Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 2
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для студентов заочного отделения
экономических специальностей

Минск
БНТУ
2011

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я7
М 54

Составители:
А.Д. Корзников, Л.Д. Матвеева, Н.А. Шавель

Рецензенты:
В.В. Карпук, В.В.Павлов

Издание содержит задания по темам «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл и его приложения», «Несобственные интегралы», «Двойной интеграл», «Дифференциальные уравнения», «Ряды». Каждое задание состоит из 30 контрольных вариантов. По всем темам приводятся примеры решения типовых задач.

Для студентов 1-го курса заочного отделения экономических специальностей БНТУ, преподавателей, ведущих практические занятия по данному курсу.

Тема 1. НЕОПРЕДЕЛЕНЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов.

2. Непосредственное интегрирование. Интегрирование заменой переменной. Интегрирование по частям.

3. Интегрирование рациональных дробей.

4. Интегрирование рациональных выражений, содержащих тригонометрические функции.

5. Интегрирование некоторых иррациональных функций.

1.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Таблица основных интегралов

Первообразной функцией для функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная которой равна данной функции, т. е.

$$F'(x) = f(x).$$

Неопределенным интегралом от непрерывной функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных функций $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F'(x) = f(x)$.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),\ \ d\left(f(x)dx\right) = f(x)dx$;
2. $\int dF(x) = F(x) + C$;
3. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \qquad (c = const)$;
4. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$;
2. $\int 1 \cdot du = \int du = u + C$;
3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$;

4. $\int e^u du = e^u + C;$

5. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C, \quad (a > 0, a \neq 1);$

6. $\int \cos u du = \sin u + C;$

7. $\int \sin u du = -\cos u + C;$

8. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$

9. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} x + C;$

10. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{u}{a} + C = -\dfrac{1}{a} \operatorname{arcctg} \dfrac{u}{a} + C, \ a \neq 0;$

11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + C = -\arccos \dfrac{u}{a} + C;$

12. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{u - a}{u + a} \right| + C;$

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C;$

14. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \dfrac{u}{2} \right| + C.$

1.2. Основные методы интегрирования

1. *Метод непосредственного интегрирования* основан на свойствах 3, 4 и таблице неопределенных интегралов.

Пример 1.1. Вычислить $\int \left(3x^4 - 5\cos x + \dfrac{2}{3x} - \dfrac{4}{x^2 + 8} + \dfrac{10}{\sqrt{x^2 - 4}} \right) dx$.

Решение. Применяя свойства 3, 4 и таблицу, получаем:

$$\int \left(3x^4 - 5\cos x + \frac{2}{3x} - \frac{4}{x^2 + 8} + \frac{10}{\sqrt{x^2 - 4}} \right) dx =$$

$$= 3\int x^4 dx - 5\int \cos x dx + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{dx}{x^2 + 8} + 10\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}} =$$

$$= 3\frac{x^5}{5} - 5\sin x + \frac{2}{3}\ln|x| - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{2\sqrt{2}} + 10\ln\left| x + \sqrt{x^2 - 4} \right| + C =$$

$$= 3\frac{x^5}{5} - 5\sin x + \frac{2}{3}\ln|x| - \sqrt{2}\ln\frac{x}{2\sqrt{2}} + 10\ln\left| x + \sqrt{x^2 - 4} \right| + C.$$

2. М*етод подстановки или замены переменных* основан на формулах:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt, \quad (x=\varphi(t))$$

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \int f(t))dt, \ (t=\varphi(x)).$$

Пример 1.2. Вычислить $\int \cos(6-7x)dx$.

Положим $6-7x=t$. Тогда $dt=-7dx,\ dx=-\frac{1}{7}dt$. Сделаем замену

$$\int \cos(6-7x)dx = \int \cos t\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)dt = -\frac{1}{7}\int \cos t dt =$$

$$= -\frac{1}{7}\sin t + C = -\frac{1}{7}\sin(6-7x)+C.$$

Пример 1.3. Вычислить $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x+2}}$.

Положим $\sqrt{4x+2}=t$. Тогда $x=\frac{t^2-2}{4},\ dx=\frac{t}{2}dt$. Сделаем замену

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x+2}} = \int \frac{\frac{t}{2}dt}{\frac{t^2-2}{4}\cdot t} = 2\int \frac{dt}{t^2-2} = 2\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + C =$$

$$= 2\ln\left|\frac{\sqrt{4x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{4x+2}+\sqrt{2}}\right| + C.$$

3. *Интегрирование по частям* выполняется по формуле

$$\int udv = u\cdot v - \int vdu,$$

полученной из равенства $\int d(u\cdot v) = \int (udv+vdu)$.

Пример 1.4. Вычислить $\int x^2\cdot 4^x dx$.

$$\int x^2\cdot 4^x dx = \left|\begin{matrix} u=x^2,\ dv=4^x dx \\ du=2xdx,\ v=\frac{4^x}{\ln 4}\end{matrix}\right| = x^2\cdot\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2}{\ln 4}\int x\cdot 4^x dx = \left|\begin{matrix} u=x,\ dv=4^x dx \\ du=dx,\ v=\frac{4^x}{\ln 4}\end{matrix}\right| =$$

$$= x^2\cdot\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2}{\ln 4}\left(x\cdot\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 4}\int 4^x dx\right) = \frac{x^2\cdot 4^x}{\ln 4} - \frac{2x\cdot 4^x}{\ln^2 4} + \frac{2\cdot 4^x}{\ln^3 4} + C.$$

Пример 1.5. Вычислить $\int x\cdot\ln^2 xdx$.

$$\int x\cdot\ln^2 xdx=\left|\begin{array}{l}u=\ln^2 x,\ dv=xdx\\ du=2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}dx,\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right|=\ln^2 x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\ln x\cdot xdx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}u=\ln x,\ dv=xdx\\ du=\dfrac{1}{x}dx,\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right|=\ln^2 x\cdot\frac{x^2}{2}-\left(\ln x\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int xdx\right)=$$

$$=\frac{\ln^2 x\cdot x^2}{2}-\ln x\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{4}+C.$$

Методы интегрирования основных классов функций (дробно-рациональных, тригонометрических, иррациональных) можно найти в литературе [1], [2].

Задание 1

Найти неопределенные интегралы.

1.1. а) $\int\dfrac{\cos xdx}{\sqrt{3+\sin x}}$; **б)** $\int\dfrac{(3x-1)dx}{x^2-6x+10}$; **в)** $\int x^3\cdot\ln xdx$;

г) $\int\dfrac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}$; **д)** $\int\mathrm{tg}^3 2xdx$; **е)** $\int\dfrac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$.

1.2. а) $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{2-x^2}}$; **б)** $\int\dfrac{(x+2)dx}{8x^2+x+1}$; **в)** $\int\ln(5+x^2)dx$;

г) $\int\dfrac{x^3+3}{x^3-x^2-6x}dx$; **д)** $\int\cos^5 4xdx$; **е)** $\int\dfrac{\sqrt{x}dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$.

1.3. а) $\int\dfrac{e^xdx}{1+e^{2x}}$; **б)** $\int\dfrac{3x-4}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$; **в)** $\int x^2\cdot\sin 5xdx$;

г) $\int\dfrac{2x^2+x+1}{x^3+x}dx$; **д)** $\int\dfrac{dx}{5\sin x+\cos x-1}$; **е)** $\int\dfrac{1}{x-2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}dx$.

1.4. а) $\int\dfrac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; **б)** $\int\dfrac{(x+1)dx}{4x^2-12x+13}$; **в)** $\int x^3\cdot\mathrm{arctg}\,xdx$;

г) $\int\dfrac{(5x-8)dx}{x^3-4x^2+4x}$; **д)** $\int\cos^6 xdx$; **е)** $\int\dfrac{\sqrt{1-x^2}dx}{x^2}$.

1.5. а) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$; **б)** $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$; **в)** $\int (2x+3)\cdot e^{5x}dx$;

г) $\int \frac{(x-2)dx}{4x^2+4x+3}$; **д)** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$; **е)** $\int \mathrm{ctg}^3 3xdx$.

1.6. а) $\int \frac{xdx}{3+2x^4}$; **б)** $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$; **в)** $\int \arcsin 5xdx$;

г) $\int \frac{(x+5)^2dx}{x^2+4x+2}$; **д)** $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}dx$;**е)** $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}}$.

1.7. а) $\int \frac{\ln x-2}{x}dx$; **б)** $\int \frac{(4x+3)dx}{1-2x-x^2}$; **в)** $\int (1+x)\cdot 3^{-2x}dx$;

г) $\int \frac{2x^3-1}{x^3-5x^2+6x}dx$; **д)** $\int \cos^3 x\cdot \sin^2 xdx$; **е)** $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx$.

1.8. а) $\int \frac{dx}{(3+\mathrm{tg}\,x)\cdot\cos^2 x}$; **б)** $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-2x-5}}dx$; **в)** $\int (4x-7)\cdot\sin 7xdx$;

г) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$; **д)** $\int \cos 8x\cdot\sin 4xdx$; **е)** $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$.

1.9. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; **б)** $\int \frac{3x-1}{x^2+x+1}dx$; **в)** $\int (x^2+4)\cdot e^{5x}dx$;

г) $\int \frac{2x-1}{x^3-5x^2+6x}dx$; **д)** $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$; **е)** $\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[6]{3x+4}}dx$.

1.10. а) $\int \frac{1+\sqrt{\mathrm{ctg}\,x}}{\sin^2 x}dx$; **б)** $\int \frac{(x-4)dx}{x^2+4x+29}$; **в)** $\int \ln^2 2xdx$;

г) $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$; **д)** $\int \cos 4x\cdot\sin 10xdx$; **е)** $\int (x-1)\sqrt{x+1}dx$.

1.11. а) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; **б)** $\int \frac{(3x+5)dx}{x^2-4x+2}$; **в)** $\int (2x-8)\cdot 6^{5x}dx$;

г) $\int \frac{x^3dx}{x^3-27}$; **д)** $\int \mathrm{ctg}^3 4xdx$; **е)** $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$.

1.12. а) $\int \frac{2-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$; **б)** $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$; **в)** $\int (x^2+3)\cdot e^{-2x}dx$;

г) $\int \frac{(3x+5)dx}{(x^2-3x+2)^2}$; д) $\int \sin^5 2x dx$; е) $\int \sqrt[4]{x^3}(1+\sqrt{x})^2 dx$.

1.13. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2-5x}}$; б) $\int \frac{x+1}{\sqrt{3+4x-4x^2}} dx$; в) $\int (x-2)\cdot \ln 5x dx$;

г) $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x} dx$; д) $\int \frac{dx}{2\sin x+5\cos x}$; е) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx$.

1.14. а) $\int (e^{6x}+e^{-7x}) dx$; б) $\int \frac{2x+3}{x^2-4x+7} dx$; в) $\int \arcsin\frac{x}{3} dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16x+15}}$; д) $\int \frac{dx}{1+8\cos^2 x}$; е) $\int x\cdot\sqrt{x-4} dx$.

