UTILISATION DES INCERTITUDES ASSOCIEES AUX MESURES ALTIMETRIQUES SATELLITAIRES DE PLAN D'EAU

JC Bader, G Belaud, UMR G-Eau, Montpellier, 14/06/2010

RESUME

On cherche comment utiliser les incertitudes *I* associées aux mesures altimétriques satellitaires de plan d'eau *Y*, pour quantifier l'imprécision des régressions établies entre de telles mesures et des cotes *X* mesurées au sol. Le but consiste à connaître les erreurs types résiduelles de régression qu'on obtiendrait si chaque valeur *Yi* de la série de base était remplacée par une distribution normale de moyenne *Yi* et d'écart type *Ii*. Par une méthode numérique basée sur l'utilisation de nombreux jeux de données différents, on montre les résultats suivants de portée générale, dont certains sont justifiés de façon théorique :

Pour la régression exprimant Y en fonction de X :

- Les droites de régression sont identiques sur la série de base et la série étendue
- L'erreur type résiduelle de régression *E1re* sur la série étendue est fonction de l'erreur type résiduelle de régression *E1rb* sur la série de base et de la moyenne quadratique *MQIb* des incertitudes *I* sur la série de base :

$$E1re = (E1rb^2 + MQIb^2)^{0.5} \qquad (0)$$

Pour la régression exprimant X en fonction de Y :

- Les droites de régression calculées sur la série de base et la série étendue diffèrent. Leurs coefficients directeurs respectifs *A2b* et *A2e* sont tels que le rapport *A2e*/*A2b*, toujours inférieur ou égal à 1, décroît en fonction du rapport *MQIb*/*ETYb*, où *ETYb* désigne l'écart type de *Y* sur la série de base.
- Sur la série étendue, les écarts de *X* par rapport à la droite de régression calée sur la série de base ont une moyenne nulle. La moyenne quadratique *E3re* de ces écarts est fonction de *MQIb* et de l'erreur type résiduelle de régression *E2rb* calculée sur la série de base :

$$E3re = (E2rb^2 + (A2b \times MQIb)^2)^{0.5} \qquad (00)$$

NOTATIONS

Dans les notations, le suffixe 0 apposé à un nom de paramètre signifie que la valeur de celui-ci est arbitrairement choisie. Les suffixes b et e apposés à un nom de paramètre signifient que celui-ci est calculé sur la série de base ou sur la série étendue.

A0 pente de relation linéaire moyenne entre *X* et *Y*
A1 pente de régression linéaire entre *X* et *Y*
A2 pente de régression linéaire entre *Y* et *X*
B0 ordonnée à l'origine de la relation linéaire moyenne entre *X* et *Y*

B1 ordonnée à l'origine de la régression linéaire entre *X* et *Y*
B2 ordonnée à l'origine de la régression linéaire entre *Y* et *X*
Di résidu de rang *i* (écart entre *Yi* et *A0* x *Xi* + *B0*)
E1r écart type résiduel de la régression linéaire entre *X* et *Y*
E2r écart type résiduel de la régression linéaire entre *Y* et *X*
E3re moyenne quadratique des écarts entre *X* et la régression de *Y* calée sur série de base
ETI écart type des incertitudes *I* sur *Y*
ETD écart type des résidus *D*
ETX écart type des valeurs de *X*
ETY écart type des valeurs de *Y*
f(*a*,*b*,*c*) loi normale inversée de probabilité a, moyenne b et écart type c
Ii incertitude sur la valeur de *Yi*
KI coefficient de régression double associé à *MQIb*, reliant *E1re* à *E1rb* et *MQIb*
KR coefficient de régression double associé à *E1rb*, reliant *E1re* à *E1rb* et *MQIb*
M3e moyenne des écarts entre *X* et la régression de *Y* calée sur la série de base
MI moyenne des valeurs d'incertitude *I* sur *Y*
MD moyenne des valeurs de *D*
MQI moyenne quadratique des valeurs de *I*
MX moyenne des valeurs de *X*
MY moyenne des valeurs de *Y*
N nombre de couples *Xi*,*Yi*
R^2 coefficient de détermination ou de Nash de la régression linéaire entre *X* et *Y*
Rr^2 coefficient de détermination de la régression double reliant *E1re* à *E1rb* et *MQIb*
Xi valeur de rang *i* de la variable *X*
Yi valeur de rang *i* de la variable *Y*

OBJECTIF

On considère deux séries *X* et *Y* de dimension *N0* représentant des niveaux de plan d'eau, susceptibles d'être reliées par régression linéaire après éventuel décalage de temps, constant ou variable. Chaque valeur de *X* est une cote observée au sol, alors que chaque valeur de *Y* est une cote mesurée par altimétrie satellitaire, associée à une valeur d'incertitude *I*.

En première approximation, on considère que *X* et *Y* ont des distributions normales et qu'en outre, chaque valeur *Yi* correspond à la moyenne d'une distribution normale d'écart type *Ii*.

