Cohomologie de Bredon et Homologie Cyclique

A. Bella Baci[1]

Department of Mathematics, University of Utrecht
P.O. Box 80.010, 3508 TA Utrecht
The Netherlands
e-mail: bellabac@math.ruu.nl

Abstract

For a G-manifold X (G finite group), Bredon cohomology ($\mathbb{Z}_2$ graded) of X and periodic cyclic homology of crossed product are isomorphic

1 Introduction

Dans [DW] Luck et Davis, utilisent (via le language homotopique) la cohomologie de Bredon [Br], comme une alternative à l'étude de la conjecture de Baum-Connes [BCH](pour la partie topologique). Cette dernière utilise intensivement l'homologie cyclique de Connes [C]. La cohomologie équivariante introduite par G. Bredon [Br] pour l'étude des problèmes d'obstructions, est souvent difficille à calculer. Il existe plusieurs présentations de cette cohomologie, la plus adaptée à la théorie d'homologie cyclique de Connes est celle introduite par Moerdijk-Svensson [MS1]. Cette version permet d'introduire des théories cycliques équivariantes à coéfficients, extrêmement adaptée à

[1]-Recherche partiellement financée par l'Organisation Scientifique Néerlandaise (NWO).

l'étude de l'homologie d'intersection équivariante et son lien avec la théorie de Connes, via les récents travaux de Brasselet-Legrand [BL].

L'objectif de ce papier est d'indiquer un lien entre la cohomologie de Bredon et l'homologie cyclique du produit croisé par un groupe fini. Les deux cohomologies forment le cadre naturel des invariants liées aux orbifolds. En effet, pour une variété compacte X, muni d'une action par difféomorphismes d'un groupe fini G, nous définissons dans la section 2, la cohomologie de Bredon $\mathbb{Z}_2$-graduée $\mathcal{H}^*_{Br}(X, R_{\mathbb{C}})$, où $R_{\mathbb{C}}$ est un système de coéfficient donné par l'anneau des représentations des sous groupes de G. Dans la section 3, nous étudions l'homologie cyclique périodique notée $PHC_*(C^\infty(X) \rtimes G)$, de l'algèbre produit croisé. Avec ces hypothèses, nous montrons dans la section 4 le théorème suivant :

1.1 Théorème

$$\mathcal{H}^*_{Br}(X, R_{\mathbb{C}}) \simeq PHC_*(C^\infty(X) \rtimes G)$$

Nous montrons l'existence de l'isomorphisme, par une méthode combinatoire via la K-théorie équivariante. Pour d'autres classes de groupes, nous adapterons dans une prochaine version de ce papier, une approche directe basée sur la théorie des faisceaux. Nous donnerons un aperçu de la situation dans la section 5. Dans ce papier, pour une variété X, $H^*(X)$ désignera à la fois (grace à l'isomorphisme standard) la cohomologie de Cech et la cohomologie d'Alexander Spanier.

Je remercie I. Moerdijk et J. A. Svensson pour l'intérêt qu'ils ont apporté a ce travail.

2 Cohomologie de Bredon

Soient G un groupe discret et X un G-espace. La cohomologie de Bredon est exprimée en terme d'une certaine catégorie associée à un G-espace X, notée $\Delta_G(X)$, introduite par I. Moerdijk-J. I. Svensson [MS1]. Nous présentons cette construction, car elle s'adapte à l'étude de la cohomologie équivariante des ensembles G-cycliques de Connes.

2.1 La construction de Grothendieck

La catégorie $\Delta_G(X)$ est construite à partir de la construction dite de Grothendieck. Soient $\mathcal{C}$ une petite catégorie et $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \to Cat$ un foncteur à valeurs dans Cat la catégorie des petites catégories, alors la construction de Grothendieck de $\mathcal{F}$ est la catégorie notée $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$ définie de la façon suivante :

- Les objets de $\int_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$ sont les couples (C, x) où $C \in Ob(\mathcal{C})$ et $x \in \mathcal{F}(C)$, une flèche $(C, x) \to (C', x')$ dans $\int_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$ est un couple (f, α) où $(f : C \to C') \in Fl(\mathcal{C})$ et $\alpha : x \to F(f)(x')$. La composition dans $\int_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$ est définie dans le sens évident. Notons qu'il existe un foncteur projection (canonique)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathcal{F} \quad &\to \quad \mathcal{C} \\ (C, x) &\to C \end{aligned}$$

Cette construction est naturelle en $\mathcal{C}$ et en $\mathcal{F}$.

