**LEVANTAMIENTO DE UN EDIFICIO MEDIANTE LA APLICACIÓN DEL PROBLEMA DE LA GALERÍA DE ARTE**

Elena CABRERA REVUELTA
Borja MOLERO ALONSO
José Antonio BARRERA VERA
María José CHÁVEZ DE DIEGO

Universidad de Sevilla
Departamento: Ingeniería Gráfica. Expresión Gráfica Arquitectónica

Resumen/Abstract

Currently, the graphical representation of our surroundings has got a great importance. In a few years there has been a breakthrough in the technology for image acquisition.

In the same way that progress has been made in this regard, an investigation has been started in order to propose improvements in the procedures used by industry professionals topographical through the application of some optimization techniques based on mathematical techniques (Lighting System Problems) in order to find what is the minimum number of points of view from which a person will be able to obtain a complete sight of a building from the outside of it. This would avoid to waste time in unnecessary views of the survey, to increase the efficiency of the work and avoid wasting time.

Once a methodology has been designed to minimize the number of positions, it has been put into action in a real building.

**INTRODUCCIÓN**

La idea de la presente investigación surge al observar cómo se procede a realizar un levantamiento arquitectónico de cualquier edificio. El realizar un estacionamiento requiere emplear un tiempo considerable; es por ello, que sería de gran utilidad conocer de antemano cuáles son los puntos clave en los que se tendrían que estacionar, para así realizar este proceso el mínimo número de veces posible, obteniendo así un resultado óptimo. [Cabrera, 2010]

También se ha de tener en cuenta el hecho de que conocer previamente cuántos estacionamientos se van realizar, permite estimar el tiempo que se va a emplear en completar el trabajo de campo, e incluso, dar un presupuesto ajustado.

La investigación que se presenta trata de un trabajo de frontera entre dos áreas de conocimiento distintas: la Matemática Aplicada y la Ingeniería Gráfica. Es por ello que se en la presente comunicación se hará más hincapié en los conceptos matemáticos, al ser los más desconocidos en nuestro campo.

Los Problemas de Optimización se solucionan mediante Técnicas de Optimización Combinatorias, y entre los distintos tipos de problemas, esta investigación se centra en los denominados Problemas de Iluminación. Pueden servir como referencia las siguientes situaciones que ponen de manifiesto la utilidad de la optimización combinatoria en problemas que se plantean en la vida cotidiana: colocación de luminarias, de sensores de movimiento, de sensores de humos o cámaras de seguridad... Todas ellas encuentran solución con las técnicas de optimización que se quiere aplicar a nuestra problemática.

***Problemas de iluminación.***

Hoy en día las salas de los nuevos museos no tienen, en general, formas regulares en sus plantas, lo que da lugar a interesantes problemas de iluminación. La irregularidad obliga a realizar un estudio para economizar el gasto en luminaria. Así se plantea el problema de minimizar el número de luces que son necesarias para iluminar cualquier sala.

La cuestión fue planteada por V. Klee en 1973 [Hernández, 2001, p.2] de esta forma: *Determinar el mínimo número de puntos de un polígono suficientes para ver a todos los restantes.*

Se puede interpretar también en términos de vigilancia de una sala poligonal: ¿Cuántos guardias (o cámaras de vigilancia que cubran 360º) son suficientes para vigilar el interior de un polígono de $n$ lados?

La respuesta a este problema fue obtenida por Chvátal en 1975 [Morales, 2006, p.1], quien demostró que $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ guardias siempre son suficientes.

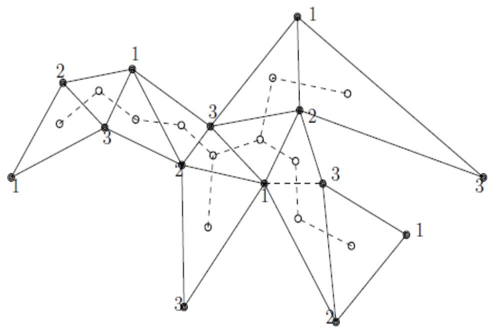


Fig.1: Polígono triangulado, 3-coloreado y su grafo dual. 2006. Morales.

En la Figura 1, puede apreciarse un polígono irregular cuyo interior se ha triangulado. Los vértices de cada triángulo se han coloreado (en este caso, se han numerado) de forma que dos vértices contiguos no posean la misma numeración. Es posible colorear los vértices de los triángulos con tan solo tres colores, esto es lo que se denomina Tricolorear los vértices del polígono. Así pues, si se colocan guardias en los vértices que comparta la misma numeración, se asegura la completa vigilancia del polígono, ya que cada triángulo tendrá un vértice del color elegido.

