Über die Enden topologischer Räume und Gruppen.

Von

Hans Freudenthal in Laren (Nordholland).

Obzwar die Eigenschaften im Kleinen einer Lieschen kontinuierlichen Gruppe in hohem Maße ihre Eigenschaften im Großen bestimmen, leistet die Liesche Theorie doch wenig für die Erkenntnis dieser Eigenschaften. Erweiterungen des Begriffes der kontinuierlichen Gruppe erleichtern den Einblick in ihre topologischen Eigenschaften. Man läßt die Voraussetzung der Differenzierbarkeit fallen und deutet die Gruppenelemente als Punkte einer topologischen Mannigfaltigkeit oder sogar eines topologischen Raumes.

Wenn man nun von einem gegebenen topologischen Gebilde entscheiden will, ob es sich als Gruppe eignet oder nicht, so kommt man häufig schon mit einfachen Kriterien sehr weit.

Solche Forderungen, die ein Gruppenraum erfüllen muß, sind die Homogeneität, ferner nach Schreier[1]) die Kommutativität der Wegegruppe; dann z. B. für geschlossene Mannigfaltigkeiten das Verschwinden der Eulerschen Charakteristik, das nach H. Hopf[2]) notwendig für die Existenz fixpunktfreier Deformationen ist.

Ein anderes Kriterium findet sich bei Leja[3]), der direkt die bereits durch L. E. J. Brouwer[4]) und Schreier[1]) bekannte Tatsache beweist, daß die mehr als einmal gelochte Ebene nicht Gruppenmannigfaltigkeit sein kann.

[1]) O. Schreier, Abstrakte kontinuierliche Gruppen, Hamb. Abh. 4 (1925), S. 30; Die Verwandtschaft stetiger Gruppen im Großen, Hamb. Abh 5 (1927), S. 238.

[2]) H. Hopf, Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen 96 (1926), S. 244.

[3]) F. Leja, Un lemme topologique et son application dans la theorie des groupes abstraits, Fund. Math. 10 (1927), p. 421-426.

[4]) L. E. J. Brouwer, Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, unabhängig von den Axiomen von Lie, Math. Annalen 67 (1909), S.246-267; 69 (1910), S. 181-203.

Eine Verallgemeinerung dieses Satzes ist der gruppentheoretische Kern der vorliegenden Arbeit. Wir betrachten im Kleinen kompakte, zusammenhängende, im Kleinen zusammenhängende [5]) topologische Räume mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom und führen in ihnen eine möglichst starke Komponentenzerfällung des „Unendlich Fernen" durch; diese Komponenten nennen wir Endpunkte. In zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten leisten unsere Endpunkte dasselbe wie die Kerékjértóschen [6]) „Randstücke". Mit den Endpunkten können wir den betrachteten Raum in einer Weise abschließen, die sich mit einfachen topologischen Mitteln vor allen anderen Abschließungen, z. B. der Tietzeschen[7]), auszeichnen läßt.

Der Endpunktbegriff steckt in allen Kriterien, die wir für Gruppenräume und „Wirkungsräume" von Gruppen ableiten werden. Von diesen Kriterien seien hier die folgenden genannt:

Die Verallgemeinerung in der Lejaschen Richtung: Ein Gruppenraum hat höchstens zwei Endpunkte.

Unter gewissen Stetigkeits- und Kompaktheitsbedingungen besitzt der Wirkungsraum einer transitiven Gruppe genau so viel Endpunkte wie die Gruppe selbst.

In dem durch die Endpunkte abgeschlossenen Gruppenraum läßt sich jede im Gruppenraum kompakte Punktmenge stetig auf einen Punkt zusammenziehen.

Die Sätze über Gruppenräume werden ohne Benutzung des assoziativen Gesetzes bewiesen, treffen also auch auf die Schiebräume zu, d. h. Räume, die eine einfach transitive Schar bis auf die Identität fixpunktfreier Transformationen (mit gewissen Stetigkeitsbedingungen) besitzen.

Es sei noch bemerkt, daß wir von der Normalität und Metrisierbarkeit der im Kleinen kompakten Räume mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom [8]) nirgends explizit Gebrauch machen werden; wir werden die diesbezüglichen Eigenschaften direkt ableiten. Das zweite Abzählbarkeitsaxiom dürfte für unsere Untersuchungen nicht wesentlich sein; man brauchte wohl nur den Begriff „kompakt" durch „bikompakt" [9]) und Folgen durch Wohlordnungstypen zu ersetzen.

[5]) Siehe auch Fußnote [15]), S. 702.

[6]) B. v. Kerékjartó, Vorlesungen über Topologie, S. 164.

[7]) H. Tietze, Beiträge zur allgemeinen Topologie II, Math. Annalen 91 (1924), S. 213.

[8]) P. Alexandroff, Über die Metrisation der im Kleinen kompakten Räume, Math. Annalen 92 (1924), S. 299.

[9]) P. Alexandroff und P. Urysohn, Zur Theorie der topologischen Räume, Math. Annalen 92 (1924), S. 260.

Im ersten Kapitel werden wir die Enden topologischer Räume definieren und einige Sätze über sie ableiten; das zweite Kapitel wird Anwendungen des Endenbegriffes auf Schiebräume bringen; im dritten Kapitel tritt an die Stelle des Schiebraumes der Gruppenraum. Besonders hingewiesen sei noch auf den Satz 19 dieses Kapitels, der mit der Endentheorie nichts zu hat und vielleicht für sich Interesse beanspruchen darf.

Alle folgenden Untersuchungen gelten natürlich insbesondere, wenn der betrachtete topologische Raum eine topologische Mannigfaltigkeit ist.[10])

1. Kapitel.

Die Enden topologischer Räume.

§ 1

Definition der Endpunkte und Folgerungen.

Unter $\mathfrak{G}$ verstehen wir im folgenden stets einen *topologischen* Raum im Hausdorffschen Sinne, der dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt, und den wir schrittweise weiteren Einschränkungen unterwerfen werden; gegen Schluß dieses Kapitels wird er im Kleinen kompakt, zusammenhängend und im Kleinen zusammenhängend sein. Seine Punkte bzw. Teilmengen bezeichnen wir durch die Buchstaben *a* bis *w* bzw. *A* bis *W;* kleine griechische Buchstaben bedeuten natürliche Zahlen, nur σ und τ bedeuten reelle Zahlen zwischen 0 und 1. $\mathfrak{V}, \mathfrak{D}, \mathfrak{R}$ sind bzw. die Funktionszeichen der *Vereinigungs-*, *Durchschnitts-* und *Rand*bildung von Mengen; auch durch + und — verbinden wir Mengen in üblicher Weise. Die Bildung der *abgeschlossenen Hülle* einer Menge wird durch Überstreichen ihres Buchstabens angedeutet. *Kompakt* heißt eine echte oder unechte Teilmenge von $\mathfrak{G}$, wenn es in $\mathfrak{G}$ zu jeder ihrer unendlichen Teilmengen einen Häufungspunkt gibt. Das Wort „zusammenhängend" wird im Hausdorffschen Sinne verwandt werden.

Der Buchstabe *G* bedeutet (auch mit Indizes) stets eine offene Menge von $\mathfrak{G}$ mit kompakter Berandung $\mathfrak{R}(C)$, *G* bedeutet (auch mit Indizes) ein Gebiet mit kompakter Berandung $\mathfrak{R}(G)$ (also ein zusammenhängendes C*)*, das aber selbst nicht kompakt ist.

Im folgenden werden wir häufig von folgenden beiden Bemerkungen Gebrauch machen:

1. Sind zwei offene Punktmengen gegeneinander fremd[11]), so ist jede gegen die abgeschlossene Hülle der anderen fremd.

[10]) Die vorliegende Arbeit bildet den Inhalt meiner Dissertation (Berlin 1930); für zahlreiche Anregungen spreche ich den Herren H. Hopf und H. Kneser meinen Dank aus.

[11]) d. h. ohne gemeinsame Punkte.

2. Ein Gebiet, das mit einer offenen Menge und ihrer Komplementärmenge Punkte gemeinsam hat, hat auch mit dem Rand der offenen Menge Punkte gemeinsam.

Definition der Endpunkte von $\mathfrak{G}$: Eine unendliche Folge $G_\alpha^1 \supset G_\alpha^2 \supset \dots \supset G_\alpha^\nu \supset \dots$ heißt ein Endpunkt $\mathfrak{e}_\alpha$ von $\mathfrak{G}$, wenn $\mathop{\mathfrak{D}}\limits_{\nu=1}^{\infty}(\bar{G}_\alpha^\nu) = 0$, d. h. leer ist[12].

Definitionen. $\mathfrak{e} \subset C$ heißt: fast alle $\mathfrak{e}$ erzeugenden Gebiete G^ν sind in C enthalten. $\mathfrak{e}_1 \subset \mathfrak{e}_2$ heißt: $\mathfrak{e}_1$ ist in allen $\mathfrak{e}_2$ erzeugenden Gebieten G_2^ν enthalten, oder: zu jedem ν gibt es ein ν' mit $G_1^{\nu'} \subset G_2^\nu$.

