



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Físicas

Escuela Profesional de Física

Inflación vectorial en universos cíclicos

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Física

AUTOR

Saneli Alcides CARBAJAL VIGO

ASESOR

Dr. Teófilo VARGAS AUCCALLA

Lima, Perú

2018



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Carbajal, S. (2018). *Inflación vectorial en universos cíclicos*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Físicas, Escuela Profesional de Física]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Hoja de metadatos complementarios

Código ORCID del autor	—
DNI o pasaporte del autor	43703168
Código ORCID del asesor	https://orcid.org/0000-0002-0669-8863
DNI o pasaporte del asesor	06532544
Grupo de investigación	Grupo de Física Teórica
Agencia financiadora	—
Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación	Lima, Perú. 12.0464° S, 77.0428° W
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2016-2018
Disciplinas OCDE	Física de partículas, Campos de la Física http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.03.03



Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del PERÚ, Decana de América

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA

**ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL
TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN FÍSICA**

Siendo las 15:00 horas del viernes 06 de julio del 2018, en el Salón de Grados de la Facultad de Ciencias Físicas (Auditorio 109), bajo la Presidencia del Mg. Fulgencio Villegas Silva (Presidente), Lic. Renato Tovar Landeo (Miembro), Dr. Teófilo Vargas Auccalla (Asesor) y, el Dr. Rafael Edgardo Carlos Reyes (Suplente), se dio inicio a la Sesión Pública de Sustentación de Tesis para la Licenciatura en Física, mediante la Modalidad M1, del Bachiller:

SANELI ALCIDES CARBAJAL VIGO

Dando lectura al Resumen del Expediente, el Presidente del Jurado, invitó al Bachiller Saneli Alcides Carbajal Vigo a realizar una exposición de Trabajo de Tesis titulada: "Inflación vectorial en universos cíclicos".

Concluida la exposición del candidato y luego de las preguntas de rigor por parte del Jurado, el Presidente, invitó al Bachiller y al público a abandonar momentáneamente la Sala de Sesión, para dar paso a la deliberación y calificación por parte del Jurado.

Al término de la deliberación del Jurado el Mg. Fulgencio Villegas Silva, invitó al candidato y al público a pasar a la Sala de Sesión, para dar lectura al resultado de la deliberación. Ha obtenido la calificación de:

Sobresaliente

(MENCIÓN)

19

(NÚMERO)

Diecinueve

(LETRAS)

Finalmente, el Presidente del Jurado, propone al consejo de la Facultad que se le declare Licenciado en Física al Bachiller Saneli Alcides Carbajal Vigo. Siendo las *16:20* Horas, se levanta la Sesión.

Fulgencio Villegas Silva
Mg. Fulgencio Villegas Silva
PRESIDENTE

Renato Tovar Landeo
Lic. Renato Tovar Landeo
MIEMBRO

Teófilo Vargas Auccalla
Dr. Teófilo Vargas Auccalla
ASESOR

Rafael Edgardo Carlos Reyes
Dr. Rafael Edgardo Carlos Reyes
SUPLENTE

A mis abuelos Marina y Nelson.

Índice de contenidos

Índice de contenidos	ii
Resumen	v
Introducción	1
Objetivos y estructura de la tesis	3
1. Relatividad General	5
1.1. De Newton a Einstein	5
1.2. Caída libre y geodésicas	6
1.3. El tensor métrico	7
1.4. Curvatura y geometría	9
1.5. Ecuación de campo de Einstein	9
1.6. Solución de Schwarzschild	10
1.7. Solución de Friedmann	11
2. Cosmología	14
2.1. Homogeneidad e isotropía.	14
2.2. El Universo de Friedmann	15
2.2.1. Curvatura	16
2.2.2. Factor de escala	17
2.2.3. Coordenadas comóviles	18
2.3. La ley de Hubble	19
2.4. Redshift cosmológico	21
2.5. Ecuaciones de Friedmann	24
2.5.1. Símbolos de Christoffel	25
2.5.2. Tensor de Riemann	25
2.5.3. Tensor de Ricci	26
2.5.4. Escalar de Ricci	26
2.5.5. Tensor de Einstein	26
2.5.6. Ecuaciones de campo de Einstein	26
2.6. El fluido cosmológico	27
2.6.1. Materia	27
2.6.2. Radiación	28
2.6.3. Constante cosmológica	29
2.7. Radio de Hubble	31

2.7.1.	Radio (comóvil) de Hubble	32
2.7.2.	Radio comóvil de Hubble y expansión acelerada	34
2.8.	Horizontes	34
2.8.1.	Horizonte (comóvil) de eventos	35
2.8.2.	Horizonte (comóvil) de partículas	37
2.9.	Tiempo Conforme	37
2.9.1.	Tiempo conforme y horizontes	39
2.9.2.	Contacto causal y homogeneidad	41
3.	Inflación Cósmica	43
3.1.	Problemas del Big Bang	44
3.1.1.	El problema del horizonte	44
3.1.2.	El problema de la planitud	47
3.2.	Modelo inflacionario	48
3.2.1.	Radio comóvil de Hubble decreciente	49
3.2.2.	Solución al problema del horizonte	50
3.2.3.	Solución al problema de la planitud	52
3.3.	El inflatón	52
3.3.1.	Ecuación de movimiento	53
3.3.2.	Tensor energía-momento	55
3.3.3.	Ecuaciones de Friedmann	56
3.4.	Inflación Slow-Roll	57
4.	Big Bounce en presencia de un Campo Vectorial	60
4.1.	Inflación Vectorial	60
4.2.	Características del campo escalar efectivo	63
4.3.	Fenomenología del Big Bounce	63
4.4.	Análisis Cualitativo	64
4.5.	Condiciones iniciales y consideraciones previas	65
4.6.	Periodo Oscilatorio: $U \sim T, \rho \ll \sigma$	66
4.7.	Periodo Cinético: $U \ll T, \rho \ll \sigma$	69
4.8.	Periodo previo al Bounce: $U \ll T, \rho \sim \sigma$	72
4.9.	Periodo Inflacionario	73
4.9.1.	Inicio de la inflación	74
4.9.2.	Fin de la inflación	75
4.9.3.	Cantidad de Inflación	77
4.10.	Inflación con $m \sim 10^{-6}m_p$ y $N \geq 60$	79
5.	Cosmologías Cíclicas	81
5.1.	Fenomenología del Universo Cíclico	81
5.2.	Potencial tipo Higgs	82
5.2.1.	Análisis del instante de retorno	82
5.2.2.	Factor de Escala	84
5.3.	Universo con curvatura positiva	85
5.4.	Universo con constante cosmológica negativa	88

6. Histéresis en Universos cíclicos	90
6.1. Potencial tipo Higgs	93
6.2. Universo con curvatura positiva	94
6.3. Universo con constante cosmológica	95
Conclusiones	97
Bibliografía	98

Resumen

La presente tesis estudia cómo la presencia de un campo vectorial durante un Big Bounce es capaz de producir un periodo inflacionario en un Universo de tipo Friedmann.

La primera parte de la tesis consiste en un breve resumen de los conceptos fundamentales de la teoría general de la relatividad, los cuales son indispensables para el estudio de la cosmología. Conceptos fundamentales como el elemento de línea y las ecuaciones de campo de Einstein son revisados.

La segunda parte desarrolla los conceptos necesarios de cosmología que serán luego aplicados en el estudio del Big Bounce. Se estudia cómo el fluido cosmológico determina la evolución del Universo y se toma particular interés en el concepto del tiempo conforme, indispensable para entender la dinámica del periodo inflacionario.

La tercera parte se centra en la dinámica del Universo durante un periodo inflacionario. Se desarrollan las motivaciones del periodo inflacionario, la cinemática del Universo durante la inflación y los conceptos básicos de la inflación tipo Slow-Roll.

La cuarta parte inicia con una demostración de cómo, bajo ciertas condiciones, la presencia de tres campos vectoriales fundamentales no mínimamente acoplados a la gravedad se pueden representar por un campo escalar efectivo, el cual es capaz de producir un periodo inflacionario. Posteriormente se define qué es un Big Bounce en la cosmología y se demuestra que la presencia de un campo escalar es capaz de producir naturalmente un periodo inflacionario luego del Big Bounce. Se realiza un estudio detallado de las etapas antes y después del Big Bounce, tomando especial interés en la cinemática del periodo inflacionario.

La quinta parte de la tesis estudia los efectos de la presencia de un campo escalar en Universos cíclicos. Se muestran tres mecanismos que hacen posible el retorno del Universo y se estudia la cinemática del mismo en cada uno de ellos, demostrando que luego de cada Big Bounce es posible producir un periodo inflacionario que incrementa el tamaño máximo del Universo.

Por último, la sexta parte es un estudio de la cantidad de histéresis cosmológica que un campo escalar es capaz de generar en cada ciclo de un Universo cíclico.

Palabras clave: INFLACIÓN, INFLACIÓN VECTORIAL, BIG BOUNCE, UNIVERSOS CÍCLICOS.

Introducción

A lo largo de la historia de la humanidad, todas las culturas en todas las épocas se han formulado preguntas acerca del origen del Cosmos. En sus búsquedas de respuestas, cada una de ellas contruyó su propio mito de la creación, a imagen y semejanza de sus propias tradiciones. En el Perú, por ejemplo, existe un mito pre-hispánico en el cual es el dios Wiracocha quien dio origen al mundo que nos rodea al crear el Sol, la Luna, las estrellas y por último al hombre. Estos mitos, si bien son poéticos y valiosos para la identidad de cada país, ya no son la forma en que el hombre entiende la creación del Cosmos. Hoy, los mitos de la antigüedad han sido reemplazados por disciplinas científicas que buscan describir los fenómenos naturales que nos rodean a través de modelos matemáticos. Dentro de estas disciplinas, la cosmología es aquella que ha heredado la pregunta fundamental acerca del origen del Cosmos: hoy, los cosmólogos aún se hacen preguntas acerca del origen y el posible final de la realidad e intentan responderlas utilizando una de las mejores herramientas de las que dispone la humanidad: el método científico.

Como disciplina científica, la cosmología está basada en la teoría general de la relatividad, una teoría de la gravedad propuesta por Albert Einstein en el año 1915. Esta establece una propuesta revolucionaria, en la cual la gravedad no es una fuerza, sino un fenómeno totalmente geométrico, consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo. Dos años después de proponer su nueva teoría, el mismo Einstein la aplicó a la totalidad del Universo, encontrando así una manera de estudiar la dinámica del Cosmos y dando inicio formal a la cosmología moderna. Hoy, más de cien años después, el desarrollo de la cosmología, tanto teórica como observacional, ha permitido al hombre tener una mejor descripción del estado actual del Universo, así como también de su posible origen e incluso su final.

Entre los descubrimientos de la cosmología moderna, probablemente el más importante ha sido el de la expansión del Universo observable: en nuestro Universo, todas las galaxias se alejan las unas de las otras con velocidades que aumentan con sus distancias de separación, indicando que es el espacio mismo entre ellas el que crece con el tiempo. Si el Universo se expande, en el pasado necesariamente debió ser más pequeño y hace miles de millones de años debió estar contenido en un volumen muy diminuto, del tamaño de una canina, del cual provienen toda la materia y la energía observadas en la actualidad. Este modelo para el origen del Cosmos se conoce como la teoría del Big Bang. En las últimas décadas, la teoría del Big Bang ha sido respaldada por una cantidad considerable de observaciones experimentales, las cuales incluyen la radiación cósmica de fondo, los porcentajes de helio e hidrógeno en el Universo, la nucleosíntesis y la formación de las estructuras a gran escala.

A pesar del éxito de la teoría convencional del Big Bang, existen características del Universo que esta no es capaz de explicar, tales como su planitud geométrica, su alta homogeneidad y las estructuras que presenta. Para resolver estos problemas, la cosmología moderna añade un ingrediente extra a su modelo del origen del Cosmos: la inflación cósmica. La propuesta inflacionaria establece que, antes de que existieran las partículas observadas en la actualidad, el Universo estaba compuesto por un fluido de naturaleza aún desconocida, el cual provocó una expansión acelerada del Universo por un tiempo brevísimo de aproximadamente $10^{-33}s$, pero durante el cual este aumentó su tamaño por un factor colosal de al menos 10^{26} . Al final del periodo inflacionario, la energía del fluido cosmológico responsable de la inflación se transformaría en toda la materia y la energía del Universo observable durante un proceso conocido como recalentamiento, el cual representa al Big Bang de la cosmología convencional.

A pesar de que la inflación resuelve los problemas de la teoría convencional del Big Bang, esta tampoco es capaz de explicar el origen mismo del Universo pues parte del hecho de que, a pesar de que es muy pequeño, este ya existe. La cosmología moderna predice que el Universo debió originarse en una singularidad física, llamada también la singularidad del Big Bang, que existió antes del periodo inflacionario y en la cual todo el Universo se encontraba contenido en un solo punto de densidad y temperatura infinitas. En esta singularidad, la física pierde todo poder predictivo y sus técnicas se hacen obsoletas. La perspectiva moderna es suponer que esta singularidad no representa un límite al conocimiento humano, sino que es una evidencia de que la relatividad general, sobre la cual está fundamentada la cosmología, es una teoría de la gravedad que no puede ser aplicada en eventos en las que las densidades de energía y temperaturas son muy altas. En estas situaciones extremas parece ser indispensable incluir al mismo tiempo el segundo pilar de la física contemporánea: la física cuántica. Lamentablemente, aún no existe una teoría definitiva que sea capaz de combinar los efectos gravitatorios y cuánticos y esto hace imposible estudiar de manera formar el origen del Cosmos.

Las teorías científicas ofrecidas por la cosmología son el equivalente moderno de los mitos de la creación de las culturas de la antigüedad. Hoy, al igual que hace miles de años, el hombre se sigue haciendo preguntas acerca del origen del Cosmos y busca responderlas con las herramientas que tiene a su alcance. Tal vez algún día lleguemos a encontrar respuestas a esas preguntas. Tal vez nunca lo hagamos. En cualquier caso, lo único que le debe interesar al hombre es continuar el legado heredado de sus antepasados y seguir buscando respuestas con la esperanza de que la frontera del conocimiento continúe cediendo ante la presión de las generaciones. Lo demás queda en manos de la Naturaleza.

Objetivos y estructura de la tesis

El objetivo principal de la tesis es estudiar la dinámica de un Universo de Friedmann durante un Big Bounce en presencia de un conjunto de campos vectoriales y demostrar que luego del rebote el Universo atraviesa un periodo de expansión acelerada. Este resultado es luego utilizado para analizar Universos cíclicos y determinar la evolución del Universo luego de cada ciclo. Para este fin, se desarrollan los conceptos previos indispensables y posteriormente los cálculos analíticos y numéricos relevantes.

1. En el Capítulo 1 se realiza un breve resumen de la teoría general de la relatividad. Se exponen las diferencias entre la teoría de la gravedad de Newton y Einstein, conectando esta última con la geometría del espacio-tiempo. Posteriormente se definen los conceptos de elemento de línea, tensor métrico y símbolos de Christoffel. Se presenta, sin demostración, las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío y en presencia de una fuente, definiendo además el tensor energía-momento. Por último, se muestran dos soluciones importantes de las ecuaciones de campo de Einstein: la solución de Schwarzschild y la de Friedmann, dando un interés especial a esta última debido a sus aplicaciones a la cosmología.
2. El Capítulo 2 es un resumen de cosmología, orientado específicamente a los fines de la tesis. Se definen las características más importantes de un Universo de Friedmann, incluyendo la ley de Hubble y el redshift cosmológico. Se derivan las ecuaciones de Friedmann y la ecuación de aceleración a partir de las ecuaciones de campo de Einstein y del tensor energía momento de un fluido ideal homogéneo e isotrópico. Posteriormente se exponen los fluidos cosmológicos más importantes en la cosmología: materia, radiación y constante cosmológica. Por último, se definen los conceptos de radio de Hubble y horizontes cosmológicos, para finalmente introducir el concepto de tiempo conforme y estudiar la cinemática de la luz en diagramas de tiempo conforme.
3. En el Capítulo 3 se exponen las principales motivaciones para la propuesta de la inflación cósmica. Se explica cómo un periodo inflacionario es capaz de resolver los problemas del horizonte y de la planitud, haciendo énfasis en la cinemática del radio comóvil de Hubble. Se derivan las ecuaciones más importantes del inflatón: ecuación de movimiento, tensor energía momento y la ecuación de Friedmann en presencia del inflatón. Finalmente, se exponen las características más importantes de la inflación de tipo Slow-Roll.
4. En el Capítulo 4 se muestra que la dinámica de un Universo de Friedmann en presencia de un conjunto de tres campos vectoriales homogéneos, de la misma

magnitud, ortogonales y no mínimamente acoplados a la gravedad se puede estudiar a través de la presencia de un solo campo escalar efectivo, al cual se denomina inflatón, que determina la evolución del Universo. Se define el fenómeno de Big Bounce y sus características principales. Se procede a estudiar analítica y numéricamente la dinámica del Universo durante un Big Bounce en presencia del inflatón obtenido previamente; el análisis se realiza durante tres periodos denominados oscilatorio, cinético, previo al bounce e inflacionario. Se demuestra que, luego del rebote, la presencia del campo escalar efectivo produce un periodo inflacionario cuyas características dependerán de las condiciones iniciales del Universo, de la escala energética del rebote y de la masa de inflatón. Finalmente se procede a estudiar un Universo en el cual los parámetros del periodo inflacionario son cercanos a los esperados por las observaciones cosmológicas.

5. El Capítulo 5 consiste en una aplicación de los resultados obtenidos en el Capítulo 4 al caso de los universos cíclicos. Se realiza una definición de universo cíclico, para luego estudiar tres tipos: universo con inflatón dominado por un potencial tipo Higgs, universo con curvatura positiva y universo con constante cosmológica negativa. En los tres casos se estudia analítica y numéricamente cada ciclo del universo, demostrando que luego de cada rebote se produce un periodo de expansión acelerada. Finalmente, se demuestra que, bajo ciertas condiciones, el tamaño máximo que alcanza el Universo puede incrementarse en cada ciclo.
6. En el Capítulo 6 se define el concepto de histéresis cosmológica en universos cíclicos y se determina la cantidad de histéresis que se produce en cada ciclo para los tres modelos utilizados en el Capítulo 5. Por último, se relaciona la cantidad de histéresis con la variación de los tamaños mínimos y máximos del Universo en cada ciclo.

Capítulo 1

Relatividad General

La teoría general de la relatividad es una teoría de la gravedad. Fue propuesta por el físico alemán Albert Einstein en el año 1915 luego de un intenso trabajo de casi diez años. En su forma más fundamental, propone que la gravedad en realidad no es una fuerza, sino un fenómeno que es consecuencia de la curvatura de la fábrica del espacio-tiempo, un concepto totalmente revolucionario e introducido por el mismo Einstein. Debido a la íntima vinculación entre geometría y física contenidas en esta teoría de la gravedad, para estudiarla es necesario revisar conceptos indispensables de geometría en espacios curvos, los cuales serán posteriormente vinculados a la interacción gravitacional y a cómo la masa y energía de los entes físicos son los responsables de la dinámica del espacio-tiempo.

1.1. De Newton a Einstein

La teoría de la gravedad propuesta por el físico inglés Isaac Newton (1643-1727) modela la interacción gravitatoria como una fuerza de atracción que actúa entre dos cuerpos masivos. La teoría gravitatoria newtoniana también se puede entender como la interacción entre una masa y el campo gravitatorio \bar{g} producido por otra distribución de masa cercana. La fuerza que experimenta una partícula de masa m al encontrarse dentro de un campo gravitatorio \bar{g} está dada por

$$\bar{F} = m\bar{g}. \quad (1.1)$$

En general, el cálculo directo de los campos gravitatorios producidos por distribuciones de masas arbitrarias es complicado debido a que es necesario determinar las tres componentes del vector campo gravitatorio. Debido a esto, es práctica común estudiar los fenómenos gravitatorios a través de un campo escalar $\phi(\bar{r})$ conocido como potencial gravitatorio el cual, para una distribución de masa de densidad $\rho(\bar{r})$, se calcula mediante la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad (1.2)$$

donde $G = 6.671\ 91(99) \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ es la constante de gravitación universal y determina la intensidad de la interacción gravitatoria. Una vez obtenido el potencial gravitatorio, el campo gravitatorio producido por la distribución de masa ρ se obtiene

mediante

$$\bar{g} = -\nabla\phi. \quad (1.3)$$

De esta forma, toda la gravedad newtoniana se reduce a resolver la ecuación de Poisson (1.2) para la distribución de masa de interés. En este sentido, la interacción gravitatoria newtoniana es similar a la interacción electrostática: ambas actúan como una fuerza que es producto de la interacción entre una carga (la masa para el caso gravitatorio y la carga eléctrica para el caso electromagnético) y un campo vectorial.

En el año 1915, el físico alemán Albert Einstein (1879-1955) propuso una nueva teoría de la gravedad, a la cual denominó Relatividad General. En la teoría de Einstein, la interacción gravitatoria no se entiende como una fuerza, sino como una consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo. Dicha curvatura puede ser generada por la presencia de materia o energía en el Universo y modifica las trayectorias de partículas que de otra forma se desplazarían con movimientos rectilíneos uniformes. Por ejemplo, en la teoría de Einstein, la trayectoria de la Tierra alrededor del sol no se debe a una fuerza de atracción entre ambos, sino a la curvatura geométrica que la presencia del sol provoca sobre el espacio que le rodea. Así, la interacción gravitatoria deja de ser una fuerza y se transforma en un fenómeno totalmente geométrico, en el cual la geometría del espacio-tiempo está determinada por los entes físicos presentes del Universo.

1.2. Caída libre y geodésicas

Se dice que una partícula se encuentra en caída libre cuando la única interacción que actúa sobre ella es la gravitatoria. Esto sucede, por ejemplo, con una piedra que cae sobre la superficie terrestre (despreciando otras fuerzas) o con la Tierra al moverse en el sistema solar. Físicamente, a la trayectoria en el espacio-tiempo (línea de mundo) de una partícula en caída libre se le denomina una geodésica. Lo interesante de las geodésicas es que también poseen una interpretación geométrica: dados dos puntos de un espacio arbitrario, la línea geodésica es aquella que une los puntos y posee la menor longitud posible. En la teoría general de la relatividad toda partícula en caída libre se mueve a través de la línea de mundo de menor longitud posible, es decir, a lo largo de una geodésica. Debido a que la longitud es una propiedad geométrica, la interacción gravitatoria se transforma en una consecuencia de la geometría del espacio-tiempo.

En un espacio-tiempo sin gravedad, todas las partículas libres realizan movimientos rectilíneos uniformes (MRU) con respecto a sistemas de referencia inerciales: las geodésicas de partículas libres en espacio-tiempo planos son siempre rectas. Un ejemplo de un espacio-tiempo plano es el espacio de Minkowski de la teoría especial de la relatividad [1]. Como dichas partículas se mueven con MRU, las cuatro coordenadas $x^\mu = (ct, x, y, z)$ de sus líneas de mundo dependen linealmente del tiempo propio y por lo tanto

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2} = 0. \quad (1.4)$$

Esta última ecuación determina la curva geodésica de una partícula libre en el espacio-tiempo de Minkowski; su solución es trivial y tiene la forma

$$x^\mu = a^\mu \tau + b^\mu, \quad (1.5)$$

donde las constantes a^μ y b^μ dependen de las condiciones iniciales de la partícula.

Si la partícula se encuentra en presencia de gravedad, deja de ser una partícula libre y se transforma en una partícula en caída libre. En este caso, la partícula sufre una aceleración y ya no realiza un MRU. Geométricamente, esto se debe a que el espacio-tiempo en el cual se encuentra la partícula ahora es curvo y la geodésica a través de la cual se traslada ya no es una recta. A pesar de esto, cuando se estudia la trayectoria de la partícula en una región suficientemente pequeña del espacio-tiempo, la geodésica es prácticamente una línea recta y por lo tanto, localmente, aún es posible aplicar los resultados de la teoría especial de la relatividad. Decimos entonces que todo espacio-tiempo curvo en la teoría de Einstein es localmente plano o que es localmente Minkowski. Para determinar totalmente la nueva trayectoria de la partícula en el espacio-tiempo curvo es necesario conocer las propiedades geométricas internas del espacio y a partir de ellas determinar la nueva ecuación de la geodésica correspondiente.

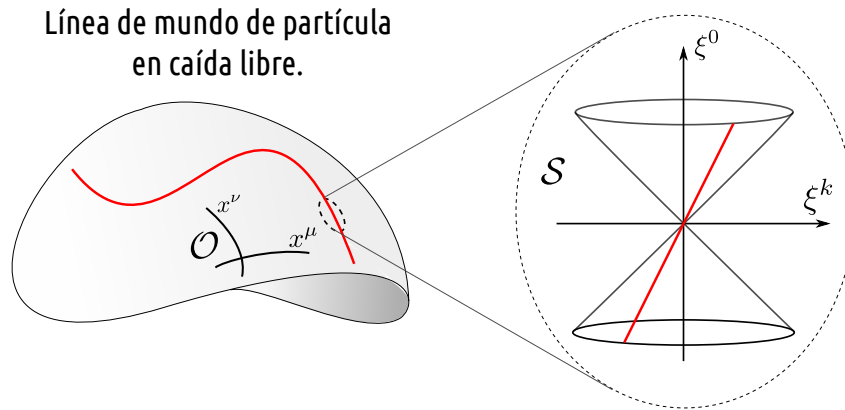


Figura 1.1: Las geodésicas en espacio-tiempos curvos son curvas. Localmente, todo espacio-tiempo es de tipo Minkowski y las geodésicas son rectas.

1.3. El tensor métrico

Las propiedades geométricas de un espacio-tiempo están determinadas por la forma en que se calculan las distancias entre dos puntos dentro del mismo. La distancia entre dos eventos infinitesimalmente separados se llama elemento de línea y está definida por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \quad (1.6)$$

La matriz de 16 elementos $g_{\mu\nu}(x)$ se conoce como el tensor métrico del espacio-tiempo y en ella se encuentra codificada toda su información geométrica.

El ejemplo más simple es el espacio \mathbb{R}^3 , en el cual el elemento de línea en coordenadas cartesianas es simplemente

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.7)$$

$$= \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (1.8)$$

y por lo tanto la matriz del tensor métrico de \mathbb{R}^3 en coordenadas cartesianas tiene la forma

$$\delta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

En general, las componentes del tensor métrico de un espacio pueden ser funciones de las coordenadas o de algún otro grado de libertad. Por ejemplo, el elemento de línea de \mathbb{R}^3 también se puede escribir en coordenadas esféricas como

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (1.10)$$

con lo cual el tensor métrico de \mathbb{R}^3 en coordenadas esféricas es

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

En la teoría especial de la relatividad, el espacio-tiempo es descrito geoméricamente por el espacio-tiempo de Minkowski. En este caso, el tensor métrico en coordenadas cartesianas¹ es

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

y el elemento de línea de Minkowski correspondiente toma la forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1.13)$$

El tensor métrico de un espacio-tiempo arbitrario determina sus propiedades geométricas y por lo tanto las forma de las geodésicas, las cuales representan las líneas de mundo de una partícula en caída libre. La ecuación que determina cómo se encuentran parametrizadas las coordenadas de una partícula en caída libre en función a su tiempo propio (o algún otro parámetro afin) en un espacio-tiempo arbitrario se conoce como la ecuación de la

¹En todo el presente trabajo se utilizará la signatura (+ - - -).

geodésica:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (1.14)$$

donde

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (1.15)$$

se conoce como la conexión o símbolo de Christoffel. Al resolver la ecuación diferencial (1.14) es posible determinar la línea de mundo $x^\mu = x^\mu(\tau)$ de una partícula en caída libre y en consecuencia su trayectoria en el espacio $x^i = x^i(t)$. Evidentemente, dicha solución dependerá del tensor métrico del espacio-tiempo en el cual se propaga la partícula y en consecuencia de su geometría.

1.4. Curvatura y geometría

La curvatura del espacio-tiempo en un punto del mismo está determinado por un tensor de 256 componentes conocido como tensor de Riemann [2] o tensor de curvatura:

$$R^\mu{}_{\alpha\nu\beta} = \partial_\nu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\nu\alpha}^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \Gamma_{\beta\alpha}^\rho - \Gamma_{\beta\rho}^\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\rho. \quad (1.16)$$

Si el tensor de Riemann es idénticamente nulo en todo el espacio-tiempo, entonces dicho espacio-tiempo es totalmente plano. Esto sucede, por ejemplo, con \mathbb{R}^3 o con el espacio de Minkowski. Por otro lado, en puntos en los cuales exista curvatura el tensor de Riemann toma necesariamente un valor distinto de cero.

Otros objetos matemáticos importantes en la teoría de Einstein son el tensor de Ricci

$$R_{\alpha\beta} = R^\mu{}_{\alpha\mu\beta} \quad (1.17)$$

y el escalar de Ricci o escalar de curvatura

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \quad (1.18)$$

El tensor de Ricci (1.17) está relacionado a la curvatura del espacio-tiempo en el vacío y el escalar de Ricci (1.18) a su curvatura global. Los tres objetos matemáticos presentados representan propiedades geométricas del espacio-tiempo y dependen directamente de las componentes del tensor métrico.

1.5. Ecuación de campo de Einstein

Albert Einstein derivó un conjunto de ecuaciones diferenciales que permiten determinar las componentes del tensor métrico de un espacio tiempo arbitrario. En la relatividad general, la materia y energía presentes determinan la geometría del espacio-tiempo a

través del tensor métrico y por este motivo actúan como fuentes de curvatura.

La ecuación diferencial que determina las componentes del tensor métrico en una región vacía del espacio (fuera de la fuente) es

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{1.19}$$

y se conoce como ecuación de campo de Einstein en el vacío. Dentro de la fuente, la ecuación de campo de Einstein toma la forma general

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{1.20}$$

donde

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \tag{1.21}$$

se conoce como el tensor de Einstein. El tensor $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento de la fuente, una generalización de la densidad de materia que actúa como fuente de gravedad en la teoría gravitatoria newtoniana. En general, las componentes del tensor energía-momento dependen de la distribución de masa y energía presentes en el espacio y determinan la forma en que se curva el espacio-tiempo.

La ecuación (1.20) es una ecuación diferencial en la cual las variables son las componentes del tensor métrico y su solución depende de las condiciones de contorno y de la naturaleza de la fuente, representada por el tensor energía-momento. El lado izquierdo de esta ecuación representa la geometría del espacio-tiempo, el cual determina la trayectoria de partículas en caída libre, mientras que el lado derecho representa las fuentes de gravedad presentes en el espacio. La tabla 1.1 muestra una comparación de las ecuaciones más importantes en las teorías de la gravedad de Newton y Einstein.

	Newton	Einstein
Sin gravedad	$\phi = 0$	$R^\mu_{\alpha\nu\beta} = 0$
Fuera de la fuente	$\nabla^2\phi = 0$	$R_{\alpha\beta} = 0$
Dentro de la fuente	$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$	$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$

Tabla 1.1: Comparación entre las ecuaciones de las teorías de gravedad de Newton y Einstein.

1.6. Solución de Schwarzschild

La solución de la ecuación de campo de Einstein en las cercanías de un cuerpo esférico de masa M fue derivada por el físico alemán Karl Schwarzschild (1873-1916). En coorde-

nadas esféricas, el elemento de línea de Schwazschild [2] es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1.22)$$

y por lo tanto la matriz del tensor métrico se expresa como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Físicamente, el tensor métrico de Schwarzschild se puede utilizar junto a la ecuación de la geodésica para determinar las trayectorias de rayos de luz y de partículas que se mueven cerca a planetas, estrellas o agujeros negros esféricos, neutros y estáticos.