El problema anteriormente descrito fue el primero que se planteó, dando paso a casos particulares que también fueron obteniendo resultado. Entre ellos, se pueden enumerar:

- Vigilancia de polígonos con hoyos en su interior: polígonos que en su interior presenta algún tipo de obstáculo, como puede ser algún pilar u otro elemento que dificulte la visibilidad.

- Vigilancia de polígonos ortogonales: estos polígonos presentan la propiedad de que pueden cuadricularizar, en lugar de triangular.

- Vigilancia del interior y del exterior de un polígono (Problema de la Prisión): se pretende vigilar el exterior de un polígono, a la vez que el interior del mismo.

- Vigilancia del exterior de un polígono (Problema de la Fortaleza): este problema trata de vigilar el exterior de un polígono desde el contorno mismo.

**OBJETIVOS**

Como ya se ha comentado anteriormente, el objetivo principal de la investigación es el de encontrar una metodología que se llevará a cabo como un trabajo previo al trabajo de campo de topografía, con el fin de minimizar el número de posicionamientos en la realización de un levantamiento topográfico.

Esta minimización del número de posicionamientos en puntos de lectura trae consigo una reducción del tiempo a emplear en el trabajo de campo. Esta metodología puede ser puesta en práctica por cualquier persona, sin importar que se posea o no una gran experiencia realizando esta labor, así, el profesional se asegurará de que se obtendrá un buen resultado.

Por otro lado, los objetivos concretos de esta comunicación son los siguientes:

- Introducir al lector en los problemas de Iluminación.
- Señalar los distintos problemas que se han ido encontrando a lo largo de los años con respecto a la optimización en cuanto a la vigilancia de un objeto.
- Estudiar la técnica que más se adapta al problema que nos encontramos en el campo de la Topografía.

- Mostrar la metodología que se puede llevar a cabo para realizar un estudio previo al trabajo de campo de un levantamiento arquitectónico.
- Aplicar la metodología a un edificio real, y realizar el levantamiento del mismo.

**CONTENIDO**

## 1. <u>Problemas de iluminación</u>

### 1.1 Problema de la Galería de Arte.

El primer problema de Iluminación que se plantea, es el denominado Problema de la Galería de Arte, como ya se ha expuesto anteriormente. Este problema fue resuelto de la forma que se explica a continuación.

Teorema de Chvátal [Morales, 2006, p.14]: $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ *guardias son suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar el interior de cualquier galería de arte con* $n$ *vértices.*

**Algoritmo** [Morales, 2006, pp.16-17]

- Entrada: Polígono $P$
- Salida: Posiciones de los guardias del tal forma que vigilen todo $P$

1. Triangular $P$
2. Asignamos una 3-coloración a los vértices de $T$
3. Colocar un guardia en cada elemento de la clase cromática de menor cardinalidad.

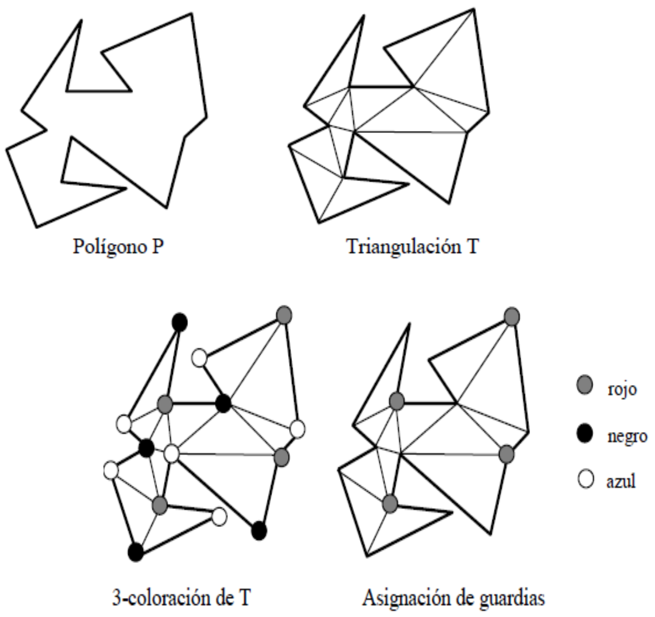



Fig.2: Algoritmo de la Galería de Arte. 2006. Morales.

### 1.2 Variantes del Problema de la Galería de arte.

Más adelante, se plantean otros tipos de problemas, como el de vigilar polígonos con hoyos. Si una galería contiene obstáculos en su interior (pilares, tabiques…), se trata de un polígono con hoyos. Se demuestra que $\left\lfloor \frac{n+h}{3} \right\rfloor$ guardias en puntos son suficientes para vigilar cualquier galería de arte con *h* hoyos [Morales, 2006, p.17].

