EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **16**, Núm. 3, 405 – 421 (2001)

Álgebras de Lie Filiformes de Máxima Longitud

J.R. Gómez [1], A. Jiménez-Merchán [1], J. Reyes [2]

[1] *Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla, Sevilla, Spain*
[2] *Departamento de Matemática, Universidad de Huelva, Huelva, Spain*
e-mail: jrgomez@us.es, ajimenez@us.es, reyes@uhu.es

(Research paper presented by Santos González)

AMS *Subject Class.* (2000): 17B70, 17B30 *Received April* 18, 2001

1. Introducción

La determinación de listas completas de álgebras de Lie es un problema cuya complejidad aumenta a medida que se incrementa la dimensión. La clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes es un problema abierto que ha sido tratado por diversos autores. Dixmier [7], Morosov [14], Vergne [16], Ancochea y Goze [1, 2], Echarte y Gómez [8], Gómez, Khakimdjanov y Jiménez-Merchán [9] han obtenido, para distintos tipos de familias, listas de álgebras de Lie en dimensiones concretas o incluso en dimensiones arbitrarias.

Algunos de los problemas de clasificación de álgebras de Lie nilpotentes de mayor interés consisten en la determinación de aquellas con una propiedad relevante, de modo que a través de su estudio se puedan conocer características importantes de la familia a la que pertenecen. En este contexto, se puede destacar el estudio de las álgebras graduadas de la familia ya que, en cierto modo, se puede considerar que poseen la estructura básica de las álgebras de Lie nilpotentes de la correspondiente familia.

Por ejemplo, las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión n que admiten una base $(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1})$ con $[X_0, X_i] = X_{i+1}$ para $i = 1, 2, \ldots, n-2$, fueron ya consideradas por Umlauf [15] en su tesis (Leipzig, 1891). Vergne [16] mostró el importante papel que tales álgebras desempeñan en el estudio de la variedad de leyes de álgebras de Lie nilpotentes. Llamadas ahora filiformes, en terminología introducida por ella misma, su índice de nilpotencia $n-1$ es el mayor posible entre las de su dimensión. A través de las álgebras graduadas "naturalmente" de la familia, Vergne obtiene una útil representación de un álgebra de Lie filiforme. Considera la graduación asociada a la filtración que, de forma natural, produce en un álgebra la sucesión central descendente y obtiene su clasificación probando que, salvo isomorfismos, sólo hay un álgebra filiforme así graduada cuando la dimensión es impar y dos cuando la dimensión es par. Éstas, denotadas aquí por L_n y Q_n, son álgebras graduadas $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-1}$ que permiten a Vergne distinguir la estructura básica de cualquier álgebra de Lie filiforme. Además, este hecho permite también a otros autores abordar distintos aspectos de la teoría (véase [11]). Esto ha motivado el estudio de este tipo de graduación en álgebras de Lie con un índice de nilpotencia diferente al de las filiformes; y de nuevo las álgebras graduadas obtenidas se han manifestado útiles en el estudio de algunos problemas cohomológicos planteados sobre la variedad de álgebras de Lie nilpotentes (ver [5], [10]).

En todos estos trabajos, el número de subespacios no nulos de la graduación, $\mathfrak{g}_i$, lo determina la sucesión central descendente de las álgebras de la familia y resulta clave para la clasificación la elección de una base homogénea adaptada. En cada caso concreto estudiado (índices de nilpotencia $n-1, n-2, \ldots$), la existencia de una tal base proviene directamente de la graduación considerada y su existencia constituye el punto de partida que permite obtener la clasificación. Así, la ventaja de la inmediata existencia de una base homogénea adaptada en una graduación natural de un álgebra de Lie nilpotente compensa el hecho de que los subespacios $\mathfrak{g}_i$ no siempre tienen la menor dimensión posible.

No obstante, en algunos problemas sobre álgebras de Lie nilpotentes (obtención del álgebra de derivaciones, descripción de componentes, etc.), resulta evidente que la graduación de un álgebra resulta tanto más útil cuanto más baja sea la dimensión de los subespacios que se intervienen, aunque la graduación no sea la asociada a la sucesión central descendente (véase [4], [12], [13]). Así, el interés se ha desplazado a las álgebras de Lie graduadas que admitan una graduación con un mayor número de subespacios que el que proporciona la graduación natural. Y, lógicamente, el principal interés está en las álgebras graduadas con el mayor número posible de subespacios.

Por ejemplo, distintos autores subrayan el importante papel de las álgebras de Lie filiformes para las que el producto corchete viene dado por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}\,, & 1 \le i \le n-2\,, \\ [X_i, X_j] = a_{ij}\, X_{i+j+1}\,, & 1 \le i < j \le n-2\,,\;\; j \le n-2-i\,. \end{cases}$$

Entre ellas se encuentran las álgebras R_n y W_n (véase [3], [6], [12]). Las álgebras que cumplen tal condición pueden ser consideradas graduadas, con la graduación $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$, siendo $\dim \mathfrak{g}_i = 1$. Se tiene que L_n puede ser también así graduada, pero sin embargo Q_n no puede serlo. Ello motiva la consideración de graduaciones con el mayor número de subespacios no nulos posibles (sin intercalar, obviamente, subespacios triviales), que llamaremos su longitud. De este modo, las álgebras L_n, R_n y W_n pueden ser caracterizadas como álgebras filiformes que admiten una graduación de longitud máxima, igual a su dimensión. En este artículo, estudiamos en este sentido las álgebras de Lie filiformes graduadas y determinamos la clasificación de la familia.

La estructura del artículo es la siguiente. Introducimos en la sección 2 la notación básica y algunos resultados previos sobre álgebras de Lie filiformes. En la sección 3 definimos la longitud de un álgebra de Lie en término de las graduaciones conexas que vamos a considerar. La existencia de bases homogéneas adaptadas para graduaciones de máxima longitud, en el caso filiforme, nos permite obtener la estructura de la familia. Finalmente, en la última sección, establecemos los teoremas de clasificación para la familia de álgebras considerada y mostramos la utilidad del uso de Cálculo Simbólico en la determinación de las álgebras de la familia.

