

М. Кравчук.

Про Green'ове та Stokes'ове перетворення.

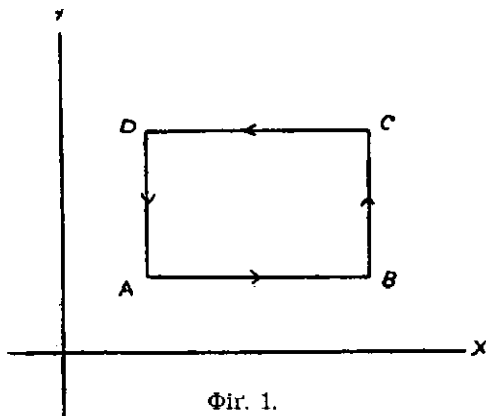
[Über die Sätze von Green und Stokes von M. Krawtchouk].

I. Перетворення криволінійного інтеграла в подвійний на площі.

Із різних способів доводу рівності

$$(1) \int_C [P(x, y)dy - Q(x, y)dx] = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy,$$

де C є замкнений контур без кратних точок, а S — обмежена ним частина площі XY , наступний спосіб, гадаємо, має деякі переваги завдяки ширині тих обмежних умов, що він їх потребує, та відповідності фізичному змістові твердження, що може бути висловлений так: потік вектора (P, Q) через плоский контур C дорівнює розбігові того вектора на полі S цього контура. При тім припускаємо, що функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ мають суцільні похідні $\frac{\partial P}{\partial x}$ та $\frac{\partial Q}{\partial y}$ скрізь на полі S (але можуть їх не мати на контурі C), а самі $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ є суцільні на полі S разом із контуром C (отже на множині точок $S+C$) — перша що до змінного x , друга — що до змінного y .



Фіг. 1.

Нехай тим часом контур C є прямокутник $ABCD$ (див. фіг. 1), що має боки рівнобіжні координатним осям, притім

нехай $\frac{\partial P}{\partial x}$ та $\frac{\partial Q}{\partial y}$ існують і є суцільні не тільки на полі S цього контура, але й на множині $S+C$. Тоді, з огляду на те, що на боках AB та CD буде $dy=0$, маємо:

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y) dy &= \int_{BC} P dy + \int_{DA} P dy = \int_{BC} P dy - \int_{AD} P dy = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_1}^{y_2} P dy \right) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial x} dy dx = \int_S \frac{\partial P}{\partial x} dx dy, \end{aligned}$$

де x_1 — абсциса точок A та D , x_2 — абсциса точок B та C , y_1 — ордината точок A та B , y_2 — ордината точок C та D .

Так само для контура $ABCD$ можна довести, що

$$\int_C Q(x, y) dx = - \int_S \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy.$$

Отже звір (1) доведено для зазначеного частинного випадку. Далі ясно, що він тим самим є доведений для всякого поля S_1 , що разом зі своїм обводом C_1 належить до загального поля S в (1) і складається з довільної кількості прямокутників, які мають боки рівнобіжні координатним осям (див. фіг. 2).

Отже, щоб довести теорему у випадку довільного контура C , треба лише показати, що різниця (див. фіг. 2)