Etant donnés l'écart type résiduel *E1rb* sur *Y* de la régression linéaire entre *X* et *Y* et la moyenne quadratique *MQIb* des incertitudes *I*, on désire connaître l'écart type résiduel *E1re* de la régression entre *X* et *Y* qu'on obtiendrait en remplaçant chaque valeur *Yi* par sa distribution normale d'écart type *Ii*. On cherche donc à établir une relation de portée générale entre *E1re*, *E1rb* et *MQIb*.

On se pose la même question pour la régression linéaire entre Y et X.

METHODE

Les relations recherchées sont établies par une démonstration numérique, basée sur de nombreux jeux de données aléatoires vérifiant les conditions de normalité énoncées plus haut. Les résultats obtenus pour la régression entre X et Y sont également justifiées de façon théorique, grâce aux hypothèses de normalité.

Constitution d'un jeu de données

Un jeu de données consiste en une série de base de $N0$ triplets X,Y,I et en une série étendue associée de 100$N0$ couples X,Y, élaborée à partir de la série de base.

La série de base est définie à partir de l'octuplet $N0$, $MX0$, $ETX0$, $A0$, $B0$, $ETD0$, $MI0$, $ETI0$, dont les valeurs sont choisies de façon arbitraire.

Les valeurs croissantes de Xi sont définies ainsi pour chaque rang i entre 1 et $N0$:

$$Xi = f((i\text{-}0.5) / N0 \,;\, MX0 \,;\, ETX0) \quad (1)$$

On définit ensuite une série de résidus ordonnés Di et d'incertitudes ordonnées Ii de la façon suivante, pour chaque rang i entre 1et $N0$:

$$Di = f((i\text{-}0.5) / N0 \,;\, 0 \,;\, ETD0) \quad (2)$$
$$Ii = f((i\text{-}0.5) / N0 \,;\, 0 \,;\, ETI0) \quad (3)$$

Après une redistribution en ordre aléatoire des valeurs de chaque série Di et Ii, les valeurs de la série Yi sont alors calculées de la façon suivante :

$$Yi = A0 \times Xi + B0 + Di \quad (4)$$

La série étendue est obtenue en remplaçant chacun des $N0$ triplets Xi,Yi,Ii de la série de base par 100 couples Xij,Yij définis ainsi pour chaque rang j entre 1 et 100 :

$$Xij = Xi \quad (5)$$
$$Yij = Yi + f((j\text{-}0.5)/100 \,;\, 0 \,;\, Ii) \quad (6)$$

Conclusion : chaque jeu de données, constitué d'une série de base et d'une série étendue associée, est défini par les valeurs arbitraires de l'octuplet $N0$, $MX0$, $ETX0$, $A0$, $B0$, $ETD0$, $MI0$, $ETI0$, un classement aléatoire des résidus Di et un classement aléatoire des incertitudes Ii.

Statistiques calculées pour chaque jeu de valeurs

La série de base présente par construction les valeurs moyennes suivantes pour X, Y, I et D:

$$MXb = MX0 \quad (7)$$
$$MYb = A0 \times MX0 + B0 \quad (8)$$
$$MIb = MI0 \quad (9)$$
$$MDb = 0 \quad (10)$$

Les écarts types de X, I et D sur la série de base présentent l'égalité suivante :

$$ETXb/ETX0 = ETIb/ETI0 = ETDb/ETD0 = k \quad (11)$$

avec k<1 et tendant vers 1 quand $N0$ augmente (par ex : k=0.975 pour $N0$ = 25)

Les régressions entre X et Y sont calculées dans les deux sens à la fois sur la série de base et sur la série étendue, donnant les paramètres $A1$ et $A2$ (pentes de régression), $B1$ et $B2$

(ordonnées à l'origine), *E1r* et *E2r* (écarts types résiduels) et R^2 (coefficient de détermination). La moyenne quadratique *MQI* des incertitudes *I* sur *Y* est calculée sur la série de base. Enfin, on calcule sur la série étendue la moyenne *M3e* et la moyenne quadratique *E3re* des écarts entre *X* et la droite de régression de paramètres *A2b* et *B2b* établie sur la série de base.

RESULTATS

Régressions entre *X* et *Y*

Au total, 180 jeux de données différents ont été testés, correspondant à 12 octuplets de paramètres arbitraires différents, avec pour chacun d'eux 15 redistributions aléatoires des valeurs de résidus *D* et d'incertitudes *I*. Les résultats moyens obtenus pour chaque octuplet de paramètres sont donnés dans le tableau 1.

Pour chaque jeu de données, les coefficients de régression entre *X* et *Y* sont strictement identiques pour la série de base et la série étendue (*A1b* = *A1e* et *B1b* = *B1e*), comme le montre la figure 1 pour un jeu de données particulier.