Agradecemos al Profesor Khakimdjanov sus útiles sugerencias.

2. Notación y resultados previos

2.1. Nociones básicas. Un álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, \mu)$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{K}$ con una aplicación bilineal $\mu : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, llamada *ley del álgebra de Lie o producto corchete* y usualmente denotada $\mu(X, Y) = [X, Y]$, verificando las propiedades $[X, X] = 0$ y $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ para todo X, Y, Z de $\mathfrak{g}$. Esta última condición es la identidad de Jacobi y será denotada en adelante por $J(X, Y, Z) = 0$.

La dimensión del álgebra de Lie es la dimensión del espacio vectorial $\mathfrak{g}$. Las álgebras de Lie que consideraremos en este artículo serán de dimensión finita y sobre el cuerpo de los números complejos.

Si denotamos por $\mathcal{B}^2(\mathbb{C}^n)$ el espacio vectorial de las aplicaciones bilineales de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$ y fijamos una base $(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$, podemos determinar un elemento $\mu \in \mathcal{B}^2(\mathbb{C}^n)$ por sus *constantes de estructura*, es decir, por el conjunto de escalares c_{ij}^k, definidos por $[X_i, X_j] = \sum_{k=0}^{n-1} c_{ij}^k X_k$; de este modo, $\mathcal{B}^2(\mathbb{C}^n)$ puede ser dotado con una estructura de espacio afín. Así, también un álgebra de Lie se puede considerar como un elemento de $\mathcal{B}^2(\mathbb{C}^n)$ que se puede identificar con su ley. Entonces, el conjunto $\mathcal{L}_n$ de leyes de álgebras de Lie sobre $\mathbb{C}^n$ es una variedad afín de $\mathcal{B}^2(\mathbb{C}^n)$ definida por las expresiones polinómicas:

1. $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$,
2. $\sum_{l=0}^{n-1}(c_{ij}^l c_{kl}^s + c_{jk}^l c_{il}^s + c_{ki}^l c_{jl}^s) = 0$.

La *sucesión central descendente* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ está definida por $C^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, $C^i\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^{i-1}\mathfrak{g}]$, $i \geq 1$. Si $C^k\mathfrak{g} = \{0\}$, para algún k, el álgebra de Lie se dice *nilpotente*. El menor k tal $C^k\mathfrak{g} = \{0\}$ es llamado índice de nilpotencia de $\mathfrak{g}$. En [16], Vergne introduce la notación para las álgebras de Lie que vamos a considerar en este trabajo.

Definición 2.1. Un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$, de dimensión n, se dice *filiforme* si $\dim C^i\mathfrak{g} = n - i - 1$, para $1 \leq i \leq n-1$.

Así, un álgebra de Lie filiforme tiene índice de nilpotencia maximal $k = n-1$, por lo que éstas son las álgebras "menos" nilpotentes de entre las de su dimensión.

Un endomorfismo d de $\mathfrak{g}$ es una *derivación* de $\mathfrak{g}$ si verifica $[d(X), Y] + [X, d(Y)] - d([X,Y]) = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. El conjunto $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ de las derivaciones de $\mathfrak{g}$, con el corchete $[d_1, d_2] = d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1$ es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$. El conjunto de las derivaciones *internas* ad_X, definidas por $\mathrm{ad}_X(Y) = [X,Y]$ es un ideal de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Las derivaciones internas de un álgebra de Lie permiten caracterizar la nilpotencia del álgebra. En efecto, se tiene que un álgebra $\mathfrak{g}$ es nilpotente si y sólo si ad_X es nilpotente para cada $X \in \mathfrak{g}$ (teorema de Engel).

2.2. Graduaciones en álgebras de Lie nilpotentes. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *$\mathbb{Z}$-graduada* o *graduada* si admite una descomposición vectorial del tipo $\mathfrak{g} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_i$, donde los subespacios $\mathfrak{g}_i$ verifican $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}$. Las graduaciones que se considerarán aquí son *finitas*, es decir, con un número finito de subespacios $\mathfrak{g}_i$ no nulos.

Por ejemplo, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión n y de índice de nilpotencia k, entonces está naturalmente filtrada por los ideales $\{C^i\mathfrak{g}\}_{0\leq i\leq k}$ de la sucesión central descendente, considerando la filtración $(S_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, definida con $S_{i+1} = C^i\mathfrak{g}$, para $1 \leq i \leq k-1$, $S_{i+1} = \mathfrak{g}$, si $i \leq 0$, y $S_{i+1} = \{0\}$, si $i \geq k$. El álgebra de Lie graduada asociada a $\mathfrak{g}$ a través de tal filtración está definida por $\mathrm{gr}\,\mathfrak{g} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_i$, con $\mathfrak{g}_i = S_i/S_{i+1} = C^{i-1}\mathfrak{g}/C^i\mathfrak{g}$. La graduación así obtenida del álgebra $\mathrm{gr}\,\mathfrak{g}$ es finita. Se tiene, entonces, con más precisión, $\mathrm{gr}\,\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$, con $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$ para $i + j \leq k$. En general las álgebras

$\operatorname{gr}\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}$ no son isomorfas. Vergne [16] estudió las álgebras de Lie filiformes para las que se verifica el isomorfismo y autores de este trabajo han abordado el problema en álgebras con otro índice de nilpotencia [10]. Denotando por $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ el isomorfismo de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$, las álgebras para las que $\operatorname{gr}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ son llamadas ahora graduadas naturalmente. Esto es, existe una graduación para el álgebra $\mathfrak{g}$ verificando

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k\,, \qquad \mathfrak{g}_i = C^{i-1}\mathfrak{g}/C^i\mathfrak{g}\,.$$

En el caso filiforme, Vergne [16] prueba que sólo hay dos álgebras graduadas naturalmente, L_n y Q_n, cuando la dimensión n es par, y sólo una, L_n, si n es impar. En una base adaptada $(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1})$, las álgebras L_n y Q_n están definidas por

$$L_n = [X_0, X_i] = X_{i+1}\,, \qquad 1 \leq i \leq n-2\,;$$

$$Q_n = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}\,, & 1 \leq i \leq n-2\,, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = (-1)^{i-1}\, X_{n-1}\,, & 1 \leq i \leq q-1,\ n = 2q\,. \end{cases}$$

(Los corchetes no definidos, excepto antisimetría, se suponen nulos.)

