

MANUEL BARRANTES LÓPEZ Y MARÍA CONSUELO BARRANTES MASOT

# GEOMETRÍA

¡Prohibido no tocar!

MANUAL PARA PROFESORES DE PRIMARIA



UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA





# **Geometría**

## **¡Prohibido no tocar!**

### **Manual para profesores de Primaria.**

**Manuel Barrantes López**

**María Consuelo Barrantes Masot**

Esta obra ha sido objeto de una doble evaluación, una interna llevada a cabo por el Consejo Asesor del Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura, y otra externa, efectuada por evaluadores independientes de reconocido prestigio en el campo temático de la misma.

Edita: Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones  
C/ Caldereros, 2 - Planta 3ª. 10071 Cáceres (España).  
Tel. 927 257 041; Fax 927 257 046  
E-mail: [publicac@unex.es](mailto:publicac@unex.es)  
<http://www.unex.es/publicaciones>

ISBN: 978-84-09-25220-6

Maquetación: María Valero Espacio para La Moderna editora.  
Diseño de portada: Paco Macgregor para La Moderna editora.

[www.librerialamoderna.com](http://www.librerialamoderna.com)

Cáceres, 2020



# ÍNDICE

|  |    |
|--|----|
| Prólogo.....   | 8  |
| Tema 1. Enseñanza y aprendizaje de la Geometría en Primaria.....                             | 11 |
| 1.1. El conocimiento geométrico.....   | 11 |
| 1.2. La enseñanza-aprendizaje de la geometría.....   | 12 |
| 1.3. El currículo de Primaria para la enseñanza de la geometría.....                         | 14 |
| 1.3.1. Currículo geométrico en Primaria.....   | 17 |
| 1.4. Las metodologías de resolución de problemas y de laboratorio.....                       | 19 |
| 1.4.1. Metodología de resolución de problemas.....   | 20 |
| 1.4.2. Metodología de laboratorio.....   | 23 |
| 1.5. Las competencias básicas en relación con la enseñanza- aprendizaje de la geometría..... | 24 |
| 1.6. El aprendizaje en la enseñanza de la geometría.....                                     | 26 |
| 1.6.1. Niveles de Van Hiele.....   | 27 |
| 1.6.2. Fases de aprendizaje.....   | 31 |
| Tema 2. Orientación espacial.....  | 35 |
| 2.1. Necesidad de orientarnos.....   | 35 |
| 2.2. El espacio.....   | 36 |
| 2.3. El alumno en el espacio.....  | 37 |
| 2.4. La percepción del espacio.....  | 38 |
| 2.5. Necesidad de referencias para orientarse.....   | 39 |
| 2.6. Orientación en su propio cuerpo.....  | 41 |
| 2.7. Nociones de orientación en el entorno próximo del alumno.....                           | 43 |
| 2.8. Otros conceptos espaciales.....   | 46 |
| 2.9. La orientación de los objetos en el espacio.....  | 48 |
| 2.10. Localización en espacios más grande. Planos y mapas.....                               | 52 |
| Tema 3. Recursos para la enseñanza-aprendizaje de la geometría.....                          | 59 |
| 3.1. Introducción.....   | 59 |
| 3.2. La realidad como recurso. Entorno natural y social.....                                 | 61 |
| 3.3. La Geometría y el Arte.....   | 62 |
| 3.4. El dibujo en geometría.....   | 70 |

|  |     |
|--|-----|
| 3.5. Visualización en Geometría. Percepción e intuición espacial.....                          | 71  |
| 3.6. Las Rutas Geométricas como recurso didáctico.....   | 81  |
| Tema 4. Materiales manipulativos para la enseñanza de la geometría y la medida. I parte .....  | 86  |
| 4.1. Introducción.....   | 86  |
| 4.2. Importancia de la utilización de los materiales manipulativos. Modelos.....               | 86  |
| 4.3. Materiales constructores de geometría plana .....   | 88  |
| 4.3.1. Geometría del papel .....   | 88  |
| 4.3.2. Tangrams.....   | 99  |
| 4.3.3. Geoplanos .....   | 104 |
| 4.3.4. Tramas.....   | 109 |
| 4.3.5. Mecano.....   | 113 |
| 4.3.6. Espejos .....   | 119 |
| Tema 5. Materiales manipulativos para la enseñanza de la geometría y la medida. II parte ..... | 129 |
| 5.1. Materiales constructores en Geometría espacial .....                                      | 129 |
| 5.1.1. Material Plot, Polydron y Orbital.....  | 129 |
| 5.2. Modelos construidos.....  | 132 |
| 5.2.1. Sólidos de madera, plásticos o transparentes .....                                      | 133 |
| 5.2.2. Desarrollos planos.....   | 139 |
| 5.2.3. Cubos encajables.....   | 146 |
| 5.2.4. Mecanismo generador de figuras de revolución. ....                                      | 150 |
| Tema 6. Recursos tecnológicos en la enseñanza de la geometría.....                             | 152 |
| 6.1. Reflexiones sobre los recursos tecnológicos .....   | 152 |
| 6.2. Las imágenes .....  | 153 |
| 6.3 Herramientas TICs.....   | 162 |
| 6.4. Recursos tecnológicos orientados al estudiante para profesor .....                        | 167 |
| Tema 7. Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de geometría .....                    | 171 |
| 7.1. Introducción.....   | 171 |
| 7.2. Errores y esquemas conceptuales .....   | 172 |
| 7.3. La simbología visual del concepto .....   | 173 |
| 7.4. Distractores de orientación.....  | 175 |
| 7.5. Distractores de estructuración .....  | 178 |

|  |     |
|--|-----|
| 7.6. Errores debido a los nombres y a las imágenes reales del concepto ..... | 182 |
| 7.7. Errores al definir los conceptos .....                                  | 183 |
| 7.8. Errores al realizar las clasificaciones .....                           | 184 |
| 7.9. Recomendaciones metodológicas para evitar los errores .....             | 187 |
| Bibliografía .....   | 189 |
| Webgrafía.....   | 194 |

## **Geometría ¡Prohibido no tocar!**

Este manual está pensado para preparar convenientemente a los estudiantes para profesores de Primaria en el contenido didáctico de la Geometría de acuerdo con las metodologías y currículos actuales, aunque también es válido para los maestros o profesores en ejercicio que estén interesados en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría.

El objetivo es concienciar a los profesores y a los futuros profesores de Primaria de que existen herramientas suficientes para poder desarrollar el currículo sin la necesidad de considerar el libro de texto como el elemento único de la enseñanza- aprendizaje de estas materias. La experiencia como docente nos hace organizar nuestra enseñanza didáctica a partir del espacio, como la base primordial y suficientemente sólida para encarar todos los conceptos geométricos. El manejo de materiales, manuales o informáticos, ofrece a los alumnos una variedad de formas para llegar a los contenidos geométricos basadas en la observación de las propiedades y en el posterior análisis. Nuestro lema ha sido siempre el título del libro: *¡Prohibido no tocar!*

Aplicamos un método activo basado en la experiencia, la participación mediante casos particulares que van sugiriendo las generalizaciones correspondientes y el razonamiento globalizado. Esta forma de presentar las actividades nos aleja de la enseñanza tradicional, centrada en el aprendizaje de definiciones y fórmulas que conllevan una aritmetización de la geometría así como en el cálculo mecánico de operaciones, totalmente alejadas de la intuición y el sentido geométrico. El conocimiento y uso de los materiales didácticos específicos, para la construcción de los distintos contenidos, transforman el aprendizaje en algo consistente y riguroso que afianzan y cambia las concepciones del profesor y el alumno hacía una tendencia más constructivista de la enseñanza.

Comentamos los diferentes temas del manual para posteriormente exponer la metodología utilizada para las muchas actividades incluidas en este libro.

El primer tema aborda la panorámica general sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en Primaria. Comenzamos reflexionando sobre el conocimiento geométrico y el espacio conformado por tres elementos, que son: la posición, las formas y los cambios. Pasamos a conocer la evolución que se ha producido en los últimos años, que va de un aprendizaje centrado en los contenidos a un aprendizaje que tiene como eje el alumno. En el tema segundo, hablamos sobre el elemento posición,



que está relacionado con la orientación espacial, dónde el individuo debe situarse él mismo en el espacio, para posteriormente ubicar los objetos y establecer direcciones mediante mapas y planos.

Los recursos y materiales para la enseñanza-aprendizaje de la geometría son tratados en el tercer tema. Presentamos un marco general, elaborado y específico, que permite integrar las distintas aportaciones teóricas, y que lleva al alumnado a considerar la Didáctica de la Geometría como una materia que se propone analizar y actuar sobre los fenómenos correspondientes al aprendizaje y la enseñanza de la geometría. Los recursos y los materiales son herramientas que nos facilitan la descripción de situaciones o la identificación de variables del concepto a estudiar. Además, ayudan en determinadas actividades geométricas que de otra manera serían difíciles de visualizar y comprender.

El acuerdo general entre investigadores y docentes es recomendar el empleo de materiales experimentales desde los niveles más bajos. El reto no consiste en *hacer geometría* sino en cómo plantear actividades geométricas sobre materiales concretos que permitan construir una estructura mental adecuada en avance hacia conocimientos superiores. En el tema cuarto, comentamos la importancia de la utilización de los materiales manipulativos y los modelos, para pasar a desarrollar distintos materiales constructores de geometría plana. En el tema quinto, continuamos con los materiales constructores para desarrollar la Geometría espacial. También estudiamos los modelos construidos, materiales que sirven directamente para observar y concretar conceptos y profundizar en propiedades que, por otro lado, serían difíciles de mostrar.

Abordamos, en el tema sexto, los recursos tecnológicos en la enseñanza de la geometría, pues las investigaciones y las experiencias actuales nos muestran que la utilización de una tecnología adecuada, puede hacer que los alumnos aprendan una mayor cantidad de contenidos matemáticos de una forma más significativa. Dichos recursos suponen, cada vez más, un proceso de innovación y de adecuación de la metodología y de las actividades utilizadas por el profesor en el aula.

Una vez estudiados los distintos recursos y materiales, afrontamos, en el tema séptimo, los distintos obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de geometría. En las enseñanzas de tendencia tradicional y en los libros de textos, es frecuente encontrarse con ciertas presentaciones sobre las figuras y los conceptos geométricos que crean esquemas mentales inadecuados para que el alumno desarrolle un pensamiento abierto y divergente. Dichas presentaciones obstaculizan los procesos de abstracción y la agilidad en el manejo de ideas y contenidos. En este tema tratamos los errores y esquemas conceptuales en la mente de los alumnos, relacionados con los libros de textos y la poca utilización de materiales.

### **Metodología utilizada para la inclusión de actividades**

El libro contiene en cada tema un número suficiente de actividades que pueden ser útiles tanto para los profesores como para los estudiantes para profesores, para su reflexión y aprendizaje del trabajo en el aula. Además, se incluyen actividades específicas para los alumnos de Primaria de todos los niveles, orientadas también al aprendizaje y análisis de los diferentes contenidos que se trabajan en el programa de Primaria. Las actividades planteadas a los alumnos, acordes con las tendencias actuales, están orientadas a prepararlos, de una manera práctica y útil, para su vida ordinaria y, posteriormente, para su vida laboral. Se busca que haya una conjunción práctica entre la escuela y la sociedad en la que se desenvuelve el alumno. Por ello, se relaciona la Geometría con materias propias de las matemáticas escolares como la Medida y con materias del currículo como las Ciencias Sociales, Naturales y Artísticas entre otras.

El texto se culmina con una extensa bibliografía y webgrafía en la que el lector puede ahondar más en sus conocimientos sobre cualquier tema tratado.

Manuel Barrantes López  
Consuelo Barrantes Masot

## Tema 1. Enseñanza y aprendizaje de la Geometría en Primaria

### 1.1. El conocimiento geométrico

Hay una colección de actividades matemáticas que son necesarias y aparecen en todas las culturas. Estas tareas podemos considerarlas como las necesidades matemáticas que una persona debe satisfacer y dominar, y son: contar, localizar, medir y explicar.

Como todos sabemos, **contar** se refiere a establecer una relación íntima entre el individuo y el mundo de los números de forma que el alumno no tenga problemas en el entorno familiar y laboral en el que pasa el mayor tiempo de su vida.

Localizar y medir suponen actividades más directamente relacionados con nuestro estudio geométrico y de medida, donde el individuo debe saber interpretar y manejar mapas, planos para poder ubicarse y establecer direcciones a la vez que realiza medidas de todo tipo, dinero, tiempo, grupos de personas, ...

Explicar, sin embargo, se entiende como la aportación que el vocabulario matemático hace al lenguaje cotidiano, incluyendo en dicho lenguaje una serie de vocablos que nos permiten ser más precisos, establecer ordenaciones de argumentos, deducciones lógicas, información numérica; conceptos que cada vez son más utilizados en las conversaciones y en los medios de comunicación actuales.

Por otra parte, el espacio y el tiempo son los dos parámetros que enmarcan y organizan nuestra vida espacial. Desde que nacemos nos vamos posicionando en el espacio mediante experiencias de vida de forma que vamos poco a poco dominándolo y ubicándonos en él. El conocimiento del espacio implica no solamente elementos geométricos sino de otros elementos como físicos, visuales, percepción,...

Desde el punto de vista de la Geometría, el espacio conforma tres elementos que son: la posición, las formas y los cambios.

- La **posición** está relacionada con la orientación espacial, dónde el individuo debe situarse él mismo en el espacio. Después debe situar los objetos y establecer direcciones mediante la interpretación y ubicación en mapas y planos, mediante el establecimiento de un sistema de coordenadas.

- El dominio de **las formas** pasa por reconocerlas, por el análisis de sus elementos y por la posterior clasificación, para establecer categorías utilizables en la vida cotidiana y laboral.

- **Los cambios** se refieren a las transformaciones que se realizan tanto de posición como de forma. El individuo debe saber reconocer los cambios (reflexiones, traslaciones, giros y semejanzas) de forma o de posición de distintos objetos. Dichos cambios se pueden producir en la vida real, en el entorno, o en el mismo arte, que está íntimamente relacionado con las figuras y cuerpos.

Estos tres elementos no son independientes, sino que están íntimamente ligados, así la identificación de una figura que corresponde al dominio de las formas pasa por observar la posición relativa de los elementos que componen esa figura. De la misma manera, realizar una transformación implica un cambio de posición y un reconocimiento de la forma.