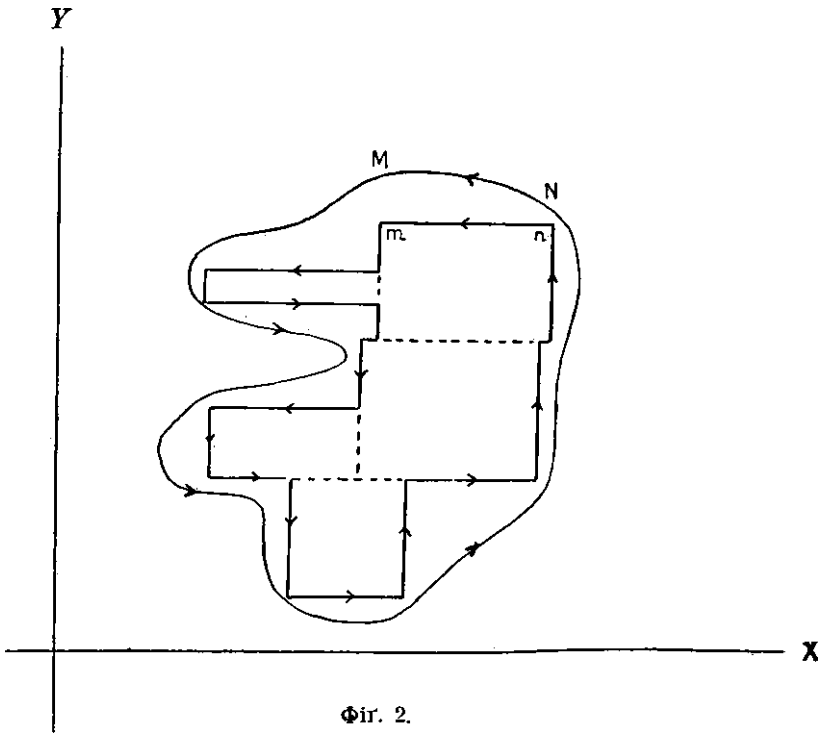
$$\int_C (P dy - Q dx) - \int_{C_1} (P dy - Q dx)$$

іде до нуля, коли до нуля йде віддаль між контурами C та C_1 , взята так у напрямі осі X -ів, як і в напрямі осі Y -ів. А для цього досить завважити, що нпр. величина

$$\left| \int_{MN} Q dx - \int_{mn} Q dx \right|$$

(див. фіг. 2), де частину MN обводу C та частину mn обводу C_1 узято так, що вони мають спільну проєкцію на осі X -ів, не перевищує добутку з довжини mn та з найбільшої вартости функції

$$T = | Q(x, y') - Q(x, y'') |,$$



Фиг. 2.

де (x, y') є довільна точка дуги MN , а (x, y'') — точка з тою самою абсцисою на відтинку mn ; далі, повторивши що до функції $Q(x, y)$, з очевидними відмінностями, відомий Weierstrass'ів довід одностайної суцільності суцільної функції в замкненім обсягу, дістанемо, що T одностайно йде до нуля разом із величиною $|y' - y''|$. Отож йде до нуля й

$$\left| \int_C Q dx - \int_{C_1} Q dx \right|,$$

як що C має обмежену довжину.

Подібні міркування можна навести й що до величини

$$\left| \int_C P dy - \int_{C_1} P dy \right|.$$

Рівність (1) доведена.

Зовсім подібно можна довести й рівність

$$(2) \quad \int_C [P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

як що функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ мають на полі S суцільні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$, а самі $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ є суцільні на множині точок $S+C$ — перша що до змінного y та друга що до змінного x . Зміст рівності (2) можна висловити так: робота вектора (P, Q) на плоскій контурі C дорівнює його вирові на полі S того контура.

Взір (1) є т. зв. Green'ове перетворення на площі, а взір (2) — перетворення Stokes'ове.

2. Поглиблення попередніх вислідів.

Самий довід попереднього параграфу показує, що рівність

$$(3) \quad \int_C Q(x, y)dx = - \iint_S \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy$$

лишиться правдива, коли подані там обмежні умови змінити так:

1. Замість вимоги, щоб довжина C існувала, можна взяти лише вимогу, щоб сума боків контура C_1 , рівнобіжних осі X -ів, була обмежена (отже нпр. у жадній точці контур C може не мати дотичної, ба навіть C може не мати певної довжини в узагальненім розумінні¹⁾).

2. Замість фактично використаної в доводі вимоги, щоб крива C квадрувалася, отже щоб поле S мало певну величину, як границю величини поля S_1 , можна, не вимагаючи навіть суцільності кривої C , обмежитися вимогою, щоб існував такий контур серед контурів C_1 , який майже скрізь бувби довільно близький до C .

Окрім того, в рівності (3) інтеграли можна брати в Lebesgue'овім розумінні, замінивши поле S його осередньою мірою, а існування та суцільності похідної $\frac{\partial Q}{\partial y}$ вимагати не скрізь, а майже скрізь на полі S .