Thomasson [T], montre que la construction de Grothendieck, représente un modèle de catégorie du foncteur homotopie colimite , ie, pour un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \to Cat$, il existe une équivalence d'homotopie :

$$hocolim_{\mathcal{C}^{op}} B \circ \mathcal{F} \simeq B(\int_{\mathcal{C}} \mathcal{F})$$

où $B : Cat \to Top$, est le foncteur espace classifiant (Top désigne la catégorie des espaces topologiques). L'exemple type de la situation précédente est le suivan: Soit X un espace topologique, le complexe des chaines singulières associé est un foncteur $\mathcal{S}_*(X) : \Delta^{op} \to Ens \subseteq Cat$, où Δ désigne la catégorie simpliciale. Notons par $\Delta(-)$ le foncteur définit par :

$$\begin{aligned} \Delta(-) : Top \quad &\to \quad Cat \\ X \to \Delta(X) &= \int_{\Delta} \mathcal{S}_*(X) \end{aligned}$$

alors on a les équivalences suivantes

$$X \simeq \mid \mathcal{S}_*(X) \mid \simeq hocolim_{\Delta^{op}} \mathcal{S}_*(X) \simeq B\Delta(X) = hocolim_{\Delta^{op}(X)} pt$$

Notons par $\mathcal{O}(G)$ la catégorie des orbites, ie, $\mathcal{O}(G)$ est la sous-catégorie pleine de la catégorie des G-espaces, engendré par les G-espaces (discrets) G/H, où H est sous-groupe de G.

$$Objets(\mathcal{O}(G)) = \{G - \text{espaces} \quad G/H; H \subset G\}$$

$$Hom_{\mathcal{O}(G)}(G/H, G/K) = \{G - \text{applications} : G/H \to G/K\} \simeq (G/H)^K$$

Pour un G-espace X, il existe un foncteur

$$X^{\sim}: \quad \mathcal{O}(G)^{op} \longrightarrow Top$$

$$G/H \to Hom_G(G/H, X) \simeq X^H$$

où X^H désigne l'espace des points fixes par l'action de H. En composant ce foncteur avec le foncteur $\Delta(-) : Top \to Cat$, on obtient un foncteur

$$\Delta(X^{\sim}): \quad \mathcal{O}(G)^{op} \longrightarrow Cat$$

Soit $\Delta_G(X) = \int_{\mathcal{O}(G)} \Delta(X^{(\sim)})$, et notons par $p_X : \Delta_G(X) \to \mathcal{O}(G)$ le foncteur projection. Dans un certain sens, la catégorie $\Delta_G(X)$ est l'analogue équivariant de la catégorie $\Delta(X)$ associée à l'espace topologique X. Explicitement, $\Delta_G(X)$ est décrite de la manière suivante:

Les objets sont les G-applications $\sigma : G/H \times \Delta^n \to X$, où Δ^n est le n-simplexe standard, et une flèche

$$(\sigma : G/H \times \Delta^n \to X) \to (\tau : G/K \times \Delta^m \to X)$$

est un couple (φ, α) avec $\varphi : G/H \to G/K$ est une G-application et $\alpha : \Delta^n \to \Delta^m$ un opérateur simplicial tel que $\tau \circ (\varphi \times \alpha) = \sigma$