1.15. а) $\int \frac{\sqrt{\ln x-2}}{4x} dx$; б) $\int \frac{xdx}{9+8x-x^2}$; в) $\int x^2\cdot\cos 8x dx$;

г) $\int \frac{x-4}{x^2-2x+1} dx$; д) $\int \cos^4 x\cdot\sin^6 x dx$; е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+5}}$.

1.16. а) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{1+x}}$; б) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x}} dx$; в) $\int x\cdot \operatorname{arctg} 2x dx$;

г) $\int \frac{dx}{2-5\sin x}$; д) $\int \frac{x+1}{x^3+8} dx$; е) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{2x-1}}$.

1.17. а) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$; б) $\int \frac{2x+3}{x^2-6x+1} dx$; в) $\int (x-5)\cdot 7^{-2x} dx$;

г) $\int \frac{7x-1}{x^3+1} dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-4\sqrt{x}}$.

1.18. а) $\int e^{\sin 2x}\cdot\cos 2x dx$; б) $\int \frac{x-5}{x^2-4x+1} dx$; в) $\int \operatorname{arctg} 3x dx$;

г) $\int \frac{x-4}{x^3-2x^2+x} dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$; е) $\int \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}$.

1.19. а) $\int \cos^3 x\cdot\sin x dx$; б) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2-4x+1}} dx$; в) $\int x^2\cdot\operatorname{arctg} x dx$;

г) $\int \frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)} dx$; д) $\int \frac{dx}{1+5\sin x}$; е) $\int \sqrt{4-x^2} dx$.

1.20. а) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-4x^2}}$; в) $\int x^3\cdot \ln 5x dx$;

г) $\int \frac{7x}{x^3-2x^2+5x}dx$; д) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x+6\sin x-1}$;е) $\int \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}dx$.

1.21. а) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{7x+2}{x^2-x+3}dx$; в) $\int e^{10x}\cdot(2x-3)dx$;

г) $\int \frac{x^5}{1+x^3}dx$; д) $\int \operatorname{tg}^4 x dx$; е) $\int \frac{dx}{(x+1)^{2/3}-(x+1)^{1/2}}$

1.22. а) $\int \frac{2xdx}{\sqrt{4-x^4}}$; б) $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$; в) $\int (x-2)\cdot \ln^2 4x dx$;

г) $\int \frac{x^5+x^4-2}{x^4-2x^2+1}dx$; д) $\int \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)^2 dx$; е) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+5}}$.

1.23. а) $\int \frac{\cos\ln x dx}{4x}$; б) $\int \frac{6x-3}{2x^2+4x-1}dx$; в) $\int \arcsin\frac{x}{5}dx$;

г) $\int \frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2}$; д) $\int \sin^5 x\cdot\cos^3 x dx$; е) $\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x^2}dx$.

1.24. а) $\int \frac{dx}{(1+\operatorname{tg} x)\cdot\cos^2 x}$; б) $\int \frac{4x-3}{x^2+x+1}dx$; в) $\int x^2\cdot\sin(5x-2)dx$;

г) $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$; д) $\int \sin^4 10x dx$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$.

1.25. а) $\int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx$; б) $\int \frac{x+5}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$; в) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$;

г) $\int \frac{5xdx}{(x-2)^2\cdot(x^2+1)}$; д) $\int \frac{dx}{\sin^2 x-5\sin x\cdot\cos x}$; е) $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$.

1.26. а) $\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}dx$; б) $\int \frac{(2x+1)dx}{x^2-2x+7}$; в) $\int x\cdot\arcsin x dx$;

г) $\int \frac{x^2+2}{x^4-16}dx$; д) $\int \sin 8x\cdot\cos 10x dx$; е) $\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$.

1.27. а) $\int \frac{e^{-\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$; б) $\int \frac{x-1}{x^2+6x+8}dx$; в) $\int x^3\cdot\operatorname{arctg} x dx$;

г) $\int\frac{(x+2)dx}{x^3-2x^2+2x}$; **д)** $\int\mathrm{tg}^3 2x dx$; **е)** $\int\frac{x+\sqrt[3]{2x-1}}{\sqrt{2x-1}}dx$.

1.28. а) $\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}dx$; **б)** $\int\frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; **в)** $\int\sqrt{x}\ln 2x dx$;

г) $\int\frac{x^2-2}{(x+4)(x-1)^2}dx$; **д)** $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos x}}dx$; **е)** $\int\frac{\sqrt[6]{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}-1}dx$.

1.29. а) $\int\frac{dx}{x\sqrt{6-\ln^2 x}}$; **б)** $\int\frac{(3x+4)dx}{\sqrt{x^2-4x+8}}$; **в)** $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$;

г) $\int\frac{xdx}{x^3-3x+2}$; **д)** $\int\frac{dx}{2+3\cos x}$; **е)** $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-2x}}$.

1.30. а) $\int\frac{\sin 3x dx}{\sqrt{7-5\cos 3x}}$; **б)** $\int\frac{(x-2)dx}{x^2+2x+5}$; **в)** $\int e^{5x}\cdot(x^2+3)dx$;

г) $\int\frac{x^2dx}{(x^2-4)(x^2+4)}$; **д)** $\int\cos^2 3x\cdot\sin^4 3x dx$; **е)** $\int\frac{(x-1)dx}{(1+\sqrt[3]{x-2})}$.

Тема 2. ОПРЕДЕЛЕНЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется сумма $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$ $(k = \overline{1, n})$, причем $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Если существует предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$ $\left(\lambda = \max\left\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\right\}\right)$, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1}; x_k]$ и выбора промежуточных точек ξ_k, то функция $f(x)$ называется **интегрируемой** на этом отрезке, а сам предел – **определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k .$$

Если $f(x)$ кусочно-непрерывна на $[a; b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Пусть $F(x)$ – одна из первообразных непрерывной на $[a; b]$ функции $f(x)$, тогда справедлива **формула Ньютона–Лейбница**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{2.1}$$

Для любых a, b, c $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на $[a; b]$, то имеет место **формула интегрирования по частям:**

$$\int_a^b u dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v du . \tag{2.2}$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на $[\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt , \tag{2.3}$$

называемая **формулой замены переменной** в определенном интеграле.

Пример 2.1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{e}^{e^9} \frac{\sqrt{1+5\ln x}}{2x} dx$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \cos 2x dx$.

Решение.

а) Введем новую переменную интегрирования $\sqrt{4+5\ln x} = t$. Тогда $x = e^{\frac{t^2-4}{5}}$, $dx = e^{\frac{t^2-4}{5}} \cdot \frac{2}{5} t dt$. Найдем пределы интегрирования по переменной t. Из формулы $\sqrt{4+5\ln x} = t$ при $x = e$, следует, что $t = 3$, т. е. $\alpha = 3$; при $x = e^9$, следует, что $t = 7$, т.е. $\beta = 7$. Тогда по формуле (2.3) получаем

$$\int\limits_{e}^{e^9} \frac{\sqrt{1+5\ln x}}{2x} dx = \int\limits_{3}^{7} \frac{t}{2 \cdot e^{\frac{t^2-4}{5}}} \cdot e^{\frac{t^2-4}{5}} \cdot \frac{2}{5} t\, dt = \frac{1}{5} \int\limits_{3}^{7} t^2 dt = \frac{1}{5} \cdot \frac{t^3}{3} \Bigg|_3^7 = \frac{316}{15}.$$

б) Применим интегрирование по частям:

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \cos 2x dx = \left| \begin{array}{c} u = x,\ du = dx, \\ dv = \cos 2x dx,\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} x \cdot \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi - 2}{8}.$$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0\ \ \forall x \in [a; b]$), прямыми $x = a,\ x = b$ и осью Ox (рис. 1), вычисляется по формуле (2.4).

$$S = \int\limits_{a}^{b} f(x) dx. \tag{2.4}$$

Если $f(x) \leq 0,\ \forall x \in [a; b]$, то $S = -\int\limits_{a}^{b} f(x) dx$.

Площадь плоской фигуры, изображенной на рис. 2 (здесь $f_1(x) \leq f_2(x),\ \forall x \in [a; b]$), вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_{a}^{b} (f_2(x) - f_1(x)) dx. \tag{2.5}$$

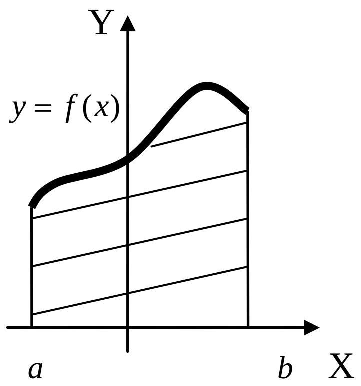

Рис. 1

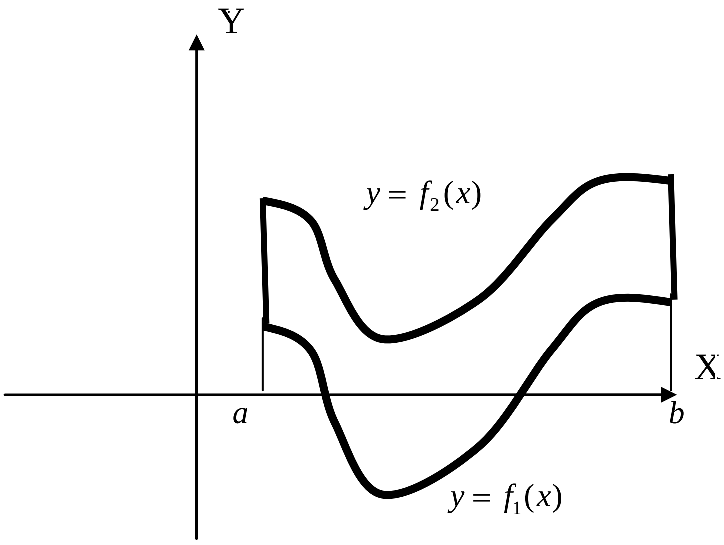

Рис. 2

Пример 2.3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 6x + 10$, $y = 6x - x^2$, $x = -1$.

Решение. Даны уравнения парабол и прямой. Параболы построим, приведя их уравнения к виду $y = (x-3)^2 + 1$ и $y = -(x-3)^2 + 9$. Проведя прямую $x = -1$, определим, площадь какой фигуры требуется вычислить (рис. 3). Ясно, что нижний предел интегрирования в этой формуле равен -1. Верхним пределом интегрирования будет являться абсцисса одной из точек пересечения парабол, которую найдем, решая систему

$$\left.\begin{array}{r} y = x^2 - 6x + 10; \\ y = 6x - x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 6x - x^2 = x^2 - 6x + 10 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Корень $x_1 = 1$ последнего уравнения и есть абсцисса точки пересечения (второй корень $x_2 = 5$).