La familia de álgebras de Lie filiformes de leyes determinadas por los corchetes $[X_i, X_j] = a_{i,j}\ X_{i+j+1}$, en una cierta base, es considerada por varios autores (ver [3], [6], [12]) en diferentes contextos. Entre las álgebras de la familia se encuentran, además de L_n, las álgebras R_n y W_n definidas en la base $(X_0, \ldots, X_{n-1})$ por

$$R_n = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}\,, & 1 \leq i \leq n-2\,, \\ [X_1, X_j] = X_{2+j}\,, & 2 \leq j \leq n-3\,; \end{cases}$$

$$W_n = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}\,, & 1 \leq i \leq n-2\,, \\ [X_i, X_j] = \frac{6\,(i-1)!\,(j-1)!\,(j-i)}{(i+j)!}\, X_{i+j+1}\,, & \begin{array}{l} 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor, \\ i < j \leq n-2-i\,. \end{array} \end{cases}$$

donde $\lfloor \alpha \rfloor$ denota la parte entera de α.

La importancia de estas álgebras en el estudio de algunas propiedades cohomológicas sobre la variedad de álgebras de Lie nilpotentes $\mathfrak{N}_n$ es puesta de manifiesto por Khakimdjanov en [13]. Prueba que hay 4 o 5 componentes irreducibles para el caso filiforme, determinadas por álgebras entre las que se encuentran las leyes de L_n, R_n y W_n.

Se puede observar que las álgebras que verifican $[X_i, X_j] = a_{i,j}\ X_{i+j+1}$ admiten la graduación dada por $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_n$, con $\mathfrak{g}_i =< X_{i-1} >$. Es decir, un mayor número subespacios que el de la graduación natural y, consecuentemente, la menor dimensión posible en ellos (en los no nulos). Además, para tal graduación la base $(X_0, \dots, X_{n-1})$ es una base homogénea para las álgebras L_n, R_n y W_n anteriormente definidas.

Estos hechos nos sugieren el interés en abordar el estudio de las álgebras que admiten una graduación con un número de subespacios determinado (la "longitud"del álgebra) de modo que no sea posible graduarla con más subespacios. En caso filiforme, las álgebras L_n, R_n y W_n quedarán también caracterizadas, en este nuevo contexto, por tener la máxima longitud entre las de su dimensión.

3. Longitud de un álgebra de Lie nilpotente

Introduciremos en esta sección la notación para el tipo de graduaciones que serán consideradas a partir de ahora.

3.1. Graduaciones conexas. Diremos que un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ admite una graduación *conexa*, $\mathfrak{g} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\, \mathfrak{g}_i$, cuando es $\mathfrak{g}_i \neq \{0\}$, para cada $n_1 \leq i \leq n_2$, y se tiene $\mathfrak{g}_i = \{0\}$ en otro caso. Al número de subespacios no nulos, $l(\oplus\mathfrak{g}_i) = n_2 - n_1 + 1$, le llamaremos *longitud de la graduación*.

A partir de ahora, las álgebras se supondrán con una graduación finita y conexa. La expresión $\mathfrak{g} = \oplus\mathfrak{g}_i$ quiere decir, entonces, que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2}$, con cada $\mathfrak{g}_i$, $n_1 \leq i \leq n_2$, no nulo, verificándose $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$. La graduación conexa con el mayor número posible de subespacios que admita un álgebra de Lie introduce un invariante del álgebra que pasamos a definir.

Definición 3.1. La *longitud* $l(\mathfrak{g})$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se define como el mayor número entero $l(\oplus\mathfrak{g}_i)$, siendo $\mathfrak{g} = \oplus\mathfrak{g}_i$. Es decir,

$$l(\mathfrak{g}) = \max\left\{n_2 - n_1 + 1 : \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_2} \text{ es una graduación conexa}\right\}.$$

Diremos que el álgebra $\mathfrak{g}$ es de *máxima longitud* si $l(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}$.

La longitud de un álgebra determina, entonces, el mayor número de subespacios posible que se puede conseguir con una graduación conexa del álgebra. Así, cada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tiene al menos longitud 1, porque siempre podemos considerar la graduación trivial $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0$. Por otro lado, la longitud de un álgebra no puede ser mayor que su dimensión, luego para cada álgebra de Lie nilpotente se tiene que $1 \leq l(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{g}$. En el caso de ser $\mathfrak{g}$ de máxima longitud, el álgebra admite una graduación $\mathfrak{g} = \oplus\mathfrak{g}_i$ con subespacios unidimensionales, con el beneficio que tal graduación comporta, por ejemplo, permitiendo una importante simplificación de cálculos cohomológicos.

Por ejemplo, el álgebra L_n admite la graduación $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$, siendo los subespacios $\mathfrak{g}_i = < X_{i-1} >$, con $1 \leq i \leq n$, el subespacio generado por el elemento X_{i-1} de la base $(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1})$ en la que está definida. Aunque esta graduación conexa de L_n no es la natural ($\mathfrak{g}_1 \neq \mathfrak{g}/C^1\mathfrak{g}$), cada subespacio $\mathfrak{g}_i$ tiene ahora dimensión 1. Así, tal graduación de L_n tiene el mayor número de subespacios no nulos posible y, por tanto, el álgebra L_n es de máxima longitud. Para el álgebra Q_n no podemos obtener otra graduación conexa con un mayor número de subespacios no nulos que el determinado por la graduación natural; en este caso, se tiene $l(Q_n) = n-1$. También las álgebras que verifican $[X_i, X_j] = a_{i,j}\ X_{i+j+1}$, admiten la graduación $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$, siendo $\mathfrak{g}_i = < X_{i-1} >$, con $1 \leq i \leq n$. Ello prueba que $l(R_n) = l(W_n) = n$. Por tanto, L_n, R_n y W_n son álgebras filiformes de máxima longitud.

