

DOI [https://doi.org/10.15589/znp2020.1\(479\).12](https://doi.org/10.15589/znp2020.1(479).12)  
УДК 519.3

## FINAL ELEMENTS OF BIKVADRATIC INTERPOLATION: STANDARDS AND ALTERNATIVES

## СКІНЧЕННІ ЕЛЕМЕНТИ БІКВАДРАТИЧНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ: СТАНДАРТИ ТА АЛЬТЕРНАТИВИ

Anatolii N. Khomchenko

khan@chmnu.edu.ua

ORCID:0000-0001-5402-1825

Armen V. Varshamov

nerkakararian@gmail.com

ORCID:0000-0001-6771-943X

А. Н. Хомченко,

докт. фіз.-мат. наук, професор

А. Н. Варшамов,

ст. викладач

*Petro Mohyla Black Sea National University, Mykolayiv*

*Чорноморський національний університет імені Петра Могили, м. Миколаїв*

**Abstract.** The paper deals with finite element (CE) biquadratic interpolation, which together with triangular CE are considered to be the most popular in applied problems. These are isoparametric elements known as serendipity class elements. The main drawback of standard serendipity elements, according to proponents of mechanical analogies, is the physical inadequacy of equivalent nodal “loads” of uniform mass force. This phenomenon of “gravitational repulsion” is sometimes called the Zenkevich paradox, which for the first time in 1971 drew attention to the unnatural spectrum of equivalent nodal forces and severely criticized the phenomenon. It should be noted that Zenkevich, as a co-author of the discovery of standard serendipity CEs, believed that this deficiency could not be eliminated and advised her to put up with it. We will try to rehabilitate standard isoparametric CEs by another interpretation of the integral characteristics of the functions of the influence of the SE nodes. In addition, we will highlight the causes of negative nodal loads and provide a way to construct alternative bases that are free from this drawback. Interestingly, the constructive theory of serendipity approximations allows us to generate mathematically sound and physically adequate alternative models in an unlimited number.

The purpose of this work is to constructively prove the existence of alternative models of serendipity finite elements of biquadratic interpolation. The example of a second-order Q8 finite element illustrates the ability to select a range of equivalent node loads at the user's request. The mathematical validity of the models (within the framework of the Lagrange interpolation hypothesis) and their physical adequacy are ensured. The technique of constructing new basis functions (influence functions) uses a non-matrix procedure of static condensation (reduction). Unlike the standard procedure (Jordan's 1970 recipe), the new procedure generates many new workable finite element models. The presence of a non-nodal parameter makes it possible to control the shaping of serendipity surfaces. Optimization of local and integral characteristics of the model occurs precisely by changing the relief of the surface of the form function. This is the scientific novelty of the results. Note that the new approach preserves cross-element continuity. This means that in practice, standard and alternative models can be assembled without undesirable consequences. The new finite elements significantly add to the lineup of biquadratic interpolation elements. The practical value is the ability to experiment to improve the interpolation properties and computational properties of the model. But it's important to update the finite element lineup in application packages.

**Key words:** finite element method; serendipity elements; physical inadequacy of the node load spectrum; non-matrix condensation procedure.

**Анотація.** Робота присвячується скінченим елементам (СЕ) біквдратичної інтерполяції, які разом із трикутними СЕ вважаються найбільш популярними у прикладних задачах. Мова йде про ізопараметричні елементи, відомі як елементи серендипового класу. Головний недолік стандартних серендипових елементів, на думку прихильників механічних аналогій, полягає у фізичній неадекватності еквівалентних вузлових «навантажень» від рівномірної масової сили. Це явище «гравітаційного відштовхування» інколи називають парадоксом Зенкевича, який вперше у 1971 р. звернув увагу на протиприродний спектр еквівалентних вузлових сил і жорстко критикував цей феномен. Треба зазначити, що сам Зенкевич як співавтор відкриття стандартних серендипових СЕ вважав, що цей недолік усунути неможливо, і радив змиритися з ним. Ми спробуємо реабілітувати стандартні ізопараметричні СЕ шляхом іншої інтерпретації інтегральних характеристик функцій впливу вузлів

СЕ. Крім того, ми вкажемо на причини виникнення від'ємних вузлових навантажень та запропонуємо спосіб конструювання альтернативних базисів, які вільні від цього недоліка. Цікаво, що конструктивна теорія серендипових апроксимацій дає змогу генерувати в необмеженій кількості математично обґрунтовані і фізично адекватні альтернативні моделі.