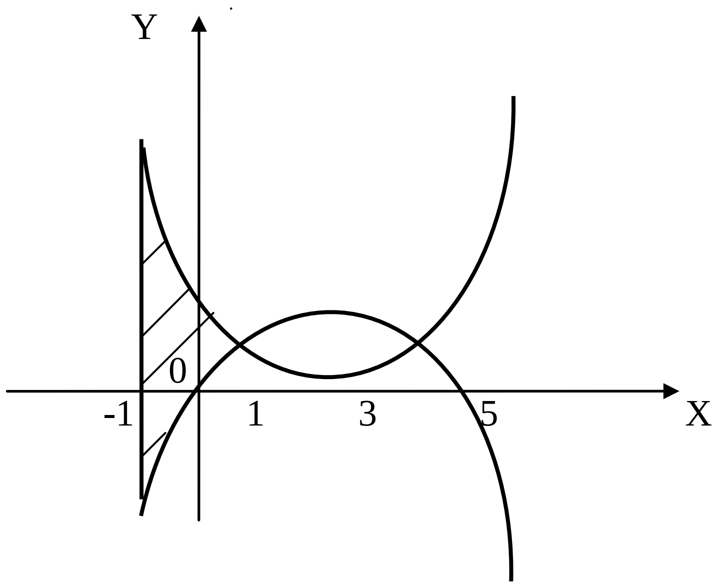

Рис. 3

Имеем

$$S=\int_{-1}^{1}((x^2-6x+10))-(6x-x^2))dx=\int_{-1}^{1}(2x^2-12x+10)dx=$$

$$=2\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+5x\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{64}{3}.$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции, которая ограничена графиком функции $y=f(x)$, прямыми $x=a,\ x=b$ и осью *Ox* вычисляется по формуле

$$V_{Ox}=\pi\int_a^b f^2(x)dx. \tag{2.6}$$

Если фигура, ограниченная графиком двух функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ $(0\le f_1(x)\le f_2(x))\ \forall x\in[a,b]$ и прямыми $x=a,\ x=b$, вращается вокруг оси *Ox*, то объем тела вращения

$$V_{Ox}=\pi\int_a^b ({f_2}^2(x)-f_1^2(x))dx. \tag{2.7}$$

Пример 2.4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной линиями $x^2+y^2=4,\ x+y=2$.

Решение. Построив окружность $x^2+y^2=4$ и прямую $x+y=2$, получим круговой сегмент (рис. 4). При вращении его вокруг оси *Ox* образуется тело, объем V_{Ox} которого вычисляется по формуле (2.7), так как этот сегмент ограничен графиком двух функций $y=f_1(x)=2-x$ и $y=f_2(x)=\sqrt{4-x^2}$, причем $f_1(x)\le f_2(x)$ $\forall x\in[0,\,2]$. Таким образом,

$$V_{Ox}=\pi\int_0^2\left((\sqrt{4-x^2})^2-(2-x)^2\right)dx=\pi\int_0^2(4x-2x^2)dx=\pi\left(2x^2-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{8\pi}{3}.$$

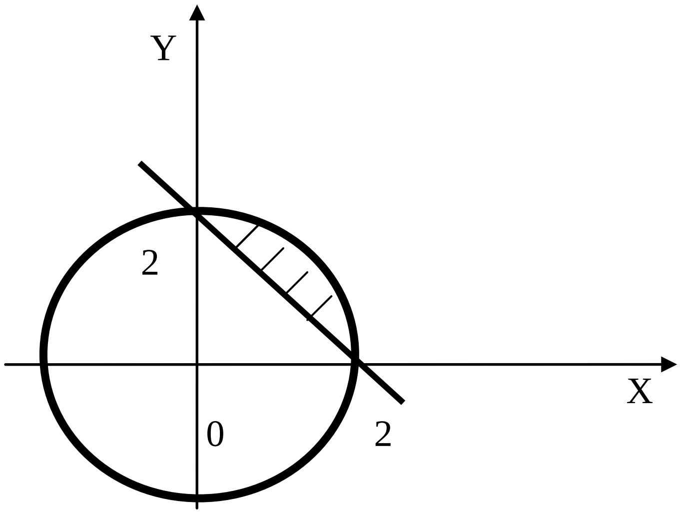

Рис. 4

Если плоская кривая задана уравнением $y=f(x)$, то длина ее дуги от точки A с абсциссой a до точки B с абсциссой b вычисляется по формуле

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \qquad (2.8)$$

Если кривая задана параметрически:

$$\begin{cases} x=\varphi(t);\\ y=\psi(t),\end{cases}$$

где $t\in[t_1;\ t_2]$ ($t_1,\ t_2$ значения параметра t, соответствующие концам рассматриваемой дуги), то длина дуги определяется формулой

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt. \qquad (2.9)$$

Пример 2.5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями:
а) $y=\ln(1-x^2)$ от начала координат до точки $(0{,}5;\ \ln 0{,}75)$;

б) $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t); \\ y = 2(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ при $t \in [0;\, \pi]$.

Решение. а) Находим $y' = \dfrac{-2x}{1-x^2}$, $1 + (y')^2 = 1 + \left(\dfrac{-2x}{1-x^2}\right)^2 = \left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2$.

В соответствии с формулой (2.8) (полагая в ней $a = 0,\ b = 0{,}5$) имеем:

$$l = \int_0^{0,5} \sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2}\, dx = \int_0^{0,5} \frac{1+x^2}{1-x^2}\, dx = -2\int_0^{0,5} \frac{dx}{x^2-1} - \int_0^{0,5} dx =$$

$$= -\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_0^{0,5} - x\Big|_0^{0,5} = \ln 3 - 0{,}5.$$

б) Вычисляем

$$x'(t) = 2(-\sin t + \sin t + t\cos t) = 2\cos t,$$

$$y'(t) = 2(\cos t - \cos t + t\sin t) = 2t\sin t,$$

$$\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 = 4t^2\cos^2 t + 4t^2\sin^2 t = 4t^2.$$

Согласно формуле (2.9) имеем

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{4t^2}\, dt = 2\int_0^{\pi} t\,dt = t^2\Big|_0^{\pi} = \pi^2.$$

Задание 2

2.1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2;\ y = 3 - x$.

2.2. Найти длину дуги линии $y = 2\cos^3 t;\ y = 2\sin^3 t$.

2.3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x + 1;\ y^2 = 9 - x$.

2.4. Найти длину дуги линии $y^2 = (x+1)^3$, отсеченной прямой $x = 4$.

2.5. Найти объем тела, полученного вращением фигуры Ф: $y^2 = 4 - x,\ x = 0$ вокруг оси Ox.

2.6. Найти площадь фигуры, образованной линиями $y = \dfrac{1}{1+x^2};\ y = \dfrac{x^2}{2}$.

2.7. Найти длину дуги линии $y = 2(\cos t + t\sin t);\ y = 2(\sin t - t\cos t)\ (0 \le t \le \pi)$.

2.8. Найти объем тела, полученного вращением фигуры Ф: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2},\ x = 0,\ y = 0$ вокруг оси Ox.

2.9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^3;\ x = 0,\ y = 4$.

2.10. Найти длину дуги линии $y = 1 - \ln\cos x\ \left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}\right)$.

2.11. Найти объем тела, полученного вращением фигуры Ф: $y = \sin x;\ y = 0$ $(0 \le x \le \pi)$ вокруг оси *Ox*.

2.12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - \frac{x^2}{2};\ x + y = 2$.

2.13. Найти длину дуги линии $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ $\left(0 \le x \le 2\right)$.

2.14. Найти объем тела, полученного вращением фигуры Ф: $y = x^2;\ 8x = y^2$ вокруг оси *Oy*.

2.15. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x - x^2;\ y = 0$.

2.16. Найти длину дуги линии $y^2 = x^3$ от точки *A*(0; 0) до точки *B*(4; 8).

2.17. Найти объем тела, полученного вращением фигуры Ф: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ вокруг оси *Ox*.

2.18. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $2y = x^2;\ 2x + 2y - 3 = 0$.

2.19. Найти длину дуги линии $x = \sqrt{3}t^2,\ y = t - t^3$ (петля).

2.20. Найти объем тела, полученного вращением фигуры Ф: $y = e^x,\ x = 0,\ y = 0,\ x = 1$ вокруг оси *Ox*.

2.21. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3,\ x = 0,\ y = 8$.

2.22. Найти длину дуги линии $y = \ln \sin x$ $\left(\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$.

2.23. Найти объем тела, полученного вращением фигуры Ф: $y^2 = \frac{4x}{3},\ x = 3$ вокруг оси *Ox*.

2.24. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 8,\ y = x^2$.

2.25. Найти длину дуги линии $y = 7(t - \sin t);\ y = 7(1 - \cos t), (2\pi \le t \le 4\pi)$.

2.26. Найти объем тела, полученного вращением фигуры Ф: $y = 2x - x^2,\ y = 0$ вокруг оси *Ox*.

2.27. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x \cdot y = 4,\ 2x + y - 6 = 0$.

2.28. Найти длину дуги линии $x = 5\cos^2 t,\ y = 5\sin^2 t,$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$.

2.29. Найти объем тела, полученного вращением фигуры Ф: $y = \sqrt{x},\ y = x$ вокруг оси *Ox*.

2.30. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 = 4 + y,\ y = 2$.

Тема 3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a; +\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a; b] \subset [a; +\infty)$. Тогда $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ называется **несобственным интегралом от функции** $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ и обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Таким образом

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{3.1}$$

Аналогично определяются интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{3.2}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx. \tag{3.3}$$

(c – любая точка интервала $(-\infty; +\infty)$, чаще $c = 0$), где $a \to -\infty,\ b \to +\infty$ независимо друг от друга.

Если приведенные пределы существуют и конечны, то соответствующие интегралы называют **сходящимися**. В противном случае интегралы называются **расходящимися.**

Признак сравнения. Если $0 \le f(x) \le \varphi(x)\ \forall x \in [a; +\infty)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ – расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)dx$.

Пример 3.1. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\text{а)}\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(1-x)^6}; \qquad \text{б)}\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{8+2x^2+4x}.$$

Решение.

а) Воспользуемся формулой (3.1):

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1-x)^6}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{(1-x)^6}=-\lim_{b\to+\infty}\int_0^b(1-x)^{-6}d(1-x)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{1}{5(1-x)^5}\right|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{5(1-b)^5}-\frac{1}{5}\right)=-\frac{1}{5}.$$

б) Согласно формуле (3.3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{8+2x^2+4x}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{2(x^2+2x+4)}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{2(x^2+2x+4)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+3}+\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+3}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left.\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right|_a^0+\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right|_0^b=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{a+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b+1}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Задание 3

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

3.1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{16x^4+1}$.

3.2. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{16xdx}{16x^4-1}$.

3.3. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$.

3.4. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}}$.

3.5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$.

3.6. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^2}}$.

3.7. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt[4]{(18+x^2)^5}}$.

3.8. $\displaystyle\int_4^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$.

3.9. $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{\pi(x^2+4x+5)}$.

3.10. $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+4x+5}$.

3.11. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}2x}{1+4x^2}dx$.

3.12. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\frac{16dx}{4x^2+4x+5}$.

3.13. $\int_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{4x^2+4x+5}$.

3.14. $\int_{0}^{+\infty} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}$.

3.15. $\int_{0}^{+\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4}dx$.

3.16. $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 3x}}{1+9x^2}dx$.

