorème 10.2.3 *(P. H. Rabinowitz (1971)) En plus de l'hypothèse (H), on suppose que G, K compactes, $H(\lambda, u) = 0(\|u\|)$ quand $u \rightarrow 0$ uniformément dans les bornés de λ . Si λ_0 est une valeur propre de multiplicité impaire, alors $(\lambda_0, 0)$ est un point de bifurcation de (10.2) et la branche des solutions non-triviaux possède une composante connexe Γ (subcontinuum) contenant $(\lambda_0, 0)$. De plus, on a l'une des situations suivantes :*

-ou bien Γ est non-borné dans $\mathbb{R} \times X$,

-ou bien Γ coupe C en un point $(\lambda_1, 0)$ distinct de $(\lambda_0, 0)$.

10.3 C : Rappels sur les équations différentielles stochastiques

10.3.1 Processus stochastiques

Un processus stochastique $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ est une suite de variables aléatoires indexées par \mathcal{T} à valeurs dans un ensemble \mathcal{F} . \mathcal{T} est l'ensemble des indices. Souvent t représente le temps mais t peut être de dimension multiple (par exemple la longitude et la latitude). Si \mathcal{T} est à valeurs discrètes on parle de processus à temps discret. Si l'ensemble des valeurs de \mathcal{T} est continu, on parle de processus à temps continu. \mathcal{F} est l'ensemble des états du processus. L'ensemble des états peut être continu ou discret. La caractéristique de base d'un processus stochastique est le fait que la loi de la variable X_t soit fonction de t . Une réalisation d'un processus est appelée trajectoire. C'est donc la suite des réalisations des variables aléatoires X_t . Les réalisations d'une même variable aléatoire pouvant être différentes, les réalisations d'un même processus peuvent donner des trajectoires différentes.

Exemples 42 1-Jeu de "Pile ou Face". Après chaque lancer, le joueur gagne s'il obtient "Pile" et perd s'il obtient "Face". La variable X_n représentant sa fortune après n tirages est un processus appelé marche aléatoire ou processus de Bernouilli ($\mathcal{F} = \mathbb{Z}$ et $\mathcal{T} \equiv \mathbb{N}$).

2-La température au sol à un instant donné dans une parcelle est un processus doublement indicé. La loi de X_{mn} dépend de la longitude et de la latitude : $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{T} \equiv \mathbb{R}^2$.

3-Un problème classique est de compter le nombre d'occurrences d'un événement donné dans un intervalle de temps. A titre d'exemple on peut citer les appels téléphoniques à un standard, l'occurrence d'accidents à un carrefour. La justification intuitive pour voir ces

exemples comme des processus de Poisson provient de la loi des événements rares. Pour chaque petit intervalle de temps nous avons une expérience de Bernouilli dont la probabilité de succès est faible. Un résultat classique des statistiques permet de modéliser le nombre d'événements par une loi de Poisson. On note X_t le nombre d'événements survenus dans l'intervalle $]0, t[$.

4-Pour le cas des processus stochastiques à temps continu, citons par exemple, le processus de Poisson : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, X_t compte le nombre de fois, où un événement spécifique a eu lieu pendant une période de temps $]0, t] \subset \mathbb{R}^+$.

L'un des processus stochastiques à temps continu les plus importants et les plus utilisés est le mouvement brownien aussi appelé processus de Wiener. Un processus de particules browniennes (chez les biologistes et océanographes) ou superprocessus (chez les probabilistes) est un ensemble de particules idéalisées comme des points se déplaçant aléatoirement dans l'espace et dans le temps et qui simultanément se reproduisent et meurent à des taux constants. Le mouvement Brownien est le plus célèbre des processus stochastiques et sans doute le plus central en théorie des probabilités. C'est le premier processus qui ait été introduit pour modéliser un phénomène réel autre qu'un jeu de hasard. Il s'agit du mouvement extrêmement désordonné de particules dans un fluide, observé par le botaniste anglais Brown en 1928. Ce mouvement fut plus tard expliqué par les collisions aléatoires des particules avec les molécules du liquide. Il est modélisé comme une distribution Gaussienne.