Daraus folgt unmittelbar der

Satz 1. *Ist $\mathfrak{e}_1 \subset \mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_2 \subset \mathfrak{e}_3$, so ist auch $\mathfrak{e}_1 \subset \mathfrak{e}_3$.*

Satz 2. *Ist $\mathfrak{e}_1 \subset \mathfrak{e}_2$, so ist auch $\mathfrak{e}_2 \subset \mathfrak{e}_1$.*

Beweis. Zu jedem ν gibt es ein ν' mit $G_1^{\nu'} \subset G_2^\nu$. Die zur Berandung von $G_1^{\nu'}$ gehörenden Punkte von $\bar{G}_2^\mu$ bilden, wenn μ die Zahlenreihe durchläuft, eine absteigende Folge abgeschlossener kompakter Mengen. Ihr gemeinsamer Durchschnitt ist Teilmenge von $\mathop{\mathfrak{D}}\limits_{\mu=1}^{\infty}(\bar{G}_2^\mu)$ also leer. Wäre keine von ihnen leer, so wäre auch ihr Durchschnitt nicht leer. Also gibt es ein ν'', derart, daß $\bar{G}_2^{\nu''}$ fremd gegen $\mathfrak{R}(G_1^{\nu'})$ ist. Andererseits enthält $G_2^{\nu''}$ fast alle G_1^μ, und diese sind Teilmengen von $G_1^{\nu'}$. Also hat $G_2^{\nu''}$ mit $G_1^{\nu'}$ einen nicht leeren Durchschnitt, während es, wie wir sahen, gegen den Rand von $G_1^{\nu'}$ fremd ist. Weil die G Gebiete sind, folgt daraus, daß $G_2^{\nu''}$ vollständig in $G_1^{\nu'}$ liegt. Somit ist $\mathfrak{e}_2$ enthalten in dem von den $G_1^{\nu'}$ erzeugten Endpunkt, also nach Satz 1 in $\mathfrak{e}_1$

Durch diesen Satz ist die Bezeichnung End*punkt* erst gerechtfertigt; wir werden in Zukunft statt $\mathfrak{e}_1 \subset \mathfrak{e}_2$ stets $\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_2$ schreiben. Sind zwei Endpunkte nicht gleich, so nennen wir sie verschieden.

Satz 3. *Ist $\mathfrak{e}_1 \neq \mathfrak{e}_2$, so gibt es ein ν, derart, daß $\bar{G}_1^\nu$ und $\bar{G}_2^\nu$ gegeneinander fremd sind.*

Beweis. Es ist $\mathfrak{e}_1 \not\subset \mathfrak{e}_2$, also gibt es ein μ' mit $G_1^\mu \not\subset G_2^{\mu'}$ für $\mu \geqq \mu'$ Die zur Berandung von G_2^μ gehörenden Punkte von $\bar{G}_1^\mu$ bilden, wenn μ die Zahlenreihe durchläuft, eine absteigende Folge abgeschlossener kompakter Mengen. Ihr gemeinsamer Durchschnitt ist Teilmenge von $\mathop{\mathfrak{D}}\limits_{\mu=1}^{\infty}(\bar{G}_1^\mu)$, also leer. Wäre keine von ihnen leer, so wäre auch ihr Durchschnitt nicht leer. Also gibt es ein $\nu \geqq \mu'$ derart, daß $\bar{G}_1^\nu$ fremd gegen $\mathfrak{R}(G_2^{\mu'})$ ist; da es aber, wie wir sahen, nicht in $G_2^{\mu'}$ enthalten ist, so ist es, weil die G Gebiete sind, auch gegen $G_2^{\mu'}$ selbst fremd. Somit sind $\bar{G}_1^\nu$ und $\bar{G}_2^{\mu'}$ gegeneinander fremd, also auch $\bar{G}_1^\nu$ und $\bar{G}_2^\nu$.

[12]) Bei konstruktiver Formulierung dieser Definition lassen sich die Sätze 2 und 3 konstruktiv beweisen.

§ 2.

Die Abschließung von $\mathfrak{G}$ durch seine Endpunkte.

Im folgenden werden wir häufig von dem bekannten Überdeckungssatz Gebrauch machen: Eine kompakte abgeschlossene Menge von $\mathfrak{G}$, die in der Vereinigung einer Menge von Umgebungen aus $\mathfrak{G}$ enthalten ist, ist schon in der Vereinigung einer endlichen Teilmenge dieser Menge von Umgebungen enthalten.

Wir benutzen diesen Überdeckungssatz zunächst zum Beweise des folgenden bekannten Hilfssatzes.

Hilfssatz 1. *A* und *B* seien zwei kompakte, abgeschlossene und gegeneinander fremde Mengen von $\mathfrak{G}$. Dann gibt es unter den Umgebungen $U_1, U_2, \dots$ von $\mathfrak{G}$ endlich viele $V_1, \dots, V_\alpha$ und $W_1, \dots, W_\beta$ derart, daß $A \subset V_1 + \dots + V_\alpha$ und $B \subset W_1 + \dots + W_\beta$ und $V_1 + \dots + V_\alpha$ fremd ist gegen $W_1 + \dots + W_\beta$

Beweis. Zu je zwei Punkten $a < A$ und $b \subset B$ gibt es Umgebungen $U_a > a$, $U_b > b$ mit $\mathfrak{D}(U_a, U_b) = 0$. Wir halten zunächst *a* fest und lassen *b* alle Punkte von *B* durchlaufen, dann ändern sich U_a und U_b; auf Grund des Überdeckungssatzes läßt sich *B* mit endlich vielen dieser U_b überdecken, die wir $U_1^a, \dots, U_\lambda^a$ nennen. Jedem dieser *U* entspricht ein zu ihm fremdes U_a, und im Durchschnitt dieser endlich vielen U_a gibt es eine Umgebung von *a* namens V_a, die also gegen $U_1^a, \dots, U_\lambda^a$ fremd ist. Nun lassen wir *a* alle Punkte von *A* durchlaufen; dann ändert sich sowohl V_a als auch das *B* überdeckende und zu V_a fremde System $U_1^a, \dots, U_\lambda^a$; mit endlich vielen der dabei entstehenden V_a läßt sich auf Grund des Überdeckungssatzes *A* überdecken, wir nennen sie $V_1, \dots, V_\alpha$. Zu jedem dieser V_ν $(\nu = 1, \dots, \alpha)$ gehört ein *B* überdeckendes und gegen V_ν fremdes System $U_1^\nu, \dots, U_{\lambda_\nu}^\nu$ Im Durchschnitt derjenigen unter den $U_1^\nu, \dots, U_{\lambda_\nu}^\nu$ $(\nu = 1, \dots, \alpha)$, in denen der Punkt $b < B$ liegt, gibt es eine Umgebung W_b von *b*, die also gegen alle V_ν fremd ist. Auf Grund des Überdeckungssatzes läßt sich *B* mit endlich vielen dieser W_b überdecken, die wir nun $W_1, \dots, W$ nennen, und die gegen alle V_ν fremd sind. Die so hergestellten $V_1, \dots, V_\alpha$ und $W_1, \dots, W$ leisten das vom Hilfssatz Verlangte.

Von nun an wollen wir $\mathfrak{G}$ als im Kleinen *kompakt* voraussetzen, d. h. wir wollen annehmen, daß die abgeschlossenen Hüllen der $\mathfrak{G}$ erzeugenden Umgebungen *U* kompakt sind. Wir beweisen dann ohne Metrisierung folgenden

Hilfssatz 2. Unter den Umgebungen U_ν von $\mathfrak{G}$ gibt es eine $\mathfrak{G}$ überdeckende Folge $V_1, V_2, \dots$ derart, daß jedes der V_ν gegen fast alle $\overline{V}_\nu$ fremd ist und also auch jeder Punkt in nur endlich vielen $\overline{V}_\nu$ enthalten ist.

Beweis. Wir führen die Konstruktion der V_ν induktionsmäßig durch. Wir setzen:

$$L_1 = U_1 = V_1 = K_1,$$
$$L_2 = \mathfrak{R}(K_1) + (U_2 - \mathfrak{D}(U_2, K_1)).$$

Wegen der Kompaktheit im Kleinen von $\mathfrak{G}$ ist $\overline{L}_2$ kompakt; $\overline{L}_2$ läßt sich durch endlich viele Umgebungen überdecken, die wir $V_2, \ldots, V_{\lambda_2}$ nennen.

$$\overline{L}_2 \subset V_2 + \ldots + V_{\lambda_2} = K_2.$$

Damit haben wir L_2, K_2 und $V_2, \ldots, V_{\lambda_2}$ angegeben. Wir setzen nun

$$L_3 = \mathfrak{R}(K_1 + K_2) + (U_3 - \mathfrak{D}(U_3, K_1 + K_2)),$$

und wir bemerken wieder, daß wegen der Kompaktheit im Kleinen von $\mathfrak{G}$ unser $\overline{L}_3$ kompakt ist, da auch $\overline{K}_2$ kompakt war. Ferner ist

$$\mathfrak{R}(K_1) \subset L_2 \subset K_2,$$

also

(1) $$\overline{K}_1 \subset K_1 + K_2$$

außerdem, weil $K_1 + K_2$ offen ist,

(2) $$\mathfrak{D}(K_1 + K_2, \mathfrak{R}(K_1 + K_2)) = 0.$$

Schließlich ist

$$\mathfrak{D}(K_1 + K_2, U_3 - \mathfrak{D}(U_3, K_1 + K_2)) = 0$$

und, weil $K_1 + K_2$ offen ist,

(3) $$\mathfrak{D}(K_1 + K_2, \overline{U_3 - \mathfrak{D}(U_3, K_1 + K_2)}) = 0.$$