¹⁾ Про узагальнене поняття довжини кривої див. нпр. роботу Scheffer'a в Acta Mathematica. t. 5.

3. Застосування до функцій комплексного змінного.

Доведімо помічну теорему:

Коли функція $u(x, y, \dots)$ має перші похідні по всіх змінних в усіх точках обсягу S та є одностайно суцільна в цім обсягу, то ті похідні є самі одностайно суцільні в обсягу S .

Обмежуючися випадком двох незалежних змінних, маємо довести рівність:

$$\lim_{h, k=0} \left| u'_x(x+h, y+k) - u'_x(x, y) \right| = 0.$$

Для цього покажімо вперед, що

$$(4) \quad \left| u'_x(x, y) - \frac{u(x+H, y) - u(x, y)}{H} \right| < \frac{E_n}{2},$$

де

$$E_n \rightarrow 0, \quad \text{коли} \quad H \rightarrow 0$$

і E_n не залежить від вибору точки (x, y) в обсягу S , аби лише й точка $(x+H, y)$ до нього належала. Використовуючи знов ту саму Weierstrass'ову думку, припустімо, що остання нерівність неправдива, отже що, хоч якеб мале не брати $|H|$, все знайдуться на S такі точки (x, y) , що в них буде

$$\left| u'_x(x, y) - \frac{u(x+H, y) - u(x, y)}{H} \right| \geq E > 0,$$

де E є якась стала величина. Тоді те саме можна твердити і про одну (що найменше) з довільного числа яких-небудь частин, на які поділимо S ; ділячи цю частину на дрібніші частки і повторюючи це міркування без кінця, прийдемо до висновку, що нерівність (4) є неправдива в якійсь певній граничній точці (point limite) обсягу S , що можливо лише тоді, коли ця точка не належить до S .¹⁾

Отож, коли точки $(x+h, y+k)$ та $(x+h+H, y+k)$ належать до S , то (4) дає:

$$\left| u'_x(x+h, y+k) - \frac{u(x+h+H, y+k) - u(x+h, y+k)}{H} \right| < \frac{E_n}{2}.$$

Комбінуючи останню нерівність із (4), легко дістанемо:

¹⁾ Пор. замітку E. Goursat в Transactions of the American Math. Society I, 1900. Він доводить ту саму нерівність (4) (для випадку, коли u є функція комплексного змінного), беручи замкнений обсяг S .

$$(5) \quad \left| u'_x(x+h, y+k) - u'_x(x, y) - \frac{u(x+h+H, y+k) - u(x+H, y)}{H} + \frac{u(x+h, y+k) - u(x, y)}{H} \right| < E_\kappa.$$

А що, з огляду на суцільність функції u можна числа $|h|$ та $|k|$ взяти такі малі, щоб було:

$$\left| u(x+h, y+k) - u(x, y) \right| < \frac{|H|^2}{2}$$

в усіх точках обсягу S , то (5) дає:

$$\left| u'_x(x+h, y+k) - u'_x(x, y) \right| < E_\kappa + |H|,$$

що й доводить теорему.

Припустімо тепер, що у функцій $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ параграфу 1 існують одночасно всі перші похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}$$

в усіх точках обсягу S , а самі функції є суцільні на множині точок $S+C$. Тоді одночасно будуть правдиві обидва взори (1) та (2), отже й рівність:

$$\begin{aligned} - \int_C (Pdy - Qdx) + i \int_C (Pdx + Qdy) &= - \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy + \\ &+ i \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned}$$

бо похідні від P та Q , як доведено, є суцільні в усіх точках поля S .

Остання рівність дає узагальнення основної теореми з теорії функцій комплексного змінного, т. зв. теореми Cauchy-Goursat:

Коли функція

$$f(z) = Q(x, y) + iP(x, y)$$

комплексного змінного

$$z = x + iy$$

має похідну

$$f'(z) = \frac{\partial Q}{\partial x} + i \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} - i \frac{\partial Q}{\partial y}$$

в усякій осередній точці обсягу S і є суцільна на множині точок $S+C$, де C є границя поля S , то

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Узагальнення полягає в тім, що не вимагається існування похідної $f'(z)$ на контурі C , і що твердження лишається правдиве при поширених умовах параграфу 2.