1.7. Solución de Friedmann

En el intervalo entre los años 1922 y 1924, el físico teórico soviético Alexander Friedmann (1888-1925) derivó la solución de las ecuaciones de Einstein para un espacio-tiempo perfectamente homogéneo e isotrópico. El elemento de línea de Friedmann en coordenadas esféricas es

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (1.24)$$

donde la variable $a(t)$ se conoce como *factor de escala* y k como el parámetro de curvatura del Universo. Es importante notar que el factor de escala actúa como un coeficiente que multiplica al término espacial y por lo tanto parametriza la distancia entre dos puntos del espacio, la cual puede aumentar o disminuir, permitiendo que el Universo pueda expandirse o contraerse. A partir del elemento de línea, la matriz del tensor métrico de Friedmann en coordenadas esféricas es

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1 - kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

En los años siguientes a la propuesta de Friedmann este tensor sería derivado independientemente por el astrónomo belga Georges Lemaitre. Más adelante, el físico estadounidense Howard P. Robertson y el físico inglés Arthur Geoffrey Walker demostrarían matemáticamente que la solución de Friedmann es la única solución que representa un Universo perfectamente homogéneo e isotrópico. Por estos motivos, el tensor métrico de la ecuación (1.25) se conoce como la métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW).

El modelo estándar de la cosmología moderna asume que nuestro Universo tiene una geometría de tipo Friedmann, en la cual el factor de escala es una función creciente que modela la expansión del Universo. Para estudiar la evolución del Universo utilizando la teoría de la relatividad general es necesario encontrar primero una expresión para el tensor energía-momento del mismo, el cual representa la distribución de toda la materia y la energía existentes. Debido a la alta homogeneidad e isotropía del Universo a escalas cosmológicas [3], se modela el contenido del Universo como un conjunto de fluidos ideales homogéneos e isotrópicos, cada uno con su propia densidad de energía ρ y presión p . Entre estos fluidos se encuentra, por ejemplo, la materia (ordinaria y oscura), la radiación y la energía oscura.

Para un fluido ideal en un espacio-tiempo curvo con gensor métrico $g_{\mu\nu}$, el tensor energía-momento tiene la forma [4]:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (1.26)$$

donde $u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}(c, \vec{v})$ es la cuadrivelocidad del fluido, ρ su densidad y p su presión. Dada una región del universo con volumen $V = \frac{4}{3}\pi a^3$, la energía contenida en ella debido a la presencia del fluido cosmológico $E = \frac{4}{3}\pi \rho a^3 c^2$ será afectada por la presión del fluido según las leyes de la termodinámica clásica. Por lo tanto, para todo volumen del fluido cosmológico se debe satisfacer la ecuación de conservación de la energía

$$dE + p dV = 0. \quad (1.27)$$

Reemplazando las expresiones para la energía y el volumen, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= d \left(\frac{4}{3}\pi \rho a^3 c^2 \right) + p d \left(\frac{4}{3}\pi a^3 \right) \\ &= a^3 c^2 d\rho + 3\rho a^2 c^2 da + 3p a^2 da \\ &= d\rho + 3 \frac{da}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Teniendo en cuenta que el fluido cosmológico es homogéneo, su densidad y presión dependen únicamente del tiempo y la ecuación de la conservación de la energía se puede escribir como

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0, \quad (1.29)$$

la cual se conoce como la ecuación de conservación de energía o ecuación del fluido cosmológico.

Las componentes del tensor energía-momento del fluido cosmológico se pueden encontrar explícitamente teniendo en cuenta la métrica de Friedmann. Las componentes de la

cuadrivelocidad de una partícula relativista son [4]

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(c, \bar{v}), \quad (1.30)$$

donde \bar{v} representa la velocidad de la partícula. Debido a que el fluido cosmológico se mueve con el Universo (es comóvil al Universo), se tiene

$$u^i = 0 = u_i = 0 \quad (1.31)$$

lo cual implica $\bar{v} = 0$. Por lo tanto, las componentes en unidades naturales de la cuadrivelocidad del fluido cosmológico son

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0). \quad (1.32)$$

Para encontrar la forma explícita del tensor energía-momento es necesario utilizar la expresión para la norma del vector cuadrivelocidad

$$u^\mu u_\mu = u^0 u_0 + u^i u_i = 1.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} u_0 u_0 &= g_{0\alpha} u^\alpha u_0 \\ &= g_{00} u^0 u_0 \\ &= g_{00}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

donde se ha utilizado el hecho de que el tensor métrico debe ser diagonal por tratarse de un Universo isotrópico. Utilizando las ecuaciones (1.26), (1.31) y (1.33) es posible deducir las componentes del tensor energía momento:

$$\begin{aligned} T_{00} &= g_{00}\rho, \\ T_{ii} &= -g_{ii}p, \\ T_{ij} &= 0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

De las ecuaciones (1.26), (1.34) y (1.25) se obtiene finalmente la forma explícita del tensor energía momento del fluido cosmológico en un Universo de tipo FLRW:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)p}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 a^2(t)p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) a^2(t)p \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Capítulo 2

Cosmología

La cosmología es una disciplina científica que estudia la dinámica del Universo en su totalidad. Desde el punto de vista cosmológico, el Universo se modela como un fluido ideal, perfectamente homogéneo e isotrópico, compuesto por una mezcla de distintos fluidos (como la radiación y la materia) los cuales determinan su composición y también su evolución. La cosmología como ciencia nació hace ya un siglo, cuando en el año 1917 Albert Einstein aplicó su nueva teoría de la gravedad al Universo como un todo. Sin embargo, apenas en las últimas décadas el desarrollo de la astronomía observacional ha hecho posible confrontar las predicciones de la cosmología con datos experimentales cada vez más precisos, permitiendo a los cosmólogos validar modelos acerca del origen del Universo, de su evolución y de su posible final. La cosmología se ha transformado hoy en una ciencia robusta, capaz de describir no solo el estado actual de Universo, sino también de estudiar su pasada evolución e incluso su posible origen.

2.1. Homogeneidad e isotropía.

La distancia promedio de la Tierra al Sol se conoce como una unidad astronómica y se representa por el símbolo AU, donde $1\text{AU} \simeq 1.496 \times 10^{11}\text{m}$. A estas escalas el Universo se encuentra formado por cuerpos sólidos claramente diferenciables: el Sol, los planetas y el resto de astros del sistema solar ocupan regiones definidas del espacio y provocan que dos puntos distintos dentro del sistema solar no sean necesariamente equivalentes. Por ejemplo, la fuerza de gravedad y la radiación sobre un observador cerca a la superficie del Sol son mucho mayores a las que se tendrían cerca a la superficie terrestre. Por otra parte, es evidente también que a estas escalas no todas las direcciones son equivalentes: un observador ubicado en el punto medio entre la Tierra y el Sol rápidamente notará que existe una gran diferencia entre moverse en dirección al Sol y moverse en dirección a la Tierra. Esto significa que dentro del sistema solar las propiedades del Universo dependen del punto en el que nos encontremos y de la dirección en que miremos; es decir, a escalas de una unidad astronómica, el Universo no es ni homogéneo ni isotrópico.

Observaciones astronómicas recientes sugieren que si hacemos crecer las escalas hasta el orden de los cientos de megapársecs ($1\text{Mpc} \simeq 3.086 \times 10^{22}\text{m}$) notaremos que nuestro Universo poco a poco tiende hacia la homogeneidad e isotropía. La fig. 2.1 muestra los resultados de una simulación computacional realizada por la colaboración internacional

The Millennium Simulation Project [5], en la cual se comparan imágenes del Universo a dos distintas escalas. Podemos notar que a escalas de 500 Mpc el Universo se vuelve altamente homogéneo e isotrópico; estas escalas se conocen como *escalas cosmológicas* y es solo en este rango de longitudes en las cuales el Universo se puede modelar como un fluido ideal y todas las ecuaciones de la cosmología moderna toman validez.

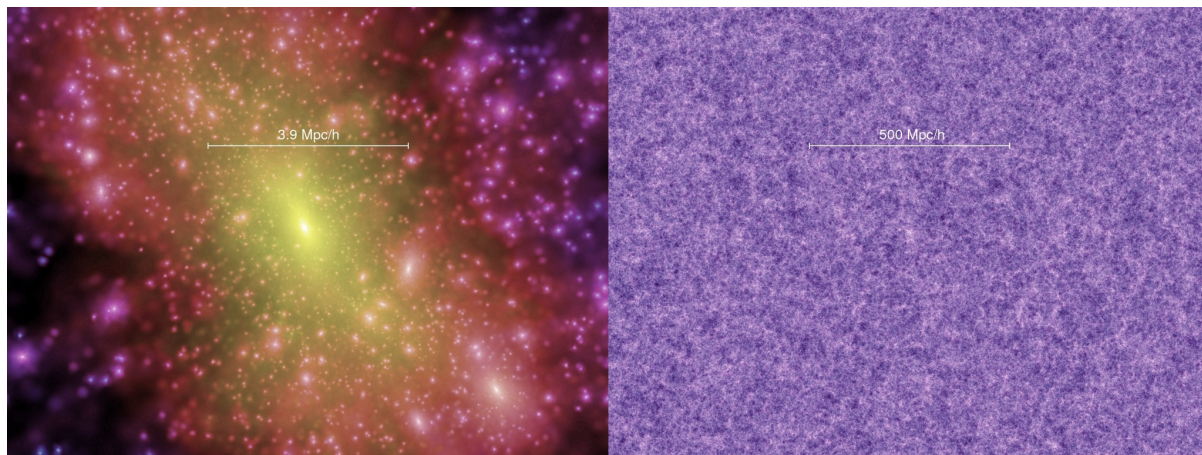


Figura 2.1: Distribución de materia en nuestro Universo a escalas del orden de 1 Mpc (izquierda) y 500 Mpc (derecha) [5]. Cada punto brillante representa una galaxia.

La isotropía del Universo a escalas cosmológicas también se hace evidente si estudiamos el espectro de temperaturas de la radiación cósmica de fondo (Cosmic Microwave Background, CMB). Aproximadamente 300 000 años después del Big Bang, la radiación se desacopló de la materia en un proceso conocido como recombinación; estos fotones desacoplados viajan libremente desde entonces y son quienes dan origen a la radiación cósmica de fondo. El CMB llega a la Tierra desde todas las direcciones del espacio con un espectro que se ajusta con gran precisión al de un cuerpo negro de una temperatura aproximada de 2.725K. La fig 2.2 muestra las anisotropías del CMB obtenidas como resultado de la colaboración Planck [6]; en ella se observa que esta radiación es altamente isotrópica, con variaciones de temperatura del orden de diez partes por millón.

La gran isotropía de la radiación cósmica de fondo y el principio copernicano, el cual establece que no estamos en una situación privilegiada del Universo, son los motivos principales por los cuales la cosmología moderna asume que nuestro Universo, a escalas suficientemente grandes, se comporta como un sistema altamente homogéneo e isotrópico. Esta postura se conoce en la actualidad como el principio cosmológico.

2.2. El Universo de Friedmann

La relatividad general establece que las propiedades del espacio-tiempo están determinadas por las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, el cual queda definido por la distancia entre dos eventos separados infinitesimalmente. La geometría de un espacio-tiempo homogéneo e isotrópico está dada por el tensor métrico de Friedmann (1.24). La métrica de Friedmann es la base de toda la cosmología moderna y modela la geometría del Univer-

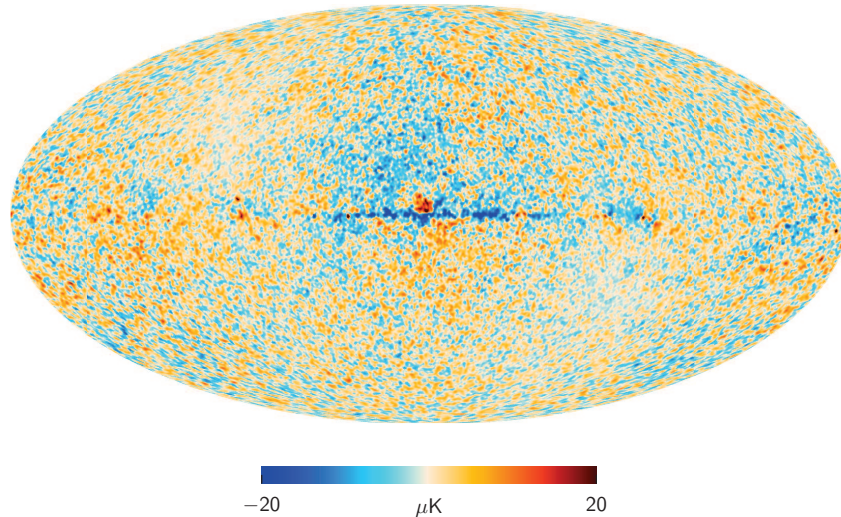


Figura 2.2: Las anisotropías en la radiación cósmica de fondo son del orden de diez partes por millón [7].

so observable, en la cual el factor de escala parametriza cómo este evoluciona en el tiempo.

2.2.1. Curvatura

La curvatura es una propiedad global del Universo y está representada por la variable k de la ecuación (1.24). La curvatura en un Universo de tipo FLRW se puede separar en tres tipos:

1. $k = 0$ (Universo Plano)

En un espacio plano todos los teoremas usuales de la geometría euclidiana son válidos. Un Universo plano con materia ordinaria puede expandirse de forma tal que su tasa de expansión es asintóticamente constante. Un plano es un ejemplo de un espacio plano bidimensional

2. $k > 0$ (Universo Cerrado)

En un universo cerrado la geometría euclideana deja de ser válida a grandes escalas. Por ejemplo, la suma de los ángulos de un triángulo es mayor a 180° y dos rectas que inicialmente son paralelas pueden encontrarse en un punto. Un Universo cerrado con materia ordinaria puede volver a contraerse y terminar en una singularidad (Big Crunch). Una superficie esférica es un ejemplo de un espacio cerrado bidimensional.

3. $k < 0$ (Universo Abierto)

En un universo abierto la geometría euclideana deja de ser válida a grandes escalas. Por ejemplo, la suma de los ángulos de un triángulo es menor a 180° y dos rectas que inicialmente son paralelas pueden separarse infinitamente. Un Universo abierto con materia ordinaria puede expandirse con una tasa de expansión que tiende al infinito (Big Rip). La silla de montar es un ejemplo de un espacio abierto bidimensional.

Las observaciones de la radiación cósmica de fondo realizadas por colaboración Planck [6] sugieren que la curvatura de nuestro Universo es lo suficientemente pequeña para po-

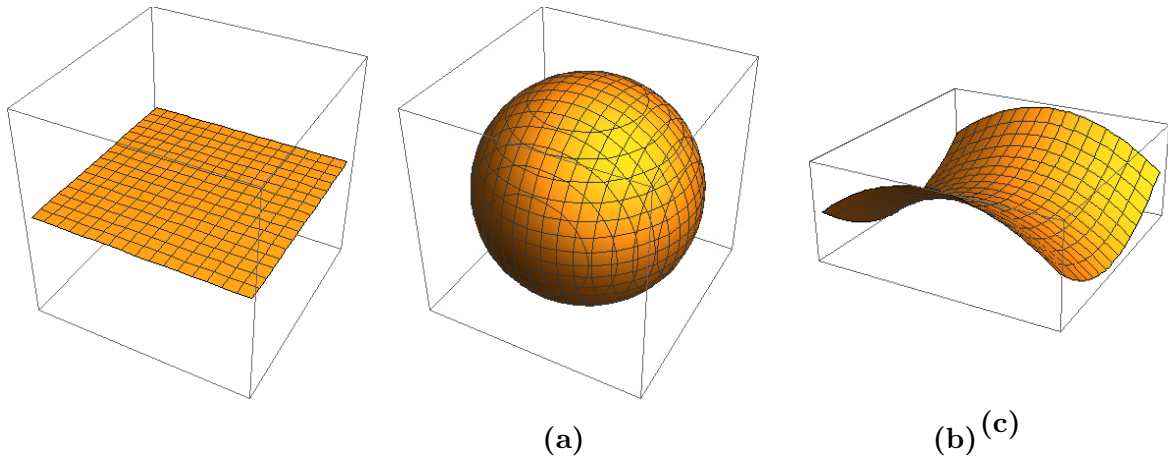


Figura 2.3: Distintas geometrías en un espacio bidimensional: (a) espacio plano, (b) espacio con curvatura positiva y (c) espacio con curvatura negativa.

der asumir que nuestro Universo es plano dentro de un margen de error del 0.5%. Por este motivo, en el modelo estándar de cosmología usualmente se toma $k = 0$, lo cual simplifica considerablemente las ecuaciones cosmológicas, tal como se verá más adelante.

Teniendo en cuenta los posibles signos de la constante de curvatura es posible reescribir el elemento del línea de FLRW en coordenadas hipersféricas [8], en cuyo caso se tiene

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (dr^2 + \Phi^2(r)d\Omega^2), \quad (2.1)$$

donde $d\Omega$ representa el elemento de ángulo sólido y

$$\Phi^2(r) = \begin{cases} r^2, & k = 0 \\ k^{-1} \text{sen}^2(\sqrt{k}r), & k > 0 \\ |k|^{-1} \sinh^2(\sqrt{|k}|r), & k < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Las coordenadas hipersféricas permiten expresar el elemento de línea de FLRW sin hacer referencia explícita a la curvatura del Universo; todo el contenido de la curvatura se encuentra codificado en la forma de la función Φ .

2.2.2. Factor de escala

La expresión (2.1) se puede escribir como

$$ds^2 = -dt^2 + dl^2,$$

donde

$$dl^2 = a^2(t) (dr^2 + \Phi^2(r)d\Omega^2) \quad (2.3)$$

representa la distancia espacial física entre dos puntos del espacio infinitesimalmente cercanos. Es importante notar que dl^2 no representa la distancia entre dos partículas, sino la distancia geométrica entre dos puntos del espacio. En este contexto, el factor de escala actúa como un coeficiente que parametriza la evolución de la distancia entre dos puntos del espacio a lo largo del tiempo. Existen tres dinámicas posibles para el factor de escala que son de interés en la cosmología:

- $\dot{a} > 0$: La distancia entre dos puntos del espacio crece con el tiempo. El Universo se encuentra en expansión.
- $\dot{a} < 0$: La distancia entre dos puntos del espacio decrece con el tiempo. El Universo se encuentra en contracción.
- $\dot{a} = 0$: La distancia entre dos puntos del espacio permanece constante. El Universo es estacionario.

Por motivos enteramente prácticos, el valor del factor de escala en el presente ($t = t_0$) se normaliza a la unidad ($a_0 = 1$). Esto tiene una consecuencia sobre la interpretación geométrica del valor del factor de escala en un instante de tiempo arbitrario. Sea d_0 la distancia entre dos puntos en el presente t_0 , en el cual el valor del factor de escala toma el valor $a_0 = 1$. Si en cualquier otro instante de tiempo arbitrario (del pasado o del futuro) la distancia entre dichos puntos tiene un valor d y el factor de escala un valor a , entonces se cumple que

$$\frac{d}{a} = \frac{d_0}{a_0}. \quad (2.4)$$

Utilizando $a_0 = 1$, se tiene que

$$a = \frac{d}{d_0} \quad (2.5)$$

y por lo tanto el valor del factor de escala en un instante de tiempo representa la relación entre las distancias entre dos puntos del espacio en dicho instante y en el presente.

2.2.3. Coordenadas comóviles

La coordenada r de la ecuación (2.3) por sí misma no representa una distancia física y se conoce como *coordenada comóvil*. En el presente ($a_0 = 1$) toda distancia comóvil es también una distancia física, pero a medida que el factor de escala cambia la distancia física puede hacerse mayor ($\dot{a} > 0$) o menor ($\dot{a} < 0$) a la distancia comóvil. Las coordenadas comóviles son un conjunto de coordenadas que servirían para identificar posiciones espaciales si nuestro Universo fuese estacionario. Debido a la presencia del factor de escala, el Universo posee una dinámica no trivial y las coordenadas comóviles se pueden interpretar como un sistema coordenado que se expande o contrae con el Universo, tal como se muestra en la fig 2.4.

Las coordenadas comóviles son útiles pues, mientras las distancias físicas cambian con la expansión o contracción del Universo, las distancias comóviles entre dos partículas no son afectadas por la cosmología y solo pueden cambiar si existe un movimiento

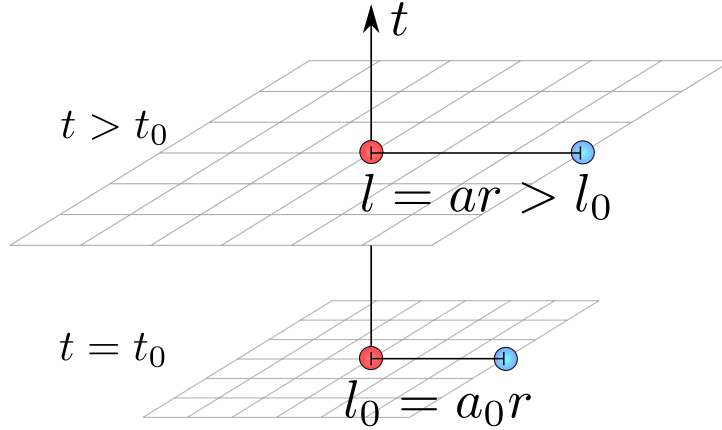


Figura 2.4: En un Universo en expansión, la distancia física l entre dos puntos del espacio aumenta con el tiempo aún cuando la coordenada comóvil r se mantiene constante.

relativo entre estas que sea independiente de la evolución del Universo. Esto ocurre, por ejemplo, cuando un planeta orbita a una estrella o cuando dos galaxias chocan atraídas por la fuerza de gravedad entre sus masas; evidentemente, ambos fenómenos afectarían las distancias entre partículas aún si el Universo fuese estacionario. Las velocidades de las partículas que se originan por interacciones que no son producto de la expansión del Universo se conocen como *velocidades peculiares*. En este contexto, es posible afirmar que la distancia comóvil entre dos partículas cambia únicamente si existe una velocidad peculiar relativa no nula.

Debido a que el Universo posee dinámica, la velocidad total de una partícula que se propaga en el espacio tiene dos componentes: la velocidad peculiar (producto de interacciones a escalas no cosmológicas) y la velocidad debido a la expansión del Universo, llamada también velocidad debido al flujo de Hubble.

2.3. La ley de Hubble

Si bien es cierto que el Universo como un todo posee una dinámica, esta solo se hace evidente cuando es estudiada a escalas cosmológicas; es decir, en el orden de los megapársec (Mpc). Debido a que la distancia promedio entre dos galaxias en nuestro Universo es de $1Mpc$ [9], es posible estudiar algunas propiedades del Universo analizando, por ejemplo, cómo las distancias de separación entre galaxias cambia con el tiempo. Si se ubica un sistema coordenado con origen en una galaxia arbitraria, la distancia a otra galaxia cualquiera queda determinada únicamente por la distancia radial a la misma, lo cual hace posible utilizar la eq. (2.3) con $d\Omega^2 = 0$ ¹. De esta forma, la función Φ queda eliminada del elemento de línea y la distancia física l entre dos galaxias en un instante de tiempo arbitrario está determinada por

$$l = ar, \quad (2.6)$$

¹Esto es equivalente a fijar $\theta = \pi/2$ y $\phi = 0$.

donde r representa la distancia comóvil entre las galaxias. En el caso más general, es posible que tanto el factor de escala como la distancia comóvil puedan cambiar con el tiempo. Por lo tanto, la rapidez relativa entre dos galaxias en general está dada por

$$\begin{aligned} v &= \frac{dl}{dt} = \dot{a}r + a\dot{r} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) ar + a\dot{r} \\ &= \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) l + a\dot{r}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde se ha utilizado (2.6). El primer término del lado derecho de (2.7), $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)l$, se conoce como la velocidad debido al *flujo de Hubble* y se interpreta como la componente de la velocidad producida por la expansión o contracción del Universo. Por otro lado, el segundo término, $a\dot{r}$, es conocido como la *velocidad peculiar relativa* y representa a todo movimiento relativo que es independiente de la evolución del Universo.

En el año 1929, el astrónomo estadounidense Edwin Hubble determinó experimentalmente a través del estudio de las luminosidades y los corrimientos al rojo de estrellas variables Cefeidas [10] que, en promedio, las galaxias muy lejanas *se alejan* de la Vía Láctea con rapidez que son proporcionales a sus distancias a la Tierra según una relación que hoy es conocida como la ley de Hubble:

$$v = H_0 l, \quad (2.8)$$

donde v representa la rapidez de recesión de la galaxia, l la distancia física a la galaxia y $H_0 = 67.8 \pm 0.9 \frac{km}{s} Mpc^{-1}$ es una constante de proporcionalidad llamada constante de Hubble.

Comparando las ecuaciones (2.7) y (2.8) es posible extraer dos conclusiones fundamentales de la cosmología moderna:

1. *El Universo se expande.*

Para que las galaxias se alejen de nosotros en el presente según la ley de Hubble, es necesario que el factor $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)$ de la ecuación (2.7) sea positivo y en consecuencia que se cumpla $\dot{a} > 0$. Es decir, la ley de Hubble es una evidencia experimental de que nuestro Universo debe encontrarse en expansión.

2. *Las velocidades peculiares son despreciables a escalas cosmológicas.*

A pesar de que la ecuación (2.7) contiene un término correspondiente a las velocidades peculiares de las galaxias, Hubble encontró que a escalas de decenas de Mpc la velocidad de recesión de las galaxias solo es proporcional a sus distancias a la Tierra. Esto significa que, a pesar de que las galaxias sí poseen velocidades peculiares, a escalas cosmológicas estas son despreciables en comparación a la velocidad debido al flujo de Hubble.

Al trabajar exclusivamente a escalas cosmológicas (cientos de Mpc) es posible despre-

ciar el término de la velocidad peculiar en (2.7) y así obtener la relación

$$v = Hl \quad (2.9)$$

donde

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.10)$$

es una función que depende del tiempo denominada *parámetro de Hubble*, la cual parametriza la tasa de expansión del Universo. No se debe confundir al parámetro de Hubble con la constante de Hubble: el parámetro de Hubble es una función que depende del tiempo mientras que la constante de Hubble es el valor del parámetro de Hubble en el presente: $H_0 = H(t_0)$. En términos generales, podemos decir que la relación (2.8) obtenida experimentalmente por Edwin Hubble es simplemente la ecuación (2.9) evaluada en el presente; por este motivo, la ecuación también (2.9) es conocida en la cosmología como Ley de Hubble y es a esta a la que se hará referencia a lo largo de este trabajo.

2.4. Redshift cosmológico

Así como las frecuencias de las ondas sonoras cambian cuando el emisor y el receptor se acercan o se alejan (efecto Doppler), la frecuencia de la luz que llega a la Tierra de otras galaxias disminuye debido al movimiento relativo producido por la expansión del Universo. Este fenómeno es conocido como redshift (corrimiento al rojo) cosmológico y su naturaleza es totalmente distinta a la del efecto Doppler usual sufrido por la luz.

Utilizando la métrica de FLRW (1.24),

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \right],$$

para un rayo de luz radial se tiene $ds^2 = 0$, $\theta = \text{const}$ y $\phi = \text{const}$. Por lo tanto, la expresión de la métrica de FLRW se reduce a

$$\begin{aligned} 0 &= c^2 dt^2 - \frac{a^2 dr^2}{1 - kr^2} \\ \Rightarrow \frac{cdt}{a} &= \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Supóngase que un pulso de una señal luminosa pasa por la posición $r = 0$ en cierto instante $t = t_1$ y por la posición $r = r_0$ en otro instante $t = t_2$. A partir de la ecuación (2.11) se tiene

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{cdt}{a} = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.12)$$

Supóngase ahora que un segundo pulso de dicha señal pasa por la posición $r = 0$ en el

instante $t = t_1 + dt_1$ y por la posición $r = r_0 + \delta r$ en el instante $t = t_2 + dt_2$. A partir de (2.11) se tiene

$$\int_{t_1+dt_1}^{t_2+dt_2} \frac{cdt}{a} = \int_0^{r_0+\delta r} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \quad (2.13)$$

A escalas cosmológicas, las velocidades peculiares de las galaxias son despreciables y en consecuencia las coordenadas comóviles no cambian. Esto significa que podemos despreciar el término δr en (2.13) y obtener

$$\int_{t_1+dt_1}^{t_2+dt_2} \frac{cdt}{a} = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \quad (2.14)$$

Comparando (2.12) y (2.14), se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_1+dt_1} \frac{cdt}{a} + \int_{t_1+dt_1}^{t_2} \frac{cdt}{a} &= \int_{t_1+dt_1}^{t_2+dt_2} \frac{cdt}{a} \\ \int_{t_1}^{t_1+dt_1} \frac{cdt}{a} + \int_{t_1+dt_1}^{t_2} \frac{cdt}{a} &= \int_{t_1+dt_1}^{t_2} \frac{cdt}{a} + \int_{t_2}^{t_2+dt_2} \frac{cdt}{a} \\ \int_{t_1}^{t_1+dt_1} \frac{dt}{a} &= \int_{t_2}^{t_2+dt_2} \frac{dt}{a} \\ \frac{dt_1}{a(t_1)} &= \frac{dt_2}{a(t_2)} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Físicamente, dt_1 y dt_2 representan los periodos de la onda electromagnética en los instantes t_1 y t_2 ; por lo tanto, la ecuación (2.15) indica que el periodo de la onda electromagnética cambia debido a la dinámica del Universo según

$$\frac{T_1}{a(t_1)} = \frac{T_2}{a(t_2)}. \quad (2.16)$$

En el caso particular en el cual la onda electromagnética es emitida por una fuente astrofísica en cierto instante de emisión $t_1 = t_e$ y recibida en Tierra en cierto instante de recepción $t_2 = t_r$, la ecuación (2.16) representa la variación del periodo de la onda durante su propagación desde la fuente hasta la Tierra. Debido a que en la cosmología observacional la recepción de las señales luminosas se realiza siempre en el presente, los parámetros al instante de la recepción de la onda electromagnética son

$$t_r = t_0 \quad a(t_r) = a_0 = 1 \quad (2.17)$$

Por otro lado, las señales recibidas en Tierra en el presente provienen de fuentes muy lejanas, lo cual significa que las ondas recibidas hoy fueron emitidas en algún instante del pasado $t_e < t_0$ en el cual el factor de escala tomaba algún valor $a(t_e) < 1$ (pues el Universo era más pequeño). Por convención en la cosmología, los parámetros relevantes en el instante de la emisión de la onda se representan simplemente como

$$t_e = t < t_0 \quad a(t_e) = a < 1. \quad (2.18)$$

Por lo tanto, dentro del contexto del redshift cosmológico, la variable t presenta el instante en el pasado en el cual fue emitida la señal luminosa y a el valor del factor de escala del Universo en dicho instante.

■ **Periodo**

A partir de las relaciones (2.16), (2.17) y (2.18), los periodos de una onda electromagnética al instante de su emisión (T_e) y al instante de su recepción en Tierra (T_r) están relacionados por

$$T_r = \frac{T_e}{a}, \quad (2.19)$$

donde a representa el valor del factor de escala en el instante de la emisión. Debido a que la señal fue emitida en el pasado, $a < 1$ y en consecuencia se tiene

$$T_r > T_e.$$

El periodo de una onda electromagnética medido en Tierra es mayor al periodo que tenía al momento de ser emitida.

■ **Frecuencia**

Debido a que la frecuencia f es inversamente proporcional al periodo T , a partir de (2.19) se tiene

$$f_r = a f_e. \quad (2.20)$$

Como $a < 1$, se concluye que

$$f_r < f_e \quad (2.21)$$

y por lo tanto la frecuencia de la onda al momento de la recepción es menor al valor que poseía al momento de la emisión; es decir, la frecuencia de una onda disminuye a medida que propaga en el espacio debido a la expansión del Universo. Este fenómeno es conocido como *redshift cosmológico* o *corrimiento al rojo cosmológico*.

■ **Longitud de Onda**

Debido a que la longitud de onda es directamente proporcional al periodo, a partir de (2.19) se tiene

$$\lambda_r = \frac{\lambda_e}{a}. \quad (2.22)$$

Nuevamente, debido a que $a < 1$,

$$\lambda_r > \lambda_e$$

y la longitud de onda aumenta debido a la expansión del Universo a medida que la luz se propaga.

