УДК 513.82

А.А. Юдов[1], Е.В. Арабчик[2], М.А. Кононюк[3], Е.А. Сирисько[4]
[1]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]магистрант физико-математического факультета Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[3]магистрант физико-математического факультета Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[4]магистрант физико-математического факультета Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: modelmath@brsu.brest.by

ИНВАРИАНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОДГРУПП ЛИ ГРУППЫ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ПЯТИМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА

Целью исследования является нахождение инвариантных подпространств, прямых и плоскостей для подгрупп Ли группы Ли H вращений пятимерного пространства Лоренца и классификация однородных редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли движений пятимерного пространства Лоренца.

Изучение геометрии однородных пространств является одной из актуальных проблем современной геометрии. В этом направлении выполняется много исследовательских работ. В Беларуси задачами такого характера занимались Л.К. Тутаев, В.И. Ведерников, А.С. Феденко, И.В. Белько, А.А. Бурдун, В.В. Балащенко, С.Г. Кононов, А.А. Юдов и др. В работе исследуется подгруппы Ли группы Ли движений пятимерного пространства Лоренца, находятся инвариантные прямые и K-плоскости для таких подгрупп и находятся редуктивные однородные пространства, структурной группой которых является группа Ли движений пятимерного пространства Лоренца.

Инвариантные подпространства подгрупп Ли

Рассмотрим пространство L_5 пятимерное лоренцово пространство.

Выберем в пространстве L_5 репер $\varepsilon = (0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, причем $e_1^2 = -1, e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_5^2 = 1, (e_i, e_j) = 0, i \neq j$.

Произвольную точку M пространства L_5, в репере ε зададим координатами $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, которые будем записывать в виде $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \equiv (X)_\varepsilon$.

На множестве реперов пространства L_5 действует группа Ли G движений, которая при заданном репере ε изоморфна группе матриц вида:

$$\overline{A} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $t = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)^T$, $A - (5 \times 5)$ – матрица, причем $A^{T1} E_5 A =^1 E_5$, где знак ^{T} означает транспонирование, а матрица E_5 является единичной матрицей, причем первый элемент по главной диагонали равен –1, остальные элементы главной диагонали 1, а прочие элементы – нули.

При движении, заданном матрицей (1), репер ε переходит в репер $\varepsilon'=(0,e_1',e_2',e_3',e_4',e_5')=(0',e')$, где $e'=eA,\ 0'(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=(T)_\varepsilon$, а точка M переходит в точку M', имеющую в репере ε' такие же координаты, какие точка M имеет в репере ε.

Пусть $M'(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T=(X)_{\varepsilon'}, M(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4,x'_5)^T=(X')_\varepsilon$. Тогда получим: $\overline{OM'}=\overline{OO'}+\overline{O'M'}=e(T)+e'(X)=e(T)=eA(X)=e((T)+A(X))$. С другой стороны, $\overline{OM'}=e(X')$. Отсюда $(X')=(T)+A(X)$, т.е.

$$(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4,x'_5)^T=(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)^T+A(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T$$

или

$$(1,x'_1,x'_2,x'_3,x'_4,x'_5)^T=\overline{A}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T. \tag{2}$$

Таким образом, в пространстве L_5 действует слева группа Ли G, которая изоморфна группе матриц вида (1), действующих на точки пространства L_5 по формуле (2). Алгебру Ли $\overline{G}$ этой группы можно отожествить с алгеброй Ли матриц вида:

$$\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ \tau & B\end{pmatrix}\right\},$$

где $\tau=(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5)^T$, а матрица B удовлетворяет условию: $B^T\,{}^1E_5+{}^1E_5B=0$.

Группа Ли H стационарности точки О и алгебра Ли $\overline{H}$ этой группы будут задаваться матрицами вида:

$$H=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}\right\},\ \overline{H}=\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\right\}.$$

Рассмотрим в алгебре Ли $\overline{G}$ базис:

$$\begin{gathered}i_1=E_{21},i_2=E_{31},i_3=E_{41},i_4=E_{51},i_5=E_{61},i_7=E_{23}+E_{32},i_8=E_{24}+E_{42},\\ i_9=E_{25}+E_{52},i_{10}=E_{26}+E_{62},i_{12}=E_{34}-E_{43},i_{13}=E_{35}-E_{53},i_{14}=E_{36}-E_{63},\\ i_{16}=E_{45}-E_{54},i_{17}=E_{46}-E_{64},i_{19}=E_{56}-E_{65},\end{gathered} \tag{3}$$

где $E_{\alpha\beta}-(6\times 6)-$ матрицы, у которых в $\alpha-$й строке, $\beta-$м столбце стоит 1, а остальные элементы нули. При этом вектора i_1,i_2,i_3,i_4,i_5 задают базис алгебры Ли группы Ли параллельных переносов, а вектора $i_7,i_8,i_9,i_{10},i_{12},i_{13},i_{14},i_{16},i_{17},i_{19}$, задают базис алгебры Ли $\overline{H}$ группы Ли H вращений пространства L_5.