Also gilt auch nach (2) und (3)

$$\mathfrak{D}(K_1 + K_2, \overline{L}_3) = 0$$

und nach (1)

$$\mathfrak{D}(\overline{K}_1, \overline{L}_3) = 0.$$

Nach dem ersten Hilfssatz gibt es dann ein Überdeckungssystem von $\overline{L}_3$, das gegen $\overline{K}_1$ fremd ist; wir nennen seine Umgebungen $V_{\lambda_2+1}, \ldots, V_{\lambda_3}$ und schreiben

$$\overline{L}_3 \subset V_{\lambda_2+1} + \ldots + V_{\lambda_3} = K_3.$$

Damit haben wir L_3, K_3 und $V_{\lambda_2+1}, \ldots, V_{\lambda_3}$ hergestellt und fahren nunmehr genau so fort. Wir nehmen an, die Herstellung sei ebenso wie für den Index 3 bis $L_\nu, K_\nu, V_{\lambda_{\nu-1}+1}, \ldots, V_{\lambda_\nu}$ gediehen und werden sie noch für $L_{\nu+1}, K_{\nu+1}, V_{\lambda_\nu+1}, \ldots, V_{\lambda_{\nu+1}}$ durchführen. Wir setzen

$$L_{\nu+1} = \mathfrak{R}(K_1 + \ldots + K_\nu) + (U_{\nu+1} - \mathfrak{D}(U_{\nu+1}, K_1 + \ldots + K_\nu))$$

und wir bemerken wieder, daß $\overline{L}_{\nu+1}$ kompakt ist. Ferner ist

$$\mathfrak{R}(K_1 + \ldots + K_{\nu-1}) \subset L_\nu \subset K_\nu,$$

also

(1*) $$\overline{K_1 + \ldots + K_{\nu-1}} \subset K_1 + \ldots + K_\nu,$$

außerdem, weil $K_1 + \cdot\ldots + K_\nu$ offen ist,

(2*) $$\mathfrak{D}(K_1 + \ldots + K_\nu, \mathfrak{R}(K_1 + \ldots + K_\nu)) = 0.$$

Schließlich ist

$$\mathfrak{D}(K_1 + \ldots + K_\nu, U_{\nu+1} - \mathfrak{D}(U_{\nu+1}, K_1 + \ldots + K_\nu)) = 0$$

und, weil $K_1 + \ldots + K_\nu$ offen ist,

(3*) $$\mathfrak{D}(K_1 + \ldots + K_\nu, \overline{U_{\nu+1} - \mathfrak{D}(U_{\nu+1}, K_1 + \ldots + K_\nu)}) = 0.$$

Also gilt nach (2*) und (3*)

$$\mathfrak{D}(K_1 + \ldots + K_\nu, \overline{L}_{\nu+1}) = 0$$

und nach (1*)

$$\mathfrak{D}(\overline{K_1 + \ldots + K_{\nu-1}}, \overline{L}_{\nu+1}) = 0.$$

Nach dem ersten Hilfssatz gibt es dann ein Überdeckungssystem von $\overline{L}_{\nu+1}$, das gegen $\overline{K_1 + \ldots + K_{\nu-1}}$ fremd ist; wir nennen seine Umgebungen $V_{\lambda_\nu+1}, \ldots, V_{\lambda_{\nu+1}}$ und schreiben

$$\overline{L}_{\nu+1} \subset V_{\lambda_\nu+1} + \ldots + V_{\lambda_{\nu+1}} = K_{\nu+1}.$$

Damit sind nun auch $L_{\nu+1}, K_{\nu+1}, V_{\lambda_\nu+1}, \ldots, V_{\lambda_{\nu+1}}$ hergestellt.

Wir müssen uns jetzt davon überzeugen, daß die angegebene Folge V wirklich den Anforderungen des zu beweisenden Satzes genügt. Wir bemerken zunächst, daß K_1 gegen das Überdeckungssystem von $\overline{L}_3$, also gegen K_3 fremd ist, ebenso gilt

$$\mathfrak{D}(K_1 + \ldots + K_{\nu-1}, K_{\nu+1}) = 0.$$

Wir betrachten irgendeins der V, das z. B. in K_μ enthalten sei, und wollen von ihm zeigen, daß es nur mit endlich vielen V einen nicht leeren Durchschnitt hat. Es ist

$$V \subset K_\mu \subset K_1 + \ldots + K_{\mu+\alpha},$$
$$\mathfrak{D}(K_1 + \ldots + K_{\mu+\alpha}, K_{\mu+\alpha+2}) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \geqq 0,$$

also

$$\mathfrak{D}(V, K_{\mu+\alpha+2}) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \geqq 0,$$

also

$$\mathfrak{D}(V, K_{\mu+\alpha+2} + K_{\mu+\alpha+3} + \ldots) = 0$$

und, weil die V offen sind

$$\mathfrak{D}(V, \overline{K_{\mu+\alpha+2} + K_{\mu+\alpha+3} + \ldots}) = 0.$$

Da in $\overline{K_{\mu+\alpha+2} + K_{\mu+\alpha+3} + \ldots}$ fast alle V enthalten sind, haben wir unsere Behauptung bewiesen.

Ferner haben wir zu zeigen, daß die angegebene Folge V unsern Raum $\mathfrak{G}$ überdeckt, d. h. daß jeder Punkt in wenigstens einem V enthalten ist. In der Tat, sei der zu untersuchende Punkt in U_ν enthalten und ν möglichst klein gewählt. Dann ist er entweder in $K_1 + \ldots + K_{\nu-1}$ oder in L_ν enthalten, sicherlich also in $K_1 + \ldots + K_\nu$, gehört also einem V_μ mit $\mu \leqq \lambda_\nu$ an.

Damit ist der zweite Hilfssatz vollständig bewiesen.

Von nun an wollen wir $\mathfrak{G}$ als *zusammenhängend* und *im Kleinen zusammenhängend* voraussetzen, d. h. wir wollen annehmen, daß sowohl $\mathfrak{G}$ als auch die $\mathfrak{G}$ erzeugenden Umgebungen U zusammenhängend sind[13]). Die Voraussetzung über die Kompaktheit im Kleinen behalten wir bei. Aus ihr folgt die Äquivalenz unserer Definition des Zusammenhangs im Kleinen mit der üblichen, worauf wir aber nicht näher eingehen wollen.

Wir werden nun ein Verfahren zur Herstellung der Endpunkte von $\mathfrak{G}$ angeben.

Wir setzen für alle $\gamma \geqq 1$

$$M_\gamma = V_{\gamma+1} + V_{\gamma+2} + \ldots,$$

dabei haben die F die ihnen vom Hilfssatz zugeschriebene Bedeutung. Es ist

$$\mathfrak{R}(M_\gamma) \subset V_1 + \ldots + V_\gamma. \tag{4}$$

Wir betrachten die Komponenten, d. h. die größten zusammenhängenden Teilmengen von M_γ; jedes V_ν $(\nu \geqq \gamma+1)$, ist nach der Voraussetzung über den Zusammenhang im Kleinen, vollständig in einer Komponente von M_γ enthalten. In einer in $V_1 + \ldots + V_\gamma$ enthaltenen Umgebung eines Randpunktes einer Komponente von M_γ liegen nach Hilfssatz 2 Punkte nur endlich vieler in dieser Komponente enthaltener V_ν; jeder Randpunkt einer Komponente von M_γ ist also Randpunkt von mindestens einem in ihr enthaltenen V_ν. Nach Hilfssatz 2 liefern nur endlich viele $\overline{V}_\nu$ Beiträge zum Rande von M_γ. Andererseits besitzt wegen des Zusammenhangs von $\mathfrak{G}$ jede Komponente Randpunkte, sobald nur $M_\gamma \neq \mathfrak{G}$ ist. Daher besitzt M_γ nur endlich viele Komponenten.

Wir sehen weiter, daß jede Komponente ein Gebiet und wegen (4) kompakt berandet ist, und daß für jedes γ jede Komponente von $M_{\gamma+1}$ Teilmenge einer Komponente von M_γ ist. Die kompakten Komponenten lassen wir außer acht und benennen die übrigen mit $H_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_\gamma}$ und zwar so, daß für jedes γ

$$H_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_\gamma} \supset H_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{\gamma+1}}$$

[13]) In diesem Kapitel genügt, wie man leicht sieht, sogar die Annahme, daß die V und $\mathfrak{G}$ selbst höchstens endlich viel Komponenten besitzen.

gilt. Dabei ist, wie wir sahen, ν_γ nur endlich vieler Werte fähig. Die H sind Gebiete mit kompakter Berandung und selbst nicht kompakt, haben also die Eigenschaften, die wir früher von einem G verlangten.