El cambio fraccionario de la longitud de onda de la luz emitida por una fuente astrofísica debido a la expansión del Universo es parametrizado por el *corrimiento al rojo*

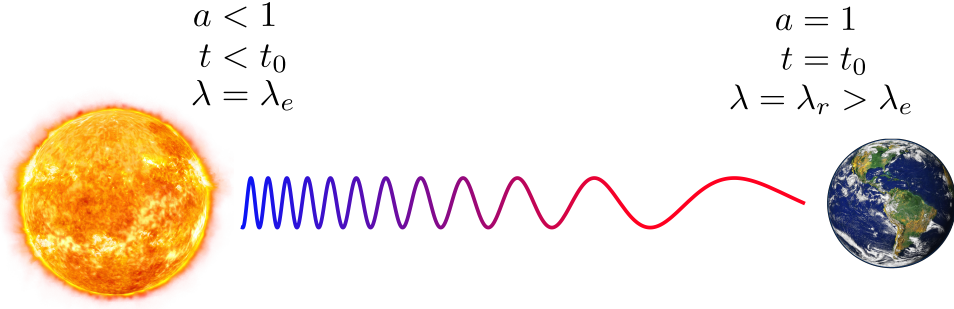


Figura 2.5: Representación esquemática del corrimiento al rojo cosmológico de la radiación electromagnética emitida por una fuente astrofísica. La longitud de onda de la luz aumenta debido a la expansión del Universo.

o *redshift cosmológico* z definido por

$$z = \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e}. \quad (2.23)$$

Teniendo en cuenta (2.22), el redshift cosmológico se puede escribir como

$$\begin{aligned} z &= \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_r}{\lambda_e} - 1 \\ &= \frac{1}{a} - 1 \end{aligned} \quad (2.24)$$

y por lo tanto, si una fuente astrofísica emite radiación electromagnética en un instante del pasado en el cual el valor del factor de escala tomó un valor a , el redshift que sufre dicha radiación desde el instante de su emisión hasta el instante en que llega a Tierra está relacionado al factor de escala según la ecuación

$$a = \frac{1}{1 + z}. \quad (2.25)$$

La ecuación (2.25) es fundamental en la cosmología pues permite expresar el factor de escala del Universo en algún instante del pasado en función al corrimiento al rojo de una radiación electromagnética observada en el presente, el cual se puede medir experimentalmente utilizando métodos espectroscópicos. Si una señal luminosa es emitida en un punto muy cercano a la Tierra, el factor de escala en el instante de su emisión es $a \approx 1$ y en consecuencia el redshift de fuentes cercanas a la Tierra es $z \approx 0$. Mientras más lejos se encuentre la fuente, menor será el valor de a en el instante de la emisión de la luz y en consecuencia mayor el valor de z . En particular, para una señal emitida en el instante del origen del Universo, se tiene que $a = 0$ y por lo tanto $z = \infty$.

2.5. Ecuaciones de Friedmann

Una vez obtenidos el tensor métrico de Friedmann y el su respectivo tensor energía-momento es posible utilizar las ecuaciones de campo de Einstein para encontrar las ecuaciones de movimiento de los parámetros cosmológicos relevantes a un Universo de FLRW.

2.5.1. Símbolos de Christoffel

Utilizando la ecuación (1.15) y el tensor métrico (1.25) es posible encontrar todos los símbolos de Christoffel no nulos en un Universo del tipo FLRW:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \\
\Gamma_{22}^0 &= r^2 a\dot{a} \\
\Gamma_{33}^0 &= r^2 a\dot{a} \text{sen}^2(\theta) \\
\Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a} \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1-kr^2} \\
\Gamma_{22}^1 &= r(-1+kr^2) \\
\Gamma_{33}^1 &= r(-1+kr^2) \text{sen}^2(\theta) \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{33}^2 &= -\cos(\theta) \text{sen}(\theta) \\
\Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot(\theta)
\end{aligned}$$

2.5.2. Tensor de Riemann

A partir de la definición del tensor de Riemann, ecuación (1.16), y los símbolos de Christoffel obtenidos se obtienen las componentes no nulas del tensor de Riemann:

$$\begin{aligned}
R_{101}^0 &= \frac{a\ddot{a}}{1-kr^2} & R_{010}^1 &= R_{020}^2 = R_{030}^3 = -\frac{\ddot{a}}{a} \\
R_{110}^0 &= -\frac{a\ddot{a}}{1-kr^2} & R_{212}^1 &= R_{232}^3 = r^2(k+\dot{a}^2) \\
R_{202}^0 &= r^2 a\ddot{a} & R_{221}^1 &= R_{223}^3 = -r^2(k+\dot{a}^2) \\
R_{220}^0 &= -r^2 a\ddot{a} & R_{313}^1 &= R_{323}^3 = r^2(k+\dot{a}^2) \text{sen}^2(\theta) \\
R_{303}^0 &= r^2 a\ddot{a} \text{sen}^2(\theta) & R_{331}^1 &= R_{332}^3 = -r^2(k+\dot{a}^2) \text{sen}^2(\theta) \\
R_{330}^0 &= -r^2 a\ddot{a} \text{sen}^2(\theta) & R_{112}^2 &= R_{113}^3 = -\frac{k+\dot{a}^2}{1-kr^2} \\
R_{001}^1 &= R_{002}^2 = R_{003}^3 = \frac{\ddot{a}}{a} & R_{121}^2 &= R_{131}^3 = \frac{k+\dot{a}^2}{1-kr^2}
\end{aligned}$$

2.5.3. Tensor de Ricci

Utilizando la definición del tensor de Ricci (1.17) y las componentes obtenidas para el tensor de Riemann se obtienen las componentes no nulas del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{3\ddot{a}}{a} \\ R_{11} &= \frac{2k + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{1 - kr^2} \\ R_{22} &= r^2[2(k + \dot{a}^2) + a\ddot{a}] \\ R_{33} &= r^2[2(k + \dot{a}^2) + a\ddot{a}] \text{sen}^2(\theta) \end{aligned}$$

2.5.4. Escalar de Ricci

Utilizando la definición del escalar de Ricci (1.18) obtenemos el escalar de Ricci para un Universo de FLRW:

$$R = 6 \left(\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right).$$

2.5.5. Tensor de Einstein

Con la definición del tensor de Einstein (1.21) y los resultados obtenidos para el tensor de Ricci y el escalar de Ricci obtenemos las componentes no nulas del tensor de Einstein:

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{3(k + \dot{a}^2)}{a^2} \\ G_{11} &= -\frac{k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}}{1 - kr^2} \\ G_{22} &= -r^2(k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}) \\ G_{33} &= -r^2(k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}) \text{sen}^2(\theta) \end{aligned} \tag{2.26}$$

2.5.6. Ecuaciones de campo de Einstein

Por último, utilizando la ecuación de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

y las ecuaciones (1.35) y (2.26) obtenemos cuatro ecuaciones de campo no nulas:

$$\frac{3(k + \dot{a}^2)}{a^2} = 8\pi G\rho \tag{2.27}$$

$$-\frac{k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}}{1 - kr^2} = 8\pi G \frac{a^2 p}{1 - kr^2} \tag{2.28}$$

$$-r^2(k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}) = 8\pi Gr^2 a^2 p \tag{2.29}$$

$$-r^2(k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}) \text{sen}^2(\theta) = 8\pi Gr^2 a^2 \text{sen}^2(\theta) p \tag{2.30}$$

de las cuales solo las ecuaciones (2.27) y (2.28) son independientes. La ecuación (2.27) puede reescribirse como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (2.31)$$

Por otro lado, si reescribimos la ecuación (2.28) en la forma

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -8\pi G\rho - \frac{k}{a}$$

y la restamos con la ecuación (2.31) obtenemos una ecuación para la aceleración del factor de escala,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.32)$$

La ecuación (2.31) se conoce como ecuación de Friedmann y la ecuación (2.32) como la ecuación de aceleración del Universo. Estas son independientes y representan las ecuaciones de movimiento más importantes de un Universo perfectamente homogéneo e isotrópico.

2.6. El fluido cosmológico

Para poder resolver las ecuaciones de Friedmann (2.31) y (2.32) es necesario primero especificar la composición del fluido cosmológico. Toda componente que forme parte del fluido cosmológico se caracteriza por su *ecuación de estado*

$$\omega = \frac{p}{\rho}, \quad (2.33)$$

donde la magnitud ω define las características de la componente del fluido cósmico. Debido a que en nuestro Universo abundan la materia y la radiación, es de esperar que estas contribuyan de forma natural a la densidad y presión del tensor de energía momento de nuestro Universo.

2.6.1. Materia

La materia, también llamada polvo o *dust*, representa a todos los elementos no relativistas del Universo, es decir, a aquellos que se mueven con velocidades mucho menores a la de la luz. En términos generales, el dust representa a todas las galaxias del Universo y también al gas intergaláctico. También incluye a la materia oscura, la cual es un tipo exótico y desconocido de materia que no emite ni absorbe radiación electromagnética y que es necesaria para explicar las curvas de velocidad de algunas galaxias y la formación de estructura en el Universo primigenio [11].

El dust, a escalas cosmológicas, es arrastrado por la expansión del Universo y se caracte-

riza por tener presión nula

$$p_m = 0 \tag{2.34}$$

y en consecuencia por tener una ecuación de estado

$$\omega_m = 0.$$

Si se denota a la densidad de energía de materia en el presente por ρ_{m0} entonces, debido a que nuestro Universo se expande, es de esperar que en el futuro el valor de esta densidad de energía disminuya a medida que el volumen del Universo aumenta y la materia *se diluye*. Debido a que toda longitud crece con el factor de escala, todo volumen crece como a^3 y por lo tanto la densidad de energía de la materia decrece como $1/a^3$:

$$\rho_m = \frac{\rho_{m0}}{a^3}. \tag{2.35}$$

2.6.2. Radiación

La radiación representa a todos los elementos relativistas del Universo; es decir, a aquellas partículas que se mueven con velocidades cercanas a la de la luz. La radiación incluye a todos los fotones del Universo y además a otras partículas poco masivas como los neutrinos. De acuerdo a la teoría del electromagnetismo, la presión ejercida por la radiación está relacionada con su densidad de energía [12] por la relación

$$p_r = \frac{\rho_r}{3} \tag{2.36}$$

y en consecuencia la radiación tiene por ecuación de estado

$$\omega_r = \frac{1}{3}.$$

Si se denota a la densidad de energía de la radiación en el presente por ρ_{r0} entonces, al igual como sucede con la materia, es de esperar que esta densidad se deba diluir a medida que el Universo se expande. El primer efecto de dicha dilución se da por el incremento del volumen en el Universo, lo cual genera que la densidad de energía de la radiación disminuya como $1/a^3$. Sin embargo, la radiación, a diferencia de la materia, sufre un segundo efecto: su energía disminuye también a medida que los fotones de la radiación pierden energía por el corrimiento al rojo cosmológico.

Teniendo en cuenta que la energía de un fotón está dada por $E = hf$, donde h representa la constante de Planck y f la frecuencia del fotón, la ecuación (2.16) que representa el cambio del periodo del fotón implica que la energía de un fotón es afectada

por la expansión del Universo según

$$\begin{aligned}
 E_2 &= hf_2 = h \frac{1}{T_2} \\
 &= h \frac{a_1}{a_2} \frac{1}{T_1} = \frac{a_1}{a_2} hf_1 \\
 &= \frac{a_1}{a_2} E_1.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Si se toma $a_1 = a_0 = 1$ como el factor de escala en el presente y $E_1 = E_0$ como la energía del fotón en el presente, entonces la energía de la radiación $E_2 = E$ en cualquier otro instante arbitrario en el cual el factor de escala toma un valor $a_2 = a$ está dada por

$$E = \frac{E_0}{a} \tag{2.38}$$

y por lo tanto la energía de un fotón varía como $1/a$ debido a la expansión del Universo. Teniendo en cuenta la variación de $1/a^3$ debido al incremento del volumen del Universo y la variación de $1/a$ debido al redshift cosmológico, la densidad de energía ρ_r de la radiación en un Universo de FLRW está dada por

$$\rho_r = \frac{\rho_{r0}}{a^4}, \tag{2.39}$$

donde ρ_{r0} representa la radiación de la radiación en el presente.

2.6.3. Constante cosmológica

La ecuación de Friedmann (2.32),

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \tag{2.40}$$

predice que la aceleración del Universo depende de su composición. Si el Universo está compuesto únicamente por materia y radiación, las ecuaciones (2.34), (2.35), (2.36) y (2.39) implican que tanto la densidad de energía como la presión del Universo son positivas y por lo tanto se tiene $\ddot{a} < 0$, lo cual significa que si el Universo se expande en presencia de materia y radiación, esta expansión debe ser necesariamente desacelerada

En el año 1998, observaciones cosmológicas de los corrimientos al rojo de supernovas de tipo Ia [13] demostraron que, contrariamente a lo que se esperaría en un Universo en expansión compuesto por materia y radiación, el Universo en la actualidad no desacelera, sino que se expande aceleradamente:

$$\ddot{a} > 0. \tag{2.41}$$

La expansión acelerada tardía del Universo es uno de los enigmas más interesantes de la cosmología moderna. Las soluciones al problema de la aceleración del Universo se pueden clasificar en dos tipos:

- **Teorías de Gravedad Modificada**

Una forma de modelar la aceleración tardía del Universo es modificar la teoría de la gravedad de Einstein a través de modificaciones a la acción de Einstein-Hilbert [2]. Estas modificaciones tienen como consecuencia que las ecuaciones de movimiento del Universo cambien de forma tal que la ecuación (2.32) ya no es válida y es reemplazada por otras ecuaciones que sí permiten una aceleración positiva aún en un Universo compuesto únicamente por materia y radiación.

- **Teorías de Energía Oscura**

La aceleración tardía del Universo se puede modelar sin modificar las ecuaciones de Einstein si se asume la existencia de una nueva componente exótica en el Universo llamada *energía oscura*, la cual posee una naturaleza completamente distinta a la materia y radiación ordinarias. La densidad de energía y la presión de la energía oscura dependen del modelo que se utilice [14] y se pueden incluir directamente en las ecuaciones de Friedmann (2.31) y (2.32) como componentes adicionales del Universo.

En el modelo estándar de la cosmología, conocido como modelo Λ CDM, la energía oscura se modela con la presencia de un fluido llamado *constante cosmológica* y representado por la letra Λ [9]. La constante cosmológica actúa como una componente del Universo que posee una densidad de energía constante

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (2.42)$$

y una presión negativa

$$p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (2.43)$$

donde la constante Λ , llamada también constante cosmológica, parametriza la densidad de energía y la presión. A partir de las ecuaciones (2.42) y (2.43), la ecuación de estado de la constante cosmológica en unidades naturales es

$$\omega = -1. \quad (2.44)$$

Introduciendo la constante cosmológica, la ecuación de Friedmann (2.31) toma la forma

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3} (\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2} \\ &= \frac{8\pi G}{3} \left(\rho_m + \rho_r + \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) - \frac{k}{a^2} \\ &= \frac{8\pi G}{3} (\rho_m + \rho_r) - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \end{aligned} \quad (2.45)$$

y la ecuación de la aceleración (2.32) la forma

$$\begin{aligned}
\frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda + 3(p_m + p_r + p_\Lambda)) \\
&= -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r + 3(p_m + p_r)) - \frac{4\pi G}{3} \left(\frac{\Lambda}{8\pi G} + 3 \left(\frac{-\Lambda}{8\pi G} \right) \right) \\
&= -\frac{4\pi G}{3}[\rho_m + \rho_r + 3(p_m + p_r)] + \frac{\Lambda}{3}.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

El signo positivo en el término representado por la constante cosmológica en la ecuación (2.46) hace posible que la aceleración del Universo pueda ser positiva si Λ toma el valor adecuado.

A pesar de que la constante cosmológica permite modelar de manera bastante precisa la expansión acelerada del Universo [6], su interpretación física aún es tema de debate en la cosmología [15]. La interpretación más aceptada es que la constante cosmológica está conectada a la energía del vacío predicha por la teoría cuántica de campos y por lo tanto es la energía del espacio mismo la que provoca que el Universo acelere. De ser así, es de esperar que el valor experimental de la constante cosmológica debería coincidir con los valores de energía del vacío predichos por la teoría cuántica; sin embargo, observaciones actuales indican que esto no es así y que la energía del vacío predicha por la teoría cuántica de campos puede llegar a ser incluso 120 órdenes de magnitud mayor a la energía observada para la constante cosmológica [16]. Por estas razones, la naturaleza de la constante cosmológica sigue siendo motivo de discusión aún si su aplicación en la cosmología permite modelar de manera precisa la aceleración tardía del Universo.

Por último, en presencia de una constante cosmológica, la ecuación de Friedmann se puede escribir como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{m0}}{a^3} + \frac{\rho_{r0}}{a^4} \right) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}, \tag{2.47}$$

donde ρ_{m0} y ρ_{r0} representan los valores de las densidades de materia y energía en el presente.

2.7. Radio de Hubble

Para una distancia de separación lo suficientemente grande, la ley de Hubble (2.9) predice que la rapidez de separación v entre dos puntos del espacio puede hacerse igual a la rapidez de la luz. La distancia l_H a la cual $v = c$ se conoce como radio de Hubble y, de acuerdo a la ley de Hubble (2.9), está dada por

$$l_H = cH^{-1}.$$

El radio de Hubble también se puede interpretar como el radio de la esfera que contiene a todos los puntos que se alejan de la Tierra con una rapidez de recesión menor a la de la luz; dicha esfera lleva el nombre de *esfera de Hubble*. Debido a que el parámetro de Hubble varía con el tiempo, el radio de Hubble es también una función del tiempo. Asumiendo $H_0 \approx 70 \frac{km}{s} Mpc^{-1}$, el valor aproximado l_{H0} del radio de Hubble en el presente es

$$\begin{aligned} l_{H0} &\approx 1.29 \times 10^{23} m \\ &\approx 13.7 \text{ millones de años luz.} \end{aligned} \tag{2.48}$$

Todo punto que se encuentra fuera de la esfera de Hubble de la Tierra (a una distancia $l > l_H$ de la Tierra) se aleja de ella con una rapidez mayor a la velocidad de la luz. Si un rayo luminoso es emitido fuera de la esfera de Hubble en dirección a la Tierra, el rayo tendrá que propagarse por un espacio que crece a una tasa mayor a la cual la luz se desplaza; por lo tanto, en el instante de la emisión, el rayo no se acerca a la Tierra: en lugar de eso se aleja debido a la expansión del Universo. Es por este motivo que el radio de Hubble determina qué puntos del Universo pueden interactuar con la Tierra *en el presente*. A medida que el Universo evoluciona, el radio de Hubble también lo hace y el efecto neto de la expansión del Universo sobre la propagación del rayo luminoso depende de la dinámica del Universo.

- En un Universo en expansión desacelerada, la velocidad de recesión disminuye con el tiempo. En consecuencia, dado un tiempo lo suficientemente grande, toda velocidad de recesión eventualmente se hará menor a la de la luz, por lo cual la esfera de Hubble (y el radio de Hubble) crece con el tiempo y en principio podría abarcar a todo el Universo. En este caso, dado un tiempo lo suficientemente grande, la luz emitida por cualquier fuente luminosa inevitablemente llegará a la Tierra.
- En un Universo en expansión acelerada, la velocidad de recesión aumenta con el tiempo. En consecuencia, todos los puntos que hoy se alejan a velocidades menores a la de la luz eventualmente lo harán con velocidades mayores a esta, por lo cual en un Universo en expansión acelerada la esfera de Hubble (y el radio de Hubble) decrece con el tiempo y en principio puede hacerse arbitrariamente pequeña. En este caso, entre la Tierra y una fuente luminosa ubicada a una distancia mayor al radio de Hubble se crea espacio a una tasa mayor a la rapidez de la luz, haciéndose imposible que la luz emitida por la fuente llegue a la Tierra. Este fenómeno se muestra esquemáticamente en la Fig. 2.6.

2.7.1. Radio (comóvil) de Hubble

Al estudiar la cinemática del Universo, es particularmente útil hacer uso del radio comóvil de Hubble, dado por

$$\left(\begin{array}{c} \text{Radio comóvil} \\ \text{de Hubble} \end{array} \right) \equiv \frac{1}{a} \times H^{-1} = (aH)^{-1},$$

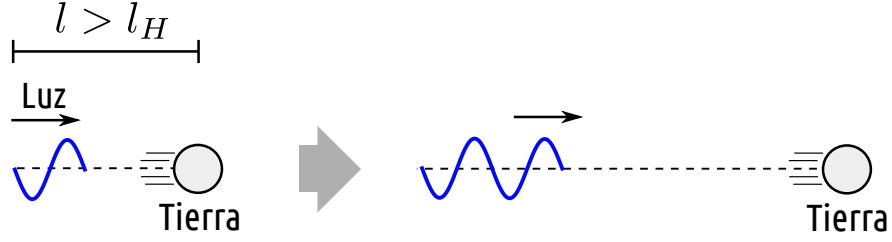


Figura 2.6: Un rayo de luz es emitido desde un lugar que se encuentra a una distancia de la Tierra mayor al radio de Hubble. Debido a la expansión acelerada del Universo, se crea espacio demasiado rápido como para que la luz pueda llegar a la Tierra.

donde se ha utilizado unidades naturales². El radio comóvil de Hubble se puede derivar si se conoce la naturaleza del fluido cosmológico. Para un fluido con ecuación de estado

$$p = \omega\rho,$$

la ecuación de continuidad del fluido 1.29 toma la forma

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\rho} + 3H(\rho + p) = \frac{d\rho}{dt} + 3\frac{1}{a}\frac{da}{dt}(\rho + \omega\rho) \\ &= \frac{d\rho}{\rho} + 3(1 + \omega)\frac{da}{a} \end{aligned}$$

y por lo tanto la densidad de energía se puede expresar en función al factor de escala como

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} &= -3(1 + \omega)\frac{da}{a} \\ \ln \rho &= -3(1 + \omega) \ln a + C \\ \rho &= \rho_0 a^{-3(1+\omega)}, \end{aligned} \tag{2.49}$$

donde ρ_0 representa la densidad de energía en el presente ($a = 1$). Utilizando la ecuación de Friedmann (2.31) y la ecuación (2.49), se tiene

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 a^{-3(1+\omega)} = H_0^2 a^{-3(1+\omega)} \\ \Rightarrow H &= H_0 a^{-\frac{3}{2}(1+\omega)} \\ aH &= H_0 a^{-\frac{1}{2}(1+3\omega)} \end{aligned}$$

y por lo tanto el radio comóvil de Hubble en unidades naturales está dado por

$$(aH)^{-1} = H_0^{-1} a^{\frac{1}{2}(1+3\omega)}. \tag{2.50}$$

²Al incluir los factores de c el radio comóvil de Hubble es: $c(aH)^{-1}$

2.7.2. Radio comóvil de Hubble y expansión acelerada

La dinámica del radio comóvil de Hubble también es importante al estudiar la aceleración del Universo. Al derivar la expresión del radio comóvil de Hubble,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [(aH)^{-1}] &= \frac{d}{dt} \left[\left(a \frac{\dot{a}}{a} \right)^{-1} \right] \\ &= -\dot{a}^{-2} \ddot{a},\end{aligned}\tag{2.51}$$

la aceleración del Universo se puede escribir como

$$\ddot{a} = -\dot{a}^2 \frac{d}{dt} [(aH)^{-1}]\tag{2.52}$$

y por lo tanto el Universo desacelera si el radio comóvil de Hubble es creciente, no acelera si es constante y acelera si es decreciente.

La derivada del radio comóvil de Hubble también se puede obtener a partir de (2.50),

$$\frac{d}{dt} [(aH)^{-1}] = H_0^{-1} \frac{1}{2} (1 + 3\omega) a^{\frac{1}{2}(-1+3\omega)}.\tag{2.53}$$

A partir de (2.52) y (2.53), la aceleración del factor de escala se puede escribir como

$$\ddot{a} = -H_0^{-1} \frac{1}{2} (1 + 3\omega) \dot{a}^2 a^{\frac{1}{2}(-1+3\omega)}\tag{2.54}$$

y por lo tanto el Universo desacelera si $\omega > -1/3$, no acelera si $\omega = -1/3$ y acelera si $\omega < -1/3$.

La tabla 2.1 resume la conexión entre el radio comóvil de Hubble y la aceleración en la expansión del Universo.

$(aH)^{-1}$	\ddot{a}	ω	Fluido
Creciente	$\ddot{a} < 0$	$\omega > -1/3$	materia ($\omega = 0$) radiación ($\omega = 1/3$)
Constante	$\ddot{a} = 0$	$\omega = -1/3$	-
Decreciente	$\ddot{a} > 0$	$\omega < -1/3$	Λ ($\omega = -1$)

Tabla 2.1: Clasificación de la aceleración del Universo en función al radio comóvil de Hubble y a la ecuación de estado del fluido cosmológico.

2.8. Horizontes

En un Universo de FLRW, todo rayo luminoso sufre los efectos de la expansión del Universo. A pesar de que la rapidez del rayo siempre es la misma, el espacio por el que se propaga crece y en consecuencia las distancias que recorre dependen de la dinámica del

Universo. A partir del elemento de línea (en unidades naturales) de un rayo de luz radial en un Universo plano de FLRW,

$$0 = dt^2 - a^2 dr^2,$$

es posible deducir una ecuación que determina la distancia comóvil Δr recorrida por un rayo luminoso entre dos instantes de tiempo t_i y t_f ,

$$\Delta r = \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{a}. \quad (2.55)$$

Tomando por simplicidad $\Delta r = r$, esta distancia se puede expresar en función al radio comóvil de Hubble según

$$\begin{aligned} r &= \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{a} \cdot \frac{\dot{a}}{a} = \int_{t_i}^{t_f} \frac{da}{\dot{a}a} = \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{aH} \frac{da}{a} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} (aH)^{-1} d \ln a. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Debido a que nada se mueve más rápido que la luz, la distancia que recorre la luz entre dos instantes determina la máxima distancia que puede recorrer cualquier partícula del Universo entre dichos instantes.

2.8.1. Horizonte (comóvil) de eventos

El horizonte (comóvil) de eventos r_h se define como la máxima distancia comóvil que puede viajar un rayo de luz a partir de cierto instante t hasta el infinito. Debido a que la luz determina conexiones causales, el horizonte de eventos determina si dos puntos podrán o no estar conectados causalmente en toda la historia futura del Universo. De acuerdo a (2.56), el horizonte comóvil de eventos está dado por

$$r_h = \int_t^\infty \frac{dt}{a} = \int_t^\infty (aH)^{-1} d \ln a \quad (2.57)$$

y por lo tanto el horizonte de eventos físico es

$$l_h = a \int_t^\infty (aH)^{-1} d \ln a. \quad (2.58)$$

Si el horizonte de eventos es infinito, entonces es posible que la luz llegue de un punto a otro sin importar qué tan alejados se encuentren dichos puntos; debido a que la luz determina las regiones causalmente conectadas, en este caso, dado un tiempo lo suficientemente grande, todo par de puntos del Universo podrán entrar en contacto causal (podrán interactuar).

Si el horizonte de eventos es finito, entonces existe una máxima distancia comóvil que puede recorrer la luz durante toda la historia del Universo. En este caso, dos puntos que se encuentren separados por una distancia comóvil mayor a r_h nunca entrarán en contacto causal y en consecuencia en el Universo existirían regiones que permanecerían

desconectadas por siempre.

El carácter finito o infinito del horizonte de eventos depende de la evolución del factor de escala.

- **Universo estático**

En un Universo estático, se tiene $H = 0$. En este caso la integral (2.57) es divergente y por lo tanto r_H es infinito.

- **Universo desacelerado**

De acuerdo a la tabla 2.1, en un Universo en expansión desacelerada el radio comóvil de Hubble crece con el tiempo. La integral (2.57) en este caso también es divergente, dando lugar a un horizonte de eventos infinito. Esto ocurre, por ejemplo, en un Universo compuesto solo por materia y radiación.

- **Universo acelerado**

De acuerdo a la tabla 2.1, en un Universo en expansión acelerada el radio comóvil de Hubble es monótonamente decreciente y por lo tanto es posible que la integral en (2.57) sea finita y en consecuencia es posible que el horizonte de eventos sea finito. El carácter finito o infinito del horizonte de eventos en un Universo acelerado dependerá de la dinámica particular del factor de escala.

En el modelo Λ CDM, se asume que el Universo es plano y está compuesto por materia, radiación y una constante cosmológica. De acuerdo a (2.59), se tiene

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{m0}}{a^3} + \frac{\rho_{r0}}{a^4} \right) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.59)$$

Debido a la expansión del Universo, el factor de escala crece siempre con el tiempo. Por lo tanto, debe existir un instante del futuro remoto $t = t_\Lambda$ para el cual se tiene $a \gg 1$ y los términos de materia y radiación se hacen despreciables en comparación al término de la constante cosmológica. Así, para $t \geq t_\Lambda$:

$$H^2 \approx \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \Rightarrow \frac{da}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} dt.$$

Resolviendo esta última ecuación diferencial se obtiene

$$a(t) = e^{\sqrt{\Lambda/3}t}. \quad (2.60)$$

El radio comóvil de Hubble calculado a partir de t_Λ es

$$r_h = \int_{t_\Lambda}^{\infty} (aH)^{-1} d \ln a = \int_{t_\Lambda}^{\infty} \frac{dt}{a} = \int_{t_\Lambda}^{\infty} e^{-\sqrt{\Lambda/3}t} dt = \left. \frac{e^{-\sqrt{\Lambda/3}t}}{-\sqrt{\Lambda/3}} \right|_{t_\Lambda}^{\infty} \quad (2.61)$$

$$= \frac{e^{-\sqrt{\Lambda/3}t_\Lambda}}{\sqrt{\Lambda/3}}, \quad (2.62)$$

el cual es un valor finito. Esto significa que el modelo Λ CDM predice que, debido a la presencia de la constante cosmológica, el horizonte de eventos de nuestro Universo debe ser finito y en consecuencia existen regiones del Universo con las cuales nunca será posible

interactuar.

2.8.2. Horizonte (comóvil) de partículas

El horizonte (comóvil) de partículas r_p en un instante t se define como la distancia que recorre un rayo de luz desde el origen del Universo hasta el instante t . De acuerdo a la ecuación (2.56), en universo de tipo FLRW el horizonte comóvil de partículas en un instante t está dado por

$$r_p = \int_0^t \frac{dt}{a} = \int_0^t (aH)^{-1} d \ln a \quad (2.63)$$

y el horizonte de partículas físico es

$$l_p = a \int_0^t (aH)^{-1} d \ln a. \quad (2.64)$$

Debido a que la máxima rapidez es la de la luz, el horizonte de partículas define la máxima distancia que puede recorrer cualquier partícula desde el origen del Universo hasta el instante t . Esto también determina la máxima distancia que puede recorrer la información en el Universo: dos puntos del Universo separados una distancia mayor al horizonte de partículas no pueden haber interactuado jamás; es decir, nunca han estado *causalmente conectados*. Así, el horizonte de partículas define una esfera de radio r_p que representa la máxima región del Universo que está o estuvo causalmente conectada.

El horizonte de partículas siempre crece con el tiempo; sin embargo, su evolución con el tiempo depende íntimamente de la dinámica del radio comóvil de Hubble.

2.9. Tiempo Conforme

Debido a la homogeneidad e isotropía del Universo de tipo Friedmann, es natural estudiar partículas que se propagan radialmente entre dos puntos del espacio. En este caso particular el elemento de línea en un espacio-tiempo plano toma la forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 dr^2. \quad (2.65)$$

Se define el tiempo conforme η por la ecuación

$$dt = a d\eta. \quad (2.66)$$

A partir de esta definición, el tiempo conforme transcurrido entre un instante inicial t_i y un instante final t_f es

$$\Delta\eta = \eta_2 - \eta_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a}. \quad (2.67)$$

Reemplazando (2.66) en (2.65), el elemento de línea se puede expresar en función al tiempo conforme como

$$ds^2 = a^2(c^2 d\eta^2 - dr^2). \quad (2.68)$$

Notamos que el elemento de línea radial en el espacio-tiempo plano de Friedmann se puede expresar como un elemento de línea de tipo Minkowski multiplicado por un factor conforme a^2 .