A partir de estas reflexiones podemos llegar a deducir que el conocimiento geométrico no es dar una mera información sobre un tema de Geometría sino que presupone explorar de forma racional el espacio, para comparar los elementos observados y así poder establecer relaciones entre ellos. Dicha exploración directa lleva implícitas las actividades de contar, localizar, medir y explicar, así como la utilización del lenguaje, que al expresar verbalmente todos estos procesos consigue interiorizar el conocimiento adquirido.

**Aprender geometría** implica adquirir un conocimiento geométrico que se debe conseguir partiendo de la exploración directa. A partir de los tres elementos citados, el conocimiento geométrico adquiere una mayor “madurez” mediante actividades tales como el descubrimiento de las propiedades de las figuras y la construcción de modelos que representan dichas propiedades. De los resultados obtenidos, se elaboran conclusiones que nos pueden llevar a formular y conocer otras leyes más generales.

## **1.2. La enseñanza-aprendizaje de la geometría**

En los últimos años, se ha puesto de manifiesto en todos los ámbitos educativos, enseñanzas obligatoria y no obligatoria, un gran interés por potenciar la enseñanza-aprendizaje de la geometría.

Si hacemos un poco de historia sobre la enseñanza de la geometría en las últimas décadas podemos observar que esta enseñanza se caracterizaba por:

- Una fuerte tendencia a la memorización de conceptos y propiedades que muchas veces se basaban en otros conceptos anteriores.
- La resolución automática de problemas en la que se trataban aspectos métricos (aritmetización).
- Una exclusión temprana de la intuición como acceso al conocimiento geométrico.

Estas características de la enseñanza de la geometría daban lugar a una serie de inconvenientes entre los que podemos destacar las grandes dificultades de comprensión de los conceptos por parte de los alumnos, que implicaba un fuerte desánimo en el profesor interesado de que sus alumnos aprendan geometría. Actualmente, esta materia ha pasado de ser considerada una materia secundaria a ser una disciplina importante. Uno de los principales cambios en los últimos currículos oficiales de las Matemáticas escolares, ha sido precisamente la recuperación de la Geometría, no en el sentido tradicional como materia de contenidos, sino como disciplina mediante la que podemos conseguir un mejor conocimiento del espacio, como fuente de modelos y situaciones problemáticas útiles en otros contextos o contenidos matemáticos.

Así, la principal finalidad de la enseñanza-aprendizaje de la geometría es conectar a los alumnos con el mundo en el que se mueven pues el conocimiento, la intuición y las relaciones geométricas resultan muy útiles en la vida cotidiana, para ubicarse en el espacio, reconocimiento de formas, diseño, arte o estudios relacionados con las ciencias,... como veremos en el desarrollo de los distintos temas posteriores. Por tanto, proponemos dos grandes objetivos para la enseñanza de la geometría. Por una parte, desarrollar su adecuación al medio ambiente, es decir, dar oportunidades para que el alumno explore el espacio tridimensional: la posición, las formas y los cambios, y por otra, prepararlo para aprendizajes superiores, esto es, familiarizarles con cuestiones que surgirán en un futuro posterior, mediante un enfoque basado en el razonamiento lógico.

La Geometría tiene una gran influencia en el desarrollo del alumno, sobre todo en las capacidades relacionadas con la comunicación y la relación con el entorno. Es una materia especialmente importante en esas edades en las que el alumno necesita verificar mediante la manipulación de objetos reales, pues esto influye en el desarrollo posterior de las capacidades matemáticas necesarias. La capacidad espacial de los alumnos es muchas veces superior a su destreza numérica e impulsar y mejorar esta capacidad junto con el dominio de los conceptos y el lenguaje geométrico, le posibilita para aprender mejor las ideas numéricas e incluso otros temas más avanzados.

La enseñanza de la geometría debe proponer desde la edad infantil aquellos contenidos útiles en el futuro, desarrollados mediante una metodología activa y manipulativa en la que el alumno realice razonamientos, representaciones, relaciones y resolución de actividades. Esta metodología favorece y desarrolla una serie de capacidades como la percepción visual, la expresión verbal, el razonamiento lógico y la resolución de problemas.

En Primaria, debemos enseñar geometría para todos, independientemente del futuro trabajo que el alumno desarrolle. Los alumnos deben saber resolver los problemas que se le puedan plantear en la vida ordinaria adaptados a su nivel. Mediante estas tareas pretendemos desarrollar capacidades intelectuales que le permitan saber informar sobre el espacio exterior en el que se mueve y utilizar los conocimientos geométricos para interpretar distintas situaciones. Así pues, se producen cambios tanto en el conocimiento, la enseñanza y el aprendizaje geométrico como en los papeles y responsabilidades del alumno y profesor.

El alumno pasa de ser un mero sujeto pasivo a ser considerado el eje del aprendizaje y constructor de su propio conocimiento, provocado y conducido por las tareas propuestas por su profesor. El papel del profesor es plantear situaciones y problemas para despertar el interés y fomentar la actividad creadora de sus alumnos. Por tanto, el profesor debe ser un investigador de la enseñanza-aprendizaje de la geometría que guíe la construcción de conocimiento del alumno, siempre con una actitud positiva hacia la Geometría, para conseguir un individuo independiente, reflexivo y crítico.

### **1.3. El currículo de Primaria para la enseñanza de la geometría**

De todos es sabido que el ciudadano medio no valora el contenido matemático que se imparte en la escuela pero, por otra parte, considera esta materia como importante para ser aprendida por sus hijos. Las áreas instrumentales, lengua y matemáticas, son las más valoradas del currículo escolar por los padres. Ante esta contradicción de muchos ciudadanos de considerar las Matemáticas como una materia importante y, sin embargo, ser la más odiada, diversos estudios han planteado ya un cambio que se plasma en las propuestas curriculares de las distintas comunidades.

Partiendo de que las necesidades matemáticas de los ciudadanos no son las mismas que las del siglo pasado, cuando un mismo libro de texto podía ser utilizado por varios miembros de una familia. Las propuestas curriculares actuales no admiten sólo un cambio en los contenidos, suponen, fundamentalmente, una nueva concepción de la naturaleza de las matemáticas escolares y una visión diferente sobre su enseñanza y aprendizaje.

En la enseñanza tradicional de la geometría se formaban excelentes calculistas de medida, alumnos teóricos que en el contexto del aula eran capaces de resolver complicados problemas geométricos pero que en la práctica de la vida cotidiana dudaban cuando tenían que resolver un problema geométrico elemental como cálculo de distancias en un plano, estimaciones de medidas cuando compramos un piso, orientarse en un espacio desconocido, etc.

En los contenidos actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría se pretende establecer una serie de destrezas cognitivas de carácter general, que puedan ser utilizadas en muchos casos particulares y que contribuyen por sí mismas a desarrollar las capacidades cognitivas de los alumnos.

Estos contenidos se caracterizan por tener una visión práctica del aprendizaje, valorando y aplicando los alumnos sus conocimientos dentro y fuera del aula. Es decir, los alumnos aprenden tomando cuerdas para medir longitudes, investigan sobre mapas o croquis, buscan simetrías,...en los que es necesario construir, dibujar, hacer bocetos, visualizar,... usando el lápiz y papel, la calculadora o el ordenador. Se pasa de inventar problemas y de suponer datos sobre la pizarra a resolver ejemplos reales que desarrollan la creatividad, el ingenio y la iniciativa de los alumnos promoviendo unos contenidos más intuitivos que analíticos.

La enseñanza actual se caracteriza por organizar los contenidos en torno a temas de interés, de forma sencilla, que contribuyan a la sensibilización del alumnado ante problemas actuales y cotidianos como pueden ser: la información sobre el barrio donde viven, localización de su colegio, las señales de tráfico y su significado, el mundo consumista, noticias de actualidad o del pasado... Todas estas propuestas están relacionadas con la Educación Ambiental, Educación vial, Educación del Consumidor, Educación para la igualdad de oportunidades de ambos sexos y otras; temas transversales que nos proponen una actualización de las actividades geométricas que se deben desarrollar en las aulas.

El profesor debe tener como objetivo que los alumnos no recuerden la Geometría como una materia aburrida, sino que se produzca un cambio en su actitud y se interesen por las actividades geométricas de una forma natural, es decir, que les resulte una materia atrayente, útil y motivadora.

El desarrollo de los contenidos debe potenciar la elaboración y utilización de estrategias personales que muestren al profesor la manera de pensar y actuar del alumno, de forma que éste pueda adaptar o modificar sus estrategias, cuando sea necesario, para realizar un aprendizaje más preciso y significativo. El profesor potencia la formación de los alumnos mediante el ejercicio y desarrollo del pensamiento inductivo y deductivo.

Se debe saber conectar los contenidos geométricos con otras áreas de las Matemáticas u otras disciplinas como las Ciencias de la Naturaleza, y con el proceso histórico seguido en su evolución. Por tanto, el profesor debe dar a los alumnos desde los primeros niveles, modelos que permitan la reconstrucción de la Geometría basándose en su propia historia, mostrándoles el proceso mediante el

que se ha ido construyendo y haciéndoles observar su importancia y aportaciones para otras áreas de conocimientos como son la Física o el Arte como veremos en los temas posteriores.

Un aspecto importante, a tener en cuenta en estos contenidos, es la conexión de la Geometría espacial con la Geometría plana. Podemos observar cómo estas partes de la Geometría aparecían totalmente desligadas en otros currículos anteriores y hacían concebir a los alumnos que eran dos componentes de la Geometría totalmente independientes. A este respecto, es conveniente comenzar por el estudio de la Geometría espacial de manera que el estudio del plano se haga integrado dentro de dicho espacio tridimensional y como una abstracción a partir de los elementos de los cuerpos tridimensionales.

La realidad es tridimensional, nuestras primeras experiencias en la vida se relacionan con formas tridimensionales, por eso a partir de ellas debemos iniciar a los alumnos de los primeros cursos. La historia misma del hombre nos muestra que las figuras planas surgen de la necesidad de hacer construcciones, por lo que el estudio tridimensional lleva al estudio bidimensional como elementos planos integrados en el mundo tridimensional y como una abstracción hecha a partir de los cuerpos geométricos. Para ello, desde los inicios de su escolaridad, los alumnos deben tener experiencias concretas como la construcción de figuras del espacio de manera libre o con pautas determinadas como reproducción de figuras a partir de modelos y representación en el plano de figuras tridimensionales.

Sin embargo, esto no significa que no demos importancia al mundo plano. Tenemos que tener en cuenta que este mundo es el mundo de la imagen que encontramos en libros, revistas, ordenadores, televisión, tabletas, etc. Este mundo cada vez está más presente en la vida cotidiana del alumno y, por tanto, urge su interpretación correcta. Ello hace que nos planteemos dotar al alumnado de las herramientas necesarias para conseguir esa adecuada interpretación como son los materiales y recursos que presentamos en los temas dedicados a ellos.

Por último, no debemos olvidar los aspectos actitudinales que el profesor debe tener en cuenta en la enseñanza-aprendizaje de la geometría. En este sentido, los alumnos deben valorar la importancia de la geometría como materia de conexión con el mundo que tenemos alrededor, su aportación al desarrollo de áreas científicas, tecnológicas, al arte, a la arquitectura así como su aparición en los mundos naturales y sociales.



### **1.3.1. Currículo geométrico en Primaria**

En los primeros niveles de la vida escolar de los alumnos, la Geometría no se plantea como una materia basada en definiciones y fórmulas a aplicar. A través del estudio de los contenidos de este bloque, se pretende que el alumnado aprenda sobre formas y estructuras geométricas pero describiendo, analizando propiedades, clasificando y razonando sobre las mismas figuras, de forma que mediante la generalización de las características y propiedades de éstas, sea capaz de llegar, por sí mismo, a las definiciones correspondientes.

El aprendizaje de la geometría se basa en la actividad y la reflexión mediante la realización de actividades de dibujo, medidas y construcción de modelos que le enseñan a visualizar y a establecer relaciones con los otros bloques y con otras materias. La manipulación a estos niveles tiene gran importancia y, por ello, se trabaja con diversos materiales como geoplanos, mecanos, tangrams, tramas de puntos, libros de espejos,... que permiten al alumno llegar al aprendizaje de los conceptos.

Además de los materiales manipulables es importante incorporar las TICs (tecnologías de la información y la comunicación) a la enseñanza de geometría en Primaria que presuponen una concepción diferente de la enseñanza-aprendizaje. Los alumnos deben utilizar los programas informáticos como GeoGebra o similares que les muestran la auténtica geometría dinámica y cuyas actividades refuerzan o amplían las imágenes mentales que hayan formado sobre los conceptos con los otros materiales.

**1- Etapa inicial (Primero y Segundo curso).** El alumno practica conceptos topológicos relacionados con la localización en el espacio. Así debe realizar actividades como la descripción de posiciones y movimientos con respecto a uno mismo o con respecto a otros objetos, para que adquiera una buena orientación espacial. El alumno aprende conceptos topológicos como son líneas abiertas y cerradas, rectas y curvas, y comienza a realizar la interpretación, descripción y elaboración de itinerarios. Para estos conceptos también existen programas de ordenador que refuerzan lo aprendido.

Ya inmersos en la Geometría en sí, se comienza por actividades con elementos geométricos elementales como el punto, la línea recta, semirrectas, las líneas curvas, quebradas o mixtas, líneas poligonales cerradas y abiertas, paralelismo y perpendicularidad. Estos conceptos y los que siguen se pueden trabajar con distintos materiales (como veremos en su momento) o bien con los programas informáticos en los que el alumno puede visualizarlos de una manera dinámica.

Las actividades y la resolución de problemas son los elementos clave para trabajar con los alumnos tanto los conceptos planos como los espaciales. Dentro de un contexto cotidiano, se estudian las figuras planas y sus elementos, lados y vértices, haciendo identificaciones en los objetos comunes, dibujando o simplemente mediante la observación. Igualmente se identifican los cuerpos geométricos y sus elementos en el espacio cotidiano. En ambos casos se pretende una identificación de los objetos por propiedades que tienen o carecen, para llegar, al final de segundo, a una iniciación a la clasificación.

Es importante que no se trabaje la geometría plana y la espacial de una forma separada, sino que se establezcan relaciones entre las figuras planas y cuerpos geométricos mediante la composición y descomposición de éstos, con los desarrollos planos u otros materiales desmontables. En estos años se empieza, también, el estudio de elementos de regularidad y simetría en figuras planas y espaciales, siempre de una forma experimental y en contextos cotidianos.