Мета роботи – конструктивно довести факт існування альтернативних моделей серендипових скінченних елементів біквадратичної інтерполяції. Приклад скінченного елемента другого порядку Q8 ілюструє змогу обирати спектр еквівалентних вузлових навантажень на замовлення користувача. При цьому забезпечується математична обґрунтованість моделей (у рамках інтерполяційної гіпотези Лагранжа) та їх фізична адекватність. Методика побудови нових базисних функцій (функцій впливу) використовує нематричну процедуру статичної конденсації (редукції). На відміну від стандартної процедури («рецепт» Джордана, 1970) нова процедура генерує множину нових працездатних моделей скінченних елементів. Наявність невузлового параметру дає змогу керувати формоутворенням серендипових поверхонь. Оптимізація локальних та інтегральних характеристик моделі відбувається саме шляхом зміни рельєфу поверхні функції форми. В цьому полягає наукова новизна отриманих результатів. Новий підхід зберігає міжелементну неперервність. Це означає, що на практиці можна без небажаних наслідків ансамблювати стандартні та альтернативні моделі. Нові скінченні елементи суттєво поповнюють модельний ряд елементів біквадратичної інтерполяції. Практична значення полягає у змозі експериментувати з метою покращення інтерполяційних властивостей та обчислювальних якостей моделі. Дослідження важливе для оновлення модельного ряду скінченних елементів у пакетах прикладних програм.

**Ключові слова:** метод скінченних елементів; серендипові елементи; фізична неадекватність спектра вузлових навантажень; нематрична процедура конденсації.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Проблема, як завжди в методі скінченних елементів (МСЕ), полягає у побудові базисних функцій, які відповідають інтерполяційній гіпотезі і зберігають міжелементну неперервність. Бажано, щоб інтегральні характеристики базисів були фізично адекватними. Фізична неадекватність – головний недолік стандартних серендипових елементів. Різноманітні приклади практичного застосування МСЕ можна знати в роботах [1–3], що орієнтовані на механіку деформівного твердого тіла. Інформацію про елементи біквадратичної інтерполяції подано в книгах [4–6]. Автори книги [7] багато уваги приділяють математичним аспектам МСЕ. Швидко поширюється видавництво спеціалізованих предметно орієнтованих журналів [11].

Серендипові елементи 2-го і 3-го порядків були відкриті у 1968 р. [15] методом спроб і помилок (підбором). Пізніше ці результати були підтверджені методом оберненої матриці [5; 6], методом [13], методом конденсації (редукції за Джорданом) [7].

Так виникла хибна думка, що задача поліноміальної інтерполяції розв'язується однозначно і лише за допомогою стандартних серендипових елементів. Існування альтернативних базисів на серендипових елементах було доведено конструктивно ймовірнісно-геометричним методом у 1982 р. [9]. Нині теорія серендипових апроксимацій пропонує різні методи моделювання альтернативних серендипових елементів [10; 14; 16].

## МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ

Головна мета цієї статті – показати, як можна звільнити плоский ізопараметричний СЕ від «несподіваного», за словами автора [4], розподілу еквівалентних

вузлових навантажень. Ізопараметричні СЕ відомі фахівцям вже 50 років. Про них написано багато книг і статей. Лише надія сказати щось своє виправдовує чергову спробу повернутися до біквадратичної інтерполяції. Саме на це надихають «несподівані» схеми локалізації розподілених сил у вузлах [4]. О. Зенкевич [5] визнає, що розподіл вузлових навантажень неможливо передбачити. З появою серендипових альтернативних моделей ситуація радикально змінилася. Нині ми знаємо, що розподіл вузлових навантажень можна замовити. Нижче описаний простий і наочний (нематричний!) метод конденсації (редукції), що перетворює лагранжевий СЕ (9 вузлів) на серендиповий (8 вузлів). Наведені приклади альтернативних СЕ є яскравою ілюстрацією ідей академіка В. Арнольда [8] щодо «жорсткого» та «м'якого» математичного моделювання.

