М. Кравчук.

Про остачу Lagrange'вого ряду.

[M. Kravčuk: **Über das Restglied der Lagrange'schen Reihe.]**

Остачу Lagrange'вого ряду:

$$F(x) = F(a) + \frac{t}{1!} F'(a)\,\varphi(a) + \frac{t^2}{2!} [F'(a)\,\varphi^2(a)]' + \ldots + \frac{t^n}{n!} [F'(a)\,\varphi^n(a)]^{(n-1)} + R_{n+1}, \tag{1}$$

де x є корінь рівнання

$$x = a + t\,\varphi(x),$$

представив Чебишев у формі:

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!} \int_a^x \frac{\partial^n}{\partial x^n} [F'(x)(t\varphi(x) + a - y)^n].dx, \tag{2}$$

де по виконанні дії $\frac{\partial^n}{\partial x^n}$ треба покласти $y = x$. Золотарев дав иншу формулу:

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{da^n} \int_a^x F'(x)\,(t\varphi(x) + a - y)^n\, dx. \tag{3}$$

Користаючи з тих самих засобів, що й згадані два автори, ми доведемо, що

$$R_{n+} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^{n-p}}{da^{n-p}} \int_a^x \frac{\partial^p}{\partial x^p} [F'(x)\,(t\varphi(x) + a - y)^n]\, dx, \tag{4}$$

де по виконанні дії $\frac{\partial^p}{\partial x^p}$ треба покласти $y = x$.

Нам доведеться послугуватися наступним взором частинної інтеґрації:

$$(5)\qquad \int F(x,y)\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi=\int F(x,y)dx-\int\left[\frac{\partial}{\partial y}\int F(x,y)dx\right]\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi,$$

що його легко перевірити диференціяцією. Тут x та y є функції незалежних змінних $\xi,\ldots$; перший та третій інтеґрал береться по змінному ξ, другий є частинний інтеґрал по змінному x.

З допомочою взору (5), взявши $\xi=x$, $y=x$, напишемо:

(6)

$$\int_a^x\frac{\partial^n}{\partial x^p}\left[F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^n\right]dx=\Big|_a^x\frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}}\left[F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^n\right]+$$

$$+\,n\int_a^x\frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}}\left[F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^n\right]dx.$$

Коли $p\leqq n$, то (6) можна написати так:

$$(7)\qquad n!\int_a^x\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left[F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^n\right]dx-$$

$$-\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x\frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}}\left[F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^{n-1}\right]dx=-\frac{t^n}{n!}\left[F'(a)\varphi^n(a)\right]^{(p-1)}$$

Подібнож маємо:

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x\frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}}\left[F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^{n-1}\right]dx-$$

$$-\frac{1}{(n-2)!}\int_a^x\frac{\partial^{p-2}}{\partial x^{p-2}}\left[F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^{n-2}\right]dx=$$

$$=-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\left[F'(a)\varphi^{n-1}(a)\right]^{(p-2)}$$

$$(7_1)\qquad \frac{1}{(n-p+1)!}\int_a^x\frac{\partial}{\partial x}\left[F'(x)t\varphi(x)+a-y)^{n-p+1}\right]dx-$$

$$-\frac{1}{(n-p)!}\int_a^x F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^{n-p}dx=-\frac{t^{n-p}}{(n-p)!}F'(a)\varphi^{n-p+1}(a).$$

Додавши рівности (7) та (7_1), дістанемо:

$$(8)\quad \frac{1}{(n-p)!}\int_a^x F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^{n-p}dx - \frac{t^{n-p}}{(n-p)!}F'(a)\varphi^{n-p+1}(a) -$$

$$-\frac{t^{n-p+1}}{(n-p+1)!}\Big[F'(a)\varphi^{n-p}(a)\Big]' - \ldots - \frac{t^n}{n!}\Big[F'(a)\varphi^n(a)\Big]^{(p-1)} =$$

$$= \frac{1}{n!}\int_a^x \frac{\partial^p}{\partial x^p}\Big[F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^n\Big]dx.$$

А що, з огляду на поданий вислід Золотарева, маємо:

$$(9)\quad \frac{d^{n-p}}{da^{n-p}}\int_a^x F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^{n-p}dx =$$

$$= F(x) - F(a) - \sum_{k=0}^{n-p}\frac{t^k}{k!}\Big[F'(a)\varphi^k(a)\Big]^{(k-1)}$$

то, здиференціовавши рівність (8) $n-p$ разів по a, переведемо її на

$$(10)\quad F(x) = F(a) + \sum_{k=1}^{n}\frac{t^k}{k!}\Big[F'(a)\varphi^k(a)\Big]^{(k-1)} +$$

$$+\frac{1}{n!}\frac{d^{n-p}}{da^{n-p}}\int_a^x \frac{\partial^p}{\partial x^p}\Big[F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^n\Big]dx,$$

що й малося довести.

Коли в (10) покласти $p = o$, то остача (4) дістане форму (3), а коли взяти $p = n$, то вона перейде на (2).

Résumé.

Ist x die Wurzel der Gleichung

$$x = a + t\varphi(x),$$

so kann das Restglied der Reihe:

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=1}^{n}\frac{t^k}{k!}\Big[F'(a)\varphi^k(a)\Big]^{(k-1)} + R_{n+1}$$

in folgender Form:

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!}\frac{d^{n-p}}{da^{n-p}}\int_a^x \frac{\partial^p}{\partial x^p}\Big[F'(x)(t\varphi(x)+a-y)^n\Big]dx \qquad (p \leqq n,\ y = x)$$

dargestellt werden.