Eine Folge

$$H_{\nu_1} \supset H_{\nu_1 \nu_2} \supset \ldots \supset H_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_\gamma} \supset \ldots$$

stellt einen Endpunkt von $\mathfrak{G}$ dar; denn sei irgendein Punkt gegeben, so gibt es nach dem Hilfssatz 2 ein $\overline{V}_\gamma$ mit möglichst großem γ, das ihn enthält. Dieser Punkt ist nicht in $\overline{M}_\gamma$ enthalten, also auch in keinem $\overline{H}$ mit γ oder mehr Indizes. Also gilt in der Tat

$$\mathfrak{D}(\overline{H}_{\nu_1}, \overline{H}_{\nu_1 \nu_2}, \ldots, \overline{H}_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_\gamma}, \ldots) = 0.$$

Ich ergänze nun $\mathfrak{G}$ durch Hinzunahme der so entstandenen Endpunkte zu einem Raum $\overline{\mathfrak{G}}$, indem ich die einen Endpunkt erzeugenden H einschließlich ihrer[14]) Endpunkte zu seinen Umgebungen ernenne. Ich habe mich aber noch davon zu überzeugen, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ wirklich den Hausdorfischen Axiomen genügt. Einer besonderen Nachprüfung bedarf dabei aber nur das Trennungsaxiom und dies auch nur für den Fall, daß einer der beiden Punkte Endpunkt und der andere Punkt von $\mathfrak{G}$ ist. Nach Hilfssatz 2 ist der Punkt von $\mathfrak{G}$ in einem V_γ mit möglichst großem γ enthalten; unter den H mit γ Indizes gibt es aber auch eine Umgebung des Endpunktes, und sie ist fremd gegen die Umgebung des Punktes von $\mathfrak{G}$

Wir können uns ferner davon überzeugen, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ kompakt ist. Jede unendliche Menge von $\mathfrak{G}$ ohne Häufungspunkt hat nämlich für jedes γ außerhalb M_γ nur endlich viele Punkte, also fast alle Punkte innerhalb. Da es nur endlich viel H mit γ Indizes gibt, enthält also mindestens eins unendlich viel Punkte der gegebenen Menge. Es gibt also einen Endpunkt, der in jeder seiner Umgebungen unendlich viel Punkte dieser Menge besitzt, also in $\overline{\mathfrak{G}}$ einen Häufungspunkt dieser Menge. Aber auch jede unendliche Menge von Endpunkten besitzt in $\overline{\mathfrak{G}}$ einen Häufungspunkt, denn für jedes γ gibt es ihrer unendlich viele, die von demselben H mit γ Indizes erzeugt werden.

Ehe wir beweisen, daß wir mit dem oben geschilderten Verfahren alle Endpunkte von $\mathfrak{G}$ erschöpfen, wollen wir uns beschäftigen mit dem folgenden

Hilfssatz 3. Notwendig und hinreichend, damit ein C einen Endpunkt $H^1 > H^2 > \ldots$ enthält im Sinne der Definition aus § l, ist, daß das in $\overline{\mathfrak{G}}$ genommene $\overline{C}$ ihn enthält.

Beweis. Wenn C den Endpunkt enthält, so gibt es ein ν' mit $H^\nu \subset C$ für $\nu \geqq \nu'$, also $\overline{H}^\nu \subset \overline{C}$ für $\nu \geqq \nu'$. Der Endpunkt ist in dem in $\overline{\mathfrak{G}}$ genommenen $\mathop{\mathfrak{D}}\limits_{\nu=1}^{\infty}(\overline{H}^\nu)$, also in $\mathop{\mathfrak{D}}\limits_{\nu=\nu'}^{\infty}(\overline{H}^\nu)$, also in $\overline{C}$ enthalten.

[14]) Im Sinne von Definition „$\mathfrak{e} \subset C$", S. 695.

Wenn umgekehrt der Endpunkt im Sinne von $\overline{\mathfrak{G}}$ in $\overline{C}$ enthalten ist, so ist er Häufungspunkt von $\overline{C}$; es gibt also in jeder Umgebung $\overline{H}^\nu$ des Endpunktes Punkte von $\overline{C}$. Die in $\mathfrak{G}$ zur Berandung von C gehörenden Punkte von $\overline{H}^\nu$ bilden, wenn ν die Zahlenreihe durchläuft, eine absteigende Folge abgeschlossener kompakter Mengen. Ihr gemeinsamer Durchschnitt ist Teilmenge von $\mathfrak{D}(\overline{H}^\nu)$, also leer. Wäre keine von ihnen leer, so wäre auch ihr Durchschnitt nicht leer. Also gibt es ein ν', so daß in $\mathfrak{G}$ das $H^{\nu'}$ fremd gegen $\mathfrak{R}(C)$ ist. Andererseits enthält C Punkte von jedem H^ν Mithin gilt für fast alle ν: $H^\nu \subset C$. Der Endpunkt $H^1 > H^2 > \ldots$ ist also in C enthalten.

Daraus folgt ohne weiteres der

Hilfssatz 4. Ist ein Endpunkt $H^1 > H^2 > \ldots$ von $\mathfrak{G}$ in C enthalten, so ist eine ganze Umgebung von ihm in dem in $\overline{\mathfrak{G}}$ genommenen $\overline{C}$ enthalten.

Satz 4. *Jedes nicht kompakte* $\mathfrak{G}$ *besitzt Endpunkte und ihre Gesamtheit läßt sich durch ein finites Verfahren erzeugen. Mittels seiner Endpunkte läßt sich* $\mathfrak{G}$ *zu einem kompakten Raum* $\overline{\mathfrak{G}}$ *ergänzen.*

Beweis. Es fehlt nur noch der Nachweis, daß jeder Endpunkt $G^1 > G^2 > \ldots$ mit einem Endpunkt $H^1 > H^2 > \ldots$ zusammenfällt. Das in $\overline{\mathfrak{G}}$ genommene $\overset{\infty}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{D}}}(\overline{G}^\nu)$ ist nicht leer, enthält also einen Endpunkt $H^1 > H^2 > \ldots$ Im Sinne von $\overline{\mathfrak{G}}$ enthält also jedes $\overline{G}^\nu$ den Endpunkt $H^1 > H^2 > \ldots$, also enthält nach Hilfssatz 3 im Sinne von $\mathfrak{G}$ jedes G^ν diesen Endpunkt, und der G-Endpunkt enthält den H-Endpunkt, ist daher nach Satz 2 mit ihm identisch.

Definition. Unter dem *Ende* $\mathfrak{E}(C)$ von C verstehen wir die Menge der in C enthaltenen Endpunkte.

Ohne Schwierigkeit ergibt sich daraus

Satz 5. *Die Funktion* $\mathfrak{E}$ *bildet den Ring der C-Mengen von* $\mathfrak{G}$ *stetig homomorph ab auf einen Ring abgeschlossener Teilmengen des Raumes* $\mathfrak{E}(\mathfrak{G})$. *(Ringoperationen sind Vereinigungs- und Durchschnittbildung.) Dabei ist jeder Endpunkt in mindestens einem* $\mathfrak{E}(C)$ *enthalten. Einem C entspricht dann und nur dann die leere Menge, wenn es kompakt ist, und ihrer zwei haben dann und nur dann dasselbe Ende, wenn sie sich in etwas Kompaktem unterscheiden. Der Durchschnitt der Enden der Gebiete, die einen Endpunkt erzeugen, ist der Endpunkt selbst.*

Satz 6. $\mathfrak{G}$ *sei aus einem zusammenhängenden kompakten topologischen Raum* $\mathfrak{H}$ *entstanden durch Weglassen der abgeschlossenen Menge P. Dann gibt es eine (vielleicht in keiner Richtung eindeutige) Abbildung von* $\overline{\mathfrak{G}}$ *auf* $\mathfrak{H}$, *bei der jeder Punkt von* $\mathfrak{G}$ *festbleibt, jede Komponente Q von P Bild einer abgeschlossenen Menge* $\mathfrak{F}(Q)$ *von Endpunkten von* $\overline{\mathfrak{G}}$

ist, jeder Endpunkt in genau einem $\mathfrak{F}(Q)$ enthalten ist und die Umgebungen von Q und $\mathfrak{F}(Q)$ wechselseitig aufeinander bezogen sind.

Beweis. Die Gesamtheit aller H mit γ Indizes heiße W_γ, $\underset{\gamma=1}{\overset{\infty}{\mathfrak{D}}}(\overline{W}_\gamma)=0$, $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}(W_\gamma), P)=0$. Wir schreiben

$$\mathring{W}_\gamma = W_\gamma + P.$$

P ist innere Teilmenge von $\mathring{W}_\gamma$; denn gäbe es in jeder Umgebung von P Punkte, die nicht zu $\mathring{W}_\gamma$ gehörten, so gäbe es eine in $\mathfrak{G}$ nicht kompakte Menge, die nicht in $\mathring{W}_\gamma$ enthalten wäre; das geht aber deshalb nicht, weil $\mathfrak{G}-W_\gamma$ kompakt in $\mathfrak{G}$ ist. Die Q enthaltende Komponente von $\mathring{W}_\gamma$ heiße $\mathring{V}_\gamma$; $V_\gamma=\mathfrak{D}(\mathring{V}_\gamma, \mathfrak{G})$. Q ist innere Teilmenge von $\mathring{V}_\gamma$, $\underset{\gamma=1}{\overset{\infty}{\mathfrak{D}}}(V_\gamma)$ genommen in $\mathfrak{G}$ ist leer. Also sind die $\mathring{V}_\gamma$ als Umgebungssystem von Q brauchbar. Ebenso sind nach Hilfssatz 3 und 4 die $V_\gamma+\mathfrak{E}(V_\gamma)$ als Umgebungssystem von $\underset{\gamma=1}{\overset{\infty}{\mathfrak{D}}}(\mathfrak{E}(V_\gamma))$ brauchbar.

Die im Satz angekündigte Abbildung ist folgende: Die Punkte von $\mathfrak{G}$ lassen wir sich selbst entsprechen; für die übrigen Punkte setzen wir fest, daß

$$Q \subset \mathring{V}_\gamma \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}(Q) \subset V_\gamma$$

gleichwertig sind, d. h.

$$\mathfrak{F}(Q) = \underset{\gamma=1}{\overset{\infty}{\mathfrak{D}}}(\mathfrak{E}(V_\gamma)).$$

Dann sind die Aussagen des Satzes über die Zuordnung der Umgebungen von Q und $\mathfrak{F}(Q)$ erfüllt.