3.17. $\int_{1}^{+\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}$.

3.18. $\int_{0}^{+\infty} x\cdot e^{-3x}dx$.

3.19. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{x^2-4x}$.

3.20. $\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{dx}{(1+9x^2)\cdot \operatorname{arctg}^2 3x}$.

3.21. $\int_{1}^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^6}$.

3.22. $\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot e^{x}dx$.

3.23. $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{x^3+1}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$.

3.24. $\int_{0}^{+\infty} e^{-5x}\cdot 2xdx$.

3.25. $\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln^3 x}{4x}dx$.

3.26. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

3.27. $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$.

3.28. $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+9}$.

3.29. $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

3.30. $\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

Тема 4. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть функция $f(x,y)$ определена в ограниченной замкнутой области D плоскости xOy. Разобьем область D произвольным образом на n элементарных областей $S_1, S_2, ..., S_n$, имеющих площади $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ и диаметры $d_1, d_2, ..., d_n$ (диаметром области называется наибольшее из расстояний между двумя точками границы этой области). Выберем в каждой элементарной области ΔS_k произвольную точку $P_k(\xi_k, \eta_k)$.

Интегральной суммой для функции $f(x,y)$ по области D называется сумма вида $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k$.

Если при $\max d_k \to 0$ интегральная сумма имеет определенный конечный предел $I = \lim\limits_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k$, не зависящий от способа разбиения D на элементарные области и от выбора точек P_k в пределах каждой из них, то этот предел называется **двойным интегралом** от функции $f(x,y)$ в области D и обозначается следующим образом:

$$I = \iint\limits_D f(x,y)ds = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k .$$

Если $f(x,y) > 0$ в области D, то двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)ds$ равен **объему цилиндрического тела**, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$, сбоку цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, и снизу областью D, принадлежащей плоскости xOy.

Основные свойства двойного интеграла

1. $\iint\limits_D [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]ds = \iint\limits_D f_1(x,y)ds \pm \iint\limits_D f_2(x,y)ds$.

2. $\iint\limits_D cf(x,y)ds = c\iint\limits_D f(x,y)ds$.

3. $\iint\limits_D ds = S_D$, где S_D – площадь области интегрирования D.

4. Если область интегрирования D разбита на две области D_1 и D_2, то

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_{D_1} f(x,y)ds + \iint\limits_{D_2} f(x,y)ds .$$

5. Оценка двойного интеграла. Если $m \le f(x,y) \le M$, то

$$mS_D \le \iint\limits_D f(x,y)ds \le MS_D .$$

Правила вычисления двойных интегралов

Различают два основных вида области интегрирования.

1. Область интегрирования D ограничена слева и справа прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, а снизу и сверху – непрерывными кривыми $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x) \le \varphi_2(x))$, каждая из которых пересекается вертикальной прямой $x = c$ $(a \le c \le b)$ только в одной точке (рис. 5).

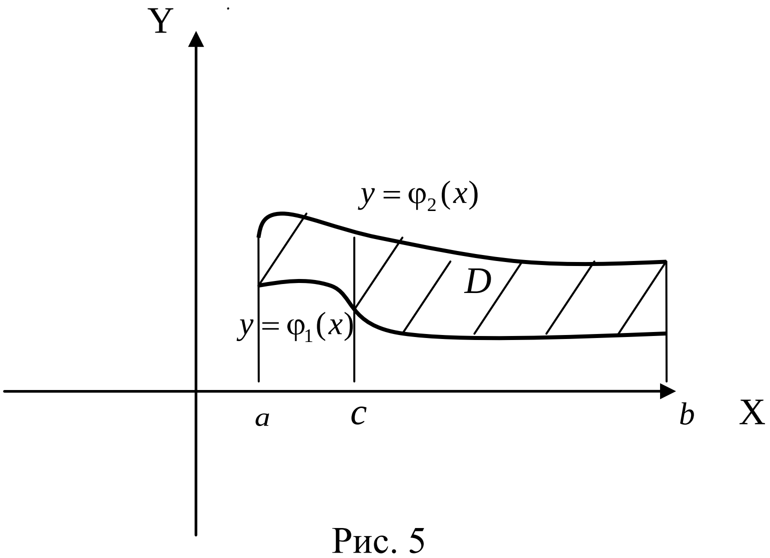

Рис. 5

Для такой области двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy ,$$

причем сначала вычисляется внутренний интеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, в котором x считается постоянным.

2. Область интегрирования D ограничена снизу и сверху прямыми $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, а слева и справа – непрерывными кривыми $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ $(\psi_1(y) \le \psi_2(y))$, каждая из которых пересекается горизонтальной прямой $y = \beta$ $(c \le \beta \le d)$ только в одной точке (рис. 6).

Для такой области двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)dx,$$

причем сначала вычисляется внутренний интеграл $\int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)dx$, в котором y считается постоянным.

Правые части указанных формул называются **повторными** (или **двукратными**) интегралами

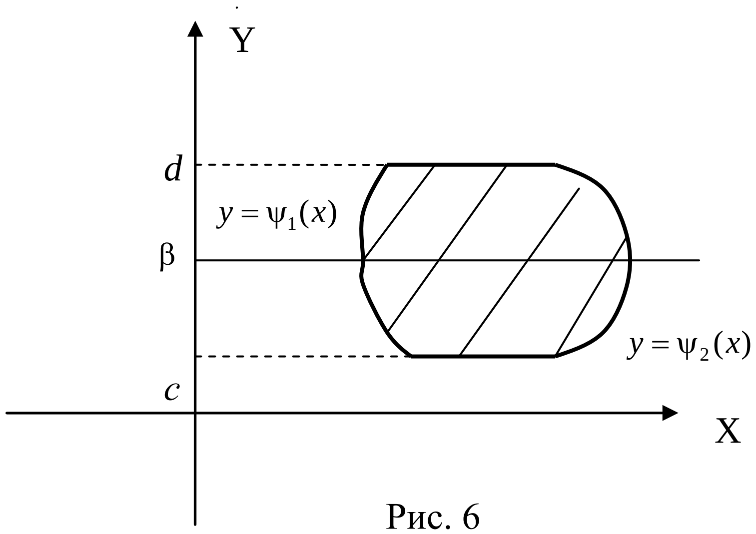

Рис. 6

В более общем случае область интегрирования путем разбиения на части сводится к основным областям.

Пример 1. Вычислить $\iint\limits_D (2x + \sin y)dxdy$, где область D ограничена линиями $x = 0,\ y = 0,\ 4x + 4y - \pi = 0$.

Решение. Построим область D. Из рисунка видно, что она принадлежит к первому виду.

Находим

$$\iint\limits_D (2x + \sin y)dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_0^{\frac{\pi}{4} - x} (2x + \sin y)dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(y \cdot 2x - \cos y\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}-x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot 2x - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 1\right] dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{2} x - 2x^2 - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 1\right) dx =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} x^2 - \frac{2x^3}{3} + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^3}{64} + \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

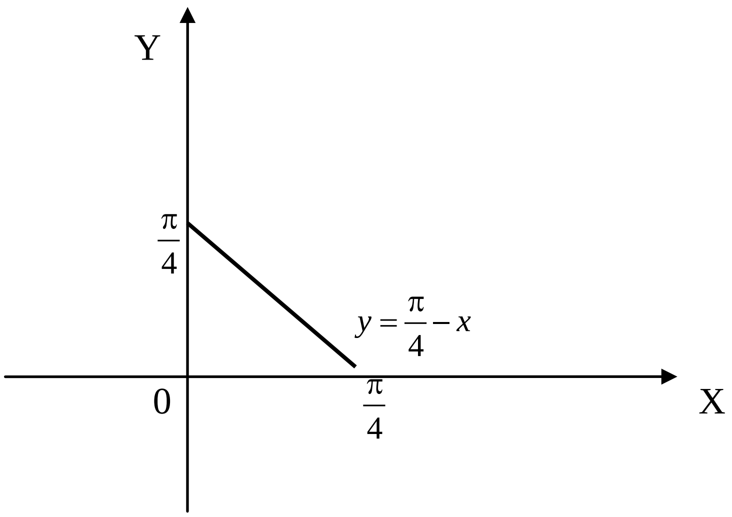

Рис. 7

Пример 2. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy$.

Решение. Область интегрирования D расположена между прямыми $x = 0,\ x = 1$, ограничена снизу параболой $y = x^2$, сверху прямой $y = 2 - x$ (рис. 8).

Так как правый участок границы области D задан двумя линиями, то прямая $y = 1$ разбивает ее на области $D_1: 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{y}$ и $D_2: 1 \le y \le 2,\ 0 \le x \le 2 - y$.

В результате получаем

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx.$$

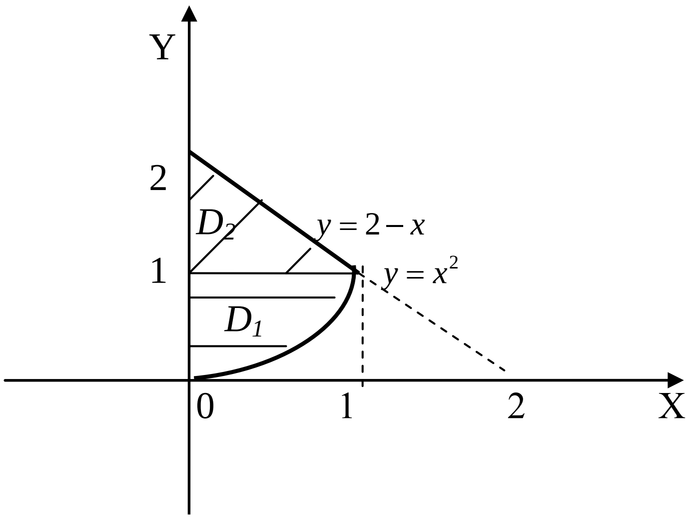

Рис. 8

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x,\ y = x$.

Решение. По уравнениям границы области D строим данную фигуру (рис.9). На основании свойства 3 двойных интегралов искомая площадь

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2-2x}^{x} dy = \int\limits_0^3 (x - x^2 + 2x)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^2}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{9}{2}.$$

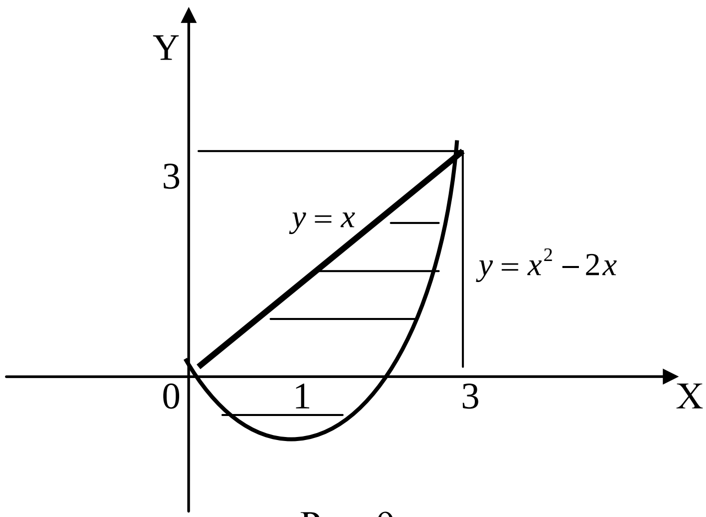

Рис. 9

Задание 4

Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если область D задана указанными линиями.