Une autre catégorie importante associée à un G-espace X notée $\pi_G(X)$ construite de la façon suivante. Soit $\pi(X^{\sim}) : \mathcal{O}(G)^{op} \to Groupoids \subseteq Cat$ le foncteur qui envoi G/H vers le groupoid fondamental $\pi(X^H)$ du sous espace X^H. Alors on définit

$$\pi_G(X) = \int_{\mathcal{O}(G)} \pi(X^{\sim})$$

avec un foncteur projection $q_X : \pi_G(X) \to \mathcal{O}(G)$. Explicitement $\pi_G(X)$ est la catégorie où les objets sont les G-applications $x : G/H \to X$, et une flèche $(x : G/H \to X) \to (y : G/K \to X)$ est un couple (φ, α) avec $\varphi : G/H \to G/K$ une G-application et α une G-classe d'homotopie des chemins équivariants $G/H \times I \to X$ de $x \circ \varphi$ vers y. $\pi_G(X)$ n'est pas un groupoid, et d'une manière générale $\pi_G(X) \neq \pi(\Delta_G(X))$ sauf le cas où G est trivial. Il existe un foncteur canonique $v_X : \Delta_G(X) \to \pi_G(X)$, qui commute avec les projections

$$\Delta_G(X) \overset{v_X}{\to} \pi_G(X)$$

$$p_X \searrow \quad \swarrow q_X$$
$$\mathcal{O}(G)$$

obtenu de la facon suivante : pour un espace topologique T, il existe un foncteur quotient $\Delta(T) \to \pi(T)$ qui envoi un objet $(\sigma : \Delta^n \to T)$ vers e^n la nième face de Δ^n; une fl èche $\alpha : (\sigma : \Delta^n \to T) \to (\tau : \Delta^m \to T)$ de $\Delta(T)$ est envoyée vers l'image par τ du chemin de $\alpha(e^n)$ vers e^m dans Δ^m. Ce foncteur est naturel en T, aussi pour un G-espace X on obtient une transformation naturelle $\Delta(X^{\sim}) \to \pi(X^{\sim})$ entre foncteurs $\mathcal{O}(G)^{op} \to Cat$. Par " intégration ", on obtient le foncteur $v_{_X}$. Un G-système local de coefficient sur un G-espace X est un foncteur $M \in Ab(\Delta_G(X)$ tel que $M \simeq v_{_X}^*(M'), M' \in Ab(\pi_G(X))$, Ab désigne la catégorie des groupes abéliens.

2.2 Définition

Pour un G-système local de coefficient M sur un G-espace X, la cohomologie $H_G^*(X, M)$ de Bredon de X à coefficient dans M est par définition:

$$H_G^*(X, M) = H^*(\Delta_G(X), M)$$

Pour un système constant M les groupes définis précédemment coincident avec celles de Bredon ordinaire. La version singulière de la cohomologie de Bredon est donnée par:

pour un G-espace X et $n \geq 0$, soit

$$C_n(X^{\sim}) : \mathcal{O}(G)^{op} \to Ab$$

$$G/H \to \mathbb{Z}[S_n(X^H)]$$

où $\mathbb{Z}[S_n(X^H)]$ est le groupe libre engendré par les n-simplexes singulières de X^H. Pour $M \in Ab(\mathcal{O}(G))$, soit:

$$C^n(X, M) = Hom_{_{\mathcal{O}(G)}}(C_n(X^{\sim}), M)$$

Sur ce complexe, on définit la différentielle d'une manière standard. Notons par $C^*(X, M))$ le complexe de cochaines associé. La définition de Brocker de la cohomologie de Bredon est:

$$H_{_{Br}}^*(X, M) = H^*(C_*(X, M)).$$

Par la suite nous considérons une version $\mathbb{Z}_2$-graduée donnée par:

$$\mathcal{H}^0_{Br}(X, M) = \prod_j H^{2j}_{Br}(X, M)$$

$$\mathcal{H}^1_{Br}(X, M) = \prod_j H^{2j+1}_{Br}(X, M)$$

2.3 Théorème [MS1]

Soit X un G-espace et M un foncteur $\mathcal{O}(G)^{op} \to Ab$. Alors il existe un isomorphisme

$$H^*_{Br}(X, M) \simeq H^*(\Delta_G(X), M).$$

3 Homologie cyclique, complexes mixtes et produits croisés.

3.1 Définitions

Rappelons quelques constructions liées à la notion d'objets cycliques tordus introduite par Feigin-Tsygan, [FT], qui généralise la notion d'objets cycliques de Connes, [C]. Soit k un anneau fixé, pour r un entier $1 \leq r \leq \infty$ un r-module cyclique $(X_n, d_i, s_i, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un module simplicial avec des morphismes faces $d_i : X_{n+1} \to X_n$, et des morphismes dégénérescences $s_i : X_{n-1} \to X_n$, $0 \leq i \leq n$. De plus on a un morphisme $t : X_n \to X_n$ pour chaque n tel que $t^{r(n+1)} = 1$, satisfaisant aux identités suivantes:

$$d_i t_n = \begin{cases} t_{n-1} d_{i-1} & 1 \leq i \leq n \\ d_n & i = 0 \end{cases}$$

$$s_i t_n = \begin{cases} t_{n+1} s_{i-1} & 1 \leq i \leq n \\ t^2_{n+1} s_n & i = 0 \end{cases}$$