Die Umgebung $H_{\nu_1\ldots\nu_\gamma}+\mathfrak{E}(H_{\nu_1\ldots\nu_\gamma})$ eines Endpunktes ist in genau einem $V_\gamma+\mathfrak{E}(V_\gamma)$ enthalten und für je zwei *verschiedene* Komponenten von P ist $\underset{\gamma=1}{\overset{\infty}{\mathfrak{D}}}(V_\gamma+\mathfrak{E}(V_\gamma))$ *verschieden.* Jeder Endpunkt ist also in genau einem $\mathfrak{F}(Q)$ enthalten.

Satz 7. *Die Abschließung von $\mathfrak{G}$ durch seine Endpunkte läßt sich gegenüber ändern Abschließungen charakterisieren als Abschließung durch Hinzufügung einer abgeschlossenen Menge P mit folgenden Eigenschaften: 1. die Komponenten von P sind Punkte und zwar Häufungspunkte von $\mathfrak{G}$, 2. das Umgebungssystem von $\mathfrak{G}$ bleibt unverändert, 3. keine Umgebung eines Punktes von P wird durch die in ihr enthaltene Teilmenge von P zerlegt. $\overline{\mathfrak{G}}$ ist also mit $\mathfrak{G}$ topologisch invariant verknüpft.*[15])

Beweis. Daß die Abschließung $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ diese Eigenschaften in der Tat besitzt, ist deshalb klar, weil jedes H ein Gebiet ist.

[15]) Bei einer Ausdehnung des Endpunktbegriffes auf im Kleinen nicht zusammenhängende Räume $\mathfrak{G}$, auf die ich bei anderer Gelegenheit zurückkommen werde, lautet 3. dahin, daß kein hinzugefügter Punkt sich weiter „aufspalten" läßt.

Wir nennen $\mathfrak{H}$ eine unter den Voraussetzungen des Satzes entstehende Abschließung von $\mathfrak{G}$. Die Voraussetzungen des Satzes 6 sind dann gegeben. Jedes Q ist ein Punkt, Enthielte $\mathfrak{F}(Q)$ mehr als einen Endpunkt, z. B.

$$H_{\mu_1} \supset H_{\mu_1 \mu_2} \supset \dots \supset H_{\mu_1 \dots \mu_\gamma} \supset \dots \quad \text{und} \quad H_{\nu_1} \supset H_{\nu_1 \nu_2} \supset \dots \supset H_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_\gamma} \supset \dots,$$

so bestände $\mathfrak{D}(\mathring{V}_\gamma, \mathfrak{G})$ aus $H_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_\gamma}$, $H_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_\gamma}$ und etwaigen weiteren H mit γ Indizes, zerfiele also, sobald man γ so groß wählte, daß $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\gamma) \neq (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\gamma)$ ist. Also enthält $\mathfrak{F}(Q)$ einen einzigen Punkt. Nach Satz 6 sind die Endpunkte und die Punkte von P nebst ihren Umgebungen eineindeutig aufeinander bezogen; $\overline{\mathfrak{G}}$ und $\mathfrak{H}$ sind also homöomorph.

§ 3.

Der Produktsatz.

$\mathfrak{H}$[16]) sei in diesem Paragraphen ein topologischer Raum, der denselben Anforderungen genügt, wie wir sie an $\mathfrak{G}$ gestellt haben.

Definition. Wie üblich nennen wir die Menge aller geordneten Punktepaare

$$[a, b] \text{ mit } a \subset \mathfrak{G} \quad \text{und} \quad b \subset \mathfrak{H}$$

den Produktraum

$$[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}] \text{ von } \mathfrak{G} \text{ und } \mathfrak{H}.$$

Ist $A < \mathfrak{G}$ und $B < \mathfrak{H}$, so nennen wir $[A, B]$ die Menge aller $[a, b]$ mit $a < A$ und $b < B$. Ist U eine Umgebung von a und V eine Umgebung von b, so ernennen wir $[U, V]$ zur Umgebung von $[a, b]$.

Man sieht leicht ein, daß $[A, B]$ dann und nur dann kompakt bzw. offen ist, wenn sowohl A als auch B kompakt bzw. offen ist. Ferner sieht man leicht, daß $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ denselben Anforderungen genügt, wie wir sie an $\mathfrak{G}$ gestellt haben, und daß $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ dann und nur dann kompakt ist, wenn sowohl $\mathfrak{G}$ als auch $\mathfrak{H}$ kompakt ist. Ferner ist

$$\mathfrak{R}([A, B]) = [\mathfrak{R}(A), B] + [A, \mathfrak{R}(B)] + [\mathfrak{R}(A), \mathfrak{R}(B)].$$

Satz 8. *$\mathfrak{H}$ sei nicht kompakt. Ist auch $\mathfrak{G}$ nicht kompakt, so hat $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ genau einen Endpunkt. Ist dagegen $\mathfrak{G}$ kompakt, so lassen sich die Enden von $\mathfrak{H}$ und $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ isomorph aufeinander beziehen.*

Beweis[17]). Sei C eine C-Menge von $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ und $\mathfrak{E}(C)$ nicht leer. Wir können dann schreiben

$$C = \mathfrak{V}_{a \subset \mathfrak{G}}([a, N_a]),$$

[16]) Hat nichts mit den $\mathfrak{H}$ aus Satz 6 und 7 zu tun.

[17]) Der Beweis ist so geführt, daß sich ein ähnlicher Satz sofort ausspreohen läßt für Klassen von Räumen, in denen über die Existenz usw. von Endpunkten nichts bekannt ist.

wobei über alle verschiedenen a von $\mathfrak{G}$ zu summieren ist. Jedes N_a ist offen. Wir setzen bei festem a

$$L = \underset{a \subset \mathfrak{G}}{\mathfrak{V}} (\mathfrak{V}(N_a, N_{a_0}) - \mathfrak{D}(N_a, N_{a_0}))$$

und werden zeigen, daß L kompakt ist.

Sei nämlich b irgendein Punkt von L, dann gibt es ein a mit

$$b \subset \mathfrak{V}(N_a, N_{a_0}), \qquad b \not\subset \mathfrak{D}(N_a, N_{a_0}).$$

Wir können annehmen, daß b in N_a, also nicht in N_{a_0} ist. Dann ist

$$[a, b] < C, \qquad [a_0, b] \not\subset C,$$

also gibt es wegen des Zusammenhangs von $[\mathfrak{G}, b]$ ein a_1 mit

$$[a_1, b] \subset \mathfrak{R}(C).$$

Lassen wir b alle Punkte von L durchlaufen, so folgt aus der Kompaktheit von $\mathfrak{R}(C)$ die von L.

A sei die Menge aller a mit $\mathfrak{R}(N_a) \neq 0$. Aus

$$\underset{a \subset A}{\mathfrak{V}}([a, \mathfrak{R}(N_a)]) \subset \mathfrak{R}(C)$$

folgt die Kompaktheit von A und $\mathfrak{R}(N_a)$

Tritt unter den Mengen N_a die leere Menge auf, so nennen wir sie N_{a_0}. Dann ist wegen

$$\underset{a \subset \mathfrak{G}}{\mathfrak{V}}(N_a) = L$$

N_a kompakt, also von $\mathfrak{H}$ verschieden. Für alle $a \not\subset A$ ist nach Definition $\mathfrak{R}(N_a)$, also auch N_a leer, und es ist

$$C = \underset{a \subset A}{\mathfrak{V}}([a, N_a]) \subset [A, \underset{a \subset A}{\mathfrak{V}}(N_a)] = [A, L].$$

C ist dann im Widerspruch zur Annahme kompakt. Infolgedessen sind alle $N_a \neq 0$, und für $a \not\subset A$ ist $N_a = \mathfrak{H}$.

Wir können nun schreiben

$$C = [\mathfrak{G} - A, \mathfrak{H}] + \underset{a \subset A}{\mathfrak{V}}([a, N_a]),$$

und wir setzen

(1) $$D = [\mathfrak{G} - A, \mathfrak{H}] + [A, N_{a_0}]$$

(2) $$= [\mathfrak{G}, \mathfrak{H}] - [A, \mathfrak{H} - N_{a_0}]$$

(3) $$= [\mathfrak{G} - A, \mathfrak{H} - N_{a_0}] + [\mathfrak{G}, N_{a_0}].$$

C und D unterscheiden sich wegen (1) in höchstens $[A, L]$, also in etwas Kompaktem.

Ist $A = 0$, so ist $D = [\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ und

$$\mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}([\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]).$$

In diesem Fall sind wir bereits fertig. Wir nehmen in Zukunft an, es sei $A \neq 0$

Wir unterscheiden die beiden Möglichkeiten:

$$\text{I.}\quad \mathfrak{G} - A \neq 0; \qquad \text{II.}\quad \mathfrak{G} - A = 0.$$

Wir beschäftigen uns zunächst mit I:

$$\mathfrak{R}(D) > [\mathfrak{R}(\mathfrak{G} - A), \mathfrak{H} - N_{a_0}]$$

wegen (3). $\mathfrak{R}(D)$ ist kompakt, also ist $\mathfrak{H} - N_{a_0}$ kompakt. Also unterscheidet sich wegen (2) $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ von D in etwas Kompaktem, also auch von C. Es ist daher wiederum

$$\mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}([\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]).$$

II. Wegen (3) ist

$$D = [\mathfrak{G}, N_{a_0}], \qquad D \text{ ist eine } C\text{-Menge},$$

und

$$\mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}([\mathfrak{G}, N_{a_0}]);$$

ferner ist, weil A kompakt ist, $\mathfrak{G}$ kompakt.