Définition 43 On appelle mouvement brownien réel (sur \mathbb{R}^+) une fonction aléatoire réelle $(W(t), t \in \mathbb{R}^+)$ à trajectoires continues telles que

i) $W(0) = 0$;

ii) Tout accroissement $W(t) - W(s)$ ($0 \leq s < t$) suit une loi Gaussienne centrée de variance $t - s$ (loi notée $N(0, t - s)$);

iii) $\forall d \geq 2$ et $0 = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_d$ dans \mathbb{R}_+ , les accroissements $W(t_{i+1}) - W(t_i)$ ($0 \leq i \leq d$) sont indépendants.

Rappelons qu'une fonction aléatoire réelle continue, définie sur \mathcal{T} et l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ est une application

$$(t, \omega) \rightarrow X(t, \omega) \quad \text{de } \mathcal{T} \times \Omega \text{ dans } \mathbb{R}$$

telle que :

a) ses trajectoires $t \rightarrow X(t, \omega)$ soient continues sur T ($\omega \in \Omega$),

b) ses valeurs $\omega \rightarrow X(t, \omega)$ soient des variables aléatoires sur Ω ($t \in \mathcal{T}$).

Ω est appelé espace fondamental ou espace des épreuves, \mathcal{P} une fonction d'ensembles σ -additive définie sur \mathcal{F} , à valeurs dans $[0, 1]$ telle que $\mathcal{P}(\Omega) = 1$ (\mathcal{P} est appelée probabilité).

10.3.2 Filtration et adaptation

Définition 44 Une filtration est une famille croissante $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$ de sous-tribus, continue à droite au sens où $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$. On peut associer à tout processus $X(t)$ une filtration naturelle de ce processus, définie par $\mathcal{F}_t^X = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma(X(s), s \leq t + \varepsilon)$, où $\sigma(X)$ désigne la tribu engendrée par la variable aléatoire X . En particulier, on désignera par \mathcal{F}_t^W la filtration naturelle du mouvement brownien $W(t)$.

Définition 45 Soit (\mathcal{F}_t) une filtration et $X(t)$ un processus. On dit que $X(t)$ est adapté à la filtration (\mathcal{F}_t) si, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $X(t)$ est \mathcal{F}_t mesurable.

Nous rappelons que, dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite \mathcal{F} -mesurable si

$$f^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega; f(\omega) \in U\} \in \mathcal{F}$$

pour tout ouvert $U \in \mathbb{R}^n$ (ou, d'une façon équivalente, pour tout borélien $U \subset \mathbb{R}^n$).

Définition 46 *Etant donnée une filtration $(\mathcal{E}_t, t \in \mathbb{R}_+)$ dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ représentant le passé à chaque instant, on appelle \mathcal{E} -mouvement brownien toute fonction aléatoire $(W(t), t \in \mathbb{R}_+)$ à trajectoires continues telle que*

a) $(W(t), t \in F) \in \mathcal{E}_t$ pour tout borélien F et tout $t \in \mathbb{R}_+$ (on dit alors que $W(t)$ est \mathcal{E}_t -mesurable $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ou plus brièvement $W(\cdot)$ est adapté à la filtration \mathcal{E}).

b) pour tout $s < t$, l'accroissement $W(t) - W(s)$ est indépendant de \mathcal{E}_s et suit la loi $N(0, t-s)$.