El tiempo conforme es particularmente útil al estudiar la propagación de rayos de luz. En este caso $ds^2 = 0$ y por lo tanto, en unidades naturales,

$$0 = d\eta^2 - dr^2 \quad (2.69)$$

la cual es justamente la ecuación de los rayos de luz en un espacio-tiempo de Minkowski con coordenada espacial r y temporal η . Por lo tanto, en un diagrama de tiempo conforme, las trayectorias de los fotones en el espacio-tiempo de Friedmann siempre son rectas dadas por

$$\eta = \pm r + \eta_1, \quad (2.70)$$

donde η_1 es el valor del tiempo conforme en el instante en el cual el fotón pasa por la posición $r = 0$.

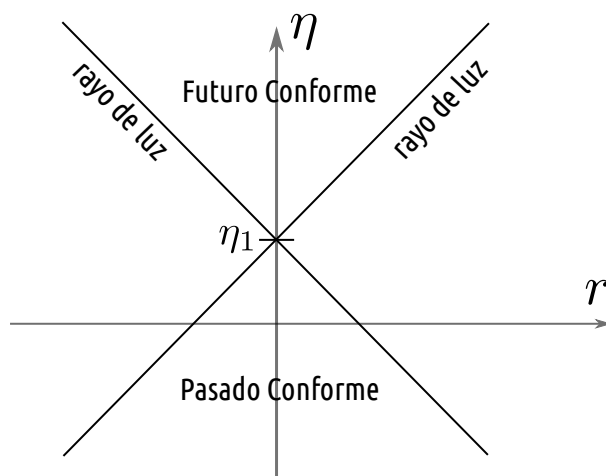


Figura 2.7: Diagrama en tiempo conforme de rayos de luz en un Universo de Friedmann. La geometría en tiempo conforme y coordenadas comóviles es similar a la del espacio-tiempo de Minkowski.

Es importante recalcar que el tiempo conforme no es necesariamente infinito hacia el futuro ni tuvo que tomar necesariamente el valor cero en el origen del Universo. De acuerdo a la definición (2.66), el intervalo de tiempo conforme transcurrido entre dos instantes de tiempo depende de la dinámica del Universo.

2.9.1. Tiempo conforme y horizontes

Sea η_∞ el valor del tiempo conforme cuando $t \rightarrow \infty$ y η_0 el valor del tiempo conforme en $t = 0$. Comparando las ecuaciones (2.63), (2.57) y (2.67) se tiene que el horizonte de partículas en un instante conforme η está dado por

$$r_p = \eta - \eta_0 \quad (2.71)$$

y el horizonte de eventos a partir de un instante conforme η es

$$r_h = \eta_\infty - \eta. \quad (2.72)$$

Notamos que el tiempo conforme define los horizontes de partícula y de eventos. Esto es una consecuencia directa de la característica tipo Minkowski de un diagrama conforme del espacio-tiempo.

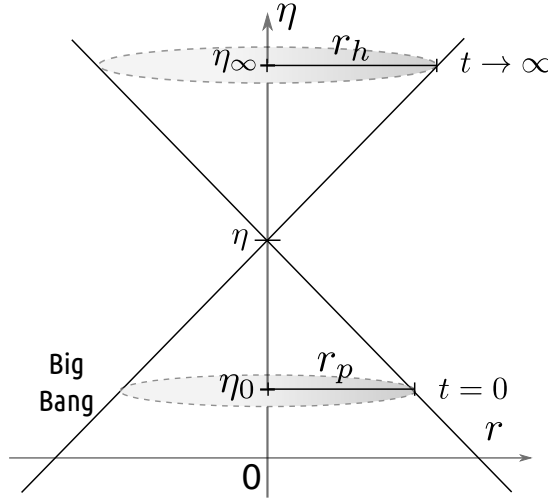


Figura 2.8: Radio de partículas y horizonte de eventos en un diagrama conforme. Los horizontes se transforman en radios de conos de luz en el Big Bang y en $t \rightarrow \infty$. El Big Bang no necesariamente ocurre en $\eta = 0$.

Los valores de η_0 y η_∞ dependen de la evolución del factor de escala. Es interesante notar que la ecuación (2.67) se puede escribir como

$$\Delta\eta = \eta_2 - \eta_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a} = \int_{t_1}^{t_2} (aH)^{-1} d \ln a \quad (2.73)$$

y por lo tanto el tiempo conforme transcurrido entre dos instantes de tiempo también depende de la evolución del radio de Hubble y en consecuencia de la composición del Universo. El valor de η_0 del tiempo conforme en el instante del Big Bang ($a = 0$) se puede encontrar para distintos fluidos cosmológicos. Utilizando la relación (2.50),

$$(aH)^{-1} = H_0^{-1} a^{\frac{1}{2}(1+3\omega)}, \quad (2.74)$$

la ecuación (2.73) con $t_1 = 0$ y $t_2 = t$ se transforma en

$$\begin{aligned}
\eta - \eta_0 &= \int_0^t H_0^{-1} a^{\frac{1}{2}(1+3\omega)} \frac{da}{a} \\
&= \int_0^t H_0^{-1} a^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\omega} da \\
&= \frac{2H_0^{-1}}{3\omega + 1} a^{\frac{3}{2}\omega + \frac{1}{2}} \Big|_0^a.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Por la definición de los límites de integración, notamos que

$$\eta_0 = \frac{2H_0^{-1}}{3\omega + 1} a^{\frac{3}{2}\omega + \frac{1}{2}} \Big|_0 \tag{2.76}$$

La ecuación (2.76) también se puede utilizar para analizar los horizontes de partículas en las dos dinámicas principales de un Universo en expansión:

- **Universo desacelerado:** $\omega > -1/3$
En este caso $\frac{3}{2}\omega + \frac{1}{2} > 0$ y por lo tanto

$$\eta_0 = \frac{2H_0^{-1}}{3\omega + 1} a^{\frac{3}{2}\omega + \frac{1}{2}} \Big|_0 = 0. \tag{2.77}$$

Además, utilizando (2.71), se tiene $r_p = \eta$ y por lo tanto el horizonte de partículas en un instante del Universo es igual al tiempo conforme: el horizonte de partículas crece con el tiempo conforme pero siempre es finito y por lo tanto en cualquier instante de la historia del Universo siempre existen regiones que nunca se han encontrado en contacto causal. Este es el caso de los Universos compuestos por materia ($\omega = 0$) o radiación ($\omega = 1/3$).

- **Universo acelerado:** $\omega < -1/3$
En este caso $\frac{3}{2}\omega + \frac{1}{2} < 0$ y por lo tanto

$$\eta_0 = \frac{2H_0^{-1}}{3\omega + 1} a^{-|\frac{3}{2}\omega + \frac{1}{2}|} \Big|_0 = -\infty. \tag{2.78}$$

lo cual significa que el Big Bang ocurre en un tiempo conforme infinitamente negativo. Utilizando (2.71), se tiene que $r_p = \infty$ independientemente del valor de η : debido a que el horizonte de partículas es infinito, todas las regiones del Universo se encuentran causalmente conectadas durante toda la historia del Universo. Adicionalmente, la expresión para el tiempo conforme en función del factor de escala es

$$\eta = \frac{2H_0^{-1}}{3\omega + 1} a^{-|\frac{3}{2}\omega + \frac{1}{2}|} < 0. \tag{2.79}$$

y por lo tanto todo tiempo conforme es negativo. Notamos además que cuando $a \rightarrow \infty$ se tiene $\eta = 0$: si la expansión acelerada continúa indefinidamente, el instante $\eta = 0$ corresponde al instante $t \rightarrow \infty$. Este es el caso de un Universo compuesto por una constante cosmológica ($\omega = -1$) o algún otro fluido con ecuación de estado $\omega < -1/3$. Es importante resaltar que si la expansión acelerada se detiene, el instante $\eta = 0$ se transforma en el fin del periodo acelerado.

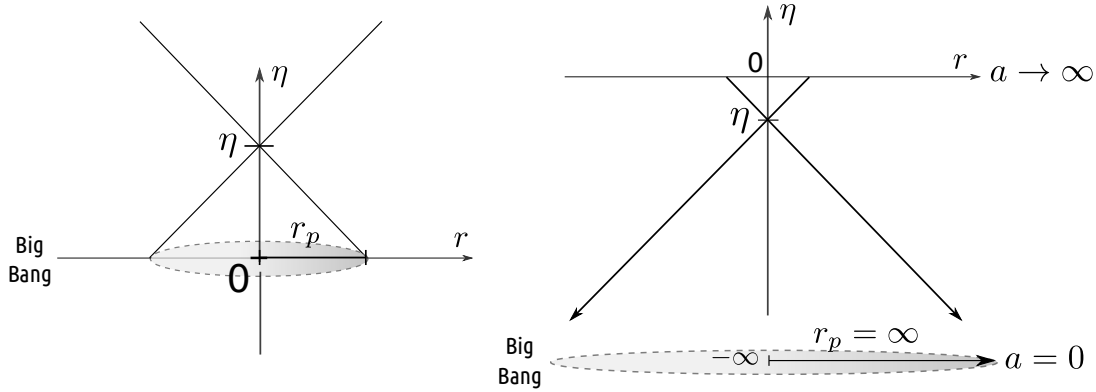


Figura 2.9: En un Universo con expansión desacelerada (izquierda) el Big Bang se produce en el instante $\eta = 0$ y por lo tanto el horizonte de partículas en cualquier instante es finito. En un Universo acelerado (derecha), el Big Bang se produce en $\eta = -\infty$, dando origen a un horizonte de partículas infinito.

Las diferencias del comportamiento del horizonte de partículas en universos desacelerados y acelerados sugieren que, si en cierto instante η se desea tener un horizonte de partículas grande (y en consecuencia un Universo con grandes regiones conectadas causalmente), es preferible que el Universo haya atravesado al menos por una etapa de expansión acelerada. Esta conclusión es fundamental en el estudio del periodo inflacionario.

2.9.2. Contacto causal y homogeneidad

Cada punto del espacio-tiempo en un diagrama conforme posee un cono de luz pasado que define su pasado causal. Sean A y B dos puntos del espacio-tiempo pertenecientes al mismo plano $\eta = cte$; es decir, dos puntos del espacio en el mismo instante de tiempo. Decimos que dichos puntos están en contacto causal si sus conos de luz pasados en un diagrama conforme se intersectan, tal como se muestra en la fig. 2.10.

En un Universo temprano estrictamente desacelerado, el Big Bang se produce en $\eta = 0$ y por lo tanto los conos de luz siempre están acotados inferiormente. Por otro lado, si el Universo atravesó una etapa temprana de aceleración, el Big Bang se da en $\eta = -\infty$ y los conos de luz se extienden infinitamente hacia el pasado conforme. Como consecuencia, una aceleración temprana permite que exista contacto causal entre regiones que de otra forma estarían desconectadas, tal como muestra la figura 2.11.

El análisis de la causalidad en diagramas de espacio-tiempo conforme es particularmente útil al momento de estudiar la homogeneidad e isotropía del Universo. La única forma en que dos regiones del Universo puedan ser homogéneas en el presente (exhiban

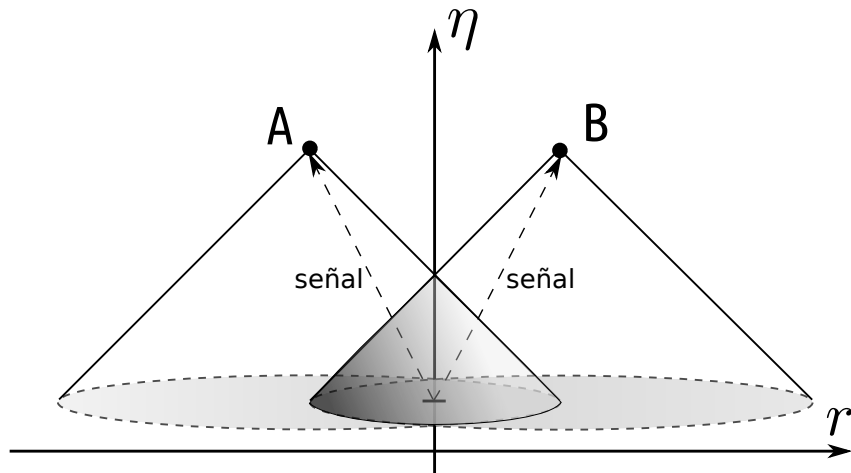


Figura 2.10: Dos puntos del espacio-tiempo se encuentran en contacto causal si sus conos pasados en un diagrama conforme se intersectan, lo cual hace posible que un evento del pasado haya afectado a los dos eventos a la vez.

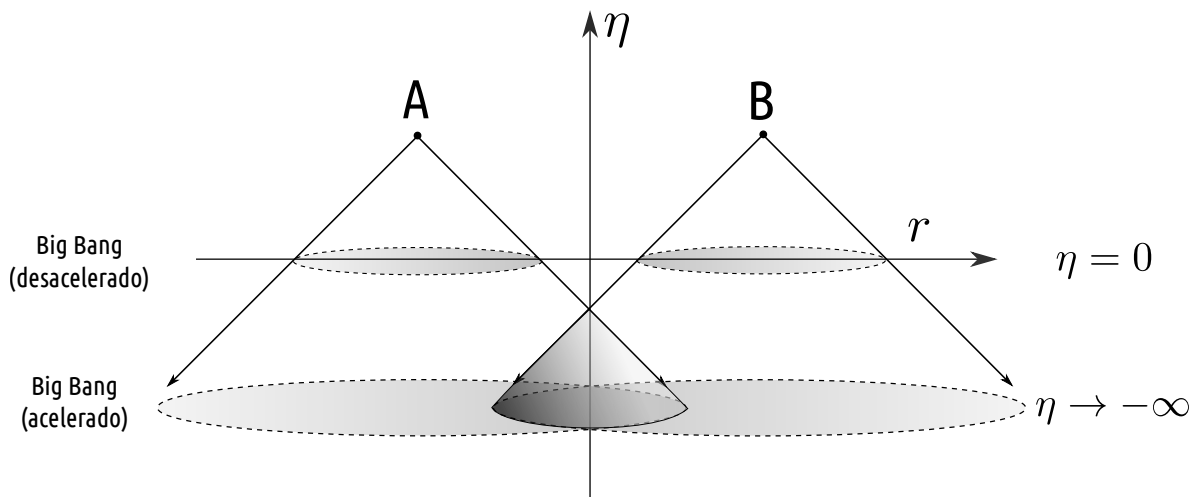


Figura 2.11: En un Universo temprano estrictamente desacelerado, los puntos A y B no se encuentran en contacto causal pues sus conos pasados nunca se intersectan. En un Universo con un periodo de aceleración temprana, el Big Bang es desplazado a valores negativos de tiempo conforme, lo cual hace posible que los puntos entren en contacto causal.

las mismas propiedades físicas) es que se encuentren en contacto causal: sus conos de luz deben necesariamente haberse intersecado en el pasado conforme.

Capítulo 3

Inflación Cósmica

La cosmología moderna propone que el Universo se originó hace aproximadamente 13 800 millones de años en un fenómeno conocido como Big Bang o Gran Explosión. Según esta teoría, el estado inicial del Universo fue un fluido caliente y denso, en el cual las partículas fundamentales se encontraban distribuidas uniformemente en un espacio que se expandía rápidamente. La teoría del Big Bang describe correctamente cómo el Universo se expandió y enfrió, cómo los elementos ligeros se formaron y cómo la materia se transformó en estrellas, galaxias y cúmulos de galaxias. Sin embargo, esta teoría solo describe el Universo luego de la explosión: no explica cómo se produjo la expansión ni qué ocurrió antes de ella. El modelo inflacionario es una posible respuesta a la pregunta acerca de qué originó la colosal expansión del Big Bang; en este se propone que una región pequeña del Universo primigenio¹ atravesó una etapa de expansión acelerada, en la cual incrementó su tamaño por un factor de al menos 10^{28} . Al final del periodo inflacionario, la región que estaría destinada a transformarse en el Universo observable tendría un tamaño similar al de una canica, con una longitud característica de alrededor de 1cm .

La primera persona en proponer que el Universo atravesó una etapa de expansión acelerada fue el físico soviético Alexei Starobinsky en el año 1979 al estudiar posibles correcciones cuánticas a la acción de Einstein-Hilbert en el Universo temprano [17]. En el año 1981, el físico estadounidense Alan Guth acuñó el término *inflación* al proponer una teoría para resolver el problema de la ausencia de monopolos magnéticos en el Universo observable [18]. El modelo de Guth consideraba que el Universo temprano estuvo atrapado en un falso vacío con una alta densidad de energía y que en cierto instante realizó una transición de fase, durante la cual se formaron burbujas de vacío verdadero que se expandieron a la velocidad de la luz. El modelo de Guth presentaba complicaciones inevitables, particularmente el hecho de que la radiación en el Universo solo se podría producir por las colisiones entre las paredes de las burbujas. El problema de la colisión de las burbujas fue resuelto por Andrei Linde [19] e independientemente por Andres Albrecht y Paul Steinhardt [20] en un nuevo modelo llamado *nueva inflación* o *inflación slow-roll*. Este nuevo modelo inflacionario propone que la inflación ocurrió debido a la presencia de un campo escalar en el Universo primigenio. Dicho campo escalar, o inflatón, habría caído lentamente desde la cima de su potencial, generando una expansión acelerada y resolviendo

¹Para escalas de la teoría de la gran unificación, la región debe tener una longitud característica de alrededor de 10^{-28}cm .

también los problemas del modelo convencional del Big Bang. Una de las características más atractivas del nuevo modelo inflacionario es que permite explicar la distribución de la materia y energía en el Universo observable; según este modelo, fluctuaciones cuánticas en el Universo primigenio actuaron como las semillas que dieron origen a las estructuras actuales tales como las galaxias y la radiación cósmica de fondo [21]. Si bien el problema de la formación de estructura es la motivación principal para el estudio contemporáneo del periodo inflacionario, la presente tesis se enfocará únicamente en los problemas de la homogeneidad y planitud del Universo como motivaciones a la propuesta inflacionaria.

3.1. Problemas del Big Bang

3.1.1. El problema del horizonte

El modelo estándar de la cosmología moderna propone que el Universo observable se originó en un fenómeno denominado Big Bang. En dicho instante, el Universo se encontró contenido en un volumen infinitamente pequeño, dando origen a una singularidad en la cual la física pierde todo poder predictivo. Luego del Big Bang, el Universo procedió a expandirse y enfriarse hasta alcanzar el estado observado en la actualidad. Debido a que en los primeros instantes del Universo existieron altas densidades de energía y escalas de longitud microscópicas, para realizar un estudio formal del fenómeno del Big Bang se hace indispensable combinar efectos cuánticos y gravitatorios, lo cual, hasta la actualidad, resulta extremadamente difícil debido a que aún no existe una teoría cuántica de la gravedad definitiva [22].

A medida que se estudia instantes más cercanos al Big Bang, la confiabilidad de los análisis totalmente clásicos se reduce. La escala a partir de la cual los efectos de la gravedad cuántica se hacen inevitables se conoce como la escala del Planck, la cual nace naturalmente de las combinaciones de las constantes físicas universales, tal como muestra la tabla 3.1.

Nombre	Expresión	Valor SI
Longitud de Planck	$l_p = \frac{\hbar G}{c^3}$	$1.616229(38) \times 10^{-35}m$
Masa de Planck	$m_p = \frac{\hbar c}{G}$	$2.176470(51) \times 10^{-8}kg$
Tiempo de Planck	$t_p = \frac{\hbar G}{c^5}$	$5.39116(13) \times 10^{-44}s$
Carga de Planck	$q_P = \sqrt{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{e}{\sqrt{\alpha}}$	$1.875545596(41) \times 10^{-8}C$
Temperatura de Planck	$T_p = \frac{m_p c^2}{k_B}$	$1.416808(33) \times 10^{32}K$

Tabla 3.1: Definiciones de los parámetros de la escala de Planck.

La escala de Planck fija un límite al estudio clásico del Universo temprano. En particular, cuando la escala natural del Universo se encuentra por debajo de l_p , el estudio

clásico relativista pierde toda confiabilidad.

De acuerdo a la teoría del Big Bang, todo el universo observable actual proviene de una región que en los primeros instantes del Universo era infinitamente pequeña. Por lo tanto, en cierto instante t_i posterior al Big Bang, todo el universo observable debió estar contenido en una región de radio l_i la cual, de acuerdo al modelo de FLRW, se relaciona con el radio actual del universo observable mediante la relación

$$\frac{l_i}{a_i} = \frac{l_0}{a_0}, \quad (3.1)$$

donde a_i representa el factor de escala en el instante t_i y l_0 el radio del universo observable en el presente, el cual se define como la distancia que ha podido recorrer un rayo de luz desde el origen del universo hasta el presente. Si definimos $t_0 \sim 4 \times 10^{14} s$ [[23]] como la edad actual del universo, se tiene que $l_0 = ct_0$ y, a partir de la ecuación (4.7a),

$$l_i = \frac{a_i}{a_0} ct_0. \quad (3.2)$$

Assumiendo que en el universo temprano la radiación dominaba sobre el resto de componentes, es posible estimar una expresión para l_i utilizando la relación entre el factor de escala y la temperatura en un Universo de FLRW dominado por radiación [9],

$$a \sim 1/T, \quad (3.3)$$

con lo cual la ecuación (4.7b) toma la forma

$$l_i = \frac{T_0}{T_i} ct_0, \quad (3.4)$$

donde $T_0 \sim 2.73K$ representa la temperatura actual del Universo, la cual se toma igual a la temperatura de la radiación cósmica de fondo [23]. Los estudios de la radiación cósmica de fondo y de la estructura a gran escala demuestran que el universo observable en la actualidad es altamente homogéneo. Por lo tanto, si se asume que las inhomogeneidades no pueden ser eliminadas por la expansión del Universo, la región de la cual proviene el Universo observable en el instante t_i también debió ser altamente homogénea. En principio, es posible simplemente asumir la homogeneidad de aquella región primigenia como parte de las condiciones iniciales del Universo. Sin embargo, no existe ningún motivo en la física fundamental que justifique que una región del espacio deba ser necesariamente homogénea, por lo cual es natural preguntarse acerca de los motivos por los cuales se dieron esas condiciones iniciales.

Para responder a estas interrogantes es necesario recordar que una región del espacio puede ser homogénea solamente si dicha región se encuentra en contacto termodinámico; y el contacto termodinámico solo es posible si la región se encuentra causalmente conectada, es decir, si la luz ha tenido el tiempo suficiente para viajar de un extremo al otro. Debido a que la rapidez de la luz es constante, la máxima distancia l_c que pudo haber viajado

un rayo de luz desde el origen del universo hasta el instante t_i es

$$l_c = ct_i. \quad (3.5)$$

La distancia l_c define el radio máximo que puede tener cualquier región que se haya encontrado causalmente conectada en el instante t_i . Por lo tanto, si se busca que la región de la cual proviene el Universo observable haya sido homogénea, es de esperar que esta haya estado causalmente conectada y por lo tanto que se cumpla $l_i < l_c$. A pesar de las limitaciones intrínsecas que presenta el estudio clásico del universo temprano, es posible estimar la relación entre l_i y l_c tomando como el instante inicial al tiempo del Planck y estudiando la evolución del universo luego de que los efectos cuánticos de la gravedad dejan de ser dominantes. En este caso, se tiene $t_i = t_P$ y $T_i = T_P$ y por lo tanto, a partir de las ecuaciones (3.4) y (3.5):

$$\frac{l_i}{l_c} = \frac{T_0}{T_P} \frac{ct_0}{ct_P}. \quad (3.6)$$

Teniendo en cuenta que $T_0 \sim 2.73K$, $T_P \sim 10^{32}K$, $t_0 \sim 4 \times 10^{17}s$ y $t_P \sim 10^{-44}s$ se concluye que

$$\frac{l_i}{l_c} \sim 10^{29}, \quad (3.7)$$

lo cual significa que, en el tiempo de Planck, el radio de la región de la cual proviene el Universo observable era alrededor de 29 órdenes de magnitud mayor al radio de la máxima región causalmente conectada: la región de la cual proviene nuestro universo no pudo estar causalmente conectada ni mucho menos ser homogénea en el tiempo de Planck. A medida que el Universo se expande, la máxima región causalmente conectada siempre es menor a la región del universo observable, haciendo imposible que el universo sea homogéneo en el presente. Esta contradicción entre la predicción del modelo del Big Bang y las observaciones cosmológicas se conoce como el problema del horizonte.

El problema del horizonte también se puede visualizar en un diagrama en tiempo conforme, tal como se muestra en la Fig. 3.2. En un Universo compuesto por materia y radiación, dos fotones de la radiación cósmica de fondo que provienen de regiones opuestas del universo y que entran hoy a nuestro horizonte presentan el mismo espectro a pesar de que en el instante de la recombinación las regiones de las cuales provienen estuvieron causalmente desconectadas. Esta es una consecuencia directa de que el Big Bang se produce en el instante $\eta = 0$ y los horizontes de partículas son siempre finitos y arbitrariamente pequeños en el pasado.

La condición $\eta_0 = 0$ del universo compuesto de materia y radiación se debe a que para estos fluidos se tiene una ecuación de estado de la forma $\omega > -1/3$, lo cual es consecuencia de que el radio de Hubble es monótonamente creciente.

En general, teniendo en cuenta la tabla 2.1, todas las características de los universos compuestos por radiación y materia ($\eta_0 = 0$, $\omega > -1/3$, desaceleración, r_p monótonamente creciente) se pueden interpretar como consecuencias directas del carácter monóto-

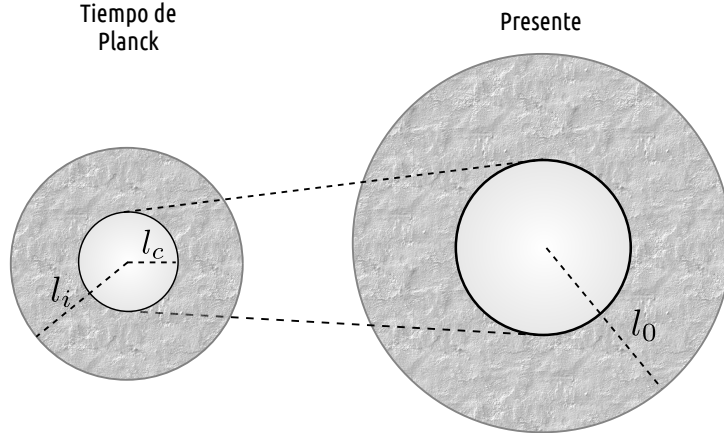


Figura 3.1: De acuerdo a la teoría estándar del Big Bang, el radio l_c de la máxima región causalmente conectada en el tiempo de Planck es menor al radio l_i de la región de la cual proviene el Universo observable y por lo tanto este no debería ser homogéneo en el presente: el radio de la región causalmente conectada en el presente debería ser menor al radio l_0 del universo observable.

namente creciente del radio de Hubble.

3.1.2. El problema de la planitud

En un universo con curvatura k , la ecuación de friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (3.8)$$

se puede escribir como

$$1 - \frac{8\pi G}{3H^2}\rho = -(aH)^{-2}k. \quad (3.9)$$

La densidad de energía que provoca que el universo sea plano se conoce como densidad de energía crítica ρ_c . Esta densidad de energía es, en general, una función del tiempo. Haciendo $k = 0$ en (3.9) la densidad de energía crítica está dada por

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (3.10)$$

A partir de (3.9) y (3.10) se tiene

$$1 - \frac{\rho}{\rho_c} = -(aH)^{-2}k. \quad (3.11)$$

La cantidad $\frac{\rho}{\rho_c}$ se denomina *parámetro de densidad* del universo y, debido a que es una función del tiempo y por lo tanto del factor de escala, se representa por el símbolo $\Omega(a)$. Teniendo esto en cuenta, la última ecuación se puede escribir como

$$1 - \Omega(a) = -(aH)^{-2}k \quad (3.12)$$

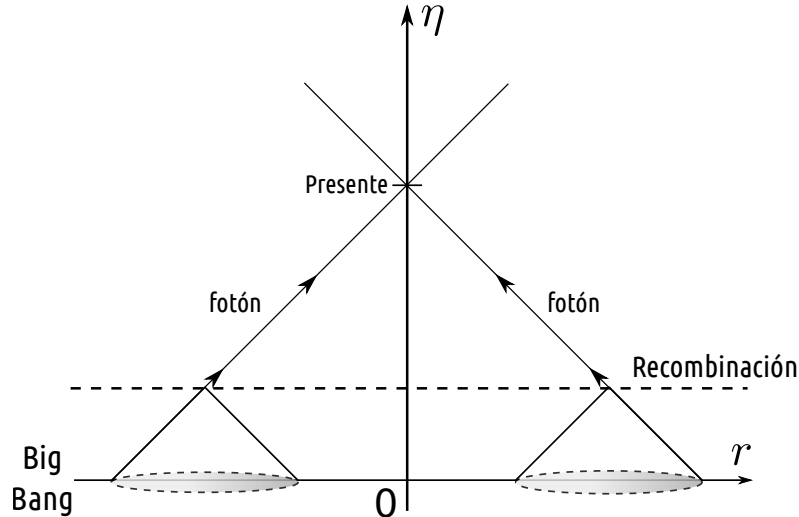


Figura 3.2: En un Universo compuesto por materia y radiación, fotones producidos en el instante de la recombinación llegan a la Tierra con el mismo espectro a pesar de que provienen de regiones que estuvieron causalmente desconectadas.

Esta última ecuación relaciona el parámetro de densidad del universo con la curvatura del mismo: si $\Omega(a) = 1$, el universo es plano ($k = 0$); si $\Omega(a) < 1$, el universo es abierto ($k < 0$); y si $\Omega(a) > 1$, el universo es cerrado ($k > 1$). Debido a que las observaciones cosmológicas actuales sugieren que nuestro universo es prácticamente plano [6], en el presente se tiene $\Omega_0 \approx 1$.

En la teoría estándar del Big Bang, en el cual el universo está compuesto únicamente por materia y radiación, el radio comóvil de Hubble crece monótonamente con la expansión del universo y por lo tanto el lado derecho de la ecuación (3.12) también, alejando monótonamente al valor $\Omega(a)$ de la unidad. El valor crítico $k = 0$ es por lo tanto un punto inestable: basta que el universo haya tenido una pequeña curvatura en sus orígenes para que, luego de miles de millones de años de evolución, la ecuación (3.12) haya apartado monótonamente al parámetro de densidad lejos de la unidad, produciendo una marcada curvatura en el presente, la cual debería ser detectada por la cosmología observacional. De acuerdo a (3.12), en la teoría estándar del Big Bang, la única manera en que el universo pueda ser perfectamente plano en el presente es que este haya sido perfectamente plano en sus orígenes. Debido a que no hay ningún motivo físico fundamental por el cual suponer que el Universo debió comenzar con una planitud perfecta, es natural preguntarse por qué el universo es plano hoy si la planitud es un punto fijo inestable. Este problema se conoce en cosmología como el problema de la planitud.

3.2. Modelo inflacionario

Los problemas del horizonte y de la planitud se pueden resolver de forma elegante si se asume que el universo temprano, antes de la formación de las partículas del modelo estándar se expandió en forma exponencial durante una época denominada como periodo inflacionario. De haber sucedido, la inflación cósmica debió darse durante un intervalo de tiempo lo suficientemente pequeño como para solucionar los problemas del modelo

estándar del Big Bang sin afectar sus demás predicciones, tales como la nucleosíntesis [9].