**2- Etapa media (Tercer y Cuarto curso).** La orientación espacial continúa mediante el estudio de conceptos como distancias, ángulos y giros, pasándose a la representación elemental de espacios conocidos como pueden ser el aula, el colegio o su casa, mediante maquetas tridimensionales y la construcción de planos. El siguiente paso es la realización de actividades que suponen la descripción de posiciones y movimientos en un contexto topográfico mediante el manejo de escalas como doble, mitad, triple, tercio, etc.

En la geometría plana se continúa con el estudio de los ángulos y de figuras como polígonos, la circunferencia y el círculo, y los elementos relacionados con ellas. Simultáneamente, en la geometría espacial, se realizan actividades con cuerpos geométricos elementales como cubos, esferas, prismas, pirámides, conos y cilindros, distinguiendo sus elementos: aristas, caras y vértices, ángulos diedros. En estos cursos se aborda de una manera más directa la clasificación, ya sea de ángulos, figuras planas o algunas clasificaciones sencillas de cuerpos espaciales. Por último, se introducen en el estudio de regularidades y simetrías conceptos nuevos como son las isometrías: simetría, traslaciones y giros.

Se debe seguir insistiendo en la relación geometría plana y espacial, mediante la composición y descomposición, y en la observación de las formas, figuras, regularidades y simetrías en objetos o elementos de su entorno.

**3-Etapa final (Quinto y sexto curso).** La orientación espacial de los alumnos asciende un nivel más con las representaciones en el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, y la descripción

de posiciones y movimientos por medio de coordenadas. Se introduce al alumno en representaciones mediante escalas y gráficas sencillas.

Se siguen trabajando las formas planas y espaciales a través de la obtención de propiedades, como la relación entre lados y ángulos, o la suma de los ángulos de un triángulo. El alumno realiza actividades de exploración y pequeñas investigaciones por medio de los materiales, los instrumentos de dibujos o programas informáticos, por ejemplo, la formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición. En las regularidades y simetrías se profundiza en el estudio de las isometrías y se introduce la semejanza mediante actividades de ampliaciones y reducciones.

En todos los cursos se deben plantear diversas situaciones de localización o geométricas de su entorno, que den lugar a que el alumno resuelva problemas, en los que tenga que explicarse oralmente y por escrito, plantear y resolver el problema y analizar las soluciones obtenidas.

Estos son a grandes rasgos los contenidos mínimos de Primaria. El siguiente paso es reflexionar sobre la metodología que debemos utilizar para que el aprendizaje de estos contenidos sea significativo.

#### **1.4. Las metodologías de resolución de problemas y de laboratorio**

La enseñanza de la geometría tradicionalmente ha tenido un enfoque deductivo dándose prioridad a la memorización de conceptos, teoremas y fórmulas. Estas limitaciones formales simbólicas y algebraicas iban en perjuicio de la intuición como una primera manera de acceder al conocimiento geométrico. Consideramos que la manipulación, el tacto, la vista y el dibujo deben permitir al alumno habituarse a las figuras, formas y movimientos de su entorno para posteriormente establecer las abstracciones correspondientes.

Actualmente, la línea general es trabajar la geometría desde una metodología de resolución de problemas o de laboratorio mediante la que el alumno además de jugar, sobre todo: aprende.

Se parte de una concepción constructivista del aprendizaje basada en que aquellos conocimientos contruidos por los propios alumnos son realmente operativos, duraderos y generalizables a diferentes contextos. Por el contrario, los conocimientos que simplemente se transmiten a los alumnos, no contruidos por ellos, no quedan integrados en sus estructuras lógicas y sólo pueden aplicarlos en situaciones similares a las del aprendizaje.

#### 1.4.1. Metodología de resolución de problemas

La metodología de resolución de problemas está basada en la aplicación de los conceptos geométricos a diversas situaciones o problemas en complejidad adecuada al nivel del alumno y que tienen que ver con su vida ordinaria. Por ello, pueden aparecer con datos incompletos, tener una o varias soluciones, presentados de forma gráfica, sin datos numéricos... entre otros casos.

La justificación de la conveniencia de utilizar esta metodología se basa en que se considera que la dificultad de aprendizaje está más relacionada con las estrategias de enseñanza de la geometría, que con el contenido. La metodología de resolución de los problemas geométricos requiere unas etapas como son:

**Fase motivadora.** De experimentación: en la que se realicen diferentes pruebas o ensayos relacionados con el entorno real.

**Fase de comprensión:** mediante la representación gráfica y simbólica, reflexión e interiorización y comunicación oral o escrita en la que los aprendizajes sean lo más significativos posible.

**Fase de aplicación:** para profundizar y comprobar los conocimientos aprendidos, en la que se realicen otros ejercicios y problemas del entorno real en los que también puedan surgir nuevos conceptos.

En estas fases deben tenerse en cuenta las estrategias, el lenguaje y los algoritmos y destrezas del alumnado. En esta metodología, el profesor tiene que saber motivar adecuadamente la realización de las actividades, siendo claro y breve en sus explicaciones, poniendo el énfasis en la aplicabilidad y la relación del tema de estudio con otros temas. Mientras el alumno realiza las tareas, el profesor va proporcionando sugerencias, mediante la formulación de preguntas o subrayando la importancia de justificar lo que se vaya obteniendo. En los debates, su papel es de moderador, que hace hablar al alumno promoviendo la discusión y el análisis y contracte de los resultados debidamente justificados.

Se deben abordar los contenidos matemáticos desde las experiencias que posee el alumnado en Primaria. Pero esto debe ser solamente un punto de partida, para llegar de una manera progresiva a la abstracción y a la formalización del conocimiento matemático. Es en la Secundaria cuando el profesor debe aprovechar los conocimientos empíricos de los alumnos para transformarlos en otros más estructurados y rigurosos, sin olvidar, en esta etapa, los planteamientos experimentales.

Suponemos que planteamos a los alumnos el siguiente problema:

*- Si quisiéramos empapelar esta aula en el que nos encontramos ¿cuántos euros nos costaría?*

En primer lugar se establece un debate en el que los alumnos deben llegar a que para poder empapelar el aula es necesario saber sus dimensiones, es decir, el cálculo de la superficie de las paredes. Es preciso que los alumnos divididos en grupo en esta fase motivadora elaboren un plan de para el cálculo total de dicha superficie. Mediante pruebas y ensayos van decidiendo calcular primero el área de cada una de las paredes, teniendo en cuenta los vanos que se encuentran en ellas. Buscan estrategias de cuál es la mejor forma de calcular dichas superficies, dividiéndola en paneles iguales y luego sumando, restando los vanos iguales, etc. Posteriormente hay que realizar el cálculo de los rollos de papel que hay que comprar, teniendo en cuenta los diferentes precios que podemos encontrar en el mercado.

En la fase de comprensión se elabora el informe final de resolución del problema, en el que se muestran las distintas etapas a seguir para la resolución de dicho problema: mediante dibujos y diferentes pasos escritos u orales en los que los alumnos reflexiona por ejemplo, sobre la exactitud de la solución, ¿podemos comprar el papel exacto que mide la superficie? ¿cómo se vende el papel pintado? ¿por metros cuadrados?

Para la fase de aplicación se buscan problemas relacionados con el que acabamos de resolver como el cálculo de la superficie de la fachada de un edificio señero como puede ser una iglesia o un estadio.

Los problemas que planteamos a los alumnos no tienen por qué ser necesariamente de la vida ordinaria. A continuación planteamos algunos problemas a los estudiantes para profesores para que reflexionen sobre esta metodología.

#### ***Actividades para grupos de estudiantes para profesores.***

*1- Suponemos que vas a plantear como profesor el siguiente problema a los alumnos:*

*“Corta un hexágono regular de forma que con las partes puedas construir un rectángulo.”*

*Estudia todas las posibilidades que los alumnos pueden encontrar.*

*Haz un esquema de cuáles van a ser tus actuaciones en clase atendiendo a las diferentes situaciones que se pueden dar. Por ejemplo: Un grupo de alumnos ve complicada la actividad ¿le muestras un caso o qué haces?*

*Idem problema anterior.*

## *2-¿Cuántos desarrollos planos distintos existen de un cubo?*

Metodológicamente la resolución de problemas pone de manifiesto la eficacia del trabajo en grupo, tanto en el planteamiento y en la resolución del problema como en la superación de las dificultades de los alumnos menos dotados. En esta metodología es muy importante tener en cuenta que el alumno resuelva problemas adecuados a su nivel de conocimientos pues en caso contrario, al fracasar repetidas veces, no se ve compensado con el éxito y no desarrollará capacidades satisfactorias de resolución de problemas.

Es necesario que los problemas que presentemos a los alumnos estén planteados desde diferentes contextos: deportes, viajes, vacaciones, trabajo, escuela,... en los que trataremos los mismos conceptos matemáticos, pero que pueden ser más valorados por los alumnos por su aplicación en diferentes situaciones de la vida ordinaria. Así, si trabajamos los ángulos y la inclinación en diferentes problemas planteados en el contexto deportes, como, por ejemplo, estudiar los diferentes ángulos planos, formándolos con los miembros de nuestro cuerpo en una tabla gimnástica, el alumno llegará a valorar más la importancia y utilidad de estos dos conceptos en la sociedad.

Los contextos, adecuados al tipo de alumno que tengamos en el aula, motivan y hacen relevante el uso de la Geometría en la vida ordinaria. Determinados contextos posibilitan que los alumnos sean más creativos y desarrollen estrategias personales y de sentido común, además pueden ser la vía para que los alumnos conozcan la historia de la Geometría u otras disciplinas como veremos posteriormente en la utilización de recursos, como por ejemplo, las rutas geométricas.

Sin embargo, aunque las teorías innovadoras de la Educación Matemática consideran que el contexto debe ser realista y de la vida cotidiana es necesario que el contexto tenga sentido para el alumno para que pueda posibilitar y respaldar el desarrollo de la reinención de las Matemáticas. Incluso un contexto artificial relacionado con algo que no procede de la vida real puede ser bueno si tiene sentido para el alumno. Aunque no debemos confundir artificial, como puede ser un cuento o relato, con forzado.

La metodología de resolución de problema es una idea simple, pero que requiere mucho cuidado en su puesta en práctica. Una de las cosas más difíciles para el profesor novel será encontrar y plantear cuestiones, actividades y problemas que los alumnos sean capaces de 'abordar' y a partir de los cuales, dicho profesor, pueda comenzar a introducir los conceptos o materia correspondientes, útiles en los problemas reales y cotidianos.

Ahora bien, en el pensamiento de cada alumno se encuentran situaciones cotidianas, de su fantasía, de la realidad social, etc., que se pueden traer al aula y convertirlas en problemas de todo el alumnado.

#### **1.4.2. Metodología de laboratorio**

El lema del laboratorio de Geometría es **aprender haciendo ¡prohibido no tocar!**, es decir, el alumno participa activamente en la construcción de su propio conocimiento e interioriza lo aprendido desde el exterior mediante todos o algunos sentidos conjuntamente. El alumno va aprendiendo a comunicar lo aprendido, relacionándolo con sus conocimientos anteriores, que hacen que pueda dar un paso más hacia adelante en su aprendizaje significativo.

La metodología de laboratorio pone el acento en la formación de los conceptos, es decir, la experimentación y los sucesivos ejemplos que el alumno va observando le llevan a una generalización, mientras en la resolución de problemas pretendemos desarrollar habilidades y procesos, se pone más énfasis en la forma de trabajar de los alumnos, las estrategias y recursos que utilizan para llegar a la solución del problema. Aunque estos aspectos van íntimamente ligados, pues el desarrollo de habilidades y procesos produce una formación sólida de conceptos y viceversa, es por lo que, estas metodologías son complementarias y deben ser tratadas simultáneamente.

En el laboratorio los alumnos realizan actividades que intentan repetir la construcción del edificio matemático. El trabajo se hace en grupos y las investigaciones a realizar se componen de una serie graduada de actividades que pueden ser: Presentación del trabajo o actividad a realizar, búsqueda del material, desarrollo de la actividad y exposición de los descubrimientos realizados.

Hay dos etapas distintas: una creativa e inventiva, cuando se están explorando, analizando y desarrollando las ideas matemáticas, y una segunda etapa en la que se extraen conclusiones o se analizan las ideas de forma oral o mediante un texto resumen. La primera está basada en la experimentación mientras que la segunda es la reflexión sobre lo vivido y su redacción o informe.

#### ***Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.***

*Estos ejercicios van encaminados a que el estudiante para profesor experimente la metodología de laboratorio y aplique y reflexione sobre la serie graduada de actividades que se deben realizar.*

*1- Prueba que los cuadrados pertenecen a la familia de los rombos y a la de los rectángulos.*

*2- ¿Cuántos poliedros regulares triangulares podemos construir? Desarrolla un método de construcción*

### 3- Generaliza el problema anterior al caso de poliedros regulares

En los dos ejemplos, se deben tener en cuenta las fases enunciadas anteriormente y la selección del material adecuado.

En esta metodología es importante la selección de material, pues, a veces, se utilizan materiales tan sofisticados que no es posible conseguir los objetivos para el que fueron fabricados. Otras veces la poca cantidad de material hace que el alumno apenas lo manipule y no se dé ningún aprendizaje, como ocurría, hace años, con aquellas famosas cajas que contenían cuerpos geométricos de madera y que el profesor nos enseñaba desde su mesa sin apenas poderlos tocar.

#### 1.5. Las competencias básicas en relación con la enseñanza- aprendizaje de la geometría

Se denominan **competencias básicas** aquellas competencias *que un alumno debe alcanzar al finalizar la enseñanza obligatoria, para realizarse como persona y como ciudadano*. Éstas harán que su incorporación a la vida adulta sea de forma natural, y le darán confianza para seguir aprendiendo durante toda su vida. De acuerdo con la propuesta realizada por la Unión Europea, se identifican las siguientes competencias básicas:

1. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
2. Competencia en comunicación lingüística
3. Competencia digital
4. Sentido de la iniciativa y el espíritu de empresa.
6. Aprender a aprender
7. Competencias sociales y cívicas.
8. La conciencia y la expresión cultural.

**La competencia matemática** es la capacidad del alumno para utilizar los conceptos matemáticos aprendidos y aplicar el razonamiento matemático en la resolución de los problemas que le presenta su vida cotidiana diaria y de trabajo. La adquisición de esta competencia va a llevar al alumno a manejar los procesos de pensamiento, como la inducción y la deducción, los cálculos y la lógica. El alumno debe conocer la aplicación de estrategias de resolución de problemas, y la selección de las técnicas adecuadas para: calcular, medir, ubicarse en el espacio, representar e interpretar la realidad, a partir de la información disponible. En definitiva se da al alumno la posibilidad real de utilizar las actividades geométricas y de medida en contextos tan variados como sea posible.