Définition 47 *Soit $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus à valeurs réelles, d'espérance $E[|X(t)|] < \infty$, il est adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$. X est une $\{\mathcal{F}_t\}$ -martingale si*

i) X_t est P -intégrable, $t \in \mathcal{T}$;

ii) $\forall (s, t) \in \mathcal{T}^2, s \leq t$

$$E[X(t) | \mathcal{F}_s] = X(s).$$

Proposition 48 (Inégalité de Doob) *Pour toute martingale continue M_t , on a l'inégalité suivante :*

$$E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^2 \right] \leq 4E \left[|M_T|^2 \right]. \quad (10.3)$$

10.3.3 Equations différentielles stochastiques (ESD)

Dans la formulation de plusieurs modèles écologiques, il est tenu compte des aléas. Considérons par exemple, le modèle exponentiel de croissance

$$\frac{dN}{dt} = r(t)N(t) \quad (10.4)$$

où $r(t)$ est le taux de croissance instantané à l'instant t . En tenant compte des effets aléatoires de l'environnement, on peut supposer que

$$r(t) = r_0 + r_1\theta(t)$$

avec $\theta(t)$ est un processus aléatoire, et donc l'équation (10.4) peut s'écrire :

$$\frac{dN}{dt} = N(t) [r_0 + r_1\theta(t)]$$

ou, sous la forme différentielle :

$$dN(t) = N(t) [r_0 + r_1\theta(t)] dt.$$

En assimilant le bruit $\theta(t)$ au mouvement de particules dans un fluide, on peut supposer

$$\theta(t)dt \simeq dW_t.$$

D'où

$$dN(t) = r_0N(t)dt + r_1N(t)dW_t. \quad (10.5)$$

Le coefficient $r_0N(t)$ de dt s'appelle la dérive, et $r_1N(t)$ celui de dW_t s'appelle le coefficient de diffusion. La résolution de ce type d'équation (10.5) dite équation différentielle stochastique (E.D.S), nécessite quelques définitions.

Formule d'Itô et intégrale stochastique

On considère \mathcal{C} l'ensemble des fonctions suivantes :

$\{f : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continue et stochastique et a), b) et c) sont satisfaits, où}$

a) f est $\mathcal{B}_{[a,b]} \times \mathcal{E}$ mesurable ;

b) $f(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathcal{E}_t mesurable ;

c) $f(t, \cdot) \in L^2(\Omega)$ et $\int_a^b E[|f(t, \cdot)|^2] dt < \infty$, c-à-d $f \in L^2([a, b] \times \Omega)$.

Soit $(W_t)_{t \in \mathcal{T}}$ un processus de Wiener et $\Pi(a, b)$ l'ensemble de toutes les partitions de $[a, b]$,

$\pi_n : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ telles que $|\pi_n| = \sup_{k \in \{0, \dots, n\}} |t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}| \rightarrow 0$ quand

$n \rightarrow \infty$; on définit l'intégrale stochastique d'Itô de $f \in \mathcal{C}$ comme la limite suivante (il a été

démontré qu'elle existe et qu'elle est indépendante de la partition) :

$$\int_a^b f(t) dW_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k^{(n)}) \left[W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}} \right].$$

Théorème 10.3.1 (Formule d'Itô) Soit $\{\xi(t), t \in [0, T]\}$ un processus d'équation différentielle stochastique :

$$d\xi(t) = a(t)dt + b(t)dW_t. \quad (10.6)$$

(10.6), avec $a(t, x), b(t, x) \in \mathcal{C}([a, b])$. Si $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C_b^1 en

t et C_b^2 en x , alors pour tout t on a : continue deux fois différentiable. Alors le processus

$f(t, \xi(t))$ vérifie l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} f(t, \xi(t)) &= f(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f(s, \xi(s))}{\partial s} ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f(s, \xi(s))}{\partial x^2} b^2(s) ds \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial f(s, \xi(s))}{\partial x} a(s) ds + \int_0^t \frac{\partial f(s, \xi(s))}{\partial x} b(s) dW_s. \end{aligned}$$

Le terme $\int_0^t \frac{\partial f(s, \xi(s))}{\partial x} b(s) dW_s$ est l'intégrale stochastique (ou l'intégrale d'Itô) du processus $\frac{\partial f(s, \xi(s))}{\partial x} b(s)$ par rapport au mouvement brownien.