Les paramètres *A1*, *B1*, *E1r* et R^2 de la régression entre *X* et *Y* varient évidemment beaucoup en fonction des valeurs imposées à l'octuplet de paramètres arbitraires, mais assez peu (hormis *B1*), en fonction des redistributions aléatoires de *D* et de *I*. Ces variations sont cependant suffisantes pour pouvoir établir pour chaque octuplet de paramètres les régressions linéaires doubles contraintes suivantes, basées sur 15 triplets *E1re*, *E1rb*, *MQIb* :

$$E1re = KR \times E1rb + KI \times MQIb \qquad (12)$$

Le coefficient de détermination de cette régression est strictement égal à 1 pour chacun des douze octuplets de paramètres testé. On remarque par ailleurs (fig.2) que les coefficients de régression *KR* et *KI* sont très bien reliés à la valeur moyenne du rapport *MQIb*/*E1rb* :

$$KR = (1 / (1 + (MQIb / E1rb)^2))^{0.5} \qquad (13)$$

$$KI = ((MQIb / E1rb)^2/(1 + (MQIb / E1rb)^2))^{0.5} \qquad (14)$$

Les relations 12 à14 donnent finalement :

$$E1re = (E1rb^2 + MQIb^2)^{0.5} \qquad (15)$$

Cette relation est confirmée par la figure 3 qui regroupe les résultats obtenus avec chacun des 180 jeux de données testés.

Régressions entre *Y* et *X*

Au total, 195 jeux de données différents ont été testés, correspondant à 13 octuplets de paramètres arbitraires différents, avec pour chacun d'eux 15 redistributions aléatoires des valeurs de résidus *D* et d'incertitudes *I*. Les résultats moyens obtenus pour chaque octuplet de paramètres sont donnés dans le tableau 2.

Contrairement aux régressions entre *X* et *Y*, les régressions entre *Y* et *X* peuvent être très différentes lorsqu'elles sont calculées sur la série de base ou sur la série étendue (fig. 4). Or dans le cas pratique qui nous intéresse, on dispose seulement d'une série de base de données sur laquelle il est possible d'établir la régression entre Y et X, d'équation :

$$X = A2b \times Y + B2b \qquad (16)$$

C'est donc bien par rapport à cette droite de régression qu'il convient d'évaluer les écarts de X sur la série étendue, et en particulier leur moyenne *M3e* et leur moyenne quadratique *E3re*. On constate que *M3e* est parfaitement nul pour chacun des 195 jeux de données testés. Les résultats obtenus permettent par ailleurs d'établir la relation suivante (fig. 5) :

$$E3re = (E2rb^2 + (A2b \times MQIb)^2)^{0.5} \qquad (17)$$

Dans tous les cas, les rapports *E2re*/*E3re* et A2e/A2b sont inférieurs ou égaux à 1. Ils décroissent globalement en fonction du rapport MQI/ETY (fig.6), mais pourraient aussi dépendre d'autres facteurs.

Justification théorique de la relation 15

On note Ya la valeur de Y estimée de manière empirique. On a aussi l'incertitude empirique MQI. On suppose que (Y-Ya) suit une loi gaussienne LG(0,I), MQI étant une estimation empirique de I.
On a fait la régression entre Ya et X, avec les coefficients A et B, erreur type Erb. On suppose que (Ya-(A.X+B)) suit une loi gaussienne LG(0,Erb).
La somme des deux variables aléatoires gaussiennes (Y-Ya) et (Ya-(A.X+B)) reste une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance $Ere^2=I^2+Erb^2$.