Ist daher $\mathfrak{G}$ nicht kompakt, so liegt I vor, und $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ besitzt nur den einen Endpunkt

$$\mathfrak{E}([\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]).$$

Ist dagegen $\mathfrak{G}$ kompakt, so bestehen die Möglichkeiten

$$\mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}([\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]) \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}([\mathfrak{G}, N_{a_0}]).$$

Da N_{a_0} eine willkürliche C-Menge ist, besteht der im Satz behauptete Isomorphismus:

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{H}) \longleftrightarrow \mathfrak{E}([\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]),$$
$$\mathfrak{E}(N_{a_0}) \longleftrightarrow \mathfrak{E}([\mathfrak{G}, N_{a_0}]).$$

2. Kapitel.

Die Enden der Schiebräume.

In den von uns betrachteten Räumen $\mathfrak{G}$, d. h. in den im Kleinen kompakten, zusammenhängenden, im Kleinen zusammenhängenden, topologischen Räumen mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom, lassen sich je zwei Punkte durch ein kompaktes Kontinuum verbinden.

Darüber hinaus sei $\mathfrak{G}$ von nun an ein *Schiebraum.* Das soll heißen: Es gibt eine einfach transitive Schar bis auf die Identität fixpunktfreier topologischer Transformationen von $\mathfrak{G}$ in sich mit dem Bild eines festen Punktes e als Parameter; jeder der drei Punkte: Parameter, Original und Bild ist stetig von den beiden ändern zusammen abhängig.

Wir schreiben das Bild als geordnetes Produkt von Parameter und Original. Dann ist

$$e\,a = a\,e = a$$

und aus der Existenz je zweier der drei Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a, \quad \lim_{\nu=\infty} b_\nu = b, \quad \lim_{\nu=\infty} a_\nu b_\nu = a\, b \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

folgt die des dritten.

Unter MN verstehen wir die Menge aller Punkte $m\, n$ mit $m <$ und $n < N$. Mit je zweien der drei Mengen

$$M, \quad N, \quad MN$$

ist auch die dritte kompakt.

$a\, C$ bzw. $a\, G$ ist eine C- bzw. G-Menge, desgleichen $C\, a$ bzw. $G\, a$. Es ist $\mathfrak{R}(a\, C) = a\, \mathfrak{R}(C)$ usw.

Satz 9. $\mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}(a\, C) = \mathfrak{E}(C\, a)$.

Beweis. Im Falle $\mathfrak{E}(C) = 0$ ist der Satz klar. Wir nehmen also an $\mathfrak{E}(C) \neq 0$. Sei $\mathfrak{E}(C) \neq \mathfrak{E}(a\, C)$. Dann gibt es entweder in C eine gegen $a\, G$ oder in $a\, G$ eine gegen G fremde nicht kompakte Menge $c_1, c_2, \ldots$. Wir verbinden e mit a durch ein kompaktes Kontinuum A. Dann ist z. B.

$$c_\nu \not\subset a\, C \quad \text{und} \quad a\, c_\nu \subset a\, C, \quad \text{also} \quad \mathfrak{D}(A, \mathfrak{R}(a\, C)) \neq 0.$$

Es gibt also zu jedem ν ein $a_\nu \subset A$ mit

$$a_\nu c_\nu \subset \mathfrak{R}(a\, C).$$

Die Mengen $a_\nu \;(\nu = 1, 2, \ldots)$ und $\mathfrak{R}(a\, C)$ sind kompakt, also ist im Widerspruch zur Annahme die Menge $c_\nu \;(\nu = 1, 2, \ldots)$ kompakt. Also ist

$$\mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}(a\, C).$$

Ebenso beweist man

$$\mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}(C\, a).$$

Satz 10. *Sei* $\mathfrak{E}(C) \neq 0$ *und* $c_1, c_2, \ldots$ *eine divergente Folge aus* G. *Dann liegen fast alle* $a\, c_\nu$ *und fast alle* $c_\nu a$ *in* C.

Beweis. Nach Satz 9 unterscheidet sich $\mathfrak{D}(C, a\, C)$ von $a\, C$ in einer kompakten Menge. Alle $a\, c_\nu$ sind in $a\, C$, also fast alle in $\mathfrak{D}(C, a\, C)$ und daher auch in C. Ebenso folgt der zweite Teil des Satzes.

Satz 11. *M sei kompakt. Ferner sei* $c_1, c_2, \ldots$ *eine divergente Folge aus* C. *Dann liegen fast alle* $c_\nu M$ *und fast alle* $M c_\nu$ *in* C,

Beweis, m sei ein Punkt von $\overline{M}$ und U_m eine seiner Umgebungen. Nach Satz 10 gibt es ein ν'_m mit

$$c_\nu m \subset C \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu'_m.$$

Wäre für unendlich viele ν

$$c_\nu U_m \not\subset C,$$

so gäbe es wegen des Zusammenhangs von U_m eine Teilfolge μ_ν und Punkte $q_{\mu_\nu} \subset U_m$ mit

$$c_\nu q_{\mu_\nu} \subset \mathfrak{R}(C).$$

Die Mengen q_{μ_ν} und $\mathfrak{R}(C)$ wären kompakt, also im Widerspruch zur Voraussetzung auch die Menge $c_1, c_2, \ldots$. Darum gibt es ein ν''_m mit $c_\nu U_m \subset C$ für $\nu \geqq \nu''_m$. Mit endlich vielen U_m läßt sich M überdecken; unter den Zahlen ν''_m gibt es eine größte ν''. Für $\nu \geqq \nu''$, also für fast alle ν ist $c_\nu M \subset C$. Ebenso folgt der zweite Teil des Satzes.

Aus diesen drei Sätzen geht unmittelbar der folgende Satz hervor:

Satz 12. *Unsere Transformationsschar läßt sich von $\mathfrak{G}$ stetig auf $\overline{\mathfrak{G}}$ fortsetzen. Die Endpunkte sind Fixpunkte. Jede in $\mathfrak{G}$ kompakte Menge läßt sich durch Transformationen der Schar in jede Umgebung jedes Endpunktes hineinziehen.*

Satz 13. *Zu jedem G gibt es ein G mit $\mathfrak{E}(\mathfrak{D}(G, G^*)) = 0$ und $G + G^* = \mathfrak{G}$.*

Beweis. Wir überdecken $\mathfrak{R}(G)$ mittels endlich vieler V (Hilfssatz 2). Die endlich vielen Komponenten der Überdeckungsmenge verbinden wir durch kompakte Kontinua mit einer von ihnen und überdecken diese Kontinua gleichfalls mit endlich vielen V. Die gesamte Überdeckungsmenge ist zusammenhängend bzw. kompakt wegen des Zusammenhangs bzw. der Kompaktheit im Kleinen von $\mathfrak{G}$. Wir vereinigen sie mit $\mathfrak{G} - G$ und erhalten das gewünschte G^* das, wie man sofort sieht, allen Anforderungen genügt

Satz 14. *Es sei $\mathfrak{E}(G_2) \not\subset \mathfrak{E}(G_1)$. Ferner sei c_1, c, … eine divergente Folge aus G_1. Dann gibt es ein ν' mit $c_\nu G_2^* \subset G_1$ für $\nu \geqq \nu'$.*

Beweis. Nach Satz 11 gibt es ein ν' mit

$$c_\nu \mathfrak{R}(G_2^*) \subset G_1 - \mathfrak{D}(G_1, G_1^*) \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu'.$$

Demnach besitzt $c_\nu G_2^*$ außerhalb $G_1 - \mathfrak{D}(G_1, G_1^*)$, d. h. innerhalb G_1* keine Randpunkte. Besäße es dort überhaupt Punkte, so enthielte es G_1^*, und es wäre

$$\mathfrak{E}(G_1^*) \subset \mathfrak{E}(c_\nu G_2^*) \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu'.$$

Nach Satz 9 wäre dann

$$\mathfrak{E}(G_1^*) \subset \mathfrak{E}(G_2^*),$$

also

$$\mathfrak{E}(G_2) \subset \mathfrak{E}(G_1),$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Daher ist $\mathfrak{D}(G_1^*, c_\nu G_2^*) = 0$ und $c_\nu G_2^* \subset G_1$ für $\nu \geqq \nu'$.

Satz 15. *$\mathfrak{G}$ besitzt höchstens zwei gegeneinander fremde Enden, also höchstens zwei verschiedene Endpunkte.*

Beweis. Wir nehmen die Existenz von drei paarweise fremden nicht leeren Enden $\mathfrak{E}(G_1)$, $\mathfrak{E}(G_2)$, $\mathfrak{E}(G_3)$ an [18]); wir können voraussetzen, daß

[18]) Daß hier mit G statt C gearbeitet wird, ist nicht wesentlich; siehe auch Fußnote [15]), S. 702.

die G_ν paarweise fremd sind. Nach Satz 14 gibt es ein a mit

$$a G_2^* \subset G_1.$$

Daraus folgt nach Satz 9

$$\mathfrak{E}(G_2^*) \subset \mathfrak{E}(G_1).$$

Ferner ist

$$G_1 + G_3 \subset G_2^*,$$

also

$$\mathfrak{E}(G_1) + \mathfrak{E}(G_3) \subset \mathfrak{E}(G_2^*) \subset \mathfrak{E}(G_1).$$

Das ergibt

$$\mathfrak{D}(G_1, G_3) \neq 0 \quad (\text{wegen } \mathfrak{E}(G_3) \neq 0),$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Also war unsere Annahme falsch, und der Satz ist bewiesen.