Por otro lado, se plantea el Problema de Hadwiger ¿Cuántos reflectores se necesitan para iluminar el contorno exterior de una figura plana, compacta, convexa y de borde liso? Boltjansky probó en 1960 que tres reflectores son siempre suficientes. [Hernández, 2001, p.1]

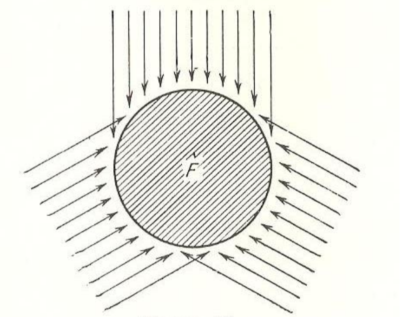


Fig.3: Direcciones necesarias para iluminar a un cuerpo convexo. 1985. Boltjansky y Gohberg.

**También se realiza un estudio de los polígonos ortogonales. Estos son aquellos cuyos lados forman siempre ángulos interiores de 90º o 270º. Se demuestra que** *Cualquier polígono ortogonal con $n$ vértices puede vigilarse con a lo más $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ guardias* [Morales, 2006, p.41]. (Figura 4)

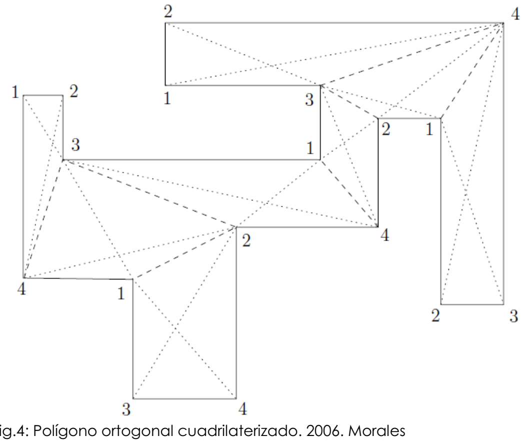


Fig.4: Polígono ortogonal cuadrilaterizado. 2006. Morales

Más adelante, se plantea el problema de vigilar una prisión, tanto su exterior como su interior. ¿Cuántos guardias son suficientes para vigilar simultáneamente el interior de un polígono ortogonal simple? Se demuestra que $\left\lfloor \frac{5n}{12} + 2 \right\rfloor$ *guardias en los vértices son suficientes para proteger el interior y exterior de un polígono ortogonal $P$ con $n$ vértices.* [Hoffman y Kriegel, 1996]

### 1.3 Problema de la fortaleza.

El problema de la fortaleza estudia la vigilancia del exterior de un polígono, obteniendo un número suficiente de guardias para conseguirlo. Toma este nombre por la aplicación a una ciudad fortificada o amurallada que se vigila por todos sus lados para evitar ser invadida. Se plantea del siguiente modo:

¿Cuántos guardias se necesitan para ver el exterior de un polígono de n vértices? Para resolverlo se analizan las posibilidades de colocación de guardias en los vértices del polígono [Domínguez, 2011, p.21]

Algoritmo: [Urrutia, 2004]

• Paso 1: *Cierre convexo*
Encontrar el cierre convexo del polígono *P*.

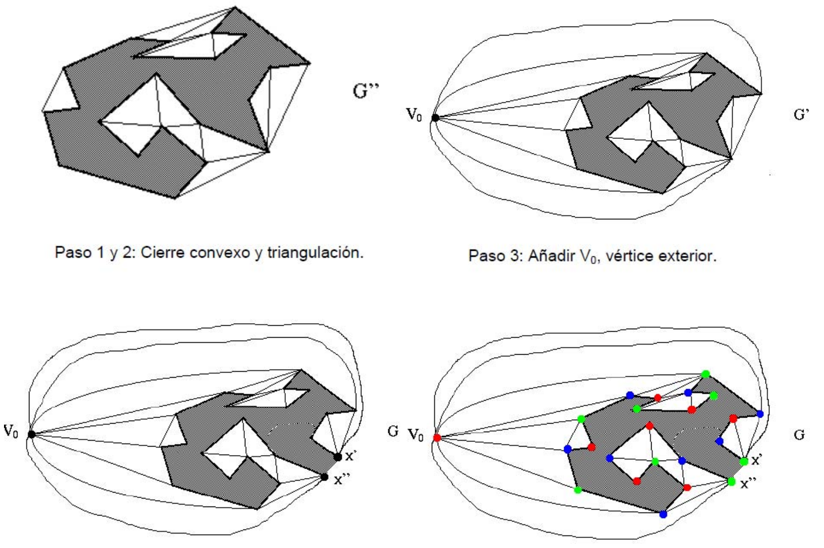
• Paso 2: *Triangulación*
Triangular la porción del plano que se encuentra dentro del cierre convexo, pero es exterior a *P*. En otras palabras, triangular los bolsillos de *P*. Se le llama al grafo resultante *G''*. Se compone de *n* vértices correspondientes a los *n* vértices de *P*.

