

Tesis Doctoral  
Ingeniería Mecánica

Análisis del efecto de tamaño y forma de  
la entalla en componentes sometidos a  
fatiga

Autor:

José Antonio Balbín Molina

Directores:

Alfredo Navarro Robles

Catedrático

Víctor Chaves Repiso

Profesor titular

Dpto. de Ingeniería Mecánica y Fabricación Industrial

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020



*A mis padres*





# Agradecimientos

Me gustaría agradecer en estas breves líneas a todas aquellas personas que han formado parte de esta etapa.

En primer lugar, quiero expresar mi gratitud a mis directores de tesis, Alfredo y Víctor, por su ayuda prestada en todo momento, su buen hacer y la confianza depositada desde el primer día. Gracias también al resto de miembros del departamento de Ingeniería Mecánica y Fabricación por la ayuda recibida.

También me gustaría agradecer al Dr. Nicolás Larrosa, la grata bienvenida y su labor de orientación y motivación durante mi estancia investigadora en Bristol.



# Resumen

El crecimiento de grietas por fatiga es el mecanismo de fallo más común en estructuras industriales o componentes mecánicos, ya que generalmente están sujetos a cargas cíclicas. La presencia de discontinuidades geométricas como las entallas provoca un aumento de la tensión local y puede conducir a una formación temprana de grietas pequeñas. Comprender el proceso de fatiga en componentes con entalla y estimar sus límites de fatiga es de gran interés para los ingenieros e investigadores, por lo que los métodos para predecir el fallo por fatiga deben tener en cuenta su efecto.

El objetivo principal de esta tesis es evaluar la resistencia a fatiga de componentes entallados teniendo en cuenta el efecto de tamaño del propio componente. Por este motivo se ha realizado la formulación de un método de cálculo, basado en la propagación de grietas pequeñas, que considera el efecto de tamaño finito a la vez que se han llevado a cabo ensayos experimentales representativos de este efecto.

La primera parte de esta tesis consiste en el desarrollo de un método para la estimación del límite de fatiga de componentes entallados en los que la grieta nace de la raíz de la entalla. El método combina la técnica de los elementos finitos y el uso del modelo microestructural de grieta pequeña propuesto por Navarro y de los Ríos (modelo NR) y su formulación está basada en el trabajo de Hartranft y Sih que propone la superposición de problemas para obtener una anulación sucesiva e iterativa de las tensiones en los contornos de interés. El objetivo es dotar al método de la capacidad y versatilidad para estimar la resistencia a fatiga de componentes en los que la entalla es de tamaño y forma arbitrarios. Para ello, el método desarrollado consiste en la descomposición del problema original de un componente entallado, de geometría real, en diferentes escenarios más simples. La división del problema original en estos escenarios más simples

reduce enormemente la dificultad de resolución y sólo precisa de un proceso iterativo entre las resoluciones de ambos escenarios para conseguir la solución del problema original. La base del proceso iterativo desarrollado consiste en que la solución a un escenario representa las condiciones de contorno necesarias para resolver el otro escenario. Este proceso iterativo se repite sucesivamente hasta hallar la convergencia. Para comprobar la funcionalidad y validar el método, se han realizado varias comparaciones con ensayos de fatiga sobre componentes entallados presentes en la literatura. Se han analizado diferentes tamaños y tipologías de entallas así como varios materiales, obteniéndose en todos ellos estimaciones de límite de fatiga cercanas a los valores experimentales. Además, estas estimaciones se han comparado también con las obtenidas mediante otros métodos como los de distancia crítica, entre otros.

La segunda parte de esta tesis consiste en tareas experimentales relacionadas con el efecto de tamaño finito del componente. Se ha realizado una extensa cantidad de ensayos de fatiga sobre probetas entalladas y fabricadas en acero inoxidable. El efecto de tamaño relativo de la entalla sobre el tamaño del componente ha sido analizado, fijando el diámetro exterior de las probetas e incrementando progresivamente el radio de la entalla. Con esto se pretende evaluar el efecto de tamaño finito sobre la resistencia a fatiga y la influencia de las superficies cercanas a la microgrieta, debido al aumento del tamaño de la entalla y la correspondiente reducción progresiva del ligamento. Se ha obtenido una curva S-N para cada configuración y los límites de fatiga obtenidos han sido comparados con las predicciones del método iterativo desarrollado en este trabajo y también con las predicciones de otros métodos. Se ha observado que los valores experimentales discrepan con las estimaciones teóricas, siendo éstas últimas extremadamente conservativas. Este hecho ha sido atribuido al endurecimiento del material y a las tensiones residuales provenientes del proceso de mecanizado de las probetas. Por tanto, se ha propuesto un método práctico para aproximar dichos efectos a través de la tensión última de rotura de las piezas mecanizadas. Finalmente, las probetas ensayadas, cuya vida a fatiga se sitúa en la zona de alto número de ciclos, han sido analizadas a través de diferentes técnicas microscópicas. Se han evaluado las superficies de fractura para localizar los puntos de iniciación y observar la propagación de grieta. Los resultados obtenidos muestran que tanto la iniciación como la propagación de grieta se sitúan muy cerca del punto y dirección de máxima tensión principal, respectivamente.

# Abstract

Fatigue crack growth is the most common failure mechanism in industrial structures or mechanical components, as they are generally subjected to cyclic loading. The presence of geometric discontinuities such as notches, causes an increase in local stress at the notch root and this can lead to early formation of small cracks. Understanding the fatigue process in notched components and estimating their fatigue limits is of great interest to engineers and researchers, so the methods for predicting fatigue failure must take their effect into account.

The main goal of this thesis is to evaluate the fatigue strength of notched components taking into account the size effect of the component itself. For this reason, a calculation method has been formulated, based on the propagation of small cracks, that collects the effect of finite size while representative experimental tests of this effect have been performed.

The first part of this thesis consists on the development of a method for estimating the fatigue limit of notched components in which the crack grows from the notch root. The method combines the finite elements technique and the use of the short crack microstructural model proposed by Navarro and de los Ríos (NR model) and its formulation is based on the technique proposed by Hartranft and Sih that proposes the superposition of problems to obtain a successive and iterative cancellation of the stresses in the contours of interest. The objective is to provide a capable and versatile method to estimate the fatigue strength of components in which the notch is of arbitrary size and shape. To do this, the developed method consists on the breakdown of the original problem of a notched component, of real geometry, in different simpler scenarios. The division of

the original problem into these simpler scenarios greatly reduces the difficulty of resolution and only requires an iterative process between the resolutions of both scenarios, in order to achieve the solution of the original problem. The basis of the developed iterative process is that the solution to one scenario represents the boundary conditions necessary to solve the other scenario. This iterative process is repeated successively until convergence is achieved. To check the functionality and validate the method, several comparisons have been made with fatigue tests on notched components described in the literature. Different sizes and types of notches as well as various materials have been analyzed, obtaining fatigue limit estimations close to the experimental values in all of them. Furthermore, these predictions have also been compared with those obtained by other methods, such as the critical distance methods, among others.

The second part of this thesis consists on experimental tasks related to the finite size effect of the component. An extensive number of fatigue tests have been performed on stainless steel notched specimens. The effect of the relative size of the notch with respect to the overall size of the specimen has been analyzed, fixing the outer diameter of the specimens and progressively increasing the radius of the notch. This is done to evaluate the finite size effect on fatigue strength and the influence of back surfaces close to the microcrack, due to the increase of the notch size and the corresponding progressive reduction of the cross-section. An S-N curve has been obtained for each configuration and the fatigue limits obtained have been compared with the predictions performed using the iterative method developed in this work, and also with the predictions obtained with other methods. Experimental values have been found to disagree with theoretical predictions, the latter being extremely conservative. This fact has been attributed to the material hardening and the residual stresses from the machining process of the specimens. Therefore, a practical method has been proposed to approximate these effects through the ultimate tensile strength of the machined notched specimens. Finally, the tested specimens, broken after a high number of fatigue cycles, have been analyzed through different microscopic techniques. Fracture surfaces have been evaluated to locate crack initiation points and observe crack propagation. The results obtained show that both crack initiation and propagation are located very close to the point and direction of maximum principal stress, respectively.







# Índice general

Índice general	XI
Índice de figuras	XV
Índice de tablas	XIX
<b>1. El proceso de fatiga</b>	<b>1</b>
1.1. Iniciación y propagación de grietas por fatiga . . . . .	4
1.2. Caracterización mediante Mecánica de la Fractura . . . . .	5
1.2.1. Mecánica de la Fractura Elástica Lineal . . . . .	5
1.2.2. Mecánica de la Fractura Microestructural . . . . .	9
1.2.3. Mecánica de la Fractura Elasto-Plástica . . . . .	11
1.2.4. Grietas pequeñas . . . . .	12
1.3. Resistencia a fatiga en presencia de entallas . . . . .	15
1.3.1. Grietas no-propagantes . . . . .	19
<b>2. Modelo microestructural de crecimiento de grieta pequeña</b>	<b>23</b>
2.1. El modelo de Navarro y de los Ríos . . . . .	23
2.2. Representación del problema de una grieta mediante la teoría de dislocaciones . . . . .	24
2.3. Resolución numérica del modelo NR . . . . .	28
2.4. Aplicación del modelo NR a componentes entallados . . . . .	36
2.4.1. Cálculo del límite de fatiga . . . . .	38
2.4.2. Ejemplo de aplicación del modelo NR a una entalla . . . . .	39
<b>3. Método iterativo para la predicción de resistencia a fatiga de componentes entallados</b>	<b>43</b>
3.1. El método iterativo . . . . .	43
3.2. La metodología IMFEM . . . . .	47
3.3. Algoritmo IMFEM . . . . .	53
3.4. Aplicación del algoritmo IMFEM a una placa con agujero circular . . . . .	59

3.4.1. Análisis de convergencia . . . . .	63
<b>4. Validación del método IMFEM</b>	<b>71</b>
4.1. Entallas en forma de agujero circular . . . . .	72
4.2. Entallas en forma de V . . . . .	75
4.3. Entallas en forma de U . . . . .	79
4.4. Entallas en forma semicircular . . . . .	80
4.5. Discusión de los resultados . . . . .	82
<b>5. Ensayos de fatiga sobre probetas entalladas</b>	<b>93</b>
5.1. Diseño y análisis de las probetas entalladas . . . . .	93
5.1.1. Material . . . . .	93
5.1.2. Geometría . . . . .	94
5.1.3. Mecanizado . . . . .	96
5.1.4. Rugosidad . . . . .	97
5.1.5. Dureza . . . . .	98
5.2. Ensayos sobre probetas entalladas . . . . .	98
5.2.1. Ensayos de tracción . . . . .	98
5.2.2. Ensayos de fatiga . . . . .	99
5.3. Curvas S-N . . . . .	99
5.3.1. Parte inclinada . . . . .	100
5.3.2. Parte horizontal . . . . .	102
5.4. Análisis microscópico de la superficie de fractura . . . . .	106
5.4.1. Iniciación de grieta . . . . .	107
5.4.2. Propagación de grieta . . . . .	108
<b>6. Análisis de los resultados experimentales</b>	<b>115</b>
6.1. Estimación del límite de fatiga para probetas entalladas . . . . .	115
<b>7. Conclusiones y trabajos futuros - Conclusions and future work</b>	<b>127</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	127
7.2. Trabajos futuros . . . . .	129
7.3. Conclusions . . . . .	131
7.4. Future work . . . . .	133
<b>Bibliografía</b>	<b>135</b>
<b>Anexo A. Programación del método IMFEM</b>	<b>145</b>

**Anexo B. Datos sobre los ensayos de fatiga**

**177**



# Índice de figuras

1.1. Ejemplo de representación de curva S-N. . . . .	3
1.2. Parámetros relacionados con amplitud de carga constante. . . . .	4
1.3. Modos básicos de apertura de grieta. . . . .	6
1.4. Crecimiento de grieta en función del FIT. . . . .	8
1.5. Representación esquemática del diagrama de Kitagawa-Takahashi. . . . .	10
1.6. Integral J. . . . .	12
1.7. Esquema del crecimiento de una grieta pequeña. . . . .	14
1.8. Distribución de tensiones $\sigma_{yy}$ en la raíz de una entalla. . . . .	17
1.9. Simplificación del diagrama de Frost. . . . .	19
2.1. Modelado mediante dislocaciones del problema de una grieta, zona plástica y barrera en medio infinito y sometido a una tensión externa uniforme. . . . .	25
2.2. Grieta bloqueada en las barreras microestructurales. . . . .	27
2.3. División en dos intervalos del problema de la grieta aplicando simetría. . . . .	32
2.4. Función de distribución de dislocaciones teórica y numérica. . . . .	35
2.5. Grieta naciendo de una entalla y definida mediante dislocaciones. . . . .	37
2.6. Grieta naciendo de un agujero circular. . . . .	40
2.7. Gradiente de tensión en la línea de la grieta. . . . .	41
2.8. Tensiones $\sigma_3^{i,N}$ para el caso de grieta naciendo de un agujero circular. . . . .	42
2.9. Tensiones $\sigma_{Li}^N$ para el caso de grieta naciendo de un agujero circular. . . . .	42
3.1. Método de Schwarz-Neumann. . . . .	44
3.2. Descomposición del problema real en escenarios más simples. . . . .	48
3.3. Detalles del escenario 1 en la primera iteración ( $k=0$ ). . . . .	49
3.4. Detalles del escenario 2 en la primera iteración ( $k=0$ ). . . . .	49
3.5. Detalles del escenario 1 en la segunda iteración ( $k=1$ ). . . . .	50
3.6. Detalles del escenario 2 en la segunda iteración ( $k=1$ ). . . . .	50
3.7. Descripción esquemática del algoritmo IMFEM. . . . .	54
3.8. Algoritmo IMFEM. . . . .	56
3.9. Modelado del algoritmo IMFEM. . . . .	59
3.10. Comunicación entre los diferentes procesos del algoritmo IMFEM. . . . .	59
3.11. Geometría de placa ( $a$ ) y modelado en elementos finitos ( $b$ ). . . . .	60

3.12. Gradiente de tensiones de una placa con agujero circular. . . . .	61
3.13. Tensiones $\sigma_{Li}^N$ en función de la longitud de grieta. . . . .	62
3.14. Número de iteraciones realizadas en función del grano $i$ estudiado. . . . .	64
3.15. Convergencia del valor de tensión en la barrera $\sigma_3^i$ obtenida en cada iteración para un agujero de radio 0.3 mm. . . . .	66
3.16. Convergencia del valor de tensión en la barrera $\sigma_3^i$ obtenida en cada iteración para un agujero de radio 0.7 mm. . . . .	67
3.17. Convergencia del valor de tensión en la barrera $\sigma_3^i$ obtenida en cada iteración para un agujero de radio 4.0 mm. . . . .	68
3.18. Tensiones $\sigma_{Li}^N$ obtenidas en las diferentes iteraciones para un agujero de radio 0.4 mm. . . . .	69
3.19. Tensiones $\sigma_{Li}^N$ obtenidas en las diferentes iteraciones para un agujero de radio 0.6 mm. . . . .	69
3.20. Tensiones $\sigma_{Li}^N$ obtenidas en las diferentes iteraciones para un agujero de radio 2.0 mm. . . . .	70
4.1. Resultados de Duquesnay para el acero SAE 1045 y predicciones con varios modelos. . . . .	73
4.2. Resultados de Duquesnay para la aleación de aluminio 2024-T351 y predicciones con varios modelos. . . . .	74
4.3. Resultados El Haddad et al. para el acero CSA G40.11 y predicciones con varios modelos. . . . .	74
4.4. Resultados de Frost para el acero medio (0.22 % C) y predicciones con varios modelos. . . . .	76
4.5. Resultados de Zambrano et al. para el acero de fundición EN-GJS-400-18-LT y predicciones con varios modelos. . . . .	77
4.6. Resultados de Meneghetti et al. para el acero C10 y predicciones con varios modelos. . . . .	80
4.7. Resultados de Lukáš et al. para el cobre y predicciones con varios modelos. . . . .	81
4.8. Resultados de Lukáš et al. para el acero (2.25 Cr - 1 Mo) y predicciones con varios modelos. . . . .	81
4.9. Resumen de los trabajos evaluados para la validación del modelo IMFEM. . . . .	83
4.10. Geometría de probeta ensayada por Wiersma con doble entalla en U. . . . .	86
4.11. Gradiente de tensiones en la entalla para las probetas ensayadas por Wiersma. . . . .	89
4.12. Sección neta de las probetas y grieta creciendo. Dimensiones en milímetros. . . . .	90
5.1. Detalle de la microestructura del acero AISI 304L. . . . .	94
5.2. Detalle de la geometría de las probetas. . . . .	95
5.3. Efecto de tamaño finito debido al tamaño de entalla. . . . .	96
5.4. Perfil 3d de rugosidad obtenido en el fondo de entalla. . . . .	97
5.5. Máquina de ensayos de fatiga MTS 809. . . . .	100

5.6. Ejemplo de curva S-N con 14 ensayos. . . . .	101
5.7. Curva S-N para radio de entalla 0.2 mm. . . . .	103
5.8. Curva S-N para radio de entalla 0.6 mm. . . . .	103
5.9. Curva S-N para radio de entalla 1.3 mm. . . . .	104
5.10. Curva S-N para radio de entalla 2.0 mm. . . . .	104
5.11. Curva S-N para radio de entalla 2.5 mm. . . . .	105
5.12. Curva S-N para radio de entalla 3.0 mm. . . . .	105
5.13. Vista de la superficie de fractura de la probeta R25A12 de entalla de radio 2.50 mm. . . . .	109
5.14. Vista de la superficie de fractura de la probeta R3A16 de entalla de radio 3.00 mm. . . . .	109
5.15. Esquema de la medida del ángulo de inicio de grieta. . . . .	110
5.16. Detalle de la medida del ángulo de inicio de grieta. . . . .	110
5.17. Superficie 3D de una probeta con entalla de radio 0.60 mm y perfil de la grieta en las primeras 800 micras. . . . .	112
5.18. Superficie 3D de una probeta con entalla de radio 3.00 mm y perfil de la grieta en las primeras 800 micras. . . . .	113
6.1. Detalla de la malla definida en Abaqus. . . . .	116
6.2. Esquema del gradiente de tensiones $\sigma_{yy}$ en la entalla. . . . .	117
6.3. Esquema del gradiente de tensiones $\sigma_{yy}$ en la entalla. . . . .	118
6.4. Factor $K_t$ calculados por elementos finitos y factor $K_f$ obtenido a través de varios métodos. . . . .	120
6.5. Factores $K_t$ y $K_f$ calculados para diferentes longitudes críticas $L$ . . . . .	120
6.6. Valores experimentales de límite de fatiga entallado y estimaciones teóricas realizadas con varios métodos. . . . .	122
6.7. Superficies de fractura de una probeta entallada después de un ensayo de tracción. . . . .	124
6.8. Estimación del límite de fatiga entallado basado en los valores actualizados del límite de fatiga intrínseco del material. Comparación con resultados experimentales. . . . .	125





# Índice de tablas

2.1. Valores numéricos de tensión en la barrera $\sigma_3$ y error porcentual en función del número de ecuaciones $N$ utilizado. . . . .	36
4.1. Propiedades de los materiales ensayados por Duquesnay et al. . . . .	73
4.2. Propiedades del acero ensayado por El Haddad et al. . . . .	75
4.3. Propiedades del acero ensayado por Frost. . . . .	75
4.4. Propiedades del acero de fundición ensayado por Zambrano et al. . . . .	76
4.5. Propiedades de la aleación en base níquel ensayada por Ren et al. . . . .	77
4.6. Resultados de Ren et al. para la aleación de Níquel Udimet 720 y predicciones con varios modelos. . . . .	78
4.7. Propiedades del acero inoxidable AISI 304L. . . . .	78
4.8. Resultados de probetas entalladas en V fabricadas en AISI 304L y predicciones con varios modelos. . . . .	79
4.9. Propiedades del acero al carbono C10. . . . .	79
4.10. Propiedades de los materiales ensayados por Lukáš et al. . . . .	82
4.11. Valores de error relativo de las estimaciones realizadas con el método IMFEM. . . . .	84
4.12. Propiedades del acero AISI 316L ensayado por Wiersma et al. . . . .	86
4.13. Geometría de las muestras ensayadas por Wiersma. . . . .	86
4.14. Factores de concentración de tensiones de los casos analizados por Wiersma referidos a sección bruta y neta. . . . .	87
4.15. Límites de fatiga de los casos analizados por Wiersma y estimaciones con diferentes métodos. Resultados referidos a sección neta. . . . .	87
4.16. Distancia crítica de Peterson ( $a=0.146$ mm) para las probetas ensayadas por Wiersma. . . . .	88
5.1. Composición del acero inoxidable AISI 304L. . . . .	94
5.2. Propiedades mecánicas del acero AISI 304L. . . . .	95
5.3. Valores de rugosidad en la entalla. . . . .	98
5.4. Medidas de dureza. . . . .	98
5.5. Datos de los ensayos de tracción sobre probetas entalladas. . . . .	99

---

5.6. Valores experimentales del límite de fatiga y factor de fatiga en entallas, $K_f$ , para cada tamaño de entalla ensayado. . . . .	106
5.7. Ángulos de iniciación de grieta para cada tamaño de entalla. . . . .	108
5.8. Ángulos de propagación de grieta para cada tamaño de entalla. . . . .	114
6.1. Factores de concentración de tensiones. . . . .	118
6.2. Valores experimentales y recalculados de la tensión última de tracción y límite de fatiga entallado para los diferentes tamaños de entalla. . . . .	123
6.3. Medidas de dureza y conversión a tensión última de tracción. . . . .	125
B.1. Ensayos de fatiga para probetas con entalla de radio 0.2 mm. . . . .	177
B.2. Ensayos de fatiga para probetas con entalla de radio 0.6 mm. . . . .	178
B.3. Ensayos de fatiga para probetas con entalla de radio 1.3 mm. . . . .	178
B.4. Ensayos de fatiga para probetas con entalla de radio 2.0 mm. . . . .	179
B.5. Ensayos de fatiga para probetas con entalla de radio 2.5 mm. . . . .	179
B.6. Ensayos de fatiga para probetas con entalla de radio 3.0 mm. . . . .	180

# Capítulo 1

## El proceso de fatiga

El fallo por fatiga es un proceso de daño estructural progresivo y localizado, que se produce en un componente mecánico cuando éste se encuentra sometido a una o varias cargas variables en el tiempo. La causa más común de fallo en elementos estructurales es la fatiga. El fallo del componente mecánico se debe a la aparición de pequeñas grietas, generalmente, en la superficie del componente, las cuales crecen hacia el interior, mermando las propiedades mecánicas hasta la rotura final. Por ello, este problema se debe abordar adecuadamente desde el proceso de diseño para evitar que estos fallos puedan llegar a ser catastróficos.

Desde mediados del siglo XIX el proceso de fatiga ha sido caso de estudio. En la fase de diseño se reconoció la necesidad de conocer los diferentes métodos por los cuales un material o componente puede fallar. Con el desarrollo de la máquina de vapor, medios de transporte y el uso más extendido de dispositivos mecánicos, los fallos de las piezas móviles que soportaban una carga aplicada repetida en el tiempo comenzaron a convertirse en una ocurrencia común. Se descubrió que los fallos se producían con la aplicación de tensiones nominales bajas pero en situaciones en las que la carga cambiaba repetidamente y generalmente se ubicaban en un cambio de sección en el componente o estructura. Debido a que estos fallos ocurrían en una parte del componente que había funcionado satisfactoriamente durante cierto tiempo, la opinión general se desarrolló en torno a la idea de que el material se había “cansado” de soportar la carga o que la re-aplicación continua de la carga había agotado, de alguna manera, la capacidad del

material para soportarla. Así, la palabra *fatiga* fue acuñada para describir estos hechos y el nombre se ha seguido utilizando hasta nuestros días.

Las primeras máquinas de ensayo de fatiga de materiales fueron creadas en esta época por autores como Wöhler [1], lo que provocó el comienzo de una gran etapa de realización de ensayos. A este autor se le reconoce la invención de la conocida *curva S-N* que consistía en la representación de los resultados de los ensayos realizados, es decir, la carga aplicada frente a la vida o ciclos del componente hasta la rotura. Una de las representaciones más comunes de la curva S-N es en doble escala logarítmica. Una expresión, en términos de doble escala logarítmica, de la curva S-N es la conocida ecuación de Basquin [2] (ecuación 1.1). En esta expresión el coeficiente  $A$  representa el valor de la tensión alterna,  $S$ , para 1 ciclo de vida. El exponente  $B$  es la pendiente de la línea que representa la curva S-N en doble escala logarítmica. Basquin, a principios del siglo XX, comprobó que los resultados experimentales de la curva S-N se ajustaban razonablemente bien a una relación lineal de pendiente negativa entre la amplitud de tensión aplicada  $S$  o rango de tensión aplicada  $\Delta S$  y los ciclos de vida  $N$  siempre y cuando se realizara una representación en doble escala logarítmica. En la figura 1.1 se muestra un ejemplo.

$$S = A \times N^B \quad (1.1)$$

Se comprobó experimentalmente que en la zona de alto número de ciclos, normalmente considerada a partir de  $10^6$  ciclos, se presentaba una relación horizontal en aceros, siendo común su representación mediante una flecha con el objetivo de definir esos ensayos como aquellos que no han finalizado con rotura, es decir, aquellos correspondientes a vida infinita. Uno de los datos más importantes que se puede extraer de la curva S-N de Wöhler para un acero concreto, es el *límite de fatiga* o tensión correspondiente a vida infinita. El límite de fatiga representa el nivel de tensión por debajo del cual no se produce la rotura. Dicho de otro modo, el número de ciclos de vida hasta la obtención de la rotura tiende a infinito siempre y cuando la tensión aplicada al sólido sea inferior al valor del límite de fatiga. Este parámetro depende de muchos factores, como pueden ser el tipo de carga, la existencia de tensión media, la geometría del componente, las condiciones ambientales, etc. Sin embargo, en materiales como aluminios o cobres no se

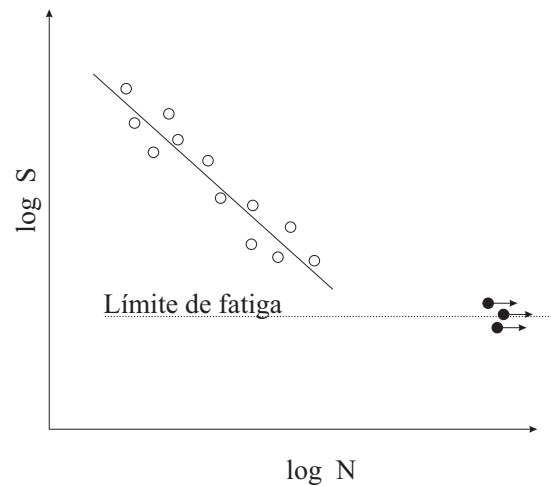


FIGURA 1.1: Ejemplo de representación de curva S-N.

encontró esta relación horizontal de la tensión de límite de fatiga por debajo de la cual no se producía la rotura, y en ese momento no se supo dar explicación a este hecho.

En el diseño de componentes sometidos a fatiga es imprescindible analizar cómo es la historia de carga aplicada. Esta puede ser aleatoria, aunque puede contener partes sustanciales que pueden considerarse como repetitivas dentro del funcionamiento del componente. El comportamiento de los materiales sometidos a fatiga suele caracterizarse con cargas de amplitud constante (ver figura 1.2). Por consiguiente, la nomenclatura usada en diseño a fatiga incluye definiciones como tensión media  $S_m$ , tensión alterna  $S_a$ , tensión máxima  $S_{max}$ , tensión mínima  $S_{min}$  o rango de tensión  $\Delta S$ , entre otros. Las relaciones algebraicas entre estos términos son:

$$S_m = \frac{S_{max} + S_{min}}{2} \quad (1.2)$$

$$S_a = \frac{S_{max} - S_{min}}{2} = \frac{\Delta S}{2} \quad (1.3)$$

Las tensiones de tracción y compresión se consideran de signo positivo y negativo, respectivamente. El ratio de tensión,  $R$ , es un parámetro muy común en la descripción

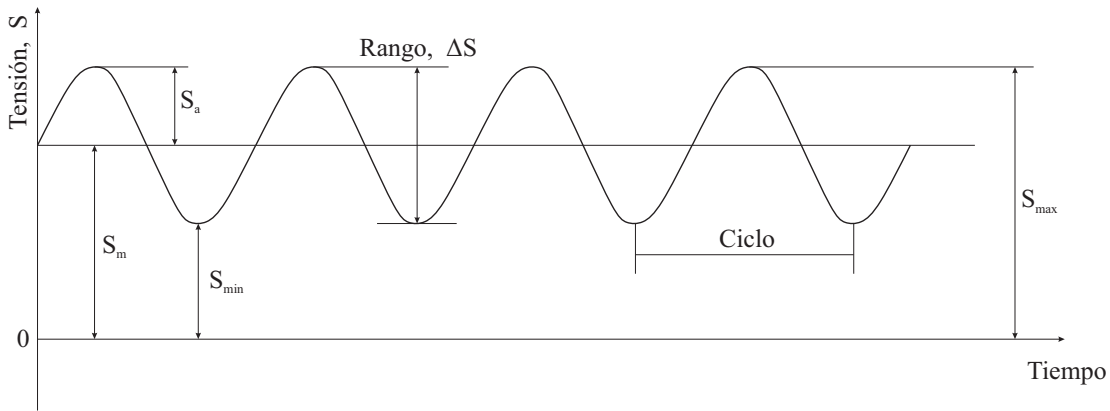


FIGURA 1.2: Parámetros relacionados con amplitud de carga constante.

de los análisis realizados en piezas sometidas a fatiga y se define como la relación entre la tensión mínima y la tensión máxima aplicadas al componente:

$$R = \frac{S_{min}}{S_{max}} \quad (1.4)$$

Un valor muy común es  $R = -1$ , el cual indica que la tensión media aplicada es igual a cero. Otro valor característico es  $R = 0$ , que define el caso en el que la tensión mínima es cero y, por tanto, la tensión media es de valor positivo. Un ciclo queda definido como el segmento de tensión en función del tiempo que se repite periódicamente.

## 1.1. Iniciación y propagación de grietas por fatiga

En el estudio de crecimiento y propagación de grietas, se establecen dos etapas de crecimiento denominadas etapa I y etapa II [3, 4]. La etapa I se centra en la iniciación de la grieta, la cual se ve afectada directamente por la microestructura del material y está controlada por esfuerzos y deformaciones tangenciales. Además, en esta etapa de iniciación pueden influir enormemente otros factores como el acabado superficial [5] o la orientación cristalográfica [6], por ejemplo. En la etapa II la dependencia con la microestructura casi desaparece y la grieta continúa su crecimiento típicamente en dirección normal a la carga aplicada. El paso de etapa I a etapa II se produce cuando la grieta

alcanza una determinada longitud que depende enormemente de la microestructura del material y de las condiciones de carga a las que está sometido el componente, variando de un caso a otro. En la práctica, existe el consenso, sin base física, de considerar que la grieta permanece en la fase de iniciación hasta que su tamaño es lo bastante grande como para poder ser localizada mediante métodos de inspección. Actualmente, el crecimiento de grietas pequeñas corresponde con lo que tradicionalmente se venía llamando fase de iniciación o nucleación. El término grieta pequeña hace referencia a aquellas grietas cuya magnitud es del orden de las dimensiones de los elementos microestructurales del material (por ejemplo, el tamaño medio de grano del material). A las grietas de longitudes superiores se les llama grietas grandes, normalmente se considera a partir de una longitud equivalente a 10 granos del material.

Esta tesis se centra en el análisis del proceso de crecimiento de grietas pequeñas por fatiga en componentes entallados.

## **1.2. Caracterización mediante Mecánica de la Fractura**

La Mecánica de la Fractura se encarga del estudio del crecimiento de grietas en componentes sometidos a fatiga. El análisis de la propagación de grietas puede realizarse mediante varias técnicas diferentes, dependiendo de cómo sea el tamaño de la grieta y el campo de tensiones y deformaciones en el vértice de la grieta. Las técnicas más habituales son la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL), la Mecánica de la Fractura Microestructural (MFM) y la Mecánica de la Fractura Elasto-Plástica (MFEP).

### **1.2.1. Mecánica de la Fractura Elástica Lineal**

La MFEL se encarga del estudio del crecimiento de grietas grandes a través de establecer una relación entre el campo tensional elástico delante del vértice de grieta y la velocidad de crecimiento de ésta. La hipótesis principal de esta teoría es que el material es homogéneo y continuo. Para ello se supone que el tamaño de la grieta es bastante superior a la longitud microestructural característica del material y a la zona plástica presente delante de la grieta. Existen varios modos en los que una grieta puede crecer

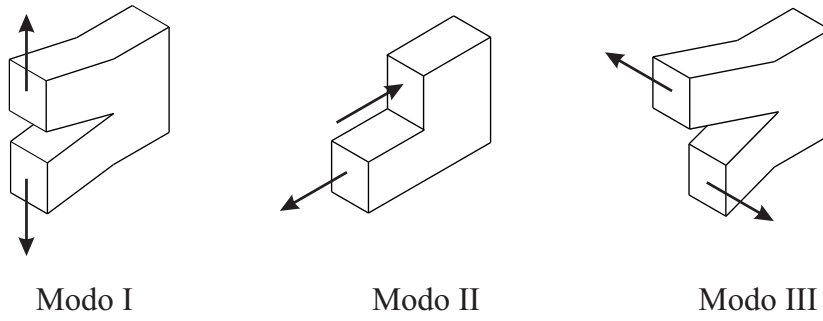


FIGURA 1.3: Modos básicos de apertura de grieta.

según la carga aplicada al sólido. Estos modos son tres y están representados en la figura 1.3. El modo I hace referencia a la separación de las caras de la grieta, una respecto de la otra, y se conoce como modo de tracción. El modo II define el desplazamiento entre las caras de la grieta de manera perpendicular al vértice de ésta y se conoce como modo tangencial. El modo III se refiere al desplazamiento entre las caras de la grieta de forma paralela al vértice de la misma y es conocido como modo tangencial fuera del plano.

Si se considera el problema 2D de una grieta en medio infinito y en Modo I, las tensiones alrededor del vértice de la grieta se escriben utilizando coordenadas polares  $(r, \theta)$  de la siguiente manera [7]:

$$\sigma_x = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (1.5)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (1.6)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (1.7)$$

Estas expresiones presentan dos componentes bien diferenciados. Un primer término correspondiente a la distribución geométrica del campo de tensiones en el espacio alrededor del vértice de la grieta  $f(\theta)/\sqrt{2\pi r}$ . El otro término,  $\sigma\sqrt{\pi a}$ , es una función de la



tensión aplicada  $\sigma$  y la longitud de grieta  $a$  que permite describir la intensidad o magnitud del campo de tensiones, también conocido como *factor de intensidad de tensiones* (FIT),  $K$ .

$$K = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (1.8)$$

El valor del FIT depende de varios factores como la carga aplicada, la forma de la grieta, la geometría del componente, etc. Las expresiones de  $K$  para otras geometrías, configuraciones, cargas, etc, suelen ser modificaciones de la ecuación 1.8. Puede decirse que el FIT es un parámetro que ayuda a describir la tensión y deformación en el vértice de la grieta [8]. Además, el FIT permite estimar la velocidad de propagación de grieta por cada ciclo de carga aplicado  $da/dN$ . Si la carga cíclica de fatiga varía entre cero y un valor positivo (teniendo amplitud constante), el FIT se sitúa en un rango  $\Delta K = K_{max} - K_{min}$ . Este análisis se realiza en un ciclo de fatiga, donde  $K_{min}$  y  $K_{max}$  representan el valor mínimo y máximo, respectivamente, alcanzado por el FIT durante el ciclo de fatiga evaluado y que corresponden a las tensiones aplicadas máxima  $S_{max}$  y mínima  $S_{min}$ . En el caso de  $S_{min} = 0$ , el rango de FIT es igual al FIT  $K = \Delta K = K_{max}$ . Según la propuesta de Paris et al. [9], la velocidad de propagación de grieta grandes, de longitud  $a$ , por cada ciclo de carga depende del rango del FIT:

$$\frac{da}{dN} = C\Delta K^b \quad (1.9)$$

donde  $C$  y el exponente  $b$  son constantes del material. En la práctica, la representación en doble escala logarítmica de  $da/dN$  frente a  $\Delta K$  es una curva que puede dividirse en varias partes con diferentes pendientes, tal y como se muestra en la figura 1.4. En esta representación se distinguen tres zonas bien diferenciadas. La zona I es la correspondiente a velocidades más bajas de propagación de grieta, cuyo valor mínimo corresponde al mínimo valor del rango del FIT  $\Delta K_{th}$ , conocido como FIT umbral, por debajo del cual no sería posible analizar el crecimiento de grieta según la MFEL. Debido a esto, las grietas con un rango de FIT menor a  $\Delta K_{th}$  se considerarían grietas no propagantes. Por otro lado, la zona II presenta una relación lineal entre las dos variables representadas en el gráfico y que es conocida como la ley de Paris [9]. En esta

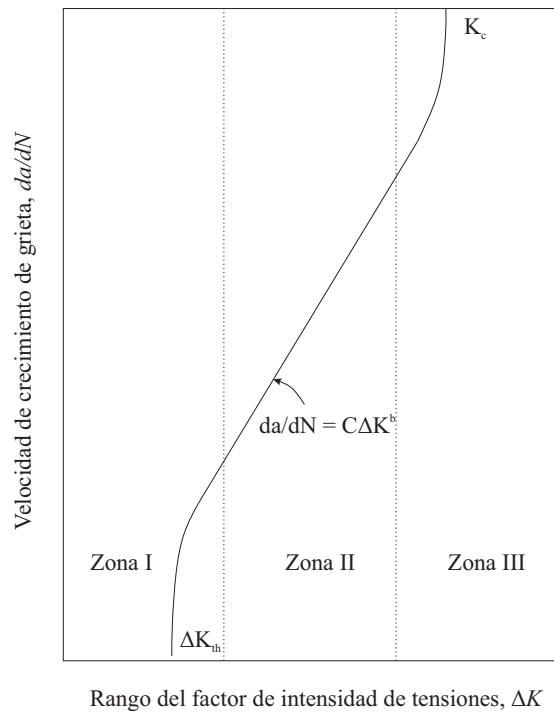


FIGURA 1.4: Crecimiento de grieta en función del FIT.

zona II las grietas son de un tamaño mayor y el crecimiento está menos influenciado por la microestructura del material. Por último, la zona III corresponde a la situación de mayor inestabilidad ya que la velocidad de crecimiento de grieta se dispara hasta producir el fallo del componente. El fallo se produce cuando el FIT alcanza el valor crítico llamado tenacidad a la fractura  $K_c$ . Este parámetro es característico de cada material y representa el máximo valor del FIT que una grieta puede soportar antes de propagarse de manera inestable.

Analíticamente, según las expresiones del campo de tensión en función del FIT 1.5-1.7, se produce una singularidad de tensión justo en el vértice de la grieta para  $r \rightarrow 0$ . En la práctica, los materiales metálicos tienden a presentar un límite de fluencia a partir del cual se deforman plásticamente. Es decir, si las tensiones producidas en las proximidades del vértice de la grieta superan el valor del límite de fluencia, aparece deformación plástica y esto permite la relajación y distribución del campo de tensiones en esa zona. La MFEL evidentemente no es capaz de captar la plasticidad existente delante de la grieta, al ser “elástica”. Por ello, la MFEL requiere que el tamaño de la

zona plástica sea bastante reducido con respecto al propio tamaño de la grieta y del componente (en torno a una décima parte o menor) para que la descripción del campo tensional que proporciona sea cercana a la realidad.

Es posible estimar el tamaño de la zona plástica en el vértice de la grieta,  $2r_y$ , en función del límite elástico del material,  $\sigma_{ys}$ , y del FIT. Según el criterio de plastificación de Von Mises y el campo de tensiones delante de la grieta, la expresión del tamaño de la zona plástica es:

$$2r_y \approx \frac{1}{\beta\pi} \left( \frac{K}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (1.10)$$

dónde  $\beta$  es una constante que toma el valor 1 o 3 según se defina el problema como tensión plana o deformación plana, respectivamente.

### 1.2.2. Mecánica de la Fractura Microestructural

La MFM se ocupa del estudio del crecimiento de grietas pequeñas, que son aquellas cuya longitud es del mismo orden de magnitud que los parámetros microestructurales, razón por la que no se cumple la condición de grieta presente en un medio homogéneo y continuo que es la base de la MFEL.

El trabajo experimental de Kitagawa y Takahashi [10] pone de manifiesto la incapacidad de la MFEL de ocuparse del crecimiento de grietas pequeñas. Estos autores analizaron la tensión mínima necesaria para conseguir que una grieta pequeña, de longitud inicial  $a$ , se propagase bajo una tensión  $S$  aplicada. Esto se resume en el muy conocido diagrama de Kitagawa-Takahashi que se muestra en la figura 1.5. En este diagrama se observa como la recta inclinada, de pendiente  $-1/2$  en escala logarítmica y cuya expresión se define en la ecuación 1.11, representa el umbral de grietas grandes que marca la MFEL mediante el valor del FIT umbral  $K_{th}$  y que representa el valor por debajo del cual las grietas no crecerían según la MFEL.

$$S = \frac{K_{th}}{\sqrt{\pi a}} \quad (1.11)$$

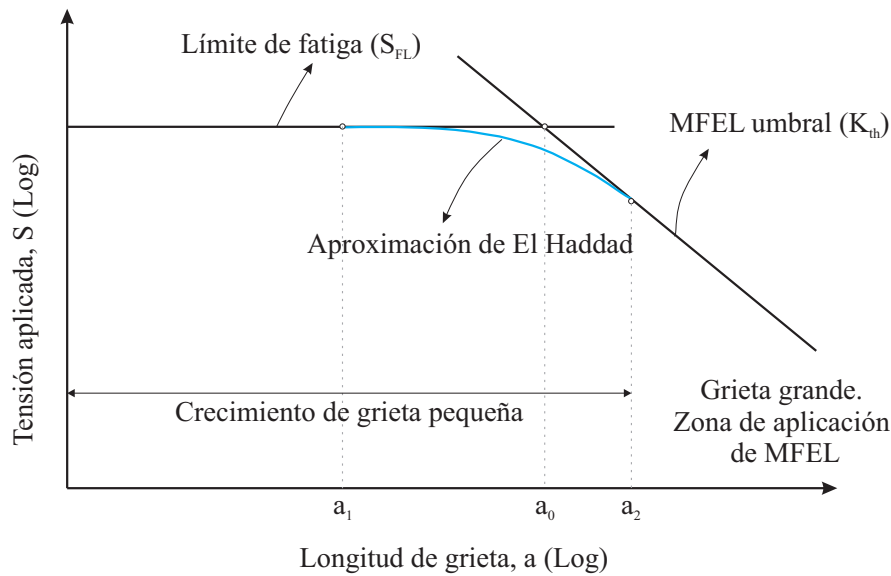


FIGURA 1.5: Representación esquemática del diagrama de Kitagawa-Takahashi.

A medida que se aumenta la tensión aplicada, la tensión umbral se separa de esta línea inclinada de pendiente  $-1/2$  y se acerca a la horizontal definida por el límite de fatiga intrínseco del material. Taylor y Knott [11] definieron tres longitudes de grieta que son importantes para comprender este diagrama de Kitagawa-Takahashi y que están representadas en la figura 1.5. El valor  $a_1$  define la longitud de grieta pequeña mínima capaz de reducir la resistencia a fatiga del sólido. El valor  $a_2$  corresponde a la longitud de grieta a partir de la cual es válida la teoría de la MFEL. Por último, la longitud de grieta  $a_0$ , obtenida de la intersección de la línea inclinada de la MFEL y la línea horizontal marcada por el límite de fatiga del material  $S_{FL}$ , puede ser un valor aproximado para diferenciar entre grieta pequeña y grande y cuya expresión es

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{th}}{S_{FL}} \right)^2 \quad (1.12)$$

El uso de este parámetro ficticio  $a_0$  permite utilizar la MFEL para grietas pequeñas, tal y como indicaron El Haddad et al. [12]. Estos autores mostraron que las estimaciones mejoraban en aquellos casos de pequeñas longitudes de grieta si se añade la longitud ficticia  $a_0$  según la expresión 1.13.

$$S = \frac{K}{\sqrt{\pi(a + a_0)}} \quad (1.13)$$

Tanaka et al. desarrollaron un modelo similar y concluyeron que la variable  $a_0$  estaba relacionada con el tamaño de grano del material y con el efecto del cierre de grieta [13].

### 1.2.3. Mecánica de la Fractura Elasto-Plástica

La MFEP es aplicada en aquellos casos en los que la hipótesis de zona plástica pequeña delante de la grieta no se cumple y, por tanto, la descripción mediante el campo elástico puede llevar a grandes errores. La MFEP está indicada para aquellos materiales que trabajan normalmente en la zona elasto-plástica, como pueden ser los metales de alta ductilidad. También puede ser aplicada cuando se aplican cargas altas, lo que provoca que la zona plástica sea de gran tamaño. Para ello, se han desarrollado un amplio número de parámetros como el desplazamiento entre caras de la grieta  $\delta$  [14] o la integral J [15] para reemplazar al FIT y poder así evaluar la deformación en los alrededores del vértice de grieta. Se demostró que la integral J es un concepto basado en un balance de energía y describe la variación de energía de deformación por unidad de avance de grieta en los sólidos elásticos no lineales. La integral J, al igual que el FIT, caracteriza el campo de tensiones en las proximidades del vértice de la grieta. En un problema en 2D, si se tiene un contorno cerrado,  $\Gamma$ , alrededor del vértice de la grieta y éste se sigue en sentido anti-horario, la expresión de la integral J es:

$$\int_{\Gamma} \left( W dy - T \frac{\partial u}{\partial x} ds \right) \quad (1.14)$$

dónde  $T$  es el vector de tensiones,  $u$  es el vector de desplazamiento en dirección  $x$ , y  $ds$  es un elemento diferencial del camino seguido,  $\Gamma$ . La energía de deformación por unidad de volumen es  $W$  y se define:

$$W = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (1.15)$$

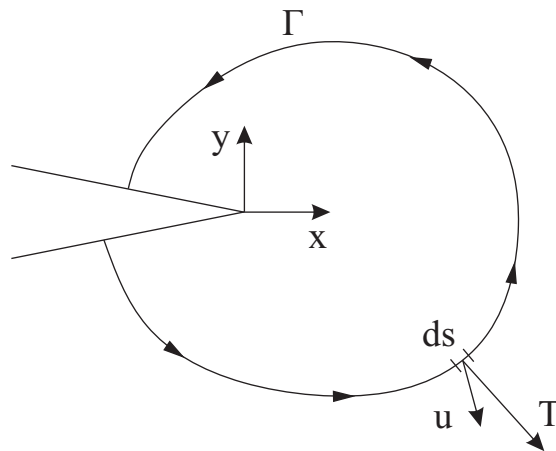


FIGURA 1.6: Integral J.

dónde  $\sigma_{ij}$  y  $\varepsilon_{ij}$  representan las tensiones y deformaciones locales, respectivamente. Se puede demostrar que  $J = 0$  a lo largo de cualquier contorno cerrado.

Por otro lado, el desplazamiento entre las caras de la grieta (*crack tip opening displacement* en inglés, *CTOD*) puede considerarse como una medida de la intensidad del campo elasto-plástico. Si la plastificación es pequeña, se puede obtener un valor del CTOD basado en el FIT, el límite de fluencia  $\sigma_{ys}$  y el módulo de elasticidad del material  $E$ :

$$CTOD = \delta = \frac{4}{\pi} \frac{K^2}{E\sigma_{ys}} \quad (1.16)$$

#### 1.2.4. Grietas pequeñas

Una grieta pequeña se define como aquella grieta cuyo tamaño es del orden de los parámetros microestructurales del material como el tamaño de grano o la distancia intragranular. Físicamente, algunos autores definen las grietas pequeñas como aquellas cuya longitud se sitúa por debajo de un milímetro, siendo este el tamaño aproximado a partir del cual se pueden encontrar grietas mediante métodos de inspección [16].

El comportamiento de grietas pequeñas es un tema complejo debido a la variedad de factores que pueden afectar al proceso. Muchos investigadores han publicado trabajos sobre grietas pequeñas y han aportado explicaciones y modelos para justificar los resultados y el comportamiento de estas grietas [17–21].

La diferencia fundamental entre grietas pequeñas y grietas grandes se basa en que las grietas pequeñas crecen para valores de FIT menores que  $\Delta K_{th}$ . Esto choca con lo visto en la figura 1.4 que es la base de la MFEL que postula que las grietas grandes no pueden crecer por debajo de ese valor umbral de FIT. Según la MFEL no se produciría la rotura por fatiga en componentes sin concentradores de tensión bajo la aplicación de una carga levemente superior al límite de fatiga, ya que la grieta es muy pequeña al principio y, por tanto, el FIT sería menor que  $\Delta K_{th}$ . Esta predicción de la MFEL es evidentemente incorrecta. La diferencia entre el crecimiento de grietas pequeñas y grandes fue descrita por varios autores [13, 22–24]. Varios comportamientos anómalos fueron investigados. Se ha comprobado experimentalmente que las grietas pequeñas crecen a mayor velocidad que lo que se predice mediante la MFEL [11, 25]. Además, el proceso de crecimiento de grietas pequeñas se caracteriza por tener un patrón oscilante como se representa en la figura 1.7, es decir, en el que la velocidad de propagación sufre sucesivas aceleraciones y deceleraciones. Estas variaciones en el ritmo de crecimiento son debidas a la interacción de la grieta con las diferentes barreras microestructurales. Entre esas fluctuaciones de crecimiento puede darse el caso de que la grieta no continúe su propagación y se convierta en una grieta no propagante, es decir, que la grieta no sea capaz de superar una determinada barrera si no se aumenta la carga aplicada sobre el componente. En resumen, se demostró que las grietas pequeñas de una longitud en torno a 1-10 granos del material presentan valores de FIT inferiores al valor umbral de grieta grande y crecen, hecho que no contemplaba la MFEL y que debía ser estudiada en profundidad. Es en ese caso dónde se centra la MFM.

Otra de las diferencias fundamentales entre grietas pequeñas y grietas grandes es el cierre de grieta. Se conoce como cierre de grieta al proceso por el que se produce la interferencia entre las caras de la grieta durante la aplicación de la carga cíclica. Durante décadas se han identificado diferentes mecanismos de cierre de grieta en metales y aceros, entre los que destacan el cierre de grieta inducido por plasticidad [17, 26, 27],

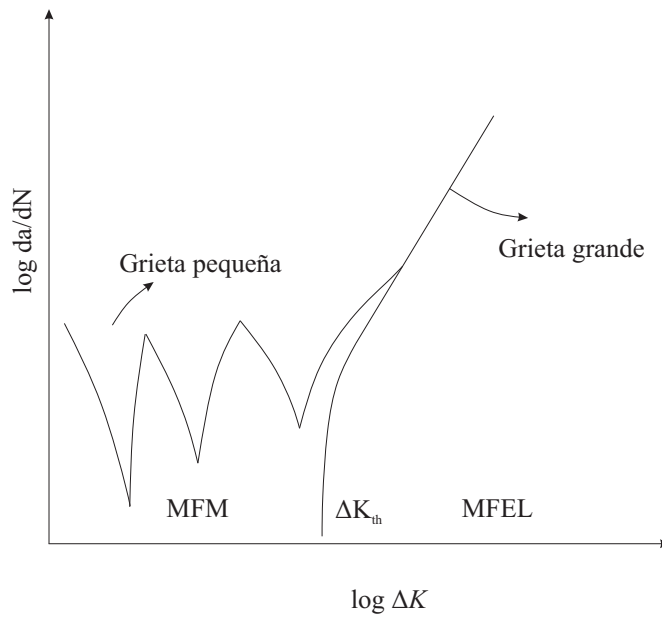


FIGURA 1.7: Esquema del crecimiento de una grieta pequeña.

el cierre de grieta inducido por oxidación [28] o el cierre inducido por rugosidad [29], entre otros.

Newman [27] realizó un modelo del cierre de grieta inducido por plasticidad en grietas pequeñas apoyándose en el trabajo previo de Dugdale [30] para representar la zona plástica en el vértice de grieta y evaluar la deformación plástica en la superficie de la misma. El contacto entre las caras de la grieta durante la aplicación de carga da como resultado el retraso de la apertura de la grieta, es decir, se reduce el rango del FIT entre la apertura y la aplicación de carga máxima. Además, varios autores [27, 31] observaron que el efecto del cierre de grieta era menor en grietas pequeñas y aumentaba con la longitud de grieta. El efecto del cierre de grieta puede ser analizado en función de un rango de FIT “efectivo” que sólo considera la parte del proceso de aplicación de carga en el que la grieta está abierta:

$$\Delta K_{ef} = K_{max} - K_{ap} \tag{1.17}$$

dónde  $K_{max}$  se refiere al FIT máximo en el ciclo de carga y  $K_{ap}$  es el FIT correspondiente



al momento en el que no existe interferencia entre las caras de la grieta. Para un mismo FIT, el rango efectivo  $\Delta K_{ef}$  al que está sometido la grieta pequeña es superior al de la grieta grande, resultando en una mayor velocidad de propagación de grieta.

Los modelos sensibles a la microestructura son, sin duda, una vía necesaria para el análisis del crecimiento de grietas pequeñas. Así, estos enfoques desarrollan un marco de modelado que sirve para determinar el crecimiento de grietas pequeñas que eventualmente pueden propagarse y aportan argumentos que pueden justificar las observaciones experimentales y mejoran los aspectos que la MFEL o incluso la MFEP no son capaces de explicar. Durante décadas han sido varios los investigadores que han propuesto y desarrollado modelos microestructurales. Estos modelos se han aplicado ampliamente para explicar la dependencia de la microestructura en el crecimiento de grietas pequeñas y para analizar problemas de ingeniería en los que los conceptos MFEL y MFEP son inaplicables. Algunos de estos modelos microestructurales se han utilizado para analizar diferentes variables sobre el comportamiento a la fatiga, como el efecto del tamaño de grano [32], el efecto de técnicas como el shot-peening [33], el efecto de los campos de tensión de contacto y residual [34] y el efecto de las condiciones ambientales [35], entre otras aplicaciones.

Este trabajo se centra en uno de esos modelos microestructurales, concretamente en el desarrollado por los autores Navarro y de los Ríos [36–38]. Este modelo aporta una explicación al comportamiento de grietas pequeñas que crecen a través de la microestructura del material bajo la aplicación de una carga cíclica. De manera que las fluctuaciones en la velocidad de crecimiento son descritas mediante la interacción de la grieta con las diferentes barreras microestructurales. El enfoque micromecánico se centra en el modelado de la grieta y las barreras microestructurales mediante dislocaciones distribuidas [39] y utiliza el diagrama de Kitagawa-Takahashi [10] para cuantificar la resistencia relativa que ofrecen las sucesivas barreras al crecimiento de la grieta pequeña.

### 1.3. Resistencia a fatiga en presencia de entallas

En la mayoría de componentes estructurales y elementos mecánicos pueden encontrarse discontinuidades geométricas, tales como agujeros, cambios de sección, radios de

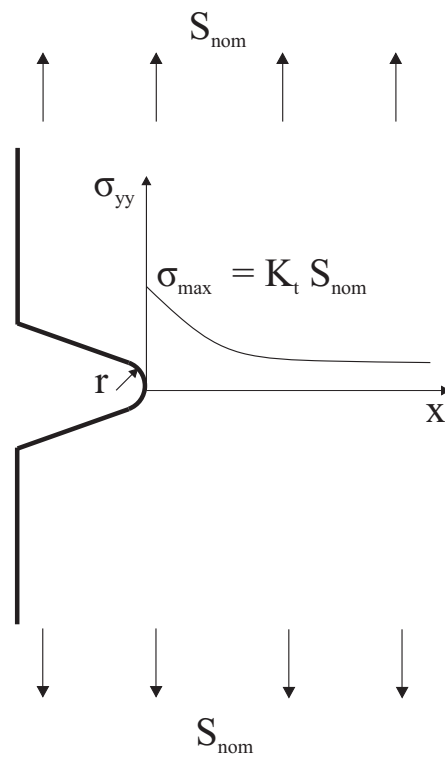
transición, o simples marcas de mecanizado que se denominan concentradores de tensión o entallas. El efecto más relevante de la presencia de una entalla es que genera un aumento de tensión y deformación en sus proximidades. Si el componente está sometido a la aplicación de una carga cíclica, la probabilidad de que se forme la grieta de fatiga en esas proximidades de la entalla, y no en otra parte del componente, es más alta. Además, una grieta pequeña naciendo de una entalla puede presentar ritmos de crecimiento superiores [22, 40] y produce la rotura por fatiga del componente para cargas aplicadas menores que en el caso de geometrías sin entalla.

En la práctica, la concentración de tensión en una entalla se caracteriza por el punto de mayor tensión, alcanzado en la superficie, y la disminución progresiva o gradiente de tensión a través del material, como se muestra en la figura 1.8. Comúnmente se utiliza el factor de concentración de tensiones elástico  $K_t$  cuando se habla de la tensión máxima alcanzada en una entalla. Este parámetro se define como el cociente entre la tensión máxima alcanzada en la entalla  $\sigma_{max}$  y la tensión nominal aplicada al componente  $S_{nom}$ . El valor de  $K_t$  es función de la geometría de la entalla y puede expresarse en términos de tensión nominal bruta o neta.