## МЕТОДИ, ОБ'ЄКТ ТА ПРЕДМЕТ ДОСЛІДЖЕННЯ

У Задачах моделювання базисів скінченних елементів найбільш поширеним є метод оберненої матриці. Але жорсткі умови теореми Крамера суттєво обмежують можливості конструювання альтернативних базисів. Стандартний елемент – продукт матричного підходу. На жаль, матрична конденсація за рецептом Джордана та нематричний метод Тейлора тільки повторюють результати О. Зенкевича (1968).

Об'єктом наших досліджень є серендипові елементи біквадратичної інтерполяції Q8. Предмет дослідження – альтернативні базиси, здатні звільнити модель від небажаних від'ємних навантажень у кутових вузлах. Ми розглядаємо у певному сенсі обернену задачу. Спочатку замовляємо фізично адекватний спектр вузлових еквівалентних навантажень. Після цього шляхом нематричної конденсації знаходимо відповідний базис, який реалізує замовлений спектр.

**ОСНОВНИЙ МАТЕРІАЛ**

В англomовних джерелах для СЕ біквадратичної інтерполяції використовують абрєвіатури: Q9 – лагранжевий, Q8 – серендиповий. Ми звертаємо увагу читача на простий, наочний і універсальний метод перетворення базису Q9 на базис Q8. Наш підхід принципово відрізняється від стандартної редукції тим, що алгоритм не потребує складання і розв'язування СЛАР  $9 \times 9$  з наступним виключенням дев'ятого параметра. Зміст такої конденсації скоріше фізичний, ніж алгебраїчний. Вона дає змогу генерувати математично обґрунтовані і фізично адекватні функції форми (функції впливу) серендипових елементів Q8. Цікаво, що стандартна модель Ергатудіса, Айронса і Зенкевича є окремим випадком нематричної конденсації. У цій процедурі варіюється параметр, роль якого раніше недооцінювали [5; 7]. На рис. 1 зображено Q9, Q8 і схема Паскаля для біквадратичної інтерполяції.

Важливо зазначити, що альтернативні базиси Q8 з'явилися виключно завдяки 9-му параметру  $x^2y^2$ , який був відхилений попередниками, наприклад [5–7]. Нам будуть потрібні функції форми елемента Q9. Вистачить виписати лише три характерні функції:

$$L_1(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y)x, y,$$

аналогічно  $L_i(x, y)$  для  $i = 2, 3, 4$ ;

$$L_5(x, y) = \frac{1}{2}(1-x^2)(1-y) \cdot y, \tag{1}$$

аналогічно  $L_i(x, y)$  для  $i = 6, 7, 8$ ;

$$L_0(x, y) = \frac{1}{4}(1-x^2)(1-y^2)x, y,$$

Ізопараметрична апроксимація (відновлення) функції  $U(x, y)$  визначається формулою:

$$U(x, y) = \sum_{i=0}^8 L_i(x, y) \cdot U_i, \tag{2}$$

де  $U_i$  – вузлові аплікати поверхні.

Оскільки наша увага прикута до «парадокса Зенкевича», як міру сконцентрованої у вузлах «інформації» беремо еквівалентні вузлові навантаження від одиначної масової сили. У роботі [4] автор розглядає квадратний елемент (рис. 1) з одиначною щільністю. Ми визначаємо вузлові навантаження за формулою інтегрального середнього:

$$\gamma_i = \frac{1}{S} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_i(x, y) dx dy, \tag{3}$$

де  $S$  – площа СЕ, тому щільність  $\rho = \frac{1}{4}$ .