Lemme 49 (*Isométrie d'Itô*) Si $f(t, \omega)$ est une fonction bornée alors

$$E \left[\left(\int_s^T f(t, \omega) dW_t \right)^2 \right] = E \left[\int_s^T f(t, \omega)^2 dt \right] \quad (10.7)$$

et

$$E \left[\int_s^T f(t, \omega) dW_t \right] = 0. \quad (10.8)$$

Un théorème d'existence et d'unicité

Soit $(W_t)_{t \in \mathcal{T}}$ un mouvement Brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Soient $(\mathcal{E}_t, t \in \mathbb{R}_+)$ une filtration et $a(t, x)$ et $b(t, x)$ des fonctions mesurables dans $[0, T] \times \mathbb{R}$. Soit $(u(t))_{t \in [0, T]}$ un processus stochastique. On dit que $u(t)$ est solution de l'équation différentielle stochastique

$$du(t) = a(t, u(t)) dt + b(t, u(t)) dW_t \quad (10.9)$$

$$u(0) = u_0$$

si

- a) $u(0)$ est \mathcal{E}_0 - mesurable ;
- b) $\sqrt{a(t, u(t))}, b(t, u(t)) \in \mathcal{C}([0, T])$;
- c) $du(t) = a(t, u(t)) dt + b(t, u(t)) dW_t$.

On a le résultat suivant :

Théorème 10.3.2 On considère l'équation différentielle stochastique (10.9) et on suppose que $a(t, x)$ et $b(t, x)$ sont des fonctions continues et qu'il existe une constante K telle que :

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K |x - y|$$

et

$$|a(t, x)| \leq K(1 + |x|); \quad |b(t, x)| \leq K(1 + |x|).$$

Alors, pour tout $T > 0$, l'équation (10.9) admet une solution unique \mathcal{F}_t adaptée dans l'intervalle $[0, T]$.

Bibliographie

- [1] M. Adiou, O. Arino, W.V. Smith and J.P. Treuil, A mathematical analysis of a fish school model, *J. Differential Equations*, 188(2003) 406 – 446.
- [2] M. Adiou, J.P Treuil and O. Arino, Alignment in a fish school : a mixed Lagrangien-Eulerian approach, *Ecological modelling*, 167(2003) 19 – 32.
- [3] M. Adiou, The interplay between individual based computer simulation and mathematical analysis in a fish school, *Actes du 6^{ème} Colloque Africain sur la recherche en Informatique, proceedings de CARI, (2002) 385 – 393.*
- [4] W.C. Allee, *Animals Aggregations*, University of Chicago Press, Chicago, (1931).
- [5] W. Alt, *Dynamics of Cell and Tissue Motion*, Workshop Bonn-Röttgen (1995), Birkhäuser, Basel, (1997).
- [6] I. Aoki, A simulation study on the schooling mechanism in fish, *Bull. Jap. Soc. Fish*, 48(1982) 1081 – 1088.
- [7] I. Aoki, An analysis of the schooling behavior of fish : Internal organization and communication process, *Bull. Ocean. Res. Inst. Tokyo*,12(1980).