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{S_{nom}} \quad (1.18)$$

En el campo de investigación del daño por fatiga, cabe destacar varios autores del siglo XX como Neuber [41] y Peterson [42] que dedicaron su esfuerzo al estudio y análisis de piezas entalladas y sometidas a fatiga, y que posteriormente publicaron manuales dónde se recogen los casos más comunes de geometrías y carga junto a los valores de  $K_t$ . Sin embargo, estos manuales pueden ser sustituidos hoy en día por técnicas de cálculo numérico como el Método de los Elementos Finitos aunque no han dejado de ser documentos de referencia.

La presencia de la entalla normalmente tiene el efecto directo de que la grieta por fatiga se inicie desde su superficie, generalmente desde el punto de tensión máxima. Aunque hay ocasiones en que la rotura no se produce por la zona de la entalla, porque ésta sea muy pequeña, y se se puede producir en otro lugar dónde hay un defecto considerable, corrosión localizada, etc. Otra consecuencia es que la rotura por fatiga suele producirse con menos ciclos aplicados o con una tensión aplicada menor. Por otro lado, la presencia


 FIGURA 1.8: Distribución de tensiones  $\sigma_{yy}$  en la raíz de una entalla.

de la grieta conduce a una disminución del límite de fatiga, que se cuantifica con el factor de resistencia a fatiga de la entalla,  $K_f$ :

$$K_f = \frac{\text{Límite de fatiga sin entalla}}{\text{Límite de fatiga con entalla}} \quad (1.19)$$

Este factor  $K_f$  suele tener un valor menor que el factor de concentración de tensión  $K_t$ . La disminución de la resistencia a fatiga de componentes entallados depende no sólo del factor  $K_t$  sino también de otros aspectos como el radio de fondo de entalla o las propiedades mecánicas del material. Debido a esto, Neuber desarrolló una expresión semi-empírica para el cálculo del factor  $K_f$ :

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{\rho/r}} \quad (1.20)$$

dónde  $r$  es el radio de fondo de entalla y  $\rho$  es una longitud característica que depende del material. Los valores del parámetro  $\rho$  para aceros fueron tabulados en un trabajo posterior [43].

Por su parte, Peterson desarrolló una expresión parecida para estimar el resultado del factor  $K_f$  [44].

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + l_1/r} \quad (1.21)$$

dónde  $l_1$  es una longitud característica del material que posee una expresión para el caso de los aceros en la que se utiliza la tensión de rotura del material  $S_{UTS}$  [45, 46].

$$l_1 = 0,0254 \left( \frac{2070}{S_{UTS}} \right)^{1,8} \quad (1.22)$$

Resulta necesario hacer hincapié en que ambas expresiones para aproximar el valor de  $K_f$ , propuestas por Neuber y Peterson, son empíricas. Estas fórmulas y las longitudes características del material asociadas a cada una de ellas expresan el hecho de que, en entallas de gran tamaño y con grandes radios de fondo de entalla, es esperable que  $K_f \simeq K_t$ . Sin embargo, en entallas pequeñas y agudas se tiene un pequeño efecto de la entalla en la resistencia del componente  $K_f \ll K_t$  [47].

En las últimas décadas, Taylor ha extendido los métodos de volumen crítico al proporcionar una fórmula explícita para calcular la longitud característica  $L$  del material utilizando el valor umbral del FIT  $K_{th}$  y el límite de fatiga intrínseco del material  $S_{FL}$  [48, 49], sin necesidad de usar ningún  $K_t$  y esto hace se pueda aplicar a cualquier geometría y carga. Destacan los métodos del punto, de línea y área.

En el método del punto, la rotura por fatiga en el componente entallado se produce si la tensión a una cierta distancia,  $L/2$ , del borde de la grieta alcanza el valor del límite de fatiga intrínseco del material (ver ecuación 1.23). El método de la línea y del área son similares. Es decir, estos métodos predicen la rotura por fatiga si se tiene una tensión media en una cierta línea o área por encima del límite de fatiga del material. Puede entenderse que se trata de una elaboración, o, mejor, una simplificación, de la idea de volumen crítico manejada por Neuber y Peterson. No basta con que la tensión

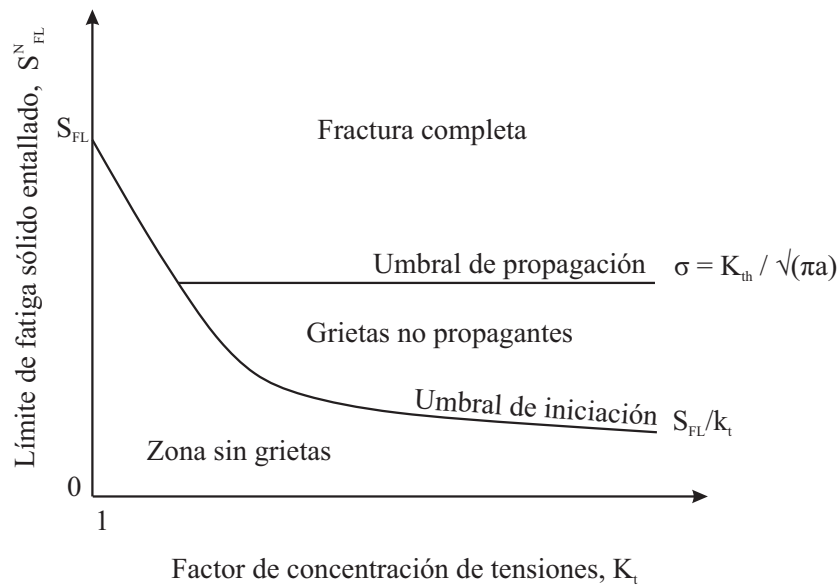


FIGURA 1.9: Simplificación del diagrama de Frost.

sea muy alta sólo en el borde de la entalla, porque la grieta puede dejar de propagarse dependiendo del gradiente.

$$L = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{th}}{S_{FL}} \right) \quad (1.23)$$

En este trabajo se hará uso de los métodos de Neuber, Peterson y el método del punto de Taylor para realizar estimaciones de resistencia a la fatiga con el objetivo de realizar comparaciones entre resultados experimentales y estimaciones obtenidas con el modelo microestructural presentado en esta tesis.

### 1.3.1. Grietas no-propagantes

Es bien sabido que tanto la profundidad como el radio de fondo de entalla son dos de los parámetros más relevantes para estimar la resistencia a fatiga de un sólido entallado. Los autores Frost y Dugdale [50, 51] realizaron ensayos en probetas planas y cilíndricas de acero al carbono con el objetivo de evaluar el efecto de la entalla sobre la resistencia a fatiga y de observar la propagación de las grietas formadas en la raíz de la entalla. Se

analizaron diferentes radios de entalla manteniendo la profundidad de la misma para tener un amplio espectro de geometrías de entalla, desde entallas más romas hasta entallas más agudas. De estos ensayos experimentales se dedujo que hay situaciones en las que una grieta crece y se propaga hasta la rotura y, otros casos en que, la grieta crece y se detiene en un punto y no se propaga más aunque se mantenga constante el nivel de tensión aplicado. Los resultados de resistencia a fatiga de las probetas entalladas se representaron en función del factor de concentración de tensiones, en un diagrama comúnmente conocido hoy día como diagrama de Frost. En la figura 1.9 se muestra un esquema de este tipo de representación. En esta figura se observan dos líneas que definen varias zonas importantes con respecto a las grietas que nacen desde la entalla. La recta horizontal corresponde a la tensión umbral a partir de la cual las grietas se propagan hasta alcanzar la rotura del componente. Frost observó que el valor de tensión que provocaba la rotura no cambiaba a partir de un valor crítico de  $K_t$ , siendo una recta horizontal como demostró experimentalmente. Por otro lado se tiene la curva elástica del criterio de tensión máxima alcanzada en la entalla que se define como el cociente entre la resistencia a fatiga del material y el factor de concentración de tensiones,  $S = \sigma_{FL}/K_t$ . Esta curva decreciente con el aumento del factor de concentración de tensiones marca la iniciación de grietas en la raíz de la entalla. Esto significa que una tensión aplicada por encima de esta curva y, a su vez, inferior a la recta horizontal, provocaría la aparición de una grieta que se propagaría hasta una longitud determinada y no provocaría la rotura del componente. A esto se le llama grieta no propagante y es lo que fue observado por autores como Frost. Después, ha habido autores que han sugerido que en todos los componentes estructurales pueden existir grietas del orden de 2-4  $\mu\text{m}$  [52], aunque este concepto no se aplica de manera universal en el diseño a fatiga con materiales comúnmente usados.

Una probeta con una tensión aplicada superior a la tensión definida por la recta horizontal provocaría la iniciación y propagación de una grieta hasta alcanzar el fallo por rotura del componente. Por otro lado, una tensión aplicada inferior a la curva elástica de  $K_t$  implica que no se iniciaría ninguna grieta. La intersección entre la recta horizontal y la curva del criterio de tensión máxima en la entalla definen un valor de  $K_t$  crítico. Según Smith y Miller [53], en aquellas configuraciones de entalla cuyo valor de factor  $K_t$  sea superior a ese valor crítico, la predicción del límite de fatiga del sólido entallado se puede realizar usando una grieta de longitud igual a la profundidad de la entalla

---

mediante la MFEL,  $S = K_{th}/\sqrt{\pi a}$ . En este caso el parámetro  $a$  es la profundidad de la entalla.





## Capítulo 2

# Modelo microestructural de crecimiento de grieta pequeña

Los modelos microestructurales permiten dar una explicación al comportamiento de grietas pequeñas, ya que la MFEL posee ciertas limitaciones como se ha comentado anteriormente. Además del umbral de grietas pequeñas, el hecho más relevante es aportar una justificación a las continuas aceleraciones y desaceleraciones de grietas y la detención de estas grietas pequeñas por límites microestructurales. Existen diferentes hipótesis, disponibles en la literatura, en las que se describe la interacción de la grieta con los límites de grano [36, 54–56]. En esta tesis se ha implementado el uso del modelo microestructural de Navarro y de los Ríos.

### 2.1. El modelo de Navarro y de los Ríos

Los autores Navarro y de los Ríos desarrollaron un modelo microestructural (modelo NR en adelante) con la finalidad de describir el proceso de crecimiento y propagación de grietas pequeñas en sólidos [36–38].

El modelo NR considera que la grieta nace en aquellos granos que poseen el tamaño, forma y orientación cristalográfica más adecuados para la formación de bandas de deslizamiento permanentes. Debido a la aplicación de carga cíclica, la grieta se propaga

hasta alcanzar la primera barrera microestructural dónde queda retenida. El ejemplo más común de barrera microestructural es el borde de grano del material aunque también se pueden encontrar elementos como cambios de fase. La grieta, que se encuentra detenida en la primera barrera, no crecerá hasta que la tensión local alcanzada en esa barrera, producida por la tensión aplicada externa, sea lo suficientemente alta como para vencerla. La resistencia que ofrece la barrera está marcada por la capacidad de la grieta para producir una deformación plástica que sea suficiente para activar bandas de deslizamiento en el grano adyacente. Una vez superada la primera barrera, la grieta se propaga rápidamente a través del siguiente grano hasta que alcanza la siguiente barrera microestructural dónde vuelve a quedar detenida. Este proceso se repite en cada barrera microestructural. Este fenómeno produce un ritmo de crecimiento de grieta oscilante. El hecho de que el crecimiento se realiza en continuas aceleraciones y deceleraciones es una característica que permite justificar el patrón fluctuante de la velocidad de crecimiento de grietas pequeñas. A mayor tamaño de grieta, estas fluctuaciones en la velocidad de crecimiento se desvanecen. En ese momento se sobrepasa el umbral que distingue entre grieta pequeña y grande y la velocidad de crecimiento sería proporcional con respecto al aumento de la longitud de la grieta [9].

## 2.2. Representación del problema de una grieta mediante la teoría de dislocaciones

El modelo NR se apoya en la teoría de distribución de dislocaciones para realizar la representación del problema de una grieta pequeña creciendo a través de la microestructura de un material. La base es el trabajo de Bilby, Cottrell y Swinden [57] dónde se representa una grieta y su zona plástica asociada mediante una distribución continua de dislocaciones. Con objeto de comprender el proceso, considérese el problema más simple definido por una grieta, creciendo en Modo I, en una placa infinita sometida a una tensión uniforme, axial y cíclica  $\sigma$ . Se supone que la grieta se ha expandido por varios granos y está bloqueada en dos bordes de grano, tal y como se muestra en la figura 2.1.

La longitud de la grieta,  $2a$ , puede ser definida con el tamaño medio de grano del material  $D$ ,  $a = iD/2$ . En el modelo NR se asume que todos los granos del material

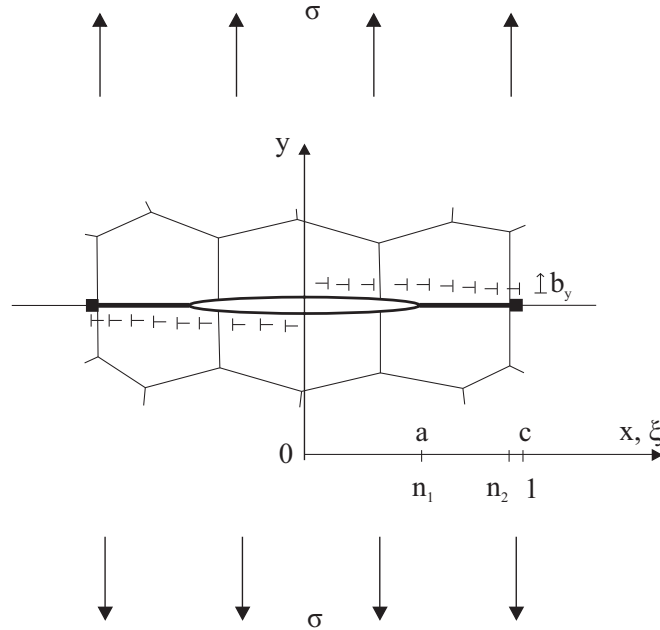


FIGURA 2.1: Modelado mediante dislocaciones del problema de una grieta, zona plástica y barrera en medio infinito y sometido a una tensión externa uniforme.

poseen el mismo tamaño. La variable  $i$  representa el número de granos que la grieta abarca y toma valores  $i = 1, 3, 5, \dots$ . La barrera microestructural se modela como una pequeña región de longitud  $r_0 \ll D$ , que puede ser el tamaño típico de un borde de grano. En este trabajo se ha considerado un valor de  $r_0 = D/30$  [58], aunque puede verse que el valor concreto utilizado no tiene ninguna relevancia, siempre y cuando  $r_0$  sea suficientemente pequeño comparado con  $D$ . Por tanto, la longitud total de la grieta más barreras es  $2c = 2(iD/2 + r_0)$ . Se utiliza el parámetro adimensional  $n = a/c$  para representar el tamaño de la grieta. La grieta y las barreras se modelan mediante una distribución de dislocaciones con vector de Burgers  $b_y$  perpendicular a la línea de la grieta. Las variables  $x$  y  $\xi$  son utilizadas para definir la posición de las dislocaciones sobre la línea de la grieta.

La expresión que determina el equilibrio de dislocaciones sobre la línea de la grieta es una ecuación integral con una singularidad de tipo Cauchy:

$$A \int_{-c}^c f(\xi)K(x, \xi)d\xi + (\sigma_y(x) - \sigma_f(x)) = 0 \quad (2.1)$$

dónde  $A$  representa una constante del material cuya expresión depende de si las dislocaciones son de tornillo,  $A = Gb/2\pi$ , o de cuña,  $A = Gb/(2\pi(1 - \nu))$ , dónde  $G$  es el módulo de elasticidad transversal y  $\nu$  es el coeficiente de *Poisson*.  $f(\xi)$  es la función de distribución de dislocaciones y también es la incógnita en la ecuación.  $K(x, \xi)$  es el *Kernel* o núcleo de la ecuación y representa la fuerza que una dislocación situada en  $\xi$  ejerce sobre una dislocación situada en  $x$ , y su expresión depende de la geometría del componente, siendo  $K(x, \xi) = 1/(x - \xi)$  para este ejemplo.  $\sigma_y(x)$  es la tensión elástica sobre la línea de la grieta que es producida por la tensión aplicada externa  $\sigma$  en un análisis elástico del sólido sin grieta. En el ejemplo actual,  $\sigma_y(x) = \sigma$ . La resistencia al movimiento de dislocaciones es la llamada tensión de fricción  $\sigma_f(x)$  que toma valor cero en la grieta [57] si se asume que no hay interferencia entre las caras de la grieta durante la propagación de esta. A la tensión  $\sigma_f(x)$  en la barrera se le denomina  $\sigma_3$  y hace referencia a la tensión que logra contener a las dislocaciones de la grieta. Es una incógnita de la ecuación, necesaria para mantener el equilibrio de dislocaciones, y su valor es diferente en las sucesivas barreras, dónde la grieta queda bloqueada. Además, a esta tensión se le denomina  $\sigma_3^i$  para indicar que se trata de la tensión en la barrera de una grieta bloqueada en la barrera  $i$ -ésima. La tensión  $\sigma_f(x)$  en la zona plástica es llamada  $\sigma_2$  y su valor se aproxima al límite elástico del material.

Para el problema representado en la figura 2.1 la ecuación de equilibrio de dislocaciones posee solución analítica que puede obtenerse aplicando el teorema de inversión de Muskhelishvili [59].

$$f(\xi) = \frac{1}{A\pi^2} \left\{ (\sigma_2 - \sigma_1) \left[ \cosh^{-1} \left( \left| \frac{1 - n_1\xi}{n_1 - \xi} \right| \right) - \cosh^{-1} \left( \left| \frac{1 + n_1\xi}{n_1 + \xi} \right| \right) \right] \right. \\ \left. + (\sigma_3^i - \sigma_2) \left[ \cosh^{-1} \left( \left| \frac{1 - n_2\xi}{n_2 - \xi} \right| \right) - \cosh^{-1} \left( \left| \frac{1 + n_2\xi}{n_2 + \xi} \right| \right) \right] \right\} \quad (2.2)$$

Además, de la condición de existencia de considerar que la función de distribución de dislocaciones es acotada en ambos extremos se obtiene [60]:

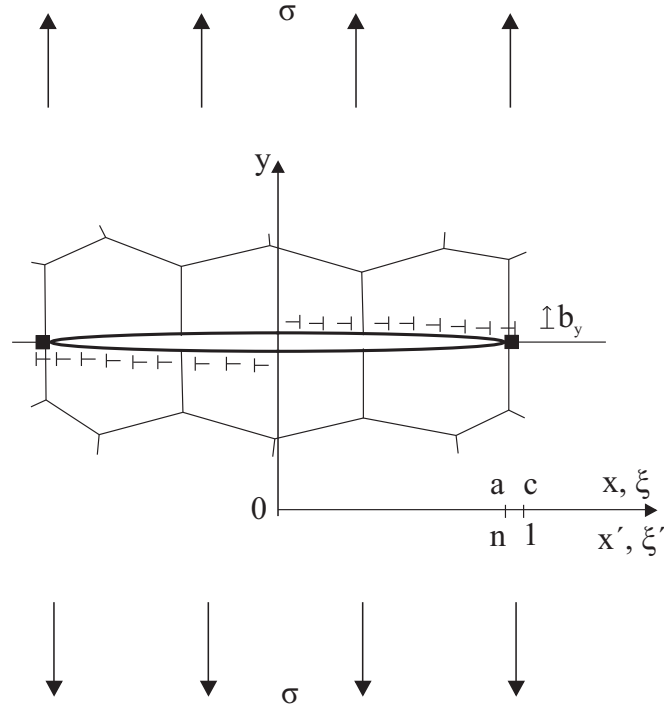


FIGURA 2.2: Grieta bloqueada en las barreras microestructurales.

$$(\sigma_2 - \sigma_1) \sin^{-1} n_1 + (\sigma_3^i - \sigma_2) \sin^{-1} n_2 + \frac{\pi}{2} (\sigma - \sigma_3^i) = 0 \quad (2.3)$$

de dónde puede obtenerse el valor de  $\sigma_3^i$  despejando. El valor máximo de la tensión en la barrera  $\sigma_3^i$  se da cuando la grieta alcanza la barrera y apenas existe zona plástica ( $n_1 = n_2 \approx 1$ ) como se observa en la figura 2.2. Por lo que se obtiene la relación entre la tensión aplicada al sólido  $\sigma$  y la tensión en la barrera  $\sigma_3^i$ :

$$\sigma_3^i = \frac{1}{\cos^{-1} n} \frac{\pi}{2} \sigma \quad (2.4)$$

siendo  $n = a/c$ , como ya se ha dicho. El modelo NR define el límite de fatiga del material  $\sigma_{FL}$  para un sólido sin entalla sujeto a la aplicación de tensión uniforme cíclica  $\sigma$ , como la tensión externa mínima que es necesario aplicar para que la grieta supere la primera barrera, tal y como otros autores concluyeron [61, 62]. Por tanto, si se introduce  $\sigma_{FL}$  en

La ecuación 2.4, se obtiene la resistencia máxima de la primera barrera, que se denomina  $\sigma_3^{1*}$ , es decir, el valor crítico de tensión en la barrera que es necesario alcanzar de forma local para que la grieta avance al segundo grano. Su expresión queda:

$$\sigma_3^{1*} = \frac{1}{\cos^{-1} n} \frac{\pi}{2} \sigma_{FL} \quad (2.5)$$

La resistencia de la segunda y sucesivas barreras pueden calcularse introduciendo en la ecuación 2.5 la tensión externa  $\sigma_{Li}$ . Esta tensión  $\sigma_{Li}$  hace referencia a la tensión mínima necesaria para que la grieta continúe su propagación en función de su longitud inicial. Su valor se obtiene del diagrama de Kitagawa-Takahashi del material [10] para una grieta de longitud  $a = iD/2$ .

$$\sigma_3^{i*} = \frac{1}{\cos^{-1} n} \frac{\pi}{2} \sigma_{Li} \quad (2.6)$$

En caso de no disponer del diagrama de Kitagawa-Takahashi experimental para el material deseado, puede aproximarse el valor de la tensión  $\sigma_{Li}$  a través de diferentes métodos [12, 63]. En el presente trabajo se utiliza la propuesta de Vallellano et al. [64]:

$$\sigma_{Li} = \sigma_{FL} \frac{\sqrt{a_0}}{\left[ (iD/2)^j + a_0^j - (D/2)^j \right]^{\frac{1}{2j}}} \quad (2.7)$$

dónde el parámetro  $a_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{th}}{\sigma_{FL}} \right)^2$  es la distancia crítica definida por El Haddad [12] y  $K_{th}$  es el valor umbral de crecimiento de grieta pequeña. El exponente  $j$  es la variable propuesta por Vallellano que aporta resultados válidos para un amplio rango de materiales si se sustituye por un valor de  $j = 2.5$  [64].

### 2.3. Resolución numérica del modelo NR

En relación al modelado del problema de la grieta mediante dislocaciones, es necesario indicar que solo existe solución analítica conocida de la ecuación integral para el caso de dislocaciones en medio infinito, dónde el Kernel de la ecuación 2.1 es igual a  $K =$

$1/(x - \xi)$ . En el resto de situaciones como dislocaciones situadas en medio semi-infinito o cerca de una contorno o entalla, por ejemplo, el Kernel de la ecuación integral es más complejo, ya que su expresión tiene más términos y no existe solución analítica para dicha ecuación. Por eso es necesario recurrir a una técnica numérica de resolución del problema.

La resolución del problema del equilibrio de dislocaciones en la grieta creciendo a través de un material puede ser resuelto numéricamente siguiendo la propuesta de Chaves [58, 65]. La metodología consiste en una modificación del método descrito por Erdogan, Gupta y Cook [66–68] que aporta soluciones aproximadas para ecuaciones integrales con singularidades tipo Cauchy en la forma:

$$S(x) = \int_{-1}^1 f(\xi)K(x, \xi)d\xi \quad (2.8)$$

La propuesta adapta el método a aquellos casos en los que la función incógnita posee una o varias singularidades en su dominio, en este caso  $f(\xi)$  es la incógnita y la singularidad está en  $x = \xi$ . Para realizar la resolución numérica se hace uso de ciertas propiedades de los polinomios ortogonales con el propósito de definir la función incógnita como el producto de una función continua suave  $\phi(\xi)$ , cuya solución no se conoce, y una función de peso  $\omega(\xi)$  conocida, es decir, se aplica la técnica de integración mediante cuadraturas. En este problema concreto se va a utilizar la cuadratura de Gauss-Chebyshev, que se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$S(x) = \int_{-1}^1 \phi(\xi)\omega(\xi)K(x, \xi)d\xi \quad (2.9)$$

La expresión de la función de peso de la cuadratura depende directamente de cómo sea el valor de la función incógnita en los extremos del intervalo de integración, es decir, acotado o singular. Suponiendo que la función incógnita sea acotada en los extremos, la función de peso es  $\omega(\xi) = (1 - \xi)^{\frac{1}{2}}(1 + \xi)^{\frac{1}{2}}$ . La técnica propuesta por Erdogan et al. permite transformar la ecuación integral en un conjunto de  $N + 1$  ecuaciones lineales algebraicas al utilizar la cuadratura para el caso acotado-acotado:

$$S(v_k) = \sum_{i=1}^N \frac{1 - u_i^2}{(N+1)(v_k - u_i)} \phi(u_i) \quad k = 1, 2, \dots, N+1 \quad (2.10)$$

La función incógnita pasa de estar definida de forma continua mediante la variable  $\xi$  a hacerlo en un conjunto discreto de  $N$  puntos,  $u_i$ , denominados puntos de integración. La variable  $x$  también se discretiza a un conjunto de puntos  $v_k$ , denominados puntos de colocación. La función de peso discretizada es, para esta cuadratura,  $\omega(u_i) = (1 - u_i^2)(N+1)$ . Por lo que la ecuación 2.1 quedaría transformada en:

$$\frac{1}{A} [\sigma_y(v_k) - \sigma_f(v_k)] = \sum_{i=1}^N \frac{1 - u_i^2}{(N+1)(u_i - v_k)} \phi(u_i) \quad k = 1, 2, \dots, N+1 \quad (2.11)$$

El método usado aporta las  $N+1$  ecuaciones necesarias para calcular la solución que consiste en los  $N$  valores de la función de distribución de dislocaciones en la grieta  $f(\xi)$  y el valor único de la tensión en la barrera  $\sigma_3^j$ . Sin embargo, este método no recoge bien la singularidad que existe en la función de distribución de dislocaciones en la conexión entre la grieta y la barrera. Por esta razón, Chaves [65] propone la división del problema en varios intervalos, de manera que la singularidad logarítmica de la función incógnita coincidan con uno de los límites de esos intervalos. En este trabajo se optó por dividir el problema de una grieta en dos intervalos. El primer intervalo contempla la grieta hasta el punto de división entre grieta y barrera y tiene el carácter de acotado-no acotado. El segundo intervalo contempla desde el punto de transición entre grieta y barrera hasta la totalidad de la barrera, definiéndose como no acotado-acotado. En resumen, se tiene un problema acotado en ambos extremos aunque los diferentes intervalos que lo componen poseen algunos de sus extremos en forma no acotada. Este proceso de división provoca que las cuadraturas, que es necesario utilizar en este caso, sean las correspondientes al problema acotado-singular, para el primer intervalo, y singular-acotado, para el segundo. Además, la expresión de los pesos son también diferentes. Este tipo de cuadraturas que poseen uno de los extremos singular, aportan solo  $N$  ecuaciones en cada intervalo, como se explica más adelante, por lo que será necesario una ecuación más para tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.



Por otro lado, en este trabajo se ha optado por simplificar el problema de la grieta en medio infinito gracias a la condición de simetría para  $x = 0$ , tal y como se muestra en la fig. 2.3. En este caso de simetría dónde solo se contempla media grieta, el Kernel de la ecuación,  $K_{sim}(x, \xi)$ , se define:

$$K_{sim}(x, \xi) = K(x, \xi) - K(x, -\xi) = \frac{1}{x - \xi} + \frac{-1}{x + \xi} \quad (2.12)$$

De ahora en adelante, el Kernel para el caso simétrico de la ecuación 2.12 se seguirá denominando  $K(x, \xi)$  en el resto de ecuaciones. Otro efecto de la resolución del problema de la grieta utilizando la condición de simetría es que el equilibrio de tensiones en la línea de la grieta sólo se realiza en el intervalo  $[0, c]$ :

$$A \int_0^c f(\xi)K(x, \xi)d\xi + (\sigma_y(x) - \sigma_f) = 0 \quad (2.13)$$

Las variables relacionadas con el intervalo de la grieta (acotado-no acotado) están representadas por el subíndice 1 y las correspondientes a la barrera (no acotado-acotado) con el subíndice 3 (ver figura 2.3). Hay que resaltar la ausencia de la zona plástica puesto que para calcular la resistencia a fatiga del componente se considera que ésta no existe y que el frente de grieta se sitúa en el límite que marca la barrera microestructural. En base a esto, la ecuación 2.13 se puede escribir como:

$$A \int_0^a f_1(\xi_1)K(x_1, \xi_1)d\xi_1 + A \int_a^c f_3(\xi_3)K(x_1, \xi_3)d\xi_3 + (\sigma_y(x_1) - \sigma_1) = 0 \quad (2.14)$$

$$A \int_0^a f_1(\xi_1)K(x_3, \xi_1)d\xi_1 + A \int_a^c f_3(\xi_3)K(x_3, \xi_3)d\xi_3 + (\sigma_y(x_3) - \sigma_3) = 0 \quad (2.15)$$

Dónde las variables adimensionales de posición,  $x_1, \xi_1, x_3, \xi_3$ , están definidas según los intervalos mostrados en la fig. 2.3. Por lo que se cumple que  $x_1 \in [0, n]$  y  $x_3 \in [n, 1]$ . El siguiente paso es hacer un cambio de variable para que el intervalo de integración sea  $[-1, 1]$  y poder así aplicar la cuadratura y resolver numéricamente el problema. Los cambios de variable son:

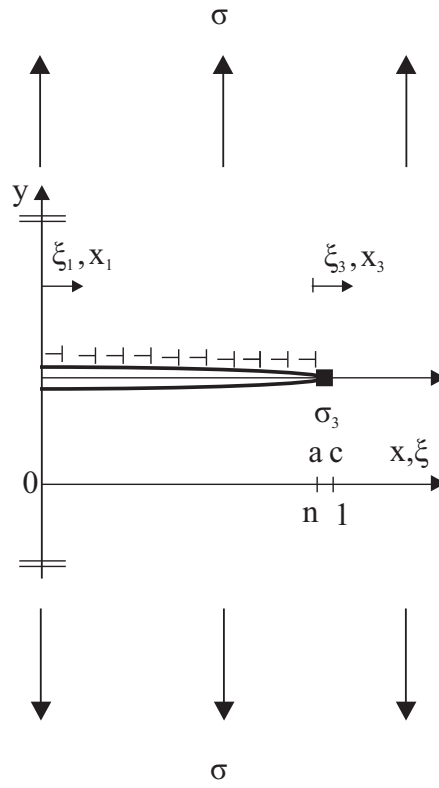


FIGURA 2.3: División en dos intervalos del problema de la grieta aplicando simetría.

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= (u_1 + 1) \frac{n}{2} c & \xi_3 &= \left[ \left( \frac{1-n}{2} \right) (u_3 + 1) + n \right] c \\
 x_1 &= (v_1 + 1) \frac{n}{2} c & x_3 &= \left[ \left( \frac{1-n}{2} \right) (v_3 + 1) + n \right] c
 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Las expresiones de los puntos de colocación e integración son:

$$\begin{aligned}
 u_{1j} &= \cos \left( \pi \frac{2j-1}{2N+1} \right) & u_{3j} &= \cos \left( \pi \frac{2j}{2N+1} \right) & j &= 1, 2, \dots, N \\
 v_{1m} &= \cos \left( \pi \frac{2m}{2N+1} \right) & v_{3m} &= \cos \left( \pi \frac{2m-1}{2N+1} \right) & m &= 1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \quad (2.17)$$

El equilibrio de tensiones en la grieta pasa a reescribirse, según el cambio de variable hecho, de la siguiente manera:

$$A \int_{-1}^1 f_1(u_1) K(v_1, u_1) \frac{nc}{2} du_1 + A \int_{-1}^1 f_3(u_3) K(v_1, u_3) \frac{(1-n)c}{2} du_3 + [\sigma_y(v_1) - \sigma_1] = 0 \quad (2.18)$$

$$A \int_{-1}^1 f_1(u_1) K(v_3, u_1) \frac{nc}{2} du_1 + A \int_{-1}^1 f_3(u_3) K(v_3, u_3) \frac{(1-n)c}{2} du_3 + [\sigma_y(v_3) - \sigma_3] = 0 \quad (2.19)$$

En este punto del problema se aplica el método de Erdogan et al. y la función incógnita, tal y como se explica más arriba, se transforma en un producto de una función continua no conocida y una función de peso conocida:

$$f_j(u_j) = \omega_j \phi_j \quad j = 1, 3 \quad (2.20)$$

Las funciones de peso  $\omega_j$  son conocidas y su expresión depende de cómo sea el intervalo. En este caso, acotado-no acotado para el intervalo de la grieta y no acotado-acotado para la barrera:

$$\omega_1(\xi) = \sqrt{\frac{1+u_1}{1-u_1}} \quad \omega_3(\xi) = \sqrt{\frac{1-u_3}{1+u_3}} \quad (2.21)$$

Gracias a la técnica propuesta por Erdogan et al. y al desarrollo formulado por Chaves, el sistema de ecuaciones integrales, formado por las ecuaciones 2.18 y 2.19, pasa a ser un sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned}
 Ac\pi \sum_{j=1}^N \left[ \frac{2(1+u_{1j})}{2N+1} K(v_{1m}, u_{1j}) \frac{n}{2} \phi_1(u_{1j}) + \frac{2(1-u_{3j})}{2N+1} K(v_{1m}, u_{3j}) \frac{1-n}{2} \phi_3(u_{3j}) \right] \\
 + [\sigma_y(v_{1m}) - \sigma_1] = 0 \qquad m = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
 Ac\pi \sum_{j=1}^N \left[ \frac{2(1+u_{1j})}{2N+1} K(v_{3m}, u_{1j}) \frac{n}{2} \phi_1(u_{1j}) + \frac{2(1-u_{3j})}{2N+1} K(v_{3m}, u_{3j}) \frac{1-n}{2} \phi_3(u_{3j}) \right] \\
 + [\sigma_y(v_{3m}) - \sigma_3] = 0 \qquad m = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

En este momento, el sistema consta de  $2N$  ecuaciones algebraicas y  $2N + 1$  incógnitas que son los  $N$  valores de  $\phi_1(u_{1j})$ , los  $N$  valores de  $\phi_3(u_{3j})$  ( $j$  varía entre 1 y  $N$ ) sumado a la incógnita de tensión en la barrera  $\sigma_3$ . La ecuación que falta se obtiene al imponer una condición en el punto en el que se unen los intervalos, es decir, justo en el punto dónde se produce la singularidad en la función de distribución de dislocaciones. La condición impuesta supone que  $f(\xi)$  debe ser igual a ambos lados de ese punto de unión de intervalos. Por lo que queda:

$$\phi_1(1) = \phi_3(-1) \tag{2.24}$$

La cuadratura no aporta los valores exactos de  $\phi_1(1)$  y  $\phi_3(-1)$ . Sin embargo, se puede usar la extrapolación propuesta por Krenk [69] que fue resuelta por Hills et al. [39]. Igualmente, hay que tener en cuenta la definición de los intervalos del problema para obtener una expresión correcta de esta interpolación. La expresión de la interpolación necesaria es:

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{\sin\left(\frac{2i-1}{2N+1} N\pi\right)}{\tan\left(\frac{2i-1}{2N+1} \pi/2\right)} \phi_1(u_{1i}) \right) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\sin\left(\frac{2i-1}{2N+1} N\pi\right)}{\tan\left(\frac{2i-1}{2N+1} \pi/2\right)} \phi_2(u_{2(N+1-i)}) \right) \tag{2.25}$$

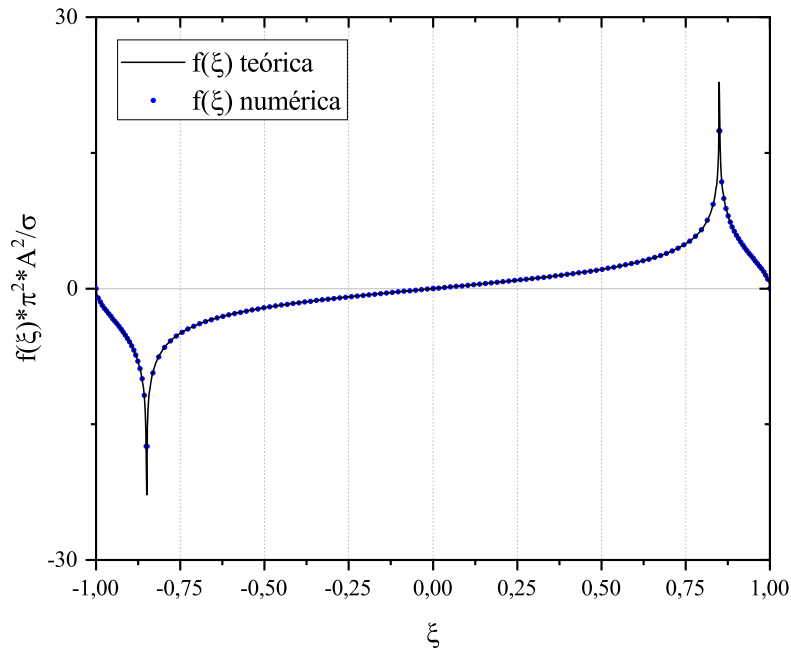


FIGURA 2.4: Función de distribución de dislocaciones teórica y numérica.

En la figura 2.4 se muestra un ejemplo de la función de distribución de dislocaciones de una grieta en medio infinito, comparando la solución analítica y numérica. Se aprecia como la función antisimétrica de distribución de dislocaciones posee la singularidad en los puntos de transición entre la grieta y la barrera.

Con el objetivo de realizar un análisis de sensibilidad del número de ecuaciones óptimo para realizar las estimaciones se ha resuelto numéricamente el caso de una grieta en medio infinito utilizando diferentes valores del número de ecuaciones  $N$ . El parámetro de comparación en este análisis ha sido la tensión en la barrera  $\sigma_3^i$ . Por simplificación, se aplica al problema una tensión externa de valor 1 MPa. El ejemplo ha sido realizado para una grieta de tamaño 15 medios granos, proponiendo un tamaño medio de grano de  $50 \mu m$ .

En la tabla 2.1 se muestra el resultado numérico del cociente de la tensión en la barrera  $\sigma_3^i$  con respecto a la tensión aplicada  $\sigma$ , en función del número de ecuaciones  $N$ . Además,

TABLA 2.1: Valores numéricos de tensión en la barrera  $\sigma_3$  y error porcentual en función del número de ecuaciones  $N$  utilizado.

$N$	$\sigma_{3,numérica}^i/\sigma$	Error %
10	11.96178	28.33665
20	15.19487	8.96711
50	16.46774	1.34130
100	16.63931	0.31346
250	16.68408	0.04520
500	16.69001	0.00977
1000	16.69124	0.00233
5000	16.69200	0.00219

se incluye el error porcentual (ecuación 2.26) calculado con respecto al valor teórico de tensión en la barrera  $\sigma_{3,teórica}^i/\sigma = 16,69163$ , obtenido según la ecuación 2.4. Según los resultados obtenidos, se considera que un valor de  $N = 100$  ecuaciones es el óptimo para realizar las estimaciones en este trabajo, ya que el equilibrio entre el error en los cálculos junto al tiempo de cálculo, que aumenta exponencialmente con el número de ecuaciones, es clave para realizar las estimaciones.

$$Error \% = \frac{|Resultado\ teórico - Resultado\ numérico|}{Resultado\ teórico} \cdot 100 \quad (2.26)$$

## 2.4. Aplicación del modelo NR a componentes entallados

El modelo NR puede aplicarse también para evaluar el crecimiento de grietas pequeñas en componentes que posean un concentrador de tensiones. Para ello es necesario tener en cuenta varias consideraciones. En primer lugar, se supone que la grieta se origina en la raíz de la entalla y crece en Modo I, quedando detenida en cada barrera microestructural. En segundo lugar, la presencia de la entalla provoca un gradiente de tensiones  $\sigma_y(x)$  sobre la línea de la grieta debido a la aplicación de la tensión remota  $\sigma$ , tal y como se muestra en la figura 2.5. Es decir, en este caso particular de la grieta naciendo de una entalla, el gradiente de tensiones  $\sigma_y(x)$  es el que debe introducirse en la ecuación 2.1 como la tensión que actúa sobre la grieta. Otro punto importante está relacionado con la expresión analítica del núcleo,  $K(x, \xi)$ , de la ecuación de equilibrio de dislocaciones.

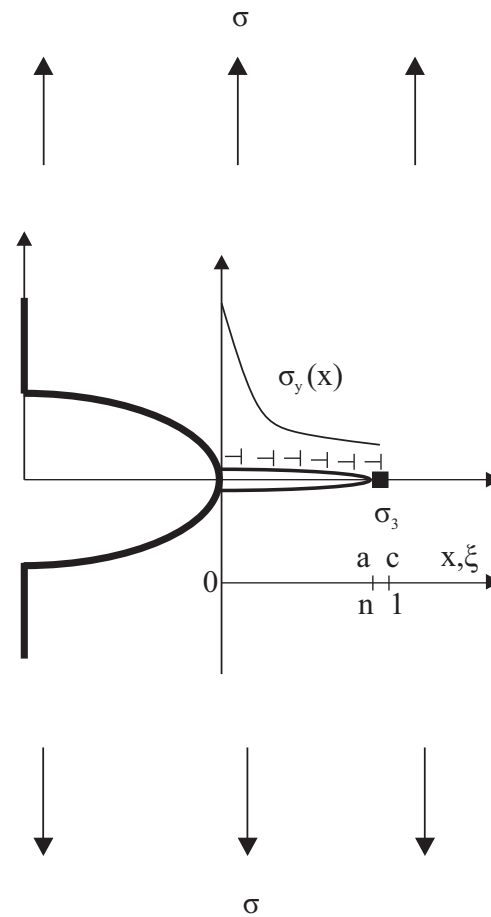


FIGURA 2.5: Grieta naciendo de una entalla y definida mediante dislocaciones.

Su expresión es conocida para muy pocos casos, por ejemplo el caso de una dislocación cerca de un agujero circular o en un plano semi-infinito [70]. Por esta razón, la técnica de resolución numérica explicada anteriormente solo se puede aplicar a las entallas cuyo Kernel es conocido.

Es necesario resaltar que, al resolver el problema de una grieta naciendo desde una entalla mediante el modelo NR, la resistencia máxima que puede oponer cada barrera  $\sigma_3^{i*}$  es la misma para un componente entallado que para uno sin entalla, ya que este parámetro sólo depende del material utilizado.

### 2.4.1. Cálculo del límite de fatiga

El primer paso para estimar el límite de fatiga de un componente entallado es conocer el gradiente de tensiones que actúa sobre la línea de la grieta,  $\sigma_y(x)$ . El siguiente paso del proceso consiste en resolver numéricamente el problema de dislocaciones realizando la división del problema en dos intervalos e introduciendo el gradiente de tensión calculado previamente. Las expresiones 2.22 y 2.23 proporcionan  $2N$  ecuaciones en total, es decir,  $N$  ecuaciones en cada intervalo. El problema está compuesto por  $2N + 1$  incógnitas, correspondiendo  $2N$  incógnitas a la función de dislocaciones en la grieta y 1 incógnita que corresponde a la tensión en la barrera. La ecuación restante se obtiene de las expresiones 2.24 y 2.25. La resolución del sistema de ecuaciones algebraico proporciona el valor de tensión en la barrera para cada una de las longitudes de grieta estudiadas del componente entallado,  $\sigma_3^{i,N}$ .

Una vez calculadas las tensiones en las diferentes barreras microestructurales para el componente entallado,  $\sigma_3^{i,N}$ , para una tensión externa aplicada  $\sigma$ , se puede estimar la tensión remota que es necesario aplicar para que la grieta supere cada barrera,  $\sigma_{Li}^N$ , teniendo en cuenta que la resistencia opuesta por cada barrera  $\sigma_3^{i*}$  es la misma para componentes entallados y sin entalla. Por tanto, se aplica la expresión:

$$\sigma_{Li}^N = \sigma \frac{\sigma_3^{i*}}{\sigma_3^{i,N}} \quad (2.27)$$

Finalmente, el límite de fatiga de un componente entallado,  $\sigma_{FL}^N$ , se define como la tensión externa que es necesario aplicar para que la grieta supere todas las sucesivas barreras. Esto significa que este límite de fatiga entallado corresponde al valor máximo de todas las tensiones  $\sigma_{Li}^N$  para las diferentes longitudes de grieta ( $a = iD/2$ ):

$$\sigma_{FL}^N = \max \{ \sigma_{Li}^N \} \quad i = 1, 3, 5, \dots \quad (2.28)$$



### 2.4.2. Ejemplo de aplicación del modelo NR a una entalla

En este subapartado se va a aplicar la resolución numérica del modelo NR y el proceso de cálculo del límite de fatiga, explicado anteriormente, al caso de una grieta naciendo de un agujero circular en medio de una placa de dimensiones infinita, representado en la figura 2.6. La longitud de grieta más barrera es  $c$ . El radio del agujero es  $r$  y la tensión aplicada  $\sigma$ , de forma remota, produce un gradiente de tensión  $\sigma_y(x)$  sobre la línea de la grieta. Debido a que la grieta nace de la entalla (contorno cercano) el Kernel de este ejemplo difiere del correspondiente a una grieta en medio infinito. Por tanto, para resolver este problema mediante el modelo NR es necesario conocer el Kernel para este caso concreto. El Kernel  $K^c(x, \xi)$  del problema de una grieta naciendo de un agujero circular en un medio infinito se puede obtener de la solución clásica de Dundurs y Mura [70]:

$$K^c(x, \xi) = \frac{1}{x - \xi} - \frac{\xi}{x\xi - r^2} - \frac{(\xi^2 - r^2)r^2}{\xi(x\xi - r^2)^2} \left[ \frac{\xi^2}{r^2} - \frac{\xi^2 - r^2}{x\xi - r^2} \right] + \frac{\xi^2 - r^2}{x^2\xi} + \frac{1}{x} + \frac{r^2}{x^3} \quad r \leq x, \xi \leq r + c \quad (2.29)$$

El Kernel de dos grietas naciendo de forma opuesta desde el agujero, tal y como está representado en la figura 2.6, se define como:

$$K(x, \xi) = [K^c(x, \xi) - K^c(x, -\xi)] \quad (2.30)$$

Este Kernel debe integrarse en la integral de equilibrio de dislocaciones y resolverla numéricamente como se ha indicado anteriormente. En este ejemplo concreto, el material analizado es un acero cuyo tamaño de grano es  $50 \mu\text{m}$ , su límite de fatiga intrínseco es  $580 \text{ MPa}$  y el radio de agujero tiene un valor de  $3 \text{ mm}$ .

El primer paso es obtener el gradiente de tensiones  $\sigma_y(x)$  sobre la línea de la grieta que es producido por la aplicación de una tensión externa  $\sigma$ , de valor  $1 \text{ MPa}$  por simplicidad, para resolver el equilibrio de dislocaciones en la grieta. Este paso puede resolverse por

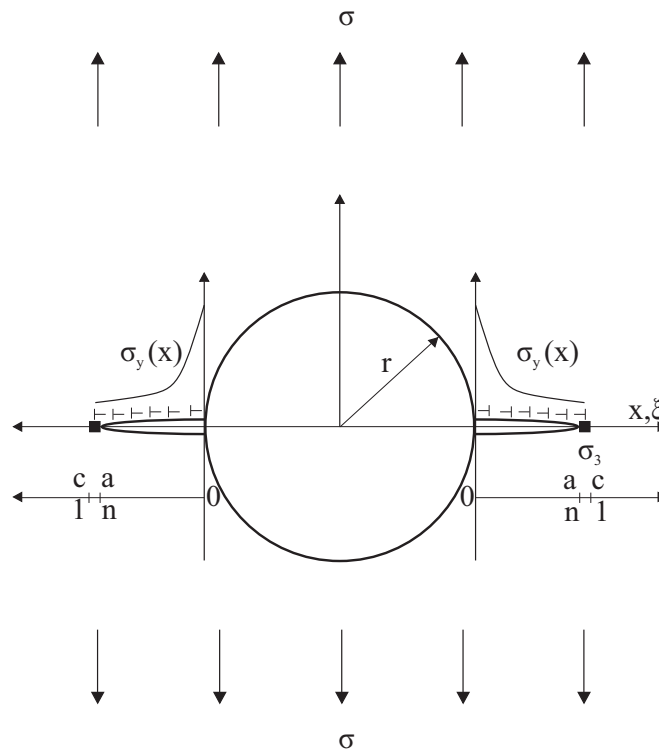


FIGURA 2.6: Grieta naciendo de un agujero circular.

cualquier programa de cálculo por elementos finitos. En la figura 2.7 puede observarse el gradiente resultante.

Mediante la ecuación 2.6 se obtiene la resistencia de cada barrera del caso de grieta en medio infinito,  $\sigma_3^{i*}$ . A continuación se realiza el proceso de resolución numérica descrito en el apartado 2.3. Se resuelve el sistema de ecuaciones algebraicas aplicando el gradiente de tensión  $\sigma_y(x)$ , calculado previamente, para la obtención de la tensión en la barrera del caso de la grieta naciendo desde el agujero,  $\sigma_3^{i,N}$ . En la figura 2.8 se representan estas tensiones en función del número de granos abarcados por la grieta.

Debido a que no se dispone del diagrama experimental de Kitagawa-Takahashi del acero, este se aproxima mediante la expresión 2.7, con el objetivo de obtener el valor de tensión externa  $\sigma_{Li}$  necesario para que la grieta en medio infinito supere cada una de las barreras microestructurales. Introduciendo el valor de  $\sigma_{Li}$  en la expresión 2.27 se obtienen los valores de la tensión externa  $\sigma_{Li}^N$  que es necesario aplicar al caso de la grieta

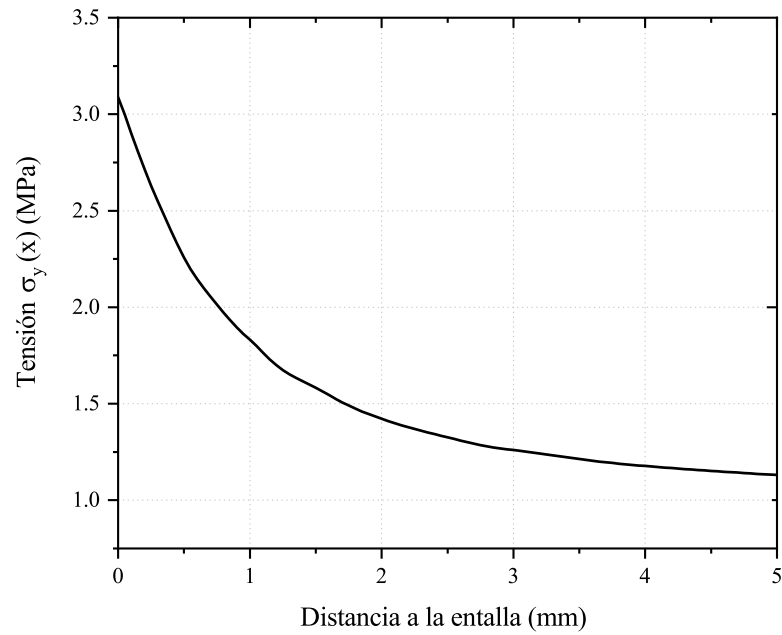


FIGURA 2.7: Gradiente de tensión en la línea de la grieta.

naciendo del agujero para que ésta supere cada barrera. El valor de estas tensiones  $\sigma_{Li}^N$ , para el ejemplo que nos ocupa, se ha representado en la figura 2.9 dónde se aprecia claramente que en la segunda barrera microestructural se alcanza el valor máximo, el cual representa el límite de fatiga para este ejemplo. Esto significa que la longitud de la grieta no propagante que predice el modelo NR en este caso tendría una longitud máxima de dos granos del material.

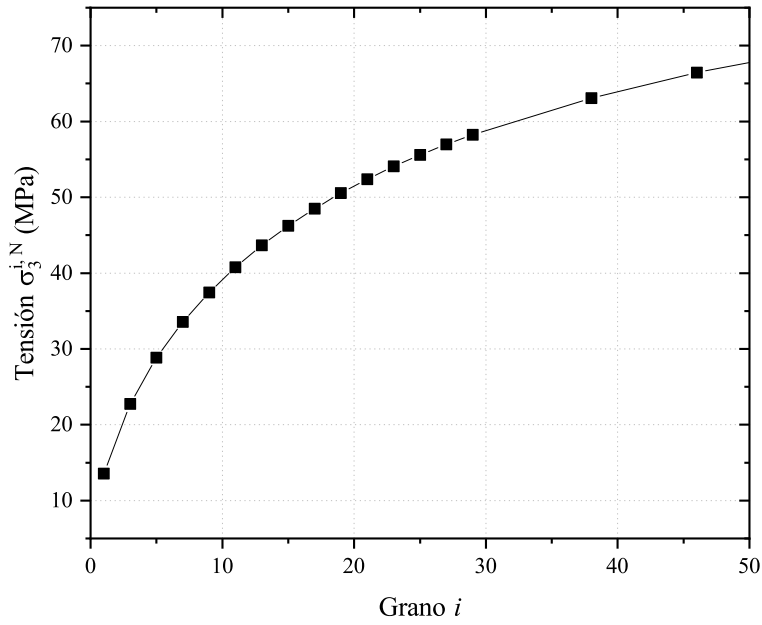


FIGURA 2.8: Tensiones  $\sigma_3^{i,N}$  para el caso de grieta naciendo de un agujero circular.

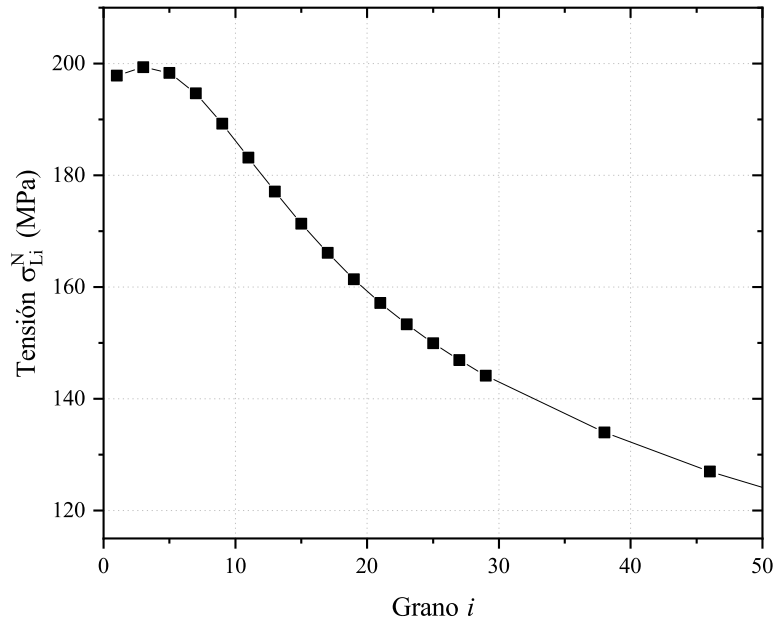


FIGURA 2.9: Tensiones  $\sigma_{Li}^N$  para el caso de grieta naciendo de un agujero circular.

## Capítulo 3

# Método iterativo para la predicción de resistencia a fatiga de componentes entallados

En este capítulo se describe la técnica realizada para evaluar la resistencia a fatiga de componentes que poseen un concentrador de tensión o entalla, de tamaño y forma arbitrarios. Se detalla el proceso por el que se combina el uso del modelo microestructural NR de crecimiento de grieta pequeña y el método de los elementos finitos para hallar la solución. La metodología propuesta se ha denominado IMFEM, de sus siglas en inglés *Iterative Microstructural Finite Elements Methodology*.

### 3.1. El método iterativo

Existen diferentes soluciones analíticas en la literatura para el análisis de grietas en componentes sometidos a fatiga, como se describe en el capítulo 1. La mayor parte de esas soluciones están enfocadas a analizar geometrías de grieta ideales dentro del régimen elástico. Sin embargo, el número de soluciones para problemas de grietas que conllevan la interacción con contornos vecinos es reducido. Esto se debe, en cierto modo,

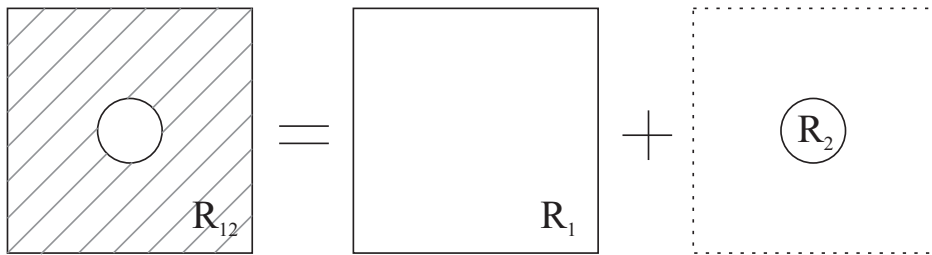


FIGURA 3.1: Método de Schwarz-Neumann.

a que en aquellas situaciones en las que la grieta intersecta un borde o superficie, el proceso para obtener la solución se vuelve más complicado.