До речі, з ймовірнісної точки зору (3) – це математичне сподівання функції випадкового вектора. Набір  $\{\gamma_i\}$  назвемо спектром вузлових еквівалентних навантажень. Для Q9 спектр має вигляд:

$$\gamma_i = \frac{1}{36}, i = 1, 2, 3, 4; \quad \gamma_i = \frac{1}{9}, i = 5, 6, 7, 8; \quad \gamma_0 = \frac{4}{9}.$$

Треба пам'ятати важливу властивість спектра: сума усіх вузлових навантажень дорівнює 1.

Щоб усунути небажаний центральний вузол, достатньо розподілити  $\gamma_0 = \frac{4}{9}$  між граничними вузлами. Саме в цьому полягає суть конденсації (редукції). Зрозуміло, що способів – множина, але не всі вони дають фізично адекватний спектр. Наприклад, стандартний базис Q8 [4–7]

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y)(-x-y-1),$$

аналогічно для  $i = 2, 3, 4$ ;

$$N_5(x, y) = \frac{1}{2}(1-x^2)(1-y), \tag{4}$$

аналогічно для  $i = 6, 7, 8$ ,

реалізує фізично неадекватний спектр:

$$\gamma_i = -\frac{1}{12}, i = 1, 2, 3, 4; \quad \gamma_i = \frac{1}{3}, i = 5, 6, 7, 8.$$

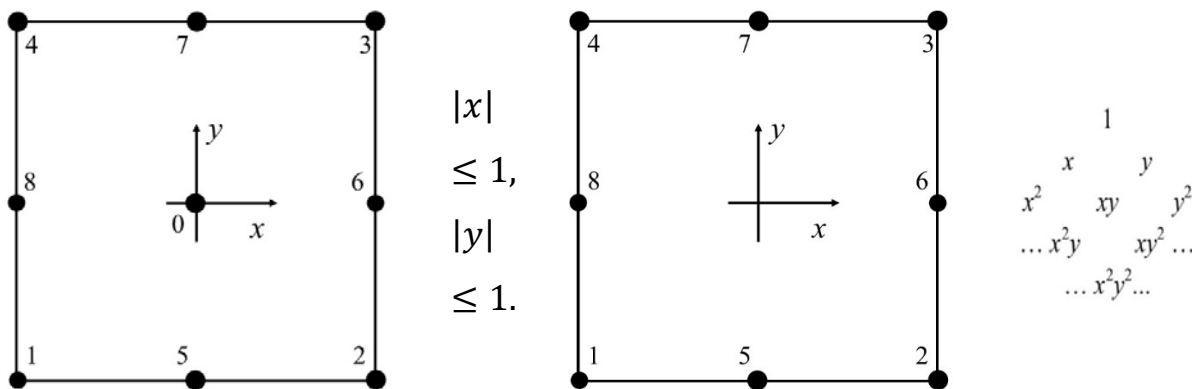


Рис. 1. СЕ біквадратичної інтерполяції (лагранжевий і серендиповий) і схема Паскаля

В умовах, коли базис (4) вважався єдиним і вже застосовувався в пакетах прикладних програм, Джордану [7] довелося винайти химерний «рецепт» конденсації, щоб вийти на стандартний базис (4). Нагадаємо, що Джордан розв'язував за допомогою Q8 задачу про плоскі напругу і деформацію квадратної пластини. Джордан знайшов, що внутрішній вузол можна усунути за допомогою заміни:

$$U_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=5}^8 U_i - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 U_i, \quad (5)$$

Це дає поліном, який все ще інтерполює квадратичну по  $x$  і  $y$  функцію точно, але не має члена із  $x^2y^2$ . Цю функцію можна записати у вигляді

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^8 N_i(x, y) \cdot U_i, \quad (6)$$

де  $N_i(x, y)$  – стандартні функції впливу вузлів  $i$  (4).