- [8] I. Aoki, Internal dynamics of fish schools in relation to inter-fish distance, *Bull. Jap. Soc. Sci. Fish*, 50(1984) 751 – 758.
- [9] M. Begon, R. Wall, Individual variation and competitor coexistence : a model. *Funct. Ecol*, 1(1987) 237 – 241.
- [10] D. Bergandi & L. Rasmusen, Holism vs. reductionism : do ecosystem ecology and landscape ecology clarify the debate? *Acta Biotheoretica*, 46(1998) 185 – 206.
- [11] C.M. Breder, Studies on the social groupings of fishes. *Bulletin of the museum of American natural history*, 117(1959) 393 – 482.
- [12] C.M. Breder, F. Halpern, Innate and acquired behavior affecting the aggregation of fishes. *Physiol. Zool*, 19(1946) 154 – 190.
- [13] D. Bumann, J. Krause and D.I. Rubenstein, Mortality risk of spatial positions in animals groups : the danger of being in the front. *Behavior*, 134 (1997) , 1063 – 1076.
- [14] D. Bunman and J.Krause. Front individuals lead in shoals of three-spined sticklebacks. *Behavior*, 125(1993) 189 – 198.
- [15] W.H. Calvert, L.E. Hedrick and L.P. Brower, Mortality of the monarch butterfly (*Danaus plexipus* L) : avian predation at five overwintering sites in Mexico, *Science*, 204(1979) 847 – 851.
- [16] V. Capasso, Stochastic differential equations and systems of integrating particles, *Lecture notes in 1st ESMTB, Martina Franca (Taranto), Italy*, 4 – 15, (2000).
- [17] A.L. Caplan, Rehabilitating reductionism. *Am. Zool*, 28(1988) 193 – 203.
- [18] D.S. Cohen, J.D. Murray. A generalized diffusion model for growth and dispersal in a population. *J. Math. Biol*, 12 (1981) 237 – 249.

- [19] M.G. Crandall, P.H. Rabinowitz, Bifurcation from simple eigenvalues, *Journal of Functional Analysis*, 8(1971) 321 – 340.
- [20] J.M. Cushing, *An Introduction to Structured Population Dynamics*, Society for Industrial and Applied Mathematics, (1998).
- [21] J. Dallon, J.Sherratt, A mathematical model for fibroblast and collagen orientation, *Bull.Math.Biol*, 60(1998) 101 – 129.
- [22] R. Dautray, J.L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique*, edition Masson, 8(1988).
- [23] D.L. DeAngelis and M.J. Gross, *Individual-Based Models and Approaches in Ecology, Populations, Communities and Ecosystems*, Routledge, Chapman and Hall, New York, (1992).
- [24] K. Deimling, *Non linear Functional Analysis* , Spring-Verlag, Berlin and New York,(1985) .
- [25] A. Deutsch, Orientation-induced pattern formation : swarm dynamics in a lattice-gas automaton model. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 6(1995) 1735 – 1752.
- [26] A. Deutsh, Principles of biological pattern formation : swarming and aggregation viewed as self-organization phenomena. *J. Biosci*, 24(1999) 115 – 120.
- [27] R. Durreet, S.A. Levin, The importance of being discrete (and spatial). *Theor. Pop. Biol*, 46(1994) 363 – 394.
- [28] L. Edelstein-Keshet, G.B. Ermentrout, Models for contact mediated pattern formation. *J. Math. Biol*, 29(1990) 32 – 58.

- [29] E. Edelstein-Keshet, J. Watmough and D. Grunbaum, Do travelling band solutions describe cohesive swarms? An investigation for migratory locusts. *J. Math. Biol.*, 36(1998) 515 – 549.
- [30] K.J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroup for Linear Evolution Equations*, Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, (2000).
- [31] J. Ferber, *Les systèmes multi-agents. Vers une intelligence collective*. InterEditions, (1995).
- [32] J. Ferber, *La modélisation-multi-agents : un outil d'aide à l'analyse de phénomènes complexes*. Vie et société du CNRS, (1997) 113 – 133.
- [33] G. Flierl, D. Grunbaum, S. Levin and D. Olson, From individuals to aggregations : the interplay between behavior and physics, *Journal of Theoretical Biology*, 196(1999) 397 – 454.
- [34] P. Fréon, O.A. Misund, *Dynamics of pelagic fish distribution and behavior : effects on fisheries and stock assessment*. Fishing new books, (1999).
- [35] A. Friedman, *Stochastic differential equations and applications*, Vol. I and II, Academic Press, London, (1975).
- [36] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Holt, Reinhart, and Winston Inc., New York, (1969).
- [37] Graves, *Photographic method of measuring spacing and density within pelagic fish schools at sea*. *Fisheries Bulletin*, 75(1977) 230 – 234.
- [38] C.H. Greene, P.H. Wiebe and J.E. Zamon, *Acoustic visualization of patch dynamics in oceanic ecosystems*. *Oceanography*, 7(1994) 4 – 12.