En este trabajo, se ha desarrollado una metodología iterativa que estriba en el método de Schwarz-Neumann [71, 72]. Este método matemático demostró que la solución de un problema definido sobre una región con una geometría más o menos complicada, pero que puede ser definida como intersección de regiones con contornos más simples, puede obtenerse mediante una adecuada combinación de las soluciones, más fáciles de obtener, de esas otras regiones con contornos más sencillos. En particular, esa combinación consiste en la superposición iterativa de las soluciones de esos problemas más simples en los que puede descomponerse el problema inicial. Por ejemplo, considérese el siguiente problema. Una placa cuadrada con un agujero en el centro y sometida a tracción en los bordes, representada en la figura 3.1. Si el agujero es pequeño comparado con las dimensiones de la placa, la solución de las tensiones será aproximadamente la correspondiente a un agujero circular situado en una placa infinita, cuya solución, dada originalmente por Kirsch [73] es bien conocida y tiene una expresión analítica que puede encontrarse en cualquier libro de elasticidad [74, 75]. Por supuesto si no hubiera agujero, la solución es todavía más simple, una tensión uniforme en toda la placa. Por este razonamiento se deduce que en este problema se conoce la solución cuando *se considera cada contorno por separado*, es decir, conocemos la solución del agujero en la placa infinita, donde no hay contorno cuadrado, y conocemos la solución de la placa cuadrada sin el agujero. Sin embargo, la solución cuando “actúan” los dos contornos a la vez no es conocida, es decir, cuando hay un agujero cuyo radio no es despreciable comparado con la longitud del lado de la placa cuadrada. En este caso, además, la geometría puede entenderse como la intersección de las dos regiones cuya

solución se conoce. La placa finita con el agujero es la intersección de una placa infinita con el agujero y de una placa cuadrada finita sin agujero. Por tanto, el método de Schwarz-Neumann justamente sirve para construir una solución para esa región de intersección a partir de las soluciones para las dos regiones “mayores” por separado. Más adelante se describe en detalle la aplicación de este método. Esta idea fue aplicada por primera vez a problemas donde uno de los contornos es una grieta por Kullgren et al. [76], quienes propusieron el método alternante de elementos finitos, el cual fue diseñado para evaluar factores de intensidad de tensiones en grietas elípticas naciendo de agujeros en placas combinando el uso del análisis de problemas de grieta simples con la simulación de sólidos mediante elementos finitos. La técnica propuesta por Kullgren pasa por realizar la descomposición de un problema real de un sólido con grieta en dos subproblemas. Un subproblema descrito por una grieta en medio infinito y el otro subproblema referenciando al análisis elástico de tensiones de un sólido sin grieta. La consecuencia directa de aplicar esta descomposición en problemas más simples es que se puede estudiar cualquier tamaño y geometría de componente. El método de Kullgren et al. fue usado posteriormente por otros autores en problemas de mecánica de la fractura [77–80].

En este trabajo, se ha desarrollado esta metodología iterativa y se ha aplicado al caso de una grieta que crece desde una entalla e interactúa con la microestructura del material. El objetivo es evaluar la resistencia a fatiga de componentes que poseen entalla, combinando el uso del modelo NR y el método de los elementos finitos. El modelo microestructural NR, descrito en el capítulo 2, permite analizar el crecimiento de grietas pequeñas. En sus inicios, el modelo NR fue desarrollado para dar solución al problema de una grieta en medio infinito, el cual posee solución analítica conocida. En las situaciones en las que la grieta interseca un borde o superficie, la resolución del problema se vuelve más ardua debido a la complejidad del núcleo presente en la ecuación de equilibrio de dislocaciones (ecuación 2.1). Navarro et al. [64, 81] desarrollaron una primera aplicación del modelo microestructural NR en geometrías con entalla. Obtuvieron una solución analítica para una entalla elíptica sometida a carga en Modo III. La definición del problema se transformó matemáticamente al estudio del equilibrio de las dislocaciones en un plano semi-infinito y se redujo a una ecuación integral singular similar a la que ya se resolvió del caso infinito. Más tarde, Vallellano [82] propuso una generalización de esta solución para entallas con formas diferentes a la elíptica y para

grietas que crecen en Modo I. Después, en el trabajo de Chaves et al. [83] se desarrolló un método para estimar la resistencia a fatiga de componentes entallados a través del modelo NR, donde la grieta nace de la raíz de la entalla. Está basado en una técnica desarrollada para el cálculo de FIT de grietas naciendo de entallas [84, 85] donde se usa la solución fundamental de una dislocación en un medio semi-infinito. Este método fue validado para varias geometrías de entalla. Sin embargo, la limitación de ese método se encuentra en la diversidad de geometrías del concentrador de tensiones que pueden ser analizadas, ya que la formulación del modelo depende directamente del contorno cercano a la grieta haciendo casi imposible evaluar numerosos tipos diferentes de geometría de entalla porque las expresiones del núcleo solo son conocidas para casos muy concretos. Otro aspecto limitante es que dicho método considera el problema semi-infinito sin que se tenga en cuenta el posible efecto de un contorno cercano que se sitúe frente a la entalla.

Esta tesis representa una continuación a la línea iniciada por Larrosa [86, 87] en la que se presentó por primera vez un método alternante que combinaba la representación del crecimiento de la grieta por fatiga considerando de forma explícita su interacción con la microestructura con la solución tensional del componente mediante elementos finitos. En el presente trabajo se ha desarrollado una formulación más robusta, siguiendo la técnica desarrollada por Hartranft y Sih [88] de combinar el método alternante con una anulación sucesiva e iterativa de las tensiones en los contornos de interés, tal como se describe detalladamente más abajo.

Todo este contexto previo a esta tesis, motivó la idea principal de este trabajo, la cual se basa en analizar el efecto de tamaño finito en componentes entallados y sometidos a fatiga. Esto se consigue mediante dos partes fundamentales. Por un lado, se obtiene una metodología iterativa que permite estudiar la resistencia de componentes mecánicos entallados y sometidos a fatiga, en los que la forma y tamaño, tanto del componente como de la entalla, sean arbitrarios y que puedan ser de tamaño reducido para evaluar el efecto de tamaño finito del componente. Por otro lado, se realizan los correspondientes ensayos experimentales de fatiga representativos de este efecto de tamaño finito. La principal ventaja sobre la que se apoya la metodología iterativa IMFEM propuesta es en la resolución del problema real y complejo mediante su simplificación en diferentes escenarios más simples y aplicando una superposición entre ellos. Durante la aplicación



de la metodología IMFEM, el modelo NR se encarga de evaluar la propagación de la grieta creciendo en un medio infinito, mientras que el análisis elástico mediante elementos finitos está destinado a obtener el gradiente de tensiones que provoca la entalla sobre la línea de la grieta. Es necesario indicar que se supone que la grieta crece en Modo I desde el principio. La simplicidad de los subproblemas en los que se descompone el problema real es lo que aporta valor a esta metodología, ya que sus resoluciones son sencillas.

Obviamente, este método también posee ciertas limitaciones, como es el caso de que actualmente sólo es posible analizar problemas de componentes entallados en dos dimensiones y en los que sólo existe un único concentrador de tensiones y una grieta que nace de la raíz de la entalla.

### **3.2. La metodología IMFEM**

Hartranft y Sih describen un ejemplo de aplicación del método alternante al espacio común entre dos semiplanos con unas condiciones de contorno específicas [88]. Partiendo de esta idea, se describe la formulación de la metodología IMFEM a través de un ejemplo, con el objetivo de expresar detenidamente los detalles de cómo esta técnica iterativa, propuesta en este trabajo, puede ser aplicada a componentes entallados sometidos a carga cíclica, en los que la grieta nace de la raíz de la entalla.

El problema original a resolver es el de un sólido entallado, en el que una grieta se propaga debido al efecto de la aplicación de una carga cíclica. Se propone la división de este problema original en dos escenarios más simples para realizar una superposición iterativa de las soluciones a esos dos escenarios como proceso necesario para hallar la solución del problema original. Esto significa que durante una iteración se resuelve primero un escenario y de la solución calculada se determinan las condiciones de contorno a aplicar al otro escenario. Finalizadas las resoluciones de ambos escenarios, la iteración actual finaliza y comienza una nueva dónde la solución del último escenario resuelto representa las condiciones de contorno iniciales del otro escenario en la nueva iteración. Así, este proceso se repite hasta conseguir la convergencia deseada. Un criterio de convergencia más afinado provocará, posiblemente, la realización de un mayor número de iteraciones, desembocando en un resultado más preciso.

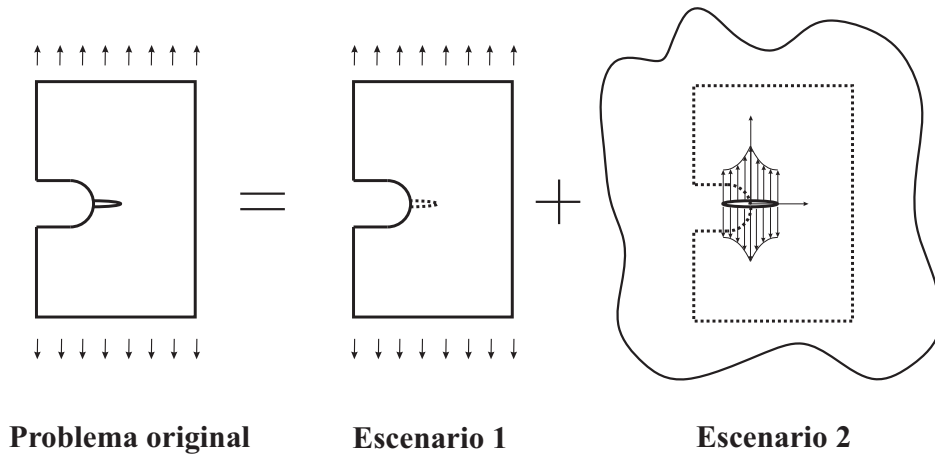
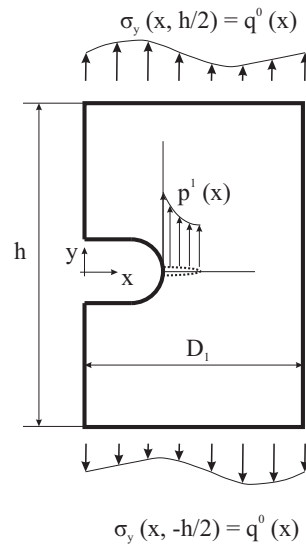


FIGURA 3.2: Descomposición del problema real en escenarios más simples.

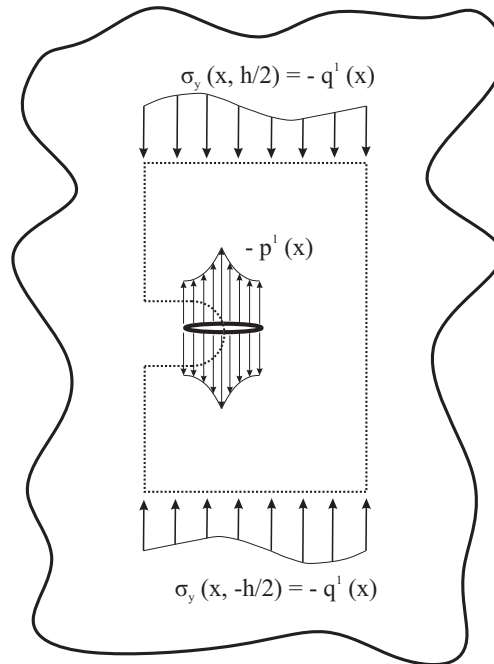
Para llevar a cabo este método, el problema de sólido entallado de geometría real sometido a fatiga, denominado problema original, queda dividido en los escenarios 1 y 2, tal y cómo se muestra en la figura 3.2. El escenario 1, representa un problema elástico lineal de un sólido de geometría original sin grieta, bajo una carga aplicada (pudiendo no ser uniforme). El escenario 2 corresponde al caso de una grieta presente en un plano infinito que interactúa con la microestructura del material. La solución al problema real pasa por realizar la superposición de las soluciones de ambos escenarios de una forma iterativa mediante un algoritmo. El escenario 1 se resuelve mediante la técnica de elementos finitos y el escenario 2 a través de la resolución numérica del modelo NR descrita en el capítulo 2. A continuación, se detalla el proceso.

Al inicio de la primera iteración ( $k = 0$ ), se resuelve el escenario 1, representado en la figura 3.3, haciendo uso de cualquier software comercial de cálculo por elementos finitos. El sólido entallado sin grieta está sometido a una tensión externa que es la tensión a la que está sometido el problema original y tiene valor  $\sigma_y(x, h/2) = \sigma_y(x, -h/2) = q^0(x)$ . Seguidamente se extrae el gradiente de tensiones elásticas de tracción que actúa sobre la línea de grieta ficticia,  $\sigma_y(x, 0)$ , que toma valor  $\sigma_y(x, 0) = p^1(x)$ . La resolución del escenario 1 siempre se realiza mediante la técnica de elementos finitos, ya que el problema consiste en modelar la geometría y calcular el gradiente producido por la entalla al aplicar las condiciones de contorno.



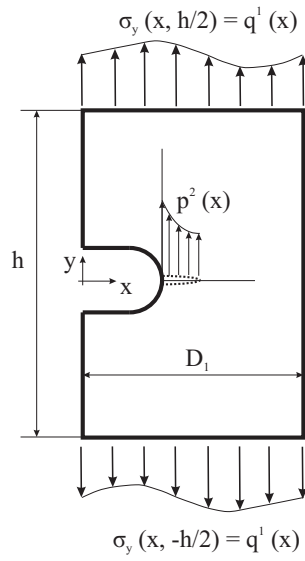
### Escenario 1

FIGURA 3.3: Detalles del escenario 1 en la primera iteración ( $k=0$ ).



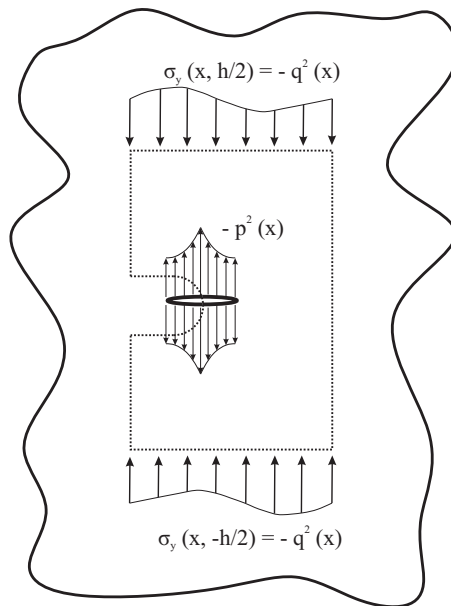
### Escenario 2

FIGURA 3.4: Detalles del escenario 2 en la primera iteración ( $k=0$ ).



### Escenario 1

FIGURA 3.5: Detalles del escenario 1 en la segunda iteración ( $k=1$ ).



### Escenario 2

FIGURA 3.6: Detalles del escenario 2 en la segunda iteración ( $k=1$ ).

El siguiente paso es resolver el escenario 2, que se muestra en la figura 3.4, siguiendo el modelo NR. Es necesario resaltar que el equilibrio de dislocaciones en la grieta se calcula aplicando simétricamente el valor de tensión sobre ambas caras de la grieta y cambiado de signo,  $-p^1(x)$ . La aplicación de esta carga sobre la grieta produce las tensiones  $\sigma_y(x, h/2) = \sigma_y(x, -h/2) = -q^1(x)$  en las aristas superior e inferior del contorno ficticio del componente. Sólo existe interés en las tensiones producidas en dirección  $y$  porque el resto se establecen en valor cero para que las condiciones de contorno de esas tensiones en las demás direcciones se cumplan de manera exacta. El escenario 2 se solventa a través de la resolución numérica del problema de la grieta en medio infinito bajo un gradiente de tensiones. En este caso se debe seguir el proceso descrito en el apartado 2.3 pero incluyendo el gradiente de tensión que actúa sobre la grieta  $\sigma_y(x, 0)$ . Dicha resolución, aporta tanto el valor de tensión en la barrera,  $\sigma_3^{i,k}$ , como la función de distribución de dislocaciones en la grieta,  $f(\xi)^k$ . El último paso de esta primera iteración corresponde al cálculo de las tensiones en el contorno ficticio de este escenario 2. A partir de  $f(\xi)^k$ , se pueden calcular estas tensiones aplicando las correspondientes funciones de influencia que representan el efecto de una dislocación situada en  $\xi$  en un punto de coordenadas  $(x, y)$ . La expresiones de las tensiones en el contorno son [39]:

$$\sigma_{xx}(x, y) = A \int_0^c f(\xi)^k \left[ \frac{(x - \xi)[(x - \xi)^2 - y^2]}{[(x - \xi)^2 + y^2]^2} - \frac{(x + \xi)[(x + \xi)^2 - y^2]}{[(x + \xi)^2 + y^2]^2} \right] d\xi \quad (3.1)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = A \int_0^c f(\xi)^k \left[ \frac{(x - \xi)[(x - \xi)^2 + 3y^2]}{[(x - \xi)^2 + y^2]^2} - \frac{(x + \xi)[(x + \xi)^2 + 3y^2]}{[(x + \xi)^2 + y^2]^2} \right] d\xi \quad (3.2)$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = A \int_0^c f(\xi)^k \left[ \frac{y[(x + \xi)^2 - y^2]}{[(x - \xi)^2 + y^2]^2} - \frac{y[(x - \xi)^2 - y^2]}{[(x + \xi)^2 + y^2]^2} \right] d\xi \quad (3.3)$$

dónde  $x$  e  $y$  representan las coordenadas de los puntos del contorno ficticio y  $\xi$  la coordenada de la dislocación sobre la línea de la grieta. En este momento finaliza la primera iteración del proceso.

La siguiente iteración,  $k = 1$ , comienza con la resolución del escenario 1 (ver figura 3.5). En este caso las tensiones aplicadas al componente son las calculadas al final de la resolución del escenario 2 de la iteración anterior y cambiadas de signo,  $\sigma_y(x, h/2) = \sigma_y(x, -h/2) = q^1(x)$  en el presente ejemplo. Debido a estas tensiones, en la línea de la grieta se produce una tensión  $\sigma_y(x, 0) = p^2(x)$ . Después, se resuelve el escenario 2 aplicando sobre la grieta esa carga cambiada de signo (ver figura 3.6), siendo  $\sigma_y(x, 0) = -p^2(x)$  la cual produce unas tensiones en el contorno ficticio del componente  $\sigma_y(x, h/2) = \sigma_y(x, -h/2) = -q^2(x)$ . De nuevo volverían a calcularse las tensiones en el contorno ficticio del componente en el escenario 2, siguiendo las expresiones 3.1, 3.2 y 3.3. Este sería el punto y final de esta segunda iteración. Las sucesivas iteraciones se realizan siguiendo el mismo proceso. A continuación, se realiza la suma de todos los estados tensionales obtenidos en las sucesivas iteraciones, de forma que las tensiones aplicadas en los contornos queda:

$$\sigma_y(x, h/2) = q^0(x) - q^1(x) + q^1(x) - q^2(x) + q^2(x) + \dots \quad (3.4)$$

$$\sigma_y(x, 0) = p^1(x) - p^1(x) + p^2(x) - p^2(x) + \dots \quad (3.5)$$

Se observa que los sucesivos términos se van cancelando por lo que, finalmente, después de la superposición de  $k$  iteraciones, las condiciones de contorno quedan:

$$\sigma_y(x, h/2) = q^0(x) - q^k(x) \quad (3.6)$$

$$\sigma_y(x, 0) = 0 \quad (3.7)$$

En resumen, el hecho de realizar numerosas iteraciones y superponerlas hace que el residual de tensión en las arista superior e inferior,  $q^k(x)$ , llegue a ser casi insignificante comparado con la tensión original aplicada  $q^0(x)$ . Por tanto, se espera:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q^k(x) = 0 \quad (3.8)$$

El proceso concluye cuando los residuos de las cargas aplicadas en los contornos del componente se consideran suficientemente pequeños, lo que se traduce en que las tensiones en cualquier punto interior tienden a unos valores estables. Por tanto, esto permite controlar la convergencia monitorizando la evolución del parámetro microestructural de tensión en la barrera  $\sigma_3^{i,k}$ , que justamente juega un papel muy relevante en la aplicación del modelo NR porque es el utilizado para la predicción de la resistencia a fatiga. La convergencia alcanzada depende del nivel de tolerancia exigido sobre este parámetro de tensión en la barrera. Concretamente se evalúa la diferencia relativa entre el valor de la tensión en la barrera calculado en la iteración actual y el calculado en la iteración anterior (ver ecuación 3.9). En este trabajo se ha establecido un nivel de tolerancia del 0.1% . El proceso se repite para las diferentes longitudes de grieta  $a = iD/2$  que se deseen analizar.

$$\frac{\sigma_3^{i,k} - \sigma_3^{i,k-1}}{\sigma_3^{i,k-1}} \quad (3.9)$$

Entre las ventajas que tiene el método IMFEM, es reseñable que el análisis elástico del sólido en el escenario 1 resulta sencillo porque no existe grieta, por lo que no se tiene en cuenta la plasticidad en el borde de grieta. Además, y no menos importante, la malla de la geometría, necesaria para resolver el problema mediante elementos finitos, no tiene que ser necesariamente modificada para las diferentes iteraciones, aunque debe estar refinada en la zona de la grieta.

### 3.3. Algoritmo IMFEM

El algoritmo IMFEM programado para el análisis de resistencia a fatiga de componentes entallados se puede definir como un proceso complejo a través del que se obtiene un *output* a partir de varios *inputs*. Todo el problema está parametrizado, de manera que se necesitan diferentes variables de entrada relacionadas con las medidas geométricas del componente y de la entalla. Adicionalmente, deben proporcionarse algunas propiedades mecánicas del material como el límite de fatiga intrínseco, el tamaño medio de grano y el diagrama de Kitagawa-Takahashi. También se debe indicar el número de ecuaciones  $N$  necesario para la resolución numérica del problema de la grieta según el modelo NR. El

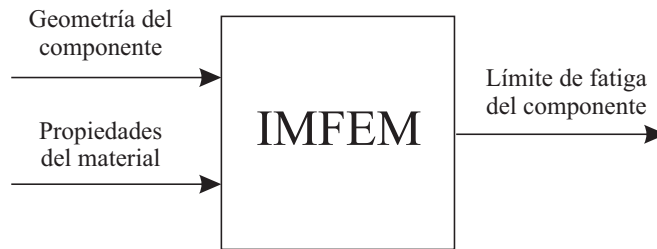


FIGURA 3.7: Descripción esquemática del algoritmo IMFEM.

final del proceso implica la obtención del límite de fatiga estimado para el componente con entalla.

El algoritmo completo ha sido programado en lenguaje *Python* por dos motivos. En primer lugar, porque los modelos de elementos finitos en *Abaqus* pueden ser programados en este lenguaje para ejecutarlos automáticamente sin necesidad de usar la interfaz gráfica [89]. Segundo, porque Python dispone de un módulo de cálculo numérico matricial válido para la resolución numérica del equilibrio de dislocaciones en la grieta y el posterior cálculo de tensiones en el contorno del sólido. La simulación de problemas en *Abaqus* mediante scripts de Python tiene muchas ventajas. En el caso de simulaciones que involucren problemas complejos donde haya que definir geometrías o materiales especiales, o las condiciones de contorno sean muy específicas, es dónde resulta más útil esta técnica. Además, es obvio que en un proceso algorítmico dónde se resuelve repetidamente un problema es dónde más beneficio se extrae de la programación de modelos de elementos finitos porque evita estar creando continuamente el mismo modelo. Por último, es necesario resaltar que a las ventajas del pre-proceso y simulación del problema también se debe añadir las del post-proceso, como puede ser la extracción de tensiones o deformaciones en un determinado punto o zona utilizando el lenguaje Python [90]. En resumen, la programación de estos modelos resulta clave para automatizar el proceso, que es exactamente lo que se busca en este trabajo y, debido a esto, los scripts de los modelos de *Abaqus* han sido implementados en el algoritmo IMFEM.

Una vez introducidos los datos iniciales necesarios en el algoritmo, se inicia el proceso de superposición iterativa. El desarrollo completo del algoritmo se repite para todas las longitudes de grieta que se deseen estudiar, es decir, cada ciclo completo del algoritmo corresponde a la convergencia obtenida en el valor de tensión en la barrera para una



determinada longitud de grieta. Cada ciclo queda dividido en dos partes, diferenciando entre la primera iteración y el resto de las iteraciones sucesivas, siendo el desarrollo de ambas partes muy similar. En la figura 3.8 se muestra un diagrama descriptivo del funcionamiento del algoritmo, que corresponde al proceso detallado previamente en el apartado 3.2 y cuyos puntos más importantes son:

- Inicialmente, en el algoritmo se deben declarar todas las variables necesarias durante la ejecución del mismo. Seguidamente comienza la primera iteración,  $k = 0$ , con la resolución del escenario 1 que tiene como objetivo obtener las tensiones en el ligamento de la entalla, es decir, las tensiones sobre la línea dónde se situaría la grieta en el problema original. Este paso se realiza por completo en software de elementos finitos, Abaqus en esta tesis. Después del análisis de tensiones en el componente, se crea un *path* que almacena los datos de tensión elástica sobre la línea de la grieta, es decir, en el ligamento de la entalla. Todo este paso está realizado en un código de Abaqus programado en Python, al que se hace llamada en el momento correspondiente del proceso.
- El siguiente paso es la resolución del problema de equilibrio de dislocaciones en la grieta, correspondiente al escenario 2, en un medio infinito y bajo el gradiente de tensiones calculado en el paso anterior. Por este motivo, una de las funciones programadas en el algoritmo es la resolución numérica del problema de la grieta en medio infinito, descrito en el apartado 2.3. Debido a la discretización del problema para su resolución numérica, el valor de tensión que actúa sobre cada punto de integración situado sobre la grieta se calcula interpolando sobre el gradiente de tensiones completo. Finalmente, el objetivo de este paso es obtener la función de distribución de dislocaciones en la grieta,  $f(\xi)^k$ , y la tensión en la barrera,  $\sigma_3^{i,k}$ , para la longitud de grieta que se esté analizando en ese momento. Este proceso de resolución numérica se encuentra programado íntegramente en Python.
- El tercer y último paso de la primera iteración corresponde al cálculo de las tensiones en el contorno ficticio del sólido en el escenario 2. Todo el contorno se discretiza en una cantidad de puntos definida al inicio del algoritmo. Esto se debe a que la resolución numérica del problema de la grieta ofrece la función de distribución de dislocaciones discretizada y, por tanto, las expresiones para

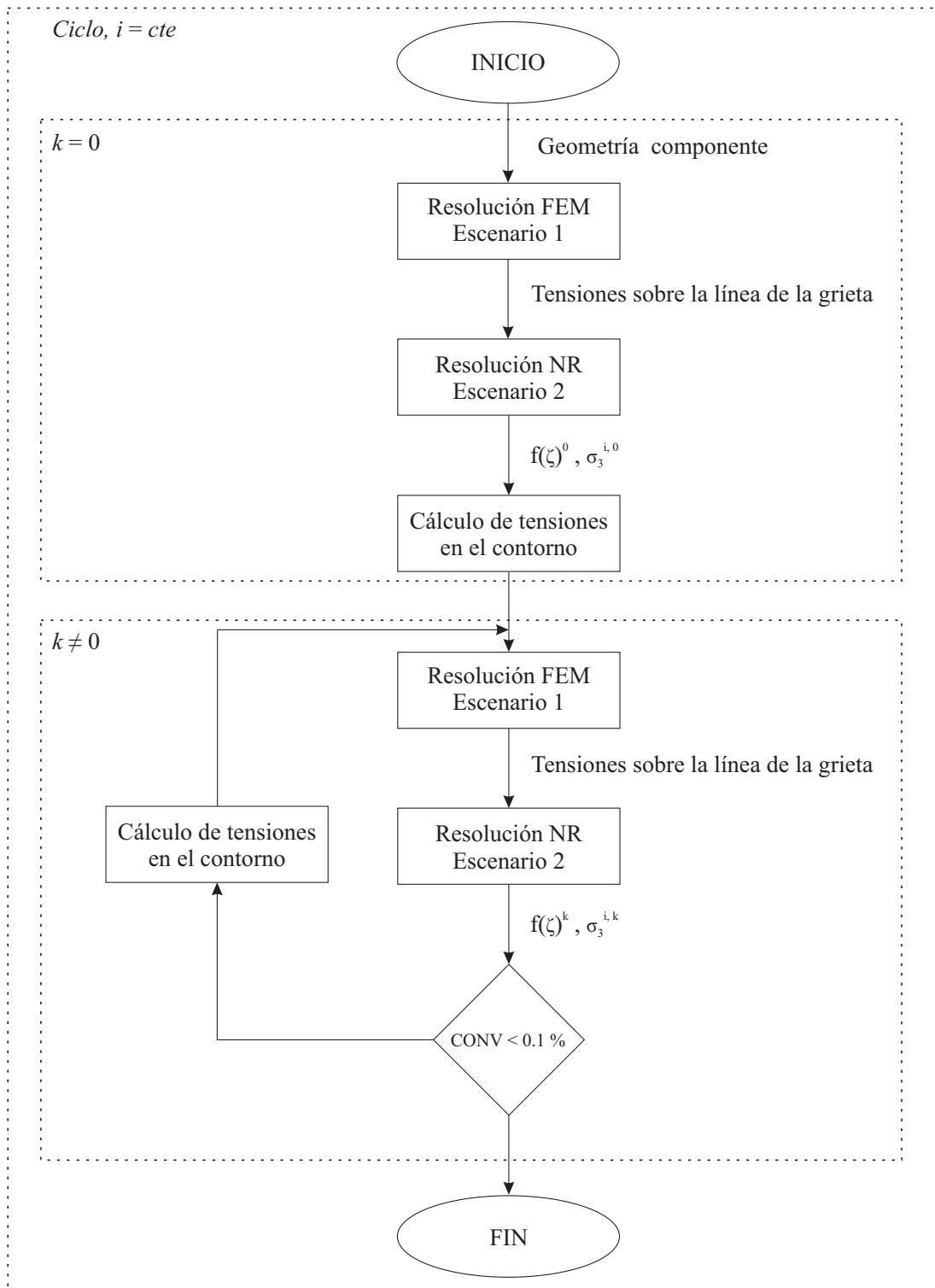


FIGURA 3.8: Algoritmo IMFEM.

el cálculo de las tensiones en cada punto 3.1 - 3.3 deben ser transformadas a una forma algebraica. Por simplicidad, el método escogido para la aproximación numérica de las ecuaciones integrales es la regla del punto medio. Esto significa que el intervalo de integración se divide en un determinado número de regiones, y a cada región se le asigna el valor numérico obtenido en el punto medio de la misma.

- El comienzo de la segunda iteración,  $k = 1$ , parte de las tensiones calculadas sobre el contorno del componente en el escenario 2 de la iteración anterior. Estas tensiones se cambian de signo y después se suman a las tensiones del problema original para convertirse en las nuevas condiciones de contorno del problema de elementos finitos del sólido sin grieta (escenario 1) que es el primer proceso de esta nueva iteración. Es en este paso donde radica la diferencia entre la primera iteración y el resto, ya que deben aplicarse unas tensiones distribuidas, no uniformes, en todo el contorno del componente. Igual que antes, este paso se resuelve en Abaqus, pero en esta iteración y las sucesivas se hace uso de la subrutina *UTRACLOAD* que permite la aplicación de cargas no uniformes sobre el contorno del componente diseñado. Esta subrutina sólo es capaz de aplicar cargas sobre el contorno o sobre puntos del contorno, por lo que las tensiones calculadas en cada punto tienen que ser transformadas en un vector carga  $\vec{F}$ :

$$\vec{F} = T\vec{n} \quad (3.10)$$

dónde  $T$  representa el tensor de tensiones y  $\vec{n}$  es la normal en cada punto del contorno discretizado. El problema se resuelve y, de nuevo, se extrae el gradiente de tensiones sobre el ligamento de la entalla.

- Seguidamente se vuelve a resolver el escenario 2 usando el gradiente de tensiones en la línea de la grieta obtenido en el paso anterior. El criterio de convergencia (CONV, variable del algoritmo) se ha definido en torno al valor de tensión en la barrera  $\sigma_3^{i,k}$ . Por esta razón, al finalizar cada resolución del escenario 2, el valor calculado de tensión en la barrera,  $\sigma_3^{i,k}$ , se compara con el obtenido en la iteración anterior,  $\sigma_3^{i,k-1}$  (ver ecuación 3.9). Si la diferencia entre ambos valores es inferior a 0.1% se da por finalizado el proceso de convergencia y el ciclo termina. Por

contra, si la diferencia es superior al 0.1 %, se vuelven a calcular las tensiones en el contorno del sólido y se comienza una nueva iteración hasta que se consiga la convergencia deseada. Una vez alcanzada dicha convergencia el ciclo del algoritmo para la longitud de grieta analizada termina para comenzar uno nuevo correspondiente a la siguiente longitud de grieta.

Cuando se han analizado una cantidad considerable de granos y se ha obtenido la convergencia en todos ellos, se calcula la estimación del límite de fatiga entallado  $S_{FL}^N$  a partir de las tensiones  $\sigma_{Li}^N$ , obtenidas en función de los valores de tensión en la barrera  $\sigma_3^{i,N}$  para cada longitud de grieta, tal y como se describe en el apartado 2.4.1.

El algoritmo IMFEM ha sido diseñado para que su ejecución se produzca de manera automática. Esto quiere decir que, una vez establecido cuántas longitudes de grieta se van a estudiar y el número de iteraciones máximo a realizar (opcional), el proceso se realiza íntegramente sin necesidad de procesamiento intermedio. Tanto la propia ejecución del algoritmo en la consola de Python instalada en el ordenador o nodo de cálculo como las simulaciones de elementos finitos de Abaqus se realizan en segundo plano, obteniéndose un menor consumo de recursos, lo que permite la posibilidad de ejecutar diferentes problemas en paralelo si se desea. Una característica del proceso de parametrizado del algoritmo es que todo está programado modularmente para simplificar la formulación y desarrollo del mismo (ver figura 3.9), es decir, existen varias funciones a las que se realizan las llamadas correspondientes desde el código principal y en el momento oportuno del proceso de cálculo. Toda la programación del método se incluye al final de este documento, en el Anexo 4.

Un tema muy importante es la comunicación entre el propio algoritmo IMFEM y sus diferentes funciones diseñadas, los modelos de Abaqus y las subrutinas programadas. Todo el proceso está diseñado para que la comunicación se realice mediante archivos de texto, de manera que los valores alfanuméricos, tanto de entrada como salida, se almacenan o leen directamente de estos archivos de texto. Además, todo el proceso se realiza dentro de un mismo directorio local de trabajo del ordenador. Esto significa que todos los códigos de Python y Abaqus deben estar en la misma carpeta para el correcto funcionamiento del algoritmo (ver figura 3.10). Asimismo, los archivos de texto generados también se encuentran en ese lugar.

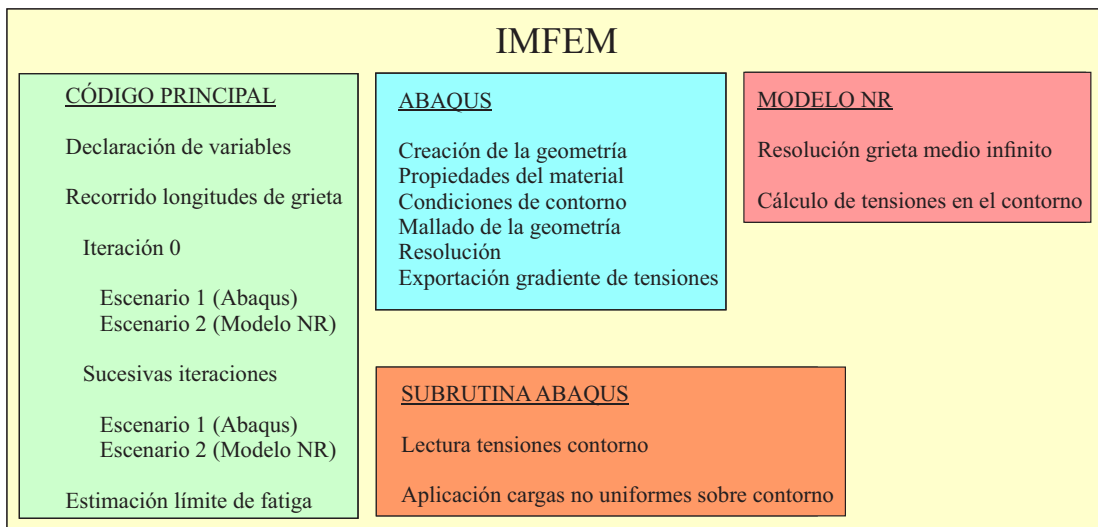


FIGURA 3.9: Modelado del algoritmo IMFEM.

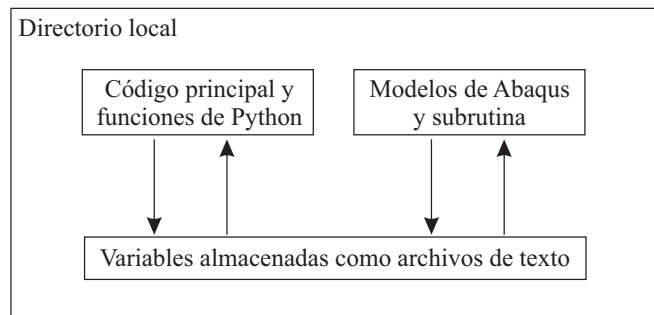


FIGURA 3.10: Comunicación entre los diferentes procesos del algoritmo IMFEM.

### 3.4. Aplicación del algoritmo IMFEM a una placa con agujero circular

A continuación se procede a exponer un ejemplo de la aplicación del método IMFEM al caso particular de un problema básico, como es el representado por una placa con agujero circular sometida a una carga cíclica axial. Concretamente, se ha escogido el trabajo de Duquesnay et al. [91] para tener una referencia de la geometría del componente y de la entalla, y de las propiedades del material. Los materiales utilizados para la fabricación de las probetas fueron el acero SAE 1045 y la aleación de aluminio

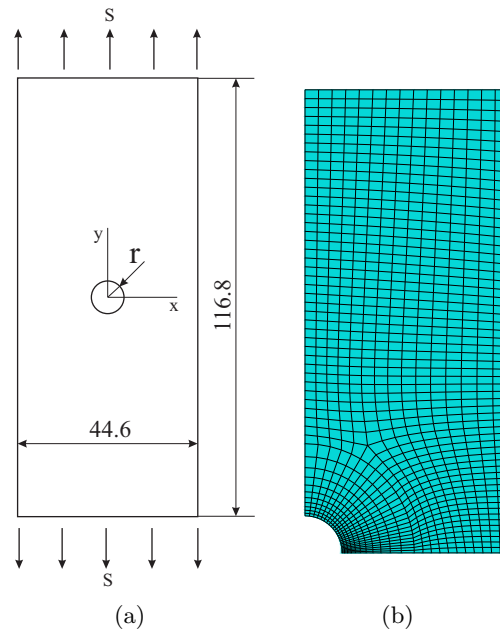


FIGURA 3.11: Geometría de placa (a) y modelado en elementos finitos (b).

2024-T351. Las propiedades se adjuntan en la tabla 4.1. Las probetas tienen un ancho de 116.8 mm y un alto de 44.6 mm. Los radios de los agujeros son 0.12, 0.25, 0.5 y 1.5 mm.

Para este ejemplo solo se van a realizar las estimaciones de resistencia a fatiga de la placa fabricada en acero SAE 1045. Para ello, se introducen inicialmente en el algoritmo algunos datos del material como son el tamaño de grano ( $35 \mu\text{m}$ ) o el límite de fatiga intrínseco del acero ( $606 \text{ MPa}$ ,  $R=-1$ ), además de las dimensiones geométricas de la placa. En este caso, se ha optado por simular en el software de elementos finitos solamente un cuarto de placa debido a la simetría en ambos ejes. Por otro lado se establece una longitud de grieta máxima de 100 granos, es decir, el algoritmo realizará tantos ciclos completos como longitudes de grieta se han indicado para hallar la convergencia en cada una de ellas. Otro aspecto importante es que el diagrama de Kitagawa-Takahashi del acero en cuestión, bajo esas condiciones de carga, no está disponible, por lo que se hará uso de la aproximación de Vallellano descrita en el capítulo 2. Finalmente, ya que el algoritmo está parametrizado, se hace un barrido de resultados para un radio de agujero que varía entre 0.12 y 5.0 mm.

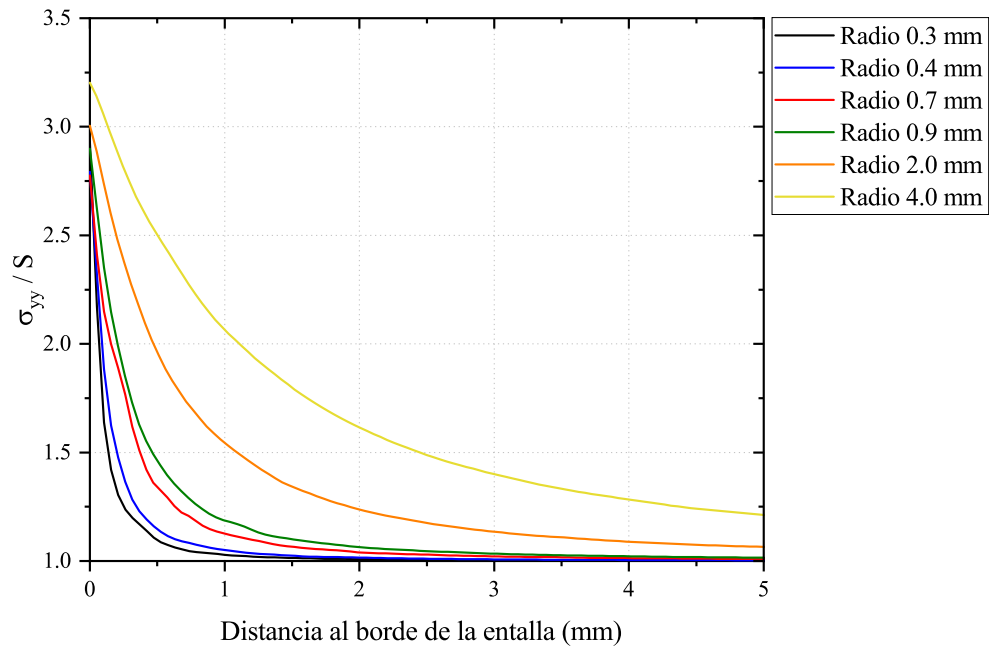


FIGURA 3.12: Gradiente de tensiones de una placa con agujero circular.

Una vez indicados todos los parámetros de entrada necesarios, se pone en marcha la ejecución del algoritmo. Como se ha descrito anteriormente, el primer paso es realizar un análisis elástico de las tensiones que se producen en el ligamento de la placa debido al agujero. En la imagen 3.12 se muestran este gradiente  $\sigma_{yy}$ , producido por la tensión remota  $S$ , para diferentes tamaños de entalla. Después, según el modelo NR, se van calculando las tensiones  $\sigma_{Li}^N$  para cada longitud de grieta. El máximo valor de estas tensiones  $\sigma_{Li}^N$  corresponderá al límite de fatiga de la placa con agujero. En la figura 3.13 se muestra el rango de tensiones  $\Delta\sigma_{Li}^N$  en función de la longitud de grieta. La figura incluye los resultados de una selección de tamaños de agujero en doble escala logarítmica. Esta representación corresponde al diagrama de Kitagawa-Takahashi estimado para este material y para los diferentes radios de agujero analizados. Además, se han añadido la estimación de la MFEL y la línea que marca el límite de fatiga intrínseco del material para completar la comparación. Por un lado, es destacable la forma de la curva que presentan los agujeros más pequeños. A medida que la grieta crece desde su

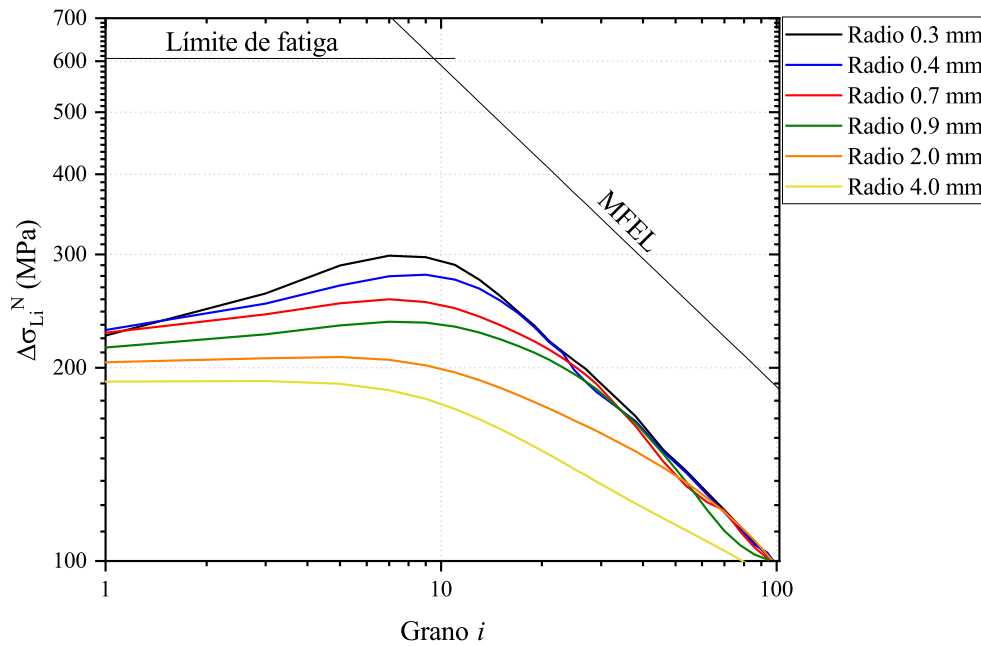


FIGURA 3.13: Tensiones  $\sigma_{Li}^N$  en función de la longitud de grieta.

longitud inicial, la tensión necesaria para que ésta se propague aumenta hasta llegar a un máximo que corresponde con el límite de fatiga para ese caso en concreto. Ese valor de tensión marca el umbral entre grietas propagantes y no propagantes. Es decir, si desde el inicio se aplica una tensión mínimamente inferior al máximo de la curva se tendrá una grieta que se propagará hasta una longitud aproximada de 10 granos y quedará ahí detenida mientras no se aumente la carga aplicada. Por otro lado, para tamaños de agujero superiores se muestra cómo hay una gran dependencia de la entalla, ya que la tensión máxima de la curva se obtiene en la longitud inicial de grieta. Esto anterior significa que una vez iniciada la grieta en estas geometrías extremas de agujero, ésta se propaga hasta el fallo si se mantiene la tensión aplicada.



### 3.4.1. Análisis de convergencia

En este apartado se va a realizar un análisis del proceso de convergencia que realiza el algoritmo IMFEM sobre el ejemplo anterior de una placa con agujero circular. Para ello se van a utilizar los resultados obtenidos de las predicciones realizadas con los mismos tamaños de entalla definidos en las figuras 3.12 y 3.13.

En primer lugar se realiza una evaluación del número de iteraciones que el algoritmo realiza en cada caso, es decir, cuántas iteraciones hacen falta para hallar la convergencia dependiendo de la longitud de grieta estudiada en cada ciclo. En la figura 3.14 se representa los resultados, dónde el número de iteraciones necesarias hasta obtener el nivel de convergencia está ilustrado en función de la longitud de grieta. En concreto, en esta figura 3.14 se representan todos los tamaños de entalla situándose cada uno en un gráfico independiente, en orden vertical de mayor a menor tamaño de agujero. Los diferentes gráficos comparten la misma escala del eje horizontal dónde se refleja la longitud de grieta definida como el número de granos que abarca la grieta. El color utilizado para cada tamaño de agujero es el mismo que fue definido en la figura 3.12. Se puede apreciar que no existe homogeneidad en cuanto al número de iteraciones realizadas en función del tamaño del tamaño de entalla para una misma longitud de grieta. Sin embargo, es destacable que en todos los radios de agujero representados se aprecia cómo existen dos partes que pueden diferenciarse, una para las longitudes de grieta más pequeñas y otra para longitudes de grieta superiores. En todos los casos representados el número de iteraciones realizadas es siempre superior en longitudes de grietas mayores.

En segundo lugar se evalúan los resultados obtenidos para el parámetro microestructural de tensión en la barrera en las diferentes iteraciones. Tal y como se ha explicado anteriormente, el parámetro sobre el que se evalúa la convergencia es la tensión obtenida en la barrera  $\sigma_3^i$ . Se ha realizado un análisis de la diferencia existente entre el valor obtenido en cada iteración  $\sigma_3^{i,k}$  y el obtenido en la iteración final  $\sigma_3^{i,k=final}$  del proceso de convergencia algorítmico. En la figuras 3.15, 3.16, y 3.17 se muestran los resultados para los tamaños de agujero 0.3, 0.7 y 4 mm. En el eje vertical se representa el cociente entre el valor de  $\sigma_3^{i,k}$  de cada iteración y el valor de la iteración final. Además, en este eje de ordenadas se ha marcado el valor 1.00 con una línea discontinua horizontal que

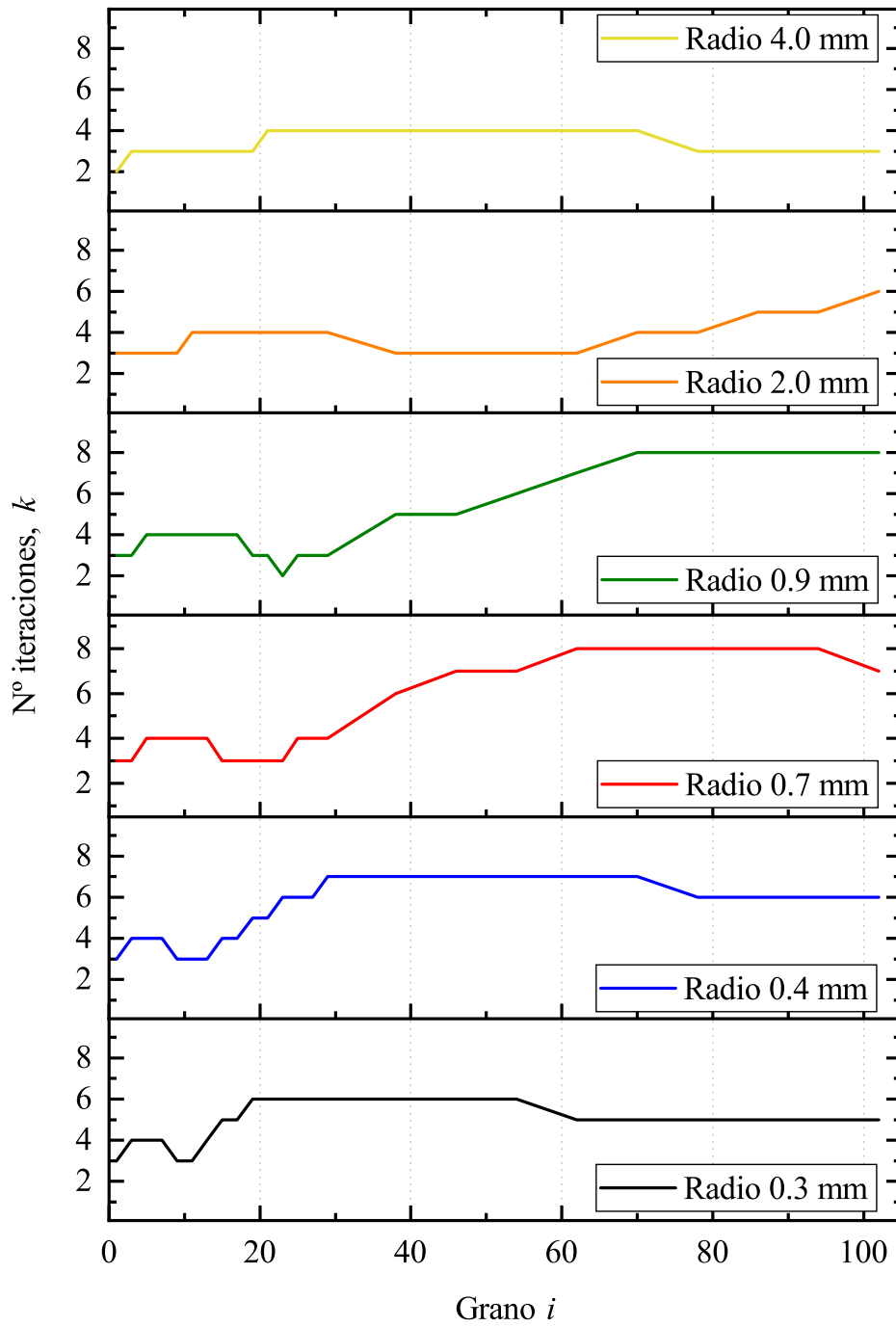


FIGURA 3.14: Número de iteraciones realizadas en función del grano  $i$  estudiado.

representa la convergencia alcanzada. Se han representado varias longitudes de grieta para los tres tamaños de agujero, concretamente las longitudes de grieta de 1, 3, 5, 7, 21 y 46 granos. Cada figura corresponde a un tamaño de entalla, y en ellas se incluyen los datos de todas las longitudes de grieta analizadas representados en gráficos diferentes en orientación vertical y ordenados de menor a mayor longitud de grieta. En cuanto a los resultados obtenidos, existe una clara diferencia entre los casos de longitudes de grieta pequeña y los de grietas grandes respecto a la evolución de la diferencia del parámetro  $\sigma_3^{i,k}$  en cada iteración. Para las longitudes de grieta pequeñas se observa que desde la iteración inicial hay una menor variación del parámetro de tensión en la barrera con respecto al obtenido en la última iteración. Además, se aprecia cómo la variación fluctúa en cada iteración en torno a la línea horizontal de convergencia en  $y = 1,00$ . Sin embargo, en grietas de longitud superior se observa como la variación es bastante mayor en las primeras iteraciones, la cual se reduce conforme se incrementa el número de iteraciones realizadas por el algoritmo.

Por último, se ha realizado una evaluación de las tensiones necesarias para superar cada barrera microestructural,  $\sigma_{Li}^N$ , calculadas en cada iteración para un amplio rango de longitudes de grieta. Se han analizado tres tamaños de entalla, concretamente 0.4, 0.6 y 2.0 mm. Los resultados se muestran en las figuras 3.18, 3.19 y 3.20 donde las tensiones  $\sigma_{Li}^N$ , obtenidas en diferentes iteraciones, se ha representado frente a la longitud de grieta correspondiendo cada figura a un tamaño de entalla diferente. Existe un patrón en los tres tamaños de entalla estudiados, ya que se aprecia una diferencia notable entre los resultados de estas tensiones  $\sigma_{Li}^N$  correspondientes a la primera iteración ( $k = 0$ ) y los del resto de iteraciones ( $k \neq 0$ ). Asimismo, la diferencia entre las tensiones  $\sigma_{Li}^N$  del conjunto iteraciones  $k \neq 0$  es inferior y se reduce, incluso, conforme el tamaño de entalla aumenta.