La competencia matemática la van consiguiendo los alumnos en la medida que los contenidos matemáticos los utilizan en un mayor número posible de situaciones que se le presentan en su vida cotidiana, fuera del aula. Se va modelando un individuo con capacidad crítica para afrontar su vida. Desde la Geometría se entiende que la carencia de esta competencia en el alumnado le va a suponer tener dificultades en la organización individual o colectiva tanto en el mundo personal como en el laboral. Desde nuestras materias, también se contribuye a **las competencias básicas en ciencia y tecnología** mediante la Orientación espacial y la Geometría que hacen que el alumno se ubique de una forma racional en el espacio en el que vive. Se optimiza su capacidad de orientación para hacer construcciones o mejora en el empleo de planos, mapas, dibujos.

La enseñanza y aprendizaje de la geometría colabora en la **competencia en comunicación lingüística** mediante el lenguaje específico de esta materia, enseñando al alumno nuevas palabras y expresiones que debe incorporar progresivamente a su lenguaje usual. Se trata de que el alumno haga descripciones verbales de las actividades o resultados obtenidos, pero también que sea capaz de atender y entender a las explicaciones de otros compañeros, y participar en los debates, para desarrollar su capacidad de crítica y sus habilidades comunicativas. Se debe conseguir que el alumno se exprese correctamente y con la mayor precisión posible. La comunicación y el debate le ayudan a comprender mejor los conceptos y las destrezas procedimentales que aplica, ya que debe esforzarse en establecer relaciones entre los conceptos y las actividades, clarificando y justificando las acciones que realiza o ha realizado.

En el logro de **la competencia digital** se colabora mediante la iniciación de los alumnos en los usos de calculadora, programas de ordenadores e internet para realizar actividades de medidas o geométricas.

En **el sentido de la iniciativa y el espíritu de empresa**, que se basa en la habilidad de transformar las ideas en actos y en el desarrollo de la creatividad, la innovación y asumir riesgos, está muy presente la resolución de problemas geométricos y de medida mediante sus etapas de planificar mediante el razonamiento, aplicar lo planificado, y la valoración y análisis de los resultados. La planificación, en este caso, enseña a los alumnos a pensar y analizar con precisión la situación que se le plantea, para trazar un plan que le lleve a la solución óptima de la situación. En definitiva, debe buscar estrategias, tomar decisiones y gestionar los recursos para obtener la solución. Valorar esa solución, observando sus

pros y sus contras le hace concebir otras variaciones del problema que mejoren la solución obtenida. Estas actividades forman a un alumno con una mayor iniciativa personal.

En el desarrollo de **la competencia aprender a aprender** influye el carácter práctico de la Geometría en las que el aprendizaje se consigue mediante herramientas básicas, materiales y recursos que se utilizan en las metodologías de resolución de problema y de laboratorio. Mediante estas metodologías se pretende ayudar al alumno a ser consciente de los saberes que domina, de sus carencias, de lo que necesita aprender para evitar las lagunas, optimizando y orientando los procesos de aprendizaje hacia sus objetivos personales. También, contribuyen a desarrollar su pensamiento estratégico, es decir, la capacidad de cooperar, de autoevaluarse, y el manejo eficiente de un conjunto de recursos y técnicas de trabajo intelectual, individuales o colectivas, desarrolladas mediante experiencias de aprendizaje. El objetivo es que el alumno se implique en ser consciente, gestione y controle sus capacidades desde un sentimiento de competencia o eficacia personal.

En este sentido, se contribuye también al logro **de la competencias sociales y cívicas** pues, como en otras áreas, el trabajo en equipo adquiere una dimensión singular, ya que enseña al alumno a escuchar y a aceptar otros puntos de vista distintos al propio, como se extrae de todo el proceso que debe realizar en la resolución de problemas.

Con respecto **a la conciencia y expresión cultural**, la Geometría ha sido siempre considerada clave en el desarrollo cultural de las distintas civilizaciones. No se puede concebir el Arte en todas sus manifestaciones, pintura, escultura, arquitectura, etc. y en todas las culturas sin la Medida, la Geometría y, por supuesto, los Números.

Por último, concluir que estas competencias no son aisladas sino que son interdependientes desde la reflexión crítica, la creatividad, la resolución de problemas, la toma de decisiones y la gestión constructiva.

### **1.6. El aprendizaje en la enseñanza de la geometría**

En el aprendizaje de las formas geométricas, los alumnos aprenden primero a reconocer las formas de una manera global, después comienzan a analizar las propiedades importantes que tiene esa figura para más tarde llegar a establecer relaciones entre figuras y realizar deducciones sencillas. Así pues, podemos decir que el desarrollo de ideas geométricas crece en progresión, a través de toda una jerarquía de niveles. Es por tanto necesario que en el desarrollo del currículo y en el proceso de enseñanza-aprendizaje tengamos en cuenta esta jerarquía de niveles ya que para que tengamos un aprendizaje

significativo de ciertos conceptos o estrategias, se requiere que las destrezas básicas de los niveles inferiores estén fuertemente asentadas.

Un modelo educativo muy utilizado es el de Van Hiele, originado por Dina y Pierre Van Hiele (esposos), en 1957 en sus Tesis Doctorales leídas en la Universidad de Utrech. Dicho modelo compara el aprendizaje con un proceso inductivo, y proponen cinco niveles de perfección en el razonamiento por parte de los alumnos cuando estudian geometría. A su vez, en este modelo se dan directrices llamadas *fases de aprendizaje* que según sus autores, deberían seguirse en el aula para conseguir que los alumnos evolucionen desde un cierto nivel de razonamiento a un nivel inmediato superior. Diferentes trabajos hacen un estudio completo de los niveles y las fases de Van Hiele y pueden ser consultados en la bibliografía general de este texto.

### 1.6.1. Niveles de Van Hiele

El modelo de Van Hiele, aunque puede aplicarse a cualquier parte de las Matemáticas, es en la enseñanza de la geometría donde ha alcanzado mejores resultados. Dicho modelo está formado por dos componentes:

1. Un recorrido por el razonamiento geométrico de los alumnos durante su formación geométrica que va desde el razonamiento intuitivo hasta el más abstracto.
2. Unas fases de aprendizajes en las que el profesor organiza una serie de actividades con el objetivo de que el alumno evolucione desde un nivel de razonamiento a otro superior.

La definición original del modelo planteaba la existencia de 5 niveles de razonamiento, y sus características básicas, expuestas de forma breve, son los siguientes:

**Nivel 1: Reconocimiento o visualización.** Este nivel es de simple reconocimiento de las figuras geométricas distinguiéndolas por su forma, por su aspecto físico como un todo, sin detectar relaciones entre las formas o entre sus partes. El alumno no generaliza las características, ni reconoce las partes de que se componen las figuras, ni sus propiedades matemáticas.

Las figuras se describen por su aspecto físico mediante comentarios meramente visuales y mediante el recuerdo de elementos familiares del entorno, parece una pelota, es como un cuadro... No existe el lenguaje geométrico, esto es, no se sabe el nombre verdadero de las figuras. Los alumnos pueden construir modelos de sólidos sencillos, por imitación. Las nociones de familias de sólidos las introduce el profesor. Estas nociones el alumno puede repetirlas, e incluso pueden expresarlas si el profesor las dirige convenientemente con material. Por ejemplo,

identifica paralelogramos o conos en un conjunto de figuras o identifica ángulos y triángulos en diferentes posiciones en un conjunto de imágenes.

En resumen: En esta primera etapa, los estudiantes son conscientes del espacio como algo que existe alrededor de ellos. Los conceptos geométricos se ven globalmente. Las figuras geométricas son reconocidas por su forma como un todo, por su apariencia física y no por sus partes o propiedades. Los alumnos que se encuentran en este nivel aprenden:

- Vocabulario geométrico y a identificar formas especificadas.
- Son capaces de reproducir una figura dada.

***Actividades para los alumnos.***

*- Dentro de un conjunto de cuadriláteros, los alumnos pueden encontrar los cuadrados y rectángulos, porque son parecidos en sus formas a otros que han manejado anteriormente.*

*- En un geoplano pueden copiar superficies dadas o dibujarlas en papel punteado.*

*- Observar que no reconocen las propiedades de las figuras, que cuadrados y rectángulos tienen ángulos rectos o que los lados opuestos son paralelos.*

**Nivel 2: Análisis.** Es un nivel de conocimiento de los componentes de las figuras, de sus propiedades básicas, estableciendo relaciones a nivel intuitivo entre las figuras. Dicho conocimiento lo obtienen los alumnos tanto desde la observación como de la experimentación. Así pues, el alumno percibe que los objetos están formados por partes y dotados de propiedades, aunque no se identifican las relaciones entre ellas. Por ejemplo, los alumnos pueden comprender que un cubo tiene todas sus caras iguales, un cilindro tiene dos bases circulares, un cuadrado tiene lados iguales un rectángulo tiene ángulos iguales dos a dos.

Como las definiciones en Geometría se elaboran a partir de propiedades no pueden llegar a la definición completa, es decir, el alumno puede hacer la descripción de los objetos mediante listas de propiedades, en las que puede que las elegidas no sean suficientes para caracterizar el objeto o que incluya más de las necesarias.

Pueden deducir nuevas propiedades a partir de la experimentación y posiblemente generalizarlas a todos los objetos de la misma familia. Sin embargo, no realizan clasificaciones de objetos y figuras a partir de sus propiedades. Consideran que para demostrar una propiedad se realiza mediante la comprobación en uno o en pocos casos. En este nivel se recomienda trabajar con sólidos tridimensionales antes de centrarse en superficies bidimensionales.

En resumen: A través de la observación y la experimentación los alumnos empiezan a discernir las características de las figuras. Las figuras se reconocen mediante sus partes.

***Actividades para los alumnos.***

*- Dado un conjunto de paralelogramos en un geoplano, los alumnos podrían, dibujando del mismo color los ángulos iguales, llegar a que los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.*

*- Mediante diferentes ejemplos podrían generalizar para cualquier clase de paralelogramos. Sin embargo, no son capaces de establecer relaciones e implicaciones entre propiedades; no son capaces de captar las interrelaciones entre las figuras para llegar a clasificar.*

**Nivel 3. Deducción informal.** Decimos que el alumno se encuentra ya en esta tercer nivel cuando es capaz de identificar y describir las figuras por sus propiedades. Esto da lugar a que comprenda las definiciones y su necesidad dentro del estudio de la Geometría. Así pues, puede realizar clasificaciones lógicas ya que se ha iniciado su nivel de razonamiento matemático. Los alumnos son capaces de comprender cómo unas propiedades derivan de otras, establecer relaciones entre propiedades y los resultados de esas relaciones tal y como se puede ver en los ejemplos posteriores.

En este nivel, la capacidad de razonamiento formal de los alumnos se pone de manifiesto aunque su razonamiento lógico se apoya en la manipulación, no pudiendo llegar al razonamiento deductivo. El alumno, como ya hemos dicho, ordena lógicamente las propiedades de los conceptos, empieza a construir definiciones abstractas, puede seguir y dar argumentos informales, pero no comprende el significado de la deducción. Es decir, puede seguir demostraciones formales pero, en general, no pueden asimilarla de manera global, no pueden entender ni saben construir una demostración completa en la que haya que encadenar varias implicaciones; su nivel de razonamiento lógico le hace seguir pasos individuales de la construcción racional de la demostración, pero no hay una visión en su totalidad. Esto implica que el alumno no sea aún capaz de captar la naturaleza axiomática de la Geometría.

En resumen: Las definiciones adquieren significado. El alumno establece interrelaciones en una misma figura y entre figuras distintas. Y a partir de la deducción de las propiedades de las figuras es

capaz de clasificarlas. El alumno comprende también la inclusión de una clases en otras cuando es necesario.

***Actividades para los alumnos.***

*El alumno debe observar que:*

- En una pirámide regular, la base de lados iguales implica que las caras laterales son todos triángulos isósceles iguales.*
- En un paralelogramo, lados opuestos iguales implican lados opuestos paralelos y viceversa.*
- En un cuadrilátero, para que los lados opuestos sean paralelos, es necesario que los ángulos opuestos sean iguales.*
- Entre figuras: un cuadrado es un rectángulo porque tienen todas sus propiedades.*
- La clase de los cuadrados está incluida en la de los rombos porque cumplen su definición.*

Los alumnos de Primaria se mueven en estos tres niveles. A título informativo vamos a describir también los dos siguientes niveles. Éstos vamos a estudiarlos de una forma más general pues corresponde a niveles superiores a la Primaria.

**Nivel 4: Deducción formal.** Es este nivel la madurez del alumno hace que tenga la necesidad de realizar la demostración correspondiente para dar validez a las proposiciones. Dichas demostraciones no son meras mostraciones con ejemplos sino demostraciones formales y lógicas aunque no se reconoce la necesidad de rigor en los razonamientos, pues para ello se debe alcanzar el siguiente nivel.

Los alumnos son capaces de deducir una propiedad de otra, en una serie de proposiciones lógicas. Admiten que un mismo teorema tenga demostraciones distintas; no hay una forma única para obtener un resultado. Los alumnos comprenden la naturaleza axiomática de la Geometría, es decir, dan sentido a axiomas, definiciones y los teoremas obtenidos a partir de éstas, y de otros teoremas a su vez. El nivel de razonamiento del alumno es tal que puede tener una visión global de la Geometría.

**Nivel 5: Razonamiento rigurosamente deductivo.** En este nivel se alcanza el máximo rigor en la Geometría. El alumno puede trabajarla de forma abstracta sin necesidad de recurrir a ejemplos determinados. El razonamiento se hace sin utilizar la intuición. Se pueden construir sistemas a partir de axiomáticas que difieren en uno o varios axiomas dando lugar a distinta geometría construidas sin modelos concretos. Esta categoría es alcanzada por los universitarios, unos antes y otros después,

durante el estudio de su grado correspondiente. Es por tanto necesario que en el desarrollo del currículo y en el proceso de enseñanza-aprendizaje tengamos en cuenta esta jerarquía de niveles pues aunque puede darse el aprendizaje en varios niveles conjuntamente, para que tengamos un aprendizaje significativo de ciertos conceptos o estrategias se requiere que las destrezas básicas de los niveles inferiores estén fuertemente asentadas.