Согласно формуле

$$[A,B]=AB-BA, \tag{4}$$

где $A,B\in\overline{G}$, получим формулы для коммутаторов базисных векторов $i_7,i_8,i_9,i_{10},i_{12},i_{13},i_{14},i_{16},i_{17},i_{19}$:

$$
\begin{array}{lllll}
[i_7;i_8]=i_{12} & [i_8;i_{16}]=i_9 & [i_7;i_{14}]=i_{10} & [i_9;i_{10}]=i_{19} & [i_{13};i_{10}]=0 \\
[i_7;i_9]=i_{13} & [i_9;i_{12}]=0 & [i_7;i_{17}]=0 & [i_9;i_{14}]=0 & [i_{13};i_{14}]=-i_{19} \\
[i_7;i_{12}]=i_8 & [i_9;i_{13}]=-i_6 & [i_7;i_{19}]=0 & [i_9;i_{17}]=0 & [i_{13};i_{17}]=0 \\
[i_7;i_{13}]=i_9 & [i_9;i_{16}]=-i_8 & [i_8;i_{10}]=i_{17} & [i_9;i_{19}]=i_{10} & [i_{13};i_{19}]=i_{14} \\
[i_7;i_{16}]=0 & [i_{12};i_{13}]=-i_{16} & [i_8;i_{17}]=i_{10} & [i_{12};i_{10}]=0 & [i_{16};i_{10}]=0 \\
[i_8;i_9]=i_{16} & [i_{12};i_{16}]=i_{13} & [i_8;i_{14}]=0 & [i_{12};i_{14}]=-i_{17} & [i_{16};i_{14}]=0 \\
[i_8;i_{12}]=-i_7 & [i_{13};i_{16}]=-i_{12} & [i_8;i_{19}]=0 & [i_{12};i_{17}]=i_{14} & [i_{16};i_{17}]=-i_{19} \\
[i_8;i_{13}]=0 & [i_7;i_{10}]=i_{14} & [i_{10};i_{18}]=-i_9 & [i_{14};i_{17}]=-i_{12} & [i_{16};i_{19}]=i_{17} \\
[i_{14};i_{19}]=-i_{13} & [i_{10};i_{17}]=-i_8 & [i_8;i_{19}]=0 & [i_{12};i_{19}]=0 & [i_{17};i_{19}]=-i_{16} \\
[i_{10};i_{14}]=-i_7. & & & &
\end{array}
\qquad (5)
$$

Всего получено 29 подгрупп Ли $G_1,...,G_{29}$ группы Ли вращений, которые в базисе (3) задаются своими алгебрами Ли $G_1,...,G_{29}$ в виде (причем группа G_{29} совпадает с группой Ли всех вращений пространства L_5):

$$
\begin{aligned}
&\overline{G_1}=\{i_{19}\},\ \overline{G_2}=\{i_{19}+\beta i_{12}\},\ \overline{G_3}=\{i_7\},\ \overline{G_4}=\{i_{13}+i_9\},\ \overline{G_5}=\{i_{16}+\beta i_7\},\\
&\overline{G_6}=\{i_{13}+i_9+\beta i_{17}\},\ \overline{G_7}=\{i_{19},i_{12}\},\ \overline{G_8}=\{i_{16},i_7\},\ \overline{G_9}=\{i_{13}+i_9,i_{17}\},\\
&\overline{G_{10}}=\{i_{14}+i_{10},i_{13}+i_9\},\ \overline{G_{11}}=\{i_{13}+i_9,i_7\},\ \overline{G_{12}}=\{i_{19},i_{17},i_{16}\},\\
&\overline{G_{13}}=\{i_{19}+i_{12},i_{17}-i_{13},i_{14}+i_{16}\},\ \overline{G_{14}}=\{i_{12},i_8,i_7\},\\
&\overline{G_{15}}=\{i_{10}+i_{14},i_9+i_{13},i_7\},\ \overline{G_{16}}=\{i_{14}+i_{10},i_{13}+i_9,i_{19}\},\\
&\overline{G_{17}}=\{i_{14}+i_{10},i_{13}+i_9,i_{12}+i_8+\lambda i_{19}\},\ \overline{G_{18}}=\{i_{14}+i_{10},i_{13}+i_9,i_{12}+i_8\},\\
&\overline{G_{19}}=\{i_{12},i_8,i_7,i_{19}\},\ \overline{G_{20}}=\{i_{19},i_{17},i_{16},i_7\},\ \overline{G_{21}}=\{i_{14}+i_{10},i_{13}+i_9,i_{12}+i_8,i_7\},\\
&\overline{G_{22}}=\{i_{14}+i_{10},i_{13}+i_9,i_{12}+i_8,i_{19}\},\ \overline{G_{23}}=\{i_{14}+i_{10},i_{13}+i_9,i_7,i_{19}\},\\
&\overline{G_{24}}=\{i_{14}+i_{10},i_{13}+i_9,i_{12}+i_8,i_{19},i_7\},\ \overline{G_{25}}=\{i_{19},i_{17},i_{16},i_{14}+i_{10},i_{13}+i_9,i_{12}+i_8\},\\
&\overline{G_{26}}=\{i_{19},i_{17},i_{16},i_{14},i_{13},i_{12}\},\ \overline{G_{27}}=\{i_{16},i_{13},i_9,i_{12},i_8,i_7\},\\
&\overline{G_{28}}=\{i_{14}+i_{10},i_{13}+i_9,i_{12}+i_8,i_{19},i_{17},i_{16},i_7\},\ \overline{G_{29}}=\{i_7,i_8,i_9,i_{10},i_{12},i_{13},i_{14},i_{16},i_{17},i_{19}\}.
\end{aligned}
$$