• Paso 3: *Añadir vértice exterior*
Añadir un vértice llamado $V_0$ fuera del contorno convexo de *P* y hacerlo adyacente a todos los vértices del contorno (es decir, la construcción de unas aristas entre $V_0$ y todos los vértices del cierre convexo). Este nuevo grafo compuesto de [*n* +1] vértices se llama *G* '.

• Paso 4: *División de un vértice y aristas*
Elegir uno de los vértices del cierre convexo, por ejemplo x, y dividirlo en dos vértices x' y x''. Asignar la antigua arista x-$V_0$ a uno de ellos y crear una nueva arista desde el otro vértice a fin de que x' y x'' sean adyacentes a *V0*. Este nuevo grafo compuesto de [*n* + 2] vértices se llama *G*. Ahora, el interior de *P* se convierte en el exterior de *G*. Se dice que *G* es el grafo de la triangulación de un polígono. Esto puede entenderse como "abrir" el cierre convexo en x' y x''. A continuación, se mueve $V_0$ lo suficientemente a la izquierda para ver que todas sus conexiones se convierten en líneas rectas.

• Paso 5: *3-coloración y asignación de guardias*
Puesto que *G* es un grafo de triangulación de un polígono, puede ser 3-coloreable. El color utilizado con menor frecuencia, por ejemplo el azul, no se produce más de $\left\lfloor \frac{(n+2)}{3} \right\rfloor$ veces.

Si $V_0$ no es de color azul (como en la Figura 5), entonces la colocación de los guardias en los vértices azules cubre el exterior del polígono original *P*. Esto se hace con menos de $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ guardias en vértices, ya que $\left\lfloor \frac{(n+2)}{3} \right\rfloor$ siempre es más pequeño que $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.



Paso 1 y 2: Cierre convexo y triangulación. Paso 3: Añadir $V_0$, vértice exterior.

Paso 4: División del vértice x. Paso 5: 3-coloreación y asignación de guardias

Fig.5: Pasos para la colocación de guardias en vértices en vigilancia exterior. 2011. Domínguez

## 2. Metodología a partir del problema de la fortaleza

Tras analizar los distintos problemas de iluminación, y estudiar cuáles son aquellos que más se adaptan a solucionar el problema que se presenta al realizar un levantamiento de un edificio, se llega a la conclusión de que el más similar es el que se ha expuesto por último: El Problema de la Fortaleza.

Sin embargo, hay que tener en cuenta una diferencia: el Problema de la Fortaleza trata de vigilar el exterior de un edificio desde el contorno del mismo, y para realizar un levantamiento se pretende vigilar el contorno de un edificio desde el exterior del mismo.

En principio, vamos a centrarnos en edificios cuya planta sea ortogonal.

Paso 1. Realizar el cierre convexo del polígono P

Paso 2. Triangular las bolsas

En este caso las bolsas ya son de forma triangular.

Paso 3. Añadir un vértice exterior y unir a los vértices que pertenecen al cierre convexo del polígono, tricoloreando los vértices. Se omite el paso de dividir un vértice en dos.

Paso 4. Elegir uno de los colores que pertenezca a los vértices del cierre convexo del polígono. No se eligirá el color que coincida con el vértice externo al polígono, ya que, al no pertenecer al mismo y estar colocado en un lugar aleatorio, no se asegura que se cubra la vigilancia del exterior desde ese punto. Por eso, el color que se elige será siempre aquellos que estén en el cierre del polígono, que nunca coincidirá con el color del vértice añadido, ya que están unidos por una arista.