El siguiente esquema nos da de manera global, las ideas planteadas para los tres primeros niveles que, al fin y al cabo, son los que interesan al estudiante para profesor o al profesor.

|                | <b>Elementos explícitos</b>  | <b>Elementos implícitos</b>  |
|----------------|--|--|
| <b>Nivel 1</b> | <b>Figuras y modelos</b>   | <b>Componentes y propiedades de las figuras</b>  |
| <b>Nivel 2</b> | <b>Componentes y propiedades de las figuras</b>  | <b>Implicaciones entre propiedades de figuras</b><br><b>Definición</b><br><b>Clasificación</b> |
| <b>Nivel 3</b> | <b>Implicaciones entre propiedades de figuras</b><br><b>Definición</b><br><b>Clasificación</b> | <b>Demostración formal de proposiciones.</b>   |

Figura 1.1. Modelo de Van Hiele para enseñanza- aprendizaje de la Geometría

En cada nivel de pensamiento, lo que era implícito en el nivel precedente se vuelve explícito en el nivel actual, es decir, los elementos inherentes a un nivel se convierten en objetos de estudio en el siguiente. Estos niveles nos dan información de cómo el profesor puede organizar los contenidos curriculares de Geometría en Primaria. Por ejemplo, inicialmente, un cuadrado puede ser un rectángulo y, posteriormente, considerarlo como un paralelogramo

### **1.6.2. Fases de aprendizaje**

En su trabajos, los Van Hiele consideran que el cambio de nivel depende más de la enseñanza recibida que de la edad. Dan una gran importancia a la organización del proceso de enseñanza-aprendizaje, tanto como a las actividades diseñadas y los materiales utilizados.

Así pues, dentro de cada nivel se establecen cinco fases de aprendizaje (como ya hemos comentado) que aportan un modelo de estratificación del conocimiento. De tal modo que el paso de un nivel a otro sólo será posible si se han alcanzado las cinco fases de aprendizaje del nivel correspondiente.

En general, llevan el siguiente plan de desarrollo:

**Fase 1: Información.** Es una fase de toma de contacto en la que se presentan situaciones de aprendizaje, se hacen las observaciones necesarias relacionadas con la actividad a realizar y se introduce el vocabulario adecuado. El profesor prepara las preguntas de forma que pueda descubrir al nivel de pensamiento en que se hallan cada uno de sus alumnos. Se puede realizar mediante un test o preguntas individuales: el profesor puede observar si los alumnos contestan en el nivel correspondiente o en otro nivel distinto al considerado por él.

***Actividades para los alumnos para un Nivel 2.***

- *El tema a trabajar son los rectángulos. Al comienzo, el profesor y el alumno charlan y hacen actividades sobre rectángulos.*

- *La primera tarea será realizar observaciones y realizar preguntas para ir introduciendo el vocabulario específico de este tema.*

*Profesor: ¿Qué es un rectángulo? ¿es lo mismo que un cuadrado? ¿es un paralelogramo? ¿en qué se parecen y diferencian? ¿piensas que un cuadrado podría ser un rectángulo?*

- *El profesor observa cuáles son los conocimientos previos de los alumnos en relación a los rectángulos y, a la vez, los alumnos van observando cuál es la dirección que tomarán las enseñanzas siguientes.*

**Fase 2: Orientación dirigida.** El profesor organizará, en secuencias graduadas, las actividades de exploración de los alumnos. En esta fase, es donde influye la preparación metodológica del profesor pues debe saber programar una serie de actividades concretas, bien secuenciadas, mediante las que el alumno pueda comprender los objetivos que se persiguen y familiarizarse con las estructuras correspondientes. Las actividades consistirán en tareas cortas diseñadas para obtener respuestas específicas.

***Actividades para los alumnos para un Nivel 2.***

- *El profesor pide a los alumnos que construyan rectángulos de diferentes tamaños (sucesivas medidas de los lados) utilizando el geoplano o el programa adecuado de ordenador. Otra actividad sería construir rectángulos con todos los lados iguales o con todos los ángulos rectos.*

- *También, los alumnos pueden construir diferentes cuadriláteros y discriminar los rectángulos de los no rectángulos.*

**Fase 3: Explicitación.** En esta fase, los alumnos intercambian sus experiencias, exponiendo sus resultados, comentándolos con los demás compañeros o encontrando relaciones



entre ellos. En definitiva, los alumnos formarán una red de relaciones en un contexto de diálogo en grupo. La interacción entre alumnos les obliga a ordenar sus ideas, analizarlas y expresarlas de modo comprensible para los compañeros.

El profesor debe reducir sus intervenciones e indicaciones al mínimo, y el lenguaje a utilizar se irá especializando, consiguiendo que los alumnos terminen de aprender el nuevo vocabulario. No es una fase de aprendizaje de cosas nuevas, es una revisión del trabajo realizado anterior a la obtención de conclusiones y de perfeccionamiento en la forma de expresarse.

#### ***Actividades para los alumnos para un Nivel 2.***

*- Continuando con el ejemplo del rectángulo, el profesor y alumnos pueden establecer un debate sobre qué figuras y propiedades han aparecido en la actividad anterior y realizar esquemas que aclaren las distintas clases de figuras obtenidas. Se pueden realizar actividades del tipo: ¿cómo distinguir un rectángulo de un no rectángulo?*

**Fase 4: Orientación libre.** Una vez que el alumno ha adquirido un conocimiento, lo aplica de forma significativa a otras situaciones inéditas distintas pero con estructura comparable. Son actividades más específicas, respecto al contenido o al lenguaje adecuado, fundamentalmente referidas a aplicar lo anteriormente adquirido.

Estas actividades deberán ser de resolución de problemas abiertos, para que puedan ser abordables de diferentes métodos o puedan tener varias respuestas válidas conforme a la interpretación del enunciado. Así se obliga al alumnado a una mayor necesidad de justificar sus respuestas utilizando un razonamiento y lenguaje cada vez más riguroso. El objetivo es consolidar los conocimientos adquiridos. Esta fase se basa en actividades de utilización y combinación de los nuevos conceptos, propiedades y formas de razonamiento.

#### ***Actividades para los alumnos para un Nivel 2.***

*- Los alumnos mediante doblado de papel construyen un rectángulo y sus diagonales. Señalan el punto de intersección de las diagonales y miden las distancias a los vértices desde dicho punto. También miden los cuatro ángulos que forman las diagonales en dicho punto. Extraer conclusiones. ¿Son iguales las distancias? ¿En qué caso las distancias no son iguales? ¿En qué caso serían iguales los cuatro ángulos? ¿Se dan estas propiedades en los no rectángulos?*

**Fase 5: Integración.** Es la fase de síntesis de los contenidos trabajados en las fases anteriores. La idea es mejorar la red interna de conocimientos que tenía el alumno antes de conocer estos contenidos. Se revisan, se añaden y se unifican los objetos y sus relaciones, que configuran el nuevo sistema de conocimiento construido.

*Actividades para los alumnos para un Nivel 2.*

*- Los alumnos revisan y resumen lo que han aprendido sobre los rectángulos con el objeto de que tengan una visión más genérica de la nueva red de objetos y relaciones.*

*El profesor puede ayudar mediante una síntesis sobre lo que los alumnos han aprendido. Pueden hacer un resumen de las propiedades de los rectángulos, sin añadir nada nuevo, aunque siempre se puede revisar la historia de esas propiedades, si la tuvieran, de manera que se facilite el aprendizaje a los alumnos y aprendan a concebir las Matemáticas como una Ciencia entre las otras Ciencias y como una integrante más de la cultura humana.*

Mediante distintas actividades, el profesor habrá ido evaluando si el alumno ha superado las distintas fases. Cuando el alumno consigue la fase 5 de un determinado nivel de razonamiento, entonces ha progresado de forma que podemos considerar que su razonamiento pertenece ya al siguiente nivel. En el ejemplo que nos ha ocupado, diríamos que el alumno tiene un nivel 3 de razonamiento. Es decir, los alumnos están ya dispuestos para poder realizar clasificaciones atendiendo a las propiedades de los rectángulos, de forma que puedan entender qué propiedades son propias de los rectángulos y cuáles de los cuadrados o de los rombos.

Por tanto, completadas las cinco fases, el alumno tendrá una red de relaciones mentales más amplia que la anterior, a la que sustituye, habiendo adquirido un nuevo nivel de razonamiento inmediato superior. En este punto, los alumnos están dispuestos para repetir las fases de aprendizaje en dicho nivel.

## **Tema 2. Orientación espacial**

Sabemos que el conocimiento del espacio conformaba tres elementos que son la posición, las formas y los cambios. En este tema, hablamos del elemento posición que decíamos está relacionado con la orientación espacial, donde el individuo debe situarse él mismo en el espacio, para posteriormente ubicar los objetos y establecer direcciones mediante mapas y planos.

### **2.1. Necesidad de orientarnos**

Vivimos en un mundo tridimensional en el que se desarrollan todas las actividades a lo largo de nuestra vida. Por ello, nos es primordial el dominio de dicho espacio. En la mayoría de los casos, las personas adquieren el dominio del espacio mediante las experiencias que la vida ordinaria les va exigiendo, lo que le ayuda a desenvolverse en su entorno de forma natural. Sin embargo, cuando el entorno conocido cambia y nos movemos en otros ambientes como puede ser: una ciudad que visitamos por primera vez, un aeropuerto, una autopista compleja por la que circulamos, entonces es posible que notemos que nuestras facultades perceptivas e interpretativas fallan y que nos desorientamos fácilmente y erramos en los itinerarios a seguir.

Podemos observar que en estos casos, todas las variaciones que supongan moverse a derecha o izquierda nos son conflictivas en el sentido de que no están automatizadas y tenemos que pensarlas antes de realizarlas. La rapidez con la que hay que tomar estas decisiones y el hecho de que no las tengamos automatizadas, nos produce un gasto mental extra que notamos cuando acabamos de realizar la actividad. Pensemos, por ejemplo, en un aeropuerto en el que tenemos que realizar distintas actividades como: buscar el mostrador para facturar la maleta, buscar la zona y la puerta de embarque correspondientes o buscar un servicio concreto de cafetería, compras, etc. Las pantallas e indicadores nos informan precisamente de las distintas direcciones pero para nosotros es difícil interpretarlas de un golpe de vista y tenemos que pararnos a pensar en que dirección y sentido caminar. En estos trayectos observamos que los movimientos *arriba o abajo* no nos dan problemas pero sí nos los pueden dar, las indicaciones de desviaciones hacia la derecha o hacia la izquierda.

Hay pues, en general, unas necesidades de interpretación de la información y de utilización de los conceptos de orientación espacial. Es por ello, que hay que trabajar dicha orientación. Vamos pues a empezar abordando los conceptos relacionados con la orientación espacial y que pueden ser trabajados desde la Educación Infantil y a lo largo de toda la Primaria.

## 2.2. El espacio

La psicología evolutiva afirma que en las primeras edades de la Educación Infantil, el niño percibe el medio de forma confusa debido a su egocentrismo, confunde el mundo consigo mismo, y al sincretismo, confunde los objetos unos con otros en sí mismos.

En la etapa del **egocentrismo infantil**, según Hubert Hannoun, *el niño percibe el mundo a su imagen y no es capaz de superar su propio punto de vista*. El egocentrismo infantil tiene tres consecuencias importantes que los profesores suelen observar en sus aulas:

- *un artificialismo infantil*, el niño aplica lo que siente dentro de sí al mundo exterior con el que se identifica, por tanto todos los fenómenos que le rodean se debe a causas artificiales y no naturales, es decir, no distingue lo natural de lo artificial;

- *finalismo infantil*, el niño considera que los fenómenos naturales son provocados con un fin determinado a imagen de sus propios actos intencionales; no distingue entre el fin y la consecuencia.

- *el animismo infantil*, el niño considera que el mundo está animado, no distingue entre lo vivo y lo inanimado.

El niño hacia los tres o cuatro años, comienza a tomar conciencia de sí mismo y superar el egocentrismo, de forma que comienza a tomar distancia, y a producir un cierto alejamiento de ese mundo que confundía con él, pudiendo llegar a un conocimiento verdadero de éste, afectivo e intelectual, y más tarde racional. Así, los alumnos pueden haber superado esta etapa, pero debemos de tener en cuenta que puede que no todos la hayan superado sino que puede que algunos se encuentren todavía en un periodo de transición.

Como consecuencia de ese egocentrismo, hacia los siete u ocho años, el niño ve el origen de los objetos y fenómenos con los que se encuentra, en seres extraordinarios (*artificialismo mítico*). Posteriormente, a los ocho o nueve años, no cree en los seres míticos pero sigue creyendo que todos los fenómenos tienen origen en el hombre, todo ha sido hecho por el hombre (*artificialismo técnico*).

Hemos dicho también que el alumno distingue mal los elementos que componen su medio ambiente, es lo que se llama **sincretismo infantil**. Así, el sincretismo infantil es sinónimo de confusión y de falta de distinción. El caos en el que está inmerso el niño no le permite separarse del mundo que tiene alrededor, pero dentro de ese mundo tampoco le permite distinguir los elementos que lo componen. Los niños destacan y aíslan **cuadros sincréticos** (como un primer vistazo global y confuso), que tienen para ellos un interés particular, sin fijarse en sensaciones o imágenes definidas. Después de un cuadro

sincrético, el alumno pasa a un **análisis** de las partes para obtener una síntesis resumen del total. Por ello, el profesor debe colaborar con él para que comience a analizar lo que le rodea y distinguir partes y elementos que le saquen de esa percepción. De esa forma podrá llegar al tercer logro que es la **síntesis** y que se consigue en cursos posteriores.

Un caso similar es cuando vamos a un aula, de la que vamos a ser profesor, por primera vez. El cuadro que se nos presenta es global y confuso, los alumnos aparecen como un todo sin diferenciación individual. Al margen de las distinciones exteriores o físicas, no sabemos nada sobre sus actitudes, caracteres, niveles de conocimiento,... Posteriormente, es cuando pasamos de ese conocimiento sincrético para obtener registros individuales de cada uno de ellos y, por último, una imagen analítica de los alumnos del aula. Estos pasos son, también, los que caracterizan los esfuerzos por dominar cualquier tópico en cualquier materia de estudio o en toda actividad del mundo actual.