3.2.1. Radio comóvil de Hubble decreciente

En la sección anterior se demostró que los problemas del horizonte y de la planitud son consecuencia directa del crecimiento monótono del radio comóvil de Hubble. Una posible solución a estos problemas es suponer que durante el Universo temprano el radio comóvil de Hubble tuvo un comportamiento decreciente:

$$\frac{d}{dt} [(aH)^{-1}] < 0. \quad (3.13)$$

De acuerdo a 2.52, la condición (3.13) también se puede expresar en función de la cinemática del factor de escala como

$$\ddot{a} > 0. \quad (3.14)$$

La condición (3.14) es la que usualmente se utiliza para definir el periodo inflacionario: durante los primeros instantes del Universo, este se expandió súbitamente de manera acelerada, provocando que el radio comóvil de Hubble disminuya con el tiempo y rompiendo así el carácter monótono creciente que existe en presencia de materia o radiación ordinaria.

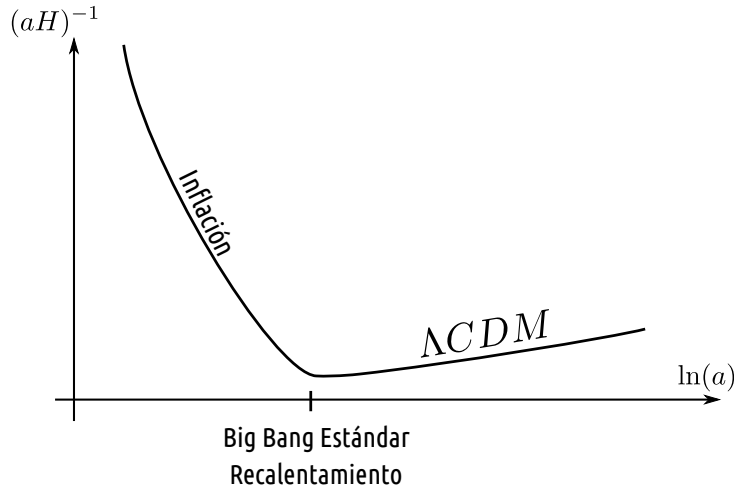


Figura 3.3: Representación esquemática de la evolución del radio comóvil de Hubble antes y después del Big Bang estándar.

El fin de la inflación da inicio al recalentamiento, un proceso por el cual el ente físico que provoca la inflación decae y se transforma en las partículas del modelo estándar de la física de partículas [24]. Luego del recalentamiento, el Universo es dominado por la materia y la radiación recientemente producidas y comienza a evolucionar según la teoría estándar del Big Bang. De acuerdo al modelo inflacionario, el Big Bang estándar es un falso Big Bang pues no marca el origen del Universo sino el instante en el que se crean las partículas fundamentales al final del recalentamiento. Aún así, la singularidad que da origen al Universo (el verdadero Big Bang) sigue siendo inevitable y continúa dándose en el instante $t = 0$. Este proceso se muestra esquemáticamente en la Fig. 3.3.

3.2.2. Solución al problema del horizonte

La condición de expansión acelerada del universo resuelve naturalmente el problema del horizonte. Sea $t_i > t_P$ el instante del inicio del periodo inflacionario y t_f el instante de su final. En función a estos instantes, la ecuación (2.63) se puede escribir como

$$r_p = \int_0^{t_i} (aH)^{-1} d \ln a + \int_{t_i}^{t_f} (aH)^{-1} d \ln a + \int_{t_f}^{t_0} (aH)^{-1} d \ln a.$$

El valor del horizonte de partículas en el presente se puede entender analizando las contribuciones de las tres integrales presentes en esta expresión.

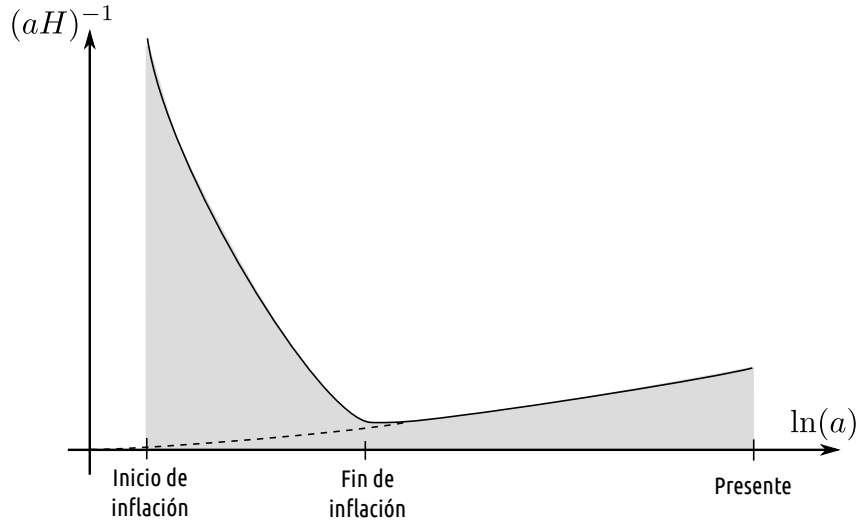


Figura 3.4: Evolución del radio comóvil de Hubble. El área bajo la curva determina el horizonte de partículas, donde la mayor contribución a la integral proviene del periodo inflacionario. La línea punteada representa la evolución que tendría el radio de Hubble en un universo sin inflación: en este caso el horizonte de partículas en el presente no sería lo suficientemente grande para explicar la homogeneidad.

1. Acerca de la integral en el intervalo $< 0, t_i >$ no se puede decir nada pues involucra fenómenos donde los efectos cuánticos de la gravedad son inevitables.
2. En el intervalo $< t_i, t_f >$, que representa al periodo inflacionario, el radio comóvil es decreciente. Esto significa que el valor de $(aH)^{-1}$ pudo ser arbitrariamente grande en $t = t_i$, siempre y cuando decrezca y alcance un valor mínimo en el instante $t = t_f$ que sea compatible con las observaciones cosmológicas. Durante este periodo, la contribución de esta integral al horizonte de partículas pudo ser arbitrariamente grande y su valor depende de qué tanto se haya reducido el radio comóvil de Hubble durante este intervalo de tiempo. De esta forma, la contribución en el intervalo $< t_i, t_f >$ hace posible tener un horizonte de partículas lo suficientemente grande en el instante $t = t_f$ como para que todas las regiones de nuestro universo observable estén conectadas causalmente en el presente sin necesidad de modificar la dinámica del universo de FLRW.
3. El instante $t = t_f$ marca el fin del periodo inflacionario y da inicio a la evolución usual del universo de FLRW, en la cual el radio comóvil de Hubble crece monótonamente con el tiempo. En la teoría estándar del Big Bang, se asume que el radio

comóvil de Hubble fue monótonamente creciente desde el origen del universo, dando lugar a horizontes de partículas reducidos que no son capaces de explicar la homogeneidad observada en el presente.

La figura 3.5 muestra la trayectoria de dos fotones de la radiación cósmica de fondo en un Universo con un periodo inflacionario. Debido a que el radio de Hubble es decreciente durante el periodo inflacionario, el Universo expande aceleradamente ($\dot{a} > 0$) y de acuerdo a (2.78) la singularidad del Big Bang se da en $\eta_0 \rightarrow \infty$. Esto provoca que los conos de luz en un diagrama de tiempo conforme se puedan intersectar en el pasado conforme negativo, permitiendo un contacto causal entre dos regiones que de otra forma estarían desconectadas. La figura 3.5 muestra la trayectoria de fotones de la radiación cósmica de fondo que se producen en el instante de la recombinación y llegan en el presente a la Tierra ($r = 0$) desde puntos opuestos del cielo. Si el Big Bang se hubiese dado en $\eta = 0$, los puntos en los cuales los fotones son producidos no se podrían encontrar en contacto causal y por lo tanto los fotones no deberían presentar el mismo espectro. De acuerdo al modelo inflacionario, el instante $\eta = 0$ no marca el instante del Big Bang, sino el fin del periodo inflacionario y el instante en el cual se produce el recalentamiento. La aceleración del Universo hace posible un contacto causal en algún $\eta < 0$, resolviendo así el problema del horizonte.

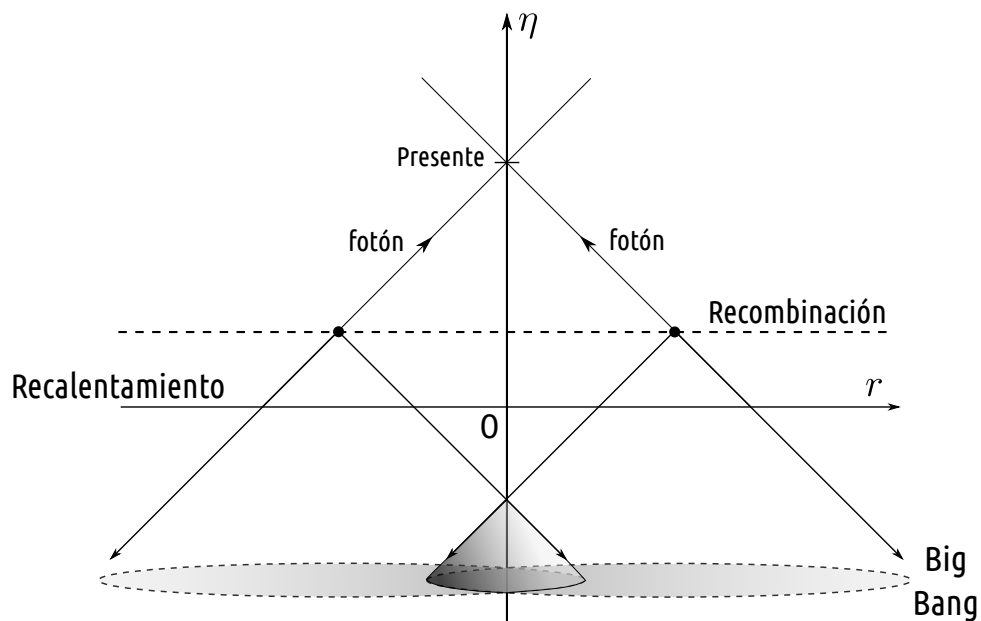


Figura 3.5: De acuerdo al modelo inflacionario, los fotones que llegan hoy a la Tierra de puntos opuestos del cielo presentan el mismo espectro debido a que fueron producidos en regiones que se encontraban en contacto causal antes del instante del recalentamiento.

El Universo observable es áltamente homogéneo, pero no perfectamente homogéneo: existen estructuras que rompen la homogeneidad perfecta en el Universo tales como las galaxias y la radiación cósmica de fondo. Por lo tanto, es natural esperar que la región de la cual proviene el Universo observable no haya sido perfectamente homogénea. Una de las características más importantes del modelo inflacionario es que es capaz de diluir las inhomogeneidades grandes que pudieron existir en el Universo primigenio y reducirlas a las escalas observadas actualmente en las estructuras presentes en el Universo [8].

De acuerdo a este modelo, fluctuaciones cuánticas en el universo temprano produjeron inhomogeneidades primordiales que eventualmente darían origen a toda la estructura del Universo observable. La altamente acertada predicción del espectro de potencias del universo observable a partir de las perturbaciones cosmológicas en el universo temprano es una de las evidencias más fuertes a favor del modelo inflacionario [25]. El estudio de la formación de la estructura en el Universo observable a través de las fluctuaciones cuánticas en el Universo temprano es en la actualidad la principal aplicación del modelo inflacionario.

3.2.3. Solución al problema de la planitud

El modelo inflacionario también resuelve el problema de la planitud. A partir de la ecuación (3.12),

$$1 - \Omega(a) = -(aH)^{-2}k, \quad (3.15)$$

se observa que, como el radio comóvil de Hubble $(aH)^{-1}$ decrece durante el periodo inflacionario, el término de la derecha también decrece y por lo tanto el parámetro de densidad tiende naturalmente hacia la unidad: durante la inflación, el universo tiende naturalmente hacia la planitud, $\Omega(a) \rightarrow 1$. Aún si el universo tuvo una curvatura no nula al inicio del periodo inflacionario, la expansión acelerada hará tender al parámetro de densidad a la unidad, explicando por qué en la actualidad el universo es plano. De esta forma, la planitud deja de ser un punto inestable y se transforma en un atractor: el Universo tiende naturalmente hacia la planitud.

3.3. El inflatón

El periodo inflacionario corresponde a una etapa de aceleración temprada durante la cual el radio comóvil de Hubble decrece monótonamente. Se considera que durante este periodo no existía aún ni materia ni radiación y el Universo estaba compuesto por algún fluido exótico que era responsable de la expansión acelerada.

El Universo acelera siempre y cuando para el fluido cosmológico se cumpla la condición

$$\omega = \frac{p}{\rho} < -1/3. \quad (3.16)$$

Como se vio en el capítulo anterior, la constante cosmológica cumple naturalmente dicha relación con $\omega_\Lambda = -1$. Sin embargo, la constante cosmológica no se puede utilizar como el fluido que da lugar al periodo inflacionario debido a que no posee dinámica y por lo tanto ella misma no es capaz de ponerle un fin al periodo inflacionario y dar paso al Universo de tipo Friedmann dominado por materia y radiación. El problema acerca de la transición suave del periodo inflacionario hacia el Universo dominado por radiación y materia del Big Bang estándar se conoce como el problema de la salida elegante o graceful exit.

En las últimas décadas se ha desarrollado una gran cantidad de modelos inflacionarios [26]. Los modelos inflacionarios más simples proponen la existencia de un campo escalar que alguna vez se encontró presente en el Universo primigenio. El campo capaz permitir

un grafecul exit y que reemplazaría a la constante cosmológica es el campo escalar llamado inflatón, que en su momento fue propuesto como un campo escalar de Higgs. Bajo ciertas condiciones, es posible que la ecuación de estado del inflatón durante la etapa del periodo inflacionario cumpla con la condición $\omega < -1/3$, provocando así la expansión acelerada necesaria para explicar la homogeneidad y planitud del Universo.

3.3.1. Ecuación de movimiento

La acción de Einstein Hilbert de la relatividad general está dada en unidades naturales por

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (3.17)$$

donde \mathcal{L}_m representa el lagrangiano de la materia y energía presentes en el espacio-tiempo [27]. Al modelar al inflatón como un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad, su lagrangiano [8] toma la forma

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \quad (3.18)$$

en la signatura $(+ - - -)$. La ecuación de movimiento del inflatón se obtiene al aplicar el principio variacional a la acción de Einstein-Hilber con respecto de ϕ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{16\pi G} \delta_\phi \int d^4x \sqrt{-g} R + \delta_\phi \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) + \delta(V(\phi)) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\delta(\partial_\mu \phi) \partial_\nu \phi + \partial_\mu \phi \delta(\partial_\nu \phi)] + \frac{\partial V}{\partial \phi} \delta \phi \right] \\ &= \int d^4x \left[-\sqrt{-g} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [2(\partial_\mu \delta \phi) \partial_\nu \phi] + \sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \phi} \delta \phi \right] \\ &= \int d^4x \left[-\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi (\partial_\mu \delta \phi) + \sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \phi} \delta \phi \right] \\ &= \int d^4x \left[-\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \delta \phi) + \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) \delta \phi + \sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \phi} \delta \phi \right] \\ &= - \int d^4x \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \delta \phi) + \int d^4x \left[\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + \sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right] \delta \phi \\ &= - \oint_\Omega d^3x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \delta \phi \Sigma_\mu + \int d^4x \left[\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + \sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right] \delta \phi \\ &= \int d^4x \left[\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + \sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right] \delta \phi, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde se ha eliminado el primer término pues en la superficie $\delta \phi = 0$. A partir de la expresión (3.19), la ecuación del movimiento de un campo escalar en un espacio-tiempo

curvo es

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0. \quad (3.20)$$

En el Universo de Friedmann el tensor métrico es

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2\text{sen}^2\theta \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

con inversa

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-kr^2}{-a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-a^2r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{-a^2r^2\text{sen}^2\theta} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

y determinante

$$g = -\frac{a^6r^4\text{sen}^2\theta}{1-kr^2}. \quad (3.23)$$

Reemplazando la determinante de $g_{\mu\nu}$ en (3.20):

$$0 = \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a^3r^2\text{sen}\theta}\partial_\mu\left[\frac{a^3r^2\text{sen}\theta}{\sqrt{1-kr^2}}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\right] + \frac{\partial V}{\partial\phi}. \quad (3.24)$$

Para mantener la homogeneidad a isotropía de la teoría, el inflatón se toma como un campo escalar homogéneo: su valor cambia con el tiempo pero es constante en todo el espacio. Matemáticamente, se tiene

$$\partial_r\phi = \partial_\theta\phi = \partial_\varphi\phi = 0. \quad (3.25)$$

Así, (3.24) toma la forma:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a^3r^2\text{sen}\theta}\partial_\mu\left[\frac{a^3r^2\text{sen}\theta}{\sqrt{1-kr^2}}g^{\mu 0}\partial_0\phi\right] + \frac{\partial V}{\partial\phi} \\ &= \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a^3r^2\text{sen}\theta}\partial_0\left[\frac{a^3r^2\text{sen}\theta}{\sqrt{1-kr^2}}g^{00}\partial_0\phi\right] + \frac{\partial V}{\partial\phi} \\ &= \frac{1}{a^3}\partial_0(a^3\dot{\phi}) + \frac{\partial V}{\partial\phi} \\ &= \frac{1}{a^3}(3a^2\dot{a} + a^3\ddot{\phi}) + \frac{\partial V}{\partial\phi} \end{aligned}$$

y por lo tanto la ecuación de movimiento de un campo escalar homogéneo en un fondo de Friedmann es

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (3.26)$$

donde $H = \frac{\dot{a}}{a}$ es el parámetro de Hubble.

3.3.2. Tensor energía-momento

Las componentes del tensor energía-momento correspondiente a un lagrangiano de materia \mathcal{L}_m se obtienen utilizando del principio variacional [28] y están dadas por

$$T_{\mu\nu} = -2 \left[\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m \right]. \quad (3.27)$$

Teniendo en cuenta (3.18), se tiene

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -2 \left[\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m \right] = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= -2 \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} \left(-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right) + g_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right) \\ &= \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{00} \partial_0 \phi \partial_0 \phi + g_{\mu\nu} V(\phi) \\ &= \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{\phi}^2 + g_{\mu\nu} V(\phi), \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde se han eliminado las derivadas espaciales debido a que el campo es homogéneo. A partir de esta última ecuación y (3.21), la componente T_{00} del tensor energía-momento del inflatón en el fondo de Friedmann es

$$\begin{aligned} T_{00} &= \partial_0 \phi \partial_0 \phi - \frac{1}{2} g_{00} \dot{\phi}^2 + g_{00} V(\phi) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \end{aligned} \quad (3.29)$$

mientras que la componente T_{11} es

$$\begin{aligned} T_{11} &= \partial_r \phi \partial_r \phi - \frac{1}{2} g_{11} \dot{\phi}^2 + g_{11} V(\phi) \\ &= \frac{a^2}{1 - kr^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Las otras componentes no nulas del tensor energía-momento son

$$\begin{aligned} T_{22} &= \frac{a^2 r^2}{1 - kr^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right], \\ T_{33} &= \frac{a^2 r^2 \sin^2 \theta}{1 - kr^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.3.3. Ecuaciones de Friedmann

La presencia del campo escalar modifica las ecuaciones de Friedmann, las cuales se deben derivar a partir de las ecuaciones de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (3.32)$$

Utilizando (2.26) y las ecuaciones (3.29)-(3.31) las componentes no nulas de la ecuación de Einstein son

$$\frac{3(k + \dot{a}^2)}{a^2} = 8\pi G \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \quad (3.33)$$

$$-\frac{k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}}{1 - kr^2} = 8\pi G \frac{a^2}{1 - kr^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right] \quad (3.34)$$

$$-r^2(k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}) = 8\pi G r^2 a^2 \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right] \quad (3.35)$$

$$-r^2(k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}) \sin^2(\theta) = 8\pi G r^2 a^2 \sin^2(\theta) \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right], \quad (3.36)$$

de las cuales solo (3.33) y (3.34) son independientes. Si se compara las ecuaciones (3.33)-(3.36) y (2.27)-(2.30) se puede notar que el campo escalar se comporta como un fluido ideal con densidad de energía

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.37)$$

presión

$$p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (3.38)$$

y ecuación de estado

$$\omega = \frac{p}{\rho} = \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \quad (3.39)$$

Debido a la naturaleza de fluido del campo escalar, las ecuaciones de Friedmann mantienen la forma que toman en presencia de un fluido ideal:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (3.40)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (3.41)$$

donde la densidad de energía ρ y la presión p están dadas por (3.37) y (3.38), respectivamente. Es importante notar que tanto la densidad de energía como la presión del inflatón dependen del potencial $V(\phi)$ al cual está sujeto y por lo tanto son altamente dependientes del modelo elegido. Por otro lado, utilizando las expresiones de la densidad y presión del campo escalar, la ecuación de aceleración (3.41) se puede escribir como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(2\dot{\phi}^2 - 2V(\phi) \right) = \frac{8\pi G}{3} \left(V(\phi) - \dot{\phi}^2 \right)$$

lo cual indica que el Universo puede acelerar en presencia de un campo escalar siempre y cuando se cumpla $V(\phi) > \dot{\phi}^2$, haciendo posible que el inflatón pueda producir un periodo inflacionario.

3.4. Inflación Slow-Roll

El inflatón será capaz de generar un periodo inflacionario siempre y cuando provoque una expansión acelerada del Universo ($\ddot{a} > 0$), lo cual ocurre solo si su ecuación de estado cumple con la condición $\omega < -1/3$. La ecuación de estado (3.42) del inflatón

$$\omega = \frac{p}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad (3.42)$$

no toma un valor constante sino que cambia a medida que el campo escalar evoluciona con la expansión del Universo y por lo tanto es posible que el inflatón actúe como un ente acelerador de Universo durante cierto intervalo de tiempo y posteriormente deje de hacerlo. Esta característica es importante pues permite la transición suave de un periodo inflacionario a un Universo de Friedmann dominado por materia y radiación.

El modelo de inflación Slow-Roll propone que, por motivos aún desconocidos, en los primeros instantes del Universo el inflatón se encontraba en la cima de su potencial. Fluctuaciones cuánticas en el Universo primigenio provocaron que el inflatón caiga por su potencial y que esta se transforme paulatinamente en energía cinética. Si la energía cinética inicial del inflatón es lo suficientemente pequeña con comparación al potencial, durante algún intervalo de tiempo se cumplirá la condición

$$\dot{\phi} \ll V(\phi); \quad (3.43)$$

en este caso la ecuación de estado del inflatón durante dicho intervalo de tiempo toma la

forma

$$\omega = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} \approx \frac{-V(\phi)}{V(\phi)} = -1 < -1/3 \quad (3.44)$$

y por lo tanto el Universo acelera. La ecuación (3.43) se conoce como la condición de inflación slow-roll. Notamos que durante el slow-roll, el campo escalar se comporta como una constante cosmológica ($\omega = -1$); por este motivo, a pesar de que la constante cosmológica no permite por sí misma modelar un periodo inflacionario, es ampliamente utilizada como una aproximación de orden cero durante la inflación.

La inflación slow-roll llega a su fin cuando la energía cinética del campo escalar alcanza a su energía potencial,

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \approx V(\phi) \quad (3.45)$$

y el Universo deja de acelerar. Finalizada la inflación se produce el recalentamiento, un proceso durante el cual el campo escalar oscila en torno al mínimo de su potencial y su energía interna se transforma en las partículas del modelo estándar. Terminado el recalentamiento, el Universo de Friedmann se encuentra dominado por materia y radiación y evoluciona según el modelo Λ CDM. La física del recalentamiento aún no es completamente entendida y se mantiene como materia de investigación en la cosmología contemporánea [29]. La evolución del campo escalar es representada esquemáticamente en la figura 3.6.

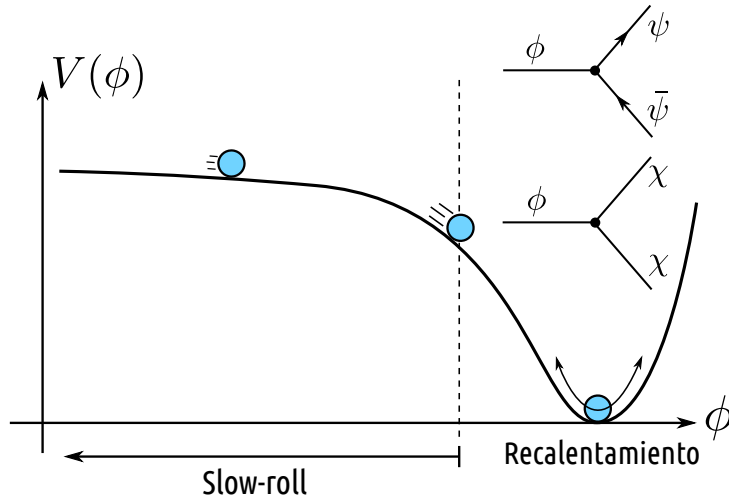


Figura 3.6: El slow-roll del campo escalar es similar al deslizamiento de una partícula masiva por una superficie curva rugosa. La inflación slow-roll llega a su fin cuando $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \approx V(\phi)$. Cuando el inflatón llega al mínimo de su potencial, oscila y su energía se transforma en la energía de las partículas del modelo estándar.

La cantidad de inflación durante el universo temprano se parametriza por el número

de e-folds N definido por

$$N = \ln \left(\frac{a_f}{a_i} \right), \quad (3.46)$$

donde a_i y a_f representan los valores del factor de escala al inicio y al final del periodo inflacionario, respectivamente. Esta última ecuación se puede escribir como

$$a_f = e^N a_i, \quad (3.47)$$

por lo cual el número de e-folds determina qué tanto se expandió el Universo durante la inflación. Las observaciones cosmológicas modernas sugieren que para resolver el problema de la planitud el número de e-folds durante el periodo inflacionario debió ser mayor a 60 [23],

$$N \geq 60. \quad (3.48)$$

El valor exacto del número de e-folds depende de la escala de energía de la inflación y de los detalles del recalentamiento después del periodo inflacionario.

Capítulo 4

Big Bounce en presencia de un Campo Vectorial

Los modelos inflacionarios suelen utilizar campos escalares como agentes generadores de la expansión acelerada. Sin embargo, hasta la fecha el único campo escalar fundamental conocido es el Higgs, mientras que los campos vectoriales abundan en la Naturaleza [30]. En el año 1989, L.H. Ford propuso un modelo en el cual el periodo inflacionario es producido por un campo vectorial [31], dando origen a los modelos de inflación vectorial. Bajo ciertas condiciones, los campos vectoriales son capaces de reproducir los efectos de un campo escalar sin alterar ni la homogeneidad ni la isotropía del Universo [32], por lo cual es natural preguntarse qué papel pueden jugar estos campos al estar presentes en un Big Bounce.

4.1. Inflación Vectorial

Una manera de modelar un periodo inflacionario a través de un campo vectorial consiste en asumir que durante el Universo primigenio existió un campo vectorial no mínimamente acoplado a la gravedad con una acción de la forma:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu + \frac{R}{6} A_\mu A^\mu \right) \quad (4.1)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $V(A_\mu) = \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu$ es la energía potencial del campo y el término $\frac{R}{6} A_\mu A^\mu$ representa el acoplamiento no mínimo del campo a la gravedad.

Para preservar la homogeneidad, el campo vectorial debe ser homogéneo y por lo tanto

$$\partial_i A_\mu = 0. \quad (4.2)$$

La isotropía no se puede conseguir con un solo campo vectorial debido a que este siempre tendrá una dirección preferencial. Sin embargo, es posible recuperar la isotropía si se

consideran tres campos vectoriales mutuamente ortogonales y de la misma magnitud:

$$\sum_i A_i^{(a)} A_i^{(b)} = |A|^2 \delta_b^a. \quad (4.3)$$

En este caso resulta particularmente útil analizar las componentes comóviles de los campos definidas por

$$B_i^{(a)} = \frac{A_i^{(a)}}{a} \quad (4.4)$$

y expresar las ecuaciones de movimiento del Universo en función a ellas. Luego de aplicar el principio variacional, la ecuación de Friedmann correspondiente toma la forma [33]

$$H = 4\pi G \left(\sum_i \dot{B}_i^2 + \sum_i m^2 B_i^2 \right), \quad (4.5)$$

donde a partir de ahora los B_i representan las componentes espaciales de solo uno de los tres campos, elegido al azar. De esta forma, a pesar de que existen tres campos vectoriales fundamentales, la ecuación de Friedmann se puede expresar solo en función a uno de ellos, al cual a partir de ahora se denotará por B_μ . Por otro lado, la ecuación de movimiento de las componentes comóviles de los tres campos resulta ser

$$\ddot{B}_i + 3H\dot{B}_i + m^2 B_i = 0 \quad (4.6)$$

mientras que la densidad de energía y la presión correspondientes al fluido del campo vectorial B_μ son

$$\rho = T_0^0 = \frac{3}{2} \left(\sum_i \dot{B}_i^2 + \sum_i m^2 B_i^2 \right), \quad (4.7)$$

$$p = T_1^1 = \frac{3}{2} \left(\sum_i \dot{B}_i^2 - \sum_i m^2 B_i^2 \right). \quad (4.8)$$

Notamos que las ecuaciones que determinan la dinámica del campo vectorial son similares a las del campo escalar, salvo que el análisis se realiza sobre la componente comóvil del campo y la ecuación de Friedmann contiene las tres componentes espaciales de uno de los tres campos vectoriales. Para reducir este sistema de ecuaciones, reescribimos la ecuación (4.5) como

$$\begin{aligned} H &= \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{3}{2} \dot{B}_1^2 + \frac{3}{2} m^2 B_1^2 + \frac{3}{2} \dot{B}_2^2 + \frac{3}{2} m^2 B_2^2 + \frac{3}{2} \dot{B}_3^2 + \frac{3}{2} m^2 B_3^2 \right) \\ &= \frac{8\pi G}{3} (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3), \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde

$$\rho_i = \frac{3}{2}\dot{B}_i^2 + \frac{3}{2}m^2 B_i^2 \quad (4.10)$$

representa la densidad de energía característica de cada una de las tres componentes espaciales del campo B_μ . Debido a que las tres componentes son en principio independientes, cada una de ellas actúa en forma efectiva como un campo escalar B_i acoplado mínimamente a la gravedad con su propia densidad de energía dada por (4.10) y una presión

$$p_i = \frac{3}{2}\dot{B}_i^2 - \frac{3}{2}m^2 B_i^2. \quad (4.11)$$

De esta forma, estudiar la evolución del Universo en presencia de tres campos vectoriales ortogonales, con la misma magnitud y acoplados a la gravedad según (4.1) es equivalente a estudiar la evolución del Universo en presencia de tres campos escalares independientes, de igual masa y acoplados mínimamente a la gravedad. Los modelos inflacionarios que utilizan N campos escalares se conocen como N -flation y nacieron como consecuencia de teorías efectivas a bajas energías provenientes de la teoría de cuerdas [34]. En el caso de tres campos escalares de igual masa sometidos los potenciales

$$V_i = \frac{1}{2}m^2 B_i^2 \quad (4.12)$$

las ecuaciones de movimiento de los tres campos escalares se pueden resumir a una sola ecuación de movimiento [35] dada por

$$\ddot{B} + 3H\dot{B} + m^2 B^2 = 0, \quad (4.13)$$

donde

$$B = \int \sqrt{\dot{B}_1^2 + \dot{B}_2^2 + \dot{B}_3^2} dt \quad (4.14)$$

actúa como un único campo escalar efectivo que determina la dinámica inflacionaria del Universo. La densidad de energía y la presión total del Universo también se pueden expresar en función del campo escalar efectivo B según

$$\rho = \left(\frac{3}{2}\dot{B}^2 + \frac{3}{2}m^2 B^2 \right), \quad (4.15)$$

$$p = \left(\frac{3}{2}\dot{B}^2 - \frac{3}{2}m^2 B^2 \right). \quad (4.16)$$

y la ecuación de Friedmann toma la forma

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (4.17)$$

A partir de las ecuaciones (4.13), (4.15), (4.16) y (4.17) concluimos que la dinámica del universo en el modelo de campos vectoriales propuesto se puede estudiar solo en función

a la presencia del campo escalar efectivo B , el cual determina la evolución del Universo durante el periodo inflacionario.