El resto de este artículo está dedicado a estudiar y obtener la clasificación de las álgebras de Lie filiformes de máxima longitud. Las álgebras que se obtienen, entre las que se encuentran L_n, R_n y W_n, determinan a cada una de las componentes irreducibles descritas por Khakimdjanov en [13].

3.2. Estructura de las álgebras de Lie filiformes de máxima longitud. En la clasificación de las álgebras graduadas naturalmente, Vergne [16] utiliza el hecho de que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filiforme de dimensión n, existe una base *adaptada* $(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1})$, que verifica:

$$\begin{aligned} &[X_0, X_i] = X_{i+1}\,, \qquad 1 \leq i \leq n-2\,,\\ &[X_0, X_{n-1}] = 0\,. \end{aligned}$$

Se puede observar que las bases consideradas en las definiciones de L_n, R_n y W_n son bases adaptadas y homogéneas para la graduación que determina sus longitudes. Veremos a continuación que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filiforme de dimensión n y máxima longitud, siempre es posible encontrar una base adaptada homogénea para cualquier graduación de longitud $l(\oplus\mathfrak{g}_i) = \dim \mathfrak{g}$. Esto permitirá obtener la estructura de la familia de álgebras de Lie filiformes de máxima longitud en cualquier dimensión.

Proposición 3.2. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filiforme de dimensión n y máxima longitud $l(\mathfrak{g}) = n$ que admite la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n_1+n-1}$, entonces existe una base adaptada homogénea de $\mathfrak{g}$.*

Demostración. Distinguiremos los casos $n_1 \geq 0$, $n_1 < 0 < n_1 + n - 1$, y $n_1 + n - 1 \leq 0$.

1. Caso $n_1 \geq 0$. Sea $(U_{n_1}, \ldots, U_{n_2})$ una base de $\mathfrak{g}$, tal que $\mathfrak{g}_i =< U_i >$. Puesto que $\mathfrak{g}$ es filiforme, se verifica $\dim C^1\mathfrak{g} = n - 2$ y $\dim C^2\mathfrak{g} = n - 3$. Denotando, de ahora en adelante, cada clase por su representante correspondiente, tenemos que existen tres vectores, $U_i, U_j, U_k \in \mathfrak{g}$ de manera que se tiene $\mathfrak{g}/C^1\mathfrak{g} =< U_i, U_j >$ y $\mathfrak{g}/C^2\mathfrak{g} =< U_i, U_j, U_k >$. Entonces, tiene que ser $[U_i, U_j] = a_{i,j}U_k$, con $a_{i,j} \neq 0$, ya que, en otro caso, U_k estará generado por vectores (al menos uno) de $C^1\mathfrak{g}$ y se tendría que $U_k \in C^2\mathfrak{g}$. Con un cambio de escala, si fuera necesario, podemos suponer $a_{i,j} = 1$. Como $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$, para cualquier i, j, se tiene que $[U_i, U_j] = U_{i+j}$, con lo que

$$\mathfrak{g}/C^2\mathfrak{g} =< U_i, U_j, U_{i+j} > .$$

Supongamos ahora que $[U_i, U_{si+j}] = U_{(s+1)i+j}$, para $0 \leq s \leq r - 2$, verificándose que $\mathfrak{g}/C^r\mathfrak{g} =< U_i, U_j, U_{i+j}, \ldots, U_{(r-1)i+j} >$ y sea

$$\mathfrak{g}/C^{r+1}\mathfrak{g} =< U_i, U_j, U_{i+j}, \ldots, U_{(r-1)i+j}, U_k > .$$

Probaremos que $U_k = U_{ri+j}$. En efecto, no puede ser $k = (s+r-1)i+2j$, con $1 \leq s \leq r - 2$, porque la identidad de Jacobi $J(U_i, U_{(s-1)i+2j}, U_{(r-1)i+j}) = 0$ implica que $U_{(s+r-1)i+2j} \in C^{r+1}\mathfrak{g}$ y $U_k \in \mathfrak{g}/C^{r+1}\mathfrak{g}$. Además, no puede ser $k = (r-1)i+2j$ porque se tendría $[U_j, U_{(r-1)i+j}] = \alpha U_k$, con $\alpha \neq 0$; entonces, las relaciones de Jacobi $J(U_i, U_{ti+j}, U_{(r-1-t)i+j}) = 0$, con $1 \leq t \leq \lfloor (r-2)/2 \rfloor$, implicarían cuando r es par la contradicción $[U_j, U_{(r-1)i+j}] = 0$. Si se tiene $k = (r - 1)i + 2j$ y r es impar se llega de nuevo a otra contradicción. Por lo tanto, es $k = ri + j$ y podemos suponer, con un cambio de escala apropiado, que $[U_i, U_{(r-1)i+j}] = U_k = U_{ri+j}$. Luego, $\mathfrak{g} =< U_i, U_j, U_{i+j}, \ldots, U_{(n-2)i+j} >$, con $[U_i, U_{(r-1)i+j}] = U_{ri+j}$, $1 \leq r \leq n - 1$. Como $n_1 \geq 0$, la conexión de la graduación implica que $i = 1$ y $j = 2$. Entonces $\mathfrak{g} =< U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n >$ y poniendo $X_{i-1} = U_i$, para $1 \leq i \leq n$, se obtiene que $(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1})$ es una base adaptada homogénea de $\mathfrak{g}$.

2. Caso $n_1 + n - 1 \leq 0$. De manera similar se obtiene $\mathfrak{g} =< U_i, U_j, U_{i+j}, \ldots, U_{(n-2)i+j} >$, donde ahora los subíndices deben ser $i = -1$ y $j = -2$. La base adaptada homogénea es entonces $(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1})$, siendo $X_{-i-1} = U_i$, para $-n \leq i \leq -1$.