В данной статье для каждой из групп $G_1...G_{28}$ находятся все инвариантные одно- двух- трех- и четырехмерные подпространства, а также инвариантные прямые, 2-плоскости, 3-плоскости, 4-плоскости.

Рассмотрим группу G_1 с алгеброй Ли $\overline{G_1}=\{i_{19}\}$.

$$
\{i_{19}\}=\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&-1&0\end{pmatrix}\right\}.
$$

Необходимо найти все инвариантные одномерные пространства

$$\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\right)\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&-1&0\end{pmatrix}=\left(0,0,0,-a_5,a_4\right)=\lambda\cdot\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\right).$$

Отсюда следует система:

$$\begin{cases} 0=\lambda a_1,\\ 0=\lambda a_2,\\ 0=\lambda a_3,\\ -a_5=\lambda a_4,\\ a_4=\lambda a_5.\end{cases}$$

Из четвертого и пятого уравнений системы следует:

$$-a_5=\lambda^2 a_5.$$

Рассмотрим два случая:

1. $\lambda\neq 0$

Если $\lambda\neq 0$, то следует, что $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=0$,

$-a_5=\lambda^2 a_5 \Rightarrow a_5=0$, иначе $\lambda^2=-1$, значит, и $a_4=0$.

Вывод: нет ненулевых решений.

2. $\lambda=0\Rightarrow a_4=0, a_5=0.$

Итог: $\left(a_1,a_2,a_3,0,0\right)$ $\left\{a_1\overline{e_1}+a_2\overline{e_2}+a_3\overline{e_3}\right\}$.

Теорема 1. Относительно группы G_1 инвариантны одномерные подпространства $\left\{a_1\overline{e_1}+a_2\overline{e_2}+a_3\overline{e_3}\right\}$, двумерные подпространства $\left\{\overline{e_1}+a_3\overline{e_3},\overline{e_2}+b_3\overline{e_3}\right\}$, $\left\{\overline{e_1}+a_2\overline{e_2},\overline{e_3}\right\}$, $\left\{\overline{e_1}+a_2\overline{e_2}+a_3\overline{e_3}+a_5\overline{e_5},\overline{e_4}+b_5\overline{e_5}\right\}$, $\left\{\overline{e_2},\overline{e_3}\right\}$, $\left\{\overline{e_2}+a_3\overline{e_3},\overline{e_5}\right\}$, $\left\{\overline{e_2}+a_3\overline{e_3}+a_4\overline{e_4},\overline{e_5}\right\}$, $\left\{\overline{e_3}+a_5\overline{e_5},\overline{e_4}\right\}$, $\left\{\overline{e_4},\overline{e_5}\right\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\left\{a_3\overline{e_1}-b_3\overline{e_2}+\overline{e_3},\overline{e_4},\overline{e_5}\right\}$, $\left\{a_2\overline{e_1}+\overline{e_2},a_4\overline{e_1}-b_4\overline{e_3}+\overline{e_4},a_5\overline{e_1}-b_5\overline{e_3}+\overline{e_3}\right\}$, $\left\{a_2\overline{e_1}+\overline{e_2},a_3\overline{e_1}+\overline{e_3},a_5\overline{e_1}-b_5\overline{e_4}+\overline{e_5}\right\}$, $\left\{\overline{e_1},a_4\overline{e_2}-b_4\overline{e_3},-a_5\overline{e_2}-b_5\overline{e_5}+\overline{e_5}\right\}$, $\left\{\overline{e_1},-a_3\overline{e_2}+\overline{e_3},-a_5\overline{e_2}-b_5\overline{e_4}+\overline{e_5}\right\}$, $\left\{\overline{e_1},-a_3\overline{e_2}+\overline{e_3},-a_4\overline{e_2}+\overline{e_4}\right\}$, $\left\{\overline{e_1},\overline{e_2},a_5\overline{e_3}-b_5\overline{e_4}+\overline{e_5}\right\}$ и $\left\{\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}\right\}$, четырехмерные подпространства $\left\{a_3\overline{e_1}+a_1\overline{e_3},a_3\overline{e_2}-a_2\overline{e_3},\overline{e_4},\overline{e_5}\right\}$.