4.2. Características del campo escalar efectivo

En la sección anterior se observó que la dinámica de un Universo de Friedmann en presencia de tres campos vectoriales homogéneos, perpendiculares, de la misma masa y de la misma magnitud se puede reducir a la de un solo campo escalar efectivo B , que en lo sucesivo se llamará inflatón, el cual determina toda la física del periodo inflacionario. La ecuación de movimiento del inflatón toma la forma

$$\ddot{B} + 3H\dot{B} + m^2B = 0, \quad (4.18)$$

donde $H = \frac{\dot{a}}{a}$ representa el parámetro de Hubble y m la masa del campo. Es importante notar que si $H > 0$, el término $3H\dot{B}$ se transforma en un término de amortiguamiento, el cual disminuirá la energía cinética del campo vectorial. Por el contrario, si $H < 0$, el término $3H\dot{B}$ se transforma en un agente que incrementa la energía del inflatón, de forma similar a como una fuerza externa aumenta la energía de un sistema oscilatorio forzado.

La densidad de energía ρ y de presión p del inflatón están determinadas por

$$\rho = T + U \quad p = T - U, \quad (4.19)$$

donde T y U representan la energía cinética y potencial del campo, respectivamente, las cuales se definen como

$$T = \frac{3}{2}\dot{B}^2 \quad U = \frac{3}{2}m^2B^2.$$

Estas ecuaciones muestran que en el caso de interés del presente trabajo la energía potencial del inflatón es del tipo oscilador armónico.

4.3. Fenomenología del Big Bounce

Se dice que un Universo es cíclico si este pasa por etapas sucesivas de contracción y expansión. Cualitativamente se entiende que en cada etapa de contracción el Universo disminuye su volumen hasta alcanzar un radio mínimo, instante en el cual se produce un rebote cosmológico o *Big Bounce* que obliga al Universo a detener su contracción, invertir su dinámica y comenzar a expandirse.

En términos del factor de escala, las diferentes etapas del Universo durante un Big Bounce en presencia de un inflatón se pueden resumir como:

1. Contracción

El Universo disminuye su tamaño ($\dot{a} < 0$) y por lo tanto se tiene que $H < 0$. Esto

significa que el término $3H\dot{B}$ en (4.18) es negativo y actúa como un agente que incrementa la amplitud del campo del inflatón.

2. *Bounce*

El Universo detiene su contracción. En dicho instante se cumple que $\dot{a} = 0$ y por lo tanto también $H = 0$.

3. *Expansión*

El Universo incrementa su tamaño ($\dot{a} > 0$) y se tiene que $H > 0$. Esto significa que durante la expansión el término $3H\dot{B}$ en (4.18) se comporta como un término de amortiguamiento que reduce la amplitud del campo del inflatón.

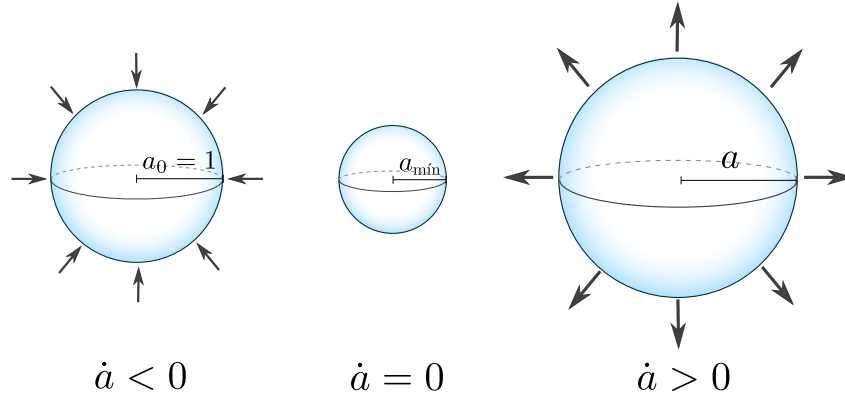


Figura 4.1: En el modelo del Big Bounce, el Universo atraviesa una etapa de contracción ($\dot{a} < 0$), realiza un rebote o Big Bounce ($\dot{a} = 0$) al alcanzar un volumen mínimo y luego atraviesa una etapa de expansión ($\dot{a} > 0$).

Si el Universo cíclico es homogéneo e isotrópico, es posible estudiar su dinámica en la contracción y la expansión utilizando el espacio-tiempo de Friedmann. Sin embargo, es necesario realizar una modificación de este modelo cosmológico para poder incluir la condición del rebote. Esto se puede lograr utilizando una ecuación de Friedmann modificada de la forma

$$H^2 = \frac{\rho}{3m_p^2} \left(1 - \frac{\rho}{\sigma} \right), \quad (4.20)$$

donde $m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G}} \approx 2.435 \times 10^{18} \text{ GeV}/c^2$ es la masa reducida de Planck. Las correcciones de este tipo son motivadas por los estudios de gravedad cuántica en las teorías de branas [36] y permiten simular analíticamente el rebote. La constante σ representa la *escala del rebote*: cuando $\rho = \sigma$, se tiene $H = 0$ y por lo tanto se produce el Big Bounce ($\dot{a} = 0$).

4.4. Análisis Cualitativo

Para estudiar la evolución del Universo cíclico en presencia del inflatón es necesario fijar las condiciones iniciales. Asumiremos que nuestro estudio del Universo inicia en un instante $t = t_0$ en el cual el Universo se encuentra en una etapa de contracción ($\dot{a} < 0$) y

el factor de escala tiene el valor $a_0 = 1$. Esto significa que en $t = 0$ el Universo ya posee un volumen inicial que se irá reduciendo a medida que transcurre el tiempo. Además, en dicho instante inicial el campo se encuentra en el fondo de su potencial ($B = 0$) y con una energía cinética pequeña comparada con la escala de Planck ($\dot{B} \ll m_p^2$). Esto significa que la densidad de energía inicial del Universo antes del rebote es mucho menor a la escala energética del rebote: $\rho_0 \ll \sigma$.

A medida que el Universo se contrae ($\dot{a} < 0$) y su volumen disminuye, la densidad de energía del inflatón aumenta hasta alcanzar la escala de energía del rebote ($\rho \sim \sigma$) en algún tiempo $t = t_b$, instante en el cual se produce el rebote o "bounce" ($\dot{a} = 0$). El interés principal de este trabajo es estudiar rebotes que se producen por encima pero cerca a la escala de Planck. Por este motivo, se espera que tanto la escala del rebote como la masa del inflatón no se encuentren muchos órdenes de magnitud lejos de la masa de Planck $m_p \sim 10^{19} GeV$. Es importante recalcar que tanto durante la contracción como durante la expansión del Universo el tiempo siempre aumenta: en un Universo en contracción, el volumen espacial disminuye, pero se mantiene la dirección usual de tiempo (del pasado al futuro).

Después del rebote, el Universo entra en una etapa de expansión ($\dot{a} > 0$) y, debido a que su volumen aumenta, se espera que la densidad de energía ρ del inflatón comience a disminuir.

4.5. Condiciones iniciales y consideraciones previas

En el análisis del Big Bounce se asumirá que en un principio el Universo se encuentra en una etapa de contracción ($\dot{a} < 0$) en la cual el campo escalar se encuentra en el fondo de su potencial y con una energía cinética pequeña. Las condiciones iniciales que se adoptarán para el Universo en el instante $t = 0$ antes del rebote son

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
B_0 &= 0, \\
\dot{B}_0 &= 1 \times 10^{-5} m_p^2 \ll m_p^2, \\
m &= 5 \times 10^{-4} m_p, \\
\sigma &= 1 \times 10^{-4} m_p^4.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Se puede verificar rápidamente que con estas condiciones iniciales se cumple

$$\rho_0 = \frac{3}{2} \left(\dot{B}_0^2 + m^2 B_0^2 \right) \ll \sigma. \tag{4.22}$$

En todas las gráficas obtenidas por cálculos numéricos la escala horizontal representará el tiempo en unidades del tiempo de rebote t_b , el cual se define como el tiempo que le toma al Universo contraerse hasta alcanzar la escala energética del rebote $\rho \sim \sigma$. El valor preciso de t_b no será calculado en esta tesis debido a que el interés de la misma es mayormente cualitativo.

Las gráficas que involucren al campo y sus derivadas tendrán una escala vertical en unidades de m_p^2 y, a menos que se indique lo contrario, las gráficas que involucren densidades de energía del campo tendrán una escala vertical en múltiplos de la energía del rebote σ .

4.6. Periodo Oscilatorio: $U \sim T$, $\rho \ll \sigma$

Las condiciones (4.21) se pueden utilizar para reducir la ecuación (4.20). Inmediatamente después de $t = 0$, $\rho_0 \ll \sigma$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{\rho}{3m_p^2} \left[1 - \frac{\rho}{\sigma} \right] \\ &\approx \frac{\rho}{3m_p^2}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

lo cual significa que mientras la energía del campo se encuentre lejos de la escala del rebote la cosmología del Universo se puede aproximar a la cosmología usual de Friedmann en la cual la energía del Universo está compuesta únicamente por la densidad de energía del inflatón. Esta última ecuación se puede escribir como

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{1}{3m_p^2} \frac{3}{2} \left(\dot{B}^2 + m^2 B^2 \right) \\ &\approx \frac{m^2}{2} \left(\frac{\dot{B}}{m_p m} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde se ha despreciado el término B^2 debido a las condiciones iniciales. En el caso particular en el cual la relación entre la energía cinética inicial y la masa del campo sea mucho menor a la masa de Planck,

$$\frac{\dot{B}}{m} \ll m_p, \quad (4.25)$$

la ecuación (4.24) toma la forma

$$H^2 \ll m^2. \quad (4.26)$$

La condición (4.25) no es una condición necesaria para el estudio de la evolución del Universo durante un rebote; sin embargo, sí es necesaria si se busca que el Universo atraviese un periodo oscilatorio antes del rebote, como se verá más adelante. En el caso en el cual la condición (4.25) no se cumpla, el Universo saltará directamente al periodo cinético sin pasar por el oscilatorio.

Utilizando la ecuación de aceleración del factor de escala (2.32), se tiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{\ddot{a}}{a} \right| &= \frac{1}{6m_p^2}(\rho_0 + 3p_0) = \frac{1}{6m_p^2}(4T) \\ &= \frac{2}{3m_p^2} \frac{3\dot{B}_0^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\dot{B}_0^2}{m_p^2} \\ &\ll m^2, \end{aligned} \quad (4.27)$$

donde se ha utilizado la relación (4.21). Las condiciones (4.26) y (4.27) permitirán reducir la ecuación de movimiento (4.18) del inflatón. Para tal fin, se utilizará el ansatz

$$\begin{aligned} B &= a^{-3/2}u(t) \\ \dot{B} &= -\frac{3}{2}a^{-5/2}\dot{a}u + a^{-3/2}\dot{u} \\ \ddot{B} &= \frac{15}{2}a^{-7/2}\dot{a}^2u - \frac{3}{2}a^{-5/2}\ddot{a}u - 6a^{-5/2}\dot{a}\dot{u} + a^{-3/2}\ddot{u}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Reemplazando estas tres últimas expresiones en la ecuación de movimiento (4.18) del campo se tiene:

$$\frac{15}{2}a^{-7/2}\dot{a}^2u - \frac{3}{2}a^{-5/2}\ddot{a}u - 6a^{-5/2}\dot{a}\dot{u} + a^{-3/2}\ddot{u} + 3H \left(-\frac{3}{2}a^{-5/2}\dot{a}u + a^{-3/2}\dot{u} \right) + m^2B^2 = 0$$

lo cual se puede escribir como

$$\ddot{u} + \left(-3\frac{H^2}{m^2} + \frac{3}{2}\frac{\left| \frac{\ddot{a}}{a} \right|}{m^2} + 1 \right) m^2u = 0.$$

Utilizando las condiciones (4.26) y (4.27) esta última expresión se transforma en

$$\ddot{u} + m^2u = 0, \quad (4.29)$$

la cual evidentemente es una ecuación de oscilador armónico y por lo tanto tiene solución

$$u = u_0 \text{sen}(mt),$$

donde u_0 es una constante que depende de las condiciones iniciales del problema y se ha elegido la función seno porque $B_0 = 0$. A partir de esta última expresión y el ansatz (4.28), el campo B toma la forma

$$B = u_0 a^{-3/2} \text{sen}(mt). \quad (4.30)$$

La ecuación (4.30) representa la evolución temporal de la amplitud del inflatón en el régimen $\rho \ll \sigma$. Debido a que el campo oscila con frecuencia m , se ha llamado a este periodo el periodo oscilatorio. Además de la oscilación, esta ecuación también expresa que la magnitud del campo crecerá a medida que le Universo se contrae. Este fenómeno refleja el hecho de que durante la contracción el término $3H\dot{B}$ en (4.18) es negativo y

actúa como un agente que incrementa la amplitud del inflatón.

Las figura 4.2a muestra los resultados de cálculos numéricos de la evolución temporal del campo y sus derivadas durante el periodo oscilatorio.

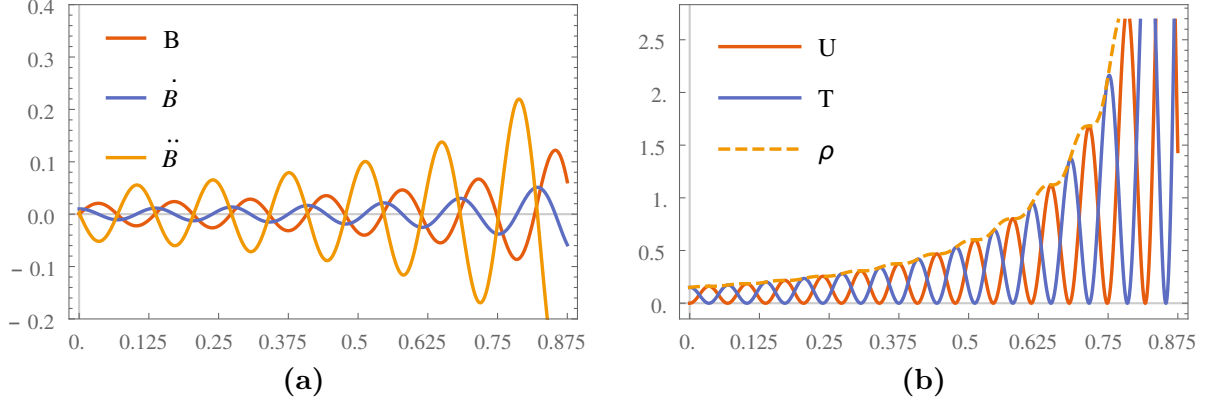


Figura 4.2: (a) Evolución temporal del campo durante el periodo oscilatorio. Las tres funciones oscilan con una frecuencia que depende del valor de la masa del campo e incrementan su amplitud con la contracción del Universo. La velocidad del campo ha sido multiplicada por 10^3 y la aceleración por 10^7 . (b) Evolución temporal de las energías del inflatón durante el periodo oscilatorio, donde la escala vertical se encuentra en múltiplos de $10^{-5}\sigma$. Las energías oscilan y crecen con la contracción del Universo, pero aún se encuentran muy por debajo de la escala del rebote.

A partir de (4.19) y (4.30), la densidad de energía en el periodo oscilatorio toma la forma

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{3}{2} \left[\dot{B}^2 + m^2 B^2 \right] \\ &= \frac{3}{2} \left[u_0^2 \left(-\frac{3}{2} a^{-5/2} \dot{a} \sin(mt) + a^{-3/2} m \cos(mt) \right)^2 + u_0^2 a^{-3} \sin^2(mt) \right] \\ &= \frac{3}{2} a^{-3} \left[\frac{9}{4} H^2 \sin^2(mt) - 3Hm \sin(mt) \cos(mt) + m^2 \right].\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $H^2 \ll m^2$, esta última ecuación se puede aproximar a

$$\rho \approx \frac{3}{2} m^2 a^{-3}. \quad (4.31)$$

Por lo tanto, la densidad de energía del inflatón crecerá a medida que el factor de escala disminuye. La figura 4.2b muestra la evolución de las densidades de energía del inflatón durante el periodo oscilatorio.

Utilizando esta última expresión en (4.23) se tiene

$$\begin{aligned}
H^2 &= \frac{1}{3m_p^2} \rho \\
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{1}{3m_p^2} \frac{3}{2} m^2 a^{-3} \\
\sqrt{a} da &= -\frac{m}{\sqrt{2}m_p} dt \\
a^3 &= \sqrt{\frac{2m}{3\sqrt{2}m_p}} \sqrt{t_s - t} \propto \sqrt{t_s - t},
\end{aligned} \tag{4.32}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\dot{a} < 0$ y t_s es una variable de integración que representa el instante en el cual se daría una singularidad ($a = 0$) si el Universo se mantuviese por siempre en el periodo oscilatorio. La ecuación (4.32) representa la evolución del factor de escala durante el periodo oscilatorio e indica que a medida que el tiempo crece ($t < t_s$) el factor de escala disminuye, tal como es de esperarse en un Universo en contracción.

4.7. Periodo Cinético: $U \ll T$, $\rho \ll \sigma$

Utilizando la ecuación (4.30) es posible determinar cómo evolucionan los términos de (4.18) durante el periodo oscilatorio.

$$\begin{aligned}
3H\dot{B} &= 3\frac{\rho}{3m_p^2}\dot{B} = \frac{1}{m_p^2} \frac{1}{2} m^2 B^2 \dot{B}^2 \\
&= \frac{m^2}{2m_p^2} u_a^2 a^{-3} \text{sen}^2(mt) u_a^2 [-3a^{-2} \text{sen}^2(mt) + 2ma^{-3} \cos(mt)] \\
&= a^{-3} \times \frac{m^2 u_a^4 \text{sen}^2(mt)}{2m_p^2} [-3a \text{sen}^2(mt) + 2m \cos(mt)] \\
&\sim a^{-3}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
m^2 B &= m^2 u_a a^{-3/2} \text{sen}(mt) \\
&\sim a^{-3/2}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Notamos que el término $3H\dot{B}$ crece cuadráticamente más rápido que $m^2 B$ a medida que el Universo se contrae. El periodo oscilatorio llegará a su fin cuando el término $m^2 B$ se haga lo suficientemente pequeño para ser despreciable,

$$m^2 B \ll 3H\dot{B}, \tag{4.35}$$

y la ecuación (4.18) tome la forma

$$\ddot{B} + 3H\dot{B} = 0. \tag{4.36}$$

Utilizando el cambio de variable $y = \dot{B}$ la ecuación anterior se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{y} + 3\frac{\dot{a}}{a}y &= 0 \\ \frac{\dot{y}}{y} &= -3\frac{\dot{a}}{a} \\ \ln(y) &= -3\ln(a) + \text{const} \\ y &= \text{const} \times a^{-3}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $y = \dot{B}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{B} &= Aa^{-3} \\ B &= Aa^{-2} + C \end{aligned} \quad (4.37)$$

donde A y C son constantes de integración. Las ecuaciones (4.37) indican que en el periodo cinético el campo deja de oscilar y comienza a crecer de forma monótona con la contracción del Universo. La figura 4.3a muestra la evolución del campo y sus derivadas en el periodo cinético.

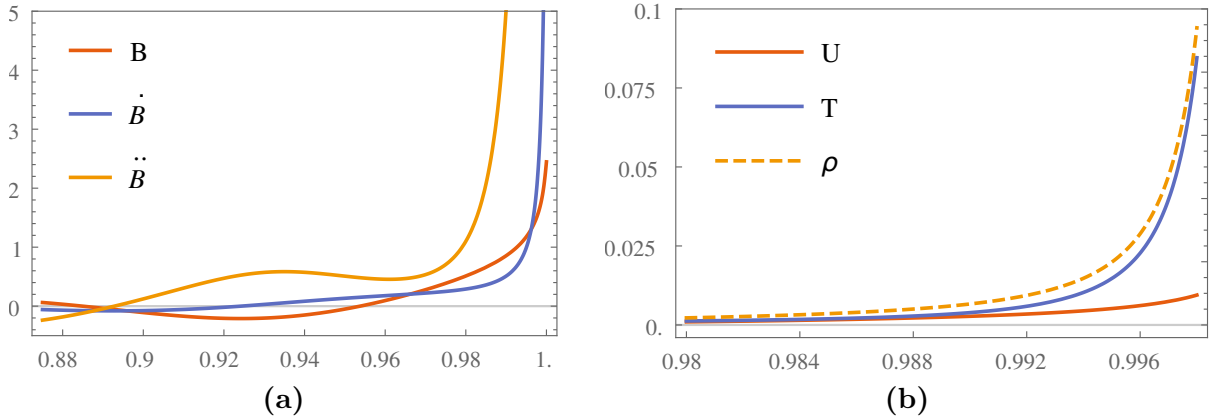


Figura 4.3: (a) Evolución temporal del campo durante el periodo cinético. Nótese que todas las funciones dejan de oscilar y comienzan a crecer monótonamente. La velocidad del campo ha sido multiplicada por 10^3 y la aceleración por 10^7 . (b) Evolución temporal de las densidades de energía durante el periodo cinético. Todas las energías crecen monótonamente y la energía cinética comienza a dominar sobre la potencial, pero la energía total aún se cuenta muy por debajo de la escala del rebote.

Utilizando las ecuaciones (4.37), la evolución de las componentes de la energía del campo se pueden expresar como

$$T = \frac{\dot{B}^2}{2} \propto a^{-6} \quad (4.38)$$

$$U = \frac{m^2 B^2}{2} \propto a^{-4}. \quad (4.39)$$

Las ecuaciones (4.38) y (4.39) implican que

$$\frac{U}{T} \propto a^2 < 1$$

y que por lo tanto, inmediatamente después del periodo oscilatorio, la energía cinética comenzará a dominar sobre la energía potencial. Eventualmente la contracción del Universo provocará que el factor de escala se haga lo suficientemente pequeño como para que se cumpla

$$U \ll T. \quad (4.40)$$

El periodo durante el cual la condición (4.40) sea válida y además aún se cumpla que $\rho \ll \sigma$ se denominará el *periodo cinético*. Esto quiere decir que durante el periodo cinético la energía cinética ha crecido hasta dominar sobre la energía potencial pero aún no es lo suficientemente grande como para que la densidad de energía total este cerca a la escala energética del rebote. En este régimen la densidad de energía total toma la forma

$$\begin{aligned} \rho &= T + U \approx T \\ &\approx \frac{1}{2} \dot{B}^2 \\ &\approx \frac{A^2}{2} a^{-6}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

lo cual implica que en el periodo cinético la densidad de energía del campo crecerá mucho más rápido en comparación al periodo oscilatorio (4.31). La figura 4.3b muestra la evolución temporal de las densidades de energía del campo escalar.

Dentro del periodo cinético aún se tiene $\rho \ll \sigma$ y por lo tanto la ecuación (4.23) aún es válida. Utilizando la expresión (4.41), la ecuación de Friedmann toma la forma

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{1}{3m_p^2} \rho \\ \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 &= \frac{1}{3m_p^2} \frac{1}{2} \frac{A^2}{a^6} \\ a^2 da &= - \frac{A}{\sqrt{6} m_p^2} dt \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$a^3 = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{A}{m_p^2} (t_s - t) \propto t_s - t, \quad (4.42)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\dot{a} < 0$ y t_s es una constante de integración que representa el instante de tiempo en el cual existiría una singularidad ($a = 0$) si no existiese el rebote. Finalmente, comparando las ecuaciones (4.32) y (4.42) notamos que durante el periodo cinético el factor de escala decrece más rápido en comparación al periodo oscilatorio, lo cual significa que el Universo sufre una contracción acelerada a medida que la energía del

inflatón aumenta.

4.8. Periodo previo al Bounce: $U \ll T$, $\rho \sim \sigma$

Debido a que la densidad de energía del campo crece con la contracción del Universo, eventualmente se cumplirá

$$\rho \sim \sigma \quad (4.43)$$

y el periodo cinético llegará a su fin, dando paso al periodo previo al bounce. En este caso ya no es posible despreciar el término que involucra a σ en la ecuación de Friedmann (4.20). Por lo tanto se tiene que

$$H^2 = \frac{\rho}{3m_p^2} \left(1 - \frac{\rho}{\sigma} \right). \quad (4.44)$$

Para tener una idea acerca de la dinámica del Universo a medida que ρ se acerca a σ , se reemplazará la expresión (4.41) en (4.44), obteniéndose

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 &= \frac{1}{3m_p^2} \left(\frac{A^2}{2a^6} - \frac{A^4}{4a^{12}\sigma} \right) \\ \frac{a^5 da}{\sqrt{\frac{A^2 a^6}{2} - \frac{A^4}{4\sigma}}} &= -\frac{1}{\sqrt{3}m_p} dt \\ \frac{2}{6A^2} \frac{d\left(\frac{A^2 a^6}{2} - \frac{A^4}{4\sigma}\right)}{\sqrt{\frac{A^2 a^6}{2} - \frac{A^4}{4\sigma}}} &= -\frac{1}{\sqrt{3}m_p} dt \\ \frac{2}{3A^2} \sqrt{\frac{A^2 a^6}{2} - \frac{A^4}{4\sigma}} &= -\frac{1}{\sqrt{3}m_p} t + F, \end{aligned} \quad (4.45)$$

donde F es una constante de integración. Esta última expresión se puede reescribir como

$$a^6 = \frac{3A^2}{2m_p^2} (t - t_b)^2 + \frac{A^2}{2\sigma}, \quad (4.46)$$

donde se ha hecho un cambio de constante de integración a $t_b = \sqrt{3}m_p F$. La ecuación (4.46) indica que el factor de escala alcanza su valor mínimo cuando $t = t_b$, lo cual significa que t_b representa el instante del rebote. El valor mínimo del factor de escala en instante del rebote es

$$a_{min} = \left(\frac{A^2}{2\sigma} \right)^{1/6}. \quad (4.47)$$

Los valores de t_b y a_{min} dependerán de las constantes de integración y en consecuencia de las condiciones iniciales del Universo antes del rebote.

Derivando la ecuación (4.46) respecto del tiempo se obtiene

$$\dot{a} = \frac{3A^2}{6m_p^2} a^{-5} (t - t_b) \quad (4.48)$$

y en consecuencia en el instante $t = t_b$ se tiene $\dot{a} = 0$ y el Universo detiene su contracción. La figura 4.4 muestra la contracción del factor de escala hasta el instante previo al rebote.

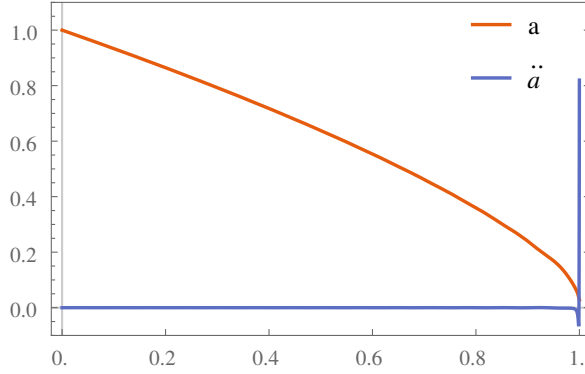


Figura 4.4: Evolución temporal del factor de escala en el instante del rebote. El factor de escala toma un valor mínimo $a_{\min} = 0.0248$ y la aceleración crece abruptamente. La aceleración ha sido multiplicada por 3×10^5 .

La oscilación inicial del inflatón hará que los signos tanto del campo B como de su velocidad \dot{B} en el instante del bounce dependan de los valores que se elijan para m , σ y \dot{B}_0 . En lo que sigue se asumirá que tanto el campo B como su derivada \dot{B} son positivas en el instante del bounce. A pesar de que esta elección fijará varios signos en los cálculos de las siguientes secciones, esto no implica de ninguna manera una pérdida de generalidad pues los signos relativos de estas cantidades no modifican las dinámicas de las energías potencial y cinética (las cuales dependen de los cuadrados del campo y de su velocidad, respectivamente) y por lo tanto tampoco afectan la fenomenología del rebote. La figura 4.5 muestra las evoluciones del campo y de sus energías en los instantes previos al rebote.

4.9. Periodo Inflacionario

En el instante del rebote el Universo pasa de un periodo de contracción ($\dot{a} < 0$) a un periodo de expansión en el cual el tamaño del Universo crece ($\dot{a} > 0$). Es importante notar que la dinámica de la contracción no es la misma que la de la expansión debido a la presencia del inflatón.

Cerca al rebote se tiene $H < 0$ y por lo tanto el término $3H\dot{B}$ en la ecuación

$$\ddot{B} + 3H\dot{B} + m^2 B^2 = 0 \quad (4.49)$$

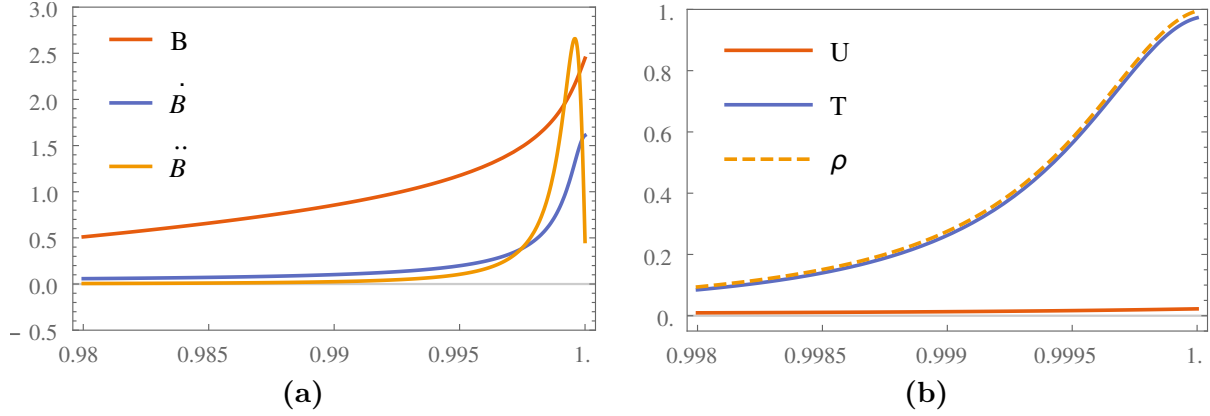


Figura 4.5: (a) Evolución temporal del campo durante el periodo previo al bounce. El campo y su velocidad crecen monótonamente mientras que su aceleración comienza a disminuir bruscamente. La velocidad del campo ha sido multiplicada por 2×10^2 y la aceleración por 5×10^4 . (b) Evolución temporal de las densidades de energía. La energía cinética domina totalmente sobre la energía potencial y crece hasta alcanzar la escala del rebote.

actúa como un agente que incrementa la energía del campo. Debido a esto, durante todo el proceso de contracción la energía total del campo aumenta y, como se ha visto en las secciones anteriores, cerca al instante del rebote la energía cinética se hace mucho mayor a la potencial ($U \ll T$) y es esta la que aporta la mayor contribución a la densidad de energía.

4.9.1. Inicio de la inflación

Luego del rebote, el Universo se expande y en consecuencia se tiene $H > 0$. Esto significa que el término $3H\dot{B}$ en (4.49) actúa como un término de amortiguamiento que disminuye la rapidez del inflatón. Por lo tanto, inmediatamente después del rebote, el inflatón comienza a *desacelerar* debido a la expansión del Universo y la energía cinética $T = \frac{3}{2}\dot{B}^2$ comienza a disminuir desde el valor máximo que alcanzó en el instante del rebote hasta alcanzar un valor mínimo $T_i \approx 0$ en algún instante $t = t_i$ en el cual $\dot{B}_i \approx 0$.

Por otro lado, la energía potencial $U = \frac{3}{2}m^2B^2$ del inflatón sigue creciendo mientras el campo desacelera debido a que aún se tiene $\dot{B} > 0$. En el instante $t = t_i$, en el cual se tiene $\dot{B} = 0$, la energía potencial alcanzará cierto valor máximo U_i y luego comenzará a decrecer. En conclusión, en el instante t_i la energía potencial alcanza su valor máximo mientras que la energía cinética se hace casi nula y por lo tanto se cumple que:

$$U_i \gg T_i. \quad (4.50)$$

La dinámica del campo luego del rebote es bastante similar a la dinámica de una partícula que asciende una superficie rugosa en la mecánica clásica. En este caso, la energía cinética de la partícula disminuye rápidamente debido al rozamiento hasta hacerse nula justo en el punto de máxima altura, en el cual la energía potencial gravitatoria alcanza su valor máximo.