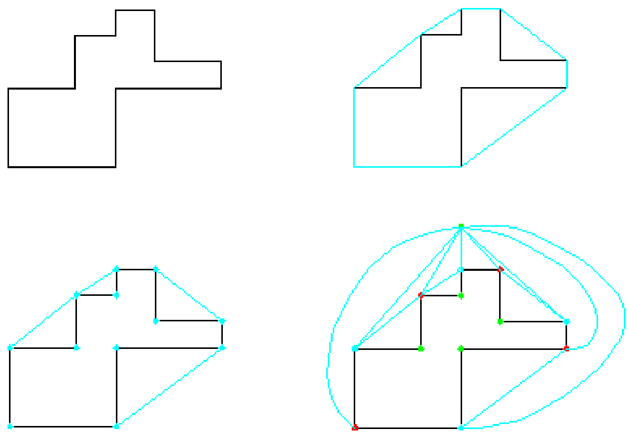


Fig.6: Triangulación exterior de polígono ortogonal. 2012. La Autora

Tal y como se ha comentado anteriormente, el Problema de la Fortaleza trata de vigilar el exterior de un polígono desde los vértices del mismo. Si se colocaran cámaras de seguridad que cubrieran 360 grados, podríamos vigilar tanto el entorno como el contorno exterior del edificio. Sin embargo, no es posible realizar un estacionamiento en un vértice de un edificio… En ese sentido, habrá que delimitar el área dentro de la cual se puede desplazar ese vértice para que no pierda la vigilancia de los lados del triángulo que vigila, es decir, se procede a delimitar el área dentro de la cual se puede trasladar el punto de estacionamiento sin perder la visibilidad de las áreas de los triángulos anexos a ese vértice.

En la mayoría de los casos, la cardinalidad de los vértices que pertenecen al cierre convexo va a ser, sino la misma, muy similar. Es por ello que se deben estudiar ambas soluciones, y elegir la que mejor convenga.

A continuación, se procede al estudio de las áreas de visibilidad, en primer lugar, a partir de los vértices de color Rojo, y seguidamente, a partir de los de color Azul.

4.1 Rojo.

Áreas de visibilidad

El estacionamiento se podrá realizar dentro del área que quede delimitada por la continuación de las aristas que convergen en el punto que se esté estudiando. De esta forma, se observa que el resultado es cuatro estacionamientos.

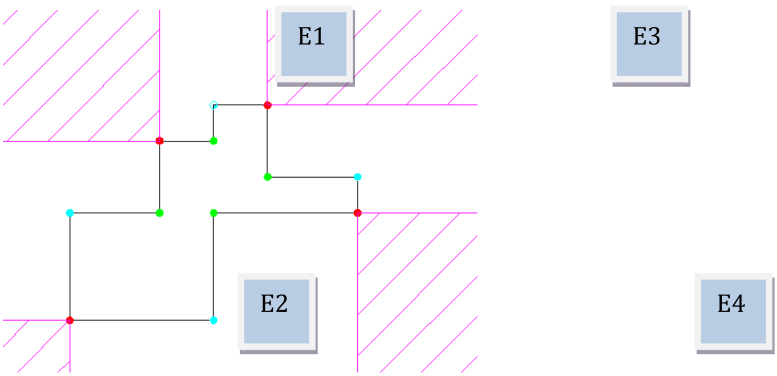



Fig.7: Regiones de visibilidad y número de estacionamientos. 2012. La Autora.

4.2 Azul

Al realizar el mismo procedimiento con los vértices de color azul, se comprueba que bastaría con realizar 3 estacionamientos, ya que las áreas de visibilidad del estacionamiento 1 y del estacionamiento 2 se solapan.

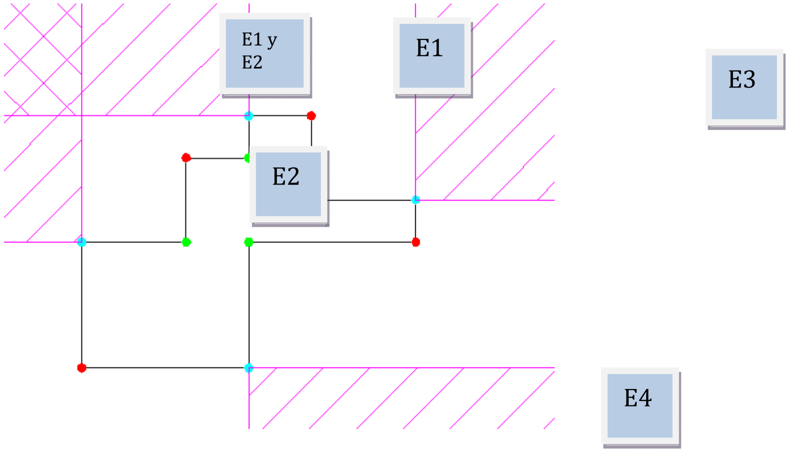



Fig.8: Regiones de visibilidad y número de estacionamientos. 2012. La Autora.

Es importante tener en cuenta el entorno que rodea al edificio, ya que las áreas de visibilidad podrán extenderse más o menos dependiendo de los obstáculos que se puedan dar. También se ha de tener en cuenta que las áreas de visibilidad deben ser regiones convexas.

### 2.1 Caso particular

Con edificios que presentan recovecos habrá que proceder de otra forma.

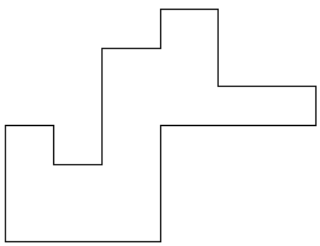


Fig. 9: Planta de edificio ortogonal que presenta recoveco. 2012. La Autora.