Находя инвариантные подпространства для остальных подгрупп Ли $G_2 ... G_{28}$, аналогично получаем следующие теоремы.

Теорема 2. Относительно группы G_2 инвариантны одномерные подпространства $\left\{a_3\overline{e_3}+a_4\overline{e_4}+a_5\overline{e_5}\right\}$, двумерные подпространства $\left\{\overline{e_1}+a_3\overline{e_5},\overline{e_2}+b_3\overline{e_5}\right\}$, $\left\{\overline{e_1}+a_2\overline{e_2}+a_4\overline{e_4}+a_5\overline{e_5},\overline{e_3}+a_5\overline{e_5}\right\}$, $\left\{\overline{e_1}+a_2\overline{e_2},\overline{e_5}\right\}$, $\left\{\overline{e_2},\overline{e_5}\right\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\left\{a_3\overline{e_1}-b_5\overline{e_2}+\overline{e_3},a_4\overline{e_1}-b_4\overline{e_2}+\overline{e_4},a_5\overline{e_1}-b_5\overline{e_4}+\overline{e_5}\right\}$, $\left\{a_2\overline{e_1}+\overline{e_2},a_4\overline{e_1}-b_4\overline{e_3}+\overline{e_4},a_5\overline{e_1}-b_5\overline{e_3}+\overline{e_5}\right\}$,

$\left\{a_2\overline{e_1}+\overline{e_2}, a_3\overline{e_1}+\overline{e_3}, a_5\overline{e_1}-b_5\overline{e_4}+\overline{e_5}\right\}$, $\left\{a_2\overline{e_1}+\overline{e_2}, a_3\overline{e_1}+\overline{e_3}, a_4\overline{e_1}+\overline{e_4}\right\}$, $\left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, -a_5\overline{e_3}-b_5\overline{e_4}+\overline{e_5}\right\}$ и $\left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, -a_4\overline{e_3}+\overline{e_4}\right\}$.

Теорема 3. Относительно группы G_3 инвариантны одномерные подпространства $\left\{a_1\overline{e_1}+a_2\overline{e_2}\right\}$, $\left\{a_3\overline{e_3}+a_4\overline{e_4}+a_5\overline{e_5}\right\}$, двумерные подпространства $\left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\right\}$, $\left\{\overline{e_1}\pm\overline{e_2}+a_5\overline{e_5}, \overline{e_3}+a_5\overline{e_5}\right\}$, $\left\{\overline{e_1}\pm\overline{e_2}, \overline{e_4}+b_5\overline{e_5}\right\}$, $\left\{\overline{e_1}\pm\overline{e_2}, \overline{e_5}\right\}$, $\left\{\overline{e_2}, \overline{e_5}\right\}$, $\left\{\overline{e_3}+a_5\overline{e_5}, \overline{e_4}+b_5\overline{e_5}\right\}$, $\left\{\overline{e_4}, \overline{e_5}\right\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\left\{a_3\overline{e_1}-b_5\overline{e_2}+\overline{e_3}, a_4\overline{e_1}-b_4\overline{e_2}+\overline{e_4}; a_5\overline{e_1}-b_5\overline{e_4}+\overline{e_5}\right\}$, $\left\{a_2\overline{e_1}+\overline{e_2}, a_4\overline{e_1}-b_4\overline{e_3}+\overline{e_4}; a_5\overline{e_1}-b_5\overline{e_3}+\overline{e_5}\right\}$, $\left\{a_2\overline{e_1}+\overline{e_2}, a_3\overline{e_1}+\overline{e_3}, a_5\overline{e_1}-b_5\overline{e_4}+\overline{e_5}\right\}$, $\left\{a_2\overline{e_1}+\overline{e_2}, a_3\overline{e_1}+\overline{e_3}, a_4\overline{e_1}+\overline{e_4}\right\}$, $\left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, -a_5\overline{e_3}-b_5\overline{e_4}+\overline{e_5}\right\}$, $\left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, -a_4\overline{e_3}+\overline{e_4}\right\}$.

Теорема 4. Относительно группы G_5 инвариантны одномерные подпространства $\left\{a_1\overline{\beta e_1}+a_2\beta\overline{e_2}+a_3\beta\overline{e_3}+a_4\overline{e_4}\right\}$, двумерные подпространства $\left\{\overline{e_2}, \overline{e_5}\right\}$, $\left\{\overline{e_3}, \overline{e_4}\right\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\left\{\overline{e_1}, -a_3\overline{e_2}+\overline{e_3}, -a_4\overline{e_2}+\overline{e_4}\right\}$, $\left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, -a_5\overline{e_3}-b_5\overline{e_4}+\overline{e_5}\right\}$.