El tiempo t_i representa el instante en el cual la energía potencial comienza a dominar totalmente sobre la energía cinética. Esto significa que en dicho instante la densidad de energía se puede expresar como

$$\rho = T + U \approx U \quad (4.51)$$

y la presión como

$$p = T - U \approx -U. \quad (4.52)$$

Por lo tanto, inmediatamente después del instante t_i se tiene

$$\frac{p}{\rho} \approx -1 < -\frac{1}{3}. \quad (4.53)$$

La ecuación (4.53) es justamente la condición que define un periodo de expansión acelerada. Por lo tanto, la presencia de un campo escalar inducirá un periodo inflacionario luego del rebote durante el cual el Universo sufrirá una expansión acelerada ($\ddot{a} > 0$). El inicio del periodo inflacionario se dará en el instante $t = t_i$ en el cual comienza a cumplirse la condición (4.50).

4.9.2. Fin de la inflación

El instante t_i definido por la ecuación (4.50) determina el inicio del periodo inflacionario. En dicho instante, la energía potencial alcanza su valor máximo y luego comienza a decaer debido a la expansión del Universo. El periodo inflacionario llegará a su fin en algún instante t_f en el cual se cumpla

$$U_f \approx T_f \quad (4.54)$$

y la ecuación (4.53) deje de ser válida. Por lo tanto, en el instante t_f el Universo deja de expandirse aceleradamente ($\ddot{a}_f = 0$).

La duración Δt del periodo inflacionario estará dada por

$$\Delta t = t_f - t_i. \quad (4.55)$$

Además, el número de e-folds durante la inflación estará dado por

$$N = \ln \left(\frac{a_f}{a_i} \right). \quad (4.56)$$

De acuerdo a las observaciones cosmológicas actuales, la inflación en nuestro Universo debió tener una duración $\Delta t \sim 10^{-35} s$ y debió producir un número de e-folds $N \geq 60$ [23].

La figura 4.6 muestra la evolución del factor de escala obtenida luego del rebote. Los

instantes iniciales y finales del periodo inflacionario obtenidos numéricamente son

$$\begin{aligned} t_i &= 1.008 t_b \\ t_f &= 1.156 t_b \end{aligned} \quad (4.57)$$

por lo cual la duración total de la inflación es

$$\Delta t = t_f - t_i = 0.148 t_b.$$

Los valores del factor de escala al inicio y final de la inflación son

$$\begin{aligned} a_i &= a(t_i) = 0.0944 \\ a_f &= a(t_f) = 3155.97, \end{aligned}$$

por lo cual el Universo ha aumentado su tamaño en un factor de

$$\frac{a_f}{a_i} = 33431.89.$$

Utilizando esta información es posible determinar el número de e-folds para el presente modelo:

$$N = \ln \left(\frac{a_f}{a_i} \right) = 10.40. \quad (4.58)$$

Debido a que $N < 60$, el modelo definido por (4.21) no puede representar un modelo inflacionario de nuestro Universo.

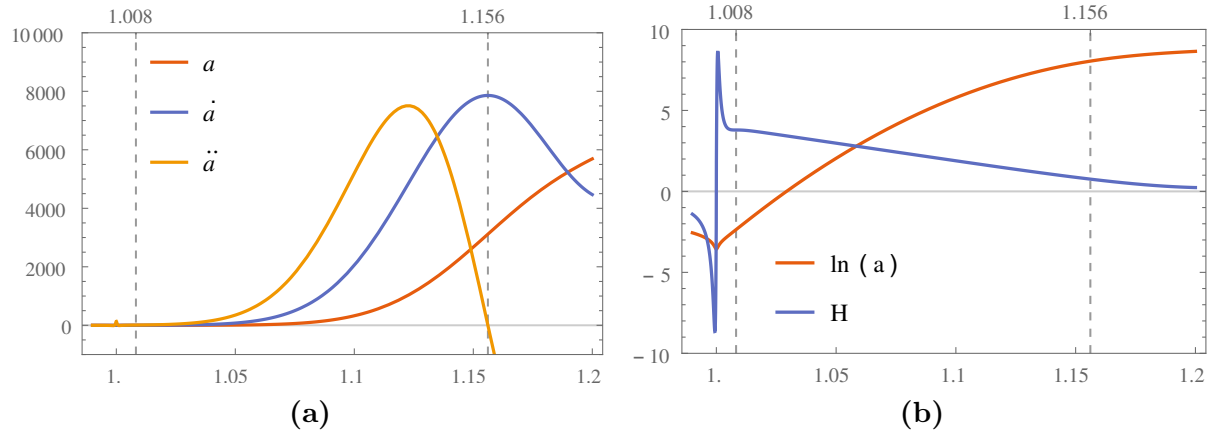


Figura 4.6: Dinámica de la evolución del Universo después del rebote. (a) El factor de escala crece aceleradamente ($\ddot{a} > 0$) entre los instantes $t_i = 1.008 t_b$ y $t_f = 1.167 t_b$ alcanzando una rapidez máxima al final de la inflación (\dot{a} ha sido multiplicado por 10^4 y \ddot{a} por 5×10^7). (b) El logaritmo del factor de escala crece rápidamente durante el periodo inflacionario, generando un número de e-folds $N = 10.40$. El parámetro de Hubble (multiplicado por 3000) decrece durante el periodo inflacionario.

4.9.3. Cantidad de Inflación

Para entender cómo la cantidad de inflación (determinada por Δt y N) depende de las condiciones iniciales antes del rebote es necesario analizar en detalle la dinámica de la energía potencial durante el periodo inflacionario.

Antes del rebote se tiene que $\dot{B} > 0$. Debido a la continuidad del fenómeno estudiado, inmediatamente después del rebote la rapidez \dot{B} del campo también será positiva. Sin embargo, la presencia del término de amortiguamiento $3H\dot{B}$ en la ecuación de movimiento del campo (4.49) produce un *frenado* del campo de forma tal que en cierto instante su rapidez se hace nula ($\dot{B} = 0$) y la energía cinética llega a su valor mínimo. Por otro lado, la rapidez de cambio de la energía potencial está dada por

$$\dot{U} = \frac{3}{2}m^2 \frac{d}{dt}(B^2) = 3m^2 B\dot{B} > 0. \quad (4.59)$$

Esto significa que mientras el campo frena ($\dot{B} > 0$, $\ddot{B} < 0$) la energía potencial sigue aumentando ($\dot{U} > 0$) hasta llegar a su valor máximo cuando $\dot{B} = 0$, instante en el cual se da inicio al periodo inflacionario.

Teniendo en cuenta (4.18), al inicio del periodo inflacionario se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{B}_i &= 0, \\ \ddot{B}_i &= -(3H\dot{B}_i + m^2 B_i^2) \approx -m^2 B_i^2 < 0. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Por lo tanto, durante el periodo inflacionario, la rapidez del campo será negativa debido a que este parte del *reposo* ($\dot{B}_i = 0$) y sufre una aceleración negativa ($\ddot{B}_i < 0$):

$$\dot{B}|_{\text{inflación}} < 0. \quad (4.61)$$

A partir de las ecuaciones (4.59) y (4.61), se tiene

$$\dot{U}|_{\text{inflación}} < 0 \quad (4.62)$$

y por lo tanto la energía potencial disminuye durante el periodo inflacionario. En algún instante, la energía potencial alcanzará la escala de la energía cinética y la inflación llegará a su fin.

En general, la cantidad de inflación dependerá directamente del tiempo durante el cual se cumpla la relación (4.53) y en consecuencia del tiempo durante el cual la energía potencial domine sobre la cinética. Esto significa que para tener una gran cantidad de inflación es necesario que la energía potencial disminuya lentamente y de esta forma la condición (4.53) se mantenga por un tiempo prolongado.

Analizando la ecuación de movimiento del campo durante el periodo inflacionario,

$$\ddot{B} = -3H\dot{B} - m^2 B^2, \quad (4.63)$$

notamos que la aceleración del campo estará sujeta a la interacción de dos términos. El primer término, $-3H\dot{B}$, es positivo (pues $\dot{B} < 0$) y por lo tanto genera una aceleración

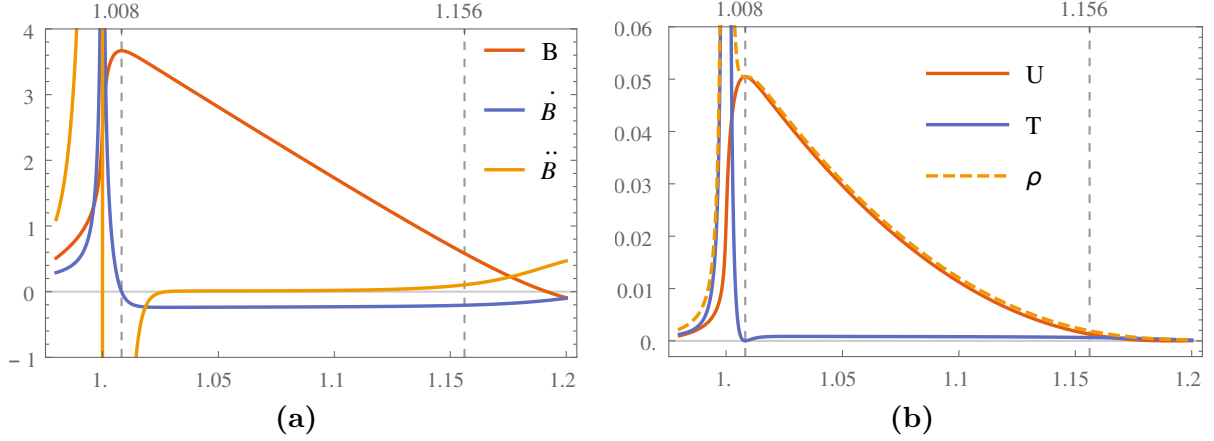


Figura 4.7: (a) Evolución del campo durante el periodo inflacionario. El campo disminuye lentamente, su velocidad se reduce bruscamente y su aceleración se hace negativa y luego tiende a cero. Se ha multiplicado a \dot{B} por 10^3 y a \ddot{B} por 10^8 . (b) Evolución de las densidades de energía durante el periodo inflacionario. La energía potencial disminuye lentamente mientras que la cinética disminuye bruscamente, cumpliéndose $U \gg T$ durante todo el periodo inflacionario.

positiva, lo cual físicamente se interpreta como un agente que busca incrementar la energía potencial del inflatón. El segundo término, $-m^2 B^2$, es negativo y por lo tanto genera una aceleración negativa, lo cual físicamente se interpreta como un agente que busca disminuir la energía potencial del inflatón. Esto significa que la cantidad de inflación dependerá inversamente de la magnitud del término $m^2 B^2$. Debido a que la masa del campo es parte de las condiciones iniciales del modelo inflacionario estudiado, podemos afirmar que, cualitativamente, la cantidad de inflación disminuirá con la masa del campo:

$$N \sim 1/m. \quad (4.64)$$

La ecuación (4.64) debe interpretarse como que la cantidad de inflación disminuye con el incremento de la masa del inflatón.

Por otro lado, la cantidad de inflación también dependerá de qué tan grande sea la energía potencial al inicio del periodo inflacionario, pues un mayor valor asegura que el potencial requiere un mayor tiempo para decaer hasta las escalas de la energía cinética. La energía total del inflatón se construye durante el periodo previo al rebote, en el cual la energía cinética crece hasta alcanzar las escalas del rebote ($T \approx \sigma$). El crecimiento de la energía cinética también produce un incremento de la energía potencial; por lo tanto, mientras mayor sea la escala del rebote, mayor será el valor máximo de la energía potencial y en consecuencia se tendrá más inflación. Podemos entonces afirmar que, cualitativamente, la cantidad de inflación aumenta con el incremento de la escala del rebote:

$$N \sim \sigma. \quad (4.65)$$

A partir de las ecuaciones (4.64) y (4.65), es posible escribir una relación *cualitativa* entre

la cantidad de inflación, la masa del inflatón y la escala del rebote:

$$N \sim \frac{\sigma}{m}. \quad (4.66)$$

La ecuación (4.66) se debe interpretar de la siguiente forma: mientras más grande sea la escala del rebote con respecto a la masa de la partícula, mayor será la cantidad de inflación.

4.10. Inflación con $m \sim 10^{-6}m_p$ y $N \geq 60$

Las observaciones actuales de la radiación cósmica de fondo sugieren que, si el modelo del Big Bounce es correcto, el valor de la masa del inflatón debe encontrarse en el orden $m \sim 10^{-6}m_p$ [37]. Con estas condiciones es posible encontrar una escala tentativa para la densidad de energía σ . En particular, cuando la configuración de los parámetros del rebote son

$$\begin{aligned} m &= 10^{-6}m_p \\ \dot{B}_0 &= 1 \times 10^{-5}m_p^2 \\ B_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.67)$$

los cálculos numéricos realizados sugieren que la mínima escala del rebote necesaria para generar al menos 60 e-folds es

$$\sigma = 3.06 \times 10^{-2}m_p^4.$$

Por lo tanto, para masas del orden $m \sim 10^{-6}m_p$ la escala del rebote se encuentra en el orden $\sigma \sim 10^{-2}m_p^4$.

Los valores obtenidos numéricamente para el inicio y el final del periodo inflacionario en este caso particular son

$$\begin{aligned} t_i &= 43.04 t_b \\ t_f &= 3844.08 t_b. \end{aligned}$$

El tiempo total de inflación está dado por

$$\Delta t = 3801.04t_b,$$

un valor mucho mayor al obtenido en la sección anterior, lo cual refleja la mayor cantidad de inflación.

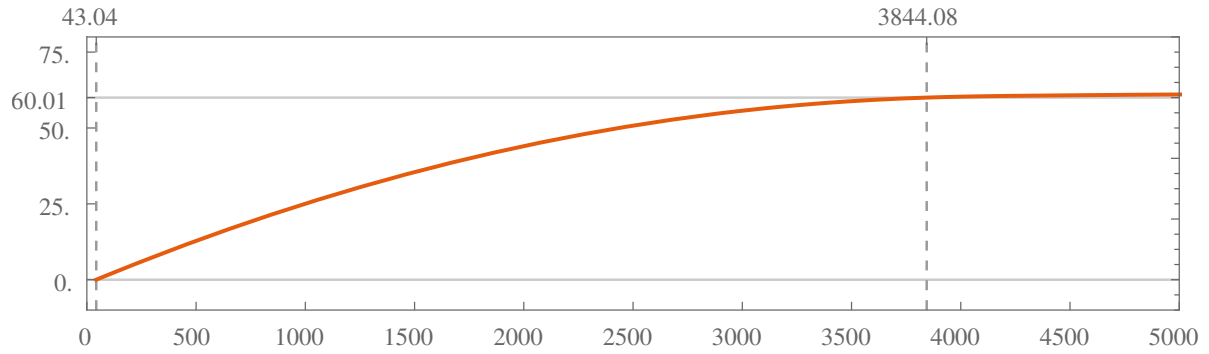


Figura 4.8: Evolución del número de e-folds durante un periodo inflacionario con $m = 10^{-6}m_p$ y $\sigma = 3.06 \times 10^{-2}m_p^4$. El número de e-folds alcanzado durante todo el periodo inflacionario es $N = 60.01 > 60$. Al finalizar el periodo inflacionario, el Universo aún se expande pero a una tasa mucho menor.

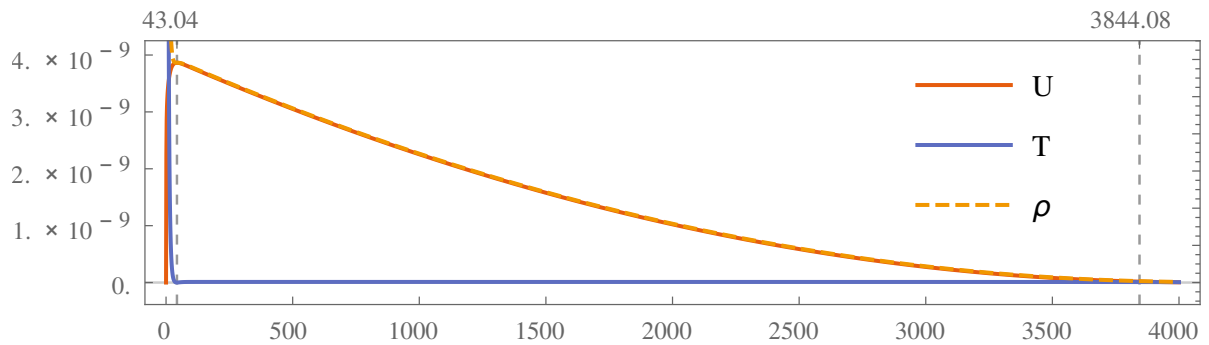


Figura 4.9: Evolución de las densidades de energía durante un periodo inflacionario con $m = 10^{-6}m_p$ y $\sigma = 3.06 \times 10^{-2}m_p^4$.

Capítulo 5

Cosmologías Cíclicas

Se dice que un modelo cosmológico es cíclico cuando en él se producen etapas sucesivas de expansión y contracción. En la cosmología cíclica, luego de cada Big Bounce, el Universo se expande y, por medio de algún mecanismo, frena hasta alcanza un tamaño máximo, para luego iniciar una nueva contracción y dar inicio así a un nuevo ciclo.

5.1. Fenomenología del Universo Cíclico

La cosmología cíclica está basada en dos eventos fundamentales: el rebote y el retorno del Universo.

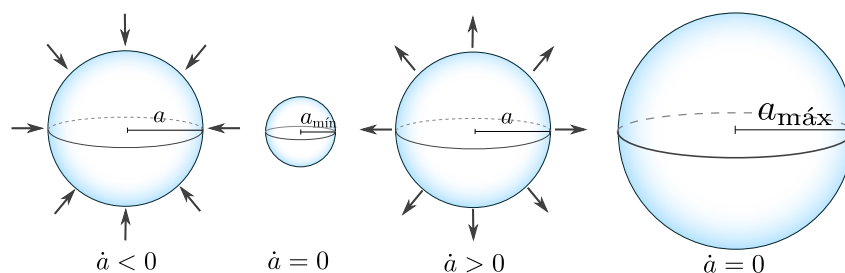


Figura 5.1: Un ciclo completo en una cosmología cíclica.

La figura 5.2 muestra esquemáticamente las etapas de un ciclo completo en un Universo cíclico.

1. **Contracción:** El Universo se contrae y en consecuencia $\dot{a} < 0$ y $H < 0$.
2. **Rebote:** El Universo alcanza un tamaño mínimo y rebota. En el instante del rebote se tiene $\dot{a} = 0$ y $H = 0$.
3. **Expansión:** Luego del rebote, el Universo se expande. Durante este periodo se tiene $\dot{a} > 0$ y $H > 0$.
4. **Retorno:** El Universo alcanza un tamaño máximo, instante en el cual se tiene $\dot{a} = 0$ y $H = 0$. Habiendo alcanzado su tamaño máximo, el Universo retorna y se inicia un nuevo periodo de contracción, dando inicio a un nuevo ciclo.

Tal como se vio en la sección anterior, el mecanismo del rebote se puede modelar utilizando la ecuación de Friedmann modificada (4.20),

$$H^2 = \frac{\rho}{3m_p^2} \left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right). \quad (5.1)$$

El instante del retorno se puede modelar de distintas formas, como se verá en las siguientes secciones.

5.2. Potencial tipo Higgs

Una manera de modelar el instante del retorno es utilizar un potencial tipo Higgs para el inflatón de la forma

$$V = \frac{1}{4}\lambda^2 B^4 - \frac{1}{2}m^2 B^2, \quad (5.2)$$

lo cual genera una energía potencial

$$U = 3 \left(\frac{1}{4}\lambda^4 B^4 - \frac{1}{2}m^2 B^2 \right). \quad (5.3)$$

Como se verá más adelante, el término negativo en la energía potencial juega un papel crucial en el instante del retorno. La dinámica del inflatón también estará determinada por la ecuación de movimiento

$$\ddot{B} + 3H\dot{B} + \frac{\partial U}{\partial B} = 0 \quad (5.4)$$

y la densidad de energía ρ y la presión p del campo toman la forma

$$\begin{aligned} \rho &= 3 \left(\frac{1}{2}\dot{B}^2 + \frac{1}{4}\lambda^2 B^4 - \frac{1}{2}m^2 B^2 \right), \\ p &= 3 \left(\frac{1}{2}\dot{B}^2 - \frac{1}{4}\lambda^2 B^4 + \frac{1}{2}m^2 B^2 \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

5.2.1. Análisis del instante de retorno

Tanto en el instante del rebote como en el instante del retorno se tiene $H = 0$. Por lo tanto, a partir de (5.1), en estos instantes extremos de cada ciclo se debe cumplir

$$0 = \frac{\rho}{3m_p^2} \left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right). \quad (5.6)$$

Esta última ecuación tiene dos soluciones. La solución

$$\rho = \sigma \quad (5.7)$$

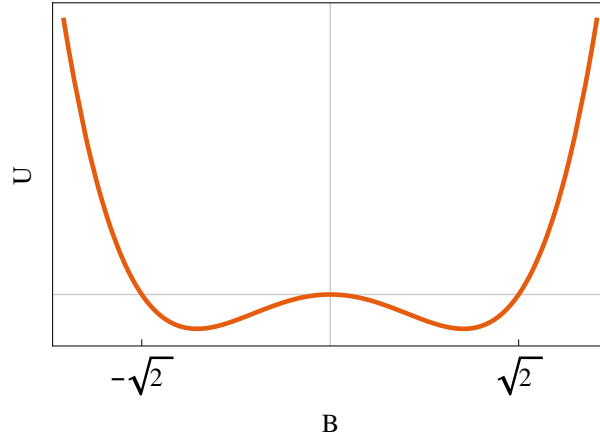


Figura 5.2: Gráfica del potencial de la ecuación (5.2) para $m = l = 1$. El potencial se hace nulo cuando $B = 0$ y $B = \pm \frac{\sqrt{2}m}{\lambda} = \pm\sqrt{2}$ y negativo cuando $-\sqrt{2} < B < \sqrt{2}$.

representa el instante del rebote, situación que se analizó en detalle en la sección anterior. Por otro lado, la solución

$$\rho = 0 \quad (5.8)$$

representa el instante del retorno. Es importante notar que sin un término negativo en la energía potencial, la densidad de energía es idénticamente positiva y la ecuación (5.6) solo posee una solución en $\rho = \sigma$, haciendo el retorno imposible.

A partir de (5.5), en el instante del retorno se tiene

$$\rho = 3 \left(\frac{1}{2} \dot{B}^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 B^4 - \frac{1}{2} m^2 B^2 \right) = 0. \quad (5.9)$$

Esta última ecuación diferencial se puede integrar analíticamente según

$$\dot{B} = \pm m B \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{2m^2} B^2} \quad (5.10)$$

$$\frac{dB}{m B \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{2m^2} B^2}} = \pm dt \quad (5.11)$$

$$\frac{1}{m} \ln \left| \frac{1}{B} \left(\frac{\sqrt{2}m}{\lambda} + \sqrt{\frac{2m^2}{\lambda^2} - B^2} \right) \right| = \pm t + C. \quad (5.12)$$

Despejando el valor de B y teniendo en cuenta que la función coseno hiperbólico es par, se obtiene

$$B = \frac{\sqrt{2}m}{\lambda \cosh(mt + C)}. \quad (5.13)$$

La constante de integración C actúa solo como un término de fase que produce una

traslación temporal. Por lo tanto, para estudiar el comportamiento de las energías cerca al punto de retorno es posible tomar $C = 0$ sin pérdida de generalidad, obteniendo

$$B = \frac{\sqrt{2}m}{\lambda \cosh(mt)}. \quad (5.14)$$

Utilizando (5.14), las expresiones para las energías cinética T y potencial U cerca al instante de retorno son:

$$\begin{aligned} T &= \frac{3}{2}\dot{B}^2 = \frac{3m^4}{\lambda^2} \operatorname{sech}^2(mt) \tanh^2(mt), \\ U &= 3 \left(\frac{\lambda}{4} B^4 - \frac{m^2}{2} B^2 \right) = \frac{3m^4}{\lambda^2} \left(\frac{1}{\cosh^4(mt)} - \frac{1}{\cosh^2(mt)} \right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

La figura 5.3 muestra el comportamiento de las energías del inflatón cerca al punto de retorno para la solución semi analítica (5.15) y una simulación numérica. En ambos casos, la energía potencial es positiva y en el instante del retorno anula a la energía cinética, produciendo una densidad de energía nula.

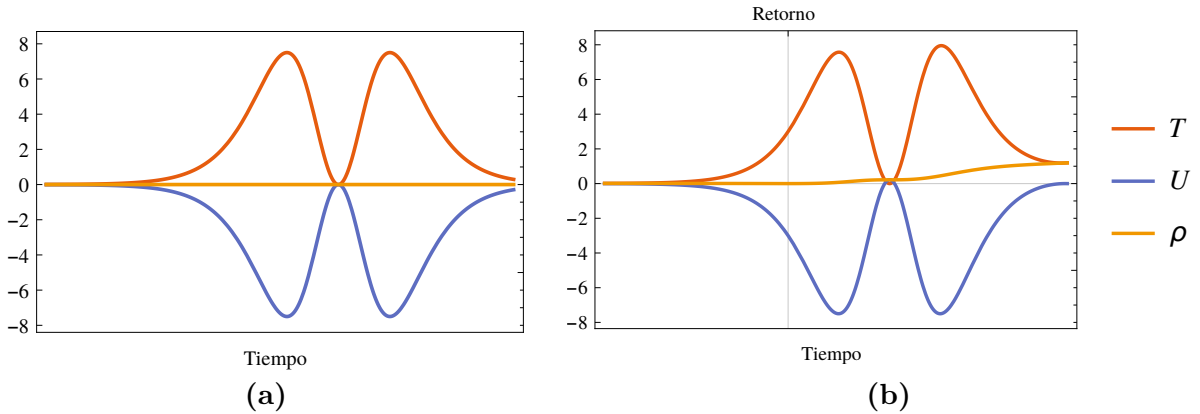


Figura 5.3: Evolución de las energías cerca del retorno para un Universo cíclico, donde los ejes verticales se encuentran en unidades de $10^{-11}m_p^4$. (a) Solución semi analítica (5.15) con $\lambda = 10^{-3}$ y $m = 10^{-4}m_p$. (b) Solución numérica con parámetros $\lambda = 10^{-3}$, $m = 10^{-4}m_p$, $\dot{B}_0 = 10^{-4}m_p^2$ y $\sigma = 10^{-4}m_p^4$. Los resultados analíticos coinciden con los resultados numéricos cerca al punto de retorno.

5.2.2. Factor de Escala

La evolución del factor de escala en cada ciclo del Universo es altamente sensible a los valores impuestos para m , σ , λ y \dot{B}_0 . Es posible que el Universo realice ciclos de igual amplitud o que incremente su tamaño máximo en cada ciclo, tal como se muestra en la figura 5.4. El tamaño máximo alcanzado por el Universo en cada ciclo dependerá de la cantidad de inflación producida en el rebote previo, la cual se incrementa al acercar la escala del rebote σ a la escala de Planck o al reducir el valor de λ .

Es interesante notar que todas las ecuaciones de la cosmología son invariantes ante inversiones temporales; es decir, no poseen una dirección temporal preferida (pasado o

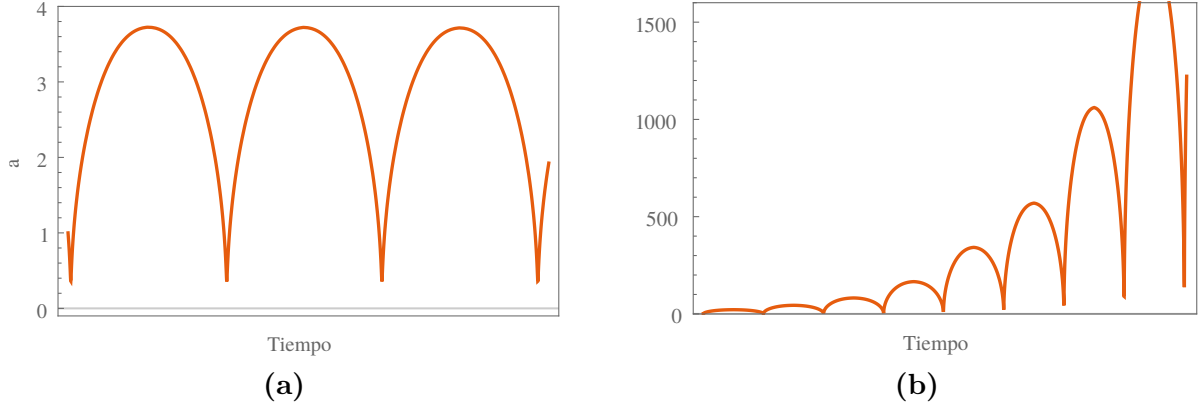


Figura 5.4: Algunas posibles evoluciones del factor de escala en un Universo cíclico. (a) El Universo se contrae y se expande, pero su tamaño no se incrementa. (b) El Universo incrementa sus tamaños máximo y mínimo en cada rebote.

futuro). Sin embargo, en algunas soluciones de Universos cíclicos el tamaño máximo del Universo se incrementa espontáneamente luego de cada rebote [38], tal como sucede en la figura 5.4b.

5.3. Universo con curvatura positiva

La ecuación de Friedmann de un Universo con curvatura κ (2.31) se puede modificar a altas energías añadiendo un término que permita modelar un rebote a una escala de energía σ , tal como se hizo en el capítulo anterior. La ecuación de Friedmann que describe un Universo curvo que sufre un rebote a una escala energética σ es

$$H^2 = \frac{\rho}{3m_p^2} \left(1 - \frac{\rho}{\sigma} \right) - \frac{\kappa}{a^2}. \quad (5.16)$$

Al igual que en todo Universo cíclico, el instante del rebote y el instante del retorno se dan cuando $H = 0$. Utilizando la relación (5.16), esto implica

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\rho}{3m_p^2} \left(1 - \frac{\rho}{\sigma} \right) - \frac{\kappa}{a^2} \\ &= a^2 \rho^2 - a^2 \sigma \rho + 3\kappa \sigma. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Resolviendo esta última ecuación cuadrática se obtiene que

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{a^2 \sigma \pm \sqrt{(a^2 \sigma)^2 - 4a^2(3m_p^2 \kappa \sigma)}}{2a^2} \\ &= \frac{\sigma}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12m_p^2 \kappa}{\sigma a^2}} \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Denotando a ρ_b como la densidad de energía en el rebote y ρ_r como la densidad de energía en el retorno, se espera que $\rho_b > \rho_r$ y por lo tanto de la ecuación (5.18) se tiene

$$\rho_b = \frac{\sigma}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{12m_p^2\kappa}{\sigma a_b^2}} \right) \quad \rho_r = \frac{\sigma}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{12m_p^2\kappa}{\sigma a_r^2}} \right), \quad (5.19)$$

donde a_b y a_r representan los valores del factor de escala en el instante del rebote y del retorno, respectivamente. Desde un punto de vista fenomenológico, se espera que la densidad de energía en el rebote sea mucho mayor que el término que representa la densidad de energía producida por la curvatura,

$$\sigma \gg \kappa \Rightarrow \frac{\kappa}{\sigma} \ll 1$$

Esta última expresión permite realizar una aproximación a la densidad de energía en el instante del rebote,

$$\begin{aligned} \rho_b &= \frac{\sigma}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{12m_p^2\kappa}{\sigma a_b^2}} \right) \\ &\approx \frac{\sigma}{2} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{2} \frac{12m_p^2\kappa}{\sigma a_b^2} \right) \right) \\ &\approx \sigma \left(1 - \frac{3m_p^2\kappa}{\sigma a_b^2} \right), \end{aligned} \quad (5.20)$$

y a la densidad de energía en el instante de retorno,

$$\begin{aligned} \rho_r &= \frac{\sigma}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{12m_p^2\kappa}{\sigma a_r^2}} \right) \\ &\approx \frac{\sigma}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{12m_p^2\kappa}{\sigma a_r^2} \right) \right) \\ &\approx \frac{3m_p^2\kappa}{a_r^2}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Estas dos últimas ecuaciones indican que en un Universo con curvatura positiva existen dos soluciones no nulas para (5.17) y ya no es necesario que la densidad de energía tome un valor nulo en el punto del retorno. Se puede verificar que en un Universo plano ($\kappa = 0$) las ecuaciones (5.19) se reducen a las soluciones $\rho_b = \sigma$ y $\rho_r = 0$ que se obtuvieron en la sección 5.2.