4.1. $D:\ y=\sqrt{4-x^2},\ y=\sqrt{3x},\ x\ge 0$.

4.2. $D:\ x^2=2y,\ 5x-2y-6=0$.

4.3. $D:\ x=\sqrt{8-y^2},\ y\ge 0,\ y=x$.

4.4. $D:\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ y\le 1,\ y=\ln x$.

4.5. $D:\ x^2=2-y,\ x+y=0$.

4.6. $D:\ y=\sqrt{2-x^2},\ y=x^2$.

4.7. $D:\ y=x^2-2,\ y=x$.

4.8. $D:\ x\ge 0,\ y\ge 1,\ y\le 3,\ y=x$.

4.9. $D:\ y^2=2x,\ x^2=2y,\ x\le 1$.

4.10. $D:\ x\ge 0,\ y\ge x,\ y=\sqrt{9-x^2}$.

4.11. $D:\ y^2=2-x,\ y=x$.

4.12. $D:\ x=\sqrt{2-y^2},\ x=y^2,\ y\ge 0$.

4.13. $D:\ y\ge 0,\ x+2y-12=0,\ y=\dfrac{10}{x}$.

4.14. $D:\ x\le 0,\ y\ge 1,\ y\le 3,\ y=-x$.

4.15. $D:\ y=0,\ ,y\ge x,\ y=-\sqrt{2-x^2}$.

4.16. $D:\ y\ge 0,\ x=\sqrt{y},\ y=\sqrt{8-x^2}$.

4.17. $D:\ y=-x,\ y^2=x+3$.

4.18. $D:\ y=\sqrt{4-x^2},\ x\ge 0,\ x=1,\ y=0$.

4.19. $D: \ x=-1, \ x=-2, \ y \geq 0, \ y=x^2$.

4.20. $D: \ y \leq 0, \ x^2=-y, \ x=\sqrt{1-y^2}$.

4.21. $D: \ y \geq 0, \ y \leq 1, \ y=x, \ x=-\sqrt{4-y^2}$.

4.22. $D: \ x \leq 0, \ y=1, \ y=4, \ y=-x$.

4.23. $D: \ y=3-x^2, \ y=-x$.

4.24. $D: \ x=0, \ x=-2, \ y \geq 0, \ y=x^2+4$.

4.25. $D: \ x=0, \ y=0, \ y=1, \ (x-3)^2+y^2=1$.

4.26. $D: \ x=\sqrt{9-y^2}, \ y=x, \ y \geq 0$.

4.27. $D: \ x+2y-6=0, \ y=x, \ y \geq 0$.

4.28. $D: \ y=-x, \ 3x+y=3, \ y=3$.

4.29. $D: \ x \geq 0, \ y=1, \ y=-1, \ y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

4.30. $D: \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ y=1, \ x=\sqrt{4-y^2}$.

Задание 5

Вычислить площадь плоской области D, ограниченной заданными линиями.

5.1. $D: \ y^2=4x, \ x+y=3, \ y \geq 0$.

5.2. $D: \ xy=1, \ x^2=y, \ y=2, \ x=0$.

5.3. $D: \ x=y^2, \ y^2=4-x$.

5.4. $D: \ y=x^2, \ y=\frac{3}{4}x^2+1$.

5.5. $D: \ y^2 = 4 - x, \ y = x + 2, \ y = 2, \ y = -2$.

5.6. $D: \ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1, \ y \le \dfrac{1}{2}x, \ y \ge 0$.

5.7. $D: \ x = y^2, \ x = \sqrt{2 - y^2}$.

5.8. $D: \ x = 4 - y^2, \ x - y + 2 = 0$.

5.9. $D: \ x = \cos y, \ x \le y + 1, x \ge 0$.

5.10. $D: \ x^2 = 3y, \ y^2 = 3x$.

5.11. $D: \ x = y^2 + 1, \ x + y = 3$.

5.12. $D: \ y = 4 - x^2, \ y = x^2 - 2x$.

5.13. $D: \ y^2 = 4x, \ x = \dfrac{8}{y^2 + 4}$.

5.14. $D: \ y = -2x^2 + 2, \ y \ge -6$.

5.15. $D: \ y = 2x - x^2, \ y = 0$.

5.16. $D: \ 2y = \sqrt{x}, \ x + y = 5, x \ge 0$.

5.17. $D: \ y = x^2 + 4x, \ y = x + 4$.

5.18. $D: \ y = \sqrt{2 - x^2}, \ y = x^2$.

5.19. $D: \ x = y^2, \ x = \dfrac{3}{4}y^2 + 1$.

5.20. $D: \ y = x^2, \ y = -x$.

5.21. $D: \ y = 4x^2, \ 9y = x^2, \ y \le 2$.

5.22. $D: \ y = x^2 + 2, \ x \ge 0, \ x = 2, \ y = x$.

5.23. $D:\ x=\sqrt{4-y^2},\ y=\sqrt{3x},\ x\geq 0$.

5.24. $D:\ y=x+1,\ y=0,\ x=0,\ x=3$.

5.25. $D:\ y^2=4x,\ x^2=4y$.

5.26. $D:\ y=x^2+1,\ x+y=3$.

5.27. $D:\ y=\dfrac{8}{x^2+4},\ x^2=4y$.

5.28. $D:\ x=-2y^2,\ x=1-3y^2,\ x\leq 0,\ y\geq 0$.

5.29. $D:\ y^2=x+2,\ x=2$.

5.30. $D:\ y=6x^2,\ x+y=2,\ x\geq 0$.

Тема 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Дифференциальные уравнения (ДУ). Основные понятия и определения.

2. ДУ первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Общее и частное решение (интеграл).

3. ДУ с разделяющимися переменными, однородные ДУ, линейные ДУ первого порядка, уравнение Бернулли.

4. ДУ второго порядка. Задача Коши. Общее и частное решение (интеграл).

5. ДУ второго порядка, допускающие понижение порядка.

6. Линейные однородные ДУ второго порядка. Структура общего решения.

7. Линейные неоднородные ДУ второго порядка. Структура общего решения.

8. Линейные неоднородные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

5.1. Дифференциальные уравнения (ДУ). Основные понятия и определения

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется соотношение вида

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ ...,\ y^{(n)})=0,$$

связывающее независимую переменную *x*, неизвестную функцию $y=y(x)$ и ее производные $y',\ y'',\ ...,\ y^{(n)}$.

Порядком ДУ называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Решением ДУ называется функция $y=y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

5.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

ДУ первого порядка может быть задано:

– в общем виде:

$$F(x,\ y,\ y')=0;$$

– в разрешенном относительно производной виде:

$$y'=f(x,\ y);$$

– с использованием дифференциалов:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0.$$

Задача Коши для ДУ первого порядка имеет вид

$$y' = f(x,\ y),\ y(x_0) = y_0,$$

т. е. из множества решений ДУ требуется выделить то, которое удовлетворяет дополнительному условию $y(x_0) = y_0$. Это условие называют **начальным**.

Функция $y = y(x,\ C)$ называется общим решением ДУ первого порядка в области $D \subset R^2$, если:

а) при любом допустимом значении константы C функция $y = y(x,\ C)$ является решением ДУ;

б) для любой точки $(x_0,\ y_0) \in D$ существует единственное допустимое значение $C = C_0$, такое, что $y(x_0,\ C_0) = y_0$.

Частным решением ДУ называется любое решение которое может быть получено из общего при конкретном значении постоянной C (включая $C = \pm\infty$).

Общее решение, заданное в неявной форме

$$\Phi(x,\ y,\ C) = 0,$$

называют общим интегралом. При конкретном $C = C_0$ равенство

$$\Phi(x,\ y,\ C_0) = 0,$$

задающее неявно частное решение ДУ, называют частным интегралом.

Рассмотрим некоторые ДУ первого порядка.

1. ДУ с разделяющимися переменными. ДУ имеет вид

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0,$$

если записано через дифференциалы, или

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y),$$

если оно разрешено относительно производной.

Разделив обе части первого уравнения на $Q_1(y) \cdot P_2(x)$, получаем ДУ с разделенными переменными

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0.$$

Интегрируя обе части последнего уравнения, получаем общий интеграл исходного ДУ

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C\,.$$

2. Однородные ДУ первого порядка. В записи через дифференциалы ДУ имеет вид

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0\,,$$

где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – однородные относительно x, y функции одинакового порядка.

Замечание. Функция $\varphi(x,\ y)$ называется однородной относительно x, y функцией порядка k, если для любого $t \in R$ имеет место $\varphi(tx,\ ty) = t^k \cdot \varphi(x,\ y)$.

Если однородное ДУ разрешено относительно производной, то оно имеет вид:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Подстановкой $y = z \cdot x$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция, однородное ДУ сводится к ДУ с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции $z(x)$.

3. Линейные ДУ первого порядка. ДУ имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x)\,.$$

Общее решение линейного ДУ можно найти с помощью подстановки $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – новые неизвестные функции. После подстановки ДУ принимает вид

$$u'v + uv' + puv = q\,.$$

Поскольку одна из неизвестных функций может быть выбрана произвольно, то выберем $v(x)$ так, чтобы последнее уравнение упростилось, а именно, чтобы $uv' + puv = 0$. Для этого в качестве $v(x)$ следует выбрать любое частное решение ДУ с разделяющимися переменными

$$v' + p(x)v = 0\,,$$

например, $v(x) = e^{-\int p(x)dx}$. Тогда $u(x)$ находят как общее решение ДУ

$$u'v(x) = q(x)\,,$$

т. е. $u(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$. Общее решение исходного уравнения

$$y=u\cdot v=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right).$$

4. Уравнение Бернулли. ДУ имеет вид

$$y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha},$$

где $\alpha\in R\ (\alpha\neq 1,\ \alpha\neq 0)$.

С помощью подстановки $y=u\cdot v$ решение уравнения Бернулли, как и решение линейного ДУ, сводится к последовательному интегрированию двух ДУ с разделяющимися переменными.

Пример 5.1. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения $y'\operatorname{tg}x-y=1$.

Решение. Разрешаем ДУ относительно производной:

$$y'=\frac{1+y}{\operatorname{tg}x}.$$

Правая часть ДУ имеет вид $f(x,\ y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$, следовательно, это уравнение с разделяющимися переменными. Переходим к дифференциалам, разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y}{\operatorname{tg}x},\ \frac{dy}{1+y}=\frac{dx}{\operatorname{tg}x},\ \int\frac{dy}{1+y}=\int\frac{\cos x dx}{\sin x},$$

$$\int\frac{dy}{1+y}=\int\frac{d\sin x}{\sin x},\ \ln|1+y|=\ln|\sin x|+\ln|C|,\ \ln|1+y|=\ln|C\sin x|,$$

$y=C\sin x-1$ – общее решение.