Теорема 5. Относительно группы G_6 инвариантных одномерных подпространств нет, инвариантны двумерные подпространства $\left\{\overline{e_1}-\overline{e_2}, \overline{e_4}+b_5\overline{e_5}\right\}$, $\left\{\overline{e_3}, \overline{e_5}\right\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{a_5e_3}+b_5\overline{e_4}+\overline{e_5}\right\}$, $\left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, -a_4\overline{e_3}+\overline{e_4}\right\}$.

Теорема 6. Относительно группы G_7 инвариантных одномерных подпространств нет, инвариантны двумерные подпространства $\left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\right\}$, $\left\{\overline{e_3}+a_4\overline{e_4}, \overline{e_5}\right\}$, $\left\{\overline{e_4}, \overline{e_5}\right\}$ трехмерные инвариантные подпространства $\left\{\overline{e_1}, -a_3\overline{e_2}+\overline{e_3}, -a_4\overline{e_2}+\overline{e_4}\right\}$.

Теорема 7. Относительно группы G_8 инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерные подпространства $\left\{\overline{e_1}+a_2\overline{e_2}, \overline{e_5}\right\}$, $\left\{\overline{e_4}, \overline{e_5}\right\}$, трехмерных инвариантных подпространств нет.

Теорема 8. Относительно группы G_9 инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерное подпространство $\left\{\overline{e_4}, \overline{e_5}\right\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\left\{\overline{e_3}, \overline{e_4}, \overline{e_5}\right\}$.

Теорема 9. Относительно группы G_{10} инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерное подпространство $\left\{\overline{e_1}-\overline{e_2}, \overline{e_5}\right\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\left\{a_2\overline{e_1}+\overline{e_2}, a_2\overline{e_1}-b_4\overline{e_3}+\overline{e_4}, a_5\overline{e_1}-b_5\overline{e_3}+\overline{e_5}\right\}$, $\left\{a_3\overline{e_1}+\overline{e_2}, a_3\overline{e_1}+\overline{e_3}, a_4\overline{e_1}+\overline{e_4}\right\}$.

Теорема 10. Относительно группы G_{11} инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерное подпространство $\left\{\overline{e_1}-\overline{e_2}, \overline{e_5}\right\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\left\{a_2\overline{e_1}+\overline{e_2}, a_3\overline{e_1}+\overline{e_3}, a_5\overline{e_1}-b_5\overline{e_4}+\overline{e_5}\right\}$, $\left\{a_2\overline{e_1}+\overline{e_2}, a_3\overline{e_1}+\overline{e_3}, a_4\overline{e_1}+\overline{e_4}\right\}$.

Теорема 11. Относительно группы G_{12} инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерное подпространство $\left\{\overline{e_4}, \overline{e_5}\right\}$, трехмерное инвариантное подпространство $\left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\right\}$.

Теорема 12. Относительно группы G_{13} инвариантных одномерных подпространств нет, двумерных подпространств нет, трехмерных инвариантных подпространств нет.

Теорема 13. Относительно группы G_{14} инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерные подпространства $\{\overline{e_4},\overline{e_5}\}$, трехмерное инвариантное подпространство $\{\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}\}$.

Теорема 14. Относительно группы G_{15} инвариантны одномерные подпространства $\{a_1\overline{e_1}+a_2\overline{e_2}\}$, $\{a_1\overline{e_1}-a_1\overline{e_2}+a_3\overline{e_3}+a_5\overline{e_5}\}$, двумерные подпространства, $\{\overline{e_1}-\overline{e_2}+a_4\overline{e_4}+a_5\overline{e_5},\overline{e_3}+b_4\overline{e_4}+b_5\overline{e_5}\}$, $\{\overline{e_1}+a_2\overline{e_2}+a_3\overline{e_3}+a_5\overline{e_5},\overline{e_4}-a_5\overline{e_5}\}$, $\{\overline{e_1}-\overline{e_2},\overline{e_5}\}$, $\{\overline{e_4},\overline{e_5}\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\{a_2\overline{e_1}+\overline{e_2},a_2\overline{e_1}-b_4\overline{e_3}+\overline{e_4};a_5\overline{e_1}-b_5\overline{e_3}+\overline{e_5}\}$, $\{a_2\overline{e_1}+\overline{e_2},a_3\overline{e_1}+\overline{e_3},a_5\overline{e_1}-b_5\overline{e_4}+\overline{e_5}\}$, $\{a_2\overline{e_1}+\overline{e_2},a_3\overline{e_1}+\overline{e_3},a_4\overline{e_1}+\overline{e_4}\}$, $\{\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}\}$, $\{a_2\overline{e_1}+a_1\overline{e_2},\overline{e_3},\overline{e_4},\overline{e_5}\}$.