### **2.3. El alumno en el espacio**

Los alumnos irremediablemente tienen que adaptarse al medio en el que les ha tocado vivir. Pero sabemos que no han desarrollado suficientemente sus capacidades de exploración y tampoco tienen conciencia de sí mismo, pues el egocentrismo y el sincretismo hacen de muro que les impide tener una perspectiva objetiva del espacio en el que se encuentran. Para ellos, en un principio, todo es un caos, objetos y personas ligadas sólidamente: habitaciones, muebles, árboles, coches, familiares, personas anónimas... Posteriormente, el análisis le permitirá distinguir la familia, la escuela, la calle, los compañeros,... La adquisición lenta del espacio debe ser apoyada y reforzada por los profesores para acelerar su consecución de una manera eficiente y objetiva.

Pedagógicamente, el profesor debe basar su enseñanza en la experiencia del niño pero con respecto a su formación intelectual, los niños a estas edades solo son capaces de asimilar aquello que procede de su experiencia con los objetos. Por ello, el punto de partida de la formación del alumno debe ser la observación del mundo real. La observación evita toda descripción con palabras (verbalismo) y el creer en lo que no estamos viendo (dogmatismo); siembra en el alumno el espíritu científico (pues sabemos que toda investigación científica comienza por la observación) y le enseña al alumno la relatividad de las cosas, que cambian de una observación a otra. Sin embargo, nuestro objetivo no es sólo observar, sino que debemos ir más allá de lo puramente observado, debemos pasar de un mundo sensorial a un mundo analizado por la inteligencia como fin del aprendizaje.

## **2.4. La percepción del espacio**

Hemos dicho que hay que ayudar al alumno a reconocer los objetos físicos y los seres vivos, es decir, que debe conocer de una forma objetiva y científica, no sincrética, el mundo físico en el que se desenvuelve. El espacio es una noción que se va adquiriendo con la experiencia pero de una manera muy lenta. El efecto del egocentrismo hace que perciba un espacio acorde con sus dimensiones que es tal como lo piensa y no como lo ve (realismo intelectual), en el que la lateralización izquierda-derecha presenta una gran dificultad.

También, el sincretismo tiene sus efectos sobre la percepción del espacio por los alumnos. Éstos no son capaces de ver los objetos aisladamente sino como un todo con el espacio que les rodea. El espacio no es concebido como lugar que puede contener objetos sino como parte integrante de ellos. Así un muñeco sobre una estantería no es concebido fuera de él y si lo mudamos a un armario dejaría de ser ese mismo muñeco. No pueden separar los objetos del espacio que ocupan.

El primer espacio en el que el niño se siente más a gusto es su propio cuerpo y esa importancia que le da al propio cuerpo no la perderá jamás. Ese espacio propio se abre después al espacio exterior, el espacio de los objetos y seres vivos, que el niño no transforma pero que adapta a sí mismo mediante la imaginación, dándole una significación de acuerdo a su personalidad y a sus intereses.

El alumno tiende a limitar el espacio a dimensiones en las que se pueda desenvolver (como los rincones de la Educación Infantil que tanto le gustan) y que aunque tienen una función específica, puede transformar en otro particular según sus deseos, así -el rincón de los juguetes puede ser un garaje de coches-. Luego, el espacio del adulto es transformado por el niño de forma cuantitativa (dimensiones) y cualitativa (significado) en otro espacio en el que está mucho más a gusto.

La lateralización izquierda-derecha reviste una dificultad importante pues aunque el alumno es capaz de distinguir lo que tiene delante, hacia lo que camina, lo que ve, y lo que tiene detrás, como opuesto a delante, no tiene criterios de este tipo para la derecha o la izquierda. En resumen, el alumno comienza por el conocimiento de su propio cuerpo y se va ampliando a medida que empieza a desplazarse y va adquiriendo experiencias que le van dando referencias. Así pues, para que el alumno sepa orientarse en el espacio y tener una concepción objetiva, deberá realizar experiencias, como las que describimos en los apartados siguientes, en las que tiene que localizarse y relacionarse con objetos y personas.

## 2.5. Necesidad de referencias para orientarse

La orientación espacial no tiene sentido si no tenemos un sistema de referencia en el que basarnos para localizarnos en el espacio o localizar los distintos objetos. Esto es sencillo probarlo con el siguiente ejemplo.

### Actividades para grupo de estudiantes para profesores y puesta en común.

*Supongamos el rectángulo de la figura 2.1 en el que están situados una serie de puntos iguales. Suponemos que un alumno intenta localizar un punto que nosotros hemos denominado como punto A y que solo nosotros conocemos.*

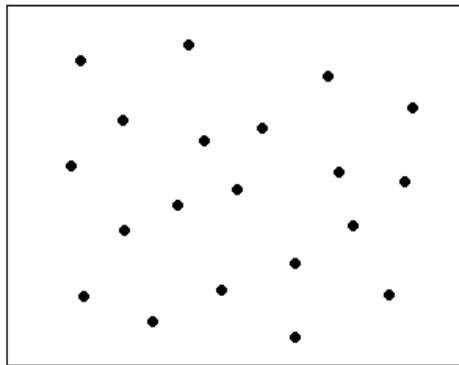


Figura 2.1. Necesidad de referencias

El alumno debe hacernos preguntas a la que nosotros podemos responder sí o no. Podemos observar que todas las preguntas incluirán una referencia espacial para poder localizar el punto. Por ejemplo, preguntará: ¿está cerca de los lados del rectángulo? ¿Tiene otros dos cercanos? Evidentemente si estuviéramos en un espacio infinito de tres dimensiones la localización sería más difícil pues no tendríamos referencias como los lados y nos costaría trabajo encontrar una referencia que nos ayudara a localizar el punto en cuestión. Sin embargo, si situamos unos ejes de referencia (como vemos en la figura 2.2) en el espacio correspondiente, la localización sería perfecta y unívoca.

Obtendríamos para el punto A tres coordenadas que llamaríamos x, y, z que son las distancias respectivas a los planos YZ, XZ e YX. Si hablamos a otra persona del punto A solo tendríamos que decirle que nos referimos al punto de coordenadas (x, y, z).

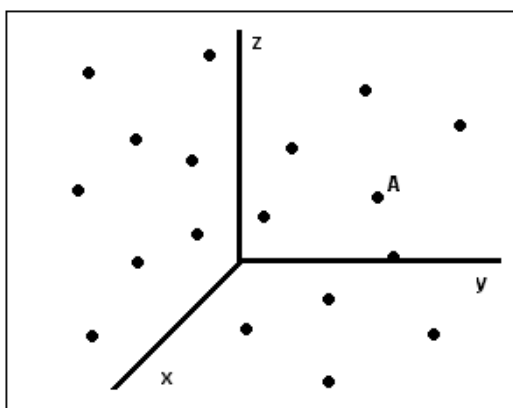


Figura 2.2. Referencias coordenadas

Estos conceptos abstractos de coordenadas, ejes coordenados y planos coordenados responden a conceptos intuitivos, que posee toda persona adulta y que todas las personas deben adquirir en el transcurso de su desarrollo madurativo. Para el alumno, desde una actitud antropocéntrica, el espacio se divide en cuatro partes, lo que tiene delante, detrás, a la derecha y a la izquierda.

La localización de objetos en el espacio la realizamos siguiendo este modelo matemático al que nos hemos referido en las líneas de arriba. Así cuando vamos a comprar a una tienda de lámparas y decimos al dependiente que queremos “aquella lámpara” señalando con el dedo, es como si hubiéramos puesto un sistema de coordenadas centrado en el pecho y hubiéramos dicho al vendedor “quiero la lámpara que está arriba (coordenada Z), delante (coordenada Y) y a la derecha (coordenada X)”.

Estos conceptos fundamentales, que luego van a permitir la abstracción o las localizaciones del espacio en los diversos sistemas coordenados, deben ser trabajados con los alumnos en la Educación Infantil y en la Educación Primaria.

El esquema de tareas para el aula sería el siguiente:

**1º-Trabajar la orientación espacial en su propio cuerpo.** Centramos los ejes en el pecho del alumno e introducimos los seis conceptos básicos, que en correspondencia con los ejes coordenados serían arriba y abajo relacionados con el eje Z, derecha e izquierda relacionados con el eje X y delante y detrás relacionado con el eje Y.

**2º- Desligar el espacio de sí mismo** para lo que tendríamos que extender los conceptos básicos al entorno próximo en el que se mueve y que alumno sea capaz de localizarse en él.



**3º-** Desligar los objetos del espacio en el que se encuentran lo que Piaget llama **descentración**. Para ello, hacemos un cambio de referencia en el que los conceptos de orientación estudiados no tienen como referencia base el alumno sino cualquier otro objeto, es decir, el sistema de referencia que habíamos situado en el cuerpo del alumno pasa a otro objeto.

Desde los cinco a los siete años, el alumno toma conciencia de su cuerpo y sus distintas partes siendo capaz de nombrarlas y enseñarlas. Es a partir de los seis años hasta los nueve cuando va apareciendo de una forma lenta la traslación de los ejes de referencia desde su cuerpo a otros objetos o personas, logrando trasladar a esos objetos o personas los conceptos que ha aprendido en su propio cuerpo.

4º- Superadas estas etapas pasaríamos a **extender el espacio** y comenzar a orientarnos en espacios más grandes, habituales para el alumno como el aula, el colegio el barrio, la ciudad... pues hemos visto que el niño en sus comienzos suele limitar el espacio a un espacio más reducido. Estas actividades de orientación nos valdrían para iniciar al alumno en las distancias y a penetrar en el mundo de las medidas y la esquematización del espacio. Estudiamos estas etapas en los apartados siguientes de una manera más extensa y minuciosa.

## **2.6. Orientación en su propio cuerpo**

Para comenzar a trabajar la orientación espacial en su propio cuerpo, el alumno debe conocer las diferentes partes de su cuerpo como son cabeza, brazos, manos, piernas, pies, barriga, culito... pues son los elementos de referencia que se van a utilizar en esta primera etapa de orientación. Los conceptos que trabajaremos con los alumnos en esta etapa serán respecto a la profundidad (**arriba y abajo**), a la anterioridad (**delante y detrás**), y a la lateralidad (**izquierda y derecha**). Estos conceptos no se enseñan independientemente sino que serán trabajados con los alumnos de manera simultánea, sobre todo aquellos que son opuestos como arriba y abajo pues, de esta forma a ninguno de los conceptos se le da más importancia.

La mayor dificultad, como ya hemos comentado, la encontraremos en los conceptos de izquierda y derecha. El alumno sabe distinguir enseguida lo que tiene arriba y abajo porque son conceptos que normalmente no suelen variar, debido a nuestra posición de seres erguidos. Para el alumno *delante*, como ya hemos dicho, es todo lo que puede tocar y ver y hacia lo que camina, mientras *detrás* es lo opuesto. Sin embargo, los conceptos izquierda y derecha significa en primer lugar una división del espacio de forma asimétrica ya que o somos diestros o somos zurdos, sin que el alumno tome conciencia de esta división. Por eso, el profesor debe ayudar al alumno a lateralizarse correctamente y a considerar

su inclinación, de forma que si la lateralización es zurda estimule esa zurdera y colaborar para que el alumno no tenga ningún sentimiento de inferioridad por esta inclinación.

La primera fase es **estática**, en el sentido de que el alumno no se desplace. Trabajaremos los conceptos sin salirnos del cuerpo del alumno. Partimos del supuesto de que hemos colocado unos ejes de referencia con centro en el pecho del alumno, de forma que si este pone los brazos en cruz tendremos que *arriba* es la cabeza, *abajo* son los pies, *delante* será su barriga, *detrás* su espalda, *derecha* la mano derecha e *izquierda* la mano izquierda.

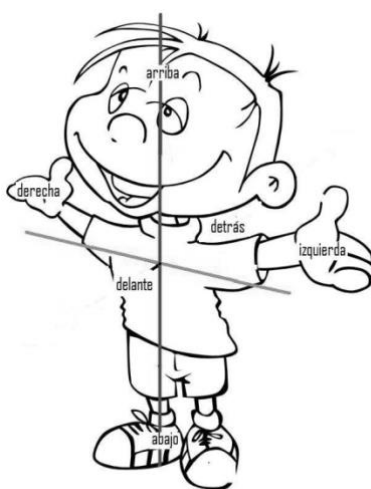


Figura 2.3. Orientación en su propio cuerpo

La posición en la que se coloque el profesor y el alumno es muy importante. Se recomienda que en principio, profesor y alumno se sitúen **en la misma orientación**, si es posible frente a un espejo para que el niño y el maestro puedan ver los movimientos.

Cuando el alumno domine los conceptos en esta posición, podemos pasar a una **orientación cara a cara**, es decir, profesor y alumnos se colocan frente a frente y trabajan otra vez los conceptos. En esta nueva posición, debemos hacer las actividades necesarias para que el alumno observe que todos los conceptos aprendidos en la posición anterior se mantienen salvo izquierda y derecha, esto es, arriba sigue estando la cabeza y abajo los pies pero su mano derecha ya no se corresponde con la mano derecha del maestro sino con la mano izquierda de éste, e igualmente ocurre con la otra mano.



Figura 2.4. Niños en posición cara a cara

Si nos colocamos en la posición misma orientación y mediante una cuerda lo suficientemente larga atamos separadamente las muñecas de las dos manos derecha (o izquierda), posteriormente nos vamos separando de manera que nos vamos colocando en posición cara a cara. El alumno observará cómo la cuerda que ata las muñecas se cruzará por delante de ellos cuando estén en dicha posición. Esta sería una forma de mostrarle como se modifican los conceptos izquierda y derecha.

#### **Actividades para grupos de estudiantes para profesores.**

*Los estudiantes para profesores deben diseñar actividades vivenciadas y fichas de refuerzo para trabajar estos conceptos con niños. Para ello, deben consultar a profesores en ejercicio y revisar los libros de texto. Si es posible pueden recoger mediante una cámara de video alguna experiencia real de aula que sería mostrada y comentada a todo el grupo clase.*

#### **2.7. Nociones de orientación en el entorno próximo del alumno**

En esta etapa vamos a prolongar los ejes que habíamos limitado al cuerpo del alumno para extenderlo a su entorno más próximo. Nuestro objetivo es que el niño tome conciencia de sí mismo como un ser dentro de un espacio que le rodea y no como un todo inseparable de ese espacio. El objetivo es, pues, pasar del análisis del espacio ocupado por su propio cuerpo al análisis del espacio ocupado por los objetos exteriores.

a) **Cambio de referencias.** Por tanto, el sistema de referencia sigue siendo el alumno con esos ejes imaginarios centrados en su pecho y que prolongamos más allá de su cuerpo a un entorno próximo, como puede ser el aula en el que trabajamos los conceptos. Así, arriba que era la cabeza, como prolongación del eje, tendremos que arriba es el techo, abajo tendremos el suelo como prolongación de los pies, a los lados tendremos las paredes y los objetos correspondientes del aula, por ejemplo: **delante**, puede estar la pizarra como prolongación desde la barriga, **detrás**, el armario del material y la fotocopiadora, como la prolongación desde la espalda, **a la derecha**, puede tener la puerta y **a la izquierda**, las ventanas, como prolongaciones de los ejes que pasaban por las manos derecha e izquierda, respectivamente.