Un complexe mixte (M, b, B), est la donnée d'un k-module M gradué positivement, d'une différentielle b sur M de degré -1, et d'une différentielle B sur M de degré $+1$ tel que $bB + Bb = 0$.

On note $k[u]$ l'anneau des polynômes, où u est de degré -2, W un $k[u]$-module gradué et $M[[u]]$ le module gradué des séries formelles en u, à coefficients dans un complexe mixte M, muni de la différentielle $b + uB$. Le complexe $M[[u]] \otimes_{k[u]} W$ est alors muni de la différentielle $(b + uB) \otimes 1$. L'homologie cyclique de M à coefficients dans W est, par définition :

$$HC_*(M, W) = H_*(M[[u]] \otimes_{k[u]} W).$$

Suivant [BG] on définit les différentes homologies cycliques d'un complexe mixte par

$$\begin{array}{cl} HC_*(M, k[u, u^{-1}]) & = PHC_*(M), \text{ homologie cyclique périodique} \\ HC_*(M, k[u, u^{-1}]/uk[u]) & = HC_*(M), \text{ homologie cyclique} \\ HC_*(M, k[u]/uk[u]) & = HH_*(M), \text{ homologie de Hochschild} \end{array}$$

3.2 Exemple.

Soient A une k-algèbre, et $\alpha \in Aut(A)$ tel que $\alpha^r = 1$, on obtient un r-module cyclique noté $A^\natural_{\alpha,r}$ en posant: $A^\natural_{\alpha,r}(n) = A^{\otimes(n+1)}$, et

$$\begin{array}{ll} d_i(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) & = (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i.a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) \quad 0 \leq i \leq n-1 \\ d_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) & = (\alpha(a_n).a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) \\ s_i(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) & = (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) \quad 0 \leq i \leq n \\ t_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) & = (\alpha(a_n) \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) \end{array}$$

Le r-module cyclique $A^\natural_{\alpha,r}$ définit un complexe mixte tordu noté $C_*(A, \alpha, r)$ avec:

$$b = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i \quad ; \quad B = (1 - T)s\Big(\sum_{i=0}^{r(n+1)-1} T^i\Big), \quad T = (-1)^n t_n$$

De la même manière que dans le cas classique de l'homologie cyclique [L], (ie $r = 1, \alpha = 1$), on associe des théories d'homologie cyclique tordue définies par:

1) $r < \infty$ $\qquad HC_*(A, \alpha, r; W) = H_*(C_*(A, \alpha, r)[[u]] \otimes_{k[u]} W)$

et une longue suite exacte de Connes:

$$... \to HH_*(A,\alpha,r) \xrightarrow{\mathrm{I}} HC_*(A,\alpha,r) \xrightarrow{\mathrm{S}} HC_{*-2}(A,\alpha,r) \xrightarrow{\mathrm{B}} HH_{*-1}(A,\alpha,r) \to ...$$

ainsi qu'une suite spectrale fondamentale

$$E^1_{**} = HH_*(A,\alpha,r) \overset{\text{Converge}}{\Longrightarrow} HC_*(A,\alpha,r) \qquad (1)$$

2) $r=\infty$ $\qquad HC_*(A,\alpha,\infty) \simeq HH_*(A,\alpha,\infty) \quad ; \quad PHC_*(A,\alpha,\infty) \simeq 0$

3.3 Produit croisé

Soit G un groupe discret qui opère sur A par automorphismes

$$G \overset{\alpha}{\longrightarrow} Aut(A) \quad g \longrightarrow \alpha_g$$

On note $A \rtimes G$ le produit croisé algébrique de A par G. Le k-module sous-jacent est le produit tensoriel $A \otimes k(G)$, les éléments sont les sommes finies $\sum a_g u_g$, muni du produit associatif et unitaire donné par:

$$(a_g u_g)(b_h u_h) = a\alpha_g(b)u_{gh}, \quad a,b \in A, \quad g,h \in G.$$

3.4 Exemples.

3.4.1-Dans le cas particulier $A = k$, on obtient l'algèbre du groupe $k(G)$.