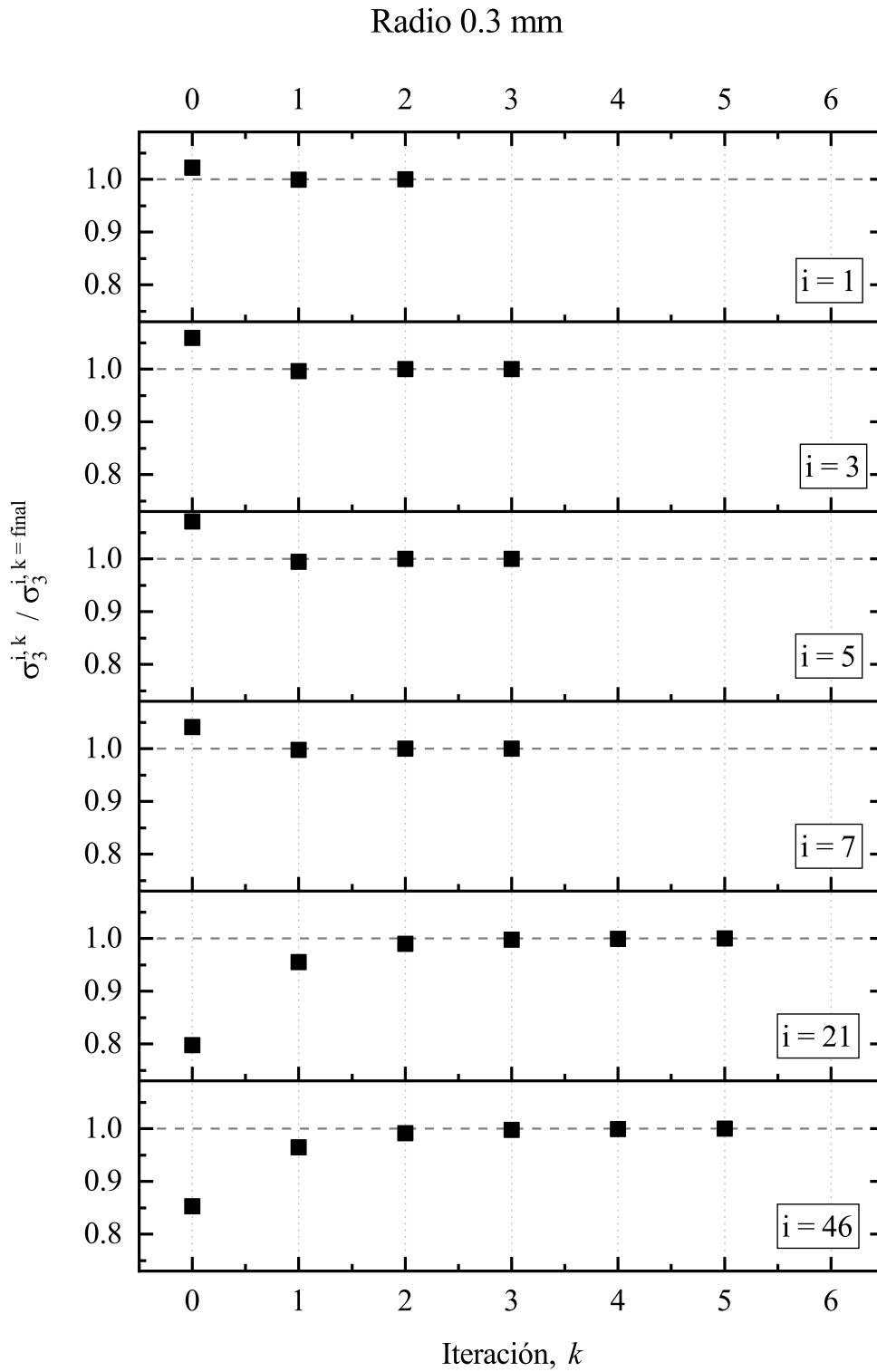


FIGURA 3.15: Convergencia del valor de tensión en la barrera  $\sigma_3^i$  obtenida en cada iteración para un agujero de radio 0.3 mm.

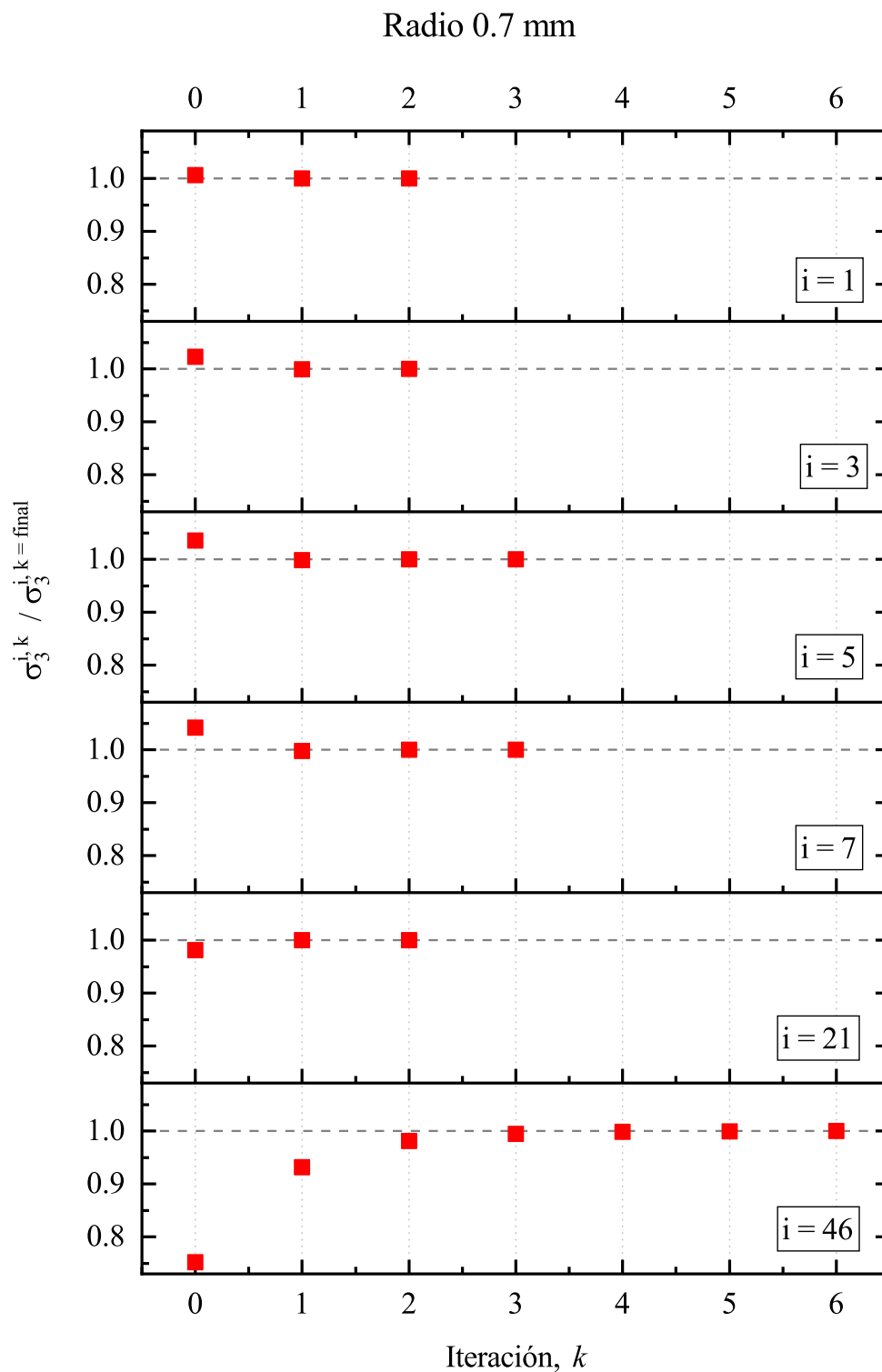


FIGURA 3.16: Convergencia del valor de tensión en la barrera  $\sigma_3^i$  obtenida en cada iteración para un agujero de radio 0.7 mm.

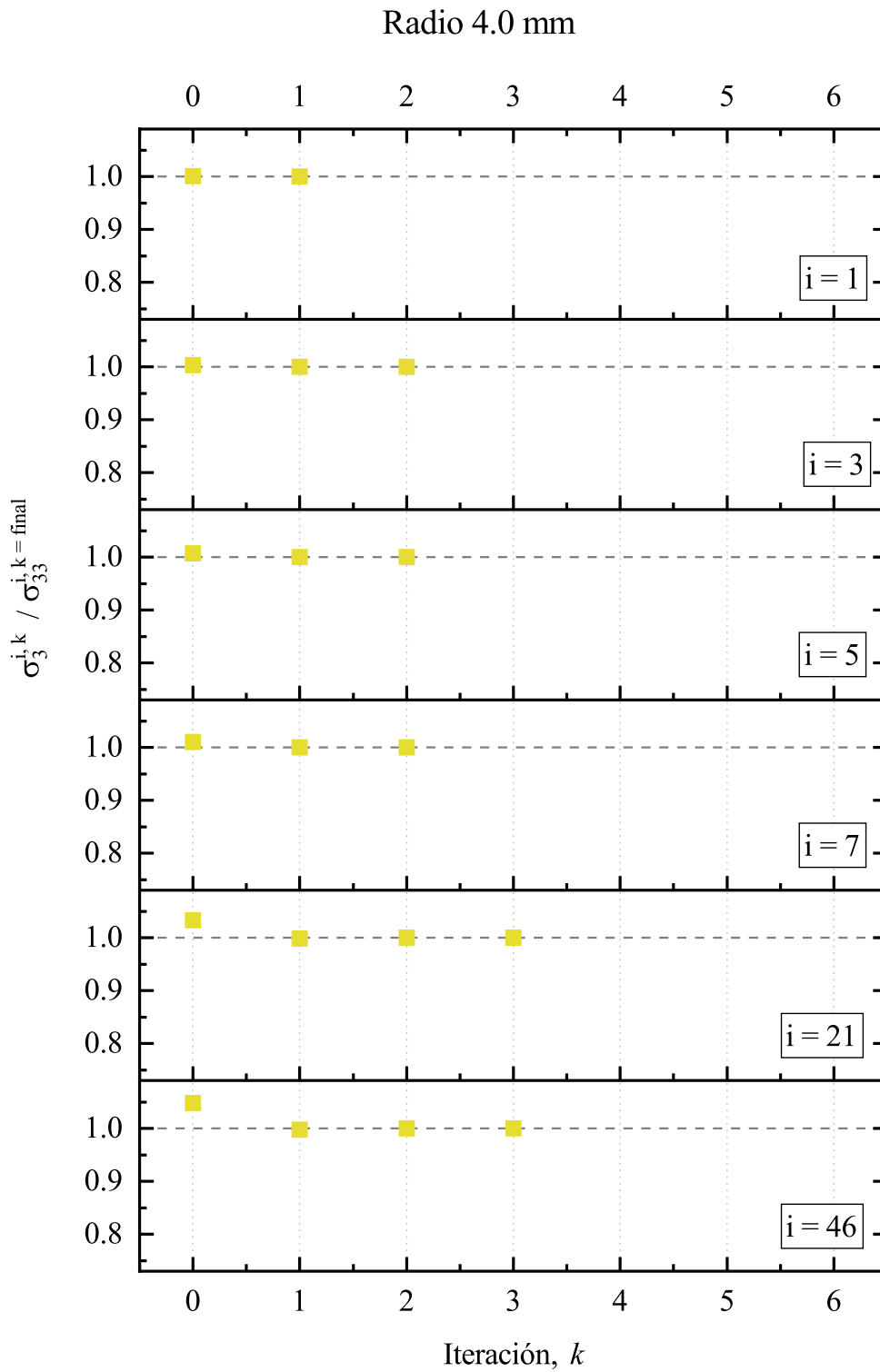


FIGURA 3.17: Convergencia del valor de tensión en la barrera  $\sigma_3^i$  obtenida en cada iteración para un agujero de radio 4.0 mm.

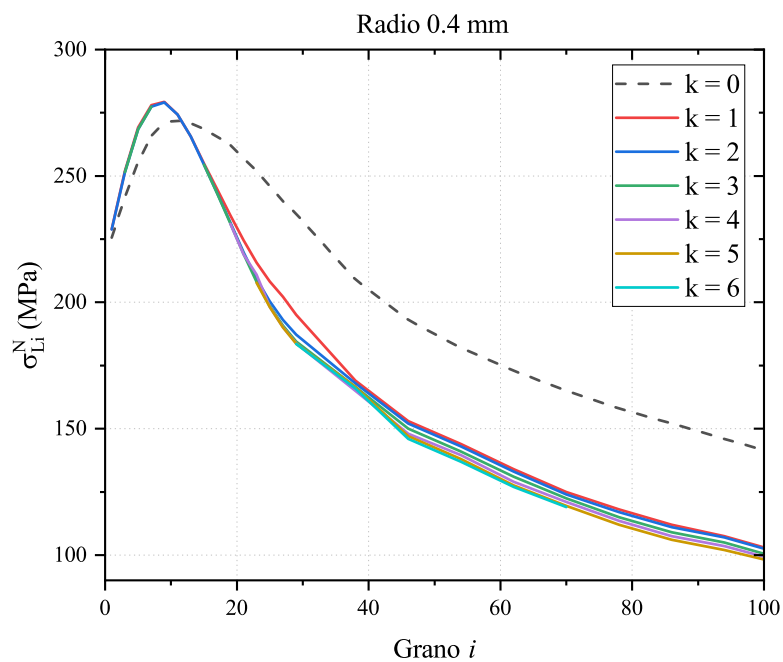


FIGURA 3.18: Tensiones  $\sigma_{Li}^N$  obtenidas en las diferentes iteraciones para un agujero de radio 0.4 mm.

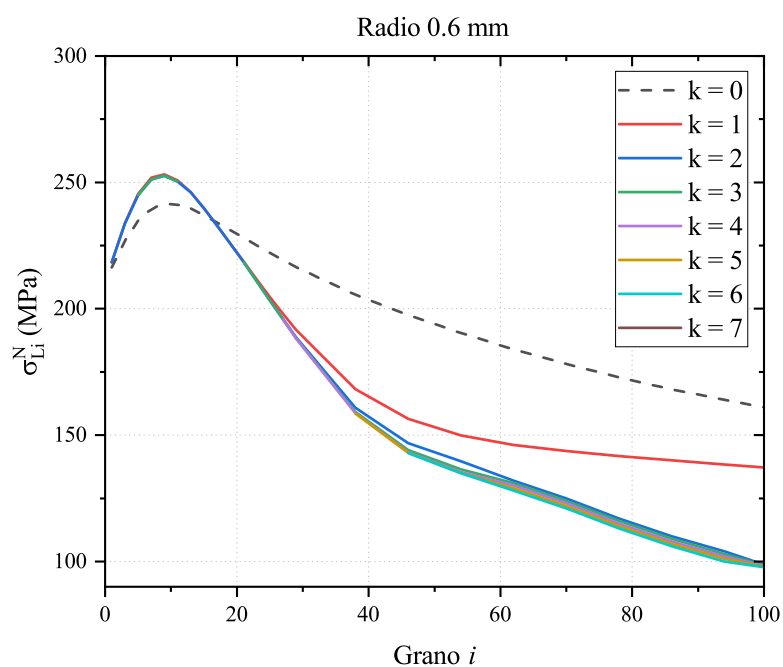


FIGURA 3.19: Tensiones  $\sigma_{Li}^N$  obtenidas en las diferentes iteraciones para un agujero de radio 0.6 mm.

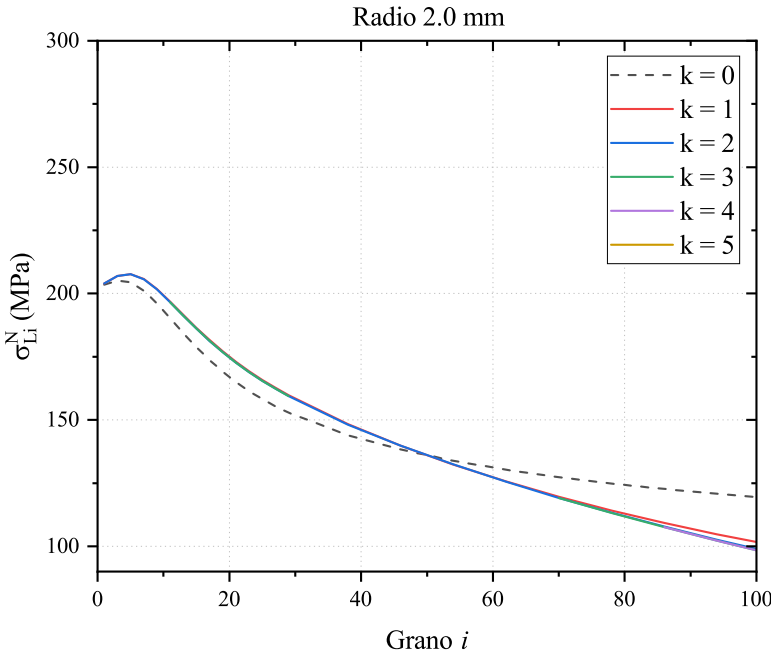


FIGURA 3.20: Tensiones  $\sigma_{L_i}^N$  obtenidas en las diferentes iteraciones para un agujero de radio 2.0 mm.



## Capítulo 4

# Validación del método IMFEM

En este capítulo se presentan una serie de ejemplos de ensayos de fatiga sobre probetas entalladas en los que se comparan resultados experimentales de la literatura con la estimación realizada con el presente método IMFEM con el objetivo de realizar la validación del método desarrollado. En el análisis se han evaluado varios tipos de geometría de entalla de diferentes tamaños, así como diferentes tipos de componente, placas o probetas cilíndricas por ejemplo, y varios materiales. La presentación de los resultados está dividida según la tipología del concentrador de tensión. Además, las estimaciones realizadas con el método IMFEM se han comparado con los resultados que aportan las predicciones realizadas con el método de Peterson [44] y el método del punto de Taylor [48, 49], ambos pertenecientes a los métodos de distancia crítica. En la comparación también se incluyen las predicciones realizadas mediante la técnica propuesta por Chaves et al. [92] que consiste en evaluar la resistencia a fatiga de un componente entallado combinando los elementos finitos y el modelo NR, es decir, la predicción se obtiene a partir del gradiente producido por la entalla y modelando la grieta mediante dislocaciones haciendo uso del núcleo del problema infinito. Se podría decir que este método es una simplificación del método descrito en este trabajo, ya que los resultados que ofrece corresponden a la iteración inicial del método IMFEM.

Para realizar las estimaciones mediante el método de Peterson es necesario calcular la longitud crítica del material,  $l_1$  (ver ecuación 1.22). Dicha expresión empírica [45, 46] ha sido utilizada para aproximar las longitudes de los aceros analizados en este capítulo.

En el caso del método del punto de Taylor, es necesario calcular la longitud crítica del material  $L$ , según la expresión 1.23. Además, el tamaño de grano del material debe ser estimado en caso de que los trabajos de referencia no aporten ese dato. Para ello se usa la ecuación del diagrama de Kitagawa-Takahashi [81]:

$$D = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\Delta K_{th}}{\Delta \sigma_{FL}} \right)^2 \left( \frac{m_1^*}{m_\infty^*} \right)^2 \quad (4.1)$$

donde  $\frac{m_1^*}{m_\infty^*} = \frac{1}{3,1}$  es un valor representativo del comportamiento policristalino del material cuando la grieta es larga.

Es necesario recordar que en el método iterativo desarrollado se evalúan únicamente geometrías en dos dimensiones, en los que la grieta se simplifica como una línea. Por esta razón, el espesor de las piezas ensayadas a fatiga con las que se han realizado las comparaciones, que corresponden a geometrías reales en tres dimensiones, no se ha tenido en cuenta como dato del problema para la aplicación del método IMFEM.

#### 4.1. Entallas en forma de agujero circular

Duquesnay et al. realizaron ensayos de fatiga en tracción-compresión en placas planas con agujero circular [91]. Los materiales utilizados para la fabricación de las probetas fueron el acero SAE 1045 y la aleación de aluminio 2024-T351. Las propiedades se adjuntan en la tabla 4.1. Las placas tienen un ancho de 116.8 mm y un alto de 44.45 mm. Los radios de los agujeros son 0.12, 0.25, 0.5 y 1.5 mm. El valor de la constante  $l_1$  característica necesaria para el cálculo del factor  $K_f$  de Peterson tiene un valor de  $l_1=0.15$  mm para el acero SAE 1045, y  $l_1=0.51$  para la aleación aluminio 2024-T351. La longitud crítica para el método del punto de Taylor es  $L=0.17$  mm para el acero SAE 1045 y  $L=0.26$  mm para la aleación de aluminio 2024-T351. Los tamaños de grano estimados [81] son  $D=0.035$  mm para el acero y  $D=0.053$  mm para la aleación de aluminio. Los resultados experimentales de límite de fatiga, junto a las predicciones de los diferentes métodos, se muestran en las figuras 4.1 y 4.2.

El trabajo de El-Haddad et al. [12] muestra ensayos de fatiga sobre placas planas, de 70 mm de ancho, y con agujero circular de radios 0.2, 0.48 y 4.8 mm. El material

TABLA 4.1: Propiedades de los materiales ensayados por Duquesnay et al. [91].

Material	$\Delta K_{th}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$\Delta\sigma_{FL}$ (MPa)	$R$
Acero SAE 1045	13.86	606	-1
Aleación de aluminio 2024-T351	7.04	248	-1

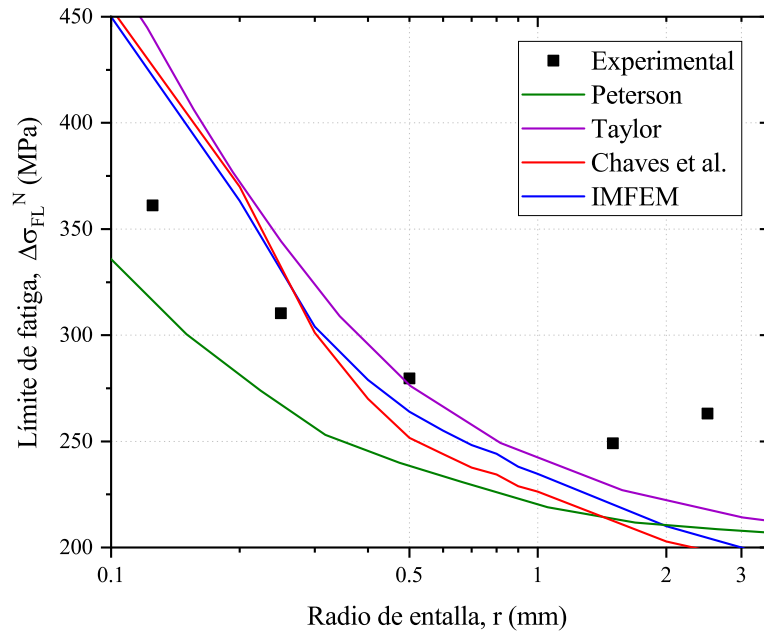


FIGURA 4.1: Resultados de Duquesnay para el acero SAE 1045 [91] y predicciones con varios modelos.

utilizado es el acero CSA G40.11 cuyas propiedades se detallan en la tabla 4.2. El valor de la constante  $l_1$  necesaria para el cálculo del factor  $K_f$  de Peterson tiene un valor de  $l_1=0.14$  mm. La longitud crítica del acero para el método del punto de Taylor es  $L=0.24$  mm. El valor estimado del tamaño medio de grano es  $D=5 \mu\text{m}$  [81]. Los resultados experimentales de límite de fatiga, junto a las predicciones de los diferentes métodos, se muestran en la figura 4.3.

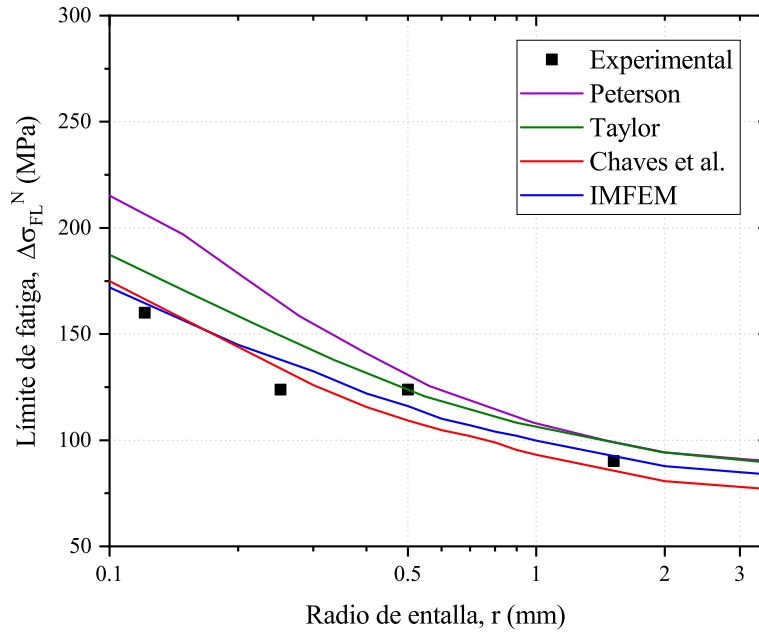


FIGURA 4.2: Resultados de Duquesnay para la aleación de aluminio 2024-T351 [91] y predicciones con varios modelos.

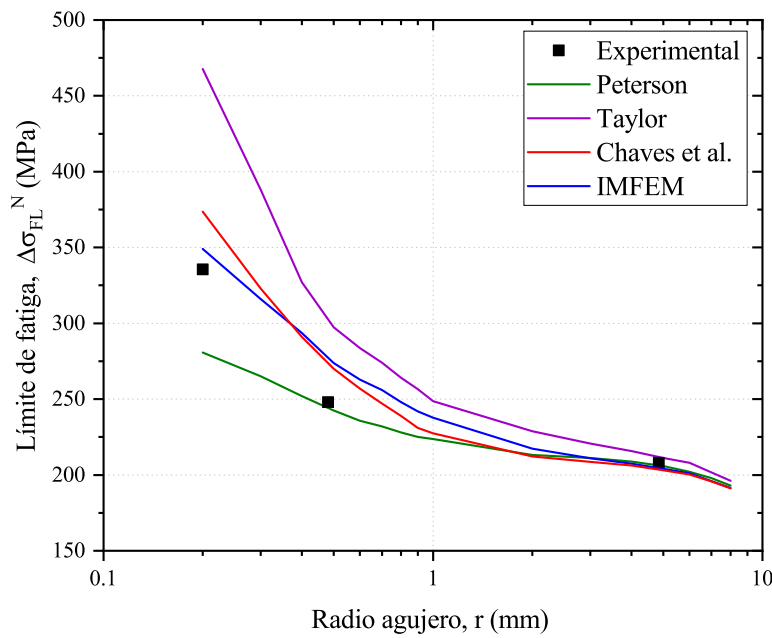


FIGURA 4.3: Resultados El Haddad et al. para el acero CSA G40.11 [12] y predicciones con varios modelos.

TABLA 4.2: Propiedades del acero ensayado por El Haddad et al. [12].

Material	$\Delta K_{th}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$\Delta\sigma_{FL}$ (MPa)	$R$
Acero CSA G40.11	15.9	580	-1

## 4.2. Entallas en forma de V

Frost ensayó placas con entallas en forma de V con un ancho de 63.5 mm y una profundidad de entalla de 5.08 mm variando el radio de fondo de entalla [51]. El ángulo de la entalla en V era de 55 grados. El material utilizado fue un acero común cuyas propiedades se muestran en la tabla 4.3. El valor de la constante  $l_1$  característica necesaria para el cálculo del factor  $K_f$  de Peterson tiene un valor de  $l_1=0.42$  mm. La longitud crítica del acero CSA G40.11 para el método del punto de Taylor es  $L=0.32$  mm. El tamaño de grano medio no es un dato aportado por el autor y ha sido estimado en  $D=0.068$  mm [81]. Los resultados experimentales de ensayos finalizados en rotura y run-outs, junto a las predicciones de los diferentes métodos, se muestran en la figura 4.4. En este caso, el límite de fatiga experimental está situado entre las roturas y los run-outs en cada caso representado.

TABLA 4.3: Propiedades del acero ensayado por Frost [51].

Material	$K_{th}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$\sigma_{FL}$ (MPa)	$R$
Acero medio (0.22 % C)	6.5	202	-1

En el trabajo de Zambrano et al. [93] se analizan resultados de ensayos de fatiga sobre probetas planas con doble entalla en V. Las entallas diseñadas tienen la misma profundidad igual a 5.1 mm, y el radio de fondo de entalla varía entre un valor mínimo igual a 0.19 mm y un valor máximo igual a 1.5 mm. El ángulo definido para la forma en V es igual a 55 grados. Las probetas fueron fabricadas en acero de fundición denominado EN-GJS-400-18-LT y las propiedades mecánicas se incluyen en la tabla 4.4. El valor de la constante  $l_1$  característica necesaria para el cálculo del factor  $K_f$  de Peterson tiene un valor de  $l_1=0.51$  mm. La longitud crítica de Taylor estimada para este material tiene

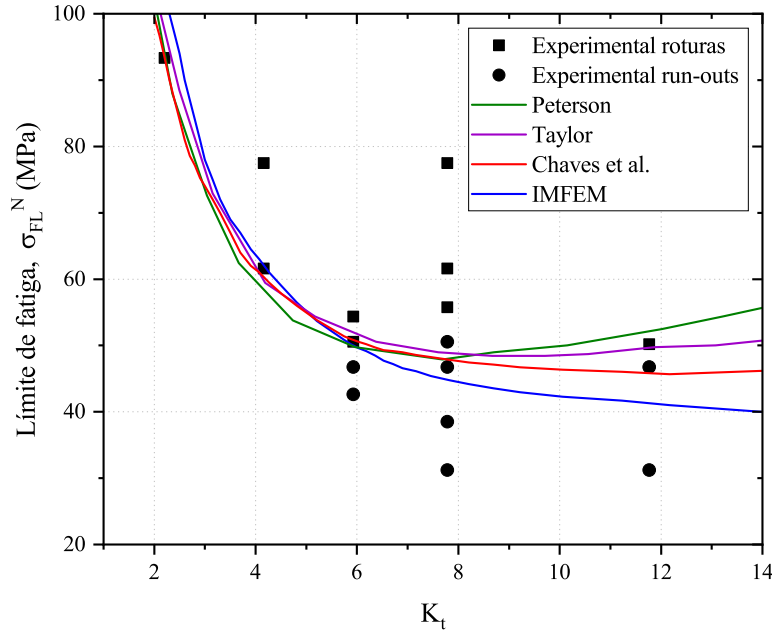


FIGURA 4.4: Resultados de Frost para el acero medio (0.22% C) [51] y predicciones con varios modelos.

un valor de  $L=0.49$  mm para este material. El tamaño medio de grano del acero reportado por los autores es igual a  $D=0.032$  mm. Los resultados experimentales de ensayos finalizados en rotura y run-outs, junto a las predicciones de los diferentes métodos, se muestran en la figura 4.5. En este caso, el límite de fatiga experimental está situado entre las roturas y los run-outs en cada caso representado.

TABLA 4.4: Propiedades del acero de fundición ensayado por Zambrano et al. [93].

Material	$\Delta K_{th}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$\Delta\sigma_{FL}$ (MPa)	$R$
Acero EN-GJS-400-18-LT	14.3	362	-1

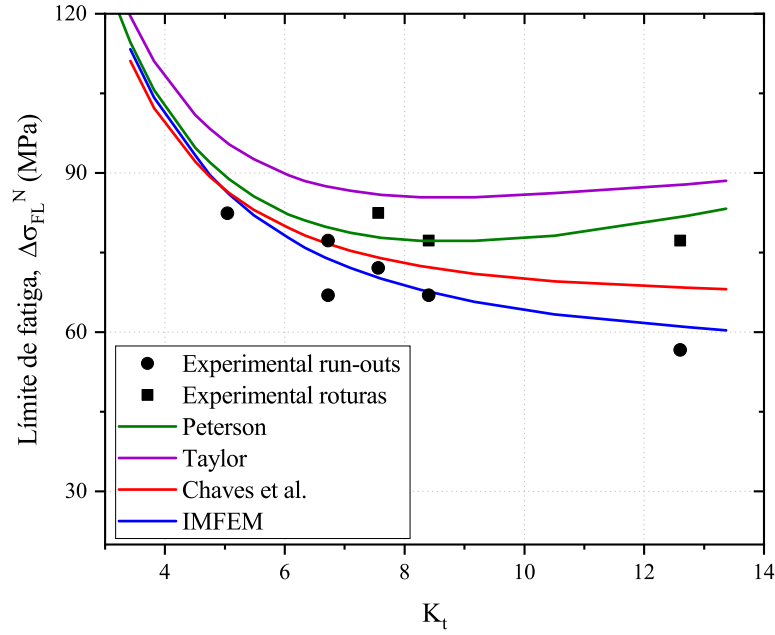


FIGURA 4.5: Resultados de Zambrano et al. para el acero de fundición EN-GJS-400-18-LT [93] y predicciones con varios modelos.

Ren et al. [94] ensayaron probetas cilíndricas, de 5 mm de diámetro, entalladas en V fabricadas en una aleación de base Níquel cuyas propiedades se muestran en la tabla 4.5. Las entallas fueron diseñadas con un ángulo de 60 grados, una profundidad de 0.267 mm y un radio de fondo de entalla de 0.213 mm. El valor de la constante  $l_1$  característica necesaria para el cálculo del factor  $K_f$  de Peterson tiene un valor de  $l_1=0.022$  mm. A través del valor umbral para grietas pequeñas [95] para este material, se ha calculado la longitud crítica de Taylor  $L=0.033$  mm. El tamaño medio de grano aproximado se sitúa entre  $D=0.054$  y  $D=0.064$  mm según los autores. Los resultados experimentales de límite de fatiga, junto a las predicciones de los diferentes métodos, se muestran en la tabla 4.6, ya que sólo se dispone de un punto experimental.

TABLA 4.5: Propiedades de la aleación en base níquel ensayada por Ren et al. [94]

Material	$\sigma_{UTS}$ (MPa)	$\sigma_{FL}$ (MPa)	$R$
Udimet 720	1503	981	0.1

TABLA 4.6: Resultados de Ren et al. para la aleación de Níquel Udimet 720 [94] y predicciones con varios modelos.

	Límite de fatiga $\sigma_{FL}^N$ (MPa)
Experimental	514
Peterson	454.48
Taylor	505.19
Chaves et al.	583.10
IMFEM	571.17

En un trabajo independiente a esta tesis y dentro de nuestro grupo de investigación, se ensayaron probetas planas entalladas en V y fabricadas en acero inoxidable AISI 304L cuyas propiedades se muestran en la tabla 4.7. La entalla tiene un ángulo de 55 grados y una profundidad de 5 mm. El radio de fondo de entalla es 0.5 mm, el ancho de la probeta igual a 20 mm y la longitud 200 mm. El valor de la constante  $l_1$  característica necesaria para el cálculo del factor  $K_f$  de Peterson tiene un valor de  $l_1=0.20$  mm. La longitud crítica de Taylor estimada para este material tiene un valor de  $L=0.18$  mm para este material. El tamaño medio de grano del acero es igual a  $D=0.08$  mm [96]. Los resultados experimentales de límite de fatiga, junto a las predicciones de los diferentes métodos, se muestran en la tabla 4.8, ya que sólo se dispone de un punto experimental.

TABLA 4.7: Propiedades del acero inoxidable AISI 304L [96].

Material	$K_{th}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$\sigma_{FL}$ (MPa)	$R$
AISI 304L	7.4	316	-1



TABLA 4.8: Resultados de probetas entalladas en V fabricadas en AISI 304L [96] y predicciones con varios modelos.

	Límite de fatiga $\sigma_{FL}^N$ (MPa)
Experimental	32.50
Peterson	47.60
Taylor	48.15
Chaves et al.	44.48
IMFEM	42.25

### 4.3. Entallas en forma de U

Meneguetti et al. ensayaron placas planas con doble entalla en U [97]. Las probetas tienen un ancho de 23 mm. Todas las entallas fueron diseñadas con una profundidad de 5 mm variando el radio de fondo de entalla. Las probetas fueron fabricadas en acero de bajo contenido al carbono C10, cuyas propiedades se muestran en la tabla 4.9. El valor de la constante  $l_1$  característica necesaria para el cálculo del factor  $K_f$  de Peterson tiene un valor de  $l_1=0.46$  mm. La longitud crítica de Taylor para este material es  $L=0.08$  mm. El tamaño medio de grano reportado por los autores es  $D=0.018$  mm. Los resultados experimentales, junto a las predicciones de los diferentes métodos, se muestran en la figura 4.6. En este caso, los resultados experimentales representados corresponden a roturas en la zona de alto número de ciclos, concretamente por encima de  $10^6$  ciclos por lo que el límite de fatiga experimental quedaría ligeramente por debajo de los datos experimentales representados.

TABLA 4.9: Propiedades del acero C10 [97].

Material	$\Delta K_{th}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$\Delta\sigma_{FL}$ (MPa)	$R$
Acero medio C10	5.6	360	0.1

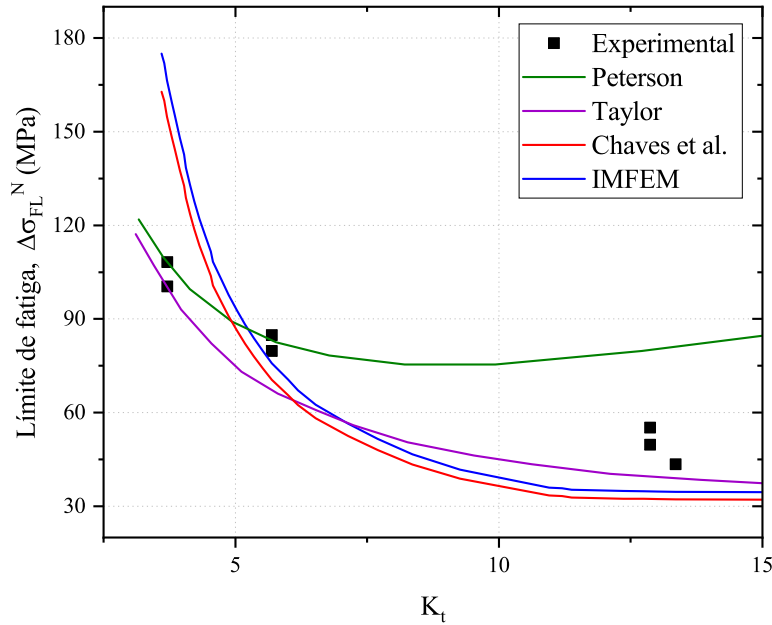


FIGURA 4.6: Resultados de Meneghetti et al. para el acero C10 [97] y predicciones con varios modelos.

#### 4.4. Entallas en forma semicircular

Lukáš et al. realizaron un estudio sobre el efecto de tamaño de las entallas en fatiga ensayando probetas cilíndricas, de 5 mm de diámetro, con entallas circunferenciales de perfil semicircular cuyos radios variaban entre 0.01 y 0.8 mm [98]. Se ensayaron dos materiales distintos, un cobre al 99.98% de pureza y un acero común en recipientes a presión (2.25 Cr - 1 Mo) cuyas propiedades se muestran en la tabla 4.10. El valor de la constante  $l_1$  característica necesaria para el cálculo del factor  $K_f$  de Peterson tiene un valor de  $l_1=1.43$  mm para el cobre, y  $l_1=0.29$  para el acero. La longitud crítica para el método del punto de Taylor es  $L=0.09$  mm para el cobre y  $L=0.1$  mm para el acero. El tamaño medio de grano reportado por los autores es  $D=0.05$  mm para el cobre  $D=0.03$  mm y para el acero. Los resultados experimentales de límite de fatiga, junto a las predicciones de los diferentes métodos, se muestran en las figuras 4.7 y 4.8.

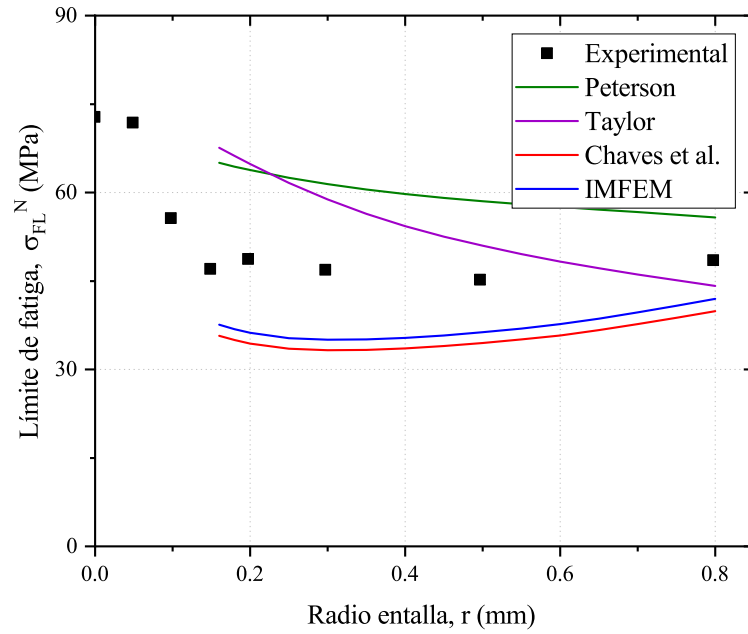


FIGURA 4.7: Resultados de Lukáš et al. para el cobre [98] y predicciones con varios modelos.

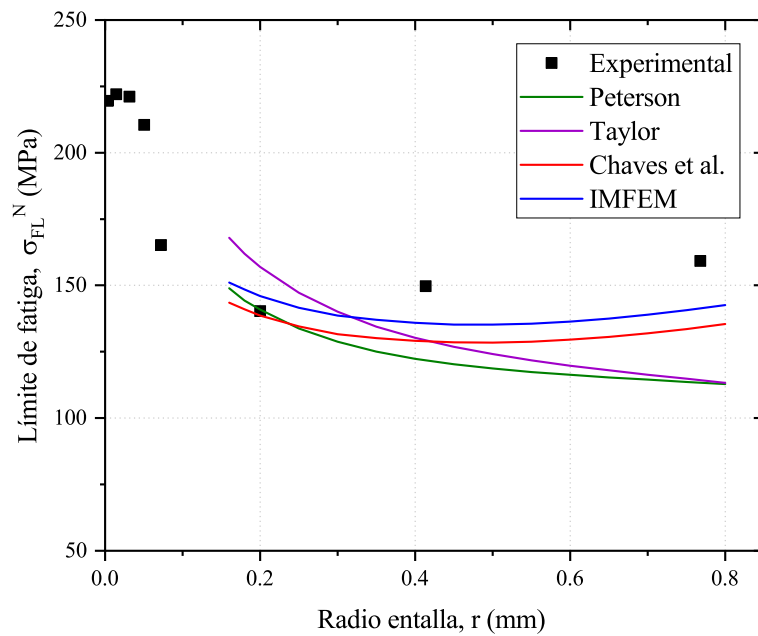


FIGURA 4.8: Resultados de Lukáš et al. para el acero (2.25 Cr - 1 Mo) [98] y predicciones con varios modelos.

TABLA 4.10: Propiedades de los materiales ensayados por Lukáš et al. [98].

Material	$K_{th}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$\sigma_{FL}$ (MPa)	$R$
Cobre	2.7	73	-1
Acero (2.25 Cr - 1 Mo)	6.0	220	-1

## 4.5. Discusión de los resultados

Una vez presentados los diferentes casos de validación, puede comprobarse la flexibilidad del método propuesto en esta tesis, ya que han sido analizados diferentes morfologías de entalla al igual que varios materiales. En todos los tipos de entalla y materiales analizados se observa, de manera general, que el método IMFEM desarrollado aporta predicciones de resistencia a fatiga bastante similares a los métodos comparados y a los valores experimentales.

En la figura 4.9 se ha realizado un resumen de los diferentes trabajos que se han evaluado para realizar la validación del modelo IMFEM. En concreto se representa el valor experimental frente al valor estimado mediante el método iterativo junto a unas bandas de error relativo. El dato de error relativo ha sido calculado tomando como referencia el valor experimental de límite de fatiga. Según las bandas de error incluidas en el gráfico, puede observarse que prácticamente todos los casos analizados se sitúan dentro del rango  $\pm 20\%$ , definido por la región entre ambas líneas discontinuas en color granate. La línea continua e inclinada de color negro hace referencia a la situación de igualdad entre la estimación y el valor experimental de límite de fatiga. Puede considerarse que las estimaciones realizadas, para una variada morfología de entalla y diferentes materiales, se aproximan de manera correcta a los valores de ensayos de fatiga sobre piezas entalladas encontrados en la literatura.

En la tabla 4.11 se encuentran los valores de error relativo en porcentaje (definido según la ecuación 4.2) y en valor absoluto, correspondientes a los valores individuales de límite de fatiga de cada trabajo analizado al inicio de este capítulo y representados en la figura 4.9.

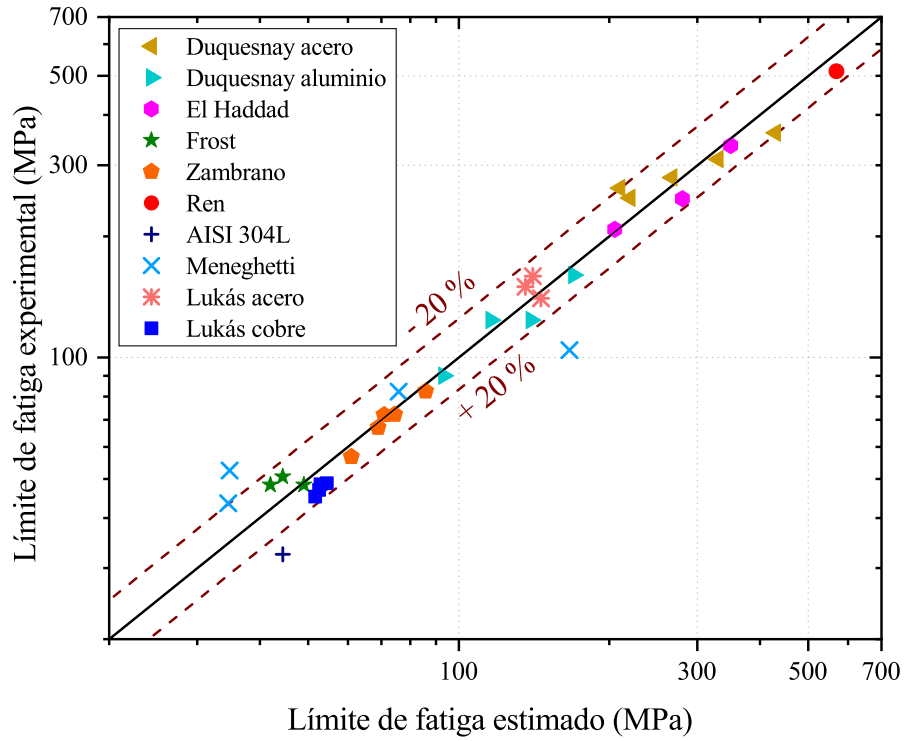


FIGURA 4.9: Resumen de los trabajos evaluados para la validación del modelo IMFEM.

$$Error \% = \frac{valor\ experimental - valor\ estimado}{valor\ experimental} \cdot 100 \quad (4.2)$$

Como se ha comentado más arriba, en una gran parte de los casos analizados se obtiene individualmente un error relativo inferior al 20 %. Adicionalmente, se ha calculado el valor medio del error relativo obtenido, de forma global, en la comparación de todos los límites de fatiga de cada trabajo de la literatura. Es destacable el hecho de que se han encontrado sólo dos trabajos en los que se superan el 20 % de error medio, concretamente un 36,86 % y 30,35 % de diferencia relativa entre las estimaciones del método IMFEM y los valores experimentales. Estas variaciones corresponden al caso del acero inoxidable AISI 304L (entalla en V) y al trabajo de Meneghetti et al. (entalla en U), respectivamente.

TABLA 4.11: Valores de error relativo de las estimaciones realizadas con el método IMFEM.

Error relativo % entre estimación y valor experimental						
	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4	Punto 5	Error medio %
Duquesnay acero	-19.08	-6.34	4.53	11.66	20.17	12.36
Duquesnay aluminio	-5.97	-12.58	6.30	-3.49		7.08
El Haddad	-4.31	-12.9	1.44			6.22
Frost	-1.53	11.98	12.97			8.82
Zambrano	-7.58	-2.98	1.52	-3.25	-4.32	3.93
Ren	-10.70					10.70
AISI 304L	-36.86					36.86
Meneghetti	-53.79	7.83	33.65	20.46		30.35
Lukáš acero	-4.02	9.27	11.65			8.31
Lukáš cobre	-11.84	-11.96	-14.22	-9.04		11.77

Se considera que el método IMFEM desarrollado en esta tesis aporta una base física a la descripción del proceso de fatiga en entallas que no creemos que tengan los otros métodos con los que se ha comparado, concretamente los métodos de distancia crítica de Peterson y Taylor. En sendos métodos la propia grieta no juega ningún papel a la hora del cálculo del límite de fatiga entallado, es decir, en la propia descripción de los métodos no se incluye a la grieta como tal. Sin embargo, está claro que el proceso de fatiga no es más que el crecimiento de grieta y qué menos, pues que ésta aparezca en la descripción del modelo que realiza las estimaciones. Por tanto, el hecho de que los resultados aportados por el método IMFEM sean similares a las estimaciones de los otros métodos mostrados es tranquilizador, pues era lo esperable en componentes de dimensiones “normales”.

Pero en este trabajo se pretende dar un paso hacia delante e ir un poco más allá, gracias al potencial que posee el método iterativo desarrollado. Existen otras situaciones en las que los métodos de distancia crítica puede que no representen la mejor opción para estimar la resistencia a fatiga porque, literalmente, no se pueden aplicar (a menos que se introduzca algún tipo de modificación). Estas situaciones se refieren a aquellos componentes de dimensiones muy pequeñas, o micro-componentes, en las que la distancia crítica es superior al tamaño del propio componente. Un ejemplo de este tipo de elementos son los stents, dispositivos microelectrónicos o las placas finas de intercambiadores de calor. En estos casos, el método IMFEM se puede aplicar directamente, sin ninguna modificación. Para ilustrarlo, vamos a analizar un caso de micro-componente y se van a comparar las estimaciones teóricas con los resultados experimentales.

Wiersma [99, 100] realizó ensayos de fatiga en tracción-compresión sobre componentes de reducidas dimensiones y fabricados con acero AISI 316L. Las propiedades mecánicas del material se muestran en la tabla 4.12. Las probetas fabricadas eran placas con doble entalla en U (ver figura 4.10) y se ensayaron tres geometrías diferentes cuyas dimensiones se detallan en la tabla 4.13. La característica más importante de la geometría de las probetas ensayadas por Wiersma es que tanto el radio de fondo de entalla,  $r$ , como el ligamento de la probeta en la zona de la entalla,  $A_N$ , se mantienen constantes en las tres geometrías.

Antes de aplicar el método IMFEM, se comprueba el modelo de elementos finitos mediante el análisis elástico de las tensiones en el ligamento de la entalla y el factor de

TABLA 4.12: Propiedades del acero AISI 316L ensayado por Wiersma et al. [99, 100].

Tamaño grano (mm)	$K_{th}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$\sigma_{FL}$ (MPa)	$\sigma_{UTS}$ (MPa)	$R$
0.011	7.87	420	754	0.1

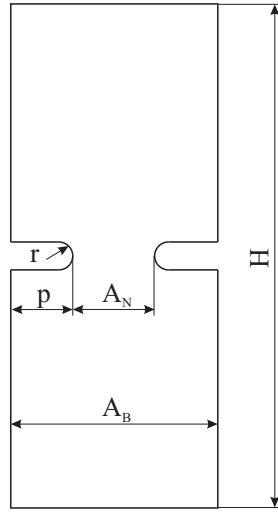


FIGURA 4.10: Geometría de probeta ensayada por Wiersma con doble entalla en U.

TABLA 4.13: Geometría de las muestras ensayadas por Wiersma [99, 100].

Probeta	$p$ ( $\mu\text{m}$ )	$r$ ( $\mu\text{m}$ )	$A_N$ ( $\mu\text{m}$ )	$A_B$ ( $\mu\text{m}$ )	$H$ ( $\mu\text{m}$ )
1	50	20	110	210	400
2	100	20	110	310	400
3	145	20	110	400	400

concentración de tensiones  $K_t$ . Aprovechando la geometría de la probeta, sólo se analiza un cuarto de la misma. Los resultados obtenidos se comparan con los valores reportados por Wiersma (Ver tabla 4.14). Se incluyen los valores referidos a sección bruta y neta. Los valores referidos a sección neta han sido obtenidos mediante la siguiente expresión:

$$K_{t,neto} = \frac{A_N}{A_B} K_{t,bruto} \quad (4.3)$$



TABLA 4.14: Factores de concentración de tensiones de los casos analizados por Wiersma [99, 100] referidos a sección bruta y neta.

Probeta	Wiersma		IMFEM	
	$K_{t,bruto}$	$K_{t,neto}$	$K_{t,bruto}$	$K_{t,neto}$
1	4.52	2.34	4.54	2.37
2	6.68	2.4	6.68	2.37
3	8.79	2.35	8.79	2.42

Como puede apreciarse, los resultados obtenidos del factor de concentración de tensiones en la entalla,  $K_t$ , se ajustan perfectamente a los aportados por Wiersma [99, 100]. En este punto se da por buena la malla del modelo de elementos finitos y después se realizan las predicciones de límite de fatiga, que se van a estimar con los mismos métodos usados previamente en la validación del método IMFEM en este capítulo. Para las estimaciones del método del punto de Taylor, la longitud crítica  $L$  de este material AISI 316L, según la ecuación 1.23, es  $L = 112 \mu\text{m}$ . Por otro lado, la constante del material necesaria para la estimación mediante el método de Peterson es  $l_1 = 146 \mu\text{m}$ . En la tabla 4.15 se incluyen los datos experimentales y las estimaciones teóricas de límite de fatiga para cada tamaño de probeta.

TABLA 4.15: Límites de fatiga de los casos analizados por Wiersma [99, 100] y estimaciones con diferentes métodos. Resultados referidos a sección neta.

Método	Probeta 1	Probeta 2	Probeta 3
Experimental (MPa)	360.00	355.00	350.00
Peterson (MPa)	363.42	363.42	361.64
Taylor (MPa)	567.10	602.15	621.96
Chaves et al. (MPa)	417.70*	416.80*	416.88*
IMFEM (MPa)	276.55	305.19	338.88

El método de Peterson es el que mejores predicciones ofrece. Para este método de distancia crítica es necesario realizar una aclaración con el objetivo de diferenciar entre la variable característica del material,  $a$ , necesaria para calcular el factor  $K_f$  que permite realizar la predicción de límite de fatiga, y la propia distancia crítica definida por

Peterson,  $\delta$ . Según este autor, la distancia crítica,  $\delta$ , se relaciona con la constante característica  $a$  según la expresión [44, 81]:

$$\delta = \frac{a}{C} \left( 1 - \frac{1}{K_t} \right) \quad (4.4)$$

dónde la constante  $C$  es una variable que describe el gradiente de tensiones en la raíz de la entalla. Peterson usó un valor de  $C=2.5$  para los casos de componentes sometidos a tracción y flexión. En la tabla 4.16 se indican los valores de la distancia crítica  $\delta$  para cada una de las probetas ensayadas por Wiersma. En este caso, la distancia crítica del método de Peterson queda dentro de las dimensiones del ligamento de la entalla.

TABLA 4.16: Distancia crítica de Peterson ( $a=0.146$  mm) para las probetas ensayadas por Wiersma.

Probeta	$\delta$ (mm)
1	0.0337
2	0.0337
3	0.0343

Las predicciones del método del punto de Taylor son bastante superiores a los valores experimentales. En primer lugar, hay que señalar que en este ejemplo concreto de micro-componente estamos en un caso en el que la longitud crítica excede las dimensiones del ligamento del componente (ligamento = 0.11 mm y  $L = 0.112$  mm), es decir, físicamente no tendría sentido la estimación proporcionada por este método. Aunque bien es cierto que el método del punto, necesita únicamente de la distancia  $L/2=0.056$  mm para poder realizar la predicción, por lo que esa distancia sí se encuentra dentro del ligamento del componente. No obstante, está claro que el concepto de distancia crítica en componentes tan pequeños queda un poco cuestionada. En cuanto a la sobreestimación del límite de fatiga obtenido con el método del punto, hay que señalar que se debe a la transformación producida en la sección neta del gradiente de tensiones. Es decir, por equilibrio se tiene que la tensión aplicada externamente al componente debe ser igual que la tensión en cualquier sección del mismo, por ejemplo, en el ligamento de la entalla. Esto provoca que haya zonas con nivel de tensión superior (raíz de la entalla) y zonas dónde la tensión caiga por debajo del nivel de tensión aplicado. Dependiendo del valor de  $L/2$ , puede

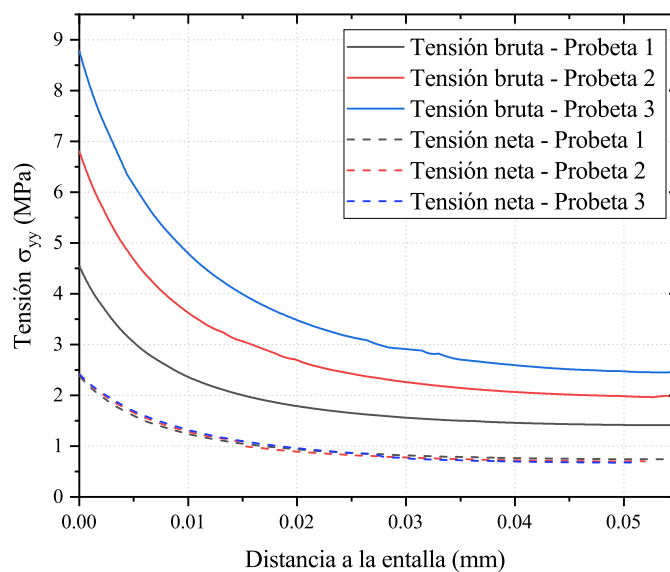


FIGURA 4.11: Gradiente de tensiones en la entalla para las probetas ensayadas por Wiersma.

darse la situación de que este punto caiga en la zona dónde el valor de la tensión en ese punto sea inferior a la tensión externa aplicada, es decir,  $\sigma_{yy} \leq 1$  MPa, tal y como se puede ver en la figura 4.11. Por este motivo, el factor de fatiga en entallas,  $K_f$ , tendrá un valor menor que 1, lo que provoca la sobreestimación del límite de fatiga según este método de Taylor quedando muy por encima del propio límite de fatiga intrínseco del material (420 MPa), lo que deja en evidencia el uso de este método en componentes de dimensiones de pequeña escala.