Поліноми  $N_i(x, y)$ , як і  $L_i(x, y)$ , задовольняють інтерполяційній гіпотезі Лагранжа:

$$N_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}, \quad \sum_{i=1}^8 N_i(x, y) = 1, \quad (7)$$

Фізично протиприродна формула (5) все-таки містить корисну інформацію і відкриває змогу створити адекватні «рецепти» конденсації.

Зауважимо, що між ваговими коефіцієнтами  $\alpha = -\frac{1}{4}$  і  $\beta = \frac{1}{2}$  є зв'язок  $4\alpha + 4\beta = 1$ . Неважко зрозуміти, що з ваговими коефіцієнтами можна поекспериментувати, не порушуючи балансу. Через  $\alpha$  позначена частка навантаження, яку центральний вузол передає кожному кутовому вузлу. Кожен проміжний вузол SE отримує додаткове навантаження  $\beta \cdot \gamma_0$ . Таким чином, ми маємо просте правило перетворення лагранжевої моделі  $L_i(x, y)$  на серендипову  $N_i(x, y)$ :

$$N_i(x, y) = L_i(x, y) + \alpha \cdot L_0(x, y), \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

$$N_i(x, y) = L_i(x, y) + \beta \cdot L_0(x, y), \quad i = 5, 6, 7, 8; \quad (8)$$

При цьому неважко виключити появу від'ємних навантажень, оскільки  $\alpha$  і  $\beta$  вибираються із фізичних міркувань. Особливість такого підходу в тому, що, усуваючи небажаний центральний вузол, ми зберігаємо дев'ятий моном  $x^2y^2$ .

Лишається навести кілька прикладів з ілюстраціями.

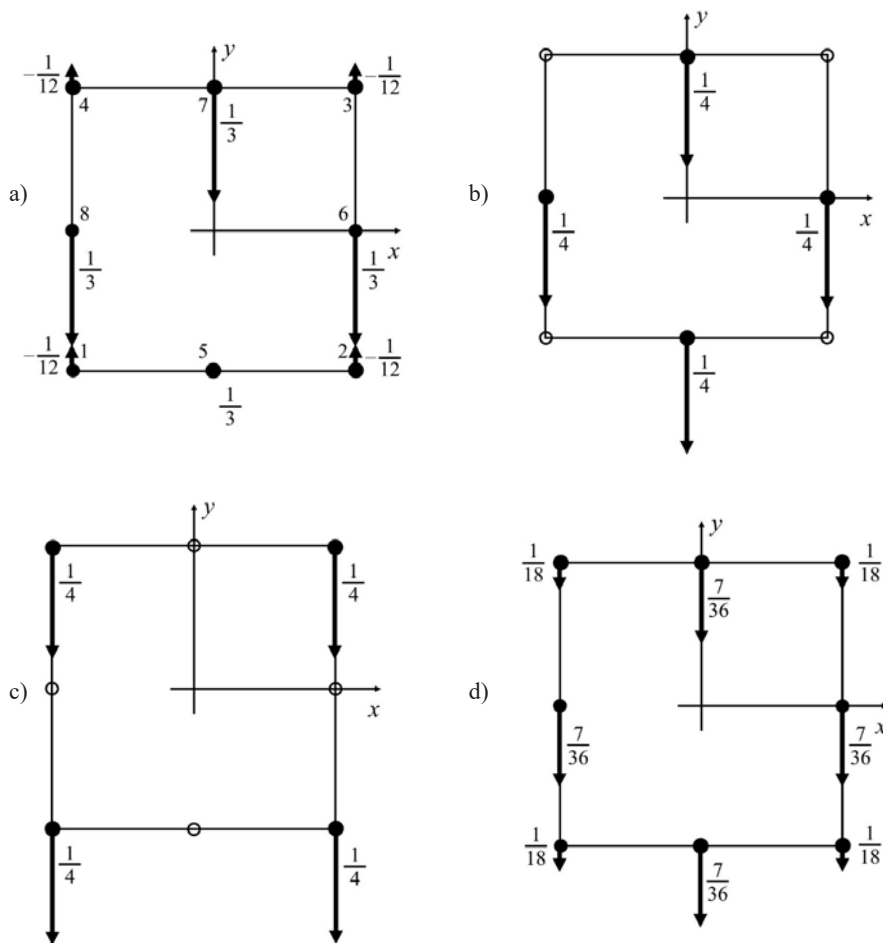


Рис. 2. Схеми локалізації розподілених сил у вузлах

Якщо через  $\bar{\gamma}_i$  позначити вузлове навантаження вузла і елемента Q8 і проінтегрувати (8) за формулою (3), ми отримаємо:

$$\bar{\gamma}_i = \frac{1}{36} + \alpha \cdot \frac{16}{36}, i = 1, 2, 3, 4; \bar{\gamma}_i = \frac{4}{36} + \beta \cdot \frac{16}{36}, i = 5, 6, 7, 8.$$

Тепер зрозуміло, що означає «замовити» спектр. Ми вибираємо «за смаком»  $\bar{\gamma}_i$ , знаходимо, при яких  $\alpha$  і  $\beta$  цей спектр реалізується, і за формулами (8) виписуємо базис Q8 і з 8 функцій впливу. Як бачимо, формули (8) генерують безліч альтернативних базисів і лише один – стандартний (при  $\alpha = -\frac{1}{4}$ ).

На рис. 2 зображені схеми розподілу еквівалентних вузлових сил для різних моделей біквадратичної інтерполяції. Стандартній моделі (4) відповідає рис. 2, а.

Якщо завантажені лише «проміжні» вузли (рис. 2, в),  $\alpha = -\frac{1}{16}$ ,  $\beta = \frac{5}{16}$ . Відповідні функції впливу мають вигляд:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{16}(1-x)(1-y)(-x-y-1+3xy),$$

аналогічно  $N_i(x, y)$  для  $i = 2, 3, 4$ ;

$$N_5(x, y) = \frac{1}{16}(1-x^2)(3y^2-8y+5),$$

аналогічно  $N_i(x, y)$  для  $i = 6, 7, 8$ .

Якщо завантажити лише «кутові» вузли (рис. 2, с),  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = -\frac{1}{4}$ . Відповідні функції впливу мають вигляд:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y)(2x+2y+2+3xy),$$

аналогічно  $N_i(x, y)$  для  $i = 2, 3, 4$ ;

$$N_5(x, y) = \frac{1}{4}(1-x^2)(3y^2-2y-1),$$

аналогічно  $N_i(x, y)$  для  $i = 6, 7, 8$ .

Якщо  $\alpha = \frac{1}{16}$ ,  $\beta = \frac{3}{16}$ , ми отримуємо модель підвищеної точності обчислень. Цей базис було успішно протестовано в задачі про кручення стержня квадратного перерізу [12]. У цьому разі функції впливу мають вигляд:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{16}(1-x)(1-y)(x+y+1+5xy),$$

аналогічно  $N_i(x, y)$  для  $i = 2, 3, 4$ ;

$$N_5(x, y) = \frac{1}{16}(1-x^2)(5y^2-8y+3),$$

аналогічно  $N_i(x, y)$  для  $i = 6, 7, 8$ .

Відповідна схема локалізації вузлових навантажень показана на рис. 2d.

## ОБГОВОРЕННЯ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Запропонована і протестована математично проста і фізично зрозуміла формула нематричної конденсації, яка генерує множину альтернативних моделей (включаючи і стандартну).

Таким чином, наукова новизна – це нова конструктивна версія поліноміальної інтерполяції, нові рецепти нематричної конденсації та нові альтернативні моделі Q8.

Аналогічні питання розглядав у 1970 р. Джордан (Jordan W. B.). Є посилання на його магістерську роботу [7]. Джордан шукав рецепти перетворення лагранжевої моделі Q9 на серендипову Q8. Але в доступній публікації потрапив лише той рецепт, який підтверджує результат О. Зенкевича [5; 15]. Складається враження, що Джордан зробив це свідомо, щоб не зашкодити авторитету керівника своєї магістерської роботи. Як відомо, у 1970 р. О. Зенкевич вже був у першій п'ятірці провідних фахівців із МСЕ.