Пример 5.2. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения $2xydx+(y^2-x^2)dy=0$.

Решение. Коэффициенты при дифференциалах $P(x,y)=2xy,\ Q(x,y)=y^2-x^2$ являются однородными функциями второго порядка относительно x, y:

$$P(tx,\ ty)=2\cdot tx\cdot ty=t^2\cdot 2xy=t^2\cdot P(x,\ y),$$

$$Q(tx,ty)=(tx)^2-(ty)^2=t^2x^2-t^2y^2=t^2(x^2-y^2)=t^2Q(x,y).$$

Следовательно, имеем однородное ДУ первого порядка. Применяем подстановку $y=z\cdot x$, где $z=z(x)$ – новая неизвестная функция. Тогда

$$dy=d(z\cdot x)=dz\cdot x+z\cdot dx$$

и ДУ принимает вид

$$2x^2\cdot zdx+(z^2-1)x^2(dz\cdot x+zdx)=0,$$

$$(z^3+z)dx+x(z^2-1)dz=0.$$

Получили ДУ с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции $z(x)$. Делим обе его части на $(z^3+z)\cdot x$ и интегрируем:

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{z^2-1}{z^3+z}dz=0,$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\left(\frac{2z}{z^2+1}-\frac{1}{z}\right)dz=0,$$

$$\ln|x|+\ln\left|z^2+1\right|-\ln|z|=\ln|C|,$$

$$\left(z^2+1\right)\cdot\frac{x}{z}=C.$$

Возвращаемся к исходным переменным, подставляя $z=\dfrac{y}{x}$:

$$\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)\frac{x^2}{y}=C,$$

$$y^2+x^2=Cy \text{ – общий интеграл.}$$

Пример 5.3. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'+4xy=2xe^{-x^2}\cdot\sqrt{y}$.

Решение. Это уравнение Бернулли $\left(\alpha=\dfrac{1}{2}\right)$. Применим подстановку $y=u\cdot v$, где $u=u(x),\ v=v(x)$ – новые неизвестные функции.

$$u'v + uv' + 4xuv = 2xe^{-x^2}\sqrt{uv}\ ,$$

$$u'v + u(v' + 4xv) = 2xe^{-x^2}\sqrt{uv}\ .$$

Функцию $v(x)$ выберем так, чтобы выражение в скобках обращалось в ноль:

$$v' + 4xv = 0\,.$$

Получили ДУ с разделяющимися переменными. Находим $v(x)$ как частное решение этого ДУ:

$$\frac{dv}{dx} = -4xv,\ \frac{dv}{v} = -4xdx,\ \int\frac{dv}{v} = -\int 4xdx\,,$$

$$\ln|v| = -2x^2,\ v = e^{-2x^2}\ .$$

Для определения $u(x)$ также получаем ДУ с разделяющимися переменными:

$$u'\cdot e^{-2x^2} = 2xe^{-x^2}\sqrt{u\cdot e^{-2x^2}}\ ,$$

$$u' = 2x\sqrt{u},\ \frac{du}{\sqrt{u}} = 2xdx,\ \int\frac{du}{\sqrt{u}} = \int 2xdx\,,$$

$$2\sqrt{u} = x^2 + C,\ u = \frac{(x^2+C)^2}{4}.$$

Тогда $y = u\cdot v = \dfrac{e^{-2x^2}(x^2+C)^2}{4}$ – общее решение исходного уравнения.

5.3. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

ДУ второго порядка может быть задано в

– общем виде:

$$F(x,\ y,\ y',\ y'') = 0\,;$$

– разрешенном относительно старшей производной виде:

$$y'' = f(x,\ y,\ y')\,.$$

Задача Коши для ДУ второго порядка имеет вид

$$y'' = f(x,\ y,\ y'),\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,$$

т. е. в точке $x = x_0$ задаются значения искомой функции $y(x)$ и ее производной $y'(x)$.

Общее решение ДУ второго порядка имеет вид $y = y(x,\ C_1,\ C_2)$, т. е. зависит от двух произвольных постоянных. Один из основных методов решения произвольных ДУ второго порядка – понижение порядка уравнения.

Рассмотрим некоторые типы ДУ второго порядка, допускающие понижение порядка.

1. $y'' = f(x)$. Общее решение находят двухкратным интегрированием:

$$y' = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y = \int \left(\int f(x)\,dx + C_1 \right) dx = \iint f(x)\,dx\,dx + C_1 x + C_2.$$

2. $F(x,\ y',\ y'') = 0$, т.е. ДУ не содержит искомой функции *y*. Подстановкой $y' = z(x),\ y'' = z'(x)$ исходное ДУ сводится к ДУ первого порядка относительно новой неизвестной функции $z(x)$.

3. $F(x,\ y',\ y'') = 0$, т. е. ДУ не содержит независимой переменной *x*. Подстановкой $y' = z(y),\ y'' = \left(z(y(x))\right)' = z'(y) \cdot y'(x) = z' \cdot z$ исходное ДУ сводится к ДУ первого порядка относительно новой неизвестной функции $z(y)$.

Пример 5.4. Решить ДУ второго порядка, используя методы понижения порядка:

$$y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$$

Это уравнение вида $F(x,\ y',\ y'') = 0$, т.е. не содержит *y*. Используем подстановку $y' = z(x),\ y'' = z'(x)$. Получаем ДУ первого порядка относительно неизвестной функции $z(x)$:

$$z' + \operatorname{tg} x \cdot z = \sin 2x.$$

Это линейное ДУ. Используем подстановку $z = u \cdot v$:

$$u'v + uv' + \operatorname{tg} x uv = \sin 2x$$

$$u'v + u(v' + \operatorname{tg} x v) = \sin 2x.$$

Функцию $v(x)$ находим как частное решение ДУ:

$$v' + \operatorname{tg} x \cdot v = 0,\ \frac{dv}{dx} = -\operatorname{tg} x \cdot v,\ \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x},$$

$$\ln|v| = \ln|\cos x|,\ v = \cos x .$$

Функцию $u(x)$ находим как общее решение ДУ:

$$u' \cdot \cos x = \sin 2x,\ u' = 2\sin x,\ u = \int 2\sin x dx = -2\cos x + C_1 .$$

Тогда
$$z(x) = u \cdot v = (-2\cos x + C_1) \cdot \cos x = -2\cos^2 x + C_1 \cos x = -1 - \cos 2x + C_1 \cos x .$$

Возвращаемся к исходным переменным:

$$y' = -1 - \cos 2x + C_1 \cos x,\ y = \int (-1 - \cos 2x + C_1 \cos x) dx =$$
$= -x - \dfrac{1}{2}\sin 2x + C_1 \sin x + C_2$ – общее решение исходного уравнения.

Пример 5.5. Решить ДУ второго порядка, используя методы понижения порядка:

$$y \cdot y'' + (y')^2 = 0 .$$

Это уравнение вида $F(x,\ y',\ y'') = 0$, т. е. не содержит *x*. Используем подстановку $y' = z(y),\ y'' = \left(z(y(x))\right)' = z'(y) \cdot y'(x) = z' \cdot z$.

Подставляя выражения для y', y'' в исходное ДУ, получим ДУ первого порядка, где *y* становится независимой переменной, $z(y)$ – неизвестной функцией:

$$yz \cdot z' + z^2 = 0,\ z(yz' + z) = 0,\ yz' + z = 0 .$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{z}{y},\ \int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dy}{y},\ \ln|z| = -\ln|y| + \ln|C_1|,\ z = \frac{C_1}{y} .$$

Так как $y' = z$, то $y' = \dfrac{C_1}{y},\ \int y dy = \int C_1 dx,\ \dfrac{y^2}{2} = C_1 x + C_2$ – общий интеграл исходного ДУ.

5.4. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

ДУ имеют вид

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = f(x) \cdot x .$$

Если $f(x) \equiv 0$, то ДУ принимает вид

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

и называется линейным однородным ДУ (ЛОДУ). Если $f(x)$ Т 0, то уравнение называется линейным неоднородным ДУ (ЛНДУ). Если $p(x) \equiv p \in R,\ q(x) \equiv q \in R$, то уравнение называют линейным ДУ с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим ЛОДУ с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0$$

Для нахождения его общего решения составляют характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

При решении этого квадратного уравнения возможны три случая

1. $D = p^2 - 4q > 0$. Уравнение имеет два действительных различных корня $\lambda_1,\ \lambda_2 \in R$ (кратность каждого корня $k = 1$). Тогда общее решение исходного ЛОДУ имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},\ C_1,\ C_2 \in R.$$

2. $D = p^2 - 4q = 0$. Уравнение имеет два равных корня $\lambda_1,\ \lambda_2 = \lambda$ (говорят, что корень λ имеет кратность $k = 2$). Тогда общее решение исходного ЛОДУ имеет вид

$$y = e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x),\ C_1,\ C_2 \in R.$$

3. $D = p^2 - 4q < 0$. Уравнение имеет два комплексно сопряженных корня $\lambda_1 = \alpha + \beta i,\ \lambda_2 = \alpha - \beta i$ (кратность каждого корня $k = 1$). Тогда общее решение исходного ЛОДУ имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x),\ C_1,\ C_2 \in R.$$

Рассмотрим далее ЛНДУ с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

Его общее решение задается формулой

$$y = \overline{y} + \tilde{y}(x),$$

где $\overline{y}(x)$ – общее решение соответствующего ЛОДУ $y'' + py' + qy = 0$;

$\tilde{y}(x)$ – любое частное решение данного ЛНДУ.

Рассмотрим частный случай, когда правая часть ЛНДУ $f(x)$ является функцией специального вида

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x),$$

где $\alpha,\ \beta \in R,\ P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены от x степеней n, m соответственно. Решение в этом случае проводят по следующей схеме.

1. Составляют характеристическое уравнение соответствующего ЛОДУ и находят его корни. Выписывают общее решение соответствующего ЛОДУ $\overline{y}(x)$.

2. По виду правой части $f(x)$ выписывают число $\gamma = \alpha + \beta i$. Если γ не является корнем характеристического уравнения соответствующего ЛОДУ, то частное решение ЛНДУ $\tilde{y}(x)$ ищут в виде

$$\tilde{y}(x) = e^{\alpha x}(R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x),$$

а если γ является корнем кратности k, то в виде

$$\tilde{y}(x) = x^k e^{\alpha x}(R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x),$$

где $l = \max\{\mathrm{m};\mathrm{n}\},\ R_l(x),\ S_l(x)$ – многочлены от x степени l с неопределенными коэффициентами.

Подставляя выражение для $\tilde{y}(x)$ в исходное ЛНДУ, вычисляют значения неопределенных коэффициентов многочленов $R_l(x),\ S_l(x)$ и выписывают частное решение ЛНДУ $\tilde{y}(x)$.

3. Общее решение исходного ЛНДУ находят в виде $y = \overline{y} + \tilde{y}(x)$.