N0	**100**	**100**	**100**	**100**	**15**	**75**	**50**	**50**	**50**	**50**	**100**	**100**
MX0	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**500**
ETX0	**700**	**700**	**700**	**700**	**700**	**700**	**700**	**700**	**700**	**700**	**700**	**1000**
A0	**3.0**	**3.0**	**3.0**	**3.0**	**3.0**	**2.0**	**2.0**	**2.0**	**2.0**	**10.0**	**10.0**	**0.5**
B0	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**500**	**500**	**500**
ETD0	**900**	**900**	**900**	**90**	**90**	**150**	**500**	**1000**	**1000**	**1000**	**330**	**480**
MI0	**550**	**550**	**55**	**55**	**55**	**55**	**120**	**1100**	**2500**	**1800**	**1800**	**1800**
ETI0	**200**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**30**	**30**	**300**	**300**	**600**	**600**
MXb	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**500**
ETXb	**696**	**696**	**696**	**696**	**671**	**694**	**691**	**691**	**691**	**691**	**696**	**994**
MYb	**3100**	**3100**	**3100**	**3100**	**3100**	**2100**	**2100**	**2100**	**2100**	**10500**	**10500**	**750**
ETYb	2306	2234	2269	2089	2009	1401	1453	1641	1676	7043	6958	691
MQIb	**585**	**550**	**58**	**58**	**58**	**58**	**124**	**1100**	**2517**	**1824**	**1896**	**1896**
MIb	**550**	**550**	**55**	**55**	**55**	**55**	**120**	**1100**	**2500**	**1800**	**1800**	**1800**
ETIb	**198.7**	**19.9**	**19.9**	**19.9**	**19.2**	**19.8**	**29.6**	**29.6**	**296.2**	**296.2**	**596.2**	**596.2**
min(*Ii*)	**34.8**	**498.5**	**3.5**	**3.5**	**18.3**	**5.5**	**50.2**	**1030.2**	**1802.1**	**1102.1**	**254.5**	**254.5**
MDb	**0.000**	**0.000**	**0.000**	**0.000**	**0.000**	**0.000**	**0.000**	**0.000**	**0.000**	**0.000**	**0.000**	**0.000**
ETDb	**894.3**	**894.3**	**894.3**	**89.4**	**86.3**	**148.7**	**493.7**	**987.4**	**987.4**	**987.4**	**327.9**	**476.9**
A1b	3.06	2.95	3.00	3.00	2.99	2.01	1.98	1.90	1.97	10.09	9.99	0.50
B1b	42.6	152.8	100.5	98.7	107.8	92.2	120.0	197.9	134.7	406.5	507.9	497.7
E1rb	890.5	888.0	891.4	88.7	82.2	147.3	488.1	980.7	978.3	967.7	326.7	474.9
Rb^2	0.850	0.841	0.845	0.998	0.998	0.989	0.887	0.641	0.655	0.981	0.998	0.525
A1e	3.06	2.95	3.00	3.00	2.99	2.01	1.98	1.90	1.97	10.09	9.99	0.50
B1e	42.6	152.8	100.5	98.7	107.8	92.2	120.0	197.9	134.7	406.5	507.9	497.7
E1re	1063	1043	893	106	101	158	503	1469	2686	2055	1912	1943
ETYe	2378	2300	2270	2090	2010	1403	1458	1972	3012	7273	7208	2007
Re^2	0.800	0.794	0.845	0.997	0.997	0.987	0.880	0.444	0.204	0.920	0.930	0.063
MQIb / Erb	0.657	0.620	0.066	0.659	0.708	0.397	0.253	1.122	2.573	1.885	5.804	3.993
KR	0.837	0.851	0.998	0.836	0.805	0.928	0.969	0.666	0.361	0.459	0.171	0.243
KI	0.544	0.523	0.065	0.545	0.591	0.370	0.246	0.741	0.927	0.883	0.979	0.964
Rr^2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tableau 1 : résultats obtenus pour les régressions entre *X* et *Y* avec 180 jeux de données. Chaque colonne correspond à 15 jeux de données obtenus à partir des paramètres des 8 premières lignes, par redistribution aléatoire des valeurs de résidus *D* et d'incertitudes *I*. Les valeurs en gras sont strictement identiques pour les 15 jeux de données associés à un octuplet de paramètres donné. Les autres valeurs correspondent à la moyenne obtenue sur les 15 jeux de données.

N0	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**
MX0	**500**	**500**	**500**	**500**	**500**	**500**	**500**	**500**	**500**	**500**	**100**	**500**	**100**
ETX0	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**2000**	**1000**	**500**