3. Caso $n_1 < 0 < n_1 + n - 1$. En este caso, como el centro de $\mathfrak{g}$ tiene que ser $\mathfrak{g}_0$, se llega finalmente a $\mathfrak{g} =< U_i, U_j, U_{i+j}, \ldots, U_{(n-2)i+j} >$, teniendo que ser $(n - 2)i + j = 0$. De nuevo, por la conexión de la graduación, se obtiene que i y j son primos entre sí. Entonces, o bien $i = 1$

y $j = -n+2$, o bien $i = -1$ y $j = n-2$. En ambas situaciones obtenemos la base adaptada y homogénea $(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$. En efecto, si $\mathfrak{g} =< U_1, U_{2-n}, U_{3-n}, \dots, U_0 >$, entonces $X_0 = U_1$, $X_i = U_{-n+1+i}$, para $1 \leq i \leq n-1$; y si $\mathfrak{g} =< U_{-1}, U_{n-2}, U_{n-3}, \dots, U_0 >$, entonces $X_0 = U_{-1}$, $X_i = U_{n-1-i}$, para $1 \leq i \leq n-1$. ∎

El resultado siguiente limita a sólo dos casos el estudio de las graduaciones conexas que pueden conducir a álgebras de Lie filiformes de máxima longitud no isomorfas.

PROPOSICIÓN 3.3. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme de dimensión y longitud n. Entonces:*

1. *El álgebra $\mathfrak{g}$ admite la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ si y sólo si admite una descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-n} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1}$.*
2. *El álgebra $\mathfrak{g}$ admite la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-n+2} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1$ si y sólo si admite una descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{n-2}$.*

Demostración. En cada caso, basta considerar el isomorfismo identidad y la renumeración adecuada de los subíndices de los subespacios de las graduaciones involucradas que definen a $\mathfrak{g}$. ∎

A partir de las descomposiciones de la proposición anterior, se puede precisar la estructura de las álgebras de Lie filiformes de máxima longitud en términos de una base adaptada homogénea.

COROLARIO 3.4. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme n-dimensional de máxima longitud, que admite la graduación $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-n+2} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$. Entonces, existe una base adaptada homogénea $(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$ del álgebra de modo que $\mathfrak{g}_{-n+i+1} =< X_i >$, para $1 \leq i \leq n-1$, y $\mathfrak{g}_1 =< X_0 >$.*

COROLARIO 3.5. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme n-dimensional de máxima longitud, que admite la graduación $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$. Entonces, existe una base adaptada homogénea $(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$ del álgebra con $\mathfrak{g}_i = < X_{i-1} >$ para $1 \leq i \leq n$.*

Los resultados obtenidos permiten resolver el problema de la clasificación de las álgebras de Lie filiformes de máxima longitud.

4. Álgebras de Lie filiformes de máxima longitud

Distinguiremos los posibles casos que se deducen de las descomposiciones anteriormente obtenidas. Primero, considerando las álgebras que admiten la descomposición del corolario 3.4 y, posteriormente, las que se determinan del corolario 3.5.

4.1. Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-n+2} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1$.

El siguiente resultado establece que, en cada dimensión, solamente el álgebra L_n puede admitir la graduación del tipo considerado.

Teorema 4.1. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie filiforme n-dimensional de longitud $l(\mathfrak{g}) = n$ que admite la graduación $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-n+2} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, entonces se verifica que $\mathfrak{g} = L_n$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-n+2} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$. El corolario 3.4 garantiza la existencia de una base adaptada homogénea $(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1})$ de $\mathfrak{g}$, con $\mathfrak{g}_1 =< X_0 >$ y $\mathfrak{g}_{i+1-n} =< X_i >$ para $1 \leq i \leq n-1$. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} &[X_0, X_i] = X_{i+1}\,, \qquad 1 \leq i \leq n-2\,,\\ &[X_0, X_{n-1}] = 0\,. \end{aligned}$$

Probaremos que todos los demás productos $[X_j, X_k]$ que definen a las álgebras de la familia son nulos. En efecto, como

$$[X_j, X_k] \in [\mathfrak{g}_{-(n-1-j)}, \mathfrak{g}_{-(n-1-k)}] \subset \mathfrak{g}_{-(n-1-(j+k-n+1))}\,,$$

se debe verificar $[X_j, X_k] = a_{j,k} X_{j+k-n+1}$ para $1 \leq j < k \leq n-2$ con $j+k \geq n$. Por tanto se verifica que $j+k-n+1 \leq j-1 < j < k$. Además, por ser $\mathfrak{g}$ filiforme y $[X_0, X_i] = X_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-2$, se tiene que

$$C^i\mathfrak{g} =< X_{i+1}, X_{i+2}, \ldots, X_{n-1} >\,, \qquad 1 \leq i \leq n-2\,.$$

Así, no puede ser $a_{j,k} \neq 0$ porque la igualdad $C^{j+k-n+1}\mathfrak{g} = C^{j+k-n+2}\mathfrak{g}$ contradice la nilpotencia del álgebra $\mathfrak{g}$. ∎

Dado que L_n también admite la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$, estas graduaciones nos van a determinar todas las álgebras de Lie filiformes de máxima longitud.

4.2. Álgebras de tipo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$. Como vimos en la sección 2, las álgebras L_n, R_n $(n \geq 5)$ y W_n $(n \geq 7)$ son álgebras de longitud n que admiten, precisamente, la descomposición $\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$. Puede comprobarse directamente que también admiten tal descomposición las álgebras que denotaremos K_n $(n \geq 8)$ y Q'_n $(n \geq 7,\ n$ impar), definidas en la base $(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1})$ por

$$K_n = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2\,, \\ \left[X_i, X_{2\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor -1-i}\right] = (-1)^{i-1}\, X_{2\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor, \\ \left[X_i, X_{2\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor -i}\right] = (-1)^{i-1} \left(\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - i\right) X_{2\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor +1}, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^i\, \frac{(i-1)(n-3-i)}{2}\, \alpha\, X_{n-1}, & 2 \leq i \leq \frac{n-3}{2}\,. \end{cases}$$

donde $\alpha = 0$ si n es par y $\alpha = 1$ si n es impar.

$$Q'_n = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2\,, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\, X_{n-1}, & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2}\,,\ \ n \text{ impar.} \end{cases}$$

Las álgebras de Lie filiformes K_n y Q'_n son entonces también de máxima longitud y no isomorfas a las anteriormente consideradas. En la proposición siguiente estudiamos los invariantes que prueban que estamos, en cada dimensión, ante una familia finita de álgebras realmente distintas.