Volviendo a la tabla 4.15, puede verse que los datos de límite de fatiga proporcionados por el método de Chaves et al. poseen un asterisco, ya que debe hacerse una aclaración al respecto. Como se ha explicado con anterioridad, el método de Chaves también está basado en el modelo microestructural NR y analiza la resistencia a fatiga del componente según las diferentes longitudes de grieta, es decir, grano a grano. En las tres probetas analizadas, el límite de fatiga se obtiene más allá del cuarto grano según este método. Sin embargo, las tensiones estimadas en el cuarto grano producen, para cada probeta, una tensión superior al límite de rotura del material en la sección neta

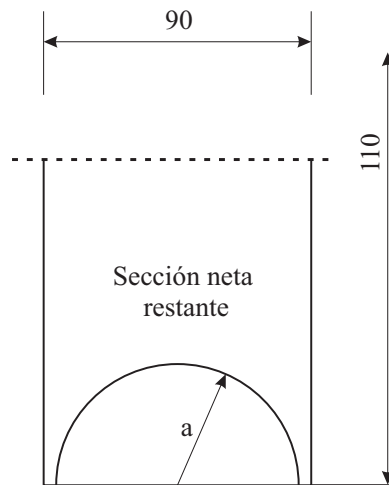


FIGURA 4.12: Sección neta de las probetas y grieta creciendo. Dimensiones en milímetros.

restante del componente. Dicha sección neta restante ha sido estimada restando la superficie ocupada por una grieta de longitud  $a=4$  granos a la sección neta inicial del componente (sección rectangular de  $0.11 \text{ mm} \times 0.09 \text{ mm}$ ). Se asume que la grieta crece desde el punto medio del espesor y posee un frente de grieta semicircular (ver figura 4.12). Por este motivo, se puede considerar, de manera aproximada, que el límite de fatiga estimado por este método debe corresponder a los resultados obtenidos en el cuarto grano, que son los indicados en la tabla 4.15.

Además, puede comprobarse que las estimaciones obtenidas mediante el método iterativo IMFEM se ajustan razonablemente bien a los valores obtenidos en los ensayos. También es destacable la diferencia entre las estimaciones realizadas con el método de Chaves y el método IMFEM, ambos apoyados en el modelo NR, ya que la ventaja del método IMFEM es que captura el efecto de las superficies cercanas a la entalla (*back surfaces*, en inglés), en este caso el efecto de tamaño finito del micro-componente. Siguiendo el mismo razonamiento del párrafo anterior, los valores de límite de fatiga aportados por el método IMFEM sí se puede considerar válidos porque el grano decisivo es el segundo o el tercer grano en las probetas estudiadas y las tensiones reportadas como límite de fatiga producen tensiones menores al límite de rotura del material en la sección neta resistente en cada caso. Por este motivo, el método IMFEM se diferencia del método de Chaves y aporta una mayor ventaja cuando se trata de estimar

el límite de fatiga en micro-componentes. No obstante, hay que recalcar de nuevo que el método IMFEM está basado en el modelo NR, el cual realiza las predicciones de límite de fatiga estableciendo una relación entre parámetros micromecánicos con las propiedades macroscópicas del material. Esto, puede llegar a ser puesto en duda porque existen otros factores que podrían influir y no se tienen en cuenta, sobre todo, en micro-componentes. Sin embargo, a la vista están los resultados presentados al inicio de este capítulo dónde se muestra la comparativa entre resultados experimentales y predicciones de este método, lo que corrobora, de forma inequívoca, la aplicabilidad práctica de este modelo microestructural en una amplia variedad de casos.

Finalmente, otro punto importante a destacar es la limitación impuesta por la hipótesis hecha por la que se considera la propagación de la grieta en Modo I desde el principio. La validación de esta hipótesis se comprueba en situaciones como las representadas en las figuras 3.13, 3.18 o 3.19, por ejemplo, dónde se aprecia cómo el límite de fatiga se obtiene aproximadamente en torno al décimo grano. Este hecho hace referencia a la conocida como etapa II de crecimiento, por la que la grieta tiende a propagarse en dirección perpendicular a la carga aplicada. Según la formulación actual del modelo NR, resulta imposible considerar el fenómeno físico de la existencia de las etapas I y II en el crecimiento y propagación de la grieta. Es decir, en los casos en los que el primer grano fuera la barrera “decisiva” para obtener el límite de fatiga, sería más correcto realizar la hipótesis de que la grieta crece aproximadamente a  $45^\circ$  inicialmente (plano de máxima tensión cortante), lo que correspondería a la etapa I. Sin embargo, hasta que se consiga implantar correctamente ese proceso físico en el modelo, resulta más apropiada la hipótesis por la que se considera únicamente que la grieta se propaga como si estuviera en todo momento en la etapa II (plano de máxima tensión principal).

En resumen, el método IMFEM, que consiste en la descomposición del problema de componente entallado en dos subproblemas más simples junto al análisis de la propagación de grieta mediante el modelo NR, puede considerarse adecuado para la estimación de resistencia a fatiga de componentes entallados, siendo su ventaja principal la versatilidad en el análisis de geometrías de componente entallado fabricados con diferentes materiales.



## Capítulo 5

# Ensayos de fatiga sobre probetas entalladas

En este capítulo se realiza una descripción de las características y detalles del material utilizado, el diseño geométrico y el proceso de mecanizado necesario para la fabricación de las probetas con entalla. El objetivo de la geometría de las probetas fabricadas es conseguir situaciones en las que se produzca un efecto de tamaño finito debido a las dimensiones de la entalla con respecto al componente, de manera que no se pueda analizar el problema como medio infinito, que es lo habitual. Además, se detallan los ensayos de fatiga que se han realizado y se muestran los resultados obtenidos. Por último se describe el análisis de la superficie de fractura realizado sobre las probetas ensayadas con objeto de evaluar la iniciación y propagación de grieta.

### 5.1. Diseño y análisis de las probetas entalladas

#### 5.1.1. Material

El material utilizado en este trabajo es acero inoxidable comercial AISI 304L, el cual fue previamente caracterizado [96, 101]. Su composición se detalla en la Tabla 5.1. La microestructura presenta granos austeníticos con bandas de ferrita delta y el tamaño

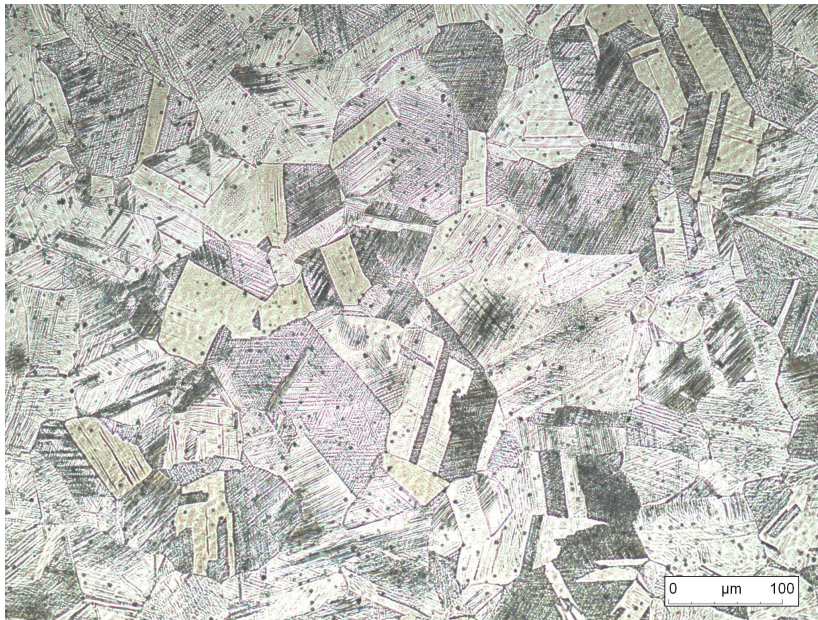


FIGURA 5.1: Detalle de la microestructura del acero AISI 304L.

TABLA 5.1: Composición del acero inoxidable AISI 304L.

Elemento	% peso	Elemento	% peso
C	0.021	Ni	8.148
P	0.029	Mo	0.215
S	0.024	Ti	0.0005
Si	0.34	N	0.08
Mn	1.485	Cu	0.39
Cr	18.227		

medio de grano,  $D$ , es igual a  $80 \mu m$ . Una imagen obtenida del análisis cristalográfico de la microestructura se muestra en la figura 5.1. Las propiedades mecánicas del acero inoxidable se muestran en la Tabla 5.2.

### 5.1.2. Geometría

Las probetas son cilíndricas y tienen una entalla circunferencial de perfil semicircular que se encuentra en el punto medio de su eje longitudinal, tal y como se aprecia en la figura 5.2. donde  $D_1$  es el diámetro exterior, o diámetro bruto, con un valor fijo de 8 mm para todas las muestras fabricadas,  $d$  es el diámetro neto en la zona de la entalla



TABLA 5.2: Propiedades mecánicas del acero AISI 304L [96, 101].

Tensión última $S_{UTS}$	654 MPa
Límite elástico $\sigma_y(0,2\%)$	467 MPa
Factor de intensidad de tensiones umbral $K_{Ith}$	$7.4 \text{ MPa}\sqrt{m}$
Elongación	56 %

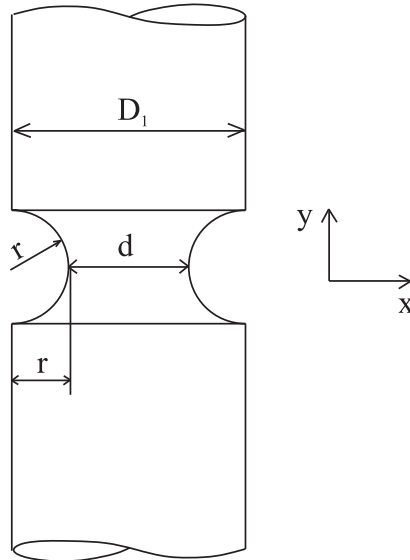


FIGURA 5.2: Detalle de la geometría de las probetas.

cuyo valor se define a partir del radio de la entalla,  $r$ , que es igual a la profundidad de la entalla. Se han fabricado y analizado seis tamaños de entalla diferentes, tomando  $r$  los valores 0.2, 0.6, 1.3, 2.0, 2.5 and 3.0 mm. La drástica diferencia entre los tamaños de entalla se ha elegido ex profeso para evaluar el efecto de tamaño del componente. Los casos de las probetas con los tamaños de entalla más pequeños pueden ser clasificados como una entalla en un medio semi-infinito, mientras que aquellos con tamaños más grandes deben ser clasificados como medio finito debido a la enorme reducción de la sección neta (ver figura 5.3).

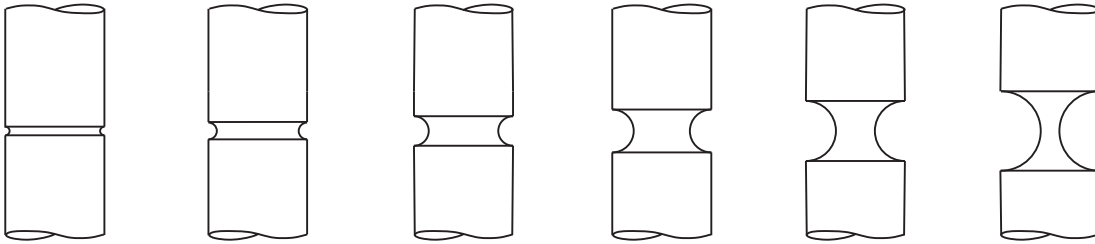


FIGURA 5.3: Efecto de tamaño finito debido al tamaño de entalla.

### 5.1.3. Mecanizado

Las probetas se realizaron partiendo de barras cilíndricas de acero inoxidable de 22 mm de diámetro y cuatro metros de largo. Las probetas fueron mecanizadas mediante torneado por control numérico en dos pasos. Primero se realizó una operación de cilindrado para reducir el diámetro hasta 8 mm partiendo de los 22 mm iniciales de la barra de origen. El valor de la velocidad de rotación de la pieza en esta operación de cilindrado fue de 1000 rpm y fue elegido porque a mayores velocidades se producían vibraciones no deseadas. La profundidad radial se estableció en 0.5 mm y el avance se programó a un ratio de 0.15 mm/rev. El siguiente proceso consiste en la realización de la entalla. En esta parte del mecanizado se consiguió realizar la geometría haciendo uso de la técnica de ranurado por la que la geometría de la entalla queda definida mediante diversas pasadas que la herramienta realiza de forma circunferencial e incrementando la profundidad progresivamente. En este caso se utiliza una profundidad radial de 0.1 mm, un avance de 0.12 mm/rev y, de nuevo, una rotación constante a 1000 rpm. Todas las muestras a excepción de las que poseen el tamaño más pequeño de entalla fueron mecanizadas en la misma empresa externa y siguiendo los mismos parámetros de mecanizado. Las correspondientes al radio de entalla 0.2 mm, las realizó una empresa diferente y los parámetros de mecanizado variaron ligeramente: profundidad radial 0.7 mm y un avance de 0.2 mm/rev para la operación de cilindrado y profundidad radial 0.1 mm y avance 0.1 mm/rev para la fase de ranurado. Una vez más, la velocidad de rotación de la pieza fue de 1000 rpm. Ninguna de las muestras fueron sometidas a un tratamiento térmico después del proceso de mecanizado.

#### 5.1.4. Rugosidad

Una vez fabricadas las probetas, se realizaron medidas de rugosidad para evaluar la calidad del acabado superficial. Las medidas fueron tomadas en la superficie del fondo de entalla por ser la zona más influyente en la aparición de grietas debido a la concentración de tensiones. Se analizaron aquellas muestras correspondientes a los radios de entalla 0.6, 1.3, 2.0 and 3.0 mm. Fue imposible tomar medidas en aquellas con la entalla de menor tamaño. Para este proceso se hizo uso del perfilómetro óptico 3D sin contacto *Sensofar S-Neox*. La medición consiste en capturar el fondo de entalla como una superficie en 3D. A esta superficie se le extrae la capa topográfica y después se nivela para eliminar la inclinación y poder tomar medidas correctamente. Un ejemplo de la superficie 3D del fondo de entalla sobre la que se tomaron medidas se muestra en la Fig. 5.4. De este proceso se obtienen los valores medios de rugosidad para la superficie medida, concretamente se calculan la rugosidad media,  $R_a$ , y la rugosidad cuadrática media,  $R_q$ , siguiendo la norma ISO 25178. Los valores de rugosidad medidos se muestran en la tabla 5.3. Se puede observar que el acabado superficial es bueno y, por tanto, debería afectar mínimamente a la resistencia a fatiga de las muestras.

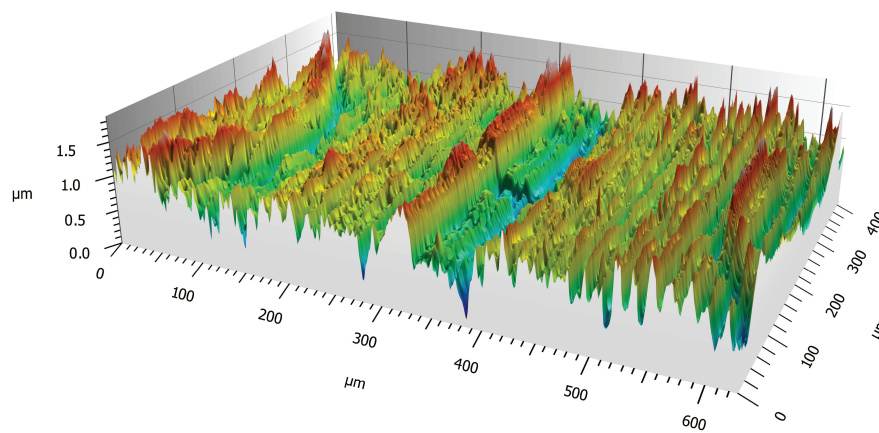


FIGURA 5.4: Perfil 3d de rugosidad obtenido en el fondo de entalla.

TABLA 5.3: Valores de rugosidad en la entalla.

Radio de entalla $r$ (mm)	$R_a$ ( $\mu\text{m}$ )	$R_q$ ( $\mu\text{m}$ )
0.60	0.1774	0.22747
1.30	0.2231	0.2786
2.00	0.2011	0.2522
3.00	0.1881	0.2597

### 5.1.5. Dureza

Al recibir las muestras mecanizadas no se contempló la posibilidad de realizar medidas de dureza. Sin embargo, a medida que se iban teniendo resultados de resistencia a fatiga, se decidió tomar medidas de dureza en una sección transversal de la probeta desde la raíz de la entalla hasta el interior de la sección. Varias medidas de dureza Vickers HV10 fueron tomadas a las probetas de radio de entalla 0.2, 2.5 y 3.0 mm, ya que del resto no quedaban muestras porque habían sido usadas para ensayos de fatiga y tracción. Los valores medidos de dureza se muestran en la tabla 5.4.

TABLA 5.4: Medidas de dureza.

Radio de entalla $r$ (mm)	Dureza Vickers
0.20	231
2.50	293
3.00	266

## 5.2. Ensayos sobre probetas entalladas

### 5.2.1. Ensayos de tracción

En la caracterización previa del acero inoxidable utilizado en este trabajo, se realizaron ensayos de tracción sobre probetas sin concentradores de tensión, siendo la resistencia a tracción  $S_{UTS} = 654$  MPa. Por otra parte, durante la realización de este trabajo se realizaron ensayos estáticos de tracción en las probetas de todos los tamaños de entalla. Los valores de resistencia última a la tracción  $S_{UTS}$  están indicados en la tabla 5.5. Los valores de  $S_{UTS}$  han sido calculados dividiendo la fuerza aplicada en el ensayo de

tracción entre la sección neta de cada muestra, sin tener en cuenta la concentración de tensión producida por la entalla.

TABLA 5.5: Datos de los ensayos de tracción sobre probetas entalladas.

Radio de entalla $r$ (mm)	0.20	0.60	1.30	2.00	2.50	3.00
$S_{UTS}$ (MPa)	756	851	937	900	890	857

### 5.2.2. Ensayos de fatiga

Uno de los objetivos de este trabajo ha sido la realización de ensayos de fatiga con objeto de evaluar el efecto del tamaño de la entalla sobre la resistencia a fatiga de las muestras. Todos los ensayos de fatiga se llevaron a cabo utilizando la máquina servo-hidráulica *MTS 809 Biaxial 100 KN* mostrada en la figura 5.5. La máquina consta de dos mordazas hidráulicas, en la que la mordaza superior está solidaria al puente y la inferior es la encargada de aplicar la carga cíclica a las muestras. Los ensayos se realizan en tracción-compresión a una frecuencia de 8 Hz, bajo control de carga con  $R = -1$  (tensión media nula) y usando una carga variable sinusoidalmente. Los tests finalizaron bien por rotura de la probeta o bien por run-out. Debido a la baja frecuencia de los ensayos, el resultado de vida infinita o run-out se estableció en  $3,5 \times 10^6$  ciclos.

### 5.3. Curvas S-N

El propósito de la realización de los ensayos a fatiga es la obtención de las curvas S-N para cada tamaño de entalla fabricado. En la actualidad, existen muchos métodos normalizados para construir las curvas de vida a fatiga en los que se necesitan un número mínimo de ensayos para considerar válida la curva obtenida. En este trabajo, la poca cantidad de acero inoxidable disponible para mecanizar todas las probetas con los seis tamaños de entalla fue la razón por la que se siguió el método desarrollado por la Sociedad Japonesa de Ingenieros Mecánicos (1981). Este método es idóneo para conseguir una curva S-N con una cantidad muy pequeña de ensayos. Los detalles del proceso se encuentran en el trabajo de Nakazawa y Kodama [102]. Esta propuesta divide la curva S-N en dos partes, una inclinada que consta de 8 ensayos repartidos en 4 niveles



FIGURA 5.5: Máquina de ensayos de fatiga MTS 809.

de tensión, y otra parte horizontal que representa el límite de fatiga y está formada por 6 ensayos dónde las roturas y los run-outs se alternan tal y como se muestra en la figura 5.6. La división en un número tan reducido de ensayos se basa en una serie de premisas de carácter estadístico cuyo objetivo es alcanzar un intervalo de confianza similar en ambas partes de la curva, inclinada y horizontal. A continuación se describe de forma breve el proceso.

### 5.3.1. Parte inclinada

En primer lugar es necesario calcular una aproximación de la tensión a  $5 \cdot 10^4$  y  $1 \cdot 10^6$  ciclos que se denominan  $S_{a,1}$  y  $S_{a,2}$ , respectivamente. El límite de fatiga podría ser estimado ensayando una probeta, aumentando la tensión hasta obtener la rotura, por ejemplo. Sin embargo, debido a la poca cantidad de muestras disponibles se optó por

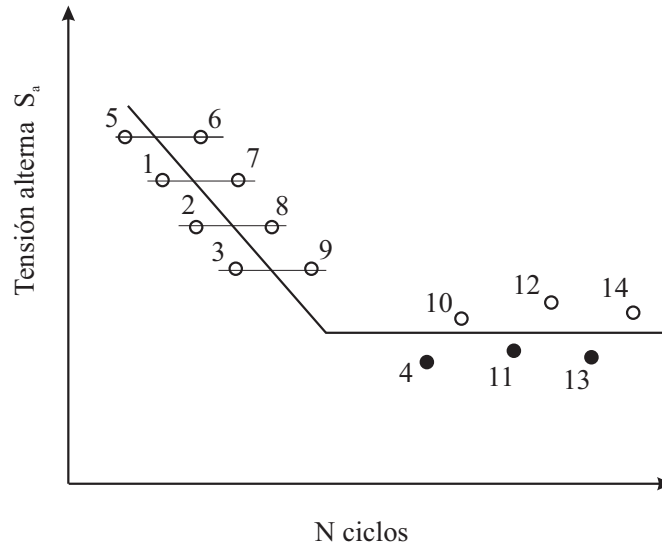


FIGURA 5.6: Ejemplo de curva S-N con 14 ensayos.

realizar estimaciones teóricas con el fin de obtener el valor de esas tensiones  $S_{a,1}$  y  $S_{a,2}$ . Según la recomendación usual de libros de diseño en ingeniería [103], las tensiones a  $10^3$  y  $10^6$  ciclos pueden ser estimadas a partir de la tensión de rotura del material. La tensión a  $10^3$  ciclos se estima como  $0,9 \cdot S_{UTS}$ , y la tensión  $S_{a,2}$  a  $10^6$  ciclos se estima como  $0,5 \cdot 0,85 \cdot S_{UTS}$ . Después de esto, con esos dos puntos es fácil interpolar para obtener el valor de la tensión  $S_{a,1}$ . El siguiente paso consiste en calcular el intervalo de tensión  $d_1$  entre los diferentes niveles de carga que forman la parte inclinada.

$$d_1 = \frac{S_{a,1} - S_{a,2}}{3} \quad (5.1)$$

El primer ensayo se realiza a una tensión  $S_a = S_{a,1} - d_1$ . Seguidamente, los ensayos sucesivos se llevan a cabo restando una cantidad igual al intervalo  $d_1$  hasta que se obtiene el primer run-out (lo recomendable es que se consiga en el tercer o cuarto ensayo para no usar muchas muestras). A partir de ese primer run-out quedan definidos los cuatro niveles de tensión superiores mediante el intervalo  $d_1$ . El objetivo es obtener dos roturas en cada nivel de tensión para completar los 8 ensayos necesarios en esta parte inclinada.

### 5.3.2. Parte horizontal

En esta parte se obtiene el valor del límite de fatiga del material con la técnica de la escalera, es decir, con la alternancia entre ensayos finalizados con y sin rotura de la probeta. El primer run-out obtenido en la parte inclinada,  $S_a(1)$ , se toma como primer valor de los 6 requeridos en esta parte de la curva S-N. Si se diera el caso de que se hubieran producido otros run-outs en la parte inclinada, el máximo valor de tensión de todos ellos es el que corresponde a la tensión  $S_a(1)$ . En esta parte de la curva también es necesario calcular un intervalo de tensión,  $d_2$ , que se define como el producto de la tensión  $S_a(1)$  y el coeficiente de variación  $\mu(S_a)$ , que se define como el cociente entre la desviación típica y la media de las tensiones  $S_a$  de la parte inclinada.

$$d_2 = S_a(1) \cdot \mu(S) \quad (5.2)$$

El valor del intervalo  $d_2$  se suma o resta en función de si el ensayo previo ha terminado en run-out o en rotura, respectivamente. Así se consigue la alternancia entre ambos resultados de ensayo. Para finalizar el proceso, el límite de fatiga se calcula mediante la media aritmética de los 6 ensayos de esta parte.

Siguiendo la norma ASTM E468 standard [104] se ha construido una curva S-N para cada uno de los tamaños de entalla mecanizados, siendo en total 6 curvas. Los límites de fatiga se expresan aquí en términos de tensión neta y han sido calculados usando las ecuaciones de la elasticidad:  $S_a = 4F/\pi d^2$ , donde F es la fuerza aplicada en el ensayo de fatiga.

En las figuras 5.7 - 5.12, se muestran las curvas S-N construídas con el método descrito. Por un lado, los ensayos concluidos con rotura se representan con círculos si se han obtenido durante el desarrollo de la parte inclinada, o son representados mediante cruces si se han obtenido en la parte horizontal. Por otro lado, los ensayos finalizados como run-outs están definidos mediante círculos sólidos con flechas y una cifra que indica el número de ensayos que finalizaron sin rotura a ese mismo nivel de tensión.

En la tabla 5.6 se muestran los valores experimentales del límite de fatiga entallado,  $S_{FL}^N$ , y del factor de fatiga en entallas,  $K_f$ , que se define como el cociente entre el límite



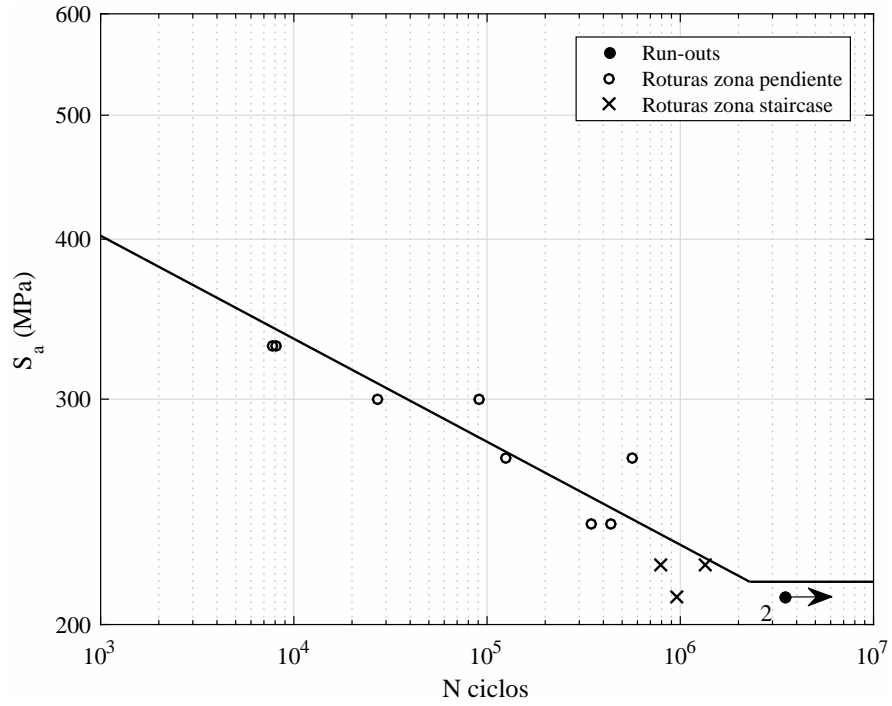


FIGURA 5.7: Curva S-N para radio de entalla 0.2 mm.

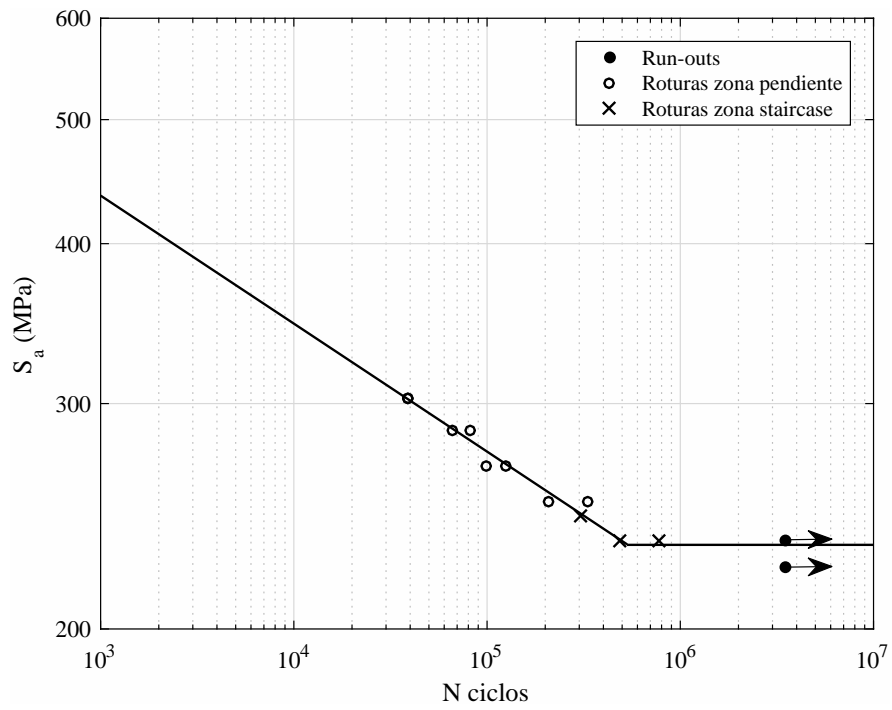


FIGURA 5.8: Curva S-N para radio de entalla 0.6 mm.

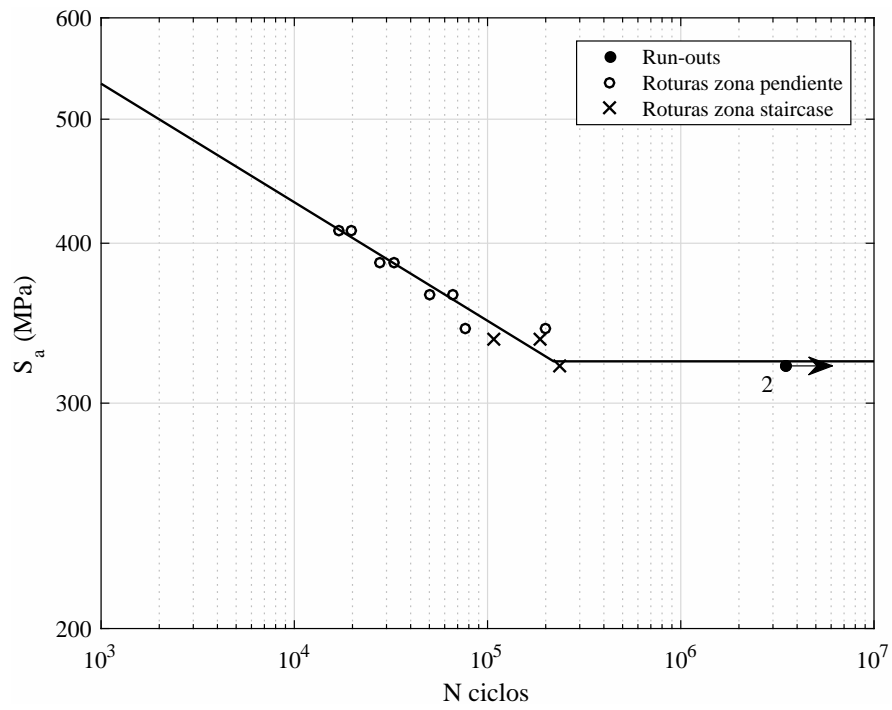


FIGURA 5.9: Curva S-N para radio de entalla 1.3 mm.

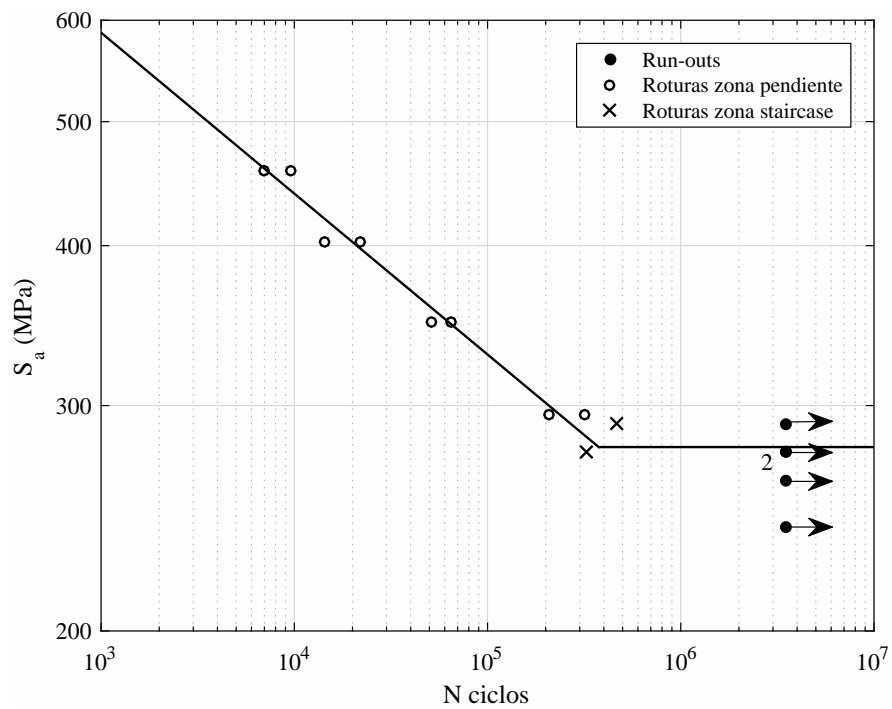


FIGURA 5.10: Curva S-N para radio de entalla 2.0 mm.

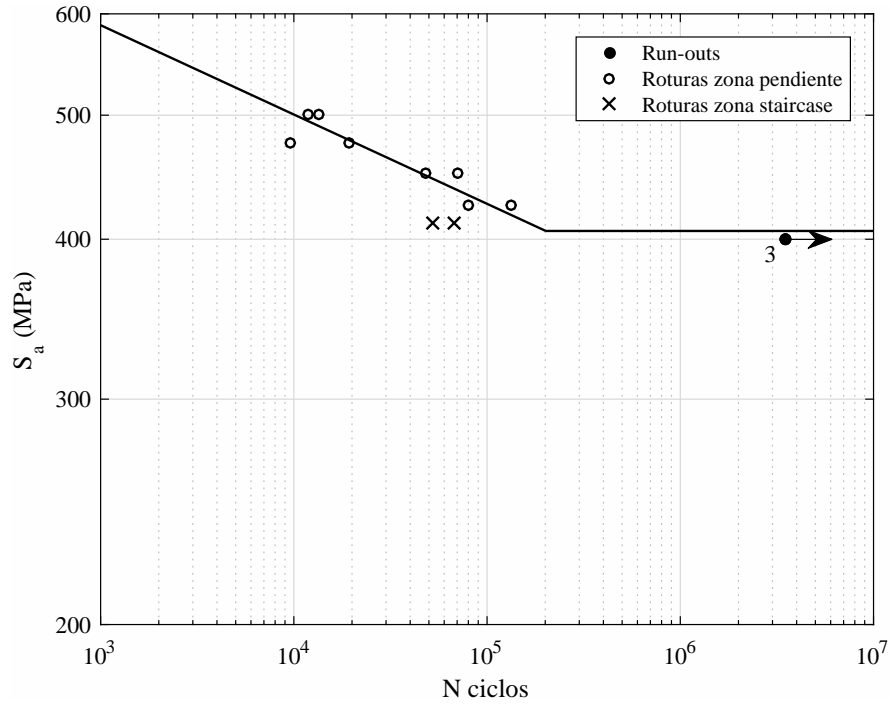


FIGURA 5.11: Curva S-N para radio de entalla 2.5 mm.

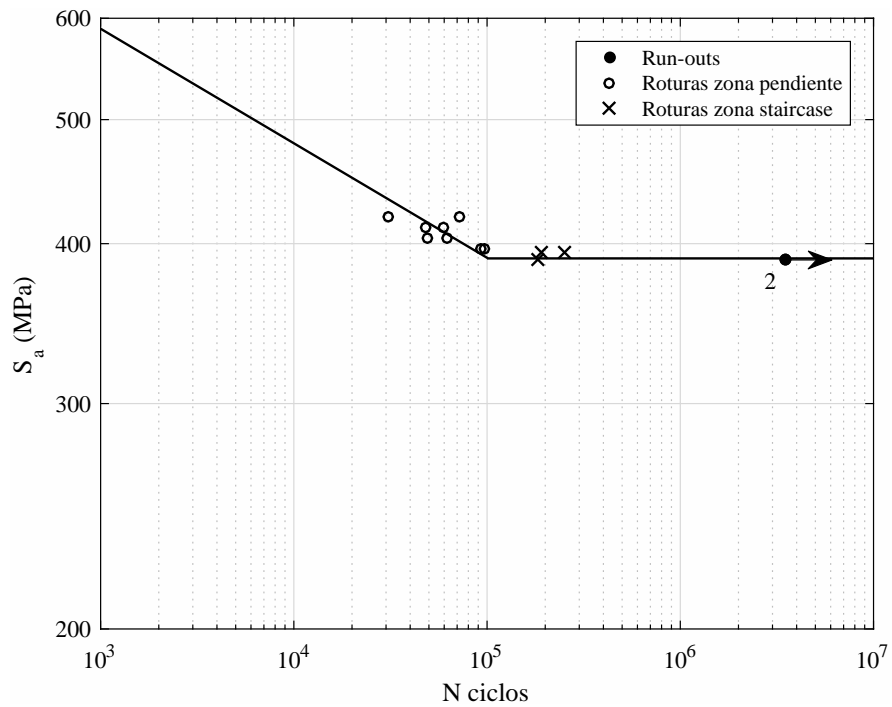


FIGURA 5.12: Curva S-N para radio de entalla 3.0 mm.

TABLA 5.6: Valores experimentales del límite de fatiga y factor de fatiga en entallas,  $K_f$ , para cada tamaño de entalla ensayado.

Radio de entalla, $r$ (mm)	Límite de fatiga entallado, $S_{FL}^N$ (MPa)	$K_f$
0.20	211.83	1.50
0.60	232.67	1.80
1.30	323.40	1.58
2.00	278.40	1.31
2.50	406.00	1.17
3.00	389.53	1.08

de fatiga sin entalla,  $S_{FL}$ , y el límite de fatiga para la misma muestra con entalla:  $K_f = S_{FL}/S_{FL}^N$ .

De los resultados de límite de fatiga obtenidos para los diferentes tamaños de entalla, lo más llamativo es que algunos de ellos son superiores al límite de fatiga del propio material, obtenido con probetas sin entalla. En el siguiente capítulo se procede a analizar los resultados obtenidos.

#### 5.4. Análisis microscópico de la superficie de fractura

Existen métodos teóricos que proporcionan una predicción de vida en componentes con entalla que se basan en la idea propuesta de que dicha longitud depende de las propiedades internas del material en cuestión. Algunos ejemplos son los métodos de distancia crítica propuestos por Taylor [48, 49] o el propio modelo microestructural NR [38]. La característica fundamental de estos métodos es que se centran en el análisis del gradiente de tensiones producido en una determinada línea que parte desde la raíz de la entalla (focus path), normalmente en una zona que se sitúa entre el primer y el décimo grano, ya que se asume que esa extensión es representativa del progreso que lleva la grieta en el componente.

Un aspecto importante a tener en cuenta de estos modelos de predicción de vida a fatiga es la simplificación que hacen de la grieta al considerarla como una línea recta. Esta técnica es razonable si se asume que una de las dos fases de la grieta es mucho mayor que la otra. En este trabajo se ha analizado la línea que abarca los primeros diez granos

desde el punto de inicio de la grieta. Para ello, las superficies de fractura de las probetas ensayadas fueron evaluadas utilizando diferentes técnicas microscópicas. Concretamente se realizó el análisis usando un microscopio óptico, un microscopio electrónico de barrido de emisión de campo (tecnología SEM) *FEI TENE0* y un perfilómetro óptico 3D sin contacto *Sensofar-S Neox*. El objetivo es identificar el origen o punto de iniciación de la/s grieta/s principales y observar su evolución durante los primeros granos, ya que es la etapa más crítica para determinar su influencia sobre el componente. Se prestó especial atención al punto de iniciación (*hot-spot*) en la entalla y a la dirección de grieta en los primeros granos (*focus path*). Sólo han sido analizadas aquellas muestras finalizadas en rotura cuya vida fue superior a  $10^5$  ciclos, que son las correspondientes a la zona de vida a alto número de ciclos.

#### 5.4.1. Iniciación de grieta

La geometría de la entalla de la probeta diseñada para este trabajo hace que el punto de mayor concentración de tensiones se sitúe justo en el punto medio de la entalla, es decir, en el de mayor profundidad de la misma (Ver Fig. 5.2). Al ser una entalla circunferencial, el *hot-spot* hace referencia a una circunferencia completa. En el ámbito experimental se asume que las grietas se originan en la superficie exterior, ya que coincide con el punto de máxima tensión principal (*hot-spot*) propagándose hacia el interior de la superficie del componente. Al ser circular la sección de la probeta, no es posible anticipar dicho punto de iniciación y esa es la razón de analizar la superficie de fractura en su totalidad. Para confirmar que las grietas se originan en el punto correspondiente al *hot-spot* se hace un análisis del acabado superficial en la entalla y así poder corroborar que no existen marcas o defectos que afecten a la nucleación de grietas, ya que un mal acabado daría pie a la aparición de numerosas grietas que, más tarde, se puedan unir en un mismo frente para crecer de manera conjunta. Sin embargo, un buen acabado superficial conlleva la aparición de un bajo número de grietas. La descripción del proceso se detalla en el apartado 5.1.4 y los valores de rugosidad obtenidos se muestran en la tabla 5.3.

A continuación, las superficies son analizadas en un microscopio electrónico de barrido. Este tipo microscopio ofrece una calidad de imagen muy alta para poder deducir dónde se encuentran los puntos de iniciación de grieta con mayor detalle. Varios ejemplos pueden verse en las figuras 5.15 y 5.16 donde se muestra toda la superficie de fractura

TABLA 5.7: Ángulos de iniciación de grieta para cada tamaño de entalla.

Radio de entalla, $r$ (mm)	0.60	1.30	2.00	2.50	3.00
Ángulo iniciación $\alpha$	11.60°	2.60°	5.30°	0.30°	0.40°

y se indica el punto de inicio de la grieta mediante una flecha. En ambos casos parece que hay una grieta principal, los puntos de inicio de grieta se sitúan en la parte inferior de la imagen y puede verse como la propagación de la grieta y la superficie de rotura final están en la parte superior de la imagen.

Una vez que se identifica el punto de origen de la grieta en la parte exterior de la sección, se procede a calcular el ángulo de iniciación de la grieta  $\alpha$  y el de propagación  $\beta$  en el plano de simetría axial antes comentado para indicar la posición del hot-spot y la dirección del focus path, respectivamente. Se consigue mediante una medida en el microscopio óptico sobre el alzado de la probeta, midiendo la diferencia de posición en la circunferencia de este punto de inicio con el de máxima tensión principal que coincide con la horizontal, permitiendo así calcular el ángulo de iniciación mediante la expresión  $\alpha = \arcsin(\Delta h/r)$ . Un esquema del proceso está definido en la figura 5.15 y un ejemplo de medida real está representada en la figura 5.16. Debido a que las probetas están sometidas a carga axial, el valor teórico del ángulo  $\alpha$  que corresponde al inicio de la grieta en el *hot-spot* está situado a cero grados con la horizontal que marca el centro del radio de la entalla. Concretamente, se ha analizado una muestra de cada tamaño de entalla. En la tabla 5.7 se muestran los valores medidos para cada tamaño de entalla. Los resultados muestran que el inicio de las grietas está cercano al punto de máxima tensión principal porque todos los valores están cercanos a cero grados. Es destacable el valor del ángulo de iniciación para los radios de entalla 0.6 y 2.0 mm que son sensiblemente más altos que el resto.

#### 5.4.2. Propagación de grieta

La propagación de las grietas en las superficies de fractura de las probetas se analiza con un perfilómetro 3D. Esta herramienta permite trasladar la imagen capturada a una superficie en tres dimensiones, la cual se ha analizado trazando un plano de simetría



FIGURA 5.13: Vista de la superficie de fractura de la probeta R25A12 de entalla de radio 2.50 mm.

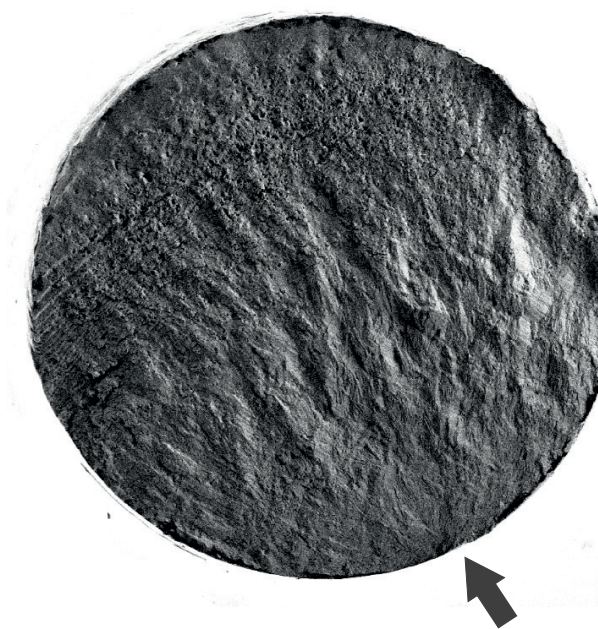


FIGURA 5.14: Vista de la superficie de fractura de la probeta R3A16 de entalla de radio 3.00 mm.

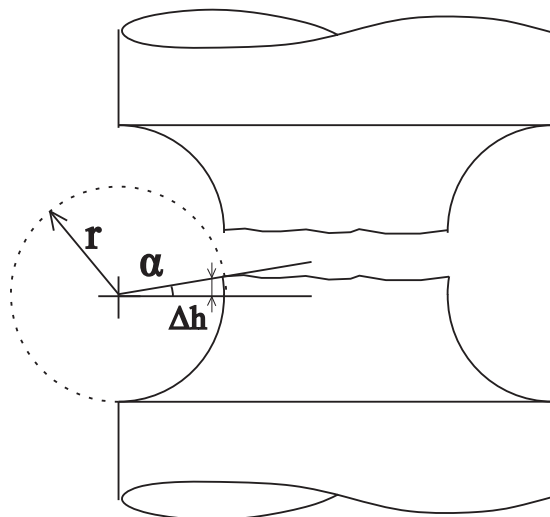


FIGURA 5.15: Esquema de la medida del ángulo de inicio de grieta.

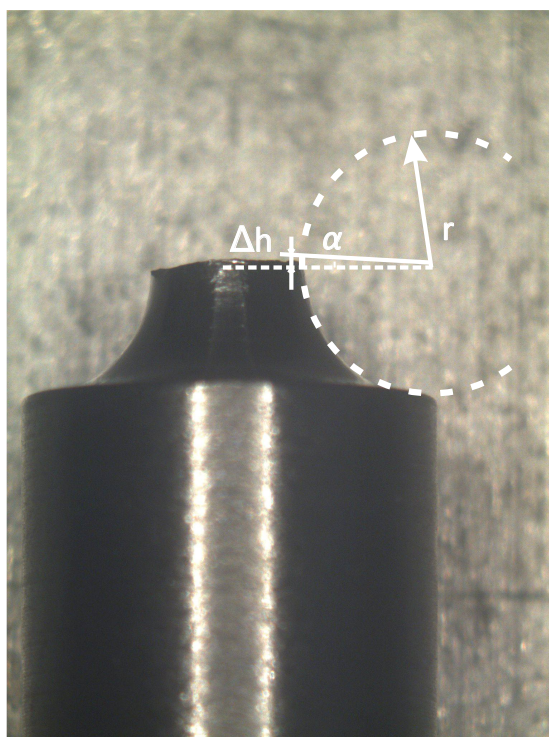


FIGURA 5.16: Detalle de la medida del ángulo de inicio de grieta.



axial que incluye al *hot-spot* y al eje de revolución de la probeta. De manera que se puede observar el perfil de la grieta durante los primeros granos de material.

En las figuras 5.17 y 5.18 se muestran varios ejemplos de estas superficies capturadas. La zona marcada en color rojo corresponde a aquellos puntos con mayor altura y la marcada en tonos azules a los de menor altura. Las zonas en negro corresponden a aquellos puntos que, por poseer una excesiva pendiente, no han podido ser capturados por la lente del microscopio. Las alturas relativas de cada punto son las correspondientes a las del plano de máxima tensión principal. Se confirma que en todos los casos estudiados las grietas nacen desde la superficie exterior y se propagan en dirección hacia el interior de la sección. El número de grietas en cada caso varía, así podemos encontrar casos como el de la figura 5.17 en el que se aprecian varios planos, uno en color amarillo y otro en color azul, que pueden corresponder a grietas originadas en planos diferentes. Sin embargo, en la figura 5.18 parece haber una sola grieta principal que abarca toda la superficie. Aun así, independientemente del número de grietas, todas se unen para formar un frente de grieta común que, normalmente, abarca desde la mitad de la superficie hasta llegar a la zona de rotura (área de color rojo en ambas figuras 5.17 y 5.18).

Junto a las superficies en tres dimensiones se adjunta un gráfico que muestra las alturas del perfil de propagación de la grieta indicado en cada imagen y correspondiente a un plano paralelo al eje de revolución de la probeta que contiene al punto de inicio de la grieta. La longitud del perfil es de 800 micras desde el punto de inicio de la grieta en el borde exterior de la sección, que corresponde, aproximadamente, a la longitud que abarcan los diez primeros granos (se recuerda que el tamaño medio de grano para este material es de  $80 \mu m$ ), y permite observar la diferencia de alturas entre el punto de iniciación y el punto final situado a 800 micras. Esta diferencia de alturas entre ambos puntos corresponde al ángulo de propagación  $\beta$  calculado mediante la expresión  $\beta = \arcsin(\Delta h/800)$ . La diferencia de altura  $\Delta h$  en el caso de la probeta de radio 0.60 mm representada en la figura 5.17 da un valor de  $35.31 \mu m$ . Por otro lado, esta diferencia de alturas,  $\Delta h$ , en el caso de la probeta de radio 3.00 mm (figura 5.18) es de  $19.23 \mu m$ .

Los valores obtenidos para los diferentes tamaños de entalla están indicados en la tabla 5.8. Se ha escogido una muestra de cada tamaño de entalla para realizar el análisis. Se deduce de los resultados obtenidos que la propagación de grieta está cercana a la

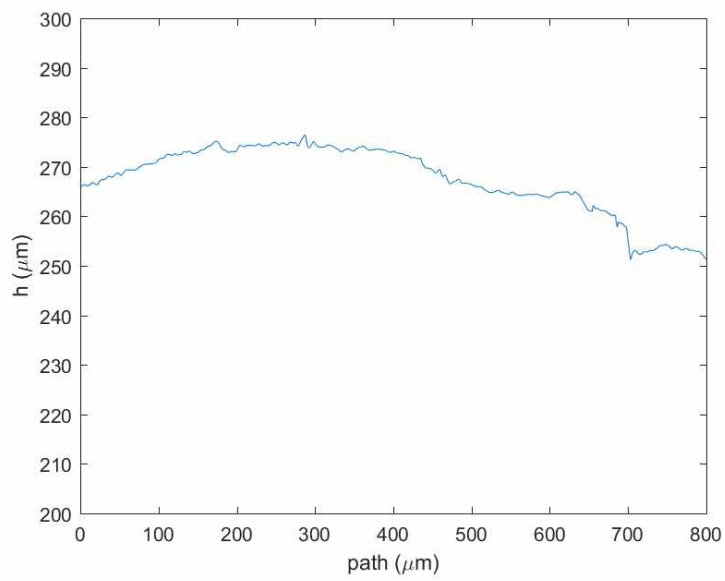
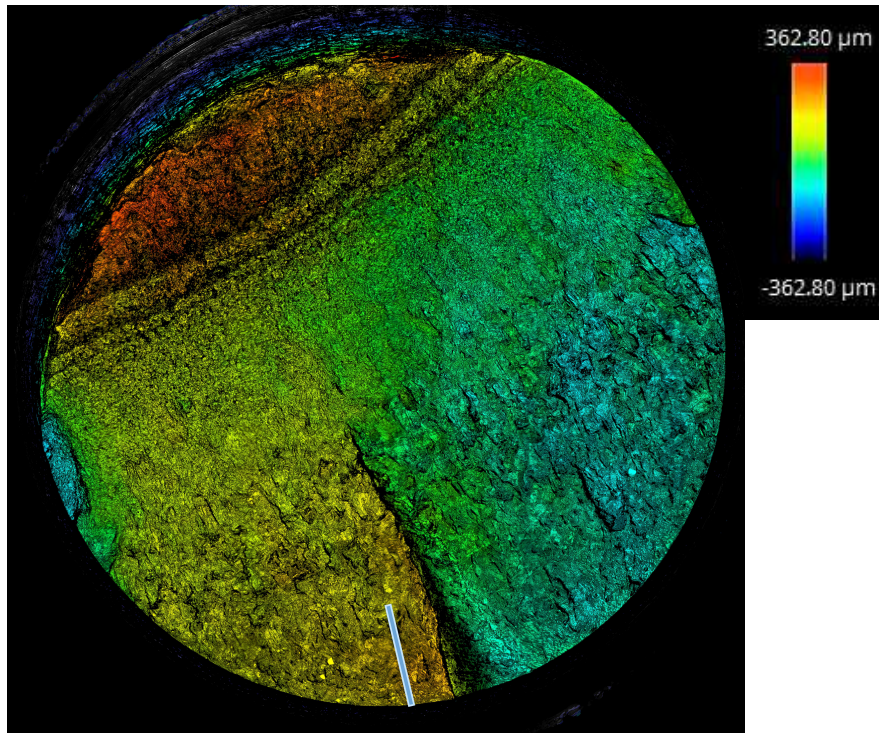


FIGURA 5.17: Superficie 3D de una probeta con entalla de radio 0.60 mm y perfil de la grieta en las primeras 800 micras.

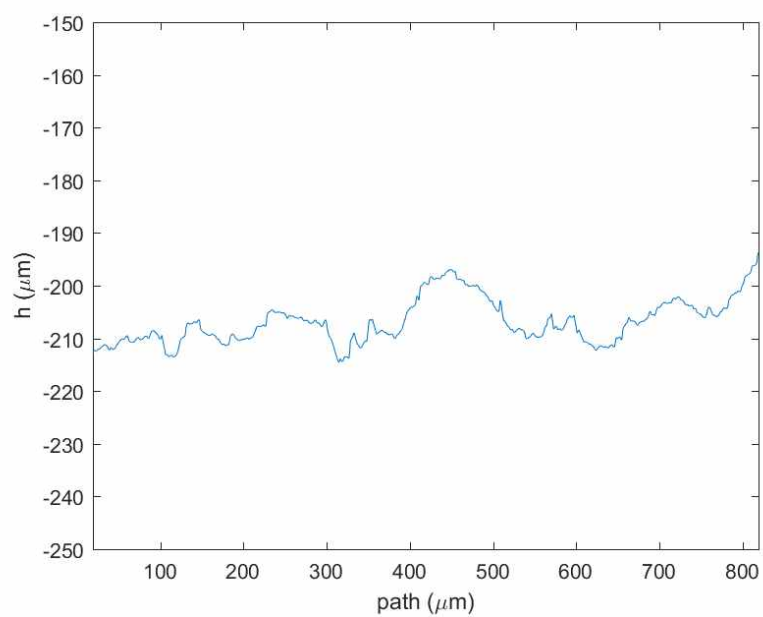
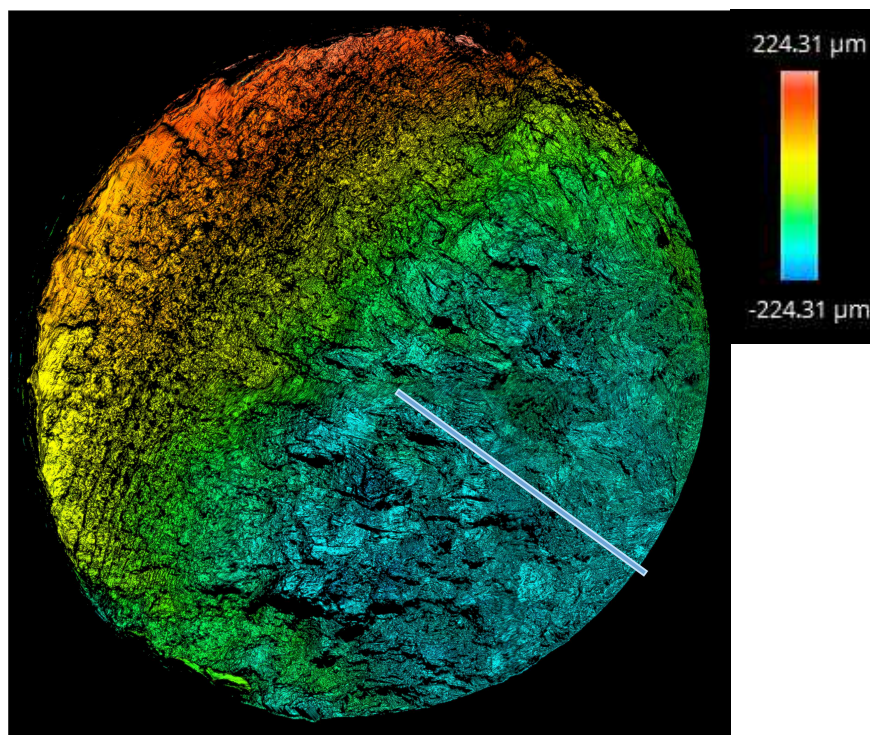


FIGURA 5.18: Superficie 3D de una probeta con entalla de radio 3.00 mm y perfil de la grieta en las primeras 800 micras.

dirección de máxima tensión principal por situarse en el entorno de los cero grados con la horizontal. Todos los ángulos de propagación medidos están por debajo de cinco grados.