- [39] V. Grimm, Ten years of individual-based modelling in ecology : what have we learned and what could be learned in the future. *Ecological modelling*, 115(1999) 129 – 148.
- [40] A. Gronewold, M. Sonnenschein, Event-based modelling of ecological systems with asynchronous cellular automata, *Ecological Modelling*, 108(1998) 37 – 52.
- [41] D. Grunbaum, Schooling as strategy for taxis in a noisy environment, *Evolutionary Ecology*, 12(1998) 503 – 522.
- [42] D. Grunbaum, Translating stochastic density-dependent individual behavior with sensory constraints to an eulerian model of animal swarming, *Journal of Mathematical Biology*, 33(1994) 139 – 161.
- [43] D. Grunbaum, A. Okubo, Modelling Social animal aggregations, In : *Frontiers of theoretical Biology, Lecture Notes in Biomathematics*, Berlin : Springer-Verlag, 100(1994).
- [44] S. Gueron, S.A. Levin and D.I. Rubenstein, The dynamics of herds : from individuals to aggregations, *J. Thero. Biol*, 182(1996) 85 – 98.
- [45] S. Gueron, , S.A. Levin, The dynamics of group formation, *Math. Biosci*, 128(1995) 243 – 264.
- [46] W.D. Hamilton, Geometry for the selfish herd. *J. Theor. Biol*, 31(1971)295 – 311.
- [47] L.R. Haury, J.A. McGowan, and P.H. Wiebe. Patterns and processes in the time - space scales of plankton distributions. In J.H. Steele (Ed.), *Spatial pattern in plankton communities*. New York : Plenum Press, (1978) 277 – 327.
- [48] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, *Lect. Notes. in Math.*, Springer-Verlag, New York, 840(1981).

- [49] P. Hess, Zur Störungstheorie linear operators in Banachräumen, *comment. Math. Helv*, 45(1970) 229 – 235.
- [50] M. Holmes, B.Sleeman, A mathematical model of tumour angiogenesis incorporating cellular traction and viscoelastic effects ", *J.Theor.Biol*, 202(2000) 95 – 112.
- [51] E. Holmes, Are diffusion models too simple? A comparison with telegraph models of invasion, *The American Naturalist*, 142(1993) 779 – 795.
- [52] J.R. Hunter, Communication of velocity changes in jack mackerel schools. *Animal behavior*, 17(1969) 507 – 514.
- [53] M. Huston, D. DeAngelis and W. Post, New computer models unify ecological theory. *BioScience*, 38(1988) 682 – 691.
- [54] A. Huth, C. Wissel, The movement of fish schools : A simulation model, In *Biological Motion* (W. Alt and G. Hoffman, eds), *Lecture Notes in Biomathematics*, Berlin Springer-Verlag, 89(1990) 577 – 590.
- [55] A. Huth, C. Wissel, The simulation of the movement of fish schools, *Journal of theoretical biology*, 156(1999) 365 – 385.
- [56] G. Iooss, *Bifurcation of Maps and Applications*, *Mathematics Studies*, (1979).
- [57] O.P. Judson, The rise of individual-based model in ecology, *Trends Ecol. Evol*, 9(1994) 9 – 14.
- [58] K. Kawasaki, Diffusion and the formation of spatial distribution. *Mathematical Sciences*, 16(1978), 47 – 52.
- [59] J. Krause, D. Hoare, S. Krause, C.K Hermelrijk and D. I. Rubenstein, Leadership in fish shoals, *Fish and fisheries*, 1(2000) 82 – 89.