Proposición 4.2. *Las álgebras de Lie filiformes L_n, R_n, K_n, W_n y Q'_n son dos a dos no isomorfas.*

Demostración. En [12], por ejemplo, se puede ver que las álgebras L_n, R_n y W_n son dos a dos no isomorfas. Además, se puede observar que la dimensión del ideal $\mathfrak{D}^2\mathfrak{g} = [C^1\mathfrak{g}, C^1\mathfrak{g}]$ es diferente en cualquier otro par de álgebras que se pudiera considerar. En efecto, $\mathfrak{D}^2(L_n) = \mathfrak{D}^2(R_n) = 0$, $\mathfrak{D}^2(W_n) = n-6$, $\mathfrak{D}^2(K_n) = 2$, si n es par, o 3, si n es impar y $\mathfrak{D}^2(Q'_n) = 1$. ∎

En el próximo teorema probaremos que las álgebras Lie filiformes de la proposición anterior son las únicas de máxima longitud cuando la dimensión del álgebra es suficientemente grande.

La estructura de la familia de álgebras que estamos buscando está determinada por la graduación a través del corolario 3.5. Veremos que, a partir de la dimensión $n > 11$, es posible determinar la familia de álgebras de Lie filiformes de máxima longitud y dimensión n como extensiones centrales de las álgebras de la familia de dimensión $n-1$.

TEOREMA 4.3. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme n-dimensional de longitud $l(\mathfrak{g}) = n$, $n \geq 12$, que admite la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$. Entonces, se tiene que $\mathfrak{g} = L_n$, $\mathfrak{g} = R_n$, $\mathfrak{g} = W_n$, $\mathfrak{g} = K_n$ ó $\mathfrak{g} = Q'_n$, donde la última igualdad sólo se debe considerar si n es impar.*

Demostración. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme de máxima longitud y dimensión $n \geq 12$, que admite la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$. El corolario 3.5 garantiza la existencia de una base adaptada homogénea $(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1})$ de modo que se tiene la descomposición

$$\mathfrak{g} =< X_0 > \oplus < X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-1} > .$$

Entonces, el álgebra $\mathfrak{g}$ ha de pertenecer a la familia de álgebras de Lie filiformes cuyos productos corchetes, excepto antisimetría, vienen dados por

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}\,, & 1 \leq i \leq n-2\,, \\ [X_i, X_j] = a_{i,j}\, X_{i+j+1}\,, & 1 \leq i < j \leq n-2-i\,, \end{cases}$$

donde las constantes de estructura, $a_{i,j}$, deben satisfacer las relaciones algebraicas obtenidas de las identidades de Jacobi. Probaremos que las constantes de estructura sólo pueden ser las que determinan, salvo isomorfismo, a las álgebras del enunciado del teorema. La demostración se hará mediante inducción sobre la dimensión de las álgebras de la familia.

En efecto, las dimensiones 12 y 13 pueden ser estudiadas directamente (la ayuda de un soporte de cálculo formal será útil), y se obtiene

$$\dim \mathfrak{g} = 12: \quad \mathfrak{g} = L_{12}\,, \quad \mathfrak{g} = R_{12}\,, \quad \mathfrak{g} = W_{12} \quad \text{ó} \quad \mathfrak{g} = K_{12}\,;$$

$$\dim \mathfrak{g} = 13: \quad \mathfrak{g} = L_{13}\,, \quad \mathfrak{g} = R_{13}\,, \quad \mathfrak{g} = W_{13}\,, \quad \mathfrak{g} = K_{13} \quad \text{ó} \quad \mathfrak{g} = Q'_{13}\,.$$

Supóngase cierto el teorema para las álgebras de Lie filiformes de dimensión n y sea ahora $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme de dimensión y longitud $n+1$, con

$$\mathfrak{g} =< X_0 > \oplus < X_1 > \oplus \cdots \oplus < X_{n-1} > \oplus < X_n > .$$

Así, denotando cada clase por su representante correspondiente, se tiene que $(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1})$ es una base adaptada homogénea del álgebra cociente $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/ < X_n >$. El álgebra $\mathfrak{g}'$ es filiforme de longitud n y se puede aplicar la hipótesis de inducción. Entonces, el álgebra $\mathfrak{g}$ se puede obtener como una extensión central de $\mathfrak{g}'$, donde se tienen que considerar todos los casos posibles.

– Si $\mathfrak{g}' = L_n$, el álgebra $\mathfrak{g}$ pertenecerá a la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}\,, & 1 \le i \le n-1\,, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = a_i X_n\,, & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor, \end{cases}$$

y de las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-2-i}) = 0$, para $1 \le i \le \lfloor (n-4)/2 \rfloor$, se obtiene que $a_i = (-1)^{i-1} a_1$, para $1 \le i \le \lfloor (n-2)/2 \rfloor$. Entonces, si $n+1$ es par, la relación de Jacobi $J(X_0, X_{\frac{n-3}{2}}, X_{\frac{n-1}{2}}) = 0$ implica que $a_1 = 0$ y el álgebra es $\mathfrak{g} = L_{n+1}$; si $n+1$ es impar, el álgebra obtenida dependerá de la nulidad de a_1. Así, si $a_1 = 0$, se tiene que $\mathfrak{g} = L_{n+1}$ y si $a_1 \neq 0$; con un cambio de escala (si es necesario), el álgebra que se obtiene es $\mathfrak{g} = Q'_{n+1}$.