Математична обґрунтованість і фізична адекватність наведених у роботі прикладів підтверджує правомірність використаних гіпотез.

## ВИСНОВКИ

Моделний ряд SE біквадратичної інтерполяції можна суттєво поповнити альтернативними SE. Для цього запропонована нематрична процедура конденсації, яка дає змогу керувати інтерполяційними та обчислювальними властивостями елемента, зберігаючи міжелементну неперервність. Причина виникнення від'ємних навантажень у «кутових» вузлах стандартного SE – лінійчастість «проміжних» поверхонь (коноїдів). Увігнути коноїд можна за допомогою 9-го параметра  $x^2y^2$ . Цікаво розповсюдити запропонований підхід на серендипові SE бікубічної інтерполяції Q12. Проблема усунення фізичної неадекватності у схемах вузлової локалізації навантажень є актуальною для всіх серендипових SE вищих порядків, включаючи 3D-елементи.

Варто звернути увагу читача на ймовірнісний характер базисних поліномів двох аргументів. Базисний поліном можна розглядати як функцію випадкового вектора. З цієї точки зору вузлове навантаження є математичним сподіванням функції випадкового вектора. З геометричної точки зору ми маємо справу із середнім значенням аплікати базисної поверхні. Така інтерпретація дає право на існування від'ємних значень інтегральних характеристик моделі.

Наведені приклади спростовують думку О. Зенкевича, що від'ємні кутові навантаження є недоліком стандартних моделей, з яким треба змиритися. Важливо, що суперечки навколо «гравітаційного відштовхування» мали позитивний вплив на прогрес наукових знань.

У подальших дослідженнях цікаво поширити нематричну конденсацію на елементи вищих порядків, а також на мішані елементи, наприклад, квадратично-кубічні (10 вузлів).