- [60] W. Krawcewicz, J. Wu, Theory of Degrees with Applications to Bifurcations and Differential Equations, John Wiley and Sons, New York, (1996).
- [61] C. Lévêque, Ecologie de l'écosystème à la biosphère, Environnement, Vie et Sociétés, (2001).
- [62] S.A. Levin, A. Morin and T.M. Powell, Pattern and processes in the distribution and dynamics of Antarctic krill, Scientific Report VII/ BG 20(1989) 281 – 296. Report for the Commission for the Conservation of Antarctic Marine Living Resources (CCAMLR).
- [63] A. Lomnicki, Individual-based models and the individual based approach in ecology. Ecological modelling, 115(1999) 191 – 198.
- [64] H. Lorek, M. Sonnenschein, Object-oriented support for modelling and simulation of individual-oriented ecological models, Ecological Modelling, 108(1998)77 – 96.
- [65] C.C. Maley, H. Caswell, Implementing i-state configuration models for population dynamics : an object-oriented programming approach, Ecol. Modelling, 68(1993) 75–89.
- [66] A.E. Magurran, A. Seghers, Population differences in predator recognition and attack cone avoidance in the guppy. Animal behavior, 40 (1990) 443 – 452.
- [67] E. Marchal, E., Josse and A., Lebourges-Dhaussy, Prédateurs et proies : une approche acoustique. Océanis, 22(1996) 117 – 132.
- [68] E. Marchal, P. Petitgas, Precision of acoustic fish abundance estimates : separating the number of schools from the biomass in the schools. Aquat. Living Resources, 6(1993) 211 – 219.

- [69] J. Martiel, A. Goldbeter, A model based on receptor desensitization for cyclic AMP signaling in Dictyostelium cells. *Biophysical Journal*, 52(1987) 807 – 828.
- [70] M. Metivier, *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*, Dunod, Paris, (1968).
- [71] A. Mogilner, L. Bent and L. Edelstein-Keshet, An individual-based model for aggregation in social organisms : attraction-repulsion interactions that lead to a well-spaced group, to appear.
- [72] A. Mogilner, L. Bent and L. Edelstein-Keshet, Spatio-angular order in populations of self-aligning objects : formation of oriented patches, *Physica D*, 89(1996) 346 – 367.
- [73] A. Mogilner, L. Bent and L. Edelstein-Keshet, A non-local model for a swarm, *J. Math.biology*, 38(1999) 534 – 570.
- [74] H. Niwa, Newtonian dynamical approach to fish schooling, *J. Thero. Biol*, 181(1996) 47 – 63.
- [75] D.P. O'Brien, Analysis of the internal arrangement of individuals within crustacean aggregations, *J. Exp. Mar. Biol. Ecol*, 124(1989) 1 – 30.
- [76] B. Øksendal, *Stochastic differential equations, an introduction with applications*, Springer-Verlag, (1998).
- [77] A. Okubo, *Dynamical aspects of animal grouping : swarms, social, flocks and herds*. *Adv. BioPhys*, 22(1986) 1 – 94.
- [78] A. Okubo, *Diffusion and Ecological Problems : Mathematical Models*, Springer-Verlag, New York, (1983).