– Si $\mathfrak{g}' = R_n$ o $\mathfrak{g}' = W_n$, procediendo de manera similar al caso anterior se obtiene que $\mathfrak{g} = R_{n+1}$ ó $\mathfrak{g} = W_{n+1}$, respectivamente.

– Si $\mathfrak{g}' = K_n$ y $n+1$ es impar, el tratamiento es similar al de los casos previos y se obtiene que $\mathfrak{g} = K_{n+1}$. Sin embargo, cuando la dimensión $n+1$ es par, el álgebra $\mathfrak{g}' = K_n$ no puede ser extendida. En efecto, el álgebra $\mathfrak{g}$ sería de la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}\,, & 1 \le i \le n-1\,, \\ [X_i, X_{n-4-i}] = (-1)^{i-1} X_{n-3}\,, & 1 \le i \le \frac{n-5}{2}\,, \\ [X_i, X_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} \left(\frac{n-3}{2} - i\right) X_{n-2}\,, & 1 \le i \le \frac{n-5}{2}\,, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^{i} \frac{(i-1)(n-3-i)}{2} X_{n-1}\,, & 2 \le i \le \frac{n-3}{2}\,, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = a_i X_n\,, & 1 \le i \le \frac{n-3}{2}\,. \end{cases}$$

De las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-2-i}) = 0$, para $1 \le i \le (n-3)/2$, se obtiene $a_{\frac{n-3}{2}} = (-1)^{\frac{n-3}{2}} (n-3)(n-5)/8$ y $a_i = (-1)^i (i-1)(n-3-i)/2 - a_{i+1}$. Por lo tanto, $a_i \neq 0$ para $1 \le i \le (n-3)/2$; en particular, $a_1 \neq 0$ y $a_2 = -a_1$. Entonces, se encuentra una contradicción con la ecuación $a_2 = (7-n)a_1/2$, obtenida de la relación de Jacobi $J(X_1, X_2, X_{n-5}) = 0$. Esto prueba que el álgebra $\mathfrak{g}' = K_n$ no puede ser extendida a un álgebra de Lie cuando n es impar.

– Finalmente, si $\mathfrak{g}' = Q'_n$, entonces $n+1$ es par y $\mathfrak{g}$ pertenecerá a la familia

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}\,, & 1 \le i \le n-1\,, \\ [X_i, X_{n-2-i}] = (-1)^i X_{n-1}\,, & 2 \le i \le \frac{n-5}{2}\,, \\ [X_i, X_{n-1-i}] = a_i X_n\,, & 1 \le i \le \frac{n-3}{2}\,. \end{cases}$$

Ahora, de las relaciones de Jacobi $J(X_0, X_i, X_{n-2-i}) = 0$, $1 \leq i \leq (n-3)/2$, se obtiene que $a_i = (-1)^{i-1}((n-2)/2 - i)$, con $1 \leq i \leq (n-3)/2$. Así, el álgebra es $\mathfrak{g} = K_{n+1}$. ∎

4.3. Cálculo simbólico en álgebras de Lie. No vamos a descubrir ahora que el uso de un lenguaje formal resulta muy útil en los problemas de clasificación similares al estudiado en este artículo. En concreto, el software *Mathematica* [17] se ha demostrado eficaz en algunas fases del estudio que ha conducido a la clasificación de álgebras de Lie filiformes de máxima longitud. *Mathematica* ha sido empleado en forma interactiva, como una poderosa herramienta de cálculo simbólico y como un lenguaje formal adaptable (por sus capacidades de programación simbólica). No obstante ha sido considerado siempre sólo como un asistente para obtener ejemplos que proporcionaran información sobre algunas familias de álgebras filiformes graduadas en dimensiones elevadas que el desarrollo del estudio hacían suponer relevante. El proceso seguido para encontrar álgebras graduadas en una dimensión concreta puede ser resumido en los siguientes pasos:

1. Generar las leyes de las familias definidas por las constantes de estructura para una base que se supone adaptada y homogénea para la graduación considerada.
2. Determinar las relaciones polinomiales entre las constantes de estructura que son deducidas de las identidades de Jacobi.
3. Reducir las ecuaciones obtenidas anteriormente.

Con la reducción obtenida se continúa hasta obtener, si es posible, la clasificación de la familia considerada. A medida que se va obteniendo información, es decir, cuando la familia inicial puede ser simplificada, los algoritmos empleados pueden ser modificados o refinados convenientemente para obtener nuevos ejemplos de álgebras representativas de la familia en dimensiones mayores, si ello pudiera aportar información relevante. Este enfoque ha sido empleado por coautores de este artículo en el estudio de las álgebras de Lie quasi-filiformes graduadas naturalmente [10].

La mayor dificultad para obtener la clasificación de una familia de álgebras de Lie con una estructura dada suele ser encontrar la clave que permita la simplificación del problema. Con frecuencia, un teorema de clasificación aparece claro cuando se consideran las álgebras a partir de una dimensión determinada. Esto puede necesitar el análisis de ejemplos en dimensiones tan grandes que el cálculo simbólico se convierte en un asistente inevitable. Así, la observación y el estudio de ejemplos en dimensiones adecuadas han resultado muy útiles para comprender la estructura de la familia de álgebras de Lie filiformes de máxima longitud. Nos han permitido chequear las nuevas conjeturas que podrían ser consideradas en cada paso, hasta que finalmente nos han conducido a la clasificación general de las álgebras graduadas consideradas.