A0	**0.5**	**0.2**	**0.2**	**0.2**	**10.0**	**10.0**	**10.0**	**5.0**	**1.0**	**3.0**	**3.0**	**10.0**	**0.6**
B0	**500**	**500**	**500**	**500**	**500**	**500**	**500**	**500**	**500**	**500**	**100**	**500**	**100**
ETD0	**480**	**1000**	**5**	**125**	**125**	**500**	**500**	**500**	**500**	**500**	**500**	**500**	**50**
MI0	**1800**	**50**	**2000**	**500**	**50**	**20**	**1000**	**1000**	**850**	**35**	**120**	**1000**	**2000**
ETI0	**600**	**10**	**500**	**120**	**10**	**5**	**5**	**300**	**300**	**10**	**10**	**5**	**500**
MXb	**500**	**500**	**500**	**500**	**500**	**500**	**500**	**500**	**500**	**500**	**100**	**500**	**100**
ETXb	**994**	**994**	**994**	**994**	**994**	**994**	**994**	**994**	**994**	**994**	**1987**	**994**	**497**
MYb	**750**	**600**	**600**	**600**	**5500**	**5500**	**5500**	**3000**	**1000**	**2000**	**400**	**5500**	**160**
ETYb	691	1013	199	235	9939	9941	9950	5003	1093	3044	5971	9942	301
MQIb	**1896**	**51**	**2061**	**514**	**51**	**21**	**1000**	**1043**	**901**	**36**	**120**	**1000**	**2061**
MIb	**1800**	**50**	**2000**	**500**	**50**	**20**	**1000**	**1000**	**850**	**35**	**120**	**1000**	**2000**
ETIb	**596.2**	**9.9**	**496.8**	**119.2**	**9.9**	**5.0**	**5.0**	**298.1**	**298.1**	**9.9**	**9.9**	**5.0**	**496.8**
min(*Ii*)	**254.5**	**24.2**	**712.1**	**190.9**	**24.2**	**7.1**	**987.1**	**227.3**	**77.3**	**9.2**	**94.2**	**987.1**	**712.1**
MDb	**0.000**	**0.000**	**0.000**	**0.000**	**0.000**	**0.000**	**0.000**	**0.000**	**0.000**	**0.000**	**0.000**	**0.000**	**0.000**
ETDb	**476.9**	**993.6**	**5.0**	**124.2**	**124.2**	**496.8**	**496.8**	**496.8**	**496.8**	**496.8**	**496.8**	**496.8**	**49.7**
A1b	0.504	0.201	0.200	0.202	10.002	9.992	10.001	5.010	0.980	3.023	2.995	9.993	0.597
B1b	498.1	499.6	500.0	499.2	499.1	503.8	499.5	494.8	509.9	488.7	100.5	503.5	100.3
E1rb	475.1	989.3	4.9	123.4	123.7	495.1	495.2	495.8	494.7	493.0	495.1	495.2	49.1
Rb²	0.524	0.046	0.999	0.723	1.000	0.998	0.998	0.990	0.794	0.974	0.993	0.998	0.973
A1e	0.504	0.201	0.200	0.202	10.002	9.992	10.001	5.010	0.980	3.023	2.995	9.993	0.597
B1e	498	500	500	499	499	504	500	495	510	489	101	503	100
E1re	1943	991	2048	525	134	496	1110	1149	1023	494	509	1110	2048
ETYe	2007	1015	2057	563	9939	9941	9999	5110	1413	3044	5973	9991	2070
Re²	0.063	0.046	0.009	0.127	1.000	0.998	0.988	0.949	0.475	0.974	0.993	0.988	0.021
A2b	1.041	0.190	4.995	3.594	0.100	0.100	0.100	0.198	0.811	0.322	0.332	0.100	1.632
B2b	-280.6	386.0	-2496.7	-1656.5	-49.8	-49.1	-48.6	-92.9	-311.3	-144.5	-32.7	-49.0	-161.1
E2rb	684.7	970.4	24.7	522.1	12.4	49.5	49.5	98.5	450.4	161.0	164.8	49.5	81.3
A2e	0.123	0.190	0.047	0.629	0.100	0.100	0.099	0.189	0.485	0.322	0.332	0.099	0.034
B2e	407.4	386.3	472.0	122.8	-49.8	-49.1	-43.2	-68.5	15.2	-144.4	-32.6	-43.6	94.5
E2re	962.0	970.5	989.0	928.2	13.4	49.5	110.3	223.5	719.7	161.4	169.5	110.4	491.7
E3re	2077.2	970.5	10227.1	1908.6	13.4	49.5	110.8	227.3	854.5	161.4	169.5	110.9	3342.2
M3e	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Tableau 2 : résultats obtenus pour les régressions entre *Y* et *X* avec 195 jeux de données. Chaque colonne correspond à 15 jeux de données obtenus à partir des paramètres des 8 premières lignes, par redistribution aléatoire des valeurs de résidus *D* et d'incertitudes *I*. Les valeurs en gras sont strictement identiques pour les 15 jeux de données associés à un octuplet de paramètres donné. Les autres valeurs correspondent à la moyenne obtenue sur les 15 jeux de données.