Tal como se vio en la sección anterior, el tamaño mínimo de un Universo cíclico a_b crece con cada ciclo. De la ecuación (5.19), esto significa que el término $\frac{12m_p^2\kappa}{\sigma a_b^2}$ decrece con

cada ciclo y, por lo tanto, la densidad de energía en el rebote ρ_b crece. El incremento de la energía del rebote está directamente ligado a un incremento en la cantidad de inflación, lo cual se traduce en un incremento en el número de e-folds producido en cada rebote. Esto significa que aún si en algún ciclo el número de e-folds es menor al mínimo requerido por las observaciones ($N_{min} = 60$), si las condiciones iniciales lo permiten, basta esperar una cantidad suficiente de tiempo para que en algún ciclo posterior el valor de N supere dicho mínimo. Esto tiene implicancias interesantes en la cosmología pues significa que la inflación puede crecer con cada ciclo y por lo tanto nuestro Universo podría provenir de un ciclo anterior en el cual el número de e-folds producido en el periodo inflacionario era menor y en consecuencia no se pudieron dar las condiciones necesarias para que se formen estructuras complejas como las que se observa hoy.

Por otro lado, el tamaño máximo a_r del Universo también crece con cada ciclo. De la ecuación (5.19), esto significa que el término $\frac{12m_p^2\kappa}{\sigma a_r^2}$ decrece en cada ciclo y, por lo tanto, la densidad de energía en el retorno ρ_r también decrece con cada ciclo, lo que significa que el Universo requiere alcanzar escalas de energía cada vez menores para realizar un retorno. Debido a que la separación entre las energías ρ_b (que aumenta con cada ciclo) y ρ_r (que disminuye con cada ciclo) aumenta en cada ciclo, se espera que el Universo requiera un tiempo cada vez mayor para alcanzar las escalas de energías que son requeridas para el retorno. Físicamente, esto se interpreta como que el tiempo de vida de cada ciclo crece a medida que el Universo cíclico evoluciona.

La figura 5.5 muestra la evolución en el tiempo de un Universo cíclico con curvatura positiva. Se puede notar que tanto el crecimiento del número de e-folds como el tiempo de vida de cada ciclo se incrementan, tal como se dedujo en los párrafos anteriores.

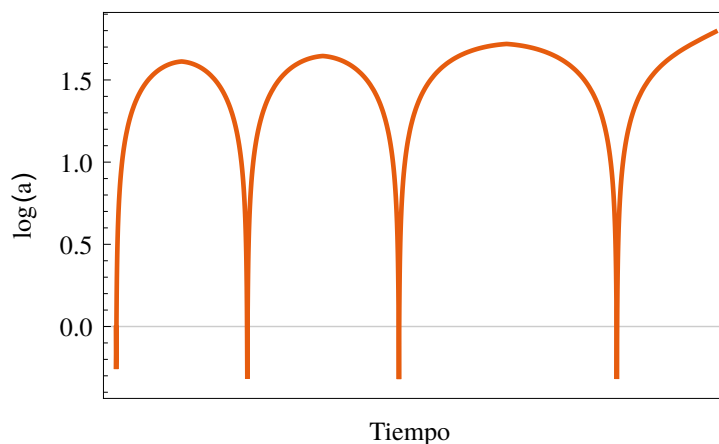


Figura 5.5: Evolución del factor de escala en un Universo cíclico con curvatura positiva. El número de e-folds en la expansión del Universo (parametrizada por la distancia entre dos picos sucesivos) y el tiempo de vida de cada ciclo crecen con el tiempo.

5.4. Universo con constante cosmológica negativa

La dinámica de un Universo con un rebote a la escala energética σ y con constante cosmológica negativa $-\Lambda$ está dada por la ecuación de Friedmann modificada

$$H^2 = \frac{\rho}{3m_p^2} \left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right) - \frac{\Lambda}{3}. \quad (5.22)$$

El rebote y el retorno del Universo se darán en el instante en el cual el parámetro de Hubble sea nulo,

$$0 = \frac{\rho}{3m_p^2} \left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right) - \frac{\Lambda}{3} \quad (5.23)$$

$$= \rho^2 - \sigma\rho + \sigma\Lambda m_p^2. \quad (5.24)$$

Esta última ecuación tiene por solución

$$\rho = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\sigma\Lambda m_p^2}}{2}. \quad (5.25)$$

Debido a que se espera que la densidad de energía en el rebote ρ_b sea mayor a la densidad de energía en el retorno ρ_r , estas densidades de energía en dichos instantes son

$$\rho_b = \frac{\sigma}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\Lambda m_p^2}{\sigma}}\right) \quad \rho_r = \frac{\sigma}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\Lambda m_p^2}{\sigma}}\right). \quad (5.26)$$

En un Universo cíclico, es natural esperar que la escala del rebote sea mucho mayor a la energía de la constante cosmológica, $\Lambda \ll \sigma$. En este caso, la densidad de energía en el instante del rebote se puede aproximar a

$$\begin{aligned} \rho_b &= \frac{\sigma}{2} \left(1 + \left(1 - \frac{2\Lambda m_p^2}{\sigma}\right)\right) \\ &\approx \sigma - \Lambda m_p^2 \end{aligned} \quad (5.27)$$

y la densidad de energía en el retorno a

$$\begin{aligned} \rho_r &= \frac{\sigma}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{2\Lambda m_p^2}{\sigma}\right)\right) \\ &\approx \Lambda m_p^2. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Notamos que las densidades de energía críticas dependen únicamente de la escala del rebote y del valor de la constante cosmológica. Estas densidades no cambian con los ciclos y, por lo tanto, es de esperar que la cantidad de inflación en cada rebote y el tiempo de vida de cada ciclo no cambien a medida que el Universo cíclico evoluciona. Cosmológicamente, esto significa que la cantidad de inflación observada en nuestro Universo debió ser la

misma que se dio en cada ciclo anterior. La figura 5.6 muestra la evolución del factor de escala en el caso de interés. Se puede notar que el tamaño mínimo del Universo crece rápidamente con cada ciclo y, a pesar de que la cantidad de inflación es constante, esto produce que el tamaño máximo que alcanza el Universo también crezca con el tiempo.

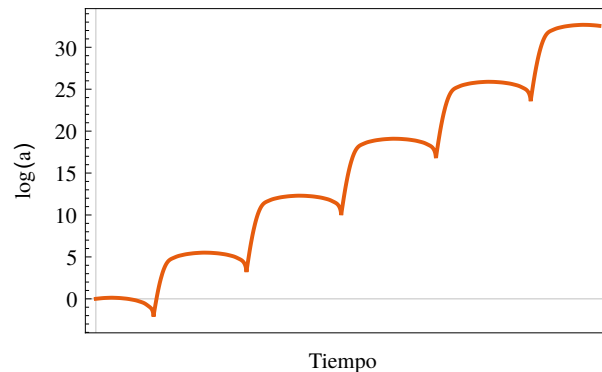


Figura 5.6: Evolución de un Universo cíclico en presencia de un campo escalar y una constante cosmológica negativa. Tanto la cantidad de inflación en cada rebote como el tiempo de vida de cada ciclo se mantienen constantes. El tamaño mínimo del Universo se incrementa rápidamente.

Capítulo 6

Histéresis en Universos cíclicos

Un sistema físico sufre histéresis cuando su estado depende de la historia de su evolución temporal. Este fenómeno se ve en forma natural en los materiales ferromagnéticos, los cuales pueden adquirir diferentes magnetizaciones bajo el mismo campo magnético, dependiendo de la forma en que el campo externo cambió en el pasado [12].

En el contexto de la cosmología, es posible encontrar modelos de universos cíclicos con campos escalares en los cuales existe una histéresis natural [39]. Dicha histéresis proviene de una asimetría en la ecuación de movimiento del campo

$$\ddot{B} + 3H\dot{B} + \frac{\partial U}{\partial B} = 0.$$

Durante la expansión, el término $3HB$ es positivo y en consecuencia reduce la energía cinética del campo. Esto significa que en algún instante la energía potencial U será mucho mayor a la energía cinética T y por lo tanto se cumplirá

$$p = T - U \approx -U \approx -(T + U) = -\rho. \quad (6.1)$$

Por otro lado, durante la contracción, el término $3HB$ es negativo y en consecuencia actúa como un agente que incrementa la energía cinética del campo. En consecuencia, en algún instante de la contracción se tendrá

$$p = T - U \approx T \approx T + U = \rho. \quad (6.2)$$

Las ecuaciones (6.1) y (6.2) indican que la presión no se comporta de la misma forma durante la contracción y la expansión. Debido a que la presión es una variable dinámica en un Universo cíclico, esta asimetría en la presión produce una asimetría entre los periodos de contracción y expansión que se refleja en un incremento (o disminución) del tamaño y la energía total del Universo. Este fenómeno se conoce como histéresis cosmológica y ha sido estudiada ampliamente en la literatura [40].

El papel de la presión se puede entender mejor estudiando la ecuación (1.27), a partir

de la cual se deduce que

$$\int pdV = - \int dM = -\delta M, \quad (6.3)$$

donde por convención con la literatura se ha utilizado M para representar a la energía E del Universo. De esta forma, el trabajo total sobre el Universo en un intervalo de tiempo depende exclusivamente de la variación de la energía en el Universo. Notamos que

$$\int pdV > 0 \Rightarrow \delta M < 0 \quad (6.4)$$

y por lo tanto la energía del Universo disminuye. Por otro lado, si

$$\int pdV < 0 \Rightarrow \delta M > 0 \quad (6.5)$$

y la energía total del Universo aumenta.

Debido a que el interés de este trabajo es estudiar los universos cíclicos, es conveniente estudiar el trabajo realizado por el campo a lo largo de un ciclo cosmológico completo. Físicamente, este trabajo es un indicador de cuánta histéresis sufre el Universo. Sea t_1 el instante en el cual el Universo posee un tamaño a_1 y t_2 un instante posterior en el cual el Universo posee un tamaño a_2 . De acuerdo a la ecuación (6.3), el negativo del trabajo realizado por el campo durante este intervalo de tiempo es

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} pdV &= \delta M|_{t_1}^{t_2} \\ &= M_2 - M_1 \\ &= \rho_2 \frac{4}{3} \pi a_2^3 - \rho_1 \frac{4}{3} \pi a_1^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi (\rho_2 a_2^3 - \rho_1 a_1^3), \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde ρ_1 y ρ_2 representan las densidades de energía del Universo en los instantes t_1 y t_2 , respectivamente. La ecuación (6.6) nos dice que existe una relación directa entre el trabajo realizado por el campo y el cambio en el tamaño del Universo.

La ecuación (6.6) se puede utilizar para encontrar una expresión para el cambio del tamaño máximo del Universo. Sea $t_1^{\text{máx}}$ el instante en el cual el Universo alcanza un tamaño máximo $a_1^{\text{máx}}$. Inmediatamente después del instante $t_1^{\text{máx}}$, el Universo se contrae y, después del correspondiente rebote, se expande hasta alcanzar un nuevo tamaño máximo $a_2^{\text{máx}}$ en un instante posterior $t_2^{\text{máx}}$. Durante este intervalo de tiempo, decimos que el Universo ha realizado un ciclo completo de contracción-expansión. Definimos el bucle de histéresis a lo largo de un ciclo completo de contracción-expansión como el trabajo realizado por el

campo entre dichos instantes:

$$\oint_{\text{máx}} pdV = \int_{t_1^{\text{máx}}}^{t_2^{\text{máx}}} pdV. \quad (6.7)$$

La Fig. 6.1a muestra esquemáticamente los instantes entre los cuales se realiza la integral del trabajo del campo en la ecuación (6.7).

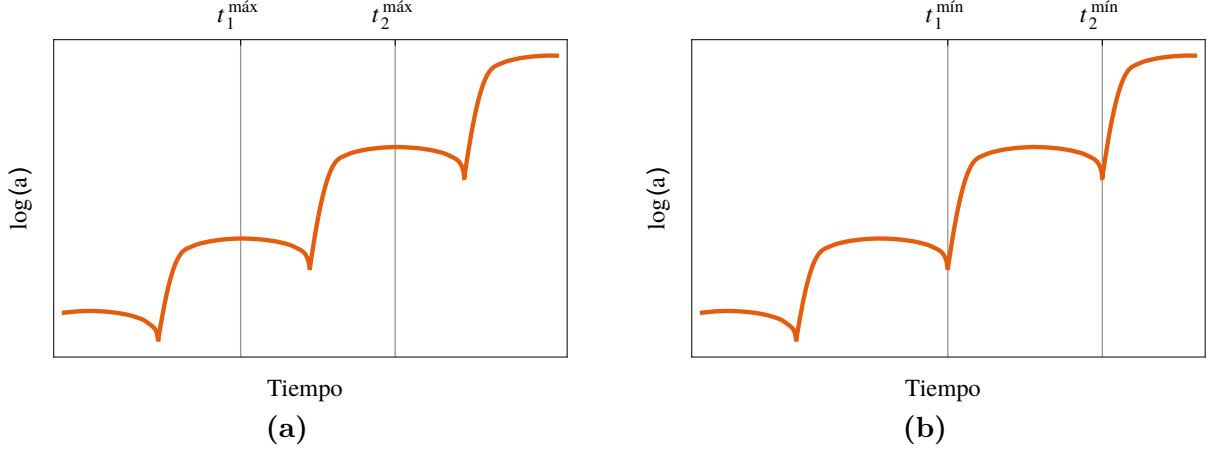


Figura 6.1: (a) Instantes que determinan el inicio y el final de un ciclo completo de contracción y expansión. La integral $\oint_{\text{máx}} pdV$ representa el trabajo total realizado por el campo entre dos máximos (puntos de retorno) sucesivos, representados por los instantes $t_1^{\text{máx}}$ y $t_2^{\text{máx}}$. (b) Instantes que determinan el inicio y el final de un ciclo completo de expansión-contracción. La integral $\oint_{\text{mín}} pdV$ representa el trabajo total realizado por el campo entre dos mínimos (puntos de rebote) sucesivos, representados por los instantes $t_1^{\text{mín}}$ y $t_2^{\text{mín}}$.

De acuerdo a las ecuaciones (6.6) y (6.7), el bucle de histéresis en un ciclo de contracción-expansión está dado por

$$-\oint_{\text{máx}} pdV = \frac{4}{3}\pi \left(\rho_2^{\text{máx}}(a_2^{\text{máx}})^3 - \rho_1^{\text{máx}}(a_1^{\text{máx}})^3 \right) \quad (6.8)$$

donde $\rho_1^{\text{máx}}$ y $\rho_2^{\text{máx}}$ representan las densidades de energía en los instantes sucesivos de retorno. La ecuación (6.8) indica que el bucle de histéresis en el ciclo de contracción-expansión depende solo de las características del Universo en los instantes de retorno. La forma explícita de esta ecuación dependerá del modelo cosmológico asumido.

Similarmente, es posible deducir una ecuación para el cambio en el tamaño mínimo del Universo. Utilizando un razonamiento similar al utilizado para la variación del tamaño máximo, el bucle de histéresis en un ciclo completo de expansión-contracción está dado por

$$-\oint_{\text{mín}} pdV = \frac{4}{3}\pi \left(\rho_2^{\text{mín}}(a_2^{\text{mín}})^3 - \rho_1^{\text{mín}}(a_1^{\text{mín}})^3 \right) \quad (6.9)$$

donde $\rho_1^{\text{mín}}$ y $\rho_2^{\text{mín}}$ representan las densidades de energía en los instantes sucesivos de

rebote. La Fig. 6.1b muestra esquemáticamente los instantes entre los cuales se evalúa la integral del trabajo del campo.

6.1. Potencial tipo Higgs

En el capítulo anterior se estudió la dinámica de un Universo cíclico en el cual el retorno era modelado por una energía potencial de tipo Higgs

$$U = \frac{3}{4}\lambda^2 B^4 - \frac{3}{2}m^2 B^2 \quad (6.10)$$

y se determinó que en los puntos de retorno, donde el Universo alcanza su tamaño máximo, la densidad de energía del Universo siempre es nula:

$$\rho_r = 0. \quad (6.11)$$

Utilizando la ecuación (6.8), se deduce que el bucle de histéresis en un ciclo de contracción-expansión también es nulo,

$$-\oint pdV = 0. \quad (6.12)$$

Esto significa que, a pesar de que la presión en la contracción es distinta a la presión en la expansión, el trabajo total del campo se hace nulo en un intervalo entre dos puntos de retorno sucesivos. Es interesante notar que en este caso, aún si no existe histéresis en el sentido definido por la ecuación (6.7), el tamaño del Universo sí puede crecer en cada rebote, como se vio en el capítulo anterior. Por lo tanto, la presencia de la histéresis no es un requisito indispensable para que el tamaño máximo del Universo se incremente en cada ciclo.

Por otro lado, si denotamos por a_b al factor de escala en el instante del rebote, de acuerdo a las ecuaciones (5.7) y (6.9) se tiene que en un ciclo de expansión-contracción

$$\begin{aligned} -\int_{\text{mín}} pdV &= \frac{4}{3}\pi \left(\rho_2^{\text{mín}}(a_2^{\text{mín}})^3 - \rho_1^{\text{mín}}(a_1^{\text{mín}})^3 \right) \\ &= \frac{4\pi}{3}(\sigma a_{2b}^3 - \sigma a_{1b}^3) \\ &= \frac{4\pi}{3}\sigma\delta(a_b)^3. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Esta última ecuación sugiere que la variación del tamaño mínimo varía de forma inversa a la densidad de energía del rebote,

$$\delta a_b \propto \sigma^{-1}, \quad (6.14)$$

y por lo tanto, mientras más cercana sea la energía del rebote a la energía de Planck, menor será el incremento del tamaño mínimo del Universo.

6.2. Universo con curvatura positiva

En el capítulo anterior se observó que es posible modelar un Universo cíclico utilizando un campo escalar y un término de curvatura positiva. En este caso, la ecuación de Friedmann toma la forma

$$H^2 = \frac{\rho}{3m_p^2} \left(1 - \frac{\rho}{\sigma} \right) - \frac{\kappa}{a^2}. \quad (6.15)$$

Utilizando las ecuaciones (5.21) y (6.8) y denotando por a_r al valor del factor de escala en el instante del retorno, el bucle de histéresis de contracción y expansión en este tipo de universos es

$$\begin{aligned} - \oint_{\text{máx}} p dV &= \frac{4}{3} \pi \left(\rho_2^{\text{máx}} (a_2^{\text{máx}})^3 - \rho_1^{\text{máx}} (a_1^{\text{máx}})^3 \right) \\ &= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{3m_p^2 \kappa}{a_{2r}^2} a_{2r}^3 - \frac{3m_p^2 \kappa}{a_{1r}^2} a_{1r}^3 \right) \\ &= 4\pi m_p^2 \kappa (a_{2r} - a_{1r}) \\ &= 4\pi m_p^2 \kappa \delta a_r, \end{aligned} \quad (6.16)$$

donde a_{r2} y a_{r1} representan los tamaños del Universo en los instantes sucesivos de retorno. Notamos que la variación del tamaño máximo del Universo en un ciclo de contracción-expansión no depende de la escala del rebote, pero sí depende inversamente del valor de la curvatura del Universo y del bucle de histéresis. Por otro lado, el incremento en el tamaño del Universo depende directamente de la asimetría entre las presiones en la expansión y la contracción del Universo, representada por el bucle de histéresis; mientras mayor sea dicha asimetría, mayor será el incremento del tamaño del Universo.

Por otro lado, de acuerdo a las ecuaciones (5.20) y (6.9),

$$\begin{aligned} - \oint_{\text{mín}} p dV &= \frac{4}{3} \pi \left(\rho_2^{\text{mín}} (a_2^{\text{mín}})^3 - \rho_1^{\text{mín}} (a_1^{\text{mín}})^3 \right) \\ &= \frac{4}{3} \pi \left(\sigma \left(1 - \frac{3m_p^2 \kappa}{\sigma a_{b2}} \right) a_{b2}^3 - \sigma \left(1 - \frac{3m_p^2 \kappa}{\sigma a_{b1} a_{b1}^3} \right) \right) \\ &= \frac{4\pi \sigma}{3} \left(a_{b2}^3 - a_{b1}^3 - \frac{3m_p^2 \kappa}{\sigma} (a_{b2} - a_{b1}) \right) \\ &\approx \frac{4\pi}{3} \sigma (a_{b2}^3 - a_{b1}^3) \\ &\approx \frac{4\pi}{3} \sigma \delta (a_b)^2, \end{aligned} \quad (6.17)$$

donde a_{b1} y a_{b2} representan los valores del factor de escala en los instantes del rebote y se ha asumido que la contribución de la curvatura es lo suficientemente menor a la escala del rebote como para despreciar el término que la involucra. Notamos que el cambio en los tamaños mínimos del Universo en dos ciclos consecutivos depende directamente de el

bucle de histéresis y también es inversamente proporcional a la escala del rebote,

$$\delta(a_b)^2 \propto \sigma^{-1}, \quad (6.18)$$

lo cual significa que el cambio en el tamaño mínimo del Universo (al instante del rebote) disminuye con la energía del rebote. Debido a que el tamaño mínimo tiende a crecer, esto implica que el aumento del tamaño mínimo del Universo decrece con la energía del rebote.

6.3. Universo con constante cosmológica

Un Universo cíclico en presencia de un campo escalar y con constante cosmológica negativa se puede modelar según la ecuación (5.22),

$$H^2 = \frac{3\rho}{m_p^3} \left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right) - \frac{\Lambda}{3}.$$

De acuerdo a las ecuaciones (5.28) y (6.8), el bucle de histéresis en un ciclo de contracción-expansión está dado por

$$\begin{aligned} - \oint_{\text{máx}} p dV &= \frac{4}{3} \pi \left(\rho_2^{\text{máx}} (a_2^{\text{máx}})^3 - \rho_1^{\text{máx}} (a_1^{\text{máx}})^3 \right) \\ &= \frac{4\pi}{3} \left(\Lambda m_p^2 a_{r2}^3 - \Lambda m_p^2 a_{r1}^3 \right) \\ &= \frac{4\pi \Lambda m_p^2}{3} (a_{r2}^3 - a_{r1}^3) \\ &= \frac{4\pi \Lambda m_p^2}{3} \delta(a_r)^3. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Notamos que el incremento en el tamaño máximo del Universo depende inversamente del valor de la constante cosmológica y no es influido por la naturaleza del rebote siempre y cuando se tenga $\Lambda \ll \sigma$; esta condición es natural de esperar en un Universo en el cual la constante cosmológica domina solo a grandes escalas.

Por otro lado, de las ecuaciones (5.27) y (6.9), el bucle de histéresis en un ciclo de

expansión-contracción es

$$\begin{aligned}
-\oint_{\text{mín}} p dV &= \frac{4}{3}\pi \left(\rho_2^{\text{mín}} (a_2^{\text{mín}})^3 - \rho_1^{\text{mín}} (a_1^{\text{mín}})^3 \right) \\
&= \frac{4}{3}\pi \left((\sigma - \Lambda m_p^2) a_{b2}^3 - (\sigma - \Lambda m_p^2) a_{b1}^3 \right) \\
&= \frac{4}{3}\pi \sigma \left(1 - \frac{\Lambda m_p^2}{\sigma} \right) (a_{b2}^3 - a_{b1}^3) \\
&\approx \frac{4}{3}\pi \sigma (a_{b2}^3 - a_{b1}^3) \\
&\approx \frac{4}{3}\pi \sigma \delta(a_b)^3
\end{aligned} \tag{6.20}$$

donde se ha despreciado el término que involucra la constante cosmológica pues $\Lambda \ll \sigma$. Nuevamente notamos que el incremento en el tamaño mínimo del Universo disminuye con el incremento de la escala del rebote,

$$\delta(a_b)^3 \propto \sigma^{-1}, \tag{6.21}$$

y que también depende del bucle de histéresis y por lo tanto de la asimetría en la presión durante la expansión y la contracción.

Conclusiones

El primer resultado obtenido en la presente tesis fue mostrar que es posible reducir la dinámica de tres campos vectoriales de la misma magnitud, ortogonales y no mínimamente acoplados a la gravedad a la de un solo campo escalar efectivo, denominado inflatón, el cual determina la evolución del Universo. De esta manera, se hace posible estudiar la cinemática del Universo en presencia de campos vectoriales utilizando la cinemática del campo escalar.

Se demostró analítica y numéricamente que la presencia del inflatón obtenido previamente es capaz de producir de forma natural un periodo inflacionario (expansión acelerada) luego de un Big Bounce, aún si inicialmente su energía es mucho menor a la escala energética del rebote. Esto implica que los periodos inflacionarios se pueden producir sin necesidad de recurrir a condiciones iniciales que involucran colocar al inflatón con una energía potencial elevada.

Por medio de un estudio analítico de la cantidad de inflación luego del rebote, se obtuvo que esta aumenta con la escala energética del rebote y disminuye con la masa del inflatón. Esto implica que la relación entre la escala del rebote y la masa del inflatón es fundamental si se busca reproducir periodos inflacionarios que sean coherentes con las observaciones cosmológicas.

Se aplicaron los resultados obtenidos para el Big Bounce a universos cíclicos y se observó que en los casos de potencial tipo Higgs y de curvatura positiva la cantidad de inflación crece en cada ciclo y con ella los tamaños máximos y mínimos del Universo. Por otro lado, en el caso de la constante cosmológica, se determinó que la cantidad de inflación es constante en cada ciclo, pero el tamaño mínimo del mismo se incrementa rápidamente; el efecto combinado de estos fenómenos provoca también un incremento gradual del tamaño del Universo.

El estudio de la histéresis en universos cíclicos permitió demostrar que el incremento del tamaño mínimo del universo en los tres modelos cosmológicos estudiados decrece siempre al incrementar la escala energética del rebote. Por otro lado, en el modelo del potencial tipo Higgs el incremento en el tamaño máximo del Universo disminuye al incrementar la curvatura del mismo y en el modelo de constante cosmológica negativa dicho incremento disminuye al incrementar el valor de la constante cosmológica. Estas relaciones sugieren que el incremento de los tamaños mínimos y máximo del Universo en cada ciclo no dependen de las condiciones iniciales del Universo, únicamente de los parámetros relevantes de cada modelo.

Bibliografía

- [1] Taylor, E. F., Wheeler, J. A. Spacetime physics. Macmillan, 1992.
- [2] Ryder, L. Introduction to general relativity. Cambridge University Press, 2009.
- [3] Maartens, R. Is the universe homogeneous? *Phil. Trans. R. Soc. A*, **369** (1957), 5115–5137, 2011.
- [4] Schutz, B. A first course in general relativity. Cambridge university press, 2009.
- [5] Springel, V., White, S. D., Jenkins, A., Frenk, C. S., Yoshida, N., Gao, L., *et al.* Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars. *Nature*, **435** (7042), 629, 2005.
- [6] Ade, P. A., Aghanim, N., Arnaud, M., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., *et al.* Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, **594**, A13, 2016.
- [7] Wright, E. L. Theoretical overview of cosmic microwave background anisotropy. *arXiv preprint astro-ph/0305591*, 2003.
- [8] Mukhanov, V. Physical foundations of cosmology. Cambridge university press, 2005.
- [9] Liddle, A. An introduction to modern cosmology. John Wiley & Sons, 2015.
- [10] Hubble, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **15** (3), 168–173, 1929.
- [11] Bertone, G., Hooper, D., Silk, J. Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints. *Physics Reports*, **405** (5-6), 279–390, 2005.
- [12] Jackson, J. D. Electrodynamics. Wiley Online Library, 1975.
- [13] Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., Clocchiatti, A., Diercks, A., Garnavich, P. M., *et al.* Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, **116** (3), 1009, 1998.
- [14] Copeland, E. J., Sami, M., Tsujikawa, S. Dynamics of dark energy. *International Journal of Modern Physics D*, **15** (11), 1753–1935, 2006.
- [15] Padilla, A. Lectures on the cosmological constant problem. *arXiv preprint arXiv:1502.05296*, 2015.

- [16] Joyce, A., Jain, B., Khoury, J., Trodden, M. Beyond the cosmological standard model. *Physics Reports*, **568**, 1–98, 2015.
- [17] Starobinsky, A. A. Relict gravitation radiation spectrum and initial state of the universe. *JETP lett*, **30** (682-685), 131–132, 1979.
- [18] Guth, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, **23** (2), 347, 1981.
- [19] Linde, A. D. A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Physics Letters B*, **108** (6), 389–393, 1982.
- [20] Albrecht, A., Steinhardt, P. J. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. *Physical Review Letters*, **48** (17), 1220, 1982.
- [21] Liddle, A. R., Lyth, D. H. Cosmological inflation and large-scale structure. Cambridge University Press, 2000.
- [22] Kiefer, C. Quantum gravity—a short overview. En: Quantum gravity, págs. 1–13. Springer, 2006.
- [23] Ade, P., Aghanim, N., Arnaud, M., Arroja, F., Ashdown, M., Aumont, J., *et al.* Planck 2015 results-xx. constraints on inflation. *Astronomy & Astrophysics*, **594**, A20, 2016.
- [24] Kofman, L., Linde, A., Starobinsky, A. A. Reheating after inflation. *Physical Review Letters*, **73** (24), 3195, 1994.
- [25] Baumann, D. Tasi lectures on inflation. *arXiv preprint arXiv:0907.5424*, 2009.
- [26] Rudd, J., Whelan, K. Modeling inflation dynamics: A critical review of recent research. *Journal of Money, Credit and Banking*, **39** (s1), 155–170, 2007.
- [27] Hobson, M. P., Efstathiou, G. P., Lasenby, A. N. General relativity: an introduction for physicists. Cambridge University Press, 2006.
- [28] Carroll, S. M. Spacetime and geometry. An introduction to general relativity. Addison Wesley, 2004.
- [29] Martin, J., Ringeval, C., Vennin, V. Observing inflationary reheating. *Physical review letters*, **114** (8), 081303, 2015.
- [30] Srednicki, M. Quantum field theory. Cambridge University Press, 2007.
- [31] Ford, L. Inflation driven by a vector field. *Physical Review D*, **40** (4), 967, 1989.
- [32] Armendariz-Picon, C. Could dark energy be vector-like? *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2004** (07), 007, 2004.
- [33] Golovnev, A., Mukhanov, V., Vanchurin, V. Vector inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2008** (06), 009, 2008.

- [34] Dimopoulos, S., Kachru, S., McGreevy, J., Wacker, J. G. N-flation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2008** (08), 003, 2008.
- [35] Wands, D. Multiple field inflation. En: Inflationary cosmology, págs. 275–304. Springer, 2008.
- [36] Maartens, R., Koyama, K. Brane-world gravity. *Living Reviews in Relativity*, **13** (1), 5, 2010.
- [37] McDonald, J. Reheating temperature and inflaton mass bounds from thermalization after inflation. *Physical Review D*, **61** (8), 083513, 2000.
- [38] Sahni, V., Shtanov, Y., Toporensky, A. Arrow of time in dissipationless cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, **32** (18), 182001, 2015.
- [39] Sahni, V., Toporensky, A. Cosmological hysteresis and the cyclic universe. *Physical Review D*, **85** (12), 123542, 2012.
- [40] Choudhury, S., Banerjee, S. Hysteresis in the sky. *Astroparticle Physics*, **80**, 34–89, 2016.