4. Green'ове перетворення в просторі.

У тривимірнім просторі рівність подібна до взору (1) є

$$(6) \iint_S (Pdydz + Qdzdx + Rdx dy) = \iiint_V \left(\pm \frac{\partial P}{\partial x} \pm \frac{\partial Q}{\partial y} \pm \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

де V є якийсь обмежений об'єм, а S — його поверхня. Тут ізнов припускаємо, що в осеред об'єму V функції P , Q , R змінних x , y , z мають суцільні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial z},$$

а на множині точок $V+S$ самі функції P , Q та R суцільні — перша що до змінного x , друга що до y і третя що до z .

Перший довід рівності (6). Міркуваннями подібними до тих, що подано при доводі рівності (1), легко довести, що коли V є об'єм рівнобіжностінника, якого стіни є рівнобіжні координатним площам, причім $\frac{\partial P}{\partial x}$ існує і є суцільна також і на поверхні S цього рівнобіжностінника, то

$$\iint_S Pdydz = \pm \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz$$

Так само

$$\iint_{S_1} Pdydz = \pm \iiint_{V_1} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz,$$

де V_1 є об'єм складений із рівнобіжностінників, що мають стіни рівнобіжні координатним площам і цілком належать до об'єму V в (6), а S_1 — його поверхня.

Нарешті граничний перехід, коли точки поверхні S_1 нескінченно зближуються до S , доведе рівність (6) у випадку:

$$Q = \text{const}, \quad R = \text{const}.$$

Повторюючи подібні міркування що до функцій Q та R доведемо (6) цілком.

Узагальнення обмежних умов що до множин точок V та S , а також що до функцій P, Q, R , подібні до тих, що дано в параграфі 2, зробити не трудно.

Другий довід рівності (6). Обмежмося тут тим випадком, коли проста рівнобіжна осі Z -ів може мати з поверхнею S не більше як дві спільні точки. Визначмо на S криву $C(z)$ умовою:

$$z = \text{const};$$

ця крива є замкнена. Тоді

$$(7) \quad \iint_S Pdydz = \int_{z=z_0}^{z_1} \left(\int_{C(z)} Pdy \right) dz,$$

де z_0 є найменша, а z_1 — найбільша з координат z точок поверхні S . З другого боку, на підставі взору (1), маємо:

$$\int_{C(z)} Pdy = \iint_{S(z)} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy,$$

де $S(z)$ є поле плоскої кривої $C(z)$; а тоді (7) перепишеться так:

$$\iint_S Pdydz = \int_{z_0}^{z_1} \left(\iint_{S(z)} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy \right) dz;$$

ця рівність є, очевидно, тотожна з

$$\iint_S Pdydz = \iiint_V \pm \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz.$$

Не спиняємося тут над тим, як до цього доводу пристосувати узагальнення параграфу 2.

5. Stokes'ове перетворення в просторі.

Для простору тривимірного рівність, подібна до рівності (2), є

$$(8) \quad \int_C (Pdx + Qdy + Rdz) = \\ = \iint_S \left[\pm \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) dydz \pm \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) dzdx \pm \right. \\ \left. \pm \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dxdy \right],$$

де C є замкнена просторова крива без кратних точок, а S — яканебудь обмежена нею поверхня. Припускаємо, що в усіх осередніх точках поверхні S функції P , Q та R змінних x , y , z мають суцільні похідні:

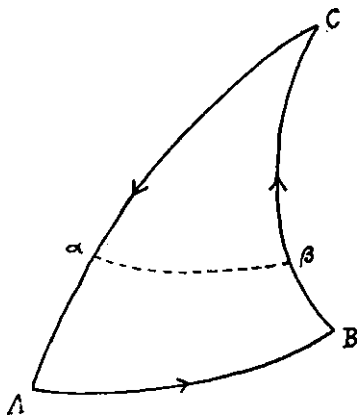
$$\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y},$$

а самі P , Q та R є суцільні на поверхні S разом із її границею C , тоб то на множині точок $S + C$.