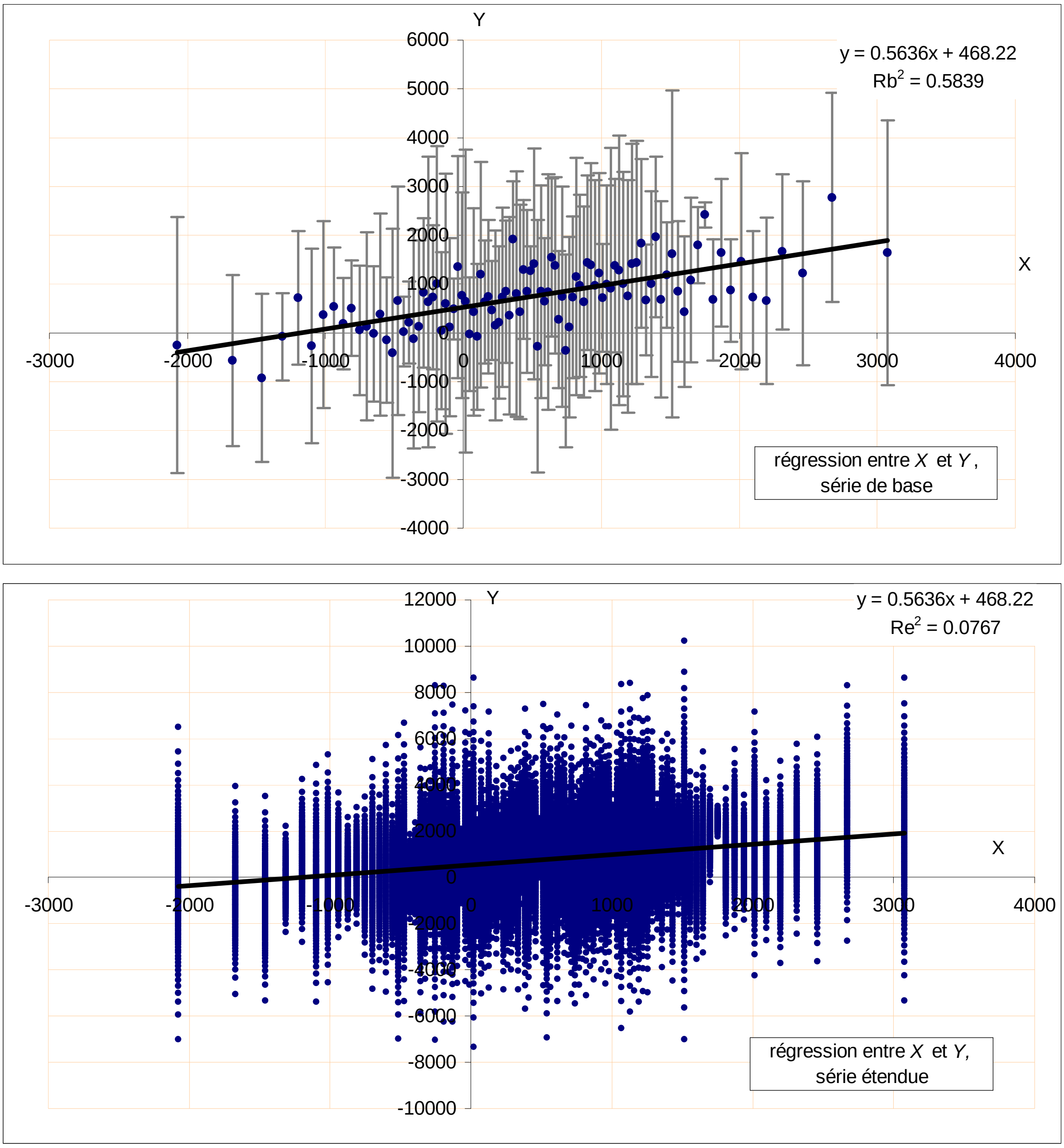

Figure 1 : similarité de la régression linéaire entre *X* et *Y*, établie sur la série de base ou la série étendue associée. Exemple pour un jeu de données caractérisé par : *N0*=100 ; *MX0*=500 ; *ETX0*=1000 ; *A0*=0.5 ; *B0*=500 ; *ETD0*=480 ; *MI0*=1800 ; *ETI0*=600.

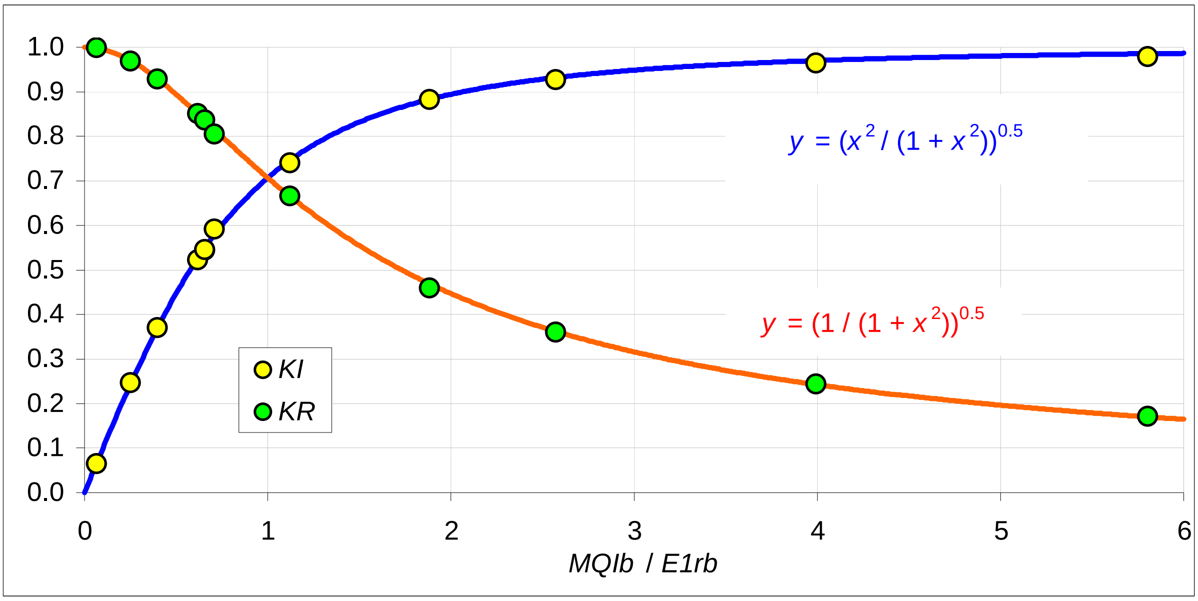

Figure 2 : variations des coefficients de régression *KI* et *KR* en fonction du rapport *MQIb*/*E1rb*