Теорема 15. Относительно группы G_{16} инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерные подпространства $\{\overline{e_4},\overline{e_5}\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\{\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}\}$.

Теорема 16. Относительно группы G_{17} инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерные подпространства $\{\overline{e_4},\overline{e_5}\}$, трехмерное инвариантное подпространство $\{\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}\}$.

Теорема 17. Относительно группы G_{18} инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерные подпространства $\{\overline{e_4},\overline{e_5}\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\{\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}\}$.

Теорема 18. Относительно группы G_{19} инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерные подпространства $\{\overline{e_4},\overline{e_5}\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\{\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}\}$.

Теорема 19. Относительно группы G_{20} инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерные подпространства $\{\overline{e_4},\overline{e_5}\}$, трехмерные инвариантные подпространства $\{\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}\}$.

Теорема 20. Относительно группы G_{21} – G_{28} инвариантных одномерных подпространств нет, двумерные подпространств нет, трехмерных инвариантных подпространств нет.

Образы стационарности групп Ли

Определение 1. Образом стационарности подгруппы K группы G называется совокупность D фигур пространства L_5 и ему соответствующего векторного пространства ${}^{1}E_5$ таких, что группе K принадлежат те и только те преобразования, при которых каждая из фигур совокупности D инвариантна.

Определение 2. Упорядоченная совокупность фигур пространства L_5 называется флагом, если все фигуры этой совокупности являются k-плоскостями (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5) пространства L_5, причем каждая последующая плоскость содержится в предыдущей.

Зафиксируем $\overline{e_5}$. Рассмотрим вектор (0,0,0,0,1) и потребуем, чтобы он был инвариантен. При этом получим следующий результат:

$$(0,0,0,0,1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & 0 & \omega & \varepsilon & \varphi \\ \beta & -\omega & 0 & \psi & \rho \\ \gamma & -\varepsilon & -\psi & 0 & \eta \\ \delta & -\varphi & -\rho & -\eta & 0 \end{pmatrix} = (\delta;-\varphi;-\rho;-\eta;0) = \lambda\cdot\overline{e_5} = \lambda(0,0,0,0,1).$$

Из этого следует, что $\lambda = 0, \delta = 0, -\varphi = 0, -\rho = 0, -\eta = 0$.

При этом получаем алгебру Ли группы Ли $\overline{G_{27}} = \{i_7, i_8, i_9, i_{12}, i_{13}, i_{16}\}$. Таким образом, группа Ли G_{27} имеет в качестве образа стационарности флаг $\{R_0, R_1\}$.

Аналогично получаем следующие образы стационарности, результаты запишем в виде следующих теорем:

Теорема 21. Образом стационарности для подгруппы Ли G_{26} является флаг $\{R_0, {}^{1}R_1\}$.

Теорема 22. Образом стационарности для подгруппы Ли G_{28} является флаг $\{R_0, R_1^{1}\}$.

Теорема 23. Если $\lambda = 0$, то образом стационарности для подгруппы Ли G_{25} является флаг $\left\{R_0, \overset{0\,1}{R_1}\right\}$.

Теорема 24. Образом стационарности для подгруппы Ли G_{20} является флаг $\{R_0, R_2\}$.

Теорема 25. Если $\eta = 0$, то образом стационарности для подгруппы Ли G_{14} получим флаг $\left\{R_0, \overset{0}{R_2}\right\}$.

Теорема 26. Образом стационарности для подгруппы Ли G_{19} является флаг $\{R_0, {}^{1}R_2\}$.

Теорема 27. Если $\alpha = 0$, то образом стационарности для подгруппы Ли G_{12} получим флаг $\left\{R_0, {}^{1}\overset{0}{R_2}\right\}$.

Используя геометрические характеристики подгрупп Ли, мы получаем цепочки по включению подгрупп Ли группы Ли вращений пространства L_5.