3.4.2-On considère l'algèbre $C^\infty(X) \rtimes G = C^\infty(X \times G)$ ou les éléments sont les sommes formelles $\sum_{g\in G} f_g[g]$ où $f_g \in C^\infty(X)$, ($C^\infty(X)$ désigne les fonctions C^∞ sur X à valeurs complexe) et $g \in G$. L'addition et la multiplication dans $C^\infty(X \times G)$ sont :

$$\Big(\sum_{g\in G} f_g[g]\Big) + \Big(\sum_{g\in G} h_g[g]\Big) = \Big(\sum_{g\in G} (f_g + h_g)[g]\Big)$$

$$\Big(f_g[g]\Big)\Big(h_\alpha[\alpha]\Big) = f_g.h^g_\alpha[g\alpha], \quad g,\alpha \in G$$

Pour $g \in G$, soient $G^g = \{h \in G \mid gh = hg\}$ le centralisateur de g dans G, (g) le sous groupe engendré par g dans G^g. Notons par $< G >$

l'ensemble des classes de conjugaisons de G et $[g] = \{hgh^{-1}/h \in G\}$ la classe de conjugaison de g dans G. Notons par $\langle G\rangle_{fin}$ (resp, $\langle G\rangle_{\infty}$) les classes de conjugaisons des éléments d'ordre fini (resp, infini). Le module cyclique $(A \rtimes G)^{\natural}$ se décompose en une somme directe

$$(A \rtimes G)^{\natural} = \bigoplus_{[g]\in <G>} (A \rtimes G)^{\natural}_{[g]} \qquad (3.4.3)$$

Notons par $HC_*(A \rtimes G; W)_{[g]}$ l'homologie cyclique du sous module cyclique $(A \rtimes G)^{\natural}_{[g]}$, engendré par les éléments : $(a_0 \otimes g_0) \otimes (a_1 \otimes g_1) \otimes ... \otimes (a_n \otimes g_n)$ avec $g_0.g_1...g_n \in [g]$.

3.5 Théorème

$$HC_*(A \rtimes G; W) = \bigoplus_{[g]\in <G>} HC_*(A \rtimes G; W)_{[g]}$$

Pour chaque classe de conjugaison $[g]$, on a un ord(g)-module cyclique noté $A^{\natural}_{\alpha_g, ord(g)}$. C'est un G^g -module pour l'opération

$$h.(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = (\alpha_h(a_0) \otimes \alpha_h(a_1) \otimes \cdots \otimes \alpha_h(a_n)) \qquad h \in G^g, \quad a_i \in A$$

Cette opération induit une structure de G^g-module sur $HC_*(A, \alpha_g, ord(g); W)$. Dans [B] nous avons prouvé le théorème suivant:

3.6 Théorème

Pour G discret de dimension homologique finie, il existe une suite spectrale:

$$E^2_{**} = \bigoplus_{g\in\langle G\rangle_{fini}} H_*\Big(G^g, PHC_*(A, \alpha_g, ord(g))\Big) \quad \overset{\text{Converge}}{\Longrightarrow} \quad PHC_*(A \rtimes G) \qquad .$$

Démonstration

De la décomposition (3.4.3), il est facile de voir [B], que nous avons un quasi-isomorphisme

$$\bigoplus_{g\in\langle G\rangle_{fini}} B_*(G^g)\otimes_{G^g}\Big(C_*(A,\alpha_g,ord(g))[[u]]\otimes_{\mathbb{C}[u]}\mathbb{C}[u,u^{-1}]\Big)$$

$$\wr\downarrow$$

$$C_*(A\rtimes G)[[u]]\otimes_{\mathbb{C}[u]}\mathbb{C}[u,u^{-1}]$$

$B_*(G^g)$ désigne la bar résolution réduite du groupe G^g. La suite spectrale du théorème, est associée à la filtration

$$\Im^p=\sum_{0\le j\le p}\left(\bigoplus_{g\in\langle G\rangle_{fini}}\Big(B_j(G^g)\hat{\otimes}_{G^g}(C_*(A\rtimes G)[[u]]\otimes_{\mathbb{C}[u]}\mathbb{C}[u,u^{-1}])\Big)\right)$$