Aunque el concepto de dimensión "pequeña"en problemas de clasificación de álgebras de Lie nilpotentes es relativo (por ejemplo, sólo es conocida la clasificación de la familia completa hasta dimensión 7 [1], y si nos limitamos a las filiformes hasta dimensión 11 [9]), en las álgebras graduadas de máxima longitud hemos podido encontrar pautas comunes a cualquier dimensión, al no limitarnos al estudio de las dimensiones pequeñas. De hecho, la dificultad de limitarse a "pequeñas"dimensiones para hacer conjeturas sobre cualquier dimensión en este tipo de problemas resulta patente en el caso estudiado aquí. Por ejemplo, en dimensión 11, entre las álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ filiformes de máxima longitud tenemos la familia uniparamétrica $\mathfrak{g}(\alpha) = W'_{11}(\alpha)$, definida por

$$W'_{11}(\alpha) = \begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}\,, & 1 \le i \le 9\,, \\ [X_1, X_i] = X_{i+2}\,, & 2 \le i \le 3\,, \\ [X_1, X_4] = \alpha X_6\,, & \alpha \neq 0,1,2,3\,, \\ [X_1, X_5] = (2\alpha-1)X_7\,, & \\ [X_1, X_6] = \frac{5\alpha-3}{3-\alpha}X_8\,, & \\ [X_1, X_7] = \frac{\alpha(5\alpha-3)}{3-\alpha}X_9\,, & \\ [X_1, X_8] = \frac{10\alpha^3+2\alpha^2-14\alpha+6}{4\alpha(2-\alpha)}X_{10}\,, & \\ [X_2, X_i] = (1-\alpha)X_{i+3}\,, & 3 \le i \le 4\,, \\ [X_2, X_5] = \frac{2\alpha(1-\alpha)}{3-\alpha}X_8\,, & \\ [X_2, X_6] = \frac{(1-\alpha)(5\alpha-3)}{3-\alpha}X_9\,, & \\ [X_2, X_7] = \frac{-10\alpha^4+24\alpha^3-44\alpha^2+48\alpha-18}{4\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)}X_{10}\,, & \\ [X_3, X_i] = \frac{3(1-\alpha)^2}{3-\alpha}X_{i+4}\,, & 4 \le i \le 5\,, \\ [X_3, X_6] = \frac{30\alpha^4-96\alpha^3+120\alpha^2-72\alpha+18}{4\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)}X_{10}\,, & \\ [X_4, X_5] = \frac{-42\alpha^4+144\alpha^3-180\alpha^2+96\alpha-18}{4\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)}X_{10}\,. & \end{cases}$$

en la que, para cada valor del parámetro α se tienen álgebras no isomorfas $\mathfrak{g}(\alpha)$ de longitud $l(\mathfrak{g}(\alpha)) = 11$.

La existencia de una infinidad de álgebras de Lie filiformes no isomorfas de máxima longitud en pequeñas dimensiones no permite suponer que en dimensiones relativamente grandes las álgebras de la familia puedan reducirse a una lista con un número finito de ellas. Sin embargo, este es el resultado que ha sido obtenido en el teorema 4.3 cuando la dimensión es $n \geq 12$. La familia de álgebras de Lie filiformes de máxima longitud se ha reducido a 4 álgebras, L_n, R_n, W_n y K_n, si la dimensión es par, y a 5 álgebras L_n, R_n, W_n, K_n y Q'_n, si la dimensión es impar. Así, a través de la longitud de un álgebra de Lie, hemos estudiado la importante familia de álgebras de Lie filiformes verificando $[X_i, X_j] = a_{i,j}\ X_{i+j+1}$ (ver [3], [6], [12]), con un nuevo enfoque que nos ha conducido a obtener su clasificación.

Referencias

[1] Ancochea, J.M., Goze. M., Classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7, *Arch. Math.* **52** (1989), 175 – 185.

[2] Ancochea, J.M., Goze. M., Classification des algèbres de Lie filiformes de dimension 8, *Arch. Math.* **50** (1988), 511 – 525.

[3] Bratzlavsky, F., Sur les algèbres admettant un tore de d'automoorphismes donné, *Journal of Algebra* **30** (1974), 305 – 316.

[4] Cabezas, J.M., Gómez, J.R., Jiménez-Merchán, A., Family of p-filiform Lie algebras, en "Algebra and Operator Theory" (ed. Y. Kakhimdjanov, M. Goze, S. Ayupov), Kluwer Academics Publ., 1998, 93 – 102.

[5] Camacho, L.M., Gómez, J.R., Navarro, R.M., Cohomology of some nilpotent Lie algebras, *Extracta Math.* **15** (1) (2000), 155 – 174.

[6] Carles, R., Sur certaines classes d'algèbres de Lie rigides, *Mathematische Annalen* **272** (1985), 477 – 488.

[7] Dixmier, J., Sur les representation unitaries des groupes de Lie nilpotentes III, *Canad. J. Math.* **10** (1958), 321 – 348.

[8] Echarte, F.J., Gómez, J.R., Classification of complex filiform nilpotent Lie algebras of dimension 9, *Rendiconti Cagliari* **61** (1) (1991), 21 – 29.

[9] Gómez, J.R., Jiménez-Merchán, A., Khakimdjanov, I., Low-dimensional filiform Lie algebras, *J. Pure Applied Algebra* **130** (2) (1998), 133 – 158.

[10] Gómez, J.R., Jiménez-Merchán, A., Álgebras de Lie graduadas y cálculo simbólico, en "Actas del Primer Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones", EACA'95, Santander, 1995, 57 – 65.

[11] Goze, M., Khakimdjanov, Y., Sur les algèbres de Lie nilpotentes admettant un tore de dérivations, *Manuscripta Math.* **84** (1994), 115 – 224.

[12] Goze, M., Khakimdjanov, Y. "Nilpotent Lie algebras", Kluwers Academics Publishers, 1996.

[13] Khakimdjanov, Y., Variétés des lois d'algèbres de Lie nilpotentes, *Geometriae Dedicata* **40** (3) (1991), 269 – 295.

[14] Morosov, V., Classification of nilpotent Lie algebras of sixth order, *Izv. Vysch. U. Zaved. Mat.* **4** (5) (1958), 161 – 171.

[15] Umlauf, K.A., "Über die Zusammensetzung der endlichen continuierlichen Transformationsgruppen insbesondere der Gruppen vom Range null", Thesis, Leipzig, 1891.

[16] Vergne, M., Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes, *Bull. Soc. Math. France* **98** (1970), 81 – 116.

[17] Wolfran, S., "Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer", Addison-Wesley, 1991.