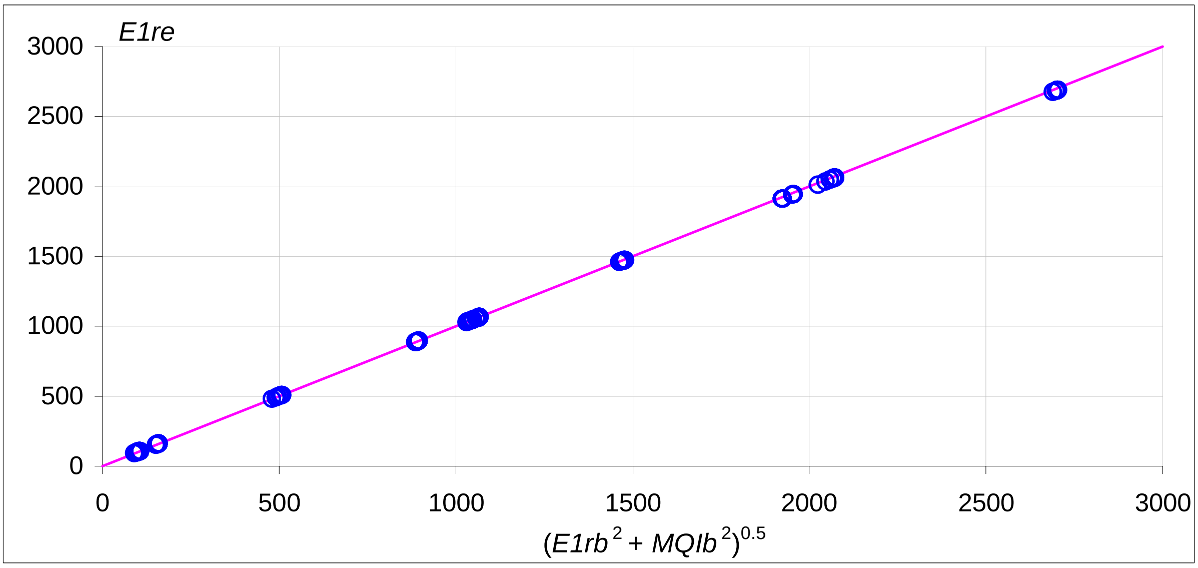

Figure 3 : relation observée sur les 180 jeux de données testés, entre l'erreur type résiduelle de régression *E1re* de la série étendue, l'erreur type résiduelle de régression *E1rb* de la série de base et la moyenne quadratique *MQIb* des incertitudes *I* sur *Y* de la série de base

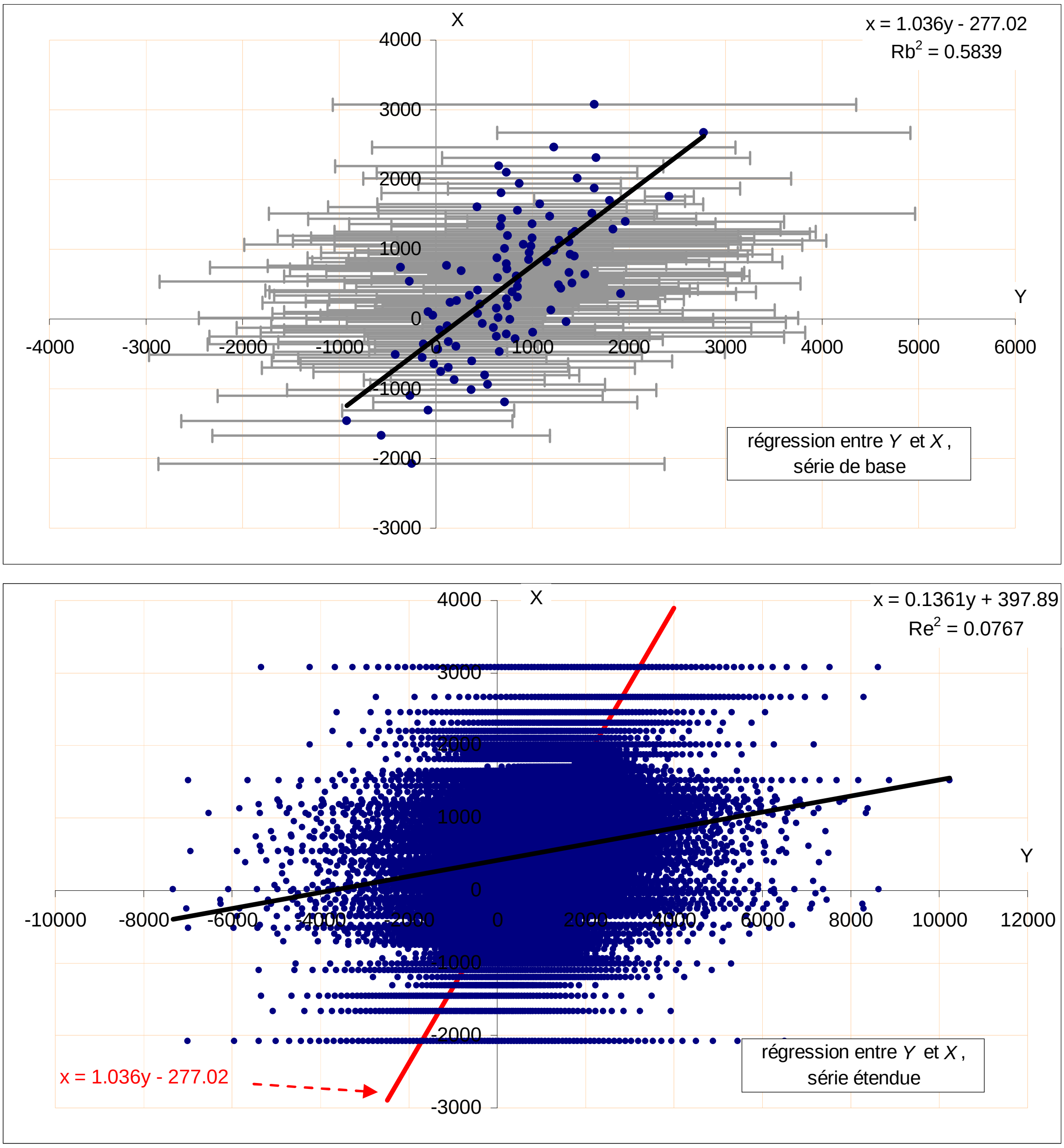

Figure 4 : exemple de régressions différentes entre *Y* et *X*, obtenues sur une série de base et sur la série étendue associée (jeu de données identique à celui de la figure 1)