(où $\hat{\otimes}$ désigne le produit tensoriel complètè algébrique) $\diamond$

Pour $A=C^\infty(X)$ et G discret, le formalisme algébrique précédent se prolonge sans difficulté au cadre topologique avec le produit tensoriel projectif suivant [C]. Dans ce cadre, l'homologie cyclique tordue décrit l'homologie des points fixes. Pour illustrer ceci notons par

$$X^g=\{x\in X\quad /g.x=x\quad;\quad ord(g)<\infty\}$$

la sous-variété des points fixés par le sous groupe engendré par $g\in G$. Le théorème suivant est la version délocalisée (dans le sens équivariant) du théorème classique d'Alain Connes [C, Th2 page 208]

3.7 Théorème.

Pour $g\in G$ d'ordre fini, alors

$$\begin{aligned} PHC_j(C^\infty(X),\alpha(g),ord(g)) &\simeq PHC_j(C^\infty(X^g)) \qquad j=0,1\\ &\simeq \textstyle\prod_{l\ge 0} H_{DR}^{2l+j}(X^g) \qquad j=0,1\end{aligned}$$

Démonstration

Le deuxième isomorphisme est le théorème de Connes [C, Th2 page 208] pour la sous variété X^g (car g est d'ordre fini). Le premier isomorphisme est une conséquence du fait que nous avons un quasi-isomorphisme au niveau de l'homologie de Hochschild

$$\begin{aligned} HH_*(C^\infty(X), \alpha_g, ord(g)) &\simeq HH_*(C^\infty(X^g), C^\infty(X^g)) \\ &\simeq \Omega^*(X^g) \end{aligned}$$

où $\Omega^*(X^g)$ désigne l'algèbre différentiel gradué des formes différentielles sur X^g. Le quasi-isomorphisme est fourni par le morphisme de complexes mixtes

$$C_*(C^\infty(X), \alpha_g, ord(g)) \to C_*(C^\infty(X^g)), \alpha_e, 1)$$

induit par le morphisme de restriction $C^\infty(X) \to C^\infty(X^g)$. Le quasi-isomorphisme précédent induit un isomorphisme entre les suites spectrales fondamentales associées, d'où le théorème. Notons qu'il est possible d'obtenir directement l'isomorphisme

$$HH_*(C^\infty(X), \alpha_g, ord(g)) \simeq \Omega^*(X^g)$$

par la méthode de [C], voir [Br].$\diamond$

Pour les groupes finis on a une décomposition de l'homologie cyclique périodique de l'algèbre produit croisé, qu'on décrit dans

3.8 Proposition.

Pour un groupe fini G, on a

$$\begin{aligned} PHC_{pair}((C^\infty(X) \rtimes G) &\simeq \bigoplus_{[g]} \Big(\prod_{j\geq 0} H^{2j}(X^g, \mathbb{C}\Big)^{G^g} \\ PHC_{imp}((C^\infty(X) \rtimes G) &\simeq \bigoplus_{[g]} \Big(\prod_{j\geq 0} H^{2j+1}(X^g, \mathbb{C}\Big)^{G^g} \end{aligned}$$

$\Big(,\Big)^{G^g}$ *désigne la partie G^g-invariante*

Démonstration

Ceci est une conséquence immédiate de la dégénèressence de la suite spectrale du théorème (3.6), ainsi que le théorème (3.7).$\diamond$