TABLA 5.8: Ángulos de propagación de grieta para cada tamaño de entalla.

Radio de entalla, $r$ (mm)	0.60	1.30	2.00	2.50	3.00
Ángulo propagación $\beta$	2.50°	4.90°	2.20°	0.20°	1.40°

## Capítulo 6

# Análisis de los resultados experimentales

En este capítulo se analizan los resultados obtenidos de los ensayos de fatiga de las muestras entalladas. El objetivo es comparar los resultados experimentales con la estimación que aportan varios métodos presentes en la literatura y el método iterativo desarrollado en esta tesis.

### 6.1. Estimación del límite de fatiga para probetas entalladas

Como paso previo a la estimación teórica de la resistencia a fatiga, se realizó un análisis del gradiente de tensiones producido en el ligamento de la entalla a consecuencia de la concentración de tensión. Para ello, se modeló la geometría real de la probeta en un software de elementos finitos, concretamente en Abaqus. El diseño se hizo de forma paramétrica, de manera que fue posible hacer un amplio estudio de la influencia del radio de entalla desde valores muy pequeños hasta valores muy grandes. Radios de entalla muy pequeños provocan que el ligamento de la entalla sean lo suficientemente

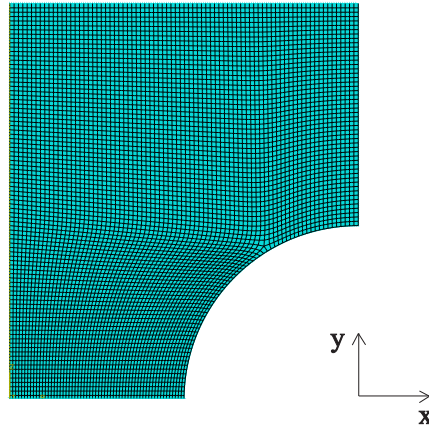
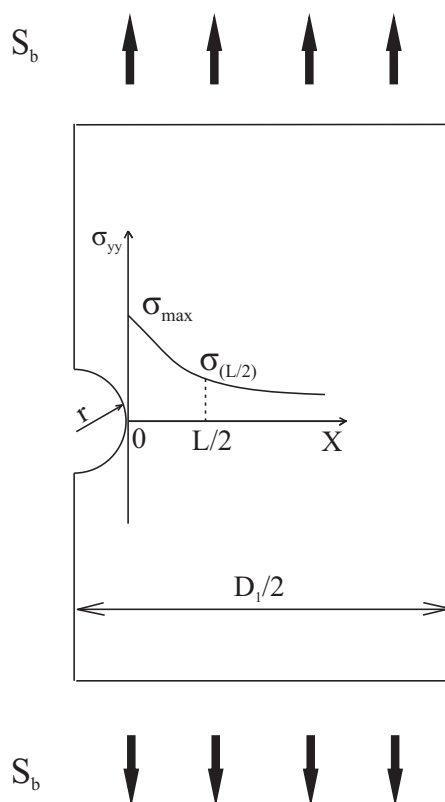


FIGURA 6.1: Detalla de la malla definida en Abaqus.

grande como para que se pueda considerar el caso como una entalla en medio semi-infinito. Sin embargo, un radio de entalla muy grande genera un tamaño mínimo de ligamento por lo que se considera como un caso de tamaño finito.

El modelado de la geometría, al corresponder a una barra cilíndrica con entalla semi-circular, se realiza aprovechando la condición de simetría axial para reducir tiempo de computación. El elemento de la malla escogido fue CAX8R de Abaqus [89], el cual es propio de modelos en dos dimensiones, es de segundo orden y de integración reducida. Estas características del elemento han sido elegidas para obtener un mejor y preciso resultado en aquellas zonas dónde existe concentración de tensiones como es la entalla. En la figura 6.1 se muestra una imagen de la malla utilizada. En este modelo simplificado se aplica una carga  $P$  en la parte superior e inferior de la geometría, quedando una tensión bruta  $S_b = 4P/\pi D_1^2 = 1$  MPa. Después se calcula la distribución de tensión  $\sigma_{yy}(X)$  a lo largo del ligamento de la entalla, es decir, a lo largo de la línea perpendicular a la dirección de la carga aplicada y desde la raíz de la entalla (ver Fig. 6.2). El valor máximo de tensión alcanzado en la entalla se designa como  $\sigma_{max}$ , mientras que  $\sigma_{L/2}$  es la tensión obtenida a una distancia de valor  $L/2$  desde la raíz de la entalla. La longitud  $L$  corresponde a la distancia crítica propuesta por Taylor [48, 49] y tiene un valor de  $L = 0.18$  mm para el acero AISI 304L [101].

El modelo de elementos finitos creado fue resuelto para un amplio número de casos, en los que el radio de entalla osciló entre  $r=0.1$  mm y  $r=3.5$  mm con un intervalo de 0.1 mm. Se definió la tensión nominal  $S_n$  como la fuerza en la sección circular dividida


 FIGURA 6.2: Esquema del gradiente de tensiones  $\sigma_{yy}$  en la entalla.

entre el área que marca el ligamento de la entalla (área de la sección más pequeña en la zona de la entalla), siendo  $S_n = 4P/\pi d^2$ . En este caso el factor de concentración de tensiones neto queda definido como la tensión máxima alcanzada en la entalla,  $\sigma_{max}$ , dividida entre la tensión nominal aplicada,  $S_n$ .

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{S_n} \quad (6.1)$$

En la figura 6.3 se muestra el gradiente de tensión  $\sigma_{yy}$  frente al ligamento de la entalla. De entre todos los radios estudiados sólo se han representado aquellos correspondientes a las probetas fabricadas. Los valores han sido escalados de tal manera que la tensión nominal  $S_n$  es igual a 1 MPa en todos los casos, pudiéndose obtener el valor del factor de concentración de tensiones directamente en la intersección de cada curva con el eje

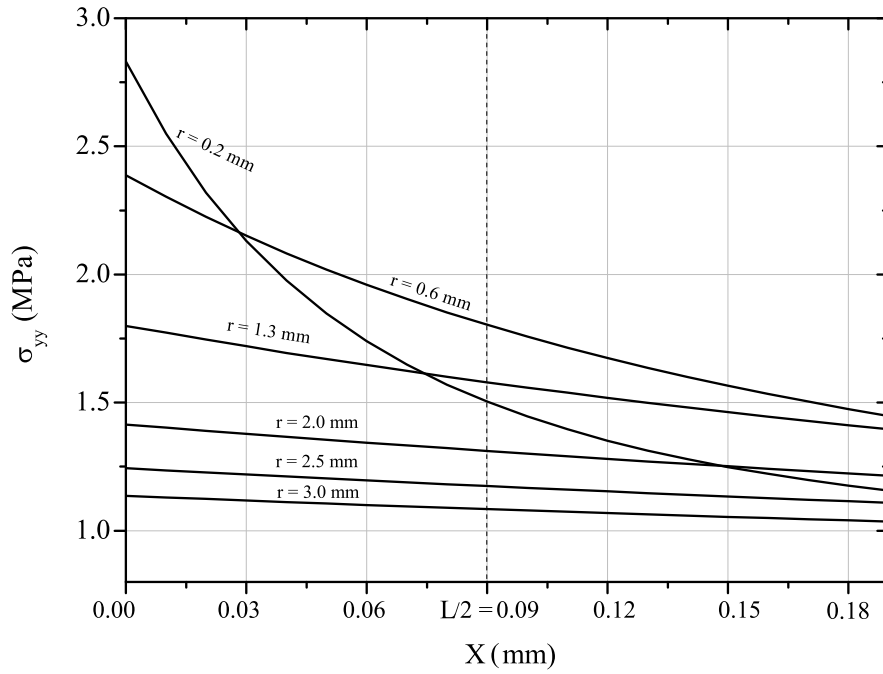


FIGURA 6.3: Esquema del gradiente de tensiones  $\sigma_{yy}$  en la entalla.

TABLA 6.1: Factores de concentración de tensiones.

Radio de entalla, $r$ (mm)	$K_t$ (Abaqus)	$K_t$ (Peterson Handbook)
0.20	2.83	2.82
0.60	2.39	2.40
1.30	1.80	1.82
2.00	1.41	1.38
2.50	1.24	1.25
3.00	1.14	1.08

vertical. Los valores obtenidos son muy cercanos a los definidos por Peterson en su libro [42], como se aprecia en la tabla 6.1.

En referencia a la figura 6.3, se puede observar como el valor del factor de concentración de tensiones  $K_t$  disminuye a la vez que el radio de la entalla aumenta. Además, es notable el hecho de que el gradiente de tensiones obtenido en la entalla es más pronunciado en tamaños de entalla pequeños. Por otro lado, la pendiente del gradiente disminuye a medida que el tamaño de entalla crece. Por estos motivos, puede anticiparse que el efecto de de tamaño finito tiene un papel importante cuando se usan métodos de distancia



crítica para estimar la resistencia a fatiga en componentes.

La figura 6.4 muestra los factores de fatiga en entallas  $K_f$  obtenidos con los métodos descritos anteriormente frente al valor adimensionalizado del radio de entalla. Se puede observar que el factor de concentración de tensiones  $K_t$  tiende a un valor de 3.065 y el factor de fatiga en entallas  $K_f$  tiende a valor 1.0, ya que una entalla muy pequeña apenas tiene efecto sobre la resistencia a fatiga. Es en esta zona de pequeños radios de entalla donde los diferentes métodos comparados difieren. Sin embargo, para tamaños de entalla mayores todas las teorías convergen juntas hasta la curva marcada por el factor de concentración de tensiones indicando que la sensibilidad a la entalla tiende a 1.0 para tamaños de entalla muy grandes como es sabido.

Hay que señalar que la diferencia entre las curvas de  $K_t$  y  $K_f$  también depende del material analizado, puesto que debe surgir un factor de escala al comparar el tamaño de la entalla y el de la microestructura del material. Esto se representa en la figura 6.5, donde el factor de fatiga en entallas  $K_f$  se ha calculado mediante el método del punto de Taylor para diferentes longitudes críticas  $L$  representativas de un amplio rango de aceros. Es notable la aproximación de las diferentes curvas a la correspondiente al factor  $K_t$  conforme el tamaño de la entalla aumenta considerablemente con respecto a la longitud crítica en cada caso.

Finalmente, se llega a un hecho interesante en la figura 6.3, que probablemente no ha pasado desapercibido: si se verifican las intersecciones de las curvas con la abscisa correspondiente a la longitud crítica  $L$  para nuestro acero inoxidable AISI 304L,  $L/2 = 0.09$  mm, se nota que el valor para el radio de entalla  $r = 0.2$  mm es menor que el valor para  $r = 0.6$  mm. Además, la intersección para  $r = 1.3$  mm es notablemente más pequeña que para  $r = 0.6$  mm pero no muy diferente que la obtenida para  $r = 0.2$  mm. Los radios mayores de 1.3 mm dan valores progresivamente más pequeños. Esto implica que los límites de fatiga en presencia de entallas estimados deberían ser bastante similares para  $r = 0.2$  mm y  $r = 1.3$  mm y ambos deberían ser mayores que los calculados para  $r = 0.6$  mm. De hecho, si se representan los límites de fatiga de las probetas entalladas frente al tamaño de entalla, la curva resultante tiene un mínimo alrededor de  $r = 0.6$  mm (Figura 6.6). También se añaden en esta figura las estimaciones de resistencia a fatiga obtenidas mediante los métodos de Neuber, Peterson, método

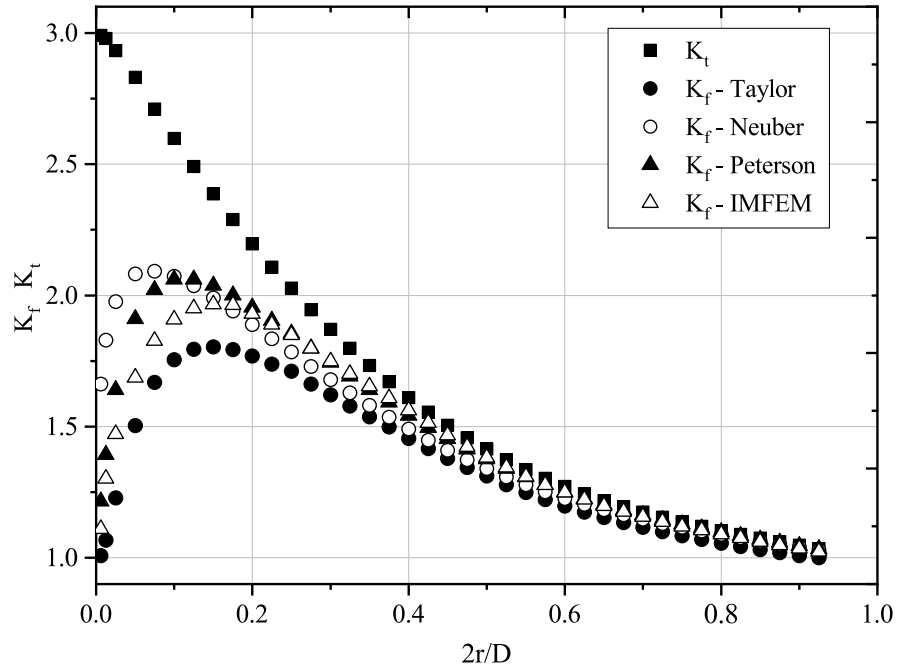


FIGURA 6.4: Factor  $K_t$  calculados por elementos finitos y factor  $K_f$  obtenido a través de varios métodos.

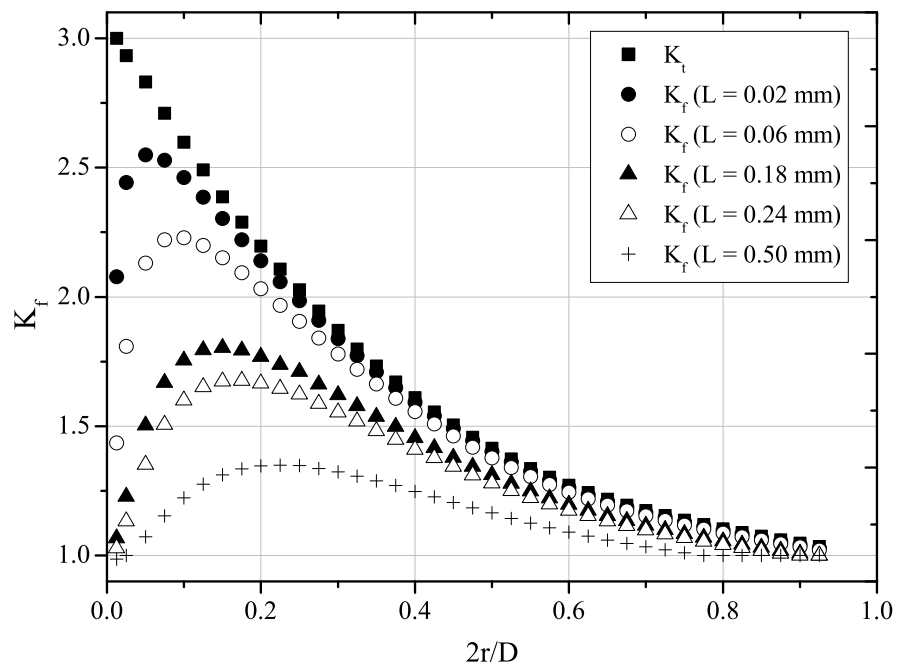


FIGURA 6.5: Factores  $K_t$  y  $K_f$  calculados para diferentes longitudes críticas  $L$ .

del punto de Taylor, la técnica propuesta por Chaves et al. [92] y el método iterativo IMFEM, basado en el modelo NR, propuesto en el capítulo 3.

Nuestros resultados experimentales indican lo contrario, como es evidente en la figura 6.6, donde los límites experimentales de fatiga en presencia de entallas para radios 2.5 y 3.0 mm resultan ser significativamente más altos que el límite de fatiga sin entalla. Para el radio de 1.3 mm, el límite de fatiga con entalla es ligeramente más alto que el límite de fatiga intrínseco del material descrito por una línea discontinua horizontal. Los límites de fatiga en presencia de entallas estimados con los diferentes métodos son muy conservadores, a excepción de la entalla más pequeña, donde en particular el método de Taylor es muy preciso.

Aunque ciertamente es sorprendente este hecho, ha habido autores que anteriormente han obtenido límites de fatiga de componentes entallados superiores al caso del material liso para aceros austeníticos [105]. En el trabajo de Frost et al. [106], se atribuyó este fenómeno a que el proceso de mecanizado de la entalla puede endurecer el material alrededor de la misma e introducir tensiones residuales de compresión. En este caso, esa puede ser la justificación a los resultados experimentales. Por tanto, se deduce que los métodos usados anteriormente para estimar los límites de fatiga del componente entallado, que se basan en el límite de fatiga del material liso sin endurecer y sin tensiones residuales y el valor  $K_t$  de la entalla, no aportarán estimaciones adecuadas, tal y como se representa en la figura 6.6. Por tanto, es obvio que las estimaciones deben mejorarse incorporando de algún modo las tensiones residuales y el endurecimiento del material. Sin embargo, existen cuestiones teóricas controvertidas incluso en aquellos casos en los que si se conoce la distribución de tensiones residuales y la tasa de endurecimiento del material en el área de la entalla, como es la forma de explicar la posible relajación de las tensiones residuales durante la aplicación de carga cíclica por ejemplo. Además, las esperanzas de calcular de manera fiable las tensiones residuales y el grado de endurecimiento introducido al fabricar un componente particular en la práctica son bajas en el mejor de los casos, dadas las incertidumbres descritas incluso para procesos de mecanizado cuidadosamente controlados [107]. Por supuesto, medir las tensiones residuales requiere mucho tiempo y es costoso, por lo que solo puede considerarse para el diseño de los componentes más críticos. En el caso de las probetas fabricadas, no se obtuvieron medidas de tensiones residuales válidas debido a problemas ópticos de reflexión

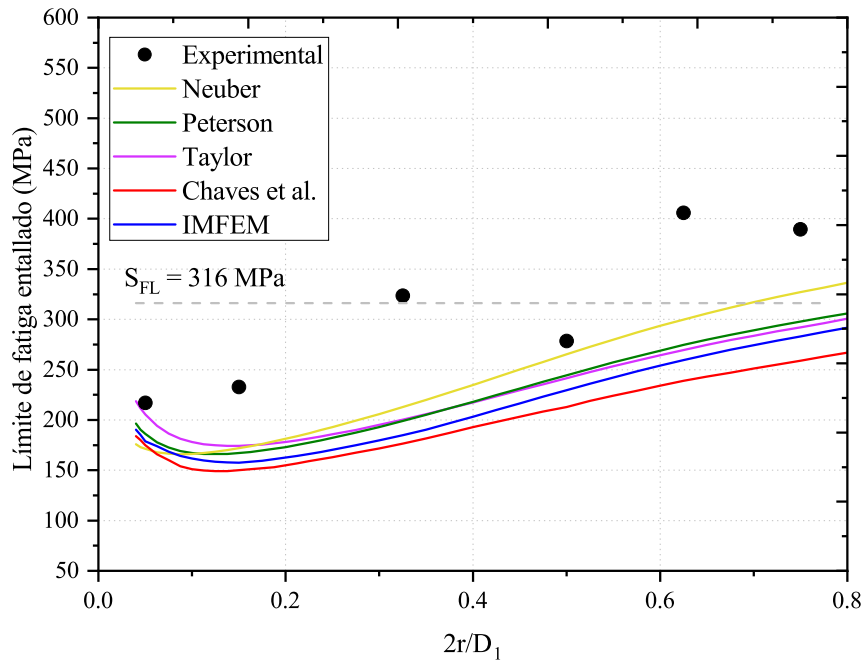


FIGURA 6.6: Valores experimentales de límite de fatiga entallado y estimaciones teóricas realizadas con varios métodos.

sumados al pequeño tamaño de la zona de medida, como es la raíz de la entalla, y a su superficie curva.

Al no disponer de datos de tensión residual en la entalla, nos gustaría contemplar si un procedimiento basado en pruebas estáticas más simples se puede emplear para estimar la resistencia de fatiga de componentes entallados. La idea es simplemente reutilizar los mismos métodos de estimación pero corrigiendo los datos del límite de fatiga intrínseco del material, en reconocimiento de que el proceso de mecanizado de la entalla ha resultado en un “material”, de alguna manera, más resistente y diferente para cada tamaño de entalla. Por este motivo, se realizaron ensayos de tracción de las probetas entalladas. La Tabla 6.2 de nuevo muestra los resultados que se refieren a la sección neta.

Desafortunadamente, en la etapa en la que se encontraba la investigación en ese momento, solo podíamos permitirnos ensayar a tracción una sola muestra para cada tamaño de

TABLA 6.2: Valores experimentales y recalculados de la tensión última de tracción y límite de fatiga entallado para los diferentes tamaños de entalla.

Radio de entalla, $r$ (mm)	$S_{UTS}$ (MPa)	$S_{FL}^N$ recalculado (MPa)
0.20	756.00	241.35
0.60	851.00	226.48
1.30	937.00	284.86
2.00	900.00	329.40
2.50	890.00	363.83
3.00	857.00	379.47

entalla, de modo que no se pueda dar una estimación de la dispersión de los resultados obtenidos. Según los valores indicados, se ve que las resistencias a la tracción aumentan con el radio de la entalla hasta los dos valores más grandes, cuando comienza a caer, debido probablemente al ligamento que es muy pequeño para estas geometrías de entalla tan agresivas. Todas las resistencias a la tracción son más altas que la resistencia a la tracción del componente sin entalla (654 MPa). Además, todas las superficies de fractura de las muestras ensayadas a tracción resultaron superficies del tipo de copa y cono, mostrando un comportamiento dúctil definido. Un ejemplo se muestra en la figura 6.7.

Se puede ver que para el material sin entalla, la relación entre el límite de fatiga y la resistencia a la tracción máxima es  $316/654 = 0.48$ , muy cerca del valor generalmente empleado. Manteniendo este valor fijo y utilizando las resistencias a la tracción de las probetas entalladas, se han calculado nuevos datos de referencia del límite de fatiga y se han vuelto a calcular los límites de fatiga para cada tamaño de entalla (Tabla 6.2). Solo el método iterativo IMFEM se ha utilizado para este cálculo. Se asume que las propiedades del material, como la longitud  $L$  no cambian. Sin embargo, si esto se relacionase con una longitud físicamente significativa, como el tamaño del grano, podría ocurrir que el endurecimiento del material esté asociado con un cambio (probablemente una disminución) de esta longitud. Los resultados se muestran en la figura 6.8. Además, y solo por comparación, los resultados obtenidos después de estimar el límite de fatiga promedio utilizando el valor medio de la resistencia a la tracción con entalla (865 MPa) también se representan en la figura 6.8 y se comparan con el nuevo límite de fatiga estimado del material, que se ha calculado aplicando  $865 \cdot 0.48 = 415.2$  MPa. Este método simple propuesto aporta estimaciones cercanas a los resultados experimentales



FIGURA 6.7: Superficies de fractura de una probeta entallada después de un ensayo de tracción.

del que se puede concluir que el uso de la resistencia a la tracción con entalla puede ser una forma útil de introducir en el criterio de fatiga la influencia del estado de tensión triaxial causado por la presencia de la misma.

Una alternativa más práctica para evaluar el estado de endurecimiento en el área de la entalla puede ser medir la dureza directamente, en lugar de tener que ensayar muestras a tracción. Podría decirse que este procedimiento proporcionaría un valor promedio de la resistencia en la zona de la entalla, que puede considerarse más representativo. El valor de dureza daría una estimación local. Tal vez, tomar varias lecturas en diferentes puntos a lo largo del perfil de la entalla y promediarlas podría ser la solución. El valor representativo elegido se podría convertir a una resistencia a la tracción aproximada equivalente a través de tablas de conversión como las que se dan, por ejemplo, en el estándar ISO 18265:2013. Solo para ilustrar la viabilidad de este procedimiento, se tomaron medidas de dureza Vickers en algunas muestras entalladas, proceso descrito en

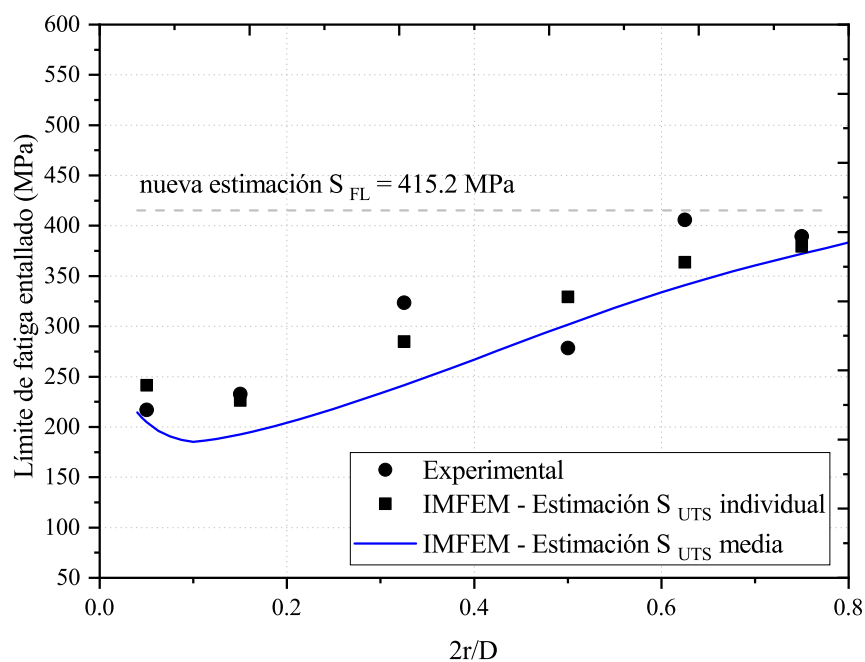


FIGURA 6.8: Estimación del límite de fatiga entallado basado en los valores actualizados del límite de fatiga intrínseco del material. Comparación con resultados experimentales.

el apartado 5.1.5. Estos valores obtenidos y comparados con los conseguidos experimentalmente de resistencia a tracción de las muestras entalladas son similares y se muestran en la tabla 6.3.

Para finalizar esta discusión debe mencionarse otra situación que puede explicar la divergencia entre los valores experimentales y las predicciones teóricas extremadamente conservadoras. Este efecto de mayor resistencia de las muestras entalladas, puede estar

TABLA 6.3: Medidas de dureza y conversión a tensión última de tracción.

Radio de entalla $r$ (mm)	Dureza Vickers	$S_{UTS}$ (MPa)
0.20	231	745
2.50	293	942
3.00	266	855

relacionado con la triaxialidad de tensiones producidas en la zona de la entalla, y la tensión de tracción hidrostática que la acompaña, también puede ser un factor contribuyente. Sin embargo, se ha descartado esta explicación por dos motivos. Primero, debido a que se sabe que la resistencia a la fatiga se ve afectada negativamente por la superposición de una tensión de tracción hidrostática, ya que la tensión hidrostática promueve la apertura de grietas por fatiga y, por lo tanto, reduce la resistencia del componente. Esto es exactamente lo contrario de lo que se ha defendido aquí. Además, si bien el efecto de mayor resistencia en ensayo estático de tracción se ha registrado para muchos materiales dúctiles, la obtención de límites de fatiga de muestras entalladas por encima del correspondiente al material sin entalla es menos común. Por lo tanto, se puede concluir que debe haber algo más en juego. Sin embargo, debemos admitir que quizás haya otros efectos sobre la fatiga asociados con la triaxialidad que aún no somos capaces de identificar. Para otros materiales o geometrías de entalla, esto ciertamente puede ser una influencia importante y, por lo tanto, debe tenerse en cuenta cuidadosamente.



## Capítulo 7

# Conclusiones y trabajos futuros - Conclusions and future work

En este capítulo se detallan los hechos más relevantes y las conclusiones obtenidas de la realización de esta tesis, tanto a nivel teórico como a nivel experimental. Además se describen las posibles tareas que permitan seguir desarrollando este trabajo en el futuro. Este capítulo está redactado en castellano e inglés.

### 7.1. Conclusiones

En esta tesis se ha analizado el crecimiento y propagación de grietas pequeñas naciendo desde entallas mediante un modelo microestructural para representar, de una manera más fiel, el comportamiento físico de estas grietas pequeñas. El problema de la grieta ha sido resuelto, apoyándose en la teoría de dislocaciones distribuidas, mediante un proceso numérico en el que se han aplicado las condiciones de simetría para simplificar la formulación de la discretización del problema de la grieta pequeña sometida a un gradiente de tensiones producido por la entalla.

Un método iterativo ha sido implementado para evaluar la resistencia a fatiga de componentes entallados. El método combina la resolución de problemas mediante la técnica

de los elementos finitos y el modelo microestructural de Navarro y de los Ríos. La formulación del método describe una superposición iterativa de problemas que conduce, finalmente, a la anulación sucesiva de las tensiones obtenidas en los contornos de interés. La propuesta desarrollada aboga por la descomposición de un problema original en diferentes escenarios más simples consiguiendo la solución del problema real mediante un proceso iterativo entre las soluciones de los diferentes escenarios en los que se divide el problema. Por un lado, se realiza un análisis elástico de tensiones en un componente con geometría real sin entalla mediante la técnica de los elementos finitos. Por otro lado se resuelve el problema de una grieta, modelada mediante una distribución continua de dislocaciones según las indicaciones del modelo NR, en un medio infinito. Se realizan iteraciones entre ambos escenarios hasta hallar la convergencia, donde la solución a un escenario define las condiciones de contorno para resolver el otro escenario. La principal ventaja y lo que aporta realmente valor a la metodología iterativa desarrollada es la descomposición del problema original en escenarios más simples para que la resolución de estos escenarios simplificados sea mucho más sencilla. Por esta razón, el método iterativo no requiere de la solución particular del equilibrio de dislocaciones para cada caso estudiado, sino que simplemente necesita la solución del caso infinito. La formulación del método iterativo le aporta flexibilidad y versatilidad, ya que permite analizar la resistencia a fatiga de componentes con entallas de cualquier forma y tamaño. Además, el efecto de todos los contornos del componente cercanos a la grieta son tenidos en cuenta mediante el análisis elástico del gradiente de tensiones en la entalla que varía según la geometría del componente.

Se ha validado el método iterativo IMFEM realizando comparaciones con ensayos experimentales de fatiga descritos en la literatura, entre los que se encuentran componentes que poseen distintas morfologías y tamaños de entalla y fabricados con materiales diferentes. Los resultados obtenidos son consistentes porque las predicciones de límite de fatiga, realizadas con el método iterativo, se ajustan correctamente a los valores experimentales y son, además, similares a las obtenidas a partir de otros métodos como los de distancia crítica, entre otros. Lo más destacable del método desarrollado es que aporta una base física al proceso de estimación de propagación de grietas por fatiga, ya que incluye la presencia de la propia grieta en su formulación, cosa que no hacen los métodos de distancia crítica. Por este motivo, el hecho de obtener estimaciones similares a estos métodos clásicos es relevante en un análisis de propagación de grieta por

fatiga. Además, se ha comprobado la ventaja del método IMFEM frente a estos métodos de distancia crítica, en el análisis de componentes de dimensiones muy pequeñas. El método IMFEM destaca con estimaciones de límite de fatiga más ajustadas porque, entre otras razones, recoge perfectamente el efecto de los contornos cercanos a la entalla sobre la propagación de la grieta, mientras que las predicciones de los métodos de distancia crítica son cuestionados ya que, a veces, la propia distancia crítica excede las dimensiones del propio componente.

Se muestran los resultados de una extensa campaña de ensayos de fatiga sobre probetas cilíndricas con entalla circunferencial de perfil semicircular fabricadas en acero inoxidable AISI 304L. El efecto de tamaño finito del componente sobre la resistencia a fatiga ha sido analizado, fijando el diámetro exterior de las probetas e incrementando progresivamente el radio de la entalla. Se ha obtenido una curva S-N para cada configuración y los límites de fatiga obtenidos han sido comparados con las predicciones del método iterativo desarrollado en este trabajo y también con las predicciones de otros métodos. La discrepancia entre los valores experimentales y las estimaciones teóricas, siendo éstas últimas extremadamente conservativas, ha sido atribuida al endurecimiento del material y a las tensiones residuales provenientes del proceso de mecanizado de las probetas. Debido a esto, se ha propuesto un método práctico para aproximar dichos efectos a través de la tensión última de rotura de las piezas mecanizadas que aporta estimaciones adecuadas de límite de fatiga.

Por último, el análisis microscópico de la superficie de fractura de las probetas ensayadas, y situadas en la zona de alto número de ciclos, confirma que los puntos de iniciación y la propagación de las grietas se sitúan muy cerca del punto y dirección de máxima tensión principal, respectivamente.

## 7.2. Trabajos futuros

A continuación se plantean diferentes opciones que pueden considerarse futuras líneas de trabajo a desarrollar como continuación de esta tesis.

- Desarrollar la adecuación del modelo microestructural para que contemple la etapa I de crecimiento de la grieta en la parte inicial de la fase de propagación, dotándolo así de mayor fundamento físico.
- Realizar una extensión del método iterativo implementado, con el objetivo de analizar componentes sometidos a carga multiaxial para dotar de una mayor realidad las situaciones que pueden ser estimadas.
- Estudiar, a través del método iterativo, geometrías en las que existan varios agujeros simulando poros del material, por ejemplo. Esto podría ser un primer paso para el análisis de propagación de grietas pequeñas por fatiga en, las cada vez más comunes, piezas fabricadas con impresión 3D.
- Profundizar en el estudio de resistencia a fatiga en micro-componentes mediante el método iterativo desarrollado con el objetivo de constatar las diferencias entre este método y los modelos de distancia crítica. En este caso, es necesario encontrar en la literatura más trabajos experimentales diferentes con los que poder realizar comparaciones.
- Evaluar en profundidad el posible efecto de la triaxialidad de tensiones en los ensayos experimentales realizados en este trabajo para conocer cómo afecta a la resistencia a fatiga de componentes dónde existe un efecto de tamaño finito notable.
- Realizar nuevos ensayos experimentales de fatiga controlando, de manera exhaustiva, todo el proceso de mecanizado y transformación del material con el objetivo de tener un registro completo que ayude a verificar el estado de las muestras, previo y durante los ensayos.
- Analizar el efecto de tamaño de la entalla sobre la resistencia a fatiga en muestras sometidas a carga multiaxial y realizar un estudio de la iniciación y propagación de grieta. Probablemente, para este punto sea necesario realizar un nuevo diseño de probeta y de concentrador de tensión que facilite este análisis.

### 7.3. Conclusions

In this thesis, the growth and propagation of small cracks originating from notches has been analyzed using a microstructural model to represent, in a more faithful way, the physical behavior of these small cracks. The crack problem has been solved, relying on the distributed dislocations technique, by means of a numerical process in which the conditions of symmetry have been applied to simplify the formulation of the problem of a small crack subjected to a stress gradient produced by the notch.

A method, which is based on the Finite Element Alternating Method, has been implemented to evaluate the fatigue strength of notched components. The method combines the finite element technique and the Navarro y de los Ríos microstructural model. The formulation of the method describes an iterative superposition of different problems that leads, finally, to the successive cancellation of the stresses obtained in the contours of interest. The developed proposal promotes the breakdown of an original problem into different simpler scenarios, achieving the solution of the real problem through an iterative process between the solutions of the different scenarios in which the problem is divided. On the one hand, an elastic stress analysis is performed on a real and uncracked component using the finite elements technique. On the other hand, the problem of a crack in an infinite medium is modeled by a continuous distribution of dislocations according to the indications of the NR model. Iterations are performed between both scenarios until convergence is achieved, where the solution to one scenario defines the boundary conditions to solve the other scenario. The main advantage and what really adds value to the developed iterative methodology is the division of the original problem into simpler scenarios so that the resolution of these simplified scenarios becomes much easier. For this reason, the developed model does not require the particular solution of the dislocation equilibrium for each case, but simply needs the well-known solution of the infinite case. The formulation of the iterative method provides flexibility and versatility, since it allows to analyze the fatigue strength of arbitrarily shaped notched components. In addition, the effect of all the contours of the component close to the crack are taken into account by means of the elastic analysis of the stress gradient in the notch, that varies according to the geometry of the component.

The iterative IMFEM method has been validated by making comparisons with experimental fatigue tests described in the literature, among which are components that have different notch morphologies and sizes, and are manufactured with different materials. The results obtained are consistent because of the fatigue limit predictions, made with the iterative method, fit properly well to the experimental values and are, in addition, similar to those obtained from other methods, such as the critical distance methods, among others. The most remarkable feature about the developed method is that it provides a physical basis for the fatigue crack propagation estimation process, since it includes the presence of the crack itself in its formulation, something that critical distance methods do not do. For this reason, obtaining estimations similar to these conventional methods is relevant in an analysis of fatigue crack propagation. In addition, the advantage of the IMFEM method over these critical distance methods has been checked in the analysis of small scale components. The IMFEM method provides quite good fatigue limit estimations because, among other reasons, it perfectly captures the effect of close contours to the notch on crack propagation, while the predictions of the critical distance methods are already questionable since the critical distance sometimes exceeds the dimensions of the component itself.

The results of an extensive campaign of fatigue tests on AISI 304L stainless steel cylindrical specimens with circumferential notch and a semicircular profile, are shown. The finite size effect of the component on fatigue strength has been analyzed, fixing the outer diameter of the specimens and progressively increasing the radius of the notch. An S-N curve has been obtained for each configuration and the experimental fatigue limits have been compared with the predictions of the iterative method developed in this work, and also with the predictions of other methods. The discrepancy between the experimental values and the theoretical estimations, the latter being extremely conservative, has been attributed to the material hardening and the residual stresses from the machining process of the specimens. Due to this, a practical method has been proposed to approximate these effects through the ultimate tensile stress of the machined notched specimens that provides adequate fatigue limit estimations.

Finally, the microscopic analysis of the fracture surface of the tested specimens, and broken after a high number of fatigue cycles, confirms that the initiation points and

the crack propagation are located very close to the maximum principal stress point and direction, respectively.

## 7.4. Future work

Next, different options are presented that can be considered as future work lines to be developed as an extension of this thesis.

- Adapting the microstructural short crack model so that it could contemplate crack growth stage I in the initial part of the propagation phase, providing it with a greater physical foundation.
- Carrying out an extension of the implemented iterative method, with the objective of analyzing notched components subjected to multiaxial loading to give a greater reality to the situations that can be predicted.
- Studying, through the iterative method, geometries in which there are several holes simulating material pores, for example. This could be a first step in the analysis of small fatigue crack propagation in, increasingly common, 3D printing parts.
- Going in depth in the study of fatigue strength of micro-components using the developed iterative method with the aim of verifying the differences between this method and the critical distance models. In this case, it is necessary to find in the literature more different experimental works with which to make comparisons.
- Evaluating the possible effect of stress triaxiality in the experimental tests carried out in this work, in order to know how it affects the fatigue strength of components where there is a noticeable finite size effect.
- Performing new experimental fatigue tests, while the whole machining process and the material transformation are exhaustively controlled, in order to have a complete record that could help to verify the state of the samples, before and during the tests.

- Analyzing the notch size effect on fatigue strength in specimens subjected to multiaxial loading and performing a study of crack initiation and propagation. Probably, for this point it would be necessary to create a new test specimen and stress concentrator design so as to facilitate this crack analysis.



# Bibliografía

- [1] A. Wöhler, Tests to determine the forces acting on railway carriage axles and the capacity of resistance of the axles, *Engineering* 11 (199) (1871) 1858–1870.
- [2] O. H. Basquin, The exponential law of endurance tests, in: *Proceedings of American Society for Testing and Materials*, Vol. 10, 1910, pp. 625–630.
- [3] P. J. E. Forsyth, *The physical basis of metal fatigue*, Blackie, 1969.
- [4] K. J. Miller, y K. P. Zachariah, Cumulative damage laws for fatigue crack initiation and stage I propagation, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 12 (4) (1977) 262–270.
- [5] D. Taylor, y O. M. Clancy, The fatigue performance of machined surfaces, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 14 (2-3) (1991) 329–336.
- [6] M. A. Daeubler, y A. W. Thompson, Microstructural effects on short fatigue cracks in eutectoid steels, in: R. O. Ritchie, y J. Lankford (Eds.), *Small fatigue cracks*, The Metallurgical Society, Warrendale, PA, 1986, pp. 157–164.
- [7] H. L. Ewalds, y R. J. H. Wanhill, *Fracture Mechanics*, Edward Arnold Publishers Ltd., 1984.
- [8] D. Broek, *Elementary engineering fracture mechanics*, Springer Netherlands, 1982.
- [9] P. C. Paris, M. P. Gomez, y W. E. Anderson, A rational analytical theory of fatigue, *The Trend in Engineering* 13 (9) (1961) 9 – 14.

- 
- [10] H. Kitagawa, y S. Takahashi, Applicability of fracture mechanics to very small cracks or the cracks in the early stage, *Proceedings 2nd International Conference on Mechanical Behavior of Materials* (1976) 627–631.
- [11] D. Taylor, y J. F. Knott, Fatigue crack propagation behaviour of short cracks; The effect of microstructure, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 4 (2) (1981) 147–155.
- [12] M. H. El Haddad, T. H. Topper, y K. N. Smith, Prediction of non propagating cracks, *Engineering Fracture Mechanics* 11 (3) (1979) 573 – 584.
- [13] K. Tanaka, Y. Nakai, y M. Yamashita, Fatigue growth threshold of small cracks, *International Journal of Fracture* 17 (5) (1981) 519–533.
- [14] A. A. Wells, Unstable crack propagation in metals, *Proceedings of Crack Propagation Symposium 1* (1961) 84–102.
- [15] J. R. Rice, A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, *Journal of Applied Mechanics* 35 (2) (1968) 379–386.
- [16] D. F. Socie, y G. B. Marquis, *Multiaxial fatigue*, Society of Automotive Engineers, Warrendale, PA, USA, 2000.
- [17] J. Hudak, S. J., Small crack behavior and the prediction of fatigue life, *Journal of Engineering Materials and Technology* 103 (1) (1981) 26–35.
- [18] S. Suresh, y R. O. Ritchie, Propagation of short fatigue cracks, *International Metals Reviews* 29 (1) (1984) 445–475.
- [19] K. J. Miller, Materials science perspective of metal fatigue resistance, *Materials Science and Technology* 9 (6) (1993) 453–462.
- [20] K. J. Miller, y E. R. de los Rios, *The behaviour of short fatigue cracks*, European Group on Fracture, Mechanical Engineering Publications, 1986.
- [21] K. J. Miller, y E. R. de los Rios, *Short fatigue cracks*, European Structural Integrity Society, Mechanical Engineering Publications, 1992.

- 
- [22] S. Pearson, Initiation of fatigue cracks in commercial aluminium alloys and the subsequent propagation of very short cracks, *Engineering Fracture Mechanics* 7 (2) (1975) 235 – 247.
- [23] J. Lankford, The growth of small fatigue cracks in 7075–T6 aluminum, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 5 (3) (1982) 233–248.
- [24] D. L. Davidson, K. S. Chan, y R. C. McClung, Cu-bearing high-strength low-alloy steels: The influence of microstructure on the initiation and growth of small fatigue cracks, *Metallurgical and Materials Transactions A* 27 (1996) 2540–2556.
- [25] K. S. Chan, y J. Lankford, The role of microstructural dissimilitude in fatigue and fracture of small cracks, *Acta Metallurgica* 36 (1) (1988) 193 – 206.
- [26] E. Wolf, Fatigue crack closure under cyclic tension, *Engineering Fracture Mechanics* 2 (1) (1970) 37 – 45.
- [27] J. C. Newman Jr, A review of modelling small-crack behavior and fatigue-life predictions for aluminum alloys, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 17 (4) (1994) 429–439.
- [28] R. O. Ritchie, y S. Suresh, Some considerations on fatigue crack closure at near-threshold stress intensities due to fracture surface morphology, *Metallurgical Transactions A* 13 (1982) 937–940.
- [29] S. Suresh, y R. O. Ritchie, A geometric model for fatigue crack closure induced by fracture surface roughness, *Metallurgical Transactions A* 13 (1982) 1627–1631.
- [30] D. Dugdale, Yielding of steel sheets containing slits, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8 (2) (1960) 100 – 104.
- [31] M. R. James, y W. L. Morris, Effect of fracture surface roughness on growth of short fatigue cracks, *Metallurgical Transactions A* 14 (1983) 153–155.
- [32] J. Andersson, The influence of grain size variation on metal fatigue, *International Journal of Fatigue* 27 (8) (2005) 847 – 852.
- [33] E. R. De los Rios, M. Trull, y A. Levers, Modelling fatigue crack growth in shot-peened components of al 2024-T351, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 23 (8) (2000) 709–716.

- 
- [34] N. O. Larrosa, V. Chaves, A. Navarro, y R. A. Ainsworth, Application of the microstructural finite element alternating method to assess the impact of specimen size and distributions of contact/residual stress fields on fatigue strength, *Computers & Structures* 179 (2017) 15 – 26.
- [35] E. R. de los Rios, X. D. Wu, y K. J. Miller, A micro-mechanics model of corrosion-fatigue crack growth in steels, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 19 (11) (1996) 1383–1400.
- [36] A. Navarro, y E. R. de los Rios, Short and long fatigue crack growth: A unified model, *Philosophical Magazine A* 57 (1) (1988) 15–36.
- [37] A. Navarro, y E. R. de los Rios, An alternative model of the blocking of dislocations at grain boundaries, *Philosophical Magazine A* 57 (1) (1988) 37–42.
- [38] A. Navarro, y E. R. de los Rios, Fatigue crack growth modelling by successive blocking of dislocations, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 437 (1900) (1992) 375–390.
- [39] D. A. Hills, P. A. Kelly, D. N. Dai, y A. M. Korsunsky, *Solution of Crack Problems, The Distributed Dislocation Technique*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [40] R. C. McClung, y H. Sehitoglu, Closure and growth of fatigue cracks at notches, *Journal of Engineering Materials and Technology* 114 (1) (1992) 1–7.
- [41] H. Neuber, *Kerbspannungslehre*, Springer Verlag, 1937, translated into English as *Theory of Notches*, Edwards, J. W., Ann Arbor, MI, 1946.
- [42] R. E. Peterson, *Stress concentration factors*, John Wiley and Sons, 1974.
- [43] P. Kuhn, y H. F. Hardrath, An engineering method for estimating notch size effect in fatigue, Tech. rep., NACA TN 2805 (1952).
- [44] R. E. Peterson, Notch sensitivity, in: G. Sines, y J. L. Waisman (Eds.), *Metal Fatigue*, McGraw-Hill, 1959, Ch. 13, pp. 293–306.
- [45] M. R. Mitchell, *Fundamentals of modern fatigue analysis for design*, ASM International. Material Park, OH, 1996.

- 
- [46] R. C. Rice (Ed.), SAE Fatigue Design Handbook, Society of Automotive Engineers, Warrendale, PA, 1997.
- [47] R. I. Stephens, A. Fatemi, R. R. Stephens, y H. O. Fuchs, Metal Fatigue in Engineering, A Wiley-Interscience publication, Wiley, 2000.
- [48] D. Taylor, Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical approach, *International Journal of Fatigue* 21 (1999) 413–420.
- [49] D. Taylor, The theory of critical distances: a new perspective in fracture mechanics, Elsevier, 2007.
- [50] N. E. Frost, y D. S. Dugdale, Fatigue tests on notched mild steel plates with measurements of fatigue cracks, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 5 (3) (1957) 182 – 192.
- [51] N. E. Frost, A relation between the critical alternating propagation stress and crack length for mild steel, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 173 (1) (1959) 811–836.
- [52] K. J. Miller, The behaviour of short fatigue cracks and their initiation part II—A general summary, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 10 (2) (1987) 93–113.
- [53] R. A. Smith, y K. J. Miller, Prediction of fatigue regimes in notched components, *International Journal of Mechanical Sciences* 20 (4) (1978) 201 – 206.
- [54] K. S. Chan, y J. Lankford, A crack-tip strain model for the growth of small fatigue cracks, *Scripta Metallurgica* 17 (4) (1983) 529 – 532.
- [55] E. R. de los Rios, H. J. Mohamed, y K. J. Miller, A micro-mechanics analysis for short fatigue crack growth, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 8 (1) (1985) 49–63.
- [56] C. Wang, y J. Hutchinson, Interactions of fatigue cracks with elastic obstacles, *International Journal of Fracture* 109 (2001) 263–283.
- [57] B. A. Bilby, A. H. Cottrell, y K. H. Swinden, The spread of plastic yield from a notch, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 272 (1350) (1963) 304–314.

- 
- [58] V. Chaves, y A. Navarro, Application of a microstructural model for predicting notch fatigue limits under mode I loading, *International Journal of Fatigue* 31 (5) (2009) 943 – 951.
- [59] N. I. Muskhelishvili, *Singular integral equations*, Springer, Dordrecht, 1953.
- [60] C. Vallesllano, A. Navarro, y J. Domínguez, Compact formulation for modelling cracks in infinite solids using distributed dislocations, *Philosophical Magazine A* 82 (1) (2002) 81–92.
- [61] K. J. Miller, The two thresholds of fatigue behaviour, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 16 (9) (1993) 931–939.
- [62] D. Taylor, A mechanistic approach to critical-distance methods in notch fatigue, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 24 (4) (2001) 215–224.
- [63] M. D. Chapetti, Fatigue propagation threshold of short cracks under constant amplitude loading, *International Journal of Fatigue* 25 (12) (2003) 1319 – 1326.
- [64] C. Vallesllano, A. Navarro, y J. Domínguez, Fatigue crack growth threshold conditions at notches. Part I: theory, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 23 (2) (2000) 113–121.
- [65] V. Chaves, Modelo microestructural para la predicción de fallo por fatiga en entallas, 2006, Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla (Spain).
- [66] F. Erdogan, Approximate solutions of systems of singular integral equations, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 17 (6) (1969) 1041–1059.
- [67] F. Erdogan, y G. D. Gupta, On the numerical solution of singular integral equations, *Quarterly of Applied Mathematics* 29.
- [68] F. Erdogan, G. D. Gupta, y T. S. Cook, *Numerical solution of singular integral equations*, Springer Netherlands, Dordrecht, 1973, pp. 368–425.
- [69] S. Krenk, On the use of the interpolation polynomial for solutions of singular integral equations, *Quarterly of Applied Mathematics* 32 (4) (1975) 479–484.
- [70] J. Dundurs, y T. Mura, Interaction between an edge dislocation and a circular inclusion, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 12 (3) (1964) 177 – 189.

- [71] I. S. Sokolnikoff, *The Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd Edition, McGraw-Hill, New York, 1956.
- [72] L. V. Kantorovich, y V. I. Krylov, *Approximate methods of higher analysis*, Wiley-Interscience, New York, 1964.
- [73] G. Kirsch, Die theorie der elastizität und die bedürfnisse der festigkeitslehre, *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* 42 (1898) 797–807.
- [74] S. Timoshenko, y J. N. Goodier, *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, McGraw-Hill, 1969.
- [75] J. R. Barber, *Elasticity*, 3rd Edition, Springer Netherlands, 2010.
- [76] T. E. Kullgren, F. W. Smith, y G. P. Ganong, Quarter elliptical cracks emanating from holes in plates, *Journal of Engineering Materials and Technology* 100 (2) (1978) 144–149.
- [77] P. S. Theocaris, G. Tsamasphyros, y E. E. Theotokoglou, A combined integral-equation and finite-element method for the evaluation of stress intensity factors, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 31 (2) (1982) 117 – 127.
- [78] T. Nishioka, y S. N. Atluri, Analytical solution for embedded elliptical cracks, and finite element alternating method for elliptical surface cracks, subjected to arbitrary loadings, *Engineering Fracture Mechanics* 17 (3) (1983) 247 – 268.
- [79] C. Y. Liao, y S. N. Atluri, A finite element alternating method for evaluation of stress intensity factors for part-circular cracks subjected to arbitrary loadings, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 91 (1) (1991) 1253 – 1270.
- [80] J. H. Park, y S. N. Atluri, Fatigue growth of multiple-cracks near a row of fastener-holes in a fuselage lap-joint, *Computational Mechanics* 13 (1993) 189–203.
- [81] A. Navarro, C. Vallengano, E. R. de los Rios, y X. J. Xin, Notch sensitivity and size effects described by a short crack propagation model, in: *Engineering against fatigue*, Proceedings International Conference, AA Balkema Publishers, 1997, pp. 63–72.

- 
- [82] C. Vallellano, y J. Domínguez, Fatigue crack growth threshold conditions at notches. Part II: generalization and application to experimental results, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 23 (2) (2000) 123–128.
- [83] V. Chaves, y A. Navarro, Fatigue limits for notches of arbitrary profile, *International Journal of Fatigue* 48 (2013) 68 – 79.
- [84] D. A. Hills, P. A. Kelly, D. N. Dai, A. M. Korsunsky, y L. M. Keer, Solution of crack problems: The distributed dislocation technique, *Journal of Applied Mechanics* 65 (2) (1998) 548–548.
- [85] S. Lin, y D. A. Hills, Stress intensity factors for cracks emanating from a semicircular notch in a half-plate, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 31 (6) (1996) 433–439.
- [86] N. O. Larrosa, Modelo microestructural iterativo para la predicción de fallo a fatiga de componentes finitos, 2012, Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla (Spain).
- [87] N. O. Larrosa, A. Navarro, y V. Chaves, Calculating fatigue limits of notched components of arbitrary size and shape with cracks growing in mode I, *International Journal of Fatigue* 74 (2015) 142 – 155.
- [88] R. J. Hartranft, y G. C. Sih, Alternating method applied to edge and surface crack problems, in: G. C. Sih (Ed.), *Methods of analysis and solutions of crack problems*, Vol. 1, Springer Netherlands, Dordrecht, 1973, pp. 179–238.
- [89] ABAQUS V. 6.13, *Analysis User's Manual*, Simulia, Dassault Systèmes, 2013.
- [90] G. M. Puri, *Python scripts for abaqus: Learn by example*, 2011.
- [91] D. L. DuQuesnay, T. H. Topper, y M. T. Yu, The effect of notch radius on the fatigue notch factor and the propagation of short cracks, in: K. J. Miller, y E. R. de los Rios (Eds.), *The behaviour of short fatigue cracks*, Mechanical Engineering Publications, London, 1986, pp. 323–335.
- [92] V. Chaves, C. Madrigal, y A. Navarro, Fatigue limit predictions at stress concentrations using FEA and microstructural fracture mechanics, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 87 (2017) 11–20.



- [93] H. R. Zambrano, y G. Härkegård, Self-arresting cracks at notches in ductile cast iron, *Engineering Fracture Mechanics* 102 (2013) 146 – 155.
- [94] W. Ren, y T. Nicholas, Notch size effects on high cycle fatigue limit stress of Udimet 720, *Materials Science and Engineering: A* 357 (1) (2003) 141 – 152.
- [95] P. A. S. Reed, W. F. Gale, y J. E. King, Intrinsic thresholds in polycrystalline udimet 720, *Materials Science and Technology* 9 (4) (1993) 281–287.
- [96] V. Chaves, A. Navarro, y C. Madrigal, Stage I crack directions under in-phase axial–torsion fatigue loading for aisi 304L stainless steel, *International Journal of Fatigue* 80 (2015) 10–21.
- [97] G. Meneghetti, L. Susmel, y R. Tovo, High-cycle fatigue crack paths in specimens having different stress concentration features, *Engineering Failure Analysis* 14 (4) (2007) 656 – 672.
- [98] P. Lukáš, L. Kunz, B. Weiss, y R. Stickler, Non-damaging notches in fatigue, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 9 (3) (1986) 195–204.
- [99] S. Wiersma, The effect of stress concentrations on fatigue and fracture of 316L stainless steel micro-scale components, 2004, Tesis Doctoral. Trinity College Dublin (Ireland).
- [100] S. Wiersma, y D. Taylor, Fatigue of materials used in microscopic components, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 28 (12) (2005) 1153–1160.
- [101] G. Beretta, Fatiga en componentes con concentradores de tensión bajo carga biaxial, 2016, Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla (Spain).
- [102] H. Nakazawa, y S. Kodama, Statistical S–N testing method with 14 specimens: JSME standard method for determination of S–N curves, in: T. Tanaka, S. Nishijima, y M. Ichikawa (Eds.), *Statistical Research on Fatigue and Fracture*, Vol. 2 of *Current Japanese Materials Research*, Elsevier Applied Science, 1987, p. 59–69.
- [103] T. V. Duggan, y J. Byrne, *Fatigue as a design criterion*, Macmillan Education UK, 1977.