## REFERENCES

- [1] Yerzhanov Zh. S. Metod konechnykh elementov v zadachakh mekhaniki hornykh porod [Finite element method in rock mechanics problems]. Alma-Ata, Nauka, 1975, 241 p.
- [2] Morozov Ye. M., H. P. Nikishkov. Metod konechnykh elementov v mekhanike razrusheniya [Finite element method in fracture mechanics]. Moscow, Nauka, 1980, 254 p.
- [3] Vvedenie v mekhaniku skalnykh porod [Introduction to Rock Mechanics]. Editor H. Boka. Moscow, Mir, 1983. 276 p.
- [4] Fadeev A. B. Metod konechnykh elementov v heomekhanike [Finite Element Method in Geomechanics]. Moscow, Nedra, 1987, 221 p.
- [5] Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v tekhnike [Finite element method in technology]. Moscow, Mir, 1975, 541 p.
- [6] Seherlind L. Primenenie metoda konechnykh elementov [Finite Element Application]. Moscow, Mir, 1979, 392 p.
- [7] Mitchell E. Metod konechnykh elementov dlia uravneniy s chastnymi proizvodnymi [Finite Element Method for Partial Differential Equations]. Moscow, Mir, 1981, 216 p.
- [8] Arnold V. Y. «Zhestkie» i «miahkie» matematicheskie modeli [“Hard” and “soft” mathematical models]. Moscow, MTSNMO, 2008, 32 p.
- [9] Khomchenko A. N. Nekotorye veroiatnostnye aspekty MKE [Some probabilistic aspects of FEM]. Ivano-Frankovsk, 1982, 9 p.
- [10] Khomchenko A. N. Serendipovy approssimatsii: zabavy s neuzlovyim parametrom [Serendipov approximation: fun with a non-word parameter]. Kherson. *Problemy informatsionnykh tekhnolohiy* [Information Technology Issues], issue 1(07), pp. 64–69.
- [11] Sloan, S. W. Numerical prediction of collapse Loads using finite element method. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech*, 1982, Vol. 6, pp. 47–76.
- [12] Astionenko, Y. A. Primenenie alternativnykh serendipovykh modeley pri reshenii zadachi o kruchenii prizmaticheskikh sterzhney [Alternative serendipity models’ application in solving the problem of torsion of prismatic rods]. Kherson. *Vestnik KhNTU*, 2013, issue 1(46), pp. 356–361.
- [13] Hallaher, R. Metod konechnykh elementov. Osnovy [Finite element method. The basics]. Moscow, Mir, 1984, 428 p.
- [14] Astionenko, I. O., Litvinenko, O. I., Osipova, N. V., Tuluchenko, G. Ya., Khomchenko, A. N.. *Cognitive-graphic constructing of hierarchical form of basic functions of biquadratic finite element*. AIP Conference Proceeding 1773, 040002 (2016); doi: 10/1060/1/4964965.
- [15] Ergatudis I., Irons B. M. O. C. Curved iso-parametric “quadrilateral” elements for finite element analisis. *Intern. J. Solid Struct.* 1968, Vol. № 4, pp. 31–32.
- [16] Al-Dawond C.I, Khomchenko, A. N. Geometrical Probability and Lagrange Interpolation Higher-Order Polynomials. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 3(2), 2009, pp. 1340–1346.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Ержанов Ж. С. Метод конечных элементов в задачах механики горных пород / Ж. С. Ержанов, Т. Д. Каримбаев. Алма-Ата : Наука, 1975. 241 с.
- [2] Морозов Е. М. Метод конечных элементов в механике разрушения / Е. М. Морозов, Г. П. Никишков. Москва : Наука, 1980. 254 с.
- [3] Введение в механику скальных пород: Пер. с англ. / под ред. Х. Бока. Москва : Мир, 1983. 276 с.
- [4] Фадеев А. Б. Метод конечных элементов в геомеханике. Москва : Недра, 1987. 221 с.
- [5] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Москва : Мир, 1975. 541 с.
- [6] Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. Москва : Мир, 1979. 392 с.
- [7] Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уэйт. Москва : Мир, 1981. 216 с.
- [8] Арнольд В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. Москва : МЦНМО, 2008. 32 с.
- [9] Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ. Ивано-Франковск, 1982. 9 с. Деп. В ВИНТИ 18.03.82, № 1213.
- [10] Хомченко А. Н. Серендиповы аппроксимации: забавы с неузловым параметром / А. Н. Хомченко, Е. И. Литвиненко, И. А. Астионенко. *Проблемы информационных технологий*. 2015. Вып. 1(07). С. 64–69.
- [11] Sloan S. W. Numerical prediction of collapse Loads using finite element method. / S. W. Sloan, M. F. Randolph. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech*. 1982. Vol. 6. P. 47–76.
- [12] Астионенко И. А. Применение альтернативных серендиповых моделей при решении задачи о кручении призматических стержней / И. А. Астионенко, П. И. Гучек, Е. И. Литвиненко, А. Н. Хомченко. *Вестник ХНТУ*. 2013. Вып. 1(46). С. 356–361.
- [13] Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. Москва : Мир, 1984. 428 с.
- [14] Astionenko I. O. Cognitive-graphic constructing of hierarchical form of basic functions of biquadratic finite element / I. O. Astionenko, O. I. Litvinenko, N. V. Osipova, G. Ya. Tuluchenko, A. N. Khomchenko. *AIP Conference Proceeding 1773*, 040002 (2016); doi: 10/1060/1/4964965.
- [15] Ergatudis I. Curved iso-parametric “quadrilateral” elements for finite element analisis / I. Ergatudis, B. M. Irons. O. C. Zienkiewicz. *Intern. J. Solid Struct.* 1968. № 4. P. 31–32.
- [16] Camal Al-Dawond. Geometrical Probability and Lagrange Interpolation Higher-Order Polynomials / Al-Dawond Camal, A. N. Khomchenko. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 2009. 3 (2). P. 1340–1346.

© А. Н. Хомченко, А. Н. Варшамов

Дата надходження статті до редакції: 17.03.2020

Дата затвердження статті до друку: 17.04.2020