Wir verstehen im folgenden unter G' bzw. G'' die Menge aller g' bzw. g'' mit $g g' = a$ bzw. $g'' g = a$, wenn $g < G$ und a ein fester Punkt ist.

Satz 16. $\mathfrak{E}(G_1') = \mathfrak{E}(G_1'') = \mathfrak{E}(G_2)$ *und* $\mathfrak{E}(G_2') = \mathfrak{E}(G_2'') = \mathfrak{E}(G_1)$.

Beweis. Wäre

$$\mathfrak{E}(G_1') \neq \mathfrak{E}(G_2),$$

so wäre nach Satz 15

$$\mathfrak{E}(G_1') = \mathfrak{E}(G_1) = \mathfrak{E}(G_2^*).$$

In $\mathfrak{D}(G_2^*, G_1)$ gäbe es also eine Menge ohne Häufungspunkt $c_1, c_2, \ldots$, derart, daß auch $c_1', c_2', \ldots$ in $\mathfrak{D}(G_2^*, G_1)$ enthalten wäre. Nach Satz 14 gäbe es ein c_ν mit

$$c_\nu G_2^* \subset G_1.$$

Dann wäre auch $c_\nu c_\nu' = a \subset G_1$; wir können aber G_1 von vornherein so wählen, daß es a nicht enthält. Unsere Annahme führt zum Widerspruch, also ist $\mathfrak{E}(G_1') = \mathfrak{E}(G_2)$. Ebenso folgen die übrigen Behauptungen des Satzes.

Satz 17. *Jeder geschlossene Weg W in $\mathfrak{G}$ läßt sich unter Festhaltung eines Punktes stetig überführen in einen Weg $W_2 = A + W_1 - A$. Dabei bedeutet W_1 einen ganz in einem beliebigen C mit $\mathfrak{E}(C) \neq 0$ verlaufenden geschlossenen Weg und A einen in dem festgehaltenen Punkt beginnenden und in C endenden Weg. Ist daher irgendeine Umgebung irgendeines Endpunktes von $\mathfrak{G}$ einfachzusammenhängend, so ist $\mathfrak{G}$ einfachzusammenhängend. — Ferner läßt sich in $\overline{\mathfrak{G}}$ jede in $\mathfrak{G}$ kompakte Menge stetig auf einen Punkt zusammenziehen.*

Beweis[19]). Nach Satz 11 gibt es ein a mit $W_1 = aW < C$. Wir verbinden e mit a durch den Weg $A = a_\tau \; (0 \leqq \tau \leqq 1)$ und verstehen unter

[19]) Die im Beweis benutzte Tatsache der Verbindbarkeit zweier Punkte durch eine Kurve ist leicht zu beweisen und z. B. aus Sätzen von Hahn und Mazurkiewicz (siehe etwa Sitzungsberichte Wien 123 (1914), S. 2433) abzuleiten.

A_σ das Stück von a_τ für $0 \leqq \tau \leqq \sigma$. Wir können annehmen, daß der festgehaltene Punkt *e* ist. Die gewünschte Überführung lautet $A_\tau + a_\tau W - A_\tau$ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$

Der zweite Teil des Satzes folgt unmittelbar aus Satz 11.

Satz 18. *$\hat{\mathfrak{G}}$ sei eine Unterschar von $\mathfrak{G}$ und genüge denselben Anforderungen, wie wir sie an $\mathfrak{G}$ gestellt haben. $\hat{\mathfrak{G}}$ sei abgeschlossen und habe genau ein Ende. Dann hat auch $\mathfrak{G}$ genau ein Ende.*

Beweis. Hätte $\mathfrak{G}$ kein Ende, so wäre es kompakt; dann wäre auch $\hat{\mathfrak{G}}$ kompakt, was einen Widerspruch zur Voraussetzung ergibt.

Hätte $\mathfrak{G}$ zwei Enden, so gäbe es nach Satz 16 ein *G* mit $\mathfrak{E}(G) \neq \mathfrak{E}(G')$ und $\mathfrak{D}(G,\ ') = 0$.[20]) Es sei $\hat{G} = \mathfrak{D}(\hat{\mathfrak{G}}, G)$, dann ist $\hat{G}' = \mathfrak{D}(\hat{\mathfrak{G}}, G')$ $\mathfrak{E}(\hat{G})$ und $\mathfrak{E}(\hat{G}')$ erschöpfen $\mathfrak{E}(\hat{\mathfrak{G}})$, denn andernfalls gäbe es in $\hat{\mathfrak{G}}$, also in $\mathfrak{G}$ eine zu G $+$ G fremde nicht kompakte Menge. Da $\hat{\mathfrak{G}}$ nicht kompakt ist, so gilt $\mathfrak{E}(\hat{G}) \neq 0$ und nach Voraussetzung

$$\mathfrak{E}(\hat{G}) = \mathfrak{E}(\hat{G}').$$

Das ergibt $\mathfrak{D}(\hat{G}, \hat{G}') \neq 0$, $\mathfrak{D}(G, G') \neq 0$ im Widerspruch zur Annahme. Mithin ist $\mathfrak{E}(G) = \mathfrak{E}(G')$, $\mathfrak{G}$ hat also genau ein Ende.

3. Kapitel.

Die Enden topologischer Gruppen.

$\mathfrak{G}$ sei von nun an eine topologische Gruppe. Das soll heißen: Zwischen den Punkten von $\mathfrak{G}$ existiert eine den bekannten Gruppengesetzen genügende verbindende Relation (zu den Forderungen des 2. Kapitels kommt also noch die der Gültigkeit des assoziativen Gesetzes), und aus der Existenz von

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a \quad \text{und} \quad \lim_{\nu=\infty} b_\nu = b \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

folgt die von

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu^{-1} = a^{-1} \quad \text{und von} \quad \lim_{\nu=\infty} a_\nu b_\nu = a\, b \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Die Identität bezeichnen wir mit *e* und befleißigen uns auch im übrigen der von der Produktbildung aus dem 2. Kapitel her gewohnten Bezeichnungen.

$\mathfrak{G}$ ist dann auch ein Schiebraum, und wir können ohne weiteres die Sätze 9 bis 18 auch für die topologische Gruppe $\mathfrak{G}$ aussprechen. In diesem Zusammenhang wollen wir sie als 9^* bis 18^* bezeichnen. Für G und G' werden wir, da die Annahme *a* = *e* unwesentlich ist, G^{-1} schreiben, und entsprechend erklären wir allgemein das Zeichen M^{-1}. Satz 16* lautet dann dahin, daß in einem $\mathfrak{G}$ mit zwei verschiedenen Enden diese zueinander invers sind.

[20]) Das zur Erzeugung von G' nötige *a* wähle man aus $\hat{\mathfrak{G}}$

Als Gruppenkriterien im Sinne der Einleitung dürften von den bewiesenen Sätzen am brauchbarsten Satz 15 und 17 sein. In der Tat führen diese im Fall der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten recht weit (im zweidimensionalen Fall ist man nicht auf unsere Sätze angewiesen).

Definition. $\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ heißt eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ in dem „Wirkungsraum." $\mathfrak{W}$, wenn jedem Punkt a von $\mathfrak{G}$ eine eineindeutige Transformation $f_a(\mathfrak{W})$ von $\mathfrak{W}$ in sich zugeordnet ist mit

$$f_{ab}(x) = f_a(f_b(x)).\text{[21]}$$

Die Punkte bzw. Mengen von $\mathfrak{W}$ bezeichnen wir durch x, y, z bzw. X, Y, Z. Über $\mathfrak{W}$ machen wir dieselben Voraussetzungen, wie wir sie über $\mathfrak{G}$ gemacht haben, d. h. $\mathfrak{W}$ soll ein topologischer Raum mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom sein, zusammenhängend, im Kleinen zusammenhängend und im Kleinen kompakt.

$\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ heißt einstufig, wenn aus $a \neq b$ $f_a(x) \neq f_b(x)$ folgt.

$\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ heißt transitiv, wenn es zu je zwei Punkten x, y von $\mathfrak{W}$ ein aus $\underline{\mathfrak{G}}$ gibt mit $f_a(x) = y$.

$\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ heißt stetig, wenn aus der Existenz von

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a \quad \text{und} \quad \lim_{\nu=\infty} x_\nu = x \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

die von

$$\lim_{\nu=\infty} f_{a_\nu}(x_\nu) = f_a(x)$$

folgt.

Wir verstehen unter $f_A(X)$ die Menge aller $f_a(x)$ mit $a < A$ und .

Satz 9a. $\mathfrak{E}(f_a(X)) = \mathfrak{E}(X)$, *bei stetigem* $\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$

Beweis. Genau wie der von Satz 9.