- 
- [104] ASTM E468-11 Standard Practice for Presentation of Constant Amplitude Fatigue Test Results for Metallic Materials, ASTM International, 2011.
- [105] T. T. Oberg, y J. B. Johnson, Fatigue properties of metals used in aircraft construction at 3450 and 10,600 cycles, Proceedings - American Society for Testing Materials 37(2) (193) (1937) 195–205.
- [106] N. E. Frost, K. J. Marsh, y L. P. Pook, Metal fatigue, Clarendon Press Oxford, 1974, republished by Dover Publications, 2003.
- [107] V. G. Navas, O. Gonzalo, y I. Bengoetxea, Effect of cutting parameters in the surface residual stresses generated by turning in AISI 4340 steel, International Journal of Machine Tools and Manufacture 61 (2012) 48 – 57.

# Anexo A. Programación del método IMFEM

Código Principal - PRINCIPAL.py

---

```
1 import subprocess
2 import os
3 import numpy as np
4 import math
5 import time
6 from scipy.interpolate import interp1d
7
8 #Se cambia el directorio para ejecutar los scripts de una determinada ruta
9 os.chdir(r"C:\Users\Particular\...")
10 #vector con el tamaño de radio de entalla
11 radios=np.array([0.2,0.3,0.4,0.5])
12
13 #Declaración de variables necesarias en abaqus y python
14 N=100 #numero de ecuaciones resolución numerica NR
15 numerogranos=25 #numero maximo de medios granos que abarca la grieta
16 ff=2.5 #coeficiente aproximación KT de Vallellano
17 criterio=1.0 #valor inicial criterio convergencia
18 it_max=20 #numero maximo iteraciones que se hace para convergencia
19 tol=0.001 #tolerancia exigida en la convergencia
20 my_dir=os.getcwd() #recupera el directorio actual de trabajo
21
22 #VALORES geometria
23 ancho=35.0#semiancho de la geometria
24
25 alto=20.0#semialto de la geometria
26
27
28 #VALORES CASO entalla SEMI ELIPTICA y V-NOTCH
29 alto_ent=0.50 #semi-alto de la entalla
30 prof_ent=0.60 #profundidad de la entalla
31 #valores caso V-NOTCH
32 anguloV=math.radians(45)
33
34 puntos_contorno=100 #numero de puntos de cada arista en los que se calcula la
    tension
35 puntos_grieta=1000 #numero de puntos del path creado en abaqus para gradiente
    tensiones en grieta
```

```

36 semilla_general=3.0#valores malla abaqus
37 semilla_minima=0.05 #valores malla abaqus
38 semilla_media_sup=0.5 #valores malla abaqus
39 semilla_media_inf=0.25 #valores malla abaqus
40 #VALORES DEL MATERIAL
41 D=0.05##tamano medio de grano en milimetros
42 r0=D/30 #tamano medio barrera microestructural
43 sigma_fl_plain=580 #limite fatiga MPa
44 kth_inf=15.9# FIT umbral grieta pequena en MPa/raiz(m)
45 pi=math.pi #numero pi
46 young=210000 #modulo elastico longitudinal del material de la probeta en MPa
47 poisson=0.29 #coef de Poisson del material de la probeta
48 a0=((kth_inf/sigma_fl_plain)**2)/(math.pi)*1000 #longitud critica de grieta
49 kappa=3-(4*poisson) #constante de Kolosov para el caso de deformacion plana
50 mu=young/(2*(1+poisson)) #modulo elasticidad transversal en MPa
51 A=(mu*2)/((kappa+1)*pi) #constante que multiplica la funcion de distribucion de
    dislocaciones
52 sigma_f=0 #tension de friccion en las caras de la grieta
53 #limitacion del numero maximo de granos a estudiar en caso de ser necesario
54 if numerogranos>(math.floor(ancho-radio/D)):
55     numerogranos=int(math.floor(ancho-radio/D))
56
57 vector_i=np.arange(1,numerogranos,2) #vector que indica el grano en el que
    estamos i=1,3,5...
58 tension_aplicada=1.0 #tension externa aplicada a la probeta en MPa
59 iteracion=np.zeros((len(vector_i),len(radios))) #matriz numero iteraciones de
    cada caso
60 cont_iter=0 #contador de iteraciones
61
62 #se elimina todo lo que no hace falta
63 for fname in os.listdir(my_dir):
64     if fname.startswith("funcion_dist_num_2_inter_gr_"):
65         os.remove(os.path.join(my_dir, fname))
66
67 for fname in os.listdir(my_dir):
68     if fname.startswith("syy_grieta_gr_"):
69         os.remove(os.path.join(my_dir, fname))
70 ###
71 #se debe crear el vector vk de puntos de colocacion para que abaqus lo coja para
    el path
72 vk=np.zeros((1,N+1)) #vector de puntos de colocacion 1 intervalo
73 ui=np.zeros((1,N)) #vector de puntos de integracion 1 intervalo
74 u1i=np.zeros((1,N)) #vector de puntos de integracion primer intervalo
75 u2i=np.zeros((1,N)) #vector de puntos de integracion segundo intervalo
76 v1k=np.zeros((1,N)) #vector de puntos de colocacion primer intervalo
77 v2k=np.zeros((1,N)) #vector de puntos de colocacion segundo intervalo
78 x1=np.zeros((1,N)) #vector puntos colocacion cambio variable primer intervalo
79 x2=np.zeros((1,N)) #vector puntos colocacion cambio variable segundo intervalo
80 chi1=np.zeros((1,N)) #vector puntos integracion cambio variable primer intervalo
81 chi2=np.zeros((1,N)) #vector puntos integracion cambio variable segundo intervalo
82 inc_chi1=np.zeros((1,N))
83 inc_chi2=np.zeros((1,N))
84 vector_x1_x2=np.zeros((1,2*N))
85 vector_chi1_chi2=np.zeros((1,2*N))
86
87 sigma_li=np.zeros(len(vector_i)) #vector tension diagrama KT caso infinito
88 sigma3_inf=np.zeros(len(vector_i)) #vector tension en barrera caso infinito
89 sigma3_notch=np.zeros((len(radios),it_max,len(vector_i))) #vector tension en
    barrera caso entallado

```

```

90 sigma_li_notch=np.zeros((len(radios),it_max,len(vector_i))) #vector tension
    diagrama KT caso entallado
91 sigma_f3_num_2_inter=np.zeros((it_max,len(vector_i))) #vector tension en barrera
    numerica 2 intervalos
92 sigma_f3_num=np.zeros((it_max,len(vector_i))) #vector tension en barrera
    numerica 1 intervalo
93 sigma_f3_teo=np.zeros((len(radios),len(vector_i)))
94 sigma_li_notch_total=np.zeros((len(vector_i),len(radios))) #vector resumen
    tensiones diagrama KT caso entallado
95 sigma3_notch_total=np.zeros((len(vector_i),len(radios))) #vector resumen tension
    en barrera caso entallado
96 nr_aprox=np.zeros(len(radios)) #vector resultados NR aproximado (iteracion 0)
97 ten_ini_yy_sup=np.ones((puntos_contorno,), dtype=float) #vector tensiones
    problema original
98 fatigue=np.zeros((1,len(radios))) #vector limites de fatiga de cada entalla
99 kt=np.zeros((len(radios))) #vector factor Kt entalla
100 kf=np.zeros((len(radios))) #vector factor Kf entalla
101 ###
102 for rr in range(len(radios)): # bucle que recorre todos los tamanos de entalla
103     radio=radios[rr] #radio de la entalla en mm
104
105     for i in range(1,N+1):
106         u1i[0,i-1]=float(math.cos(pi*(2*i-1)/(2*N+1)))
107         u2i[0,i-1]=float(math.cos(pi*2*i/(2*N+1)))
108         v1k[0,i-1]=float(math.cos(pi*2*i/(2*N+1)))
109         v2k[0,i-1]=float(math.cos(pi*(2*i-1)/(2*N+1)))
110
111     import variables_txt # se guardan todas las variables en archivos txt
112     variables_txt.variables_txt(alto_ent,prof_ent,anguloV,puntos_grieta,ff,
    kth_inf,a0,sigma_fl_plain,numerogranos,N,vk,ancho,alto,radio,young,poisson,
    tension_aplicada,ui,puntos_contorno,semilla_general,semilla_minima,
    semilla_media_inf,semilla_media_sup,u1i,u2i,v1k,v2k,chi1,chi2,vector_x1_x2,
    vector_chi1_chi2,x1,x2,ten_ini_yy_sup)
113     ### bucle que recorre todas las longitudes de grieta
114     for ii_cont in range(len(vector_i)): #ii_cont es la posicion del grano en el
    vector de granos 1,3,5,7,9...
115         a=vector_i[ii_cont]*(D/2) #vector longitudes de grieta
116         c=a+r0 #longitud grieta + zona plastica
117         longitud_grieta=c
118         n=a/c #punto transicion entre zona plastica y grieta
119         sigma_li[ii_cont]=(math.sqrt(a0))/(((a**ff)+(a0**ff))-((D/2)**ff))**(1/(2*
    ff))*sigma_fl_plain #aproximacion KT por Vallellano
120         cont_iter=0 #se inicializa el valor en cero
121         for abcd in range(N):
122             x1[0,abcd]=(v1k[0,abcd]+1)*n*c/2
123             x2[0,abcd]=(((1-n)/2)*(v2k[0,abcd] + 1)+n)*c
124             chi1[0,abcd]=(u1i[0,abcd]+1)*n*c/2
125             chi2[0,abcd]=(((1-n)/2)*(u2i[0,abcd] + 1)+n)*c
126         for abcd in range(N):
127             vector_x1_x2[0,abcd]=x1[0,N-1-abcd]
128             vector_x1_x2[0,N+abcd]=x2[0,N-1-abcd]
129             vector_chi1_chi2[0,abcd]=chi1[0,N-1-abcd]
130             vector_chi1_chi2[0,N+abcd]=chi2[0,N-1-abcd]
131         if abcd==0:
132             inc_chi1[0,abcd]=(abs(chi1[0,abcd+1]-chi1[0,abcd]))/2.0
133             inc_chi2[0,abcd]=(abs(chi2[0,abcd+1]-chi2[0,abcd]))/2.0
134         elif abcd==(N-1):
135             inc_chi1[0,abcd]=(abs(chi1[0,abcd]-chi1[0,abcd-1]))/2.0
136             inc_chi2[0,abcd]=(abs(chi2[0,abcd]-chi2[0,abcd-1]))/2.0

```

```

137         else:
138             inc_chi1[0,abcd]=(abs(chi1[0,abcd+1]-chi1[0,abcd])/2.0)+(abs(chi1
[0,abcd]-chi1[0,abcd-1])/2.0)
139             inc_chi2[0,abcd]=(abs(chi2[0,abcd+1]-chi2[0,abcd])/2.0)+(abs(chi2
[0,abcd]-chi2[0,abcd-1])/2.0)
140         for abcde in range(2*N):
141             if abcde==0:
142                 chicompleto=np.insert(vector_chi1_chi2,0,-vector_chi1_chi2[0,0])
143             else:
144                 chicompleto=np.insert(chicompleto,0,-vector_chi1_chi2[0,abcde])
145
146         import var_grieta_txt # se guardan todas las variables en archivos txt
147         var_grieta_txt.var_grieta_txt(ii_cont,c,n,a,longitud_grieta)
148         import variables_txt # se guardan todas las variables en archivos txt
149         variables_txt.variables_txt(alto_ent,prof_ent,anguloV,puntos_grieta,ff,
kth_inf,a0,sigma_fl_plain,numerogranos,N,vk,ancho,alto,radio,young,poisson,
tension_aplicada,ui,puntos_contorno,semilla_general,semilla_minima,
semilla_media_inf,semilla_media_sup,u1,u2i,v1k,v2k,chi1,chi2,vector_x1_x2,
vector_chi1_chi2,x1,x2,ten_ini_yy_sup)
150         #se abre abaqus en segundo plano
151         os.system('"C:\SIMULIA\Abaqus\Commands\abq6133.bat cae || pause"')
152         #ejecucion del modelo de abaqus sin subrutina
153         subprocess.call('abaqus cae noGUI=placa_aguj.py',shell=True)
154         import os.path
155         #la ejecucion de este codigo no continua hasta que no termine abaqus
156         while(os.path.exists('path_grieta.txt')==False):
157             pass
158
159         data2=np.genfromtxt('path_grieta.txt',skip_header=3) #se importan los
datos de las tensiones sobre la grieta y sus coordenadas
160         tensiones_linea_grieta2=data2[:,1]
161         path2=data2[:,0]
162         kt[rr]=tensiones_linea_grieta2[0] # valor factor Kt
163         np.savetxt('kt.txt',kt,fmt="%5.10f",delimiter="\n")
164         f1 = interp1d(path2, tensiones_linea_grieta2)
165         kf[rr]=float(f1(0.12)) # valor factor Kf
166         np.savetxt('kf.txt',kf,fmt="%5.10f",delimiter="\n")
167
168         #se ejecuta la resolucioN numerica modelo NR
169         import PROBLEMA_INFINITO
170         sigma_li_notch,sigma3_notch,sigma3_inf,b,kappa,mu,A,sigma_f,
tensiones_linea_grieta,path,sigma_y_grieta,func_dist_teo,zeta,sigma_f3_teo,
coc1,coc2,omega1,omega2,matriz_terminos_ind_2_inter,
matriz_incognitas_2_inter,funcion_dist_num_2_inter,kernel_x1_chi1,
kernel_x1_chi2,kernel_x2_chi1,kernel_x2_chi2,funcion_dist_num_2_inter,
inversa_2_inter,solucion_2_inter,sigma_f3_num_2_inter,tension_xx_entalla,
tension_yy_entalla,tension_xy_entalla,tension_yy_arista_sup,
tension_xx_arista_sup,tension_xy_arista_sup,tension_xy_arista_der,
tension_xx_arista_der,tension_yy_arista_der = PROBLEMA_INFINITO.
PROBLEMA_INFINITO(inc_chi1,inc_chi2,rr,alto_ent,prof_ent,anguloV,
puntos_grieta,kappa,mu,A,sigma_f,sigma_f3_num,sigma_f3_num_2_inter,
sigma_f3_teo,ii_cont,cont_iter,iteracion,sigma_li_notch,sigma3_notch,
sigma3_inf,N,ancho,alto,radio,puntos_contorno,semilla_general,semilla_minima,
semilla_media_inf,semilla_media_sup,D,r0,numerogranos,sigma_fl_plain,ff,
kth_inf,a0,vector_i,young,poisson,tension_aplicada,pi,vk,ui,x1,x2,chi1,chi2,
u1i,u2i,v1k,v2k,a,c,n,longitud_grieta,vector_x1_x2,vector_chi1_chi2,sigma_li)
171
172         import var_grieta_txt # se guardan todas las variables en archivos txt
173         var_grieta_txt.var_grieta_txt(ii_cont,c,n,a,longitud_grieta)

```

```

174     import variables_txt # se guardan todas las variables en archivos txt
175     variables_txt.variables_txt(alto_ent,prof_ent,anguloV,puntos_grieta,ff,
kth_inf,a0,sigma_fl_plain,numerogranos,N,vk,ancho,alto,radio,young,poisson,
tension_aplicada,ui,puntos_contorno,semilla_general,semilla_minima,
semilla_media_inf,semilla_media_sup,u1i,u2i,v1k,v2k,chi1,chi2,vector_x1_x2,
vector_chi1_chi2,x1,x2,ten_ini_yy_sup,ten_ini_xx_sup,ten_ini_yy_der,
ten_ini_xx_der,ten_ini_xy_der,ten_ini_xy_sup)
176     cont_iter=1 #se inicializa el valor en uno
177     criterio=1.0
178
179     #si estamos en segunda o sucesivas iteraciones se activa el script de
abaqus con subrutina
180     while (abs(criterio)>tol) and (cont_iter<it_max):
181         #se abre abaqus en segundo plano
182         os.system("'C:\SIMULIA\Abaqus\Commands\abq6133.bat cae || pause'")
183         #se ejecuta el modelo de abaqus son subrutina
184         subprocess.call('abaqus cae noGUI=placa_aguj_iter.py',shell=True)
185         import os.path
186         #la ejecucion de este codigo no continua hasta que no termine abaqus
187         while(os.path.exists('path_grieta.txt')==False):
188             pass
189
190         import var_grieta_txt # se guardan todas las variables en archivos
txt
191         var_grieta_txt.var_grieta_txt(ii_cont,c,n,a,longitud_grieta)
192         import variables_txt # se guardan todas las variables en archivos txt
193         variables_txt.variables_txt(alto_ent,prof_ent,anguloV,puntos_grieta,
ff,kth_inf,a0,sigma_fl_plain,numerogranos,N,vk,ancho,alto,radio,young,poisson,
tension_aplicada,ui,puntos_contorno,semilla_general,semilla_minima,
semilla_media_inf,semilla_media_sup,u1i,u2i,v1k,v2k,chi1,chi2,vector_x1_x2,
vector_chi1_chi2,x1,x2,ten_ini_yy_sup,ten_ini_xx_sup,ten_ini_yy_der,
ten_ini_xx_der,ten_ini_xy_der,ten_ini_xy_sup)
194         #se ejecuta la resolucion numerica modelo NR
195         import PROBLEMA_INFINITO
196         sigma_li_notch,sigma3_notch,sigma3_inf,b,kappa,mu,A,sigma_f,
tensiones_linea_grieta,path,sigma_y_grieta,func_dist_teo,zeta,sigma_f3_teo,
coc1,coc2,omega1,omega2,matriz_terminos_ind_2_inter,
matriz_incognitas_2_inter,funcion_dist_num_2_inter,kernel_x1_chi1,
kernel_x1_chi2,kernel_x2_chi1,kernel_x2_chi2,funcion_dist_num_2_inter,
inversa_2_inter,solucion_2_inter,sigma_f3_num_2_inter,tension_xx_entalla,
tension_yy_entalla,tension_xy_entalla,tension_yy_arista_sup,
tension_xx_arista_sup,tension_xy_arista_sup,tension_xy_arista_der,
tension_xx_arista_der,tension_yy_arista_der = PROBLEMA_INFINITO.
PROBLEMA_INFINITO(inc_chi1,inc_chi2,rr,alto_ent,prof_ent,anguloV,
puntos_grieta,kappa,mu,A,sigma_f,sigma_f3_num,sigma_f3_num_2_inter,
sigma_f3_teo,ii_cont,cont_iter,iteracion,sigma_li_notch,sigma3_notch,
sigma3_inf,N,ancho,alto,radio,puntos_contorno,semilla_general,semilla_minima,
semilla_media_inf,semilla_media_sup,D,r0,numerogranos,sigma_fl_plain,ff,
kth_inf,a0,vector_i,young,poisson,tension_aplicada,pi,vk,ui,x1,x2,chi1,chi2,
u1i,u2i,v1k,v2k,a,c,n,longitud_grieta,vector_x1_x2,vector_chi1_chi2,sigma_li)
197
198         #proceso de analisis de convergencia
199         #tension en barrera iteracion anterior
200         anterior_sigma3_notch=sigma3_notch[rr,cont_iter-1,ii_cont]
201         #valor actual convergencia
202         criterio=(sigma3_notch[rr,cont_iter,ii_cont]-anterior_sigma3_notch)/
anterior_sigma3_notch
203         sigma_li_notch_total[ii_cont,rr]=sigma_li_notch[rr,cont_iter,ii_cont]
204         cont_iter=cont_iter+1

```

```

205         iteracion[ii_cont,rr]=cont_iter
206
207         #codigo por si se desea dejar de analizar longitudes de grieta cuando
alcance el limite de fatiga
208         if ii_cont>=1 and (sigma_li_notch[rr,int(iteracion[ii_cont,rr]-1),
ii_cont]<sigma_li_notch[rr,int(iteracion[ii_cont,rr]-1),ii_cont-1]):
209             break
210         #aqui hay que hacer un vector de sigma li notch para quedarnos con los
ultimos de cada columna que son los correspondientes a los puntos donde se ha
obtenido la convergencia
211         for ax1 in range(len(vector_i)):
212             sigma_li_notch_total[ax1,rr]=abs(sigma_li_notch[rr,int(iteracion[ax1,rr]
]-1),ax1])
213             sigma3_notch_total[ax1,rr]=abs(sigma3_notch[rr,int(iteracion[ax1,rr]-1),
ax1])
214         ### #proceso para guardar sigma_li_notch como hipermatriz
215         with open('sli_notch_multi.txt', 'w') as outfile:
216             outfile.write('# Array shape: {0}\n'.format(sigma_li_notch.shape))
217             for data_slice in sigma_li_notch:
218                 np.savetxt(outfile, data_slice, fmt='%5.10f')
219                 outfile.write('# New notch tip radius\n')
220         ### #proceso para guardar sigma_3_notch como hipermatriz
221         with open('s3_notch_multi.txt', 'w') as outfile:
222             outfile.write('# Array shape: {0}\n'.format(sigma3_notch.shape))
223             for data_slice in sigma3_notch:
224                 np.savetxt(outfile, data_slice, fmt='%5.10f')
225                 outfile.write('# New notch tip radius\n')
226         ###
227         #calculo limites de fatiga
228         fatigue[0,rr]=np.amax(sigma_li_notch_total[:,rr])
229         #calculo NR aproximado (iteracion 0)
230         nr_aprox[rr]=max(sigma_li_notch[rr,0,:])
231         #almacenamiento en archivos txt
232         np.savetxt('myfile.txt', np.transpose([radios,fatigue[0,:]]),fmt= "%5.10f",
delimiter = ",")
233         np.savetxt('sli notch.txt', sigma_li_notch_total,fmt= "%5.10f", delimiter = ",
")
234         np.savetxt('iteraciones.txt', iteracion,fmt= "%5.10f", delimiter = ",")
235         np.savetxt('sigma3_notch_final.txt',sigma3_notch_total, fmt= "%5.10f",
delimiter = ",")
236         np.savetxt('sigma3_teo.txt',sigma_f3_num_2_inter, fmt= "%5.10f", delimiter =
",")
237         np.savetxt('nr_aprox.txt',nr_aprox, fmt= "%5.10f", delimiter = ",")

```

---

### Modelo NR - PROBLEMA\_INFINITO.py

---

```

1 import numpy as np
2 import math
3 import scipy
4 from scipy.interpolate import interp1d
5

```



```

6 def PROBLEMA_INFINITO(inc_chi1,inc_chi2,rr,alto_ent,prof_ent,anguloV,
puntos_grieta,kappa,mu,A,sigma_f,sigma_f3_num,sigma_f3_num_2_inter,
sigma_f3_teo,ii_cont,cont_iter,iteracion,sigma_li_notch,sigma3_notch,
sigma3_inf,N,ancho,alto,radio,puntos_contorno,semilla_general,semilla_minima,
semilla_media_inf,semilla_media_sup,D,r0,numero_granos,sigma_fl_plain,ff,
kth_inf,a0,vector_i,young,poisson,tension_aplicada,pi,vk,ui,x1,x2,chi1,chi2,
u1i,u2i,v1k,v2k,a,c,n,longitud_grieta,vector_x1_x2,vector_chi1_chi2,sigma_li)
:
7
8 # se importa el gradiente de tensiones calculado previamente en abaqus
9 data=np.genfromtxt('path_grieta.txt',skip_header=3) #se importan los datos de
las tensiones sobre la grieta y sus coordenadas
10 tensiones_linea_grieta=data[:,1] #se guardan los valores de tension SOBRE LA
LINEA DE LA GRIETA en un vector para todo el ligamento de la entalla
11 path=data[:,0] #se guardan los valores de las coordenadas del gradiente
12 f1 = interp1d(path, tensiones_linea_grieta) # se interpola para sacar los
valores de los gradientes en la longitud de grieta que marque el numero de
granos que estamos estudiando en cada momento
13 sigma_y_grieta=np.zeros((1,2*N)) # vector para almacenar el gradiente de
puntos interpolados
14 # interpolacion
15 for cont in range(N):
16     if cont==N-1:
17         sigma_y_grieta[0,cont]=float(f1(x1[0,cont]))
18         sigma_y_grieta[0,N+cont]=float(f1(x2[0,cont]))
19     else:
20         sigma_y_grieta[0,cont]=float(f1(x1[0,cont]))
21         sigma_y_grieta[0,N+cont]=float(f1(x2[0,cont]))
22
23 #se calcula la funcion de distribuciones y tension en la barrera de manera
teorica
24 import curva_teorica
25 func_dist_teo, zeta, sigma_f3_teo, coc1,coc2 = curva_teorica.curva_teorica(rr
,sigma_f3_teo,ii_cont,vector_i,N,n,tension_aplicada,A,mu,kappa,pi,
longitud_grieta,c)
26 #se calcula la funcion de distribuciones y tension en la barrera de manera
numerica separando el problema en 2 intervalos
27 import curva_numerica_2_inter
28 omega1,omega2,matriz_terminos_ind_2_inter,matriz_incognitas_2_inter,
funcion_dist_num_2_inter,kernel_x1_chi1,kernel_x1_chi2,kernel_x2_chi1,
kernel_x2_chi2,funcion_dist_num_2_inter,inversa_2_inter,solucion_2_inter,
sigma_f3_num_2_inter = curva_numerica_2_inter.curva_numerica_2_inter(
cont_iter,sigma_f3_num_2_inter,ii_cont,vector_i,sigma_y_grieta,N,n,A,pi,mu,
kappa,longitud_grieta,c,u1i,u2i,v1k,v2k,x1,x2,chi1,chi2,
tensiones_linea_grieta)
29
30 sigma3_notch[rr,cont_iter,ii_cont]=sigma_f3_num_2_inter[cont_iter,ii_cont]
31 sigma3_inf[ii_cont]=sigma_f3_teo[rr,ii_cont]
32 #tension externa necesaria para superar una barrera i para un componente
entallado
33 sigma_li_notch[rr,cont_iter,ii_cont]=(sigma_li[ii_cont]*sigma3_inf[ii_cont])/
sigma3_notch[rr,cont_iter,ii_cont]
34 #calculo de tensiones en el contorno
35 import tensiones_contorno2

```

```

36 distancia, arista_hor, arista_der, arista_entalla, tension_yy_arista_sup,
tension_xx_arista_sup, tension_xy_arista_sup, tension_xx_arista_der,
tension_yy_arista_der, tension_xy_arista_der, tension_yy_arista_der2,
tension_xy_entalla, tension_xy_entalla, tension_xx_entalla=tensiones_contorno2.
tensiones_contorno2(inc_chi1, inc_chi2, ii_cont, cont_iter, N, ancho, alto, radio, A,
zeta, funcion_dist_num_2_inter, pi, tension_aplicada, ui, puntos_contorno, x1, x2,
chi1, chi2, c, vector_chi1_chi2)
37 # almacenamiento de datos en archivos de texto
38 import guarda_datos
39 guarda_datos.guarda_datos(vector_i, ii_cont, cont_iter, arista_hor, arista_der,
tension_yy_entalla, tension_xy_entalla, tension_xx_entalla,
tension_yy_arista_sup, tension_xx_arista_sup, tension_xy_arista_sup,
tension_xy_arista_der, tension_xx_arista_der, tension_yy_arista_der,
func_dist_teo, ui, vk, tensiones_linea_grieta, funcion_dist_num_2_inter,
tension_yy_arista_der2)
40
41 return sigma_li_notch, sigma3_notch, sigma3_inf, kappa, mu, A, sigma_f,
tensiones_linea_grieta, path, sigma_y_grieta, func_dist_teo, zeta, sigma_f3_teo,
coc1, coc2, omega1, omega2, matriz_terminos_ind_2_inter,
matriz_incognitas_2_inter, funcion_dist_num_2_inter, kernel_x1_chi1,
kernel_x1_chi2, kernel_x2_chi1, kernel_x2_chi2, funcion_dist_num_2_inter,
inversa_2_inter, solucion_2_inter, sigma_f3_num_2_inter, tension_xx_entalla,
tension_yy_entalla, tension_xy_entalla, tension_yy_arista_sup,
tension_xx_arista_sup, tension_xy_arista_sup, tension_xy_arista_der,
tension_xx_arista_der, tension_yy_arista_der

```

---

### Solución analítica caso infinito - curva.teorica.py

---

```

1 import numpy as np
2 import math
3 def curva_teorica(rr, sigma_f3_teo, ii_cont, vector_i, N, n, tension_aplicada, A, mu,
kappa, pi, longitud_grieta, c):
4     sigma_f3_teo[rr, ii_cont]=float((pi*tension_aplicada/2.0)/(math.acos(n)))
5     zeta=np.linspace(-1,1,num=N)
6     func_dist_teo=np.zeros((1,N))
7     coc1=np.zeros((1,N))
8     coc2=np.zeros((1,N))
9     for abc in range(0,N):
10         cociente1=np.abs((1-(n*zeta[abc]))/(n-zeta[abc]))
11         cociente2=np.abs((1+(n*zeta[abc]))/(n+zeta[abc]))
12         coc1[0,abc]=cociente1
13         coc2[0,abc]=cociente2
14         var1=np.arccosh(cociente1)
15         var2=np.arccosh(cociente2)
16         func_dist_teo[0,abc]=((var1)-(var2))*(sigma_f3_teo[rr,ii_cont]) # funcion
analitica de distribucion de dislocaciones
17     return func_dist_teo, zeta, sigma_f3_teo, coc1, coc2

```

---

### Almacenamiento de variables principales - variables.txt.py

---

```

1 import numpy as np
2 import math
3

```

```

4 def variables_txt(alto_ent, prof_ent, anguloV, puntos_grieta, ff, kth_inf, a0,
  sigma_fl_plain, numerogranos, N, vk, ancho, alto, radio, young, poisson,
  tension_aplicada, ui, puntos_contorno, semilla_general, semilla_minima,
  semilla_media_inf, semilla_media_sup, u1i, u2i, v1k, v2k, chi1, chi2, vector_x1_x2,
  vector_chi1_chi2, x1, x2, ten_ini_yy_sup):
5 #se guarda la variable N que corresponde al numero de ecuaciones
6 f=open('N.txt', 'w')
7 f.write('%i' % N)
8 f.close()
9 #se guarda la variable ancho que corresponde al ancho de la geometria real
10 f1=open('ancho.txt', 'w')
11 f1.write('%f' % ancho)
12 f1.close()
13 #se guarda la variable alto que corresponde a la mitad del alto de la
  geometria real
14 f2=open('alto.txt', 'w')
15 f2.write('%f' % alto)
16 f2.close()
17 #se guarda la variable radio que corresponde al radio de la entalla
18 f3=open('radio.txt', 'w')
19 f3.write('%f' % radio)
20 f3.close()
21 #se guarda la variable que corresponde al modulo de young
22 f5=open('young.txt', 'w')
23 f5.write('%f' % young)
24 f5.close()
25 #se guarda la variable que corresponde al coeficiente de poisson
26 f6=open('poisson.txt', 'w')
27 f6.write('%f' % poisson)
28 f6.close()
29 #se guarda la variable que corresponde al valor de la tension aplicada en la
  probeta
30 f7=open('tension_aplicada.txt', 'w')
31 f7.write('%f' % tension_aplicada)
32 f7.close()
33 #se guarda la variable que corresponde al numero de puntos de cada arista en
  los que se va a calcular el valor de tension y desplazamiento
34 f9=open('puntos_contorno.txt', 'w')
35 f9.write('%i' % puntos_contorno)
36 f9.close()
37 #se guarda la variable que corresponde al tamaño del elemento en la pieza
38 f10=open('semilla_general.txt', 'w')
39 f10.write('%f' % semilla_general)
40 f10.close()
41 #se guarda la variable que corresponde al tamaño del elemento en la zona de
  la entalla
42 f11=open('semilla_minima.txt', 'w')
43 f11.write('%f' % semilla_minima)
44 f11.close()
45 f111=open('semilla_media_inf.txt', 'w')
46 f111.write('%f' % semilla_media_inf)
47 f111.close()
48 f112=open('semilla_media_sup.txt', 'w')
49 f112.write('%f' % semilla_media_sup)
50 f112.close()
51 #se guarda la variable que corresponde al numero de medios granos que se van
  a estudiar en el problema
52 f13=open('numerogranos.txt', 'w')
53 f13.write('%f' % numerogranos)

```

```

54     f13.close()
55     #se guarda la variable limite de fatiga del material
56     f14=open('sigma_fl.txt','w')
57     f14.write('%f' % sigma_fl_plain)
58     f14.close()
59     #se guarda la variable coeficiente Vallellano
60     f16=open('ff.txt','w')
61     f16.write('%f' % ff)
62     f16.close()
63     #se guarda la variable kth_inf
64     f17=open('kth_inf.txt','w')
65     f17.write('%f' % kth_inf)
66     f17.close()
67     #se guarda la variable a0
68     f18=open('a0.txt','w')
69     f18.write('%f' % a0)
70     f18.close()
71     #se guarda la variable puntos_grieta
72     f19=open('puntos_grieta.txt','w')
73     f19.write('%f' % puntos_grieta)
74     f19.close()
75
76     f20=open('alto_ent.txt','w')
77     f20.write('%f' % alto_ent)
78     f20.close()
79
80     f21=open('prof_ent.txt','w')
81     f21.write('%f' % prof_ent)
82     f21.close()
83
84     f22=open('anguloV.txt','w')
85     f22.write('%f' % anguloV)
86     f22.close()
87
88     np.savetxt('vk.txt',vk, fmt= "%f", delimiter = "\n")
89     np.savetxt('ui.txt',ui, fmt= "%f", delimiter = "\n")
90     np.savetxt('u1i.txt',u1i, fmt= "%f", delimiter = "\n")
91     np.savetxt('u2i.txt',u2i, fmt= "%f", delimiter = "\n")
92     np.savetxt('v1k.txt',v1k, fmt= "%f", delimiter = "\n")
93     np.savetxt('v2k.txt',v2k, fmt= "%f", delimiter = "\n")
94     np.savetxt('chi1.txt',chi1, fmt= "%f", delimiter = "\n")
95     np.savetxt('chi2.txt',chi2, fmt= "%f", delimiter = "\n")
96     np.savetxt('x1.txt',x1, fmt= "%f", delimiter = "\n")
97     np.savetxt('x2.txt',x2, fmt= "%f", delimiter = "\n")
98     np.savetxt('vector_x1_x2.txt',vector_x1_x2, fmt= "%f", delimiter = "\n")
99     np.savetxt('vector_chi1_chi2.txt',vector_chi1_chi2, fmt= "%f", delimiter = "\n")
100    np.savetxt('ten_ini_yy_sup.txt',ten_ini_yy_sup, fmt= "%f", delimiter = "\n")

```

### Almacenamiento de variables de la longitud de grieta - var\_grieta.py

```

1  import numpy as np
2  import math
3
4  def var_grieta_txt(ii_cont,c,n,a,longitud_grieta):
5      #se guarda la variable que corresponde a la semilongitud de la grieta
6      f4=open('longitud_grieta.txt','w')
7      f4.write('%f' % longitud_grieta)

```

```

8     f4.close()
9     #se guarda la variable que corresponde a la relacion entre la distancia que
10    #ocupa la grieta y la zona plastica
11    f8=open('nn.txt','w') #se le pone nn porque se sobrescribe al guardarlo con
12    #el numero de ecuaciones N
13    f8.write('%f' % n)
14    f8.close()
15    #se guarda la variable que corresponde a la longitud de la grieta mas la
16    #longitud de la zona plastica
17    f12=open('c.txt','w')
18    f12.write('%f' % c)
19    f12.close()
20    #se guarda la variable a longitud grieta sin zona plastica
21    f15=open('a.txt','w')
22    f15.write('%f' % a)
23    f15.close()
24    # valor del grano que se estudia en cada momento
25    f19=open('ii_cont.txt','w')
26    f19.write('%f' % ii_cont)
27    f19.close()

```

### Solución numérica modelo NR caso entallado - curva\_numerica\_2\_inter.py

```

1 # KERNEL SIMETRICO CON DOS INTERVALOS
2 import numpy as np
3 import math
4 from scipy import linalg
5 def curva_numerica_2_inter(cont_iter, sigma_f3_num_2_inter, ii_cont, vector_i,
6 sigma_y_grieta, N, n, A, pi, mu, kappa, longitud_grieta, c, u1i, u2i, v1k, v2k, x1, x2,
7 chi1, chi2, tensiones_linea_grieta):
8     omega1=np.zeros((1,N)) # funcion de peso intervalo 1
9     omega2=np.zeros((1,N)) #funcion de peso intervalo 2
10    #inicializacion de variables
11    matriz_incognitas_2_inter=np.zeros((2*N+1,2*N+1)) #incognitas ecuacion
12    #discretizada
13    matriz_terminos_ind_2_inter=np.zeros((2*N+1,1)) # terminos independientes
14    #ecuacion discretizada
15    funcion_dist_num_2_inter=np.zeros((2*N,1)) # funcion de dislocaciones
16    #numerica
17    kernel_x1_chi1=np.zeros((N,N))
18    kernel_x1_chi2=np.zeros((N,N))
19    kernel_x2_chi1=np.zeros((N,N))
20    kernel_x2_chi2=np.zeros((N,N))
21
22    for i in range(1,N+1):
23        omega1[0,i-1]=float(math.sqrt((1+u1i[0,i-1])/(1-u1i[0,i-1])))
24        omega2[0,i-1]=float(math.sqrt((1-u2i[0,i-1])/(1+u2i[0,i-1])))
25
26    for ll in range(2*N+1):
27        if ll<2*N:
28            if cont_iter>=1.0:
29                matriz_terminos_ind_2_inter[ll,0]=(-1/(pi*A*c))*(sigma_y_grieta
30 [0,ll])
31            else:
32                matriz_terminos_ind_2_inter[ll,0]=(-1/(pi*A*c))*(sigma_y_grieta
33 [0,ll])
34            else:
35                matriz_terminos_ind_2_inter[ll,0]=0

```

```

29
30 #ultima columna matriz incognitas
31 for ss in range(2*N):
32     if ss>=N:
33         matriz_incognitas_2_inter[ss,2*N]=-1/(pi*A*c)
34     else:
35         matriz_incognitas_2_inter[ss,2*N]=0
36
37 for abc in range(N):
38     for bcd in range(N):
39         kernel_x1_chi1[abc,bcd]=((2*chi1[0,bcd])/((x1[0,abc])**2 - ((chi1
40 [0,bcd])**2))
41         kernel_x1_chi2[abc,bcd]=((2*chi2[0,bcd])/((x1[0,abc])**2 - ((chi2
42 [0,bcd])**2))
43         kernel_x2_chi1[abc,bcd]=((2*chi1[0,bcd])/((x2[0,abc])**2 - ((chi1
44 [0,bcd])**2))
45         kernel_x2_chi2[abc,bcd]=((2*chi2[0,bcd])/((x2[0,abc])**2 - ((chi2
46 [0,bcd])**2))
47
48 for kk in range(N):
49     for mm in range(N):
50         matriz_incognitas_2_inter[kk,mm]=float(0.5*n*2*((1+u1i[0,mm])/(2*N+1)
51 )*kernel_x1_chi1[kk,mm])
52         matriz_incognitas_2_inter[kk,N+mm]=float((1-n)*0.5*2*((1-u2i[0,mm])
53 /(2*N+1))*kernel_x1_chi2[kk,mm])
54         matriz_incognitas_2_inter[N+kk,mm]=float(0.5*n*2*((1+u1i[0,mm])/(2*N
55 +1))*kernel_x2_chi1[kk,mm])
56         matriz_incognitas_2_inter[N+kk,N+mm]=float((1-n)*0.5*2*((1-u2i[0,mm])
57 /(2*N+1))*kernel_x2_chi2[kk,mm])
58
59 #ultima fila matriz incognitas. KRENK
60 for tt in range(N):
61     matriz_incognitas_2_inter[2*N,tt]=(math.sin(pi*N*(2*(tt+1)-1)/(2*N+1))/(
62 math.tan(0.5*pi*(2*(tt+1)-1)/(2*N+1))))
63     matriz_incognitas_2_inter[2*N,2*N-1-tt]=-(math.sin(pi*N*(2*(tt+1)-1)/(2*N
64 +1))/(math.tan(0.5*pi*(2*(tt+1)-1)/(2*N+1))))
65
66 #resolucion ecuacion matricial
67 inversa_2_inter=linalg.inv(matriz_incognitas_2_inter)
68 solucion_2_inter=np.dot(inversa_2_inter,matriz_terminos_ind_2_inter)
69 sigma_f3_num_2_inter[cont_iter,ii_cont]=solucion_2_inter[2*N,0] #tension en
70 la barrera. valor numerico
71
72 #funcion de dislocaciones
73 for iii in range(N):
74     funcion_dist_num_2_inter[iii,0]=omega1[0,iii]*solucion_2_inter[iii,0]
75     funcion_dist_num_2_inter[N+iii,0]=omega2[0,iii]*solucion_2_inter[N+iii,0]
76
77 return omega1,omega2,matriz_terminos_ind_2_inter,matriz_incognitas_2_inter,
78 funcion_dist_num_2_inter, kernel_x1_chi1, kernel_x1_chi2, kernel_x2_chi1,
79 kernel_x2_chi2, funcion_dist_num_2_inter, inversa_2_inter, solucion_2_inter,
80 sigma_f3_num_2_inter

```

## Cálculo de tensiones en el contorno - tensiones\_contorno.py

```

1 # KERNEL SIMETRICO CON DOS INTERVALOS
2 import numpy as np
3 import math

```

```

4 def tensiones_contorno2(inc_chi1,inc_chi2,ii_cont,cont_iter,N,ancho,alto,radio,A,
zeta,funcion_dist_num_2_inter,pi,tension_aplicada,ui,puntos_contorno,x1,x2,
chi1,chi2,c,vector_chi1_chi2):
5 #se definen las aristas discretizadas
6 arista_hor=np.linspace(0,ancho,num=puntos_contorno) #puntos del contorno en
los que se va a calcular las tensiones
7 arista_der=np.linspace(alto,0,num=puntos_contorno)
8 arista_entalla=np.linspace(radio,0,num=puntos_contorno)
9 #se almacenan en archivos de texto
10 np.savetxt('arista_hor.txt',arista_hor,fmt="%f",delimiter="\n")
11 np.savetxt('arista_der.txt',arista_der,fmt="%f",delimiter="\n")
12 np.savetxt('arista_entalla.txt',arista_entalla,fmt="%f",delimiter="\n")
13 #inicializacion de variables de tension que produce cada dislocacion de la
grieta en cada punto del contorno y arista
14 tension_puntos_sigma_yy=np.zeros((len(arista_hor),2*N))
15 tension_puntos_sigma_xx=np.zeros((len(arista_hor),2*N))
16 tension_puntos_sigma_xy=np.zeros((len(arista_hor),2*N))
17 tension_puntos_sigma_yy_der=np.zeros((len(arista_der),2*N))
18 tension_puntos_sigma_xx_der=np.zeros((len(arista_der),2*N))
19 tension_puntos_sigma_xy_der=np.zeros((len(arista_der),2*N))
20 tension_puntos_sigma_yy_entalla=np.zeros((len(arista_der),2*N))
21 tension_puntos_sigma_xx_entalla=np.zeros((len(arista_der),2*N))
22 tension_puntos_sigma_xy_entalla=np.zeros((len(arista_der),2*N))
23 #inicializacion de variables de tension total en cada punto del contorno
24 tension_yy_arista_sup=np.zeros((len(arista_hor)))
25 tension_xx_arista_sup=np.zeros((len(arista_hor)))
26 tension_xy_arista_sup=np.zeros((len(arista_hor)))
27 tension_yy_arista_der=np.zeros((len(arista_der)))
28 tension_xx_arista_der=np.zeros((len(arista_der)))
29 tension_xy_arista_der=np.zeros((len(arista_der)))
30 tension_yy_entalla=np.zeros((len(arista_der)))
31 tension_xx_entalla=np.zeros((len(arista_der)))
32 tension_xy_entalla=np.zeros((len(arista_der)))
33 distancia=np.zeros((len(arista_hor),2*N))
34
35 #bucle para calcular las tensiones que produce la grieta en la arista SUPERIOR
36 for cde in range(len(arista_hor)):
37     for efg in range(N):
38         y=alto
39         x=arista_hor[cde]
40         chi1_real=radio+chi1[0,efg]
41         chi1_sim_real=radio-chi1[0,efg]
42         chi2_real=radio+chi2[0,efg]
43         chi2_sim_real=radio-chi2[0,efg]
44         if x<(radio-chi2[0,0]): #primera parte de la arista
45             xmaschi1=chi1_sim_real-x
46             xmenoschi1=chi1_real-x
47             xmaschi2=chi2_sim_real-x
48             xmenoschi2=chi2_real-x
49         elif x>(radio+chi2[0,0]): #ultima parte
50             xmaschi1=x-chi1_sim_real
51             xmenoschi1=x-chi1_real
52             xmaschi2=x-chi2_sim_real
53             xmenoschi2=x-chi2_real
54         else: # parte de la arista que coincide con la grieta
55             xmaschi1=abs(x-chi1_sim_real)
56             xmenoschi1=abs(x-chi1_real)
57             xmaschi2=abs(x-chi2_sim_real)
58             xmenoschi2=abs(x-chi2_real)

```

```

59         #calculo de tension en cada punto segun Hills
60         tension_puntos_sigma_yy[cde,efg]=A*(funcion_dist_num_2_inter[efg,0])
        *(((xmenoschi1*(xmenoschi1**2 + 3*(y**2)))/((xmenoschi1**2 + y**2)**2))-((
        xmaschi1*(xmaschi1**2 + 3*(y**2)))/((xmaschi1**2 + y**2)**2)))*inc_chi1[0,efg]
        ]*(1/(pi**2))
61         tension_puntos_sigma_xx[cde,efg]=A*(funcion_dist_num_2_inter[efg,0])
        *(((xmenoschi1*((xmenoschi1**2)-(y**2)))/((xmenoschi1**2 + y**2)**2))-((
        xmaschi1*(xmaschi1**2 - y**2)/((xmaschi1**2 + y**2)**2)))*inc_chi1[0,efg]#
        *(1/(pi**2))
62         tension_puntos_sigma_xy[cde,efg]=A*(funcion_dist_num_2_inter[efg,0])
        *(((y*(xmaschi1**2 - y**2))/((xmenoschi1**2 + y**2)**2))-((y*(xmenoschi1**2 -
        y**2))/((xmaschi1**2 + y**2)**2)))*inc_chi1[0,efg]*(1/(pi**2))
63         tension_puntos_sigma_yy[cde,N+efg]=A*(funcion_dist_num_2_inter[N+efg
        ,0])*(((xmenoschi2*(xmenoschi2**2 + 3*(y**2)))/((xmenoschi2**2 + y**2)**2))-
        ((xmaschi2*(xmaschi2**2 + 3*(y**2)))/((xmaschi2**2 + y**2)**2)))*inc_chi2[0,
        efg]*(1/(pi**2))
64         tension_puntos_sigma_xx[cde,N+efg]=A*(funcion_dist_num_2_inter[N+efg
        ,0])*(((xmenoschi2*((xmenoschi2**2)-(y**2)))/((xmenoschi2**2 + y**2)**2))-((
        xmaschi2*(xmaschi2**2 - y**2)/((xmaschi2**2 + y**2)**2)))*inc_chi2[0,efg]#
        *(1/(pi**2))
65         tension_puntos_sigma_xy[cde,N+efg]=A*(funcion_dist_num_2_inter[N+efg
        ,0])*(((y*(xmaschi2**2 - y**2))/((xmenoschi2**2 + y**2)**2))-((y*(xmenoschi2
        **2 - y**2))/((xmaschi2**2 + y**2)**2)))*inc_chi2[0,efg]*(1/(pi**2))
66         #Bucle para sumar las tensiones que produce cada punto de la grieta en cada
        punto del contorno y sacar el total de tension en cada punto del contorno
67         for yy in range(len(arista_hor)):
68             tension_yy_arista_sup[yy]=np.sum(tension_puntos_sigma_yy[yy,:])
69             tension_xx_arista_sup[yy]=np.sum(tension_puntos_sigma_xx[yy,:])
70             tension_xy_arista_sup[yy]=np.sum(tension_puntos_sigma_xy[yy,:])
71
72         #bucle para calcular las tensiones que produce la grieta entera en cada punto de
        la arista derecha
73         for xx in range(len(arista_der)):
74             for ww in range(N):
75                 y=arista_der[xx]
76                 x=ancho
77                 chi1_real=radio+chi1[0,ww]
78                 chi1_sim_real=radio-chi1[0,ww]
79                 chi2_real=radio+chi2[0,ww]
80                 chi2_sim_real=radio-chi2[0,ww]
81                 xmaschi1=x-chi1_sim_real
82                 xmenoschi1=x-chi1_real
83                 xmaschi2=x-chi2_sim_real
84                 xmenoschi2=x-chi2_real
85                 #calculo de tension en cada punto segun Hills
86                 tension_puntos_sigma_yy_der[xx,ww]=A*(funcion_dist_num_2_inter[ww
        ,0])*(((xmenoschi1*(xmenoschi1**2 + 3*(y**2)))/((xmenoschi1**2 + y**2)**2))-((
        xmaschi1*(xmaschi1**2 + 3*(y**2)))/((xmaschi1**2 + y**2)**2)))*inc_chi1[0,ww]
        ]
87                 tension_puntos_sigma_xx_der[xx,ww]=A*(funcion_dist_num_2_inter[ww
        ,0])*(((xmenoschi1*(xmenoschi1**2 - y**2))/((xmenoschi1**2 + y**2)**2))-((
        xmaschi1*(xmaschi1**2 - y**2))/((xmaschi1**2 + y**2)**2)))*inc_chi1[0,ww]#
88                 tension_puntos_sigma_xy_der[xx,ww]=A*(funcion_dist_num_2_inter[ww
        ,0])*(((y*(xmaschi1**2 - y**2))/((xmenoschi1**2 + y**2)**2))-((y*(xmenoschi1
        **2 - y**2))/((xmaschi1**2 + y**2)**2)))*inc_chi1[0,ww]#
89                 tension_puntos_sigma_yy_der[xx,N+ww]=A*(funcion_dist_num_2_inter[N+ww
        ,0])*(((xmenoschi2*(xmenoschi2**2 + 3*(y**2)))/((xmenoschi2**2 + y**2)**2))-((
        xmaschi2*(xmaschi2**2 + 3*(y**2)))/((xmaschi2**2 + y**2)**2)))*inc_chi2[0,ww]
        ]#

```



```

90         tension_puntos_sigma_xx_der [xx,N+ww]=A*(funcion_dist_num_2_inter [N+ww
,0]*(((xmenoschi2*(xmenoschi2**2 - y**2))/((xmenoschi2**2 + y**2)**2))-((
xmaschi2*(xmaschi2**2 - y**2))/((xmaschi2**2 + y**2)**2))))*inc_chi2 [0,ww]#
91         tension_puntos_sigma_xy_der [xx,N+ww]=A*(funcion_dist_num_2_inter [N+ww
,0]*(((y*(xmaschi2**2 - y**2))/((xmenoschi2**2 + y**2)**2))-((y*(xmenoschi2
**2 - y**2))/((xmaschi2**2 + y**2)**2))))*inc_chi2 [0,ww]#
92
93 #bucle para calcular las tensiones que produce la grieta entera en cada punto de
la ENTALLA
94 for xx in range(len(arista_entalla)):
95     for ww in range(N):
96         y=arista_entalla [xx]
97         x=math.sqrt (radio**2 - y**2)
98         chi1_real=radio+chi1 [0,ww]
99         chi1_sim_real=radio-chi1 [0,ww]
100        chi2_real=radio+chi2 [0,ww]
101        chi2_sim_real=radio-chi2 [0,ww]
102        if x<(radio-chi2 [0,0]):
103            xmaschi1=chi1_sim_real-x
104            xmenoschi1=chi1_real-x
105            xmaschi2=chi2_sim_real-x
106            xmenoschi2=chi2_real-x
107        else:
108            xmaschi1=abs(x-chi1_sim_real)
109            xmenoschi1=abs(x-chi1_real)
110            xmaschi2=abs(x-chi2_sim_real)
111            xmenoschi2=abs(x-chi2_real)
112        #calculo de tension en cada punto segun Hills
113        tension_puntos_sigma_yy_entalla [xx,ww]=A*(funcion_dist_num_2_inter [ww
,0]*(((xmenoschi1*(xmenoschi1**2 + 3*(y**2)))/((xmenoschi1**2 + y**2)**2))-((
xmaschi1*(xmaschi1**2 + 3*(y**2)))/((xmaschi1**2 + y**2)**2))))*inc_chi1 [0,ww
]
114        tension_puntos_sigma_xx_entalla [xx,ww]=A*(funcion_dist_num_2_inter [ww
,0]*(((xmenoschi1*(xmenoschi1**2 - y**2))/((xmenoschi1**2 + y**2)**2))-((
xmaschi1*(xmaschi1**2 - y**2))/((xmaschi1**2 + y**2)**2))))*inc_chi1 [0,ww]#
115        tension_puntos_sigma_xy_entalla [xx,ww]=A*(funcion_dist_num_2_inter [ww
,0]*(((y*(xmaschi1**2 - y**2))/((xmenoschi1**2 + y**2)**2))-((y*(xmenoschi1
**2 - y**2))/((xmaschi1**2 + y**2)**2))))*inc_chi1 [0,ww]#
116        tension_puntos_sigma_yy_entalla [xx,N+ww]=A*(funcion_dist_num_2_inter [
N+ww,0]*(((xmenoschi2*(xmenoschi2**2 + 3*(y**2)))/((xmenoschi2**2 + y**2)**2)
)-((xmaschi2*(xmaschi2**2 + 3*(y**2)))/((xmaschi2**2 + y**2)**2))))*inc_chi2
[0,ww]#
117        tension_puntos_sigma_xx_entalla [xx,N+ww]=A*(funcion_dist_num_2_inter [
N+ww,0]*(((xmenoschi2*(xmenoschi2**2 - y**2))/((xmenoschi2**2 + y**2)**2))-((
xmaschi2*(xmaschi2**2 - y**2))/((xmaschi2**2 + y**2)**2))))*inc_chi2 [0,ww]#
118        tension_puntos_sigma_xy_entalla [xx,N+ww]=A*(funcion_dist_num_2_inter [
N+ww,0]*(((y*(xmaschi2**2 - y**2))/((xmenoschi2**2 + y**2)**2))-((y*(
xmenoschi2**2 - y**2))/((xmaschi2**2 + y**2)**2))))*inc_chi2 [0,ww]#
119        #Bucle para sumar las tensiones que produce cada punto de la grieta en cada
punto del contorno y sacar el total de tension en cada punto del contorno
120        for zz in range(len(arista_der)):
121            tension_yy_arista_der [zz]=np.sum (tension_puntos_sigma_yy_der [zz,:])
122            tension_xy_arista_der [zz]=np.sum (tension_puntos_sigma_xy_der [zz,:])
123            tension_yy_entalla [zz]=np.sum (tension_puntos_sigma_yy_entalla [zz,:])
124            tension_xx_entalla [zz]=np.sum (tension_puntos_sigma_xx_entalla [zz,:])
125            tension_xy_entalla [zz]=np.sum (tension_puntos_sigma_xy_entalla [zz,:])
126            tension_yy_arista_der2 [zz]=np.sum (tension_puntos_sigma_yy_der2 [zz,:])
127

```

```

128     return distancia, arista_hor, arista_der, arista_entalla, tension_yy_arista_sup,
        tension_xx_arista_sup, tension_xy_arista_sup, tension_xx_arista_der,
        tension_xy_arista_der, tension_yy_arista_der, tension_yy_arista_der2,
        tension_yy_entalla, tension_xy_entalla, tension_xx_entalla