Пример 5.6. Найти частное решение ДУ, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y'' + 6y' + 13y = (8x + 4)e^{-x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

Решение. Это ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Для соответствующего ЛОДУ $y''+6y'+13y=0$ составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2+6\lambda+13=0,\ D=6^2-4\cdot 13=36-52=-16,$$

$$\lambda_{1,\,2}=\frac{-6\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-6\pm 4\sqrt{-1}}{2}=-3\pm 2i\,.$$

Общее решение ЛОДУ имеет вид

$$\overline{y}=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)\,.$$

По виду правой части ЛНДУ выписываем число $\gamma=-1+0\cdot i=-1$. Оно не является корнем характеристического уравнения ЛОДУ, поэтому частное решение ЛНДУ $\tilde{y}(x)$ ищем виде $\tilde{y}(x)=(Ax+B)e^{-x}$. Вычисляем производные:

$$\tilde{y}(x)=(Ax+B)e^{-x};$$

$$\tilde{y}'(x)=Ae^{-x}-(Ax+B)e^{-x}=e^{-x}(-Ax+A-B)\,;$$

$$\tilde{y}''(x)=-Ae^{-x}-e^{-x}(-Ax+A-B)=e^{-x}(Ax-2A+B)\,.$$

Подставляем в ЛНДУ:

$$e^{-x}(8Ax+(4A+8B))=(8x+4)e^{-x}\,.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части равенства, получаем:

$$\begin{cases}8A=8\\4A+8B=4\end{cases},$$

откуда $A=1,\ B=0$.

Подставляя найденные значения A , B в $\tilde{y}(x)$, имеем $\tilde{y}(x)=xe^{-x}$. Итак, $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+x\cdot e^{-x}$ – общее решение исходного ДУ.

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Вычисляем

$$y'=-3e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+e^{-3x}(-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x)+e^{-x}-xe^{-x}$$

и подставляем начальные условия в $y, \ y'$:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 1 \\ y'(0) = -3C_1 + 2C_2 + 1 = 2, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 1, \ C_2 = 2$.

Подставляя $C_1, \ C_2$ в общее решение y, получаем искомое частное решение

$$y = e^{-3x}(\cos 2x + 2\sin 2x) + xe^{-x}.$$

Задание 6

Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения.

6.1. $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2ydy$.

6.2. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 4\dfrac{y}{x} + 2$.

6.3. $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x$.

6.4. $y' - y = 2xy^2$.

6.5. $xdy - ydx = ydy$.

6.6. $(1+e^x)y' = ye^x$.

6.7. $y' + xy = (x-1)e^x y^2$.

6.8. $6xdx - ydy = yx^2dy - 3xy^2dx$.

6.9. $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2$.

6.10. $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$.

6.11. $y\ln y + xy' = 0$.

6.12. $xy' + 2\sqrt{xy} = y$.

6.13. $xy^2dy = (x^3+y^3)dx$.

6.14. $x\sqrt{5+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0$.

6.15. $y' - \dfrac{y}{x} + \dfrac{2\ln x}{x} = 0$.

6.16. $3(xy' + y) = xy^2$.

6.17. $y(1+\ln y) + xy' = 0$.

6.18. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x$.

6.19. $y' = \dfrac{x+2y}{2x-y}$.

6.20. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

6.21. $2x+2xy^2+\sqrt{2-x^2}\,y'=0$.

6.22. $y'+2xy=2x^3y^3$.

6.23. $y'-\dfrac{y}{x}+\dfrac{12}{x^3}=0$.

6.24. $x(\ln x-\ln y)dy-ydx=0$.

6.25. $\ln\cos y dx+x\,\mathrm{tg}\, y dy=0$.

6.26. $y'-\dfrac{2xy}{1+x^2}=1+x^2$.

6.27. $(xy^2+x)dx+(x^2y+y)dy=0$.

6.28. $(xy'-y)\,\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}=x$.

6.29. $3y'+\dfrac{2y}{x+1}=\dfrac{x}{y^2}$.

6.30. $y'+\dfrac{y}{x}=e^{x^2}$.

Задание 7

Решить дифференциальное уравнение второго порядка, используя методы понижения порядка.

7.1. $xy''+y'=1$.

7.2. $y\,y''=(y')^2$.

7.3. $x^2y''+xy'=1$.

7.4. $y''=3y^2(y')^3$.

7.5. $\mathrm{tg}\, x\cdot y''=2y'$.

7.6. $y''+(y')^3=0$.

7.7. $xy''+y'=\sqrt{x}$.

7.8. $2y\,y''=1+(y')^2$.

7.9. $x\ln x\, y''-y'=0$.

7.10. $y''\cdot\mathrm{tg}\, y=2(y')^2$.

7.11. $y''+\dfrac{2x}{x^2+1}y'=2x$.

7.12. $y''\cdot y^3-1=0$.

7.13. $y''=y'+x$.

7.14. $2(y')^2=(y-1)\,y''$.

7.15. $x(y''+1)+y'=0$.

7.16. $y\;y''=(y')^2-y'$.

7.17. $(1+x^2)y''=2xy'$.

7.18. $y''(2-y)=4(y')^2$.

7.19. $xy''=y'$.

7.20. $y''+2y(y')^3=0$.

7.21. $y''\operatorname{tg}x - y' = 1$.

7.22. $9(y'')^2 - 4y' = 0$.

7.23. $xy'' - y' + \dfrac{1}{x} = 0$.

7.24. $y\ y'' = y' + (y')^2$.

7.25. $y''\operatorname{ctg}2x + 2y' = 0$.

7.26. $y'' \cdot \sqrt{y} = (y')^3$.

7.27. $(1+\sin x)\,y'' = \cos x \cdot y'$.

7.28. $\operatorname{ctg}y' \cdot y'' = (y')^2$.

7.29. $x^2 y'' = (y')^2$.

7.30. $yy'' + 2y' = (y')^2$.

Задание 8

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

8.1. $y'' - 4y' + 8y = \sin x + 18\cos x,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 1$.

8.2. $y'' + 9y = 6e^{-3x},\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 2$.

8.3. $y'' + 2y' = 5\cos x,\ \ y(0) = y'(0) = 0$.

8.4. $y'' + 6y' + 13y = 13x^2 - x - 4,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = -1$.

8.5. $y'' + 25y = 12\sin x + 6\cos x,\ \ y(\pi) = \dfrac{3}{4},\ \ y'(\pi) = \dfrac{1}{2}$.

8.6. $y'' + 2y' + 2y = 6e^{-2x},\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = -1$.

8.7. $y'' - 4y' = 8x + 6,\ \ y(0) = y'(0) = 2$.

8.8. $y'' + y' = 2x - 1,\ \ y(0) = -1,\ \ y'(0) = 0$.

8.9. $y'' - 2y' + 10y = 11\cos x - 7\sin x,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2$.

8.10. $y'' - 2y' - 8y = 12\sin 2x - 36\cos 2x,\ \ y(0) = y'(0) = 0$.

8.11. $y'' + 2y' + y = 6e^{-x},\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$.

8.12. $y'' + 16y = 8\cos 4x,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 4$.

8.13. $6y'' - y' - y = 21e^{2x},\ y(0) = y'(0) = 3$.

8.14. $y'' - 5y' - 6y = 3\cos x + 19\sin x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1$.

8.15. $y'' + 9y = 4\cos x - 8\sin x,\ y(\pi) = \dfrac{1}{2},\ y'(\pi) = -2$.

8.16. $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x},\ y(0) = \dfrac{1}{2},\ y'(0) = 1$.

8.17. $y'' - 3y' + 2y = 3\cos x + 19\sin x,\ y(0) = 3,\ y'(0) = -3$.

8.18. $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x},\ y(0) = \dfrac{1}{5},\ y'(0) = 4$.

8.19. $y'' - 4y' = 8 - 16x,\ y(0) = y'(0) = 3$.

8.20. $4y'' - 4y' + y = -25\cos x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

8.21. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5,\ y(0) = 4,\ y'(0) = 0$.

8.22. $4y'' + 3y' - y = 11\cos x - 7\sin x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4$.

8.23. $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$.

8.24. $y'' + y' - 2y = 9\cos x - 7\sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$.

8.25. $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x - 2,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2$.

8.26. $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1$.

8.27. $y'' - 4y = 8e^{2x},\ y(0) = y'(0) = 2$.

8.28. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 0$.

8.29. $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 1$.

8.30. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x},\ y(0) = y'(0) = -1$.

Тема 6. РЯДЫ

1. Числовые ряды. Сумма ряда. Действия над сходящимися рядами. Необходимый признак сходимости.

2. Знакоположительные ряды. Достаточные признаки сходимости.

3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

4. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

5. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости степенного ряда.

6.1. Числовые ряды. Необходимый признак сходимости

Пусть дана числовая последовательность $\{u_n\}$. Числовым рядом называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

Числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называют членами ряда, u_n – общий член ряда.

Сумму n первых членов ряда называют n– ой частичной суммой ряда и обозначают

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i .$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд называют сходящимся, а число S называют его суммой. Если последовательность $\{S_n\}$ не имеет конечного предела при $n \to \infty$, то говорят что ряд расходится.

Необходимый признак сходимости. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Следствие (достаточное условие расходимости). Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ или не существует, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Пример 6.1. Исследовать на сходимость ряды.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5n-1}{3n+4}$.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n-1}{3n+4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n}} = \frac{5}{3} \neq 0 .$$

Согласно следствию ряд расходится.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}=(1^{\infty})=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1}-1\right)\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{2n^2+1}\right)^{n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-4}{2n^2+1}\right)^{-\frac{2n^2+1}{4}}\right]^{-\frac{4n^2}{2n^2+1}}=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2}{2n^2+1}}=e^{-2}\neq 0.$$

Согласно следствию ряд расходится.

6.2. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Числовой ряд называется знакоположительным, если его члены $u_n\geq 0,\ n\in N$.

Рассмотрим некоторые достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

1. Признаки сравнения

Простой признак сравнения. Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$, причем $u_n\leq v_n$ для любых $n\geq n_0\in N$. Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$.

Предельный признак сравнения. Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$. Если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A,\ \text{где}\ A\neq 0,\ A\neq\infty,$$

то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Замечание. При использовании признаков сравнения в качестве рядов, с которыми проводится сравнение исходного ряда, часто используются следующие:

а) ряд геометрической прогрессии $\sum_{n=0}^{\infty} bq^n$, который сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geq 1$;

б) обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, который сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leq 1$.

Пример 6.2. Исследовать на сходимость ряды.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$.

Используем простой признак сравнения. Так как $u_n=\frac{1}{2+3^n}<\frac{1}{3^n}=\left(\frac{1}{3}\right)^n=v_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится как ряд геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{3}<1$, то исходный ряд также сходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+5}$.

Используем предельный признак сравнения.

Здесь $u_n=\frac{2n-1}{3n^2+5}$. Для сравнения возьмем гармонический ряд с общим членом $v_n=\frac{1}{n}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)n}{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{3n^2+5}=\frac{2}{3},$$

т. е. предел конечен и отличен от нуля. Так как гармонический ряд расходится, то исходный ряд также расходится.