Paso 1. Realizar el cierre convexo del polígono
Paso 2. Triangular las bolsas

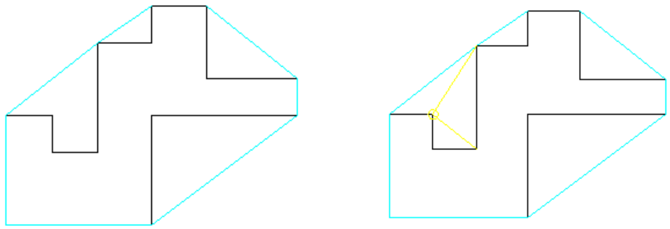


Fig. 10: Cierre convexo y triangulación de las bolsas. 2012. La Autora.

Paso 3. Añadir un vértice exterior y unir a los vértices que pertenecen al cierre convexo del polígono, tricoloreando los vértices.

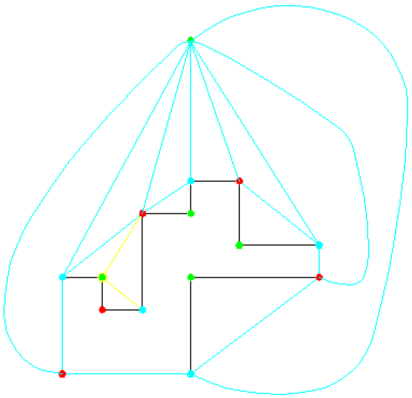


Fig. 11: Triangulación exterior de polígono ortogonal. 2012. La Autora.

Paso 4. Definir el área de visibilidad perteneciente a la parte no convexa (recoveco) del polígono.

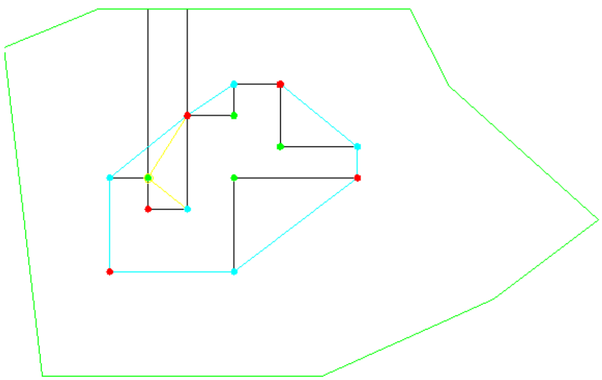


Fig. 12: Región de visibilidad de recoveco. 2012. La Autora.

Paso 5. Elegir uno de los colores que pertenezca a los vértices del cierre convexo del polígono. A continuación, dado que no se puede utilizar un vértice como lugar de estacionamiento, se procede a delimitar el área dentro de la cual se puede trasladar el punto de estacionamiento sin perder la visibilidad de las áreas de los triángulos anexos a ese vértice.

En este caso, cuando se tengan las áreas de visibilidad que pisen con áreas de visibilidad definidas en el paso 4 (las pertenecientes a los recovecos) sólo utilizaremos aquella parte que solape con ella.

5.1 Rojo

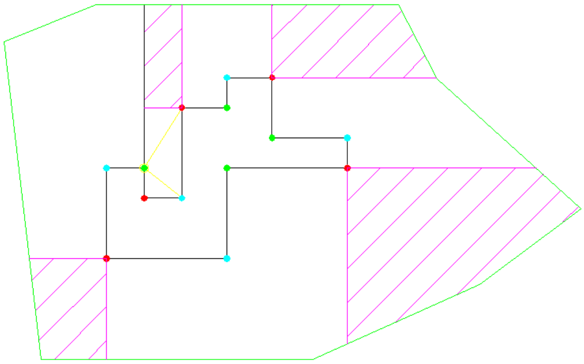


Fig. 13: Áreas de visibilidad. 2012. La Autora.

5.2 Azul

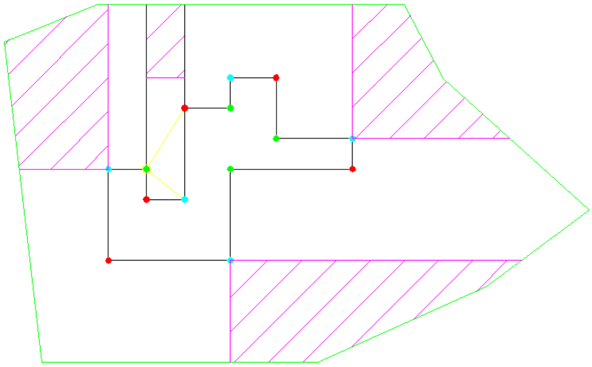


Fig. 14: Áreas de visibilidad. 2012. La Autora.