```

### Almacenamiento de resultados modelo NR - guarda\_datos.py

```

1  import numpy as np
2
3  import os
4
5  def guarda_datos(vector_i, ii_cont, cont_iter, arista_hor, arista_der,
        tension_yy_entalla, tension_xy_entalla, tension_xx_entalla,
        tension_yy_arista_sup, tension_xx_arista_sup, tension_xy_arista_sup,
        tension_xy_arista_der, tension_xx_arista_der, tension_yy_arista_der,
        func_dist_teo, ui, vk, tensiones_linea_grieta, funcion_dist_num_2_inter,
        tension_yy_arista_der2):
6
7     valor1=((ii_cont+1)*2)-1 #posicion del grano que se esta analizando en cada
        momento
8     # tension yy arista superior
9     name1="ten_yy_sup_gr_"+str(valor1)+"_it_"+str(cont_iter)+".txt"
10    np.savetxt(name1, tension_yy_arista_sup, fmt= "%3.20f", delimiter = "\n")
11    # tension yy arista derecha
12    name2="ten_yy_der_gr_"+str(valor1)+"_it_"+str(cont_iter)+".txt"
13    np.savetxt(name2, tension_yy_arista_der, fmt= "%3.20f", delimiter = "\n")
14    # tension yy arista entalla
15    name7="ten_yy_entalla_gr_"+str(valor1)+"_it_"+str(cont_iter)+".txt"
16    np.savetxt(name7, tension_yy_entalla, fmt= "%3.20f", delimiter = "\n")
17    # tension xx arista superior
18    name3="ten_xx_sup_gr_"+str(valor1)+"_it_"+str(cont_iter)+".txt"
19    np.savetxt(name3, tension_xx_arista_sup, fmt= "%3.20f", delimiter = "\n")
20    # tension xx arista derecha
21    name4="ten_xx_der_gr_"+str(valor1)+"_it_"+str(cont_iter)+".txt"
22    np.savetxt(name4, tension_xx_arista_der, fmt= "%3.20f", delimiter = "\n")
23    # tension xx arista entalla
24    name8="ten_xx_entalla_gr_"+str(valor1)+"_it_"+str(cont_iter)+".txt"
25    np.savetxt(name8, tension_xx_entalla, fmt= "%3.20f", delimiter = "\n")
26    # tension xy arista superior
27    name5="ten_xy_sup_gr_"+str(valor1)+"_it_"+str(cont_iter)+".txt"
28    np.savetxt(name5, tension_xy_arista_sup, fmt= "%3.20f", delimiter = "\n")
29    # tension xy arista derecha
30    name6="ten_xy_der_gr_"+str(valor1)+"_it_"+str(cont_iter)+".txt"
31    np.savetxt(name6, tension_xy_arista_der, fmt= "%3.20f", delimiter = "\n")
32    # tension xy arista entalla
33    name9="ten_xy_entalla_gr_"+str(valor1)+"_it_"+str(cont_iter)+".txt"
34    np.savetxt(name9, tension_xy_entalla, fmt= "%3.20f", delimiter = "\n")
35    # gradiente tensiones en la grieta
36    np.savetxt('tensiones_linea_grieta.txt', tensiones_linea_grieta, fmt= "%3.20f"
        , delimiter = "\n")
37    #funcion de dislocaciones teorica
38    np.savetxt('funcion_dist_teorica.txt', func_dist_teo, fmt= "%f", delimiter = "
        \n")
39    #funcion de dislocaciones numerica
40    name10="funcion_dist_num_2_inter_gr_"+str(valor1)+"_it_"+str(cont_iter)+".txt"
41    np.savetxt(name10, funcion_dist_num_2_inter, fmt= "%f", delimiter = "\n")

```

## Modelo Escenario 1 en Abaqus para la primera iteración - placa\_aguj.py

```

1 from abaqus import *
2 from abaqusConstants import *
3 from caeModules import *
4 from driverUtils import executeOnCaeStartup
5 import load
6 import mesh
7 import optimization
8 import job
9 import sketch
10 import visualization
11 import xyPlot
12 import displayGroupOdbToolset as dgo
13 import connectorBehavior
14 import time
15 import subprocess
16 import os
17 from caeModules import *
18 from driverUtils import executeOnCaeStartup
19 import numpy as np
20 import math
21 session.viewports['Viewport: 1'].makeCurrent()
22 session.viewports['Viewport: 1'].maximize()
23 from caeModules import *
24 from driverUtils import executeOnCaeStartup
25 import os
26 wd=["C:\Users\Particular\..."] #carpeta donde se almacenan todos los archivos
27 #se almacena la ruta en un archivo de python
28 ruta_chdir1=['os.chdir(r"']
29 ruta_chdir3=['"')']
30 ruta_chdir1.extend(wd)
31 ruta_chdir1.extend(ruta_chdir3)
32 a24="".join(str(x) for x in ruta_chdir1)
33 text=open("ruta_chdir.py","w")
34 text.write(a24)
35 text.close()
36 execfile('ruta_chdir.py') # se ejecuta el archivo para establecer el directorio
    de trabajo de abaqus
37
38 #se importan todos los datos necesarios para la simulacion
39 young = float(np.loadtxt('young.txt')) #Modulo de young del material
40 poisson = float(np.loadtxt('poisson.txt')) #Coef de Poisson del material
41 tension_aplicada = np.loadtxt('tension_aplicada.txt') #Valor de la tension
    aplicada a la probeta en N
42 ancho = float(np.loadtxt('ancho.txt')) #Valor del ancho de la seccion estudiada
    en mm
43 alto = float(np.loadtxt('alto.txt')) #Valor del alto de la seccion estudiada en
    mm
44 radio = float(np.loadtxt('radio.txt')) #Valor de la entalla de la seccion
    estudiada en mm
45 N=int(np.loadtxt('N.txt'))
46 puntos_contorno=np.loadtxt('puntos_contorno.txt') #puntos de cada arista sobre
    los que se va a calcular los valores de tension y desplazamiento
47 puntos_grieta=np.loadtxt('puntos_grieta.txt')
48 puntos=[] #Lista en blanco que contendra las coordenadas de los puntos del path
49 semilla_general=float(np.loadtxt('semilla_general.txt'))
50 semilla_minima=float(np.loadtxt('semilla_minima.txt'))
51 semilla_media_inf=float(np.loadtxt('semilla_media_inf.txt'))
52 semilla_media_sup=float(np.loadtxt('semilla_media_sup.txt'))

```

```

53 ###
54 #####MODULO PART#####
55 from abaqus import *
56 from abaqusConstants import *
57 session.Viewport(name='Viewport: 1', origin=(0.0, 0.0), width=149.257690429688,
    height=52.9296875)
58 session.viewports['Viewport: 1'].makeCurrent()
59 session.viewports['Viewport: 1'].maximize()
60 from caeModules import *
61 from driverUtils import executeOnCaeStartup
62 executeOnCaeStartup()
63 session.viewports['Viewport: 1'].partDisplay.geometryOptions.setValues(
    referenceRepresentation=ON)
64 session.viewports['Viewport: 1'].setValues(displayedObject=None)
65 s = mdb.models['Model-1'].ConstrainedSketch(name='__profile__', sheetSize=200.0)
66 g, v, d, c = s.geometry, s.vertices, s.dimensions, s.constraints
67 s.setPrimaryObject(option=STANDALONE)
68 s.CircleByCenterPerimeter(center=(0.0, 0.0), point1=(radio, 0.0))
69 s.Line(point1=(0.0, radio), point2=(0.0, alto))
70 s.VerticalConstraint(entity=g[3], addUndoState=False)
71 s.Line(point1=(0.0, alto), point2=(ancho, alto))
72 s.HorizontalConstraint(entity=g[4], addUndoState=False)
73 s.PerpendicularConstraint(entity1=g[3], entity2=g[4], addUndoState=False)
74 s.Line(point1=(ancho, alto), point2=(ancho, 0.0))
75 s.VerticalConstraint(entity=g[5], addUndoState=False)
76 s.PerpendicularConstraint(entity1=g[4], entity2=g[5], addUndoState=False)
77 s.Line(point1=(ancho, 0.0), point2=(radio, 0.0))
78 s.HorizontalConstraint(entity=g[6], addUndoState=False)
79 s.PerpendicularConstraint(entity1=g[5], entity2=g[6], addUndoState=False)
80 s.autoTrimCurve(curve1=g[2], point1=(-radio, 0.0))
81 p = mdb.models['Model-1'].Part(name='Part-1', dimensionality=TWO_D_PLANAR, type=
    DEFORMABLE_BODY)
82 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
83 p.BaseShell(sketch=s)
84 s.unsetPrimaryObject()
85 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
86 ###
87 #####MODULO PROPERTY#####
88 session.viewports['Viewport: 1'].setValues(displayedObject=p)
89 del mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__']
90 session.viewports['Viewport: 1'].partDisplay.setValues(sectionAssignments=ON,
    engineeringFeatures=ON)
91 session.viewports['Viewport: 1'].partDisplay.geometryOptions.setValues(
    referenceRepresentation=OFF)
92 mdb.models['Model-1'].Material(name='Material-1')
93 mdb.models['Model-1'].materials['Material-1'].Elastic(table=((young, poisson), ))
94 mdb.models['Model-1'].HomogeneousSolidSection(name='Section-1', material='
    Material-1', thickness=None)
95 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
96 f = p.faces
97 faces = f.getSequenceFromMask(mask=('#1 ]', ), )
98 region = p.Set(faces=faces, name='Set-1')
99 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
100 p.SectionAssignment(region=region, sectionName='Section-1', offset=0.0,
    offsetType=MIDDLE_SURFACE, offsetField='', thicknessAssignment=FROM_SECTION)
101 ###
102 #####MODULO ASSEMBLY#####
103 a = mdb.models['Model-1'].rootAssembly
104 session.viewports['Viewport: 1'].setValues(displayedObject=a)

```

```

105 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.setValues(
    adaptiveMeshConstraints=ON, optimizationTasks=OFF, geometricRestrictions=OFF,
    stopConditions=OFF)
106 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.setValues(
    adaptiveMeshConstraints=OFF)
107 a.DatumCsysByDefault(CARTESIAN)
108 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
109 a.Instance(name='Part-1-1', part=p, dependent=ON)
110 ###
111 *****MODULO STEP*****
112 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.setValues(
    adaptiveMeshConstraints=ON)
113 #Se crea un step nuevo, se le da nombre, se indica el step previo y se indican el
    valor inicial y minimo de los incrementos de tiempo de calculo hasta
    convergencia de resultados
114 mdb.models['Model-1'].StaticStep(name='Step-1', previous='Initial', initialInc
    =0.01, minInc=1e-07)
115 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.setValues(step='Step-1')
116 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.setValues(loads=ON, bcs=ON,
    predefinedFields=ON, connectors=ON, adaptiveMeshConstraints=OFF)
117 ###
118 *****MODULO LOAD*****
119 #CONDICION DE SIMETRIA SOBRE LA ARISTA IZQUIERDA
120 e1 = a.instances['Part-1-1'].edges
121 edges1 = e1.getSequenceFromMask(mask=('[#10 ]', ), )
122 region = a.Set(edges=edges1, name='arista_izq')
123 mdb.models['Model-1'].XsymmBC(name='sim_arista_izq', createStepName='Step-1',
    region=region, localCsys=None)
124 #CONDICION DE SIMETRIA SOBRE LA ARISTA INFERIOR
125 e1 = a.instances['Part-1-1'].edges
126 edges1 = e1.getSequenceFromMask(mask=('[#2 ]', ), )
127 region = a.Set(edges=edges1, name='arista_inf')
128 mdb.models['Model-1'].YsymmBC(name='sim_arista_inf', createStepName='Step-1',
    region=region, localCsys=None)
129 #CARGA APLICADA SOBRE ARISTA SUPERIOR DE VALOR 1 CONSTANTE
130 s1 = a.instances['Part-1-1'].edges
131 side1Edges1 = s1.getSequenceFromMask(mask=('[#8 ]', ), )
132 region = a.Surface(side1Edges=side1Edges1, name='arista_sup_surf')
133 mdb.models['Model-1'].Pressure(name='Load-1', createStepName='Step-1', region=
    region, distributionType=UNIFORM, field='', magnitude=-1.0, amplitude=UNSET)
134 ###
135 *****MODULO MESH*****
136 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.setValues(mesh=ON, loads=OFF,
    bcs=OFF, predefinedFields=OFF, connectors=OFF)
137 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.meshOptions.setValues(
    meshTechnique=ON)
138 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
139 session.viewports['Viewport: 1'].setValues(displayedObject=p)
140 session.viewports['Viewport: 1'].partDisplay.setValues(sectionAssignments=OFF,
    engineeringFeatures=OFF, mesh=ON)
141 session.viewports['Viewport: 1'].partDisplay.meshOptions.setValues(meshTechnique=
    ON)
142 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
143 p.seedPart(size=semilla_general, deviationFactor=0.1, minSizeFactor=0.1)
144 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
145 #PARTICION ZONA ENTALLA
146 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
147 f, e, d = p.faces, p.edges, p.datums

```

```
148 t = p.MakeSketchTransform(sketchPlane=f[0], sketchPlaneSide=SIDE1, origin=(0.0,
    0.0, 0.0))
149 s = mdb.models['Model-1'].ConstrainedSketch(name='__profile__', sheetSize=21.54,
    gridSpacing=0.53, transform=t)
150 g, v, d1, c = s.geometry, s.vertices, s.dimensions, s.constraints
151 s.setPrimaryObject(option=SUPERIMPOSE)
152 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
153 p.projectReferencesOntoSketch(sketch=s, filter=COPLANAR_EDGES)
154 valorx=radio+((ancho-radio)/5.0)
155 s.rectangle(point1=(0.0, 0.0), point2=(valorx, valorx))
156 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
157 f = p.faces
158 pickedFaces = f.getSequenceFromMask(mask=('[#1 ]', ), )
159 e1, d2 = p.edges, p.datums
160 p.PartitionFaceBySketch(faces=pickedFaces, sketch=s)
161 s.unsetPrimaryObject()
162 del mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__']
163 #SEMILLA ARISTA IZQUIERDA DE LA PARTICION
164 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
165 e = p.edges
166 pickedEdges1 = e.getSequenceFromMask(mask=('[#4 ]', ), )
167 p.seedEdgeByBias(biasMethod=SINGLE, end1Edges=pickedEdges1, minSize=
    semilla_media_inf, maxSize=semilla_media_sup, constraint=FINER)
168 #SEMILLA ARISTA INFERIOR
169 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
170 e = p.edges
171 pickedEdges2 = e.getSequenceFromMask(mask=('[#10 ]', ), )
172 p.seedEdgeByBias(biasMethod=SINGLE, end2Edges=pickedEdges2, minSize=
    semilla_minima, maxSize=semilla_media_inf, constraint=FINER)
173 #semilla arista derecha DE LA PARTICION
174 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
175 e = p.edges
176 pickedEdges1 = e.getSequenceFromMask(mask=('[#1 ]', ), )
177 p.seedEdgeByBias(biasMethod=SINGLE, end1Edges=pickedEdges1, minSize=
    semilla_media_inf, maxSize=semilla_media_sup, constraint=FINER)
178 #semilla en la arista de la entalla
179 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
180 e = p.edges
181 pickedEdges1 = e.getSequenceFromMask(mask=('[#8 ]', ), )
182 p.seedEdgeByBias(biasMethod=SINGLE, end1Edges=pickedEdges1, minSize=
    semilla_minima, maxSize=semilla_media_inf, constraint=FINER)
183 #semilla ARISTA SUPERIOR DE LA PARTICION
184 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
185 e = p.edges
186 pickedEdges = e.getSequenceFromMask(mask=('[#2 ]', ), )
187 p.seedEdgeBySize(edges=pickedEdges, size=semilla_media_sup, deviationFactor=0.1,
    minSizeFactor=0.1, constraint=FINER)
188 session.viewports['Viewport: 1'].partDisplay.meshOptions.setValues(seeds=ON)
189 #zona grande elementos TRI free
190 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
191 f = p.faces
192 pickedRegions = f.getSequenceFromMask(mask=('[#2 ]', ), )
193 p.setMeshControls(regions=pickedRegions, elemShape=TRI, technique=FREE)
194 #zona entalla elementos Quad-dominated structured
195 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.setValues(mesh=ON,
    optimizationTasks=OFF, geometricRestrictions=OFF, stopConditions=OFF)
196 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.meshOptions.setValues(
    meshTechnique=ON, seeds=ON)
197 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.meshOptions.setValues(
    meshTechnique=ON, seeds=ON)
198 meshTechnique=ON, seeds=ON)
199 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
```

```

200 f = p.faces
201 pickedRegions = f.getSequenceFromMask(mask=('[#1 ]', ), )
202 p.setMeshControls(regions=pickedRegions, elemShape=TRI, technique=FREE)#
    STRUCTURED)
203 #semilla arista inferior zona grande
204 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
205 e = p.edges
206 pickedEdges2 = e.getSequenceFromMask(mask=('[#20 ]', ), )
207 p.seedEdgeByBias(biasMethod=SINGLE, end2Edges=pickedEdges2, minSize=
    semilla_media_sup, maxSize=semilla_general, constraint=FINER)
208 #semilla arista izquierda arista izquierda zona grande
209 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
210 e = p.edges
211 pickedEdges1 = e.getSequenceFromMask(mask=('[#100 ]', ), )
212 p.seedEdgeByBias(biasMethod=SINGLE, end1Edges=pickedEdges1, minSize=
    semilla_media_sup, maxSize=semilla_general, constraint=FINER)
213 ***ELEMENTOS QUAD DOMINATED EN ZONA ENTALLA LINEALES Y CON INTEGRACION REDUCIDA
214 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
215 f = p.faces
216 pickedRegions = f.getSequenceFromMask(mask=('[#1 ]', ), )
217 p.setMeshControls(regions=pickedRegions, elemShape=QUAD_DOMINATED)
218 elemType1 = mesh.ElemType(elemCode=CPE4, elemLibrary=STANDARD)
219 elemType2 = mesh.ElemType(elemCode=CPE3, elemLibrary=STANDARD)
220 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
221 f = p.faces
222 faces = f.getSequenceFromMask(mask=('[#1 ]', ), )
223 pickedRegions =(faces, )
224 p.setElementType(regions=pickedRegions, elemTypes=(elemType1, elemType2))
225 #ELEMENTOS TRI LINEALES CON INTEGRACION REDUCIDA EN ZONA GRANDE
226 elemType1 = mesh.ElemType(elemCode=CPE4R, elemLibrary=STANDARD)
227 elemType2 = mesh.ElemType(elemCode=CPE3, elemLibrary=STANDARD,
    secondOrderAccuracy=OFF, distortionControl=DEFAULT)
228
229 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
230 f = p.faces
231 faces = f.getSequenceFromMask(mask=('[#2 ]', ), )
232 pickedRegions =(faces, )
233 p.setElementType(regions=pickedRegions, elemTypes=(elemType1, elemType2))
234 #GENERAR MALLA
235 p.generateMesh()
236 ###
237 *****MODULO JOB*****
238 a = mdb.models['Model-1'].rootAssembly
239 session.viewports['Viewport: 1'].setValues(displayedObject=a)
240 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.setValues(mesh=OFF)
241 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.meshOptions.setValues(
    meshTechnique=OFF)
242
243 mdb.Job(name='Job-1', model='Model-1', description='', type=ANALYSIS,
    atTime=None, waitMinutes=0, waitHours=0, queue=None, memory=90,
    memoryUnits=PERCENTAGE, getMemoryFromAnalysis=True,
    explicitPrecision=SINGLE, nodalOutputPrecision=SINGLE, echoPrint=OFF,
    modelPrint=OFF, contactPrint=OFF, historyPrint=OFF, userSubroutine='',
    scratch='', multiprocessingMode=DEFAULT, numCpus=1, numGPUs=0)
244
245 mdb.jobs['Job-1'].submit(consistencyChecking=OFF)
246
247 mdb.jobs['Job-1'].waitForCompletion()
248
249 ###
250 *****MODULO VISUALIZATION*****
251
252 rutaJob1=["o3 = session.openOdb(name='"]
253
254 rutaJob3=["\Job-1.odb'")"]
255
256 rutaJob1.extend(wd)

```



```

256 #se anade lista 3 a lista 1 que ya contiene a puntos
257 rutajob1.extend(rutajob3)
258 #ahora se extrae el contenido de lista1 como cadena de caracteres
259 a13="".join(str(x) for x in rutajob1)
260 text=open("rutajob.py","w")
261 text.write(a13)
262 text.close()
263 execfile('rutajob.py')
264 #se abre el archivo .odb para el postproceso
265 session.viewports['Viewport: 1'].setValues(displayedObject=o3)
266 session.viewports['Viewport: 1'].odbDisplay.display.setValues(plotState=(
267     CONTOURS_ON_UNDEF, ))
268 #se visualizan las tensiones yy en el componente
269 session.viewports['Viewport: 1'].odbDisplay.setPrimaryVariable(
270     variableLabel='S', outputPosition=INTEGRATION_POINT, refinement=(COMPONENT,
271     'S22'), )
272 #path en la linea de la grieta
273 # se genera un archivo de python para que se ejecute como orden para establecer
    un path
274 # con los puntos que se generan en el siguiente bucle
275 puntos=[]
276 valor=ancho-radio
277 incremento=valor/puntos_grieta
278 vector=np.arange(radius, ancho, incremento)
279 for l in range(len(vector)):
280     if l==len(vector)-1:
281         inc=vector[l]#
282         texto=(inc,0,0)
283         puntos.append(texto)
284     else:
285         inc=vector[l]#
286         texto=(inc,0,0)
287         puntos.append(texto)
288         puntos.append(',')
289 #Se va a escribir la sentencia para definir el path. Se divide en tres partes
    lista 1 + puntos + lista3
290 lista1=["session.Path(name='Path-Grieta', type=POINT_LIST, expression=(
291 lista3=[")")"]
292 #se anade puntos a lista 1
293 lista1.extend(puntos)
294 #se anade lista 3 a lista 1 que ya contiene a puntos
295 lista1.extend(lista3)
296 #ahora se extrae el contenido de lista1 como cadena de caracteres
297 aaa="".join(str(x) for x in lista1)
298 #Se crea un archivo extension py y se copia la cadena de caracteres que es la
    sentencia del path completa
299 text=open("script_path.py","w")
300 text.write(aaa)
301 text.close()
302 execfile('script_path.py')
303 pth = session.paths['Path-Grieta']
304 #se muestran las tensiones principales en la direccion axial
305 session.viewports['Viewport: 1'].odbDisplay.setPrimaryVariable(variableLabel='S',
    outputPosition=INTEGRATION_POINT, refinement=(COMPONENT, 'S22'))
306 #se crea un archivo interno de abaqus con los valores de tension correspondiente
    a cada punto del path
307 session.XYDataFromPath(name='XYData-S22_lineagrieta', path=pth,
    includeIntersections=False, pathStyle=PATH_POINTS, numIntervals=10, shape=
    UNDEFORMED, labelType=TRUE_DISTANCE)

```



```

308 x0 = session.xyDataObjects['XYData-S22_lineagrieta']
309 #estos valores de tension y los puntos del path se exportan como archivo al
    directorio principal
310 session.writeXYReport(fileName='path_grieta.txt', xyData=(x0, ))

```

---

### Modelo Escenario 1 en Abaqus para el resto de iteraciones - placa\_aguj\_iter.py

---

```

1 from abaqus import *
2 from abaqusConstants import *
3 from caeModules import *
4 from driverUtils import executeOnCaeStartup
5 import load
6 import mesh
7 import optimization
8 import job
9 import sketch
10 import visualization
11 import xyPlot
12 import displayGroupOdbToolset as dgo
13 import connectorBehavior
14 import time
15 import subprocess
16 import os
17 from caeModules import *
18 from driverUtils import executeOnCaeStartup
19 import numpy as np
20 import math
21 session.viewports['Viewport: 1'].makeCurrent()
22 session.viewports['Viewport: 1'].maximize()
23 from caeModules import *
24 from driverUtils import executeOnCaeStartup
25 import os
26 wd=["C:\Users\Particular\..."]#carpeta donde se almacenan todos los archivos
27 #se almacena la ruta en un archivo de python
28 ruta_chdir1=['os.chdir(r"')]
29 ruta_chdir3=['"')']
30 ruta_chdir1.extend(wd)
31 ruta_chdir1.extend(ruta_chdir3)
32 a24="".join(str(x) for x in ruta_chdir1)
33 text=open("ruta_chdir.py","w")
34 text.write(a24)
35 text.close()
36 execfile('ruta_chdir.py') # se ejecuta el archivo para establecer el directorio
    de trabajo de abaqus
37 #se importan todos los datos necesarios para la simulacion
38 young = float(np.loadtxt('young.txt')) #Modulo de young del material
39 poisson = float(np.loadtxt('poisson.txt')) #Coef de Poisson del material
40 tension_aplicada = np.loadtxt('tension_aplicada.txt') #Valor de la tension
    aplicada a la probeta en N
41 ancho = float(np.loadtxt('ancho.txt')) #Valor del ancho de la seccion estudiada
    en mm
42 alto = float(np.loadtxt('alto.txt')) #Valor del alto de la seccion estudiada en
    mm
43 radio = float(np.loadtxt('radio.txt')) #Valor de la entalla de la seccion
    estudiada en mm
44 N=int(np.loadtxt('N.txt'))
45 puntos_contorno=np.loadtxt('puntos_contorno.txt') #puntos de cada arista sobre
    los que se va a calcular los valores de tension y desplazamiento

```

```

46 puntos_grieta=np.loadtxt('puntos_grieta.txt')
47 puntos=[] #Lista en blanco que contendra las coordenadas de los puntos del path
48 semilla_general=float(np.loadtxt('semilla_general.txt'))
49 semilla_minima=float(np.loadtxt('semilla_minima.txt'))
50 semilla_media_inf=float(np.loadtxt('semilla_media_inf.txt'))
51 semilla_media_sup=float(np.loadtxt('semilla_media_sup.txt'))
52 ###
53 *****MODULO PART*****
54 from abaqus import *
55 from abaqusConstants import *
56 session.Viewport(name='Viewport: 1', origin=(0.0, 0.0), width=149.257690429688,
    height=52.9296875)
57 session.viewports['Viewport: 1'].makeCurrent()
58 session.viewports['Viewport: 1'].maximize()
59 from caeModules import *
60 from driverUtils import executeOnCaeStartup
61 executeOnCaeStartup()
62 session.viewports['Viewport: 1'].partDisplay.geometryOptions.setValues(
    referenceRepresentation=ON)
63 session.viewports['Viewport: 1'].setValues(displayedObject=None)
64 s = mdb.models['Model-1'].ConstrainedSketch(name='__profile__', sheetSize=200.0)
65 g, v, d, c = s.geometry, s.vertices, s.dimensions, s.constraints
66 s.setPrimaryObject(option=STANDALONE)
67 s.CircleByCenterPerimeter(center=(0.0, 0.0), point1=(radio, 0.0))
68 s.Line(point1=(0.0, radio), point2=(0.0, alto))
69 s.VerticalConstraint(entity=g[3], addUndoState=False)
70 s.Line(point1=(0.0, alto), point2=(ancho, alto))
71 s.HorizontalConstraint(entity=g[4], addUndoState=False)
72 s.PerpendicularConstraint(entity1=g[3], entity2=g[4], addUndoState=False)
73 s.Line(point1=(ancho, alto), point2=(ancho, 0.0))
74 s.VerticalConstraint(entity=g[5], addUndoState=False)
75 s.PerpendicularConstraint(entity1=g[4], entity2=g[5], addUndoState=False)
76 s.Line(point1=(ancho, 0.0), point2=(radio, 0.0))
77 s.HorizontalConstraint(entity=g[6], addUndoState=False)
78 s.PerpendicularConstraint(entity1=g[5], entity2=g[6], addUndoState=False)
79 s.autoTrimCurve(curve1=g[2], point1=(-radio, 0.0))
80 p = mdb.models['Model-1'].Part(name='Part-1', dimensionality=TWO_D_PLANAR, type=
    DEFORMABLE_BODY)
81 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
82 p.BaseShell(sketch=s)
83 s.unsetPrimaryObject()
84 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
85 ###
86 *****MODULO PROPERTY*****
87 session.viewports['Viewport: 1'].setValues(displayedObject=p)
88 del mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__']
89 session.viewports['Viewport: 1'].partDisplay.setValues(sectionAssignments=ON,
    engineeringFeatures=ON)
90 session.viewports['Viewport: 1'].partDisplay.geometryOptions.setValues(
    referenceRepresentation=OFF)
91 mdb.models['Model-1'].Material(name='Material-1')
92 mdb.models['Model-1'].materials['Material-1'].Elastic(table=((young, poisson), ))
93 mdb.models['Model-1'].HomogeneousSolidSection(name='Section-1', material='
    Material-1', thickness=None)
94 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
95 f = p.faces
96 faces = f.getSequenceFromMask(mask=('#1 ]', ), )
97 region = p.Set(faces=faces, name='Set-1')
98 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']

```

```

99 p.SectionAssignment(region=region, sectionName='Section-1', offset=0.0,
    offsetType=MIDDLE_SURFACE, offsetField='', thicknessAssignment=FROM_SECTION)
100 #%%
101 *****MODULO ASSEMBLY*****
102 a = mdb.models['Model-1'].rootAssembly
103 session.viewports['Viewport: 1'].setValues(displayedObject=a)
104 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.setValues(
    adaptiveMeshConstraints=ON, optimizationTasks=OFF, geometricRestrictions=OFF,
    stopConditions=OFF)
105 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.setValues(
    adaptiveMeshConstraints=OFF)
106
107 a.DatumCsysByDefault(CARTESIAN)
108 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
109 a.Instance(name='Part-1-1', part=p, dependent=ON)
110 #%%
111 *****MODULO STEP*****
112 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.setValues(
    adaptiveMeshConstraints=ON)
113 #Se crea un step nuevo, se le da nombre, se indica el step previo y se indican el
    valor inicial y minimo de los incrementos de tiempo de calculo hasta
    convergencia de resultados
114 mdb.models['Model-1'].StaticStep(name='Step-1', previous='Initial', initialInc
    =0.01, minInc=1e-07)
115 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.setValues(step='Step-1')
116 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.setValues(loads=ON, bcs=ON,
    predefinedFields=ON, connectors=ON, adaptiveMeshConstraints=OFF)
117 #%%
118 *****MODULO LOAD*****
119 #CONDICION DE SIMETRIA SOBRE LA ARISTA IZQUIERDA
120 e1 = a.instances['Part-1-1'].edges
121 edges1 = e1.getSequenceFromMask(mask=('[#10 ]', ), )
122 region = a.Set(edges=edges1, name='arista_izq')
123 mdb.models['Model-1'].XsymmBC(name='sim_arista_izq', createStepName='Step-1',
    region=region, localCsys=None)
124 #CONDICION DE SIMETRIA SOBRE LA ARISTA INFERIOR
125 e1 = a.instances['Part-1-1'].edges
126 edges1 = e1.getSequenceFromMask(mask=('[#2 ]', ), )
127 region = a.Set(edges=edges1, name='arista_inf')
128 mdb.models['Model-1'].YsymmBC(name='sim_arista_inf', createStepName='Step-1',
    region=region, localCsys=None)
129 #CARGA APLICADA SOBRE ARISTA SUPERIOR MEDIANTE SUBROUTINA
130 s1 = a.instances['Part-1-1'].edges
131 side1Edges1 = s1.getSequenceFromMask(mask=('[#8 ]', ), )
132 region = a.Surface(side1Edges=side1Edges1, name='arista_sup')
133 mdb.models['Model-1'].SurfaceTraction(name='carga_arista_sup', createStepName='
    Step-1', region=region, magnitude=1.0, directionVector=((0.0, 0.0, 0.0),
    (0.0, 1.0, 0.0)), distributionType=USER_DEFINED, field='', localCsys=None,
    traction=GENERAL, resultant=ON)
134 #CARGA APLICADA SOBRE ARISTA DERECHA MEDIANTE SUBROUTINA
135 s1 = a.instances['Part-1-1'].edges
136 side1Edges1 = s1.getSequenceFromMask(mask=('[#4 ]', ), )
137 region = a.Surface(side1Edges=side1Edges1, name='arista_der')
138 mdb.models['Model-1'].SurfaceTraction(name='carga_arista_der', createStepName='
    Step-1', region=region, magnitude=1.0, directionVector=((0.0, 0.0, 0.0),
    (1.0, 0.0, 0.0)), distributionType=USER_DEFINED, field='', localCsys=None,
    traction=GENERAL, resultant=ON)
139 #CARGA APLICADA SOBRE ARISTA ENTALLA MEDIANTE SUBROUTINA
140 a1 = mdb.models['Model-1'].rootAssembly

```

```

141 s1 = a1.instances['Part-1-1'].edges
142 side1Edges1 = s1.getSequenceFromMask(mask=('[#1 ]', ), )
143 region = a1.Surface(side1Edges=side1Edges1, name='arista_ent')
144 mdb.models['Model-1'].SurfaceTraction(name='carga_arista_ent', createStepName='
    Step-1', region=region, magnitude=1.0, directionVector=((0.0, 0.0, 0.0),
    (-1.0, -1.0, 0.0)), distributionType=USER_DEFINED, field='', localCsys=None,
    traction=GENERAL, resultant=ON)
145 ###
146 #*****MODULO MESH*****
147 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.setValues(mesh=ON, loads=OFF,
    bcs=OFF, predefinedFields=OFF, connectors=OFF)
148 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.meshOptions.setValues(
    meshTechnique=ON)
149 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
150 session.viewports['Viewport: 1'].setValues(displayedObject=p)
151 session.viewports['Viewport: 1'].partDisplay.setValues(sectionAssignments=OFF,
    engineeringFeatures=OFF, mesh=ON)
152 session.viewports['Viewport: 1'].partDisplay.meshOptions.setValues(meshTechnique=
    ON)
153 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
154 p.seedPart(size=semilla_general, deviationFactor=0.1, minSizeFactor=0.1)
155 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
156 #PARTICION ZONA ENTALLA
157 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
158 f, e, d = p.faces, p.edges, p.datums
159 t = p.MakeSketchTransform(sketchPlane=f[0], sketchPlaneSide=SIDE1, origin=(0.0,
    0.0, 0.0))
160 s = mdb.models['Model-1'].ConstrainedSketch(name='__profile__', sheetSize=21.54,
    gridSpacing=0.53, transform=t)
161 g, v, d1, c = s.geometry, s.vertices, s.dimensions, s.constraints
162 s.setPrimaryObject(option=SUPERIMPOSE)
163 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
164 p.projectReferencesOntoSketch(sketch=s, filter=COPLANAR_EDGES)
165 valorx=radio+((ancho-radio)/5.0)
166 s.rectangle(point1=(0.0, 0.0), point2=(valorx, valorx))
167 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
168 f = p.faces
169 pickedFaces = f.getSequenceFromMask(mask=('[#1 ]', ), )
170 e1, d2 = p.edges, p.datums
171 p.PartitionFaceBySketch(faces=pickedFaces, sketch=s)
172 s.unsetPrimaryObject()
173 del mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__']
174 #SEMILLA ARISTA IZQUIERDA DE LA PARTICION
175 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
176 e = p.edges
177 pickedEdges1 = e.getSequenceFromMask(mask=('[#4 ]', ), )
178 p.seedEdgeByBias(biasMethod=SINGLE, end1Edges=pickedEdges1, minSize=
    semilla_media_inf, maxSize=semilla_media_sup, constraint=FINER)
179 #SEMILLA ARISTA INFERIOR
180 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
181 e = p.edges
182 pickedEdges2 = e.getSequenceFromMask(mask=('[#10 ]', ), )
183 p.seedEdgeByBias(biasMethod=SINGLE, end2Edges=pickedEdges2, minSize=
    semilla_minima, maxSize=semilla_media_inf, constraint=FINER)
184 #semilla arista derecha DE LA PARTICION
185 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
186 e = p.edges
187 pickedEdges1 = e.getSequenceFromMask(mask=('[#1 ]', ), )

```

```

188 p.seedEdgeByBias(biasMethod=SINGLE, end1Edges=pickedEdges1, minSize=
    semilla_media_inf, maxSize=semilla_media_sup, constraint=FINER)
189 #semilla en la arista de la entalla
190 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
191 e = p.edges
192 pickedEdges1 = e.getSequenceFromMask(mask=('[#8 ]', ), )
193 p.seedEdgeByBias(biasMethod=SINGLE, end1Edges=pickedEdges1, minSize=
    semilla_minima, maxSize=semilla_media_inf, constraint=FINER)
194 #semilla ARISTA SUPERIOR DE LA PARTICION
195 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
196 e = p.edges
197 pickedEdges = e.getSequenceFromMask(mask=('[#2 ]', ), )
198 p.seedEdgeBySize(edges=pickedEdges, size=semilla_media_sup, deviationFactor=0.1,
    minSizeFactor=0.1, constraint=FINER)
199 session.viewports['Viewport: 1'].partDisplay.meshOptions.setValues(seeds=ON)
200 #zona grande elementos TRI free
201 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
202 f = p.faces
203 pickedRegions = f.getSequenceFromMask(mask=('[#2 ]', ), )
204 p.setMeshControls(regions=pickedRegions, elemShape=TRI, technique=FREE)
205 #zona entalla elementos Quad-dominated structured
206 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.setValues(mesh=ON,
    optimizationTasks=OFF, geometricRestrictions=OFF, stopConditions=OFF)
207 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.meshOptions.setValues(
    meshTechnique=ON, seeds=ON)
210 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
211 f = p.faces
212 pickedRegions = f.getSequenceFromMask(mask=('[#1 ]', ), )
213 p.setMeshControls(regions=pickedRegions, elemShape=TRI, technique=FREE)#
    STRUCTURED)
214 #semilla arista inferior zona grande
215 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
216 e = p.edges
217 pickedEdges2 = e.getSequenceFromMask(mask=('[#20 ]', ), )
218 p.seedEdgeByBias(biasMethod=SINGLE, end2Edges=pickedEdges2, minSize=
    semilla_media_sup, maxSize=semilla_general, constraint=FINER)
219 #semilla arista izquierda arista izquierda zona grande
220 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
221 e = p.edges
222 pickedEdges1 = e.getSequenceFromMask(mask=('[#100 ]', ), )
223 p.seedEdgeByBias(biasMethod=SINGLE, end1Edges=pickedEdges1, minSize=
    semilla_media_sup, maxSize=semilla_general, constraint=FINER)
224 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
225 f = p.faces
226 pickedRegions = f.getSequenceFromMask(mask=('[#1 ]', ), )
227 p.setMeshControls(regions=pickedRegions, elemShape=QUAD_DOMINATED)
228 elemType1 = mesh.ElemType(elemCode=CPE4, elemLibrary=STANDARD)
229 elemType2 = mesh.ElemType(elemCode=CPE3, elemLibrary=STANDARD)
230 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
231 f = p.faces
232 faces = f.getSequenceFromMask(mask=('[#1 ]', ), )
233 pickedRegions =(faces, )
234 p.setElementType(regions=pickedRegions, elemTypes=(elemType1, elemType2))
235 #ELEMENTOS TRI LINEALES CON INTEGRACION REDUCIDA EN ZONA GRANDE
236 elemType1 = mesh.ElemType(elemCode=CPE4R, elemLibrary=STANDARD)
237 elemType2 = mesh.ElemType(elemCode=CPE3, elemLibrary=STANDARD,
    secondOrderAccuracy=OFF, distortionControl=DEFAULT)
238
239 p = mdb.models['Model-1'].parts['Part-1']
240 f = p.faces

```

```

241 faces = f.getSequenceFromMask(mask=('[#2 ]', ), )
242 pickedRegions =(faces, )
243 p.setElementType(regions=pickedRegions, elemTypes=(elemType1, elemType2))
244 #GENERAR MALLA
245 p.generateMesh()
246 ###
247 #*****MODULO JOB*****
248 a = mdb.models['Model-1'].rootAssembly
249 session.viewports['Viewport: 1'].setValues(displayedObject=a)
250 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.setValues(mesh=OFF)
251 session.viewports['Viewport: 1'].assemblyDisplay.meshOptions.setValues(
252     meshTechnique=OFF)
253 #SE GUARDA LA ORDEN DE EJECUCION DE LA SIMULACION CON SUBROUTINA EN UN
254 # ARCHIVO EJECUTABLE DE PYTHON
255 ruta_subrutina1=["mdb.Job(name='Job-1-iter', model='Model-1', description='',
    type=ANALYSIS, atTime=None, waitMinutes=0, waitHours=0, queue=None, memory
    =90, memoryUnits=PERCENTAGE, getMemoryFromAnalysis=True, explicitPrecision=
    SINGLE, nodalOutputPrecision=SINGLE, echoPrint=OFF, modelPrint=OFF,
    contactPrint=OFF, historyPrint=OFF, userSubroutine='')
256 ruta_subrutina3=["\UTRACLOAD.for', scratch='', multiprocessingMode=DEFAULT,
    numCpus=1, numGPUs=0)"]
257 ruta_subrutina1.extend(wd)
258 ruta_subrutina1.extend(ruta_subrutina3)
259 a24="".join(str(x) for x in ruta_subrutina1)
260 text=open("rutasubrutina.py","w")
261 text.write(a24)
262 text.close()
263 execfile('rutasubrutina.py') # SE EJECUTA LA SIMULACION MEDIANTE EL ARCHIVO
    PYTHON
264 mdb.jobs['Job-1-iter'].submit(consistencyChecking=OFF)
265 mdb.jobs['Job-1-iter'].waitForCompletion()
266 ###
267 #*****MODULO VISUALIZATION*****
268 rutajob1=["o3 = session.openOdb(name='')"]
269 rutajob3=["\Job-1-iter.odb'"]
270 rutajob1.extend(wd)
271 #se anade lista 3 a lista 1 que ya contiene a puntos
272 rutajob1.extend(rutajob3)
273 #ahora se extrae el contenido de lista1 como cadena de caracteres
274 a13="".join(str(x) for x in rutajob1)
275 text=open("rutajob.py","w")
276 text.write(a13)
277 text.close()
278 execfile('rutajob.py')
279 #se abre el archivo .odb para el postproceso
280 session.viewports['Viewport: 1'].setValues(displayedObject=o3)
281 session.viewports['Viewport: 1'].odbDisplay.display.setValues(plotState=(
282     CONTOURS_ON_UNDEF, ))
283 session.viewports['Viewport: 1'].odbDisplay.setPrimaryVariable(
284     variableLabel='S', outputPosition=INTEGRATION_POINT, refinement=(COMPONENT,
285     'S22'), )
286 #path en la linea de la grieta
287 # se genera un archivo de python para que se ejecute como orden para establecer
    un path
288 # con los puntos que se generan en el siguiente bucle
289 puntos=[]
290 valor=ancho-radio
291 incremento=valor/puntos_grieta
292 vector=np.arange(radius, ancho, incremento)

```

```

293 for l in range(len(vector)):
294     if l==len(vector)-1:
295         inc=vector[l]#
296         texto=(inc,0,0)
297         puntos.append(texto)
298     else:
299         inc=vector[l]#
300         texto=(inc,0,0)
301         puntos.append(texto)
302         puntos.append(',')
303 #Se va a escribir la sentencia para definir el path. Se divide en tres partes
304     lista 1 + puntos + lista3
304 lista1=["session.Path(name='Path-Grieta', type=POINT_LIST, expression="]
305 lista3=["")"]
306 #se anade puntos a lista 1
307 lista1.extend(puntos)
308 #se anade lista 3 a lista 1 que ya contiene a puntos
309 lista1.extend(lista3)
310 #ahora se extrae el contenido de lista1 como cadena de caracteres
311 aaa="".join(str(x) for x in lista1)
312 #Se crea un archivo extension py y se copia la cadena de caracteres que es la
313     sentencia del path completa
313 text=open("script_path.py","w")
314 text.write(aaa)
315 text.close()
316 execfile('script_path.py')
317 pth = session.paths['Path-Grieta']
318 #se muestran las tensiones principales en la direccion axial
319 session.viewports['Viewport: 1'].odbDisplay.setPrimaryVariable(variableLabel='S',
320     outputPosition=INTEGRATION_POINT, refinement=(COMPONENT, 'S22'))
320 #se crea un archivo interno de abaqus con los valores de tension correspondiente
321     a cada punto del path
321 session.XYDataFromPath(name='XYData-S22_lineagrieta', path=pth,
322     includeIntersections=False, pathStyle=PATH_POINTS, numIntervals=10, shape=
323     UNDEFORMED, labelType=TRUE_DISTANCE)
322 x0 = session.xyDataObjects['XYData-S22_lineagrieta']
323 #estos valores de tension y los puntos del path se exportan como archivo al
324     directorio principal
324 session.writeXYReport(fileName='path_grieta.txt', xyData=(x0, ))

```

---

#### Subrutina de Abaqus *UTRACLOAD* - UTRACLOAD.for

```

1     SUBROUTINE UTRACLOAD (ALPHA , T_USER , KSTEP , KINC , TIME , NOEL , NPT ,
2     COORDS , DIRCOS , JLTP , SNAME)
3     INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
4     DIMENSION T_USER (3) , TIME (2) , COORDS (3) , DIRCOS (3,3)
5     CHARACTER*80 SNAME
6     CHARACTER (200) :: filename , jobdir
7     ! inicializacion variables de la subrutina
8     REAL :: alto , X , Y , ancho , alfaxder , alfayder , alfader , alfaxsup
9     REAL :: alfaysup , alfasup , phi , alfaxent , alfayent , alfaent
10    INTEGER :: puntos_contorno , lenjobdir , i , j
11    REAL , ALLOCATABLE :: arista_sup (: , : ) , arista_der (: , : ) , arista_ent (: , : )
12    REAL , ALLOCATABLE :: cargaS11derecha (: , : ) , cargaS12derecha (: , : )
13    REAL , ALLOCATABLE :: cargaS22superior (: , : ) , cargaS12superior (: , : )
14    REAL , ALLOCATABLE :: S11ent (: , : ) , S12ent (: , : ) , S22ent (: , : )
15    REAL , ALLOCATABLE :: ten_ini_yy_sup (: , : )
16    ! PROCESO DE LECTURA DE ARCHIVO Y ASIGNACION A VARIABLE

```



```

17      !semi-alto de la geometria
18      call GETOUTDIR(jobdir,lenjobdir)
19      filename=''
20      filename(1:lenjobdir)=jobdir(1:lenjobdir)
21      filename(lenjobdir+1:lenjobdir+9)='\alto.txt'
22      open(unit=18,file=filename(1:lenjobdir+9),status='old')
23      read(18,*) alto
24      close(18)
25      !semi-ancho de la geometria
26      call GETOUTDIR(jobdir,lenjobdir)
27      filename=''
28      filename(1:lenjobdir)=jobdir(1:lenjobdir)
29      filename(lenjobdir+1:lenjobdir+10)='\ancho.txt'
30      open(unit=19,file=filename(1:lenjobdir+10),status='old')
31      read(19,*) ancho
32      close(19)
33      !puntos en los que se discretiza el contorno
34      call GETOUTDIR(jobdir,lenjobdir)
35      filename=''
36      filename(1:lenjobdir)=jobdir(1:lenjobdir)
37      filename(lenjobdir+1:lenjobdir+20)='\puntos_contorno.txt'
38      open(UNIT=21,file=filename(1:lenjobdir+20),status='old')
39      read(21,*) puntos_contorno
40      close(21)
41      ! puntos en la arista derecha
42      allocate(arista_der(puntos_contorno,1))
43      call GETOUTDIR(jobdir,lenjobdir)
44      filename=''
45      filename(1:lenjobdir)=jobdir(1:lenjobdir)
46      filename(lenjobdir+1:lenjobdir+15)='\arista_der.txt'
47      open(UNIT=41,file=filename(1:lenjobdir+15),status='old')
48      read(41,*) (arista_der(i,1), i=1, puntos_contorno)
49      close(41)
50      ! puntos en la zona de la entalla
51      allocate(arista_ent(puntos_contorno,1))
52      call GETOUTDIR(jobdir,lenjobdir)
53      filename=''
54      filename(1:lenjobdir)=jobdir(1:lenjobdir)
55      filename(lenjobdir+1:lenjobdir+19)='\arista_entalla.txt'
56      open(UNIT=65,file=filename(1:lenjobdir+19),status='old')
57      read(65,*) (arista_ent(i,1), i=1, puntos_contorno)
58      close(65)
59      ! tension yy en la arista superior
60      allocate(cargaS22superior(puntos_contorno,1))
61      call GETOUTDIR(jobdir,lenjobdir)
62      filename=''
63      filename(1:lenjobdir)=jobdir(1:lenjobdir)
64      filename(lenjobdir+1:lenjobdir+15)='\ten_yy_sup.txt'
65      open(UNIT=43,file=filename(1:lenjobdir+15),status='old')
66      read(43,*) (cargaS22superior(i,1), i=1,puntos_contorno)
67      close(43)
68      ! tension xx en la arista derecha
69      allocate(cargaS11derecha(puntos_contorno,1))
70      call GETOUTDIR(jobdir,lenjobdir)
71      filename=''
72      filename(1:lenjobdir)=jobdir(1:lenjobdir)
73      filename(lenjobdir+1:lenjobdir+15)='\ten_xx_der.txt'
74      open(UNIT=44,file=filename(1:lenjobdir+15),status='old')
75      read(44,*) (cargaS11derecha(i,1), i=1,puntos_contorno)

```



```

76      close(44)
77      ! tension xy en la arista derecha
78      allocate(cargaS12derecha(puntos_contorno,1))
79      call GETOUTDIR(jobdir,lenjobdir)
80      filename=''
81      filename(1:lenjobdir)=jobdir(1:lenjobdir)
82      filename(lenjobdir+1:lenjobdir+15)='\ten_xy_der.txt'
83      open(UNIT=46,file=filename(1:lenjobdir+15),status='old')
84      read(46,*) (cargaS12derecha(i,1), i=1,puntos_contorno)
85      close(46)
86      !tension xy en la arista superior
87      allocate(cargaS12superior(puntos_contorno,1))
88      call GETOUTDIR(jobdir,lenjobdir)
89      filename=''
90      filename(1:lenjobdir)=jobdir(1:lenjobdir)
91      filename(lenjobdir+1:lenjobdir+15)='\ten_xy_sup.txt'
92      open(UNIT=47,file=filename(1:lenjobdir+15),status='old')
93      read(47,*) (cargaS12superior(i,1), i=1,puntos_contorno)
94      close(47)
95      !tension xy en la entalla
96      allocate(S12ent(puntos_contorno,1))
97      call GETOUTDIR(jobdir,lenjobdir)
98      filename=''
99      filename(1:lenjobdir)=jobdir(1:lenjobdir)
100     filename(lenjobdir+1:lenjobdir+19)='\ten_xy_entalla.txt'
101     open(UNIT=56,file=filename(1:lenjobdir+19),status='old')
102     read(56,*) (S12ent(i,1), i=1,puntos_contorno)
103     close(56)
104     !tension xx en la entalla
105     allocate(S11ent(puntos_contorno,1))
106     call GETOUTDIR(jobdir,lenjobdir)
107     filename=''
108     filename(1:lenjobdir)=jobdir(1:lenjobdir)
109     filename(lenjobdir+1:lenjobdir+19)='\ten_xx_entalla.txt'
110     open(UNIT=57,file=filename(1:lenjobdir+19),status='old')
111     read(57,*) (S11ent(i,1), i=1,puntos_contorno)
112     close(57)
113     !tension yy en la entalla
114     allocate(S22ent(puntos_contorno,1))
115     call GETOUTDIR(jobdir,lenjobdir)
116     filename=''
117     filename(1:lenjobdir)=jobdir(1:lenjobdir)
118     filename(lenjobdir+1:lenjobdir+19)='\ten_yy_entalla.txt'
119     open(UNIT=58,file=filename(1:lenjobdir+19),status='old')
120     read(58,*) (S22ent(i,1), i=1,puntos_contorno)
121     close(58)
122     !valores de tension yy del problema original en la arista superior
123     allocate(ten_ini_yy_sup(puntos_contorno,1))
124     call GETOUTDIR(jobdir,lenjobdir)
125     filename=''
126     filename(1:lenjobdir)=jobdir(1:lenjobdir)
127     filename(lenjobdir+1:lenjobdir+19)='\ten_ini_yy_sup.txt'
128     open(UNIT=50,file=filename(1:lenjobdir+19),status='old')
129     read(50,*) (ten_ini_yy_sup(i,1), i=1,puntos_contorno)
130     close(50)
131     !coordenadas de cada punto de calculo del modelo FEM
132     X=COORDS(1)
133     Y=COORDS(2)
134     !recorrido por los diferentes puntos del contorno de la geometria

```

```

135     IF (Y.EQ.alto) THEN!ENTRA EN LA ARISTA SUPERIOR
136     do j=1,puntos_contorno-1
137     IF (X.GT.(arista_sup(j,1)) .AND. X.LT.(arista_sup(j+1,1))) THEN
138     alfaxsup=-cargaS12superior(j,1) !componente x del vector de carga
139     alfaysup=-(ten_ini_yy_sup(j,1)-cargaS22superior(j,1)) !componente y
del vector de carga
140     alfasup=SQRT((alfaxsup**2) + (alfaysup**2)) ! modulo del vector de
carga
141     ALPHA=alfasup
142     T_USER(1)=-alfaxsup/alfasup !coseno director direccion x
143     T_USER(2)=-alfaysup/alfasup !coseno director direccion y
144     T_USER(3)=0 !coseno director direccion z
145     END IF
146     END DO
147     else IF (X.EQ.ancho) THEN!ENTRA EN LA ARISTA DERECHA en la parte que no es
entalla
148     do j=1,puntos_contorno-1
149     IF (Y.LT.(arista_der(j,1)) .AND. Y.GT.(arista_der(j+1,1))) THEN
150     alfaxder=-cargaS11derecha(j,1) !componente x del vector de carga
151     alfayder=-cargaS12derecha(j,1) !componente y del vector de carga
152     alfader=sqrt((alfaxder**2) + (alfayder**2)) ! modulo del vector de
carga
153     ALPHA=alfader
154     T_USER(1)=-alfaxder/alfader !coseno director direccion x
155     T_USER(2)=-alfayder/alfader !coseno director direccion y
156     T_USER(3)=0 !coseno director direccion z
157     END IF
158     END DO
159     else ! parte de la entalla
160     do j=1,puntos_contorno-1
161     IF (Y.LT.(arista_ent(j,1)) .AND. Y.GT.(arista_ent(j+1,1))) THEN
162     phi=atan(Y/X) !angulo entre la normal y el eje vertical
163     alfaxent=(-S11ent(j,1)*sin(phi)- S12ent(j,1)*sin(phi)) !componente x
del vector de carga
164     alfayent=(-S12ent(j,1)*sin(phi)- S22ent(j,1)*sin(phi)) !componente y
del vector de carga
165     alfaent=sqrt((alfaxent**2) + (alfayent**2)) ! modulo del vector de
carga
166     ALPHA=alfaent
167     T_USER(1)=alfaxent/alfaent !coseno director direccion x
168     T_USER(2)=alfayent/alfaent !coseno director direccion y
169     T_USER(3)=0 !coseno director direccion z
170     end if
171     END DO
172     end if
173     RETURN
174     END

```

# Anexo B. Datos sobre los ensayos de fatiga

A continuación se muestran tabulados los datos de todos los ensayos de fatiga realizados distinguiendo entre los diferentes radios de entalla analizados.

TABLA B.1: Ensayos de fatiga para probetas con entalla de radio 0.2 mm.

$S_a$ (MPa)	$N$ (ciclos)	Resultado
270.00	124172	Rotura
240.00	344527	Rotura
210.00	3500000	Run-out
300.00	26893	Rotura
330.00	7766	Rotura
330.00	8030	Rotura
300.00	90506	Rotura
270.00	564518	Rotura
240.00	437387	Rotura
223.00	794748	Rotura
210.00	3500000	Run-out
223.00	1356210	Rotura
210.00	968305	Rotura
197.00	—	No realizado

TABLA B.2: Ensayos de fatiga para probetas con entalla de radio 0.6 mm.

$S_a$ (MPa)	$N$ (ciclos)	Resultado
268.50	125721	Rotura
251.50	206190	Rotura
234.50	3500000	Run-out
285.50	81580	Rotura
302.50	38914	Rotura
302.50	38715	Rotura
285.50	65518	Rotura
268.50	98423	Rotura
251.50	331230	Rotura
245.50	303328	Rotura
234.50	485998	Rotura
223.50	3500000	Run-out
234.50	781174	Rotura
223,50	—	No realizado

TABLA B.3: Ensayos de fatiga para probetas con entalla de radio 1.3 mm.

$S_a$ (MPa)	$N$ (ciclos)	Resultado
364.78	50207	Rotura
342.78	76238	Rotura
320.78	3500000	Run-out
342.78	197291	Rotura
364.78	65523	Rotura
386.78	33081	Rotura
408.78	19884	Rotura
408.78	17024	Rotura
386.78	27986	Rotura
336.78	186491	Rotura
320.78	3500000	Run-out
336.78	107109	Rotura
320.78	234111	Rotura
304.78	—	No realizado

TABLA B.4: Ensayos de fatiga para probetas con entalla de radio 2.0 mm.

$S_a$ (MPa)	$N$ (ciclos)	Resultado
349.09	64272	Rotura
295.09	208657	Rotura
241.09	3500000	Run-out
403.09	22034	Rotura
457.09	9534	Rotura
295.09	316838	Rotura
349.09	51250	Rotura
403.09	14204	Rotura
457.09	6969	Rotura
276.09	3500000	Run-out
290.09	466895	Rotura
276.09	324745	Rotura
262.09	3500000	Run-out
276.09	3500000	Run-out
290.09	3500000	Run-out

TABLA B.5: Ensayos de fatiga para probetas con entalla de radio 2.5 mm.

$S_a$ (MPa)	$N$ (ciclos)	Resultado
450.00	70692	Rotura
425.00	132199	Rotura
400.00	3500000	Run-out
475.00	19312	Rotura
500.00	11855	Rotura
500.00	13575	Rotura
475.00	9618	Rotura
450.00	48001	Rotura
425.00	80536	Rotura
412.00	67945	Rotura
400.00	3500000	Run-out
412.00	52335	Rotura
400.00	3500000	Run-out
412.00	—	No realizado

TABLA B.6: Ensayos de fatiga para probetas con entalla de radio 3.0 mm.

$S_a$ (MPa)	$N$ (ciclos)	Resultado
404,48	49417	Rotura
396,60	92133	Rotura
388,72	3500000	Run-out
412,36	59117	Rotura
420,24	30523	Rotura
396,60	97381	Rotura
404,48	62039	Rotura
412,36	48337	Rotura
420,24	71744	Rotura
393,72	252607	Rotura
388,72	3500000	Run-out
393,72	190421	Rotura
388,72	182958	Rotura
383,72	—	No realizado