2. Признак Даламбера

Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l.$$

Тогда ряд сходится при $l<1$ и расходится при $l>1$. При $l=1$ ряд может как сходится, так и расходится.

Пример 6.3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n^2}{(2n+1)!}.$$

Применим признак Даламбера:

$$u_n=\frac{3^n\cdot n^2}{(2n+1)!},\ u_{n+1}=\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)^2}{(2(n+1)+1)!}=\frac{3^{n+1}(n+1)^2}{(2n+3)!},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)^2\cdot(2n+1)!}{(2n+3)!\cdot 3^n\cdot n^2}=3\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{(2n+2)(2n+3)}=0<1.$$

По признаку Даламбера ряд сходится.

3. Радикальный признак Коши

Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l.$$

Тогда ряд сходится при $l<1$ и расходится при $l>1$. При $l=1$ ряд может как сходится, так и расходится.

Пример 6.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n-1}{3n+5}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Решение. Применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{7n-1}{3n+5}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{7n-1}{3n+5}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{7n-1}{3n+5}}=\sqrt{\frac{7}{3}}>1.$$

По радикальному признаку Коши ряд расходится.

4. Интегральный признак Коши

Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Если функция $f(x)$ непрерывна, монотонно убывает на промежутке $[a\,;+\infty)$, $a>0$, и $f(u)=u_n$ для любых $n\in N$, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 6.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\ln n}$.

Решение. Применим интегральный признак Коши. Пусть $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ – непрерывная, монотонно убывающая на промежутке $[2\,;+\infty)$ функция, $f(n)=\frac{1}{x\ln x}=u_n$.

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int_2^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln x}=\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\ln\ln x-\ln\ln 2=\infty,$$

т. е. несобственный интеграл расходится. Следовательно, исходный ряд также расходится.

6.3. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется знакопеременным, если он содержит положительные и отрицательные члены.

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется условно сходящимся, если он сходится, но ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

При исследовании ряда на абсолютную сходимость составляют ряд из модулей и применяют к нему подходящий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов или необходимый признак сходимости (см. п. 6.1, 6.2).

Частным случаем знакопеременных рядов являются знакочередующиеся ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots, \text{ где } u_n > 0 \text{ для } n \in N.$$

Признак Лейбница (достаточный признак сходимости знакочередующихся рядов)

Если члены знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ удовлетворяют условиям:

1) $u_n \ge u_{n+1}$ для любых $n \ge n_0 \in N$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

то ряд сходится.

Пример 6.6. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{3n-1}{7n+5}\right)^3$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n!}{n^n}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{3n-2}}$.

Решение. а) Составим ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n-1}{7n+5}\right)^3$. Применим к нему необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{7n+5}\right)^3 = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{7n+5}\right)^3 = \left(\frac{3}{7}\right)^3 \ne 0.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| \ne 0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \ne 0$, т. е. для исходного ряда нарушен необходимый признак сходимости. Ряд расходится.

б) Составим ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$. Применим к нему признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Ряд из модулей сходится. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

в) Составим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{3n-2}}$. Сравним его с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ по предельному признаку сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{3n-2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n}{3n-2}}=\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\neq 0\,.$$

Следовательно, ряды ведут себя одинаково. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ является частным случаем обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha=\frac{1}{3}<1$, т. е. он расходится. Значит, ряд из модулей также расходится, т. е. абсолютной сходимости у исходного ряда нет.

Исследуем исходный ряд на условную сходимость. Это знакочередующийся ряд. Применим признак Лейбница:

$$u_n=\frac{1}{\sqrt[3]{3n-2}}>\frac{1}{\sqrt[3]{3n+1}}=u_n\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{3n-2}}=0\,.$$

Условия признака Лейбница выполнены, значит, ряд сходится.

Итак, исходный ряд сходится условно.

6.4. Степенные ряды

Степенным рядом называются ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots,$$

где $a_n\in R$ – коэффициенты степенного ряда, $x_0\in R$ – центр ряда.

Подставим в степенной ряд произвольное значение $x\in R$. Если полученный при этом числовой ряд сходится, то x называют точкой сходимости степенного ряда, если расходится, то x называют точкой расходимости степенного ряда. Множество всех точек сходимости образует область сходимости D степенного ряда. Отметим, что $D\neq\downarrow$, так как центр ряда x_0 всегда содержится в D.

Для каждого степенного ряда существует число $0\le R\le+\infty$, называемое радиусом сходимости, такое, что при $x\in(x_0-R;\,x_0+R)$ этот ряд сходится абсолютно, а при $x\in(-\infty\,;\,x_0-R)\cup(x_0+R\,;\,+\infty)$ расходится. Интервал $(x_0-R\,;\,x_0+R)$ называют интервалом сходимости степенного ряда. Вопрос о сходимости ряда на концах интервала, т. е. в точках $x_0 \pm R$ решается в каждом конкретном случае отдельных исследованием.

Для определения радиуса сходимости R можно использовать формулы, следующие из признаков Даламбера и Коши:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ или } R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

если в правых частях равенств существуют конечные или бесконечные пределы.

Пример 6.7. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^n}{\sqrt{n}\cdot 3^n}.$$

Решение. Это степенной ряд с коэффициентами $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\cdot 3^n}$, центром ряда $x_0 = -2$. Определим радиус сходимости.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot 3^{n+1}\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\cdot 3^n\cdot(-1)^{n+1}}\right| = 3\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} =$$

$$= 3\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 3.$$

Следовательно ряд сходится в интервале $(-5\,;1)$ и расходится при $x \in (-\infty\,;-5)\cup(1\,;+\infty)$. Проведем исследование на концах интервала сходимости.

При $x=-5$ получаем обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$ и, следовательно, ряд расходится. Точку $x=-5$ не включаем в область сходимости.

При $x=1$ получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, который сходится условно по признаку Лейбница. Точку $x=1$ включаем в область сходимости.

Область сходимости $D=(-5\,;1]$.

Пример 6.8. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n\cdot x^n.$$

Решение. Это степенной ряд с коэффициентами $a_n = \left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n$, центром ряда $x_0 = 0$. Определим радиус сходимости.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+2} = 2.$$

Следовательно ряд сходится в интервале $(-2\,;\,2)$ и расходится при $x \in (-\infty\,;\,-2) \cup (2\,;\,+\infty)$. Проведем исследование на концах интервала сходимости.

При $x = 2$ получаем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n \cdot 2^n$, для которого

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n \cdot 2^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+4}{2n-1}\right)^n = (1^\infty) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \left(\frac{2n+4}{2n-1} - 1\right)\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{5}{2n-1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{5}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{5}}\right]^{\frac{5n}{2n-1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n}{2n-1}} = e^{\frac{5}{2}} \neq 0,$$

т. е. нарушен необходимый признак сходимости.

При $x = -2$ получаем знакочередующийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n \cdot (-2)^n$, для которого аналогично

$$\lim_{n\to\infty} u_n = e^{\frac{5}{2}} \lim_{n\to\infty} (-1)^n \neq 0.$$

Следовательно, точки $x = \pm 2$ не включаем в область сходимости.

Область сходимости $D = (-2\,;\,2)$.

Задание 9

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость.

9.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sqrt{2n+1} \cdot \sqrt{3n-2}$. **9.2.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \sqrt{\ln n}}$. **9.3.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!}$.

9.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n$. **9.5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. **9.6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{2n-1}{2n+3}\right)^n$.

9.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n^3}$. **9.8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\cdot(0,5)^n}$. **9.9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n}{\ln(n+2)}$.

9.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2+\sin^2 n}$. **9.11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\left(n\sqrt{n}\right)}{n\sqrt{n}}$. **9.12.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln^2 n}$.

9.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1-\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. **9.14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{3n-2}{3n+5}\right)^n$. **9.15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{n!}$.

9.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+(0,5)^n\right)$. **9.17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n+5}{\sqrt{n^3}}$. **9.18..** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n^2}$

9.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[3]{n+2}}$. **9.20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n\cdot\arcsin\dfrac{1}{n^3}$. **9.21.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(5^{\frac{1}{n}}-1\right)$.

9.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$. **9.23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{(\ln 10)^n}$. **9.24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{2n+7}{3n-1}\right)^{5n}$.

9.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot\cos n}{\sqrt[3]{n^7+1}}$. **9.26.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\ln n}}$. **9.27.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}(0,3)^n\cdot n$.

9.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)(n+3)}}$. **9.29.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\cdot 2^n}{n!}$. **9.30.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{5n-2}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Задание 10

Найти область сходимости степенного ряда.

10.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(x+1)^n}{\sqrt[3]{n}}$. **10.2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n x^n$. **10.3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{\sqrt{n^n}}(x-2)^n$.

10.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 4^n}$.

10.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x-1)^n}{n!}$.

10.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n x^n$.

10.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}\cdot(x+3)^n$.

10.8. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot\ln n}$.

10.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}(x-4)^n$.

10.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^n}{(\ln 10)^n}$.

10.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{(n^4+5)\cdot 3^n}$.

10.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{4n+3}\right)^n(x+1)^n$.

10.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt{n}}{n+1}\cdot(x-2)^n$.

10.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-10)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$.

10.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n\cdot\ln^2 n}$.

10.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^n}}{n!}\cdot(x+10)^n$.

10.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\,x^n$.

10.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n(x+2)^n$.

10.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(-9)^n(n+1)}$.

10.20. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{\sqrt{n}\cdot\ln n}$.

10.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{2^n\cdot\mathrm{arctg}\,n}$.

10.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(0,5)^n(x+4)^n}{\sqrt[5]{n+1}}$.

10.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^n(x-2)^n$.

10.24. $\sum_{n=1}^{\infty}(3^{\frac{1}{n}}-1)x^n$.

10.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+(0,5)^n)\cdot x^n$.

10.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{4^n\sqrt[3]{n^2+1}}$.

10.27. $\sum_{n=2}^{\infty}\arcsin\frac{\pi}{n^2}\cdot x^n$.

10.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+6)^n}{(-3)^n\sqrt{n+3}}$.

10.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{n^2}}(x-4)^n$.

10.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{\sqrt{4^n\cdot n}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров, Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1980.

2. Герасимович, А.И. Математический анализ: в 2 ч. / А.И. Герасимович, Н.А. Рысюк. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1.

3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – Минск: Вышэйшая школа, 1986.

4. Сухая, Т.А. Задачи по высшей математике / Т.А. Сухая, В.Ф. Бубнов. – Минск: Вышэйшая школа, 1993.

5. Индивидуальные задания по высшей математике / под ред. А.П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2008.

6. Руководство к решению задач по высшей математике / под ред. Е.И. Гурского. – Минск: Вышэйшая школа, 1989.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 2 ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для студентов заочного отделения
экономических специальностей

Составители:
КОРЗНИКОВ Александр Дмитриевич
МАТВЕЕВА Людмила Дмитриевна
ШАВЕЛЬ Наталья Александровна

Технический редактор Д.А. Исаев

Подписано в печать 28.03.2011.
Формат $60\times84^{1}/_{8}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 6,74. Уч.-изд. л. 2,64. Тираж 200. Заказ 5.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.