En la figura 2.5. vemos el aula de Miguel y Api, dos alumnos imaginarios. El profesor trabaja con los alumnos todos estos conceptos, realizando diferentes actividades en las que ambos adoptan diferentes posiciones que luego deben adivinar. Por ejemplo, al alumno sentado en su pupitre se le pregunta: *¿qué tienes delante? ¿qué tienes a tu derecha?...*

b) **Rotaciones o giros.** Una vez que el alumno sabe localizar los distintos objetos en el espacio próximo en el que se mueve, sería conveniente realizar **rotaciones** ya que éstas nos garantizan la interiorización por parte del alumno de los conceptos estudiados anteriormente. En efecto, si el alumno nos contesta que tiene delante la pizarra y realiza un giro de 90° podrá observar que hay un cambio de los ejes que ha hecho que ya delante no tenga la pizarra sino otros objetos, como son las ventanas del aula.

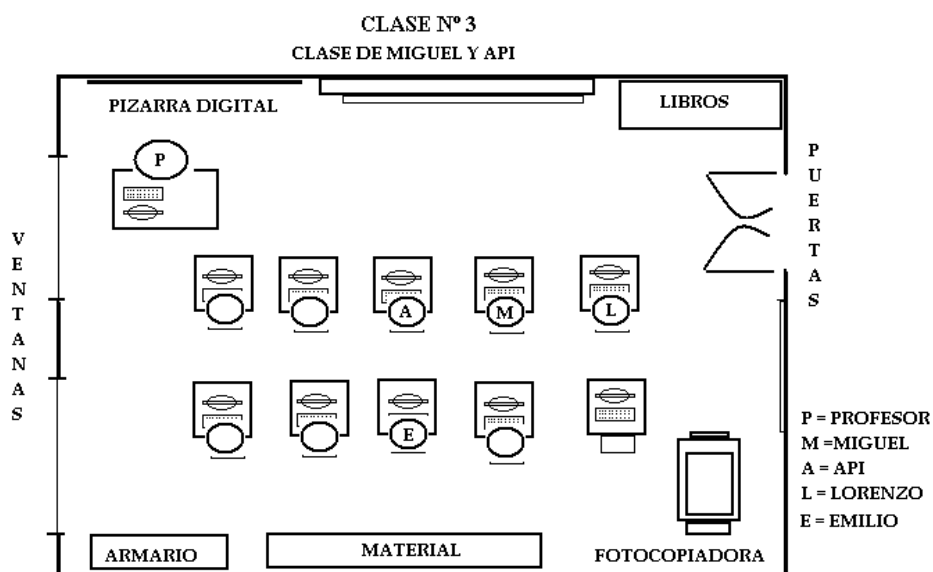


Figura 2.5. Orientación en el aula

Debemos, por tanto, enseñar a los alumnos a realizar giros de 90° (lo que se llama cuarto de giro). También pueden realizar medios giros (media vuelta) y giros enteros (vuelta entera). El alumno debe observar que girar **hacia la derecha** es moverse hacia su mano derecha y igualmente hacia la izquierda es moverse hacia su mano izquierda.

**Actividades para los alumnos.**

*Es conveniente que el alumno observe que al realizar giros los conceptos arriba y abajo permanecen y todos los demás cambian. El alumno, después de realizar el giro, debe responder preguntas del tipo: ¿Qué tenías antes delante y ahora que tienes delante? ¿y arriba? ¿Tienes lo mismo que antes?*

*También, los alumnos realizarán los ejercicios con los ojos tapados, es decir una vez que observan los objetos que tienen delante, detrás, etc. se le tapan los ojos y se les pregunta por ellos. Mediante esta actividad los alumnos interiorizarán y reforzarán los conceptos trabajados.*

**c) Movimientos.** Una vez trabajados los giros, el alumno podrá realizar movimientos, es decir: desplazamientos hacia delante y giros. El alumno debe poder responder a ordenes como: *da dos pasos hacia delante y luego gira a la derecha, camina tres pasos más, camina despacio desde tu pupitre hasta la puerta, indicame cuando realices un giro.* Esta orden se puede complicar haciendo que el niño pase por diversos lugares como la pizarra, cerca de la ventana, etc. de forma que el recorrido sea más largo. Estos conceptos deben ser aprendidos mediante actividades o juegos como el juego de la noria, que describimos a continuación.

**Actividades para los alumnos. Juego de la noria.**

*Un alumno se coloca en el círculo central y otros cuatro alumnos se colocan delante, detrás, a la derecha y a la izquierda del niño del círculo (figura 2.6).*

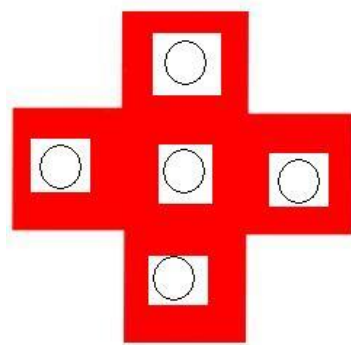


Figura 2.6. Juego de la noria

*El profesor pregunta al alumno del centro ¿quién tienes a la derecha? ¿a tu izquierda? etc. Se supone se sabe los nombres de todos. Después de observar bien las posiciones hacemos girar al alumno del centro un cuarto de vuelta y volvemos a preguntarle por el compañero que ocupa una posición: ¿quién está delante de ti? ¿quién es ahora el alumno que no ves? Igualmente se hace girando al alumno central media vuelta hacia la derecha o hacia la izquierda...*

*En una segunda variación se puede hacer el mismo ejercicio con los ojos tapados, es decir, una vez que el alumno del centro localiza la posición de sus cuatro compañeros se le tapan los ojos y se le hace girar un cuarto de vuelta o media vuelta hacia la derecha o hacia la izquierda y se le pregunta por el nombre de un compañero que ocupa una posición determinada.*

*Una tercera variante sería la siguiente: El alumno del centro observa bien las posiciones, hacemos girar a los otros alumnos hacia la derecha o hacia la izquierda cambiándolos de lugar, pueden girar 90 o 180 grados, según estime el profesor. Volvemos a preguntar al niño del centro, que se ha mantenido quieto: ahora ¿quién está a tu derecha? ¿quién está a tu izquierda?*

### **Ejercicio individual para estudiantes para profesores. El juego del tesoro.**

*El juego del tesoro escondido se basa en que el alumno descubra un tesoro mediante una serie de mensajes secuenciados, de manera que con las indicaciones que nos da un mensaje se llega al siguiente y así sucesivamente hasta encontrar el tesoro. Diseña el juego del tesoro escondido de forma que los contenidos de los mensajes sean instrucciones en las que los alumnos realicen giros o movimientos. Este juego se realizará para Primaria, eligiendo el estudiante para qué nivel lo realiza.*

## **2.8. Otros conceptos espaciales**

Además de los conceptos estudiados hay otros muchos conceptos espaciales que ayudan a la comprensión del espacio y la adquisición de posteriores conceptos matemáticos. Algunos de estos conceptos son: **Encima, debajo, delante, detrás, alrededor, a través, a la derecha, a la izquierda, al lado, junto a, cerca, lejos, en el centro, en medio de, dentro, fuera, entre, juntos y separados.**

En esta etapa, el profesor debe utilizar toda clase de objetos familiares y fácilmente manipulables por el alumno. Como ya hemos dicho, para el alumno de Infantil la puerta del aula no existe sin la pared que la rodea, los cristales no tienen sentido sin la ventana ... Debemos pues ayudar al alumno en su comienzo a distinguir y separar los objetos de lo que les rodea, incluso en edades mayores los alumnos son incapaces de distinguir elementos como lo que es el pueblo y lo que está fuera de él. Mediante la

observación debemos hacerle aprender a delimitar las componentes que encontramos en el aula, en el paisaje... Para percibir el objeto, el alumno debe distinguir entre lo que pertenece al objeto, lo que no pertenece al objeto y la frontera entre objeto y espacio exterior.

Así estudiamos dentro, adentro, en el interior,... para delimitar su **interioridad**; fuera, afuera, en el exterior... para expresar **su exterioridad** y alrededor de, a través de, final, límite, a lo largo de... para expresar **su frontera**. Y se añaden otros conceptos como en el centro, o en medio que ayudan a la delimitación precisa del objeto. Así pues frente a un jarrón, debemos delimitar lo que es jarrón de lo que no lo es. Su **interior**, donde colocamos agua, las paredes internas, **su frontera**, la pintura y decoraciones y **su exterior**, la mesa donde está situado, el paño...

Para los alumnos de cursos superiores, cuando estudien la orientación en espacios más grande, un ejemplo podría ser: un paisaje visto desde la cumbre de una colina. El profesor debe hacer reconocer a sus alumnos cuál es su pueblo. Éstos deberán saber distinguir el pueblo: sus casas, el campanario, la escuela, las calles como elementos que pertenecen al pueblo (**interioridad**) y separarlo de lo que no pertenece al pueblo como son las casas de campo, los campos, las charcas (**exterioridad**). Deberá hacerle observar también algunos elementos **fronteras** - si existen- como murallas, cercados, puertas de salida, etc.

Es importante que los conceptos no se trabajen de uno en uno sino varios a la vez, y sobre todo aquellos que están relacionados y son opuestos. Además cuando sea posible deben ser presentados muy contrastados, es decir, lejos y cerca (¿la mesa está lejos o cerca de ti?) deben ser lo que es para nosotros muy lejos o muy cerca, de forma que el niño pueda interiorizar mejor esos conceptos. Sin olvidar que en esta etapa los ejes siguen centrado en el cuerpo del alumno, éste responderá a preguntas como: ¿estás encima de la alfombra? ¿estás dentro del círculo?

### ***Actividades para los alumnos.***

*Para trabajar los conceptos podemos realizar actividades del tipo:*

- *El profesor muestra el concepto con su propia acción y el alumno lo repite.*
- *A la orden del profesor, el alumno ejecuta la acción.*
- *El alumno se coloca en una posición cualquiera y el profesor le pide que la explique oralmente.*
- *El profesor se coloca en una posición cualquiera y el alumno tiene que explicarla.*

### ***Actividades para grupos de estudiantes para profesores.***

*1- Un grupo toma los conceptos **encima y debajo** y diseña una actividad para enseñar al alumnado esos conceptos. Para ello:*

*- Explica brevemente qué significan los conceptos **encima y debajo**. Describe de forma general la actividad a realizar. Describe los objetos a utilizar. Describe los pasos a seguir para realizar la actividad y los diálogos que establecería con los niños.*

*Mismo ejercicio para: **alrededor y a través, cerca y lejos, dentro y fuera, juntos y separados.***

Posteriormente, en gran grupo, se expondrá un resumen de los trabajos realizados y se establecerá un debate didáctico.

*2- Conectar con colegios y realizar las experiencias anteriores grabándola en video. Por ejemplo en el periodo de prácticas.*

El profesor puede seleccionar los segmentos didácticos más interesantes para mostrarlos al gran grupo. El tiempo de duración del video debe seleccionarse en función del interés de los resultados y del número de grupos de alumnos que tienen que exponer. Por último, se establece un nuevo debate a partir del visionado de las cintas.

### **2.9. La orientación de los objetos en el espacio**

En esta etapa, pasamos de analizar la posición de los objetos con respecto al alumno a la posición de los objetos con relación a otros objetos o personas. Volveremos a practicar todos los conceptos anteriores pero ahora en lugar de tomar como referencia básica el alumno tomaremos como referencia otro objeto, es decir, los ejes que habíamos centrado en el cuerpo del alumno pasan a otro objeto que se toma como referencia. El objetivo es que el alumno responda a respuestas como: *¿está la ventana cerca de la puerta? ¿esta la papelera delante de la mesa? ¿qué alumno está a la derecha del profesor?*

En primer lugar, el profesor tiene que elegir bien sobre qué objetos centrar los ejes. Parece indicado colocar los ejes sobre lo que se llaman **objetos perfectamente orientados** que son *aquellos objetos en los que se puede distinguir su parte delantera, trasera, izquierda y derecha sin que influya la posición de observador*. Por ejemplo, objetos perfectamente orientados son un televisor, un reloj, un zapato, la pizarra, una muñeca ... y todos los alumnos y alumnas. Objetos no orientados pueden ser un balón, una papelera cilíndrica, un cubo geométrico...





Figura 2.7. Objetos perfectamente orientados y no orientados

A veces ciertos detalles convierten a objetos no orientados en objetos perfectamente orientados. Por ejemplo, las etiquetas colocadas sobre botellas o cajas, los cajones de una mesa, la tapa de una caja (figura 2.8),... hacen que esos objetos que no eran perfectamente orientados puedan ser utilizados como orientados para las distintas actividades que realicemos con los alumnos.



Figura 2.8. Orientación de los objetos

De todas formas, como siempre podemos encontrar un número suficiente de objetos perfectamente orientados en el aula o en el espacio en el que nos movamos, si un objeto nos causa duda sería mejor desecharlo y trabajar solamente con objetos que sepamos son perfectamente orientados. Una vez hechas las aclaraciones sobre los objetos orientados en los que el alumno va a proyectar los ejes, el objetivo

principal del profesor en esta etapa, es que el alumno capte que los ejes que habíamos centrado en su cuerpo se encuentran ahora en otro objeto.



Figura 2.9. Observador artificial

El objeto orientado más idóneo para comenzar estas actividades sería un muñeco (**observador artificial**), que es un objeto perfectamente orientado. El muñeco tiene como ventajas:

- el alumno se puede identificar con él lo que facilitará el traslado de los ejes.
- alumno y muñeco se pueden colocar en la misma posición y orientación de forma que podemos decir que sus ejes coinciden. Por ejemplo, el alumno coloca el muñeco en su pecho colocado en su misma orientación.