Перший довід рівності (8). Дове́дімо (8) тим часом для випадку, коли контур C є криволінійний трикутник, що цілком складається з осередніх точок множини S , причім його боки визначаються рівняннями:

$$x = x_0; \quad y = y_0; \quad z = z_0$$

(див. фіг. 3). Нехай проти боку



Фіг. 3.

$$x = x_0$$

лежить вершок $A (x_1, y_0, z_0)$, проти боку

$$y = y_0$$

вершок $B (x_0, y_1, z_0)$ і проти боку

$$z = z_0$$

вершок $C (x_0, y_0, z_1)$; окрім того, нехай $\alpha\beta$ є лінія перерізу поля цього трикутника площею

$$z = const.$$

З огляду на те, що на лінії BC змінне x не міняється, маємо:

$$\int_{BC} Pdx = 0;$$

Отже

$$(9) \quad \int_{\text{обвід } ABC} Pdx = \int_{AB} Pdx - \int_{AC} Pdx.$$

Далі очевидно

$$(10) \quad \int_{AB} Pdx = \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{\alpha\beta} Pdx \right) dz = \pm \iint_{\text{поле } ABC} \frac{\partial P}{\partial z} dx dz.$$

Так само

$$(11) \quad \int_{AC} Pdx = \pm \iint_{\text{поле } ABC} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

Отже рівність (9), з допомогою (10) та (11), переходить у

$$\int_{\text{обвід } AB} Pdx = \pm \iint_{\text{поле } ABC} \left(\frac{\partial P}{\partial z} dx dz - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \right).$$

Повторивши подібні міркування що до

$$\int Pdy \quad \text{та} \quad \int Rdz$$

доведемо Stokes'ову теорему для випадку, коли крива C є ABC .

Загальний випадок знов доводиться подібно до того, як у параграфі 1. Заповнюємо поверхню S із такою малою недо-стачою, як хочемо, криволінійними трикутниками типу ABC ; це можна зробити нпр. так: поділити поверхню S на смуги рядом рівнобіжних площ

$$z = \text{const},$$

а тоді кожну смугу поділити на трикутники, поперемінно роз-різуючи її то площею

$$x = \text{const},$$

то площею

$$y = \text{const}$$

та належно добираючи за всяким разом числову вартість const . Нехай спільна поверхня цих трикутників є S_1 , а її границя C_1 . Тоді, на підставі того, що в цім параграфі доведено, маємо:

$$\int_{C_1} (Pdx + Qdy + Rdz) =$$

$$= \iint_{S_1} \left[\pm \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) dy dz \pm \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) dz dx \pm \right. \\ \left. \pm \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy \right],$$

а звідси, з допомогою такого самого граничного переходу, як у параграфі 1, прийдемо до (8).

Узагальнення параграфу 2, з відповідними змінами, поширюються й на взір (8).

Другий довід рівности (8). Обмежмося тут випадком, коли не тільки крива C , але й її проєкції на координатних площях XY та XZ не мають кратних точок; нехай ці проєкції є C_x та C_y , а поля ними обмежені S_x та S_y . Тоді

$$(12) \quad \int_C P dx = \int_C P dx = \pm \iint_{S_x} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

де похідну $\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)$ треба брати, памятаючи, що z є функція від x та y ; отож (12) можемо переписати так:

$$\int_C P dx = \pm \iint_{S_x} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy = \\ = \pm \iint_{S_x} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \pm \iint_{S_x} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) dx.$$

Останній інтеграл на правій стороні візьмімо вперед по змінному y ($x = const$), а тоді по змінному x ; тоді попередня рівність остаточно напишеться так:

$$\int_C P dx = \iint_{S_x} \left(\pm \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \pm \frac{\partial P}{\partial z} dx dz \right),$$

чого й досить для доводу рівности (8).

Цей довід не так легко надається до взагальнень, про які говорено в першій довіді.