4 Démonstration du théorème 1.1

Notons par $K_G^*(X)$ la K-théorie équivariante de segal [S]. Dans [Sl], Slominska à construit un caractère de Chern $Ch : K_G^j(X) \to \mathcal{H}^j_{Br}(X, R_{\mathbb{C}})$, où $R_{\mathbb{C}}$

est le système de coéfficient définit par:

$$R_{\mathbb{C}} : \mathcal{O}(G) \to Ab$$

$$G/H \to R(H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$$

où $R(H) = K^0_H(pt)$ est l'anneau des réprésentations du groupe H. D'une part, ce caractère de Chern induit un isomorphisme

$$K^*_G(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq \mathcal{H}^*_{Br}(X, R_{\mathbb{C}}) \tag{4.1}$$

D'autre part, dans [AS] on a la décomposition suivante de la K-théorie équivariante

$$K^*_G(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq \bigoplus_{[g]} \Big(K^*(X^g) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \Big)^{G^g} \tag{4.2}$$

Pour chaque $g \in G$, l'isomorphisme de Chern ordinaire

$$Ch_{\mathbb{C}} : K^0(X^g) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq \prod_{j \geq 0} H^{2j}(X^g, \mathbb{C})$$

$$Ch_{\mathbb{C}} : K^1(X^g) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq \prod_{j \geq 0} H^{2j+1}(X^g, \mathbb{C})$$

entre les composantes à droites dans (4.2) et la proposition (3.8), induit l'isomorphisme

$$K^*_G(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq PHC_*(C^\infty(X) \rtimes G) \tag{4.3}$$

L'identification de la cohomologie de Bredon et de l'homologie cyclique est une conséquence directe de (4.1) et (4.3).

5 Remarque

Dans la démonstration précédente, nous avons choisi une approche économique basée sur la K-théorie équivariante. Dans cette section nous présentons les grandes lignes d'une autre approche, qui sera développée par la suite pour d'autres classes de groupes. En effet, notons par

$$\hat{X} = \{(x, g) \in X \times G \quad / g.x = x \quad \}$$

la sous-variété introduite par Brylinski. $\hat{X}$ est l'union disjoint des sous-variété des point fixes

$$\hat{X} = \coprod_g X^g \quad ; \quad X^g = \{x \in X \quad / g.x = x \quad \}$$

le groupe G opère sur $\hat{X}$ par l'opération $h.(x,g) = (h.x, hgh^{-1})$. Il est facile de voir que

$$H^*(\hat{X}/G, \mathbb{C}) \simeq \oplus_g H^*(X^g, \mathbb{C})^{G^g} \qquad (2)$$

ceci permet de voir l'isomorphisme établi dans la proposition (3.8), sous la forme suivante :

$$PHC_*(C^\infty(X) \rtimes G) \simeq \prod_l H^{2l+*}(\hat{X}/G, \mathbb{C}) \qquad (3)$$

Pour chaque $x \in X$, soit $G_x = \{g \quad / x.g = x\}$ le sous-groupe d'isotropie et $\underline{R}_{\mathbb{C}}$ le G-faisceaux sur X/G, où la fibre en x est $R(G_x) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, ($R(G_x)$ désigne le groupe des représentations de G_x). L'application

$$\phi : \hat{X} \to X$$

$$(x,g) \to x$$

induit une application entre les espaces quotients

$$\overline{\phi} : \hat{X}/G \to X/G$$

Considérons maintenant la suite spectrale de Leray de l'application $\overline{\phi}$ de premier terme

$$E^2_{p,q} = H^p(X/G, \underline{H}^q(\overline{\phi}^{-1}(y))) \qquad (4)$$

dans (4), $\underline{H}^q(\overline{\phi}^{-1}(y))$ désigne le faisceau sur X/G où la fibre en $y \in X/G$ est $H^q(\overline{\phi}^{-1}(y), \mathbb{C})$. Comme $\overline{\phi}^{-1}(y)$ est un ensemble fini, alors

$$H^q(\overline{\phi}^{-1}(y), \mathbb{C}) = 0 \quad , \quad q > 0. \qquad (5)$$

Notons par $< G_x >$ l'ensemble des classes de conjugaisons de G_x, de l'identification standard

$$R(G_x) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq H^0(< G_x >, \mathbb{C})$$

on déduit l'isomorphisme de faisceaux sur X/G

$$\underline{H}^0(\overline{\phi}^{-1}(y), \mathbb{C}) \simeq \underline{R}_{\mathbb{C}} \tag{6}$$