En ambos caso, el resultado ha sido el mismo número de estacionamientos: cuatro.

Llevando a cabo esta metodología previa al trabajo de campo, se consigue no sólo calcular el número de estacionamientos que van a ser suficientes para dar solución al problema de realizar el levantamiento de un edificio, sino que también se logra conocer el lugar en el que se va a realizar cada uno de los posicionamientos, dando un margen bastante amplio.

No se puede dejar de dar importancia al croquis previo a partir del cual se realizará este estudio, ya que éste debe incluir con la mayor precisión posible, los obstáculos que pueden presentarse en la visibilidad. Es fundamental el comprobar, una vez en campo, que al realizar un estacionamiento, haya completa visibilidad de las partes del edificio que se ha fijado en el trabajo previo.

## CONCLUSIONES

La metodología expuesta anteriormente logra dar un número suficiente, pero no tiene porqué ser el mínimo número de estacionamientos, que dan solución al problema de levantar un edificio.

Tras este estudio, la metodología diseñada se ha puesto en práctica en un edificio real que se encuentra situado en el Campus Universitario de Reina Mercedes en Sevilla, cuyo croquis es que se puede ver en la Figura 14.

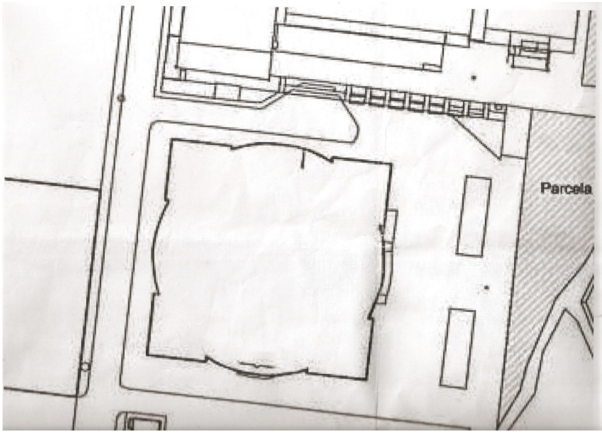



Fig. 15: Croquis del edificio a levantar. 2012. Aguilar y Granado.

A partir del croquis realizado, se procede a aplicar la metodología anteriormente explicada (Figura 16).



Paso 1. Se realiza el cierre convexo de la figura.

Paso 2. Se Añade un vértice exterior, el cual sería de color verde (se omite en la imagen), tricoloreando los vértices del polígono de la planta de la figura, dando colores alternos (azul y rojo) a los que pertenecen al cierre convexo del mismo.

Paso 3. Se estudian las áreas de visibilidad de los vértices perteneciente al cierre convexo. El número de estacionamientos es 8, para el color azul. Sin embargo, eligiendo las áreas de visibilidad de los vértices de color rojo, éstas se solapan de dos en dos. Por lo tanto, realizando los estacionamientos en cuatro posiciones, obtenemos una visión completa del edificio. Estos cuatro estacionamientos deben estar situados frontalmente a cada una de las fachadas.

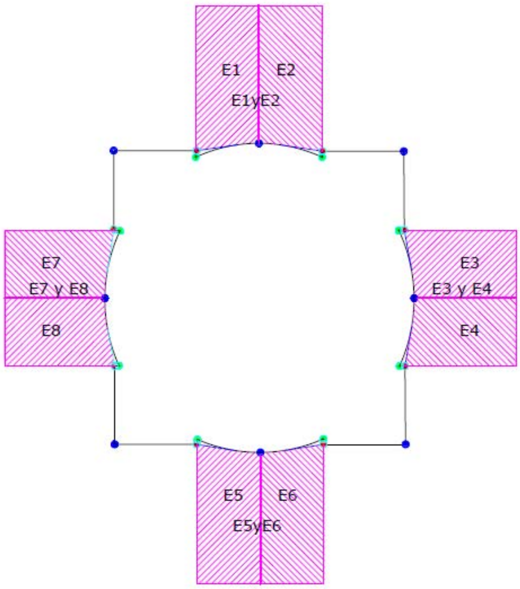



Fig. 16: Aplicación de la metodología sobre el edificio a levantar. 2012. La Autora.

Una vez realizado este trabajo previo, se procede a realizar el levantamiento. La máquina que se utiliza es una estación total Leica FlexLine TS02. Se realiza una lectura de los puntos de la fachada mediante distanciómetro Láser de 30 metros de alcance.

Tras conocer los puntos desde los que va a realizarse la lectura, observamos que no se impone la necesidad de que exista visibilidad entre un punto de estacionamiento y el consecutivo. Es decir, no se trata de realizar un levantamiento mediante un itinerario cerrado, sino de un levantamiento con estacionamiento libre y enlace indirecto.