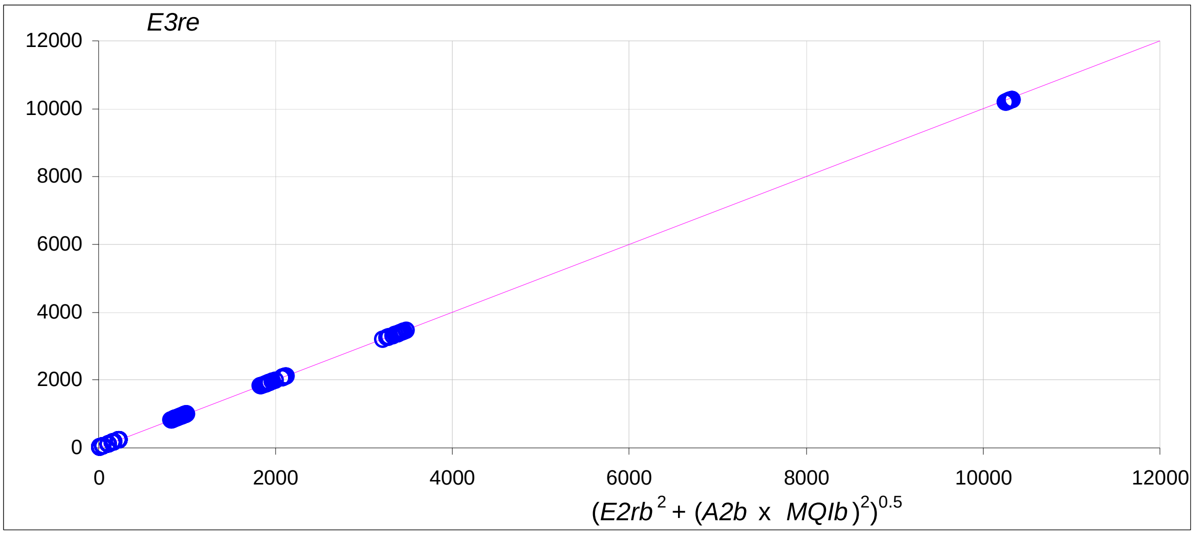

Figure 5 : relation observée sur les 195 jeux de données testés, entre la moyenne quadratique *E3re*, sur la série étendue, des écarts de *X* à la droite *X* = *A2b* x *Y* + *B2b*, d'une part, et les paramètres suivants calculés sur la série de base, d'autre part : *E2rb* (erreur type résiduelle de régression), *MQIb* (moyenne quadratique des incertitudes *I* sur *Y*) et *A2* (coefficient de régression).

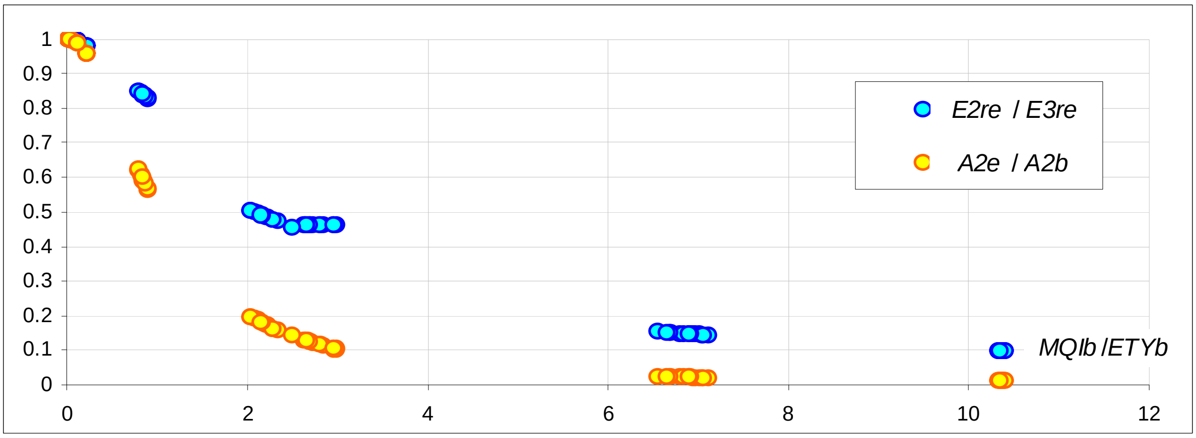

Figure 6 : rapports *E2re*/*E3re* et *A2e*/*A2b* en fonction du rapport *MQIb*/*ETYb*