d'où l'isomorphisme

$$H^*(\hat{X}/G, \mathbb{C}) \simeq H^*(X/G, \underline{R}_{\mathbb{C}}) \tag{7}$$

de même on a

$$\prod_l H^{2l+*}(\hat{X}/G, \mathbb{C}) \simeq \prod_l H^{2l+*}(X/G, \underline{R}_{\mathbb{C}}) \tag{8}$$

de (3) et (8) on déduit l'isomorphisme

$$PHC_*(C^\infty(X) \rtimes G) \simeq \prod_l H^{2l+*}(X/G, \underline{R}_{\mathbb{C}}) \tag{9}$$

maintenant suivant les résultats de H. Honkasolo [Ho1], [Ho2] et [Ho3], on a

$$H^*_{Br}(X, R_{\mathbb{C}}) \simeq H^*(X/G, \underline{R}_{\mathbb{C}}) \tag{10}$$

de même

$$\mathcal{H}^*_{Br}(X, R_{\mathbb{C}}) \simeq \prod_l H^{2l+*}(X/G, \underline{R}_{\mathbb{C}}) \tag{11}$$

de (9) et (11), on déduit l'isomorphisme du théorème (1.1)

$$\mathcal{H}^*_{Br}(X, R_{\mathbb{C}}) \simeq PHC_*(C^\infty(X) \rtimes G) \tag{12}$$

notons enfin que l'isomorphisme (10), justifie notre choix de la définition de la cohomologie de Bredon exposé dans la section (2).

REFERENCES.

[AS] **M. F. Atiyah- G. Segal.** *On equivariant Euler characteristics* J. Geo. Ph Vol 6, n4 (1989)

[BCH]**P. Baum -A. Connes and N. Higson***Classifying spaces for proper actions and K-theory of group C^*-algebras.* Contemporary Mathematics 167 (1994).

[B] **A. Bella Baci.** *Homologie cyclique du produit croisé algébrique et groups de surfaces* A paraitre Journal of Pure and Applied Algebra (1997).

[BL] **J. P. Brasselet-A. Legrand.** *Differantial forms on singular varieties and cyclic homology.* alg-geom/9611027 (1996)

[Br] **G. E. Bredon** *Equivariant cohomology theories* LNM, 34 Springer(1967)

[C] **A. Connes .** *Non commutative geometry.* Academic Press 1995

[DW]**J. F. Davis-W. Lûck**.*Spaces over a category and assembly maps in isomorphism conjectures in K-theory and L-theory.* http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/K-theory/0131/

[FT] **B.L. Feigin-B.L. Tsygan .** Additive K-theory L.N.M 1289 (1987).

[Ho1] **H. Honkasolo** *Sheaves on fixed point sets and equivariant cohomology* Math. Scand 78 (1996) 37-55.

[Ho2] **H. Honkasolo** *Equivariant Alexander-Spanier cohomology* Math. Scand 63 (1988) 179-195.

[Ho3] **H. Honkasolo** *Equivariant Alexander-Spanier cohomology for actions of compact Lie groups.* Math. Scand 67 (1990)

[Ka] **M. Karoubi .** *Homologie cyclique et K-théorie.* Astérisque 149 (1987)

[L] **J.L. Loday .** *Cyclic Homology* Grand.Math.Xiss., Springer Verlag 1993.

[MS]**I. Moerdijk-J. A. Svensson** *The equivariant serre spectral sequence.* Proceedings of the Amer. math. Soc Vol 118 Num 1 (1993)

[MS] **I. Moerdijk-J. A. Svensson** *A Shapiro lemma for diagramm of spaces with applications to equivariant topology.* Compo. math 96 N 3 (1995).

[J] **P. Julg.** *K-théorie équivariante et produits croisés* C. R. Acad. Sc. Paris, t. 292, Série I, pp: 629-632, (1981).

[S] **G. Segal** *Equivariant K-theory* Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. Paris n34 pp:129-151(1968).

[Sl] **J. Slominska** *On the equivariant Chern homomorphism* Bulletin de l'Acad. Polonaise des sciences 24 (1976),N10, pp:909-913.

[T] **R. W. Thomason .** *Homotopy colimits in the category of small categories* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 85 (1979), 91 - 109.