Satz 19. $\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ *sei eine transitive stetige Darstellung von* $\mathfrak{G}$ *in* $\mathfrak{W}$. *Es sei* $f_a(x_0) = x$. *Dann gibt es zu jeder Umgebung* Z_x *von* x *eine Umgebung* U_a *von* a *mit*

$$f_{U_a}(x_0) \subset Z_x$$

und zu jeder Umgebung U_a *von* a *eine Umgebung* Z_x *von* x *mit*

$$f_{U_a}(x_0) \supset Z_x$$

Beweis. Der erste Teil des Satzes folgt unmittelbar aus der Stetigkeit von $\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$. Wir werden den ganzen Beweis führen, ohne von dem Zusammenhang von $\mathfrak{G}$ Gebrauch zu machen; von $\mathfrak{W}$ werden wir an topologischen Eigenschaften nur benutzen, daß es ein topologischer Raum ist.

Es genügt, den zweiten Teil des Satzes für $a = e$ zu beweisen, weil $a\,U_e$ eine Umgebung von a vertritt.

[21]) Z. B. $\mathfrak{G}$ = dreidimensionaler projektiver Raum, $\mathfrak{W}$ = zweidimensionale Kugel, $f_a\,\mathfrak{W})$ = Kugeldrehungen.

Nach Hilfssatz 1 läßt sich e von dem kompakten $\mathfrak{R}(U_e)$ durch eine Umgebung abtrennen, die in U_e enthalten und gegen eine Umgebung von $\mathfrak{R}(U_e)$ fremd ist, deren abgeschlossene Hülle also in U_e enthalten ist. Es genügt daher, den zweiten Teil des Satzes mit $\overline{U}_e$ statt U_a zu beweisen.

Zunächst eine Vorbemerkung: $B_1, B_2, \ldots$ sei eine Folge abgeschlossener Mengen von $\mathfrak{G}$ ohne innere Punkte. Wir machen die Annahme,

$$B = \mathfrak{V}_{\nu=1}^{\infty}(B_\nu)$$

enthielte einen inneren Punkt b_1 und seine abgeschlossene Umgebung $\overline{V}_{b_1}$, und werden aus der Annahme einen Widerspruch herleiten.

$V_{b_1} - \mathfrak{D}(V_{b_1}, B_1)$ ist offen, enthält b_2 und $\overline{V}_{b_2}$,
$V_{b_\nu} - \mathfrak{D}(V_{b_\nu}, B_1 + \ldots + B_\nu)$ ist offen, enthält $b_{\nu+1}$ und $\overline{V}_{b_{\nu+1}}$

Dann gilt

$$\overline{V}_{b_\nu} \subset \overline{V}_{b_1} \subset B \tag{1}$$

Ferner ist

$$\mathfrak{D}(\overline{V}_{b_\nu}, B_1 + \ldots + B_{\nu-1}) = 0 \tag{2}$$

$$0 \neq \mathfrak{D}_{\nu=1}^{\infty}(\overline{V}_{b_\nu}) \supset b = \lim b_\nu \tag{3}$$

weil $\mathfrak{G}$ im Kleinen kompakt ist und jedes $\overline{V}_{b_\nu}$ das nachfolgende enthält.

$$b \not\subset \mathfrak{V}_{\nu=1}^{\infty}(B_\nu) \qquad \text{wegen (2)},$$

$$b \subset \mathfrak{V}_{\nu=1}^{\infty}(B_\nu) \qquad \text{wegen (1) und (3)}.$$

Damit ist der Widerspruch aufgewiesen. B enthält also keinen inneren Punkt.

Nun zum Beweise unseres Satzes. $\mathfrak{G}$ läßt sich mit abzählbar vielen $d_\nu \overline{V}_e$ überdecken, $\nu = 1, 2, \ldots$.

Enthielte $f_{\overline{V}_e}(x)$ keinen inneren Punkt, so gälte das gleiche für

$$f_{d_\nu \overline{V}_e}(x_0) = f_{d_\nu}(f_{\overline{V}_e}(x_0))$$

und nach der Vorbemerkung auch für

$$\mathfrak{V}_{\nu=1}^{\infty}(f_{d_\nu \overline{V}_e}(x_0)) = f_{\mathfrak{V}(d_\nu \overline{V}_e)}(x_0) = f_{\mathfrak{G}}(x_0) = \mathfrak{W}.$$

Das ist aber unmöglich. Somit enthält $f_{\overline{V}_e}(x_0)$ einen inneren Punkt y und seine Umgebung Z_y. Dann gibt es ein $b \subset \overline{V}_e$ mit

$$f_b(x_0) = y.$$
$$f_{b^{-1}\overline{V}_e}(x_0) = f_{b^{-1}}(f_{\overline{V}_e}(x_0))$$

enthält x_0 als inneren Punkt, also auch eine Umgebung Z_{x_0} von x_0. Man braucht daher $\overline{V}_e$ nur so zu wählen, daß

$$\overline{V}_e^{-1}\overline{V}_e \subset \overline{U}_e$$

gilt. Dann folgt

$$f_{\overline{U}_e}(x_0) \supset f_{\overline{V}_e^{-1}\overline{V}_e}(x_0) \supset Z_{x_0},$$

wie gewünscht.

Satz 20. *$\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ sei eine stetige einstufige transitive Darstellung von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{W}$. $\hat{\mathfrak{G}}$ sei die Menge aller a mit $f_a(x_0) = x_0$. $\hat{\mathfrak{G}}$ sei kompakt. Dann haben $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{W}$ gleich viel Enden.*

Beweis. Im I. Teil des Beweises werden wir eindeutig jedem Ende von $\mathfrak{G}$ ein Ende von $\mathfrak{W}$ zuordnen, im II. Teil umgekehrt jedem Ende von $\mathfrak{W}$ ein Ende von $\mathfrak{G}$; im III. Teil werden wir die Gleichwertigkeit beider Zuordnungen nachweisen.

I. C sei eine C- Menge von $\mathfrak{G}$. C ist offen, also ist nach dem zweiten Teil von Satz 19 $f_C(x_0)$ offen; $\mathfrak{R}(C)$ ist kompakt, also ist wegen der Stetigkeit der Darstellung $\mathfrak{R}(f_C(x_0))$ kompakt.

$$Y = f_C(x_0)$$

ist demnach eine C-Menge von $\mathfrak{W}$.

Ist C kompakt, so ist wegen der Stetigkeit der Darstellung Y kompakt. Aus

$$\mathfrak{E}(C) = 0 \qquad \text{folgt} \qquad \mathfrak{E}(Y) = 0,$$

aus

$$\mathfrak{E}(C_1) = \mathfrak{E}(C_2) \quad \text{folgt} \quad \mathfrak{E}(Y_1) = \mathfrak{E}(Y_2).$$

II. Wir vergessen die Bedeutung von C und Y aus (I) und nehmen an, Y sei eine beliebige C- Menge von $\mathfrak{W}$. Die Menge aller c mit $f_c(x_0) \subset Y$ heiße C. $Y = f_C(x_0)$ ist offen, also ist nach dem ersten Teil von Satz 19 C offen. Wir wollen nachweisen, daß $\mathfrak{R}(C$ kompakt ist, d.h. wir wollen zeigen, daß eine beliebige unendliche Teilmenge M von $\mathfrak{R}(C)$ einen Häufungspunkt besitzt.

$$f_M(x_0) \subset \mathfrak{R}(Y),$$

also kompakt. Es gibt also eine konvergente Teilfolge $x_1, x_2, \ldots,$ von $f_M(x_0)$; ihr Grenzwert heiße

$$f_l(x_0) = x,$$

$$f_{k_\nu}(x_0) = x_\nu \qquad (k_\nu \subset M).$$

$$f_{l_\nu}(x) = x_\nu$$

läßt sich nach Satz 19, 2. Teil, mit $\lim l_\nu = l$ erreichen,

$$f_{k_\nu^{-1} l_\nu}(x_0) = x_0,$$

$$k_\nu^{-} l_\nu < \mathfrak{G} \qquad \text{kompakt.}$$

Mithin hat die Folge k_ν, also auch M einen Häufungspunkt, und $\mathfrak{R}(C)$ ist kompakt. G ist daher eine C-Menge.

Genau so zeigt man, daß die Kompaktheit von Y die von C nach sich zieht, d. h.

$$\text{aus} \quad \mathfrak{E}(Y) = 0 \quad \text{folgt} \quad \mathfrak{E}(C) = 0,$$

$$\text{aus} \quad \mathfrak{E}(Y_1) = \mathfrak{E}(Y_2) \quad \text{folgt} \quad \mathfrak{E}(C_1) = \mathfrak{E}(C_2)$$

III. Wir konstruieren nach (II) zu einem Y sein C und nach (I) zu diesem C sein Y, das mit dem Ausgangs-Y identisch ist, ebenso nach (I) zu einem C sein Y und nach (II) zu diesem Y sein C, das aus dem Ausgangs-C auch durch hintere Multiplikation mit $\hat{\mathfrak{G}}$ entsteht, dessen Ende also nach Satz 9 und 11 mit dem von C zusammenfällt.

Daß Satz 20 ohne die Kompaktheit von $\hat{\mathfrak{G}}$ nicht zu gelten braucht, zeigt folgendes

Beispiel. $\mathfrak{W}$ sei die Gerade, x die Koordinate eines Punktes von $\mathfrak{W}$ (kleine lateinische Buchstaben bedeuten im folgenden reelle Zahlen). $\mathfrak{G}$ sei die Menge aller Transformationen

$$x' = ax + b, \quad a > 0,$$

ist also der Euklidischen Ebene homöomorph. $\hat{\mathfrak{G}}$ ist der Geraden homöomorph, also nicht kompakt, $\mathfrak{G}$ hat einen Endpunkt, $\mathfrak{W}$ hat deren zwei.

Berlin, Januar 1930.

(Eingegangen am 29. März 1930.)