- [79] A.E. Parr, A contribution to the theoretical analysis of the schooling behavior of fishes. Occasional papers of bingham oceanographic college, 1(1927) 1 – 32.
- [80] J.K. Parrish, L. Edelstein-Keshet, Complexity, pattern and evolutionary Trade-offs in animal aggregation. Science, 284(1999) 99 – 101.
- [81] J.K. Parrish, W.M. Hamner, Animals groups in three dimensions, Cambridge university press, (1997).
- [82] A. Pavé, Modélisation en biologie et en écologie. Aléas Editeur, (1994).
- [83] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 119(1983).
- [84] Pitcher, T.J, A.E. Magurran, and I.J. Winfield, Fish in larger shoals find food faster. Behav Ecolo Sociobiol, 10(1982) 149 – 151.
- [85] T.J. Pitcher, J.K. Parrish, Functions of shoaling behavior in teleosts. In : The behavior of Teleost Fishes (ed. T.J. Pitcher), Chapman & Hal, London, (1986) 294 – 337.
- [86] K. Popper, La connaissance objective. Editions complexe, 2nd édition, (1982) pour la traduction française.
- [87] P.H. Rabinowitz, On bifurcation from infinity, Journal of Differential Equations, 14(1973) 462 – 475.
- [88] D.V. Radakov, Schooling in the ecology of fish. Halsted Press, Johon Wiley & Sons, New York, (1973)
- [89] C.W. Reynolds, Flocks, herds and schools : A distributed behavior model. Computer Graphics, 21(1987) 25 – 34.

- [90] E. Shaw, Schooling fishes. *American Scientist* 66(1978) 166 – 175.
- [91] S. Stöcker, Models for tuna school formation. *Math. Biosci.*, 156(1999) 167 – 190.
- [92] S. Stöcker, Cellular automaton models for fish schools : merging social behavior and hydrodynamics. *Mathematical biosciences*, 156(1999) 167 – 190.
- [93] A.Suciu et al., Model for the alignment of actin filaments in endothelial cells subjected to fluid shear stress ”. *Bull.Math.Biol.*, 59(1997) 1029 – 1046.
- [94] L.R. Taylor et R.A.J. Taylor, Aggregation, migration and population mechanics, *Nature*, 265(1977) 415 – 421.
- [95] L.R. Taylor, Synoptic dynamics, migration and the Rothamsted Insect Survey, Presidential Address to the British Ecological Society. December 1984. *Journal of Animal Ecology*, 55(1986)1 – 38.
- [96] P. Turchin et P. Kareiva, Aggregation in *Aphis varians* : an effective strategy for reducing predation risk, *Ecology*, 70(1989) 1008 – 1016.
- [97] J.P. Treuil, C. Mullon, E. Perrier and M. Piron, Simulation multi-agents de dynamiques spatialisées. *Modèles en analyse spatiale*, Hermès Paris, (2001) 219 – 252.
- [98] B.P. Turchin, Population consequences of aggregative movement. *J. Animal Ecology*, 58(1989) 75 – 100.
- [99] G.F. Turner, T.J. Pitcher, Attack abatement : a model for group protection by combined avoidance and dilution. *American Naturalist*, 128 (1986) 228 – 240.
- [100] J. Uchmanski, V. Grimm, Individual based modelling in ecology : what makes the difference? *Trend. Ecol. Evol*, 11(1996) 437 – 441.

- [101] R. Vabø, L. Nøttestad, An individual model of fish school reactions : predicting anti-predator behavior as observed in nature, *Fish Oceanogr*, 6(1997) 155 – 171.
- [102] C. Van Duijn, *Diseases of fish, water life*, London, (1958).
- [103] K. Warburton, J. Lazarus, Tendency-distance of social cohesion in animal groups. *J. Thero. Biol*, 150(1991) 473 – 488.
- [104] C.J. Weijer, Morphogenetic cell movement in *Dictyostelium*, *Semin. Cell Dev. Biol*, 10(2000).
- [105] C.J. Weijer, The Role of Chemotactic Cell Movement in *Dictyostelium* Morphogenesis mound in Chaplain, M.A.J., Singh, G.D., and McLachlan, J.C. (Editors), (1999) 173 – 199, *On Growth and Form : Spatio-temporel Pattern Formation in Biology*, Chichester : Wiley.
- [106] S.A. Wissinger, Niche overlap and the potential for competition and intraguild predation in size-structured populations. *Ecology*, 73 (1992) 1431 – 1444.