La forma en la que se procede es la siguiente:

1. Se realiza el primer estacionamiento desde la Base 1 (B1) a la cual se le asigna las coordenadas 1000, 1000, 100.
2. Se procede a realizar la lectura de aquellos puntos de la fachada que delimitan el contorno de la misma. Esta lectura se realiza con distanciómetro láser.
3. Se establecen tres puntos, que son llamados bases, por cada estacionamiento. Estas bases servirán como enlace entre un punto de lectura y el siguiente. Estos tres puntos, serán puntos visibles desde una base de lectura y la consecutiva, y formarán el triángulo lo más amplio que sea posible. Así pues, conoceremos las coordenadas de los puntos de estacionamiento a partir de haber dado coordenadas solamente al primer punto. Para realizar la lectura de estos puntos, se utiliza lectura con prisma.
4. Una vez tomados los datos necesarios, se procede a la descarga de los puntos leídos a nuestro equipo a través de una memoria USB.
5. A través el software Autocad se puede trabajar con la nube de puntos y realizar el plano del edificio.

En la imagen se puede observar el croquis realizado en campo para establecer las bases de posicionamiento y las bases de enlace.

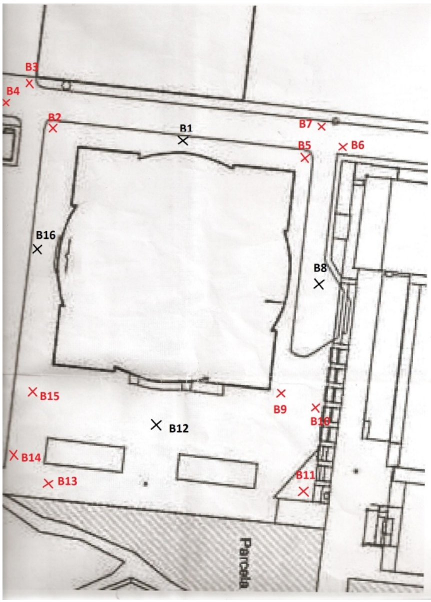



Fig. 17: Croquis con las bases que se han utilizado para el levantamiento. 2012. La Autora.

Conclusiones finales:

- Se demuestra a través del trabajo realizado que es posible aplicar técnicas de optimización combinatoria al problema que se plantea al realizar el levantamiento de un edificio.
- Realizando este estudio previo, se reduce el tiempo a emplear en trabajo de campo, evitando el tener que volver al lugar donde se encuentre situado el edificio al detectar que faltan datos una vez se esté realizando el trabajo de Gabinete.
- Esta metodología debe mejorarse y ampliarse para distintos tipos de edificios que presenten características singulares en su geometría.
- También se pretende ampliar la investigación para lograr realizar levantamientos en fachada, no sólo planimétricos. La dificultad con la que nos encontramos al intentar hacer frente a este problema es la restricción en cuanto al alcance del distanciómetro láser.

Aguilar Camacho, J. y Granado Castro, G. "Cuadernillo de prácticas de Topografía y Replanteos". Universidad de Sevilla. 2012.

Almagro Gorbea, A. "Levantamiento Arquitectónico", Universidad de Granada, Granada 2004.

Barrera Vera, J.A. Tesis Doctoral "Aplicación de tecnologías innovadoras en la documentación geométrica del Patrimonio Arquitectónico y Arqueológico". Universidad de Sevilla (Lectura y defensa en 2007).

Cabrera Revuelta, E. Trabajo Final de Máster "Optimización en el Posicionamiento de Estaciones Topográficas en Levantamiento de Edificios". Universidad de Sevilla (Lectura y defensa en 2010).

Domínguez Durán, I. Trabajo Final de Máster "Optimización de estacionamientos en levantamientos arquitectónicos de exteriores". Universidad de Sevilla (Lectura y defensa en 2011)

Hernández Peñalver, G. "Iluminación y Vigilancia en Galerías de Arte". Facultad de Informática. Universidad Politécnica de Madrid. Madrid 2001.

Hoffman, F. y Kriegel, K. (1996). "A graph-coloring result and its consequences for polygonguarding problems". SIAM Journal. Discrete Math, 9(2):210–224.

Jiménez Martín, A. y Pinto Puerto, F. "Levantamiento y Análisis de Edificios. Tradición y Futuro", Universidad de Sevilla, Secretariado de Publicaciones, Sevilla 2003.

Morales Ponce, O. Tesis Doctoral. "Vigilando Poliedros Ortogonales 3D". Universidad Nacional Autónoma de México, México D.F (Lectura y defensa en 2006).

Urrutia, J. "Art Gallery and Illumination Problems", Universidad Nacional Autónoma de México, México D.F 2004.