Цепочки:

$H \supset G_{28}; G_{27}, G_{26}, G_{25}; G_{24}; G_{23}, G_{22}, G_{21}, G_{20}, G_{19}; G_{18}, G_{17}, G_{16}, G_{15}, G_{14}, G_{13}, G_{12}; G_{11}, G_{10}, G_{9},$
$G_{8}, G_{7}; G_{6}, G_{5}, G_{4}, G_{3}, G_{2}, G_{1}.$

$G_{27} \supset G_{25}; G_{22}; G_{18}, G_{17}, G_{16}, G_{12}; G_{10}, G_{9}; G_{6}, G_{4}, G_{1}.$

$G_{26} \supset G_{14}; G_{11}, G_{8}; G_{5}, G_{4}, G_{3}.$

$G_{25} \supset G_{13}, G_{12}; G_{7}; G_{2}, G_{1}.$

$G_{24} \supset G_{22}; G_{18}, G_{17}, G_{16}, G_{12}; G_{10}, G_{9}; G_{6}, G_{4}, G_{1}.$

$G_{23} \supset G_{22}, G_{21}; G_{18}, G_{17}, G_{16}, G_{15}; G_{11}, G_{10}; G_{4}, G_{3}, G_{2}, G_{1}.$

$G_{22} \supset G_{16}, G_{15}; G_{11}, G_{10}; G_{4}, G_{3}, G_{2}, G_{1}.$

$G_{21} \supset G_{18}, G_{17}, G_{16}; G_{10}; G_{4}, G_{1}.$

$G_{20} \supset G_{14}; G_{7}; G_{3}, G_{2}, G_{1}.$

$G_{19} \supset G_{12}; G_{8}; G_{3}, G_{1}.$

$G_{18} \supset G_{10}; G_{4}.$

$G_{17} \supset G_{10}; G_{4}.$

$G_{16} \supset G_{10}; G_{4}, G_{1}.$

$G_{15} \supset G_{11}, G_{10}; G_{4}, G_{3}.$

$G_{14} \supset G_{3}.$

$G_{13} \supset G_{2}.$

$G_{12} \supset G_{1}.$

$G_{11} \supset G_{4}, G_{3}.$

$G_{10} \supset G_{4}.$

$G_{8} \supset G_{5}, G_{3}.$

$G_{7} \supset G_{2}, G_{1}.$

Пусть G группа Ли H_1, H_2 ее подгруппы Ли, причем $H_1 \subset H_2$. Каноническим морфизмом однородного пространства G/H_1 в однородное пространство G/H_2 называется морфизм f вида:

f : $G / H_1 \to G / H_2 : aH_1 \to aH_2$ для любого $a \in G$.

Таким образом, полученная выше классификация цепочек подгрупп Ли группы вращений пространства L_5 приводит к классификации всех канонических морфизмов однородных пространств со структурной группой H – группой всех вращений пространства L_5.

Классификация всех связных подгрупп Ли группы Ли G с точностью до сопряженности имеется в [1]. Тем самым классифицированы с точностью до изоморфизма все однородные пространства со структурной группой H. Ставится задача среди всех таких однородных пространств выделить редуктивные однородные пространства.

В данной главе найдены редуктивные однородные пространства вида H/G_i, где G_i – связные подгруппы Ли группы Ли H вращений пространства L_5. Метод решения задачи состоит в том, что для исследуемого однородного пространства H/G_i рассматриваются соответствующие алгебры Ли $\overline{H}$ и $\overline{G_i}$, затем находятся все $\left(\dim H - \dim G_i\right)$-мерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$, инвариантные относительно $\operatorname{ad}\overline{G_i}$. Среди таких пространств находятся дополнительные к $\overline{G_i}$. Эти пространства будут редуктивными дополнениями для однородного пространства H/G_i. Поскольку пространство G/H редуктивно, отсюда будет следовать редуктивность однородного пространства G/G_i.

Определение 1. Однородное пространство H/G_i называется редуктивным, если алгебра Ли $\bar{H}$ группы Ли H распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{G} = m + \overline{G}_i \tag{6}$$

причем подпространство m инвариантно относительно $ad\overline{G_i}$, где $ad\overline{G_i}$ – присоединенное представление алгебры Ли $\bar{G}$.

Рассмотрим однородное пространство H/G_{14}, $\overline{G_{14}} = \{i_7, i_8, i_{12}\}$, $a = \{i_7\}$, $\overline{H} = \left\{i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{16}, i_{17}, i_{19}\right\}$.

1^0 случай:

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
x_1 & 1 & & & & & & & q & a & z \\
x_2 & & 1 & & & & & & w & s & x \\
x_3 & & & 1 & & & & & e & d & c \\
x_4 & & & & 1 & & & & r & f & v \\
x_5 & & & & & 1 & & & t & g & b \\
x_6 & & & & & & 1 & & y & h & n \\
x_7 & & & & & & & 1 & u & j & m \\
\hline
 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{12} & i_{13} & i_{14} & i_7 & i_{16} & i_{17} & i_{19}
\end{array}
\qquad
\begin{aligned}
x_1 &= i_8 + qi_{16} + ai_{17} + zi_{19}\\
x_2 &= i_9 + wi_{16} + si_{17} + xi_{19}\\
x_3 &= i_{10} + ei_{16} + di_{17} + ci_{19}\\
x_4 &= i_{12} + ri_{16} + fi_{17} + vi_{19}\\
x_5 &= i_{13} + ti_{16} + gi_{17} + bi_{19}\\
x_6 &= i_{14} + yi_{16} + hi_{17} + ni_{19}\\
x_7 &= i_7 + ui_{16} + ji_{17} + mi_{19}.
\end{aligned}$$

Используя таблицу коммутаторов, получим

$$\left[a,x_1\right]=i_{12},\ \left[a,x_2\right]=i_{13},\ \left[a,x_3\right]=i_{14},\ \left[a,x_4\right]=i_8,\ \left[a,x_5\right]=i_9,\ \left[a,x_6\right]=i_{10},\ \left[a,x_7\right]=0. \tag{7}$$

Приравнивая правые части равенств (7) линейным комбинациям векторов $x_1 \ldots x_7$:

$$\begin{aligned}&\alpha_k i_8 + \beta_k i_9 + \gamma_k i_{10} + \delta_k i_{12} + \omega_k i_{13} + \varepsilon_k i_{14} + \rho_k i_{17} + i_{16}\left(\alpha_k q + \beta_k w + \gamma_k e + \delta_k r + \omega_k t + \varepsilon_k y + \rho_k u\right) + \\ &+ i_{17}\left(\alpha_k a + \beta_k s + \gamma_k d + \delta_k f + \omega_k g + \varepsilon_k h + \rho_k j\right) + i_{19}\left(\alpha_k z + \beta_k x + \gamma_k c + \delta_k v + \omega_k b + \varepsilon_k n + \rho_k m\right),\end{aligned}$$

где $k = 1 \ldots 7$, и проводя соответствующие вычисления, получим:

1) $\begin{array}{l}\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 1, \omega_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \rho_1 = 0,\\ r = 0, f = 0, v = 0\end{array}$

2) $\begin{array}{l}\alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \omega_2 = 1, \varepsilon_2 = 0, \rho_2 = 0,\\ t = 0, g = 0, b = 0\end{array}$

3) $\alpha_3 = 0, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 0, \delta_3 = 0, \omega_3 = 0, \varepsilon_3 = 1, \rho_3 = 0,$
$y = 0, h = 0, n = 0$

4) $\alpha_4 = 1, \beta_4 = 0, \gamma_4 = 0, \delta_4 = 0, \omega_4 = 0, \varepsilon_4 = 0, \rho_4 = 0,$
$q = 0, a = 0, z = 0$

5) $\alpha_5 = 0, \beta_5 = 1, \gamma_5 = 0, \delta_5 = 0, \omega_5 = 0, \varepsilon_5 = 0, \rho_5 = 0,$
$w = 0, s = 0, x = 0$

6) $\alpha_6 = 0, \beta_6 = 0, \gamma_6 = 1, \delta_6 = 0, \omega_6 = 1, \varepsilon_6 = 0, \rho_6 = 0,$
$e = 0, d = 0, c = 0.$

Из равенств 1–6 можно сделать вывод, что относительно оператора i_7 инвариантно следующее пятимерное подпространство:

$$i_8, i_9, i_{10}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_7 + ui_{16} + ji_{17} + mi_{19}.$$

Теорема 28. Однородное пространство H / G_8 является редуктивным. Редуктивными дополнениями для него являются пространства $m = \{i_8, i_9, i_{10}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{17}, i_{19}\}$.

Теорема 29. Однородное пространство H / G_{14} является редуктивным. Редуктивными дополнениями для него являются пространства $m = \{i_9, i_{10}, i_{13}, i_{14}, i_{16}, i_{17}, i_{19}\}$.

Теорема 30. Однородное пространство H / G_{19} является редуктивным. Редуктивными дополнениями для него являются пространства $m = \{i_9, i_{10}, i_{13}, i_{14}, i_{16}, i_{17}\}$.

Теорема 31. Однородное пространство H / G_{20} является редуктивным. Редуктивными дополнениями для него являются пространства $m = \{i_8, i_9, i_{10}, i_{12}, i_{13}, i_{14}\}$.

Теорема 32. Однородное пространство H / G_{26} является редуктивным. Редуктивным дополнением для него является пространства $m = \{i_7, i_8, i_9, i_{10}\}$.

Теорема 33. Однородное пространство H / G_{27} является редуктивным. Редуктивным дополнением для него является пространства $m = \{i_{10}, i_{14}, i_{17}, i_{19}\}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцовых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – Т. 126, № 1. – С. 13–22.

2. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.

3. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 106–115.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 27.03.2018

Yudov A.A., Arabchik E.V., Kononyuk M.A., Sirisko E.A. **Invariant Characteristics of Lie Subgroup of Lie Group of Motions of the Five-Dimensional Lorentz Space**

The aim of the study is to find invariant subspaces, lines, and planes for Lie subgroups of the Lie group H of rotations of the five-dimensional Lorentz space and the classification of homogeneous reductive spaces with a fundamental group-the Lie group of motions of the five-dimensional Lorentz space.