#### ***Actividad para los alumnos.***

*Realizamos la actividad concreta de preguntar a los alumnos si un muñeco que está junto a un cubo, está cerca o lejos del cubo. Un alumno que se encuentra retirado afirma que el muñeco está lejos, debido a que el alumno contesta colocando los ejes sobre su cuerpo ¿qué podemos hacer para que el alumno deposite los ejes en el cubo?*

El alumno se coloca detrás del muñeco en la misma orientación y lo más pegado posible a éste. Como los ejes del muñeco y los suyos coinciden, ahora el alumno sí contesta que el muñeco está cerca del cubo. Vuelve a su sitio y le preguntamos repetidas veces para observar si ya es capaz de desplazar

los ejes desde su cuerpo al muñeco. Los alumnos en las diferentes actividades que siguen, cuando tengan dudas, se acercarán al muñeco para asegurar sus respuestas.

### ***Actividades para los alumnos.***

*El profesor tiene que realizar actividades para trabajar todos los conceptos vistos hasta ahora, pero tomando como referencia básica el muñeco, al que habrá que ponerle un nombre, que puede ser Javier. De esta forma, los alumnos contestarán a preguntas como: ¿está la pelota detrás o delante de Javier? ¿Está Javier al lado del osito? ¿está la caja a la derecha o a la izquierda de Javier? ¿Está Javier encima de la alfombra?*

*Posteriormente, cambiando el muñeco por otro objeto perfectamente orientado el alumno responderá a cuestiones como: ¿está la manzana a la derecha de la pantalla del ordenador? ¿está la mesa cerca de la papelerera? ¿qué hay a la derecha de la pizarra?*

*Cuando los dos objetos sean perfectamente orientados y uno es más grande que otro podemos observar que en la vida cotidiana, los ejes se colocan en el más grande. Por ejemplo si tenemos un televisor y un reloj despertador preguntaremos ¿está el reloj delante o detrás del televisor? y no es usual preguntar ¿está el televisor delante o detrás del reloj?*

*Cuando uno de los objetos sea no orientado entonces se pone siempre los ejes en el orientado. Por ejemplo, una mesa con cajones y una papelerera cilíndrica sin etiquetas diremos que la papelerera está a la derecha o a la izquierda de la mesa, pero no tiene sentido decir que la mesa está a la izquierda o a la derecha ya que la papelerera no es orientada.*

### ***Actividades para grupos de estudiantes para profesores y puesta en común.***

- Busca 5 objetos perfectamente orientados y 5 no orientados que sean útiles para utilizar en el aula.
- Transforma, si es posible, los objetos no orientados en objetos orientados.
- Elige dos conceptos, a ser posible opuestos, y diseña tres actividades para el caso “el alumno es la referencia básica”, es decir los ejes están centrados en su cuerpo.
- Idem para “otro objeto es la referencia básica”.
- Puesta en común.

### ***Actividades para gran grupo.***

*Ponemos el muñeco acostado sobre la mesa en posición supina ¿qué es arriba? ¿y delante del muñeco?*

*Colocamos el muñeco con la cara en dirección al suelo ¿qué es ahora arriba? ¿qué tiene abajo?*

*Debatir sobre la relatividad de los conceptos arriba y abajo. Comentar las frases del lenguaje cotidiano “estoy boca arriba” “está cabeza abajo” “pon las flores dentro del jarrón” “el gato está encima de la silla”*

### **Actividades para grupos de estudiantes para profesores y puesta en común.**

*- Comentar que ocurrirá con los conceptos espaciales en un viaje espacial, salidas al espacio.*

*- Diseñar actividades para Primaria en las que se trabaje la relatividad de los conceptos arriba y abajo.*

Sugerencias: Las actividades pueden estar relacionadas con la Educación Física. Observar que el muñeco puede adoptar posiciones que no puede adoptar un alumno.

## **2.10. Localización en espacios más grande. Planos y mapas**

En las anteriores etapas, hemos intentado eliminar el egocentrismo y, que de alguna forma, el alumno se dé cuenta que los objetos estaban allí, cercano a él, pero en el exterior. Ahora el espacio que puede comprender es el aula del colegio o su habitación y, si seguimos ampliando, su barrio, su ciudad, la región o su país. En esta nueva etapa, el alumno da un paso más pasando de la vivencia de las categorías del espacio (profundidad, lateralidad, anterioridad) y sus nociones a una percepción de éstas, de tal forma que podamos hacer la extensión del objeto de *aquí* al objeto de *allí*.

### **a) Localización en el aula.**

#### **Actividades para los alumnos.**

*El profesor empieza por una actividad sencilla de localización del alumno en su entorno más próximo, es decir, en el aula, y de la siguiente forma:*



Figura 2.10. Localización en el aula

*Estas son las mesas de Miguel y Api (figura 2.10). En su espalda tenemos el nombre de cada uno. Contesta las siguientes preguntas: ¿A qué lado está sentado Miguel de Api? ¿derecho o izquierdo? ¿El ordenador está delante o detrás de Miguel? ¿Las mesas de Api y Miguel están juntas o separadas?*

Siempre que se pueda esta actividad se hace vivenciada con los alumnos presentes.

Después realizamos el plano de las dos mesas sin olvidar poner el nombre (figura 2.11)



Figura 2.11. Localización en el aula

### **Actividades para los alumnos.**

*Los alumnos realizan la siguiente actividad: Dibuja tu mesa y pon tu nombre, luego dibuja dos mesas más y pon el nombre del compañero que está a tu derecha y a tu izquierda. El siguiente paso es ampliar al plano del aula. Para ello podemos ir construyendo el plano primero por las mesas, de la misma manera que hemos hecho anteriormente, observando quien está a la derecha y a la izquierda de cada uno y además delante y detrás. Después, vamos observando y dibujando todos los elementos del aula incluidas paredes, puertas y ventanas; para distinguirlas mejor podemos ir dibujándolas y*

poniendo al lado su nombre como refuerzo, pues el dibujo esquemático puede confundir al alumno. Este plano se puede dibujar en el suelo, de forma que el alumno puede caminar por él, o en la pizarra, en la que puede señalar, dibujar, borrar, pegar... En la figura 2.12 mostramos un plano tipo.

Una vez construido el plano se pueden hacer preguntas a los alumnos para que comience a aprender a leer en un plano y para reforzar el conocimiento de los términos estudiados anteriormente.

**Actividades por grupos de estudiantes para profesor.**

Elige tres o cuatro conceptos espaciales y sobre ellos, elabora cuestiones para reforzar los conceptos espaciales, del tipo: El armario del material está entre ... O para que el alumno aprenda a leer un plano como: ¿Cuántas ventanas hay en la clase?

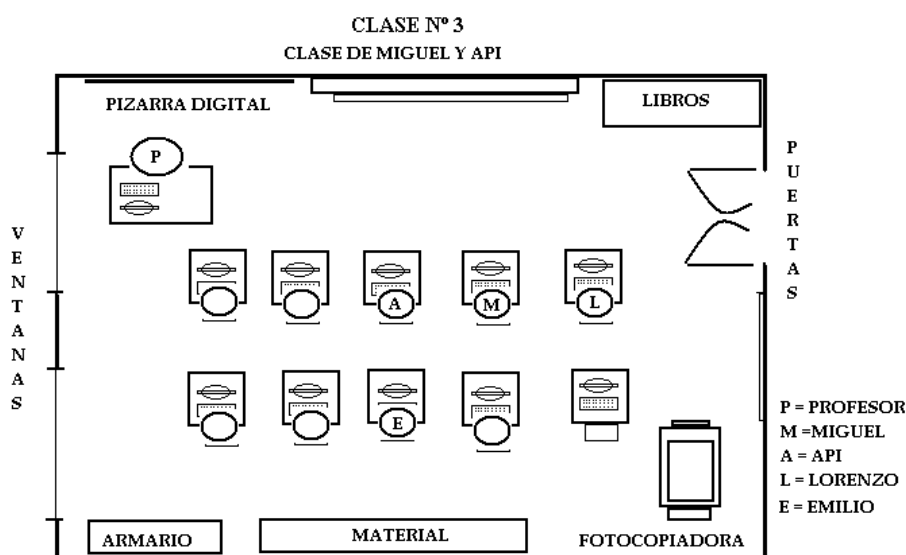


Figura 2.12. Plano de la clase

Posteriormente, podemos incorporar a los protagonistas, Miguel y Api, en el plano y al profesor y a los alumnos, que están a su alrededor, de la siguiente forma: Observa dónde están sentados Api y Miguel, están marcados con las iniciales A y M, dibújalos de azul y rosa. Observa también los sitios ocupados por sus amigos Lorenzo y Emilio, que están marcados con L y E, coloréalos de rojo y de amarillo.

**Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.**

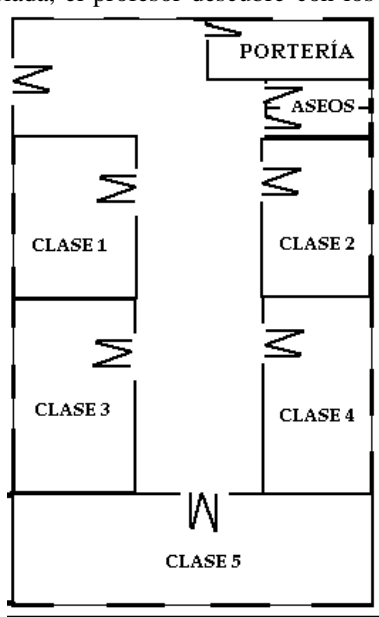
Elabora preguntas de orientación espacial que relacione a los niños entre sí, con el profesor y con los objetos del aula, utilizando el vocabulario propio de dicho tema. Ejemplos: ¿entre que amigos

*está situado Miguel? ¿quién está más cerca de la ventana Api o Lorenzo? Colorea de verde la mesa del profesor.*

Recordemos que como este plano es del aula de la clase, si el alumno no comprende las actividades sobre el plano volvemos a vivenciarlas con él, sobre el espacio real del aula.

#### **b) Localización en el edificio y el centro escolar.**

Realizamos una nueva ampliación al espacio total de centro. Para ello vamos a salir del aula pero de una forma vivenciada. En nuestro ejemplo anterior hemos visto que la clase de Miguel y Api es la clase nº 3. Pues de forma vivenciada, el profesor descubre con los niños qué hay más allá del aula,



buscan las aulas contiguas, observan que al salir está el pasillo, localizan la portería y los aseos, etc.

Figura 2.13. Plano de la planta

#### **Actividades para los alumnos.**

*Después de estas observaciones se pasa a construir el plano del edificio en el que está el aula localizada (figura 2.13). Éste, también, se puede hacer sobre el piso del aula o en el patio, y los alumnos pueden caminar sobre el plano e ir informando sobre en qué lugar se encuentran. Posteriormente, a propuestas del profesor, los alumnos dibujan con un aspa azul el lugar donde están las mesas de Miguel y Api, o el lugar donde está la pizarra, las ventanas, etc. De esta forma, los alumnos pueden comprender e integrar el plano del aula en esta plano de mayores dimensiones.*

#### **Actividades para grupos de estudiantes para profesores.**

- *Diseña actividades de orientación espacial y de reconocimiento de planos como:*

- *Describe los pasos que tienes que dar para ir de la clase 5 hasta los servicios.*

*(la descripción debe incluir términos espaciales como giré a la derecha, camine de frente ...)*

- *Sitúate en la puerta de la clase 1 y observa qué tienes a cada lado de tu cuerpo*

La siguiente ampliación es del colegio total (figura 2.14) y los pasos a seguir son los mismos que hemos descrito anteriormente para el plano del edificio.



**Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.**

- Diseña actividades para la orientación en el colegio de Api y Miguel del tipo: Describe el recorrido que hacen Api y Miguel todos los días para llegar desde la puerta del colegio hasta su aula Clase n° 3.

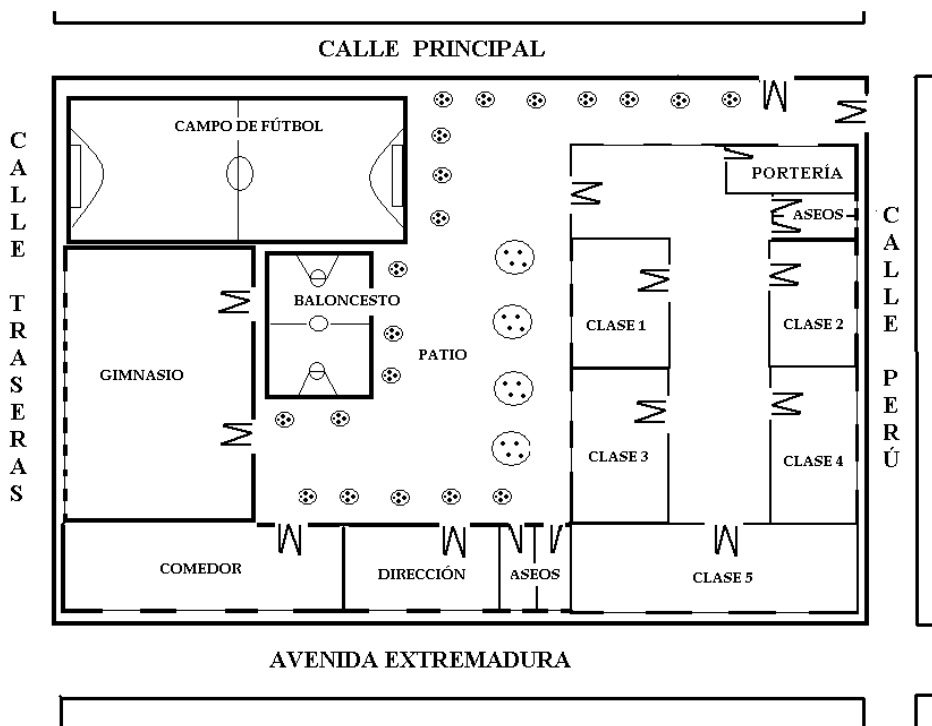


Figura 2.14. Plano del colegio

- Diseña un parque sencillo y sobre él, elabora preguntas de orientación espacial.

- Diseña un juego de barcos como se indica: Construye un cuadrulado coordinado con letras y números. Dibuja en las cuadrículas barcos con su nombre correspondiente (el barco puede ocupar una o más casillas) y realiza preguntas para que los alumnos las contesten. Hay que observar a qué curso se destina la actividad, para hacer mayor o menor el cuadrulado.

- Haz un diseño con el mismo esquema de los barcos pero referido a un pueblo, un parque o el lugar que tu consideres conocido por los alumnos. Dicho lugar debe ser motivador para los alumnos.

**c) Localización en espacios mayores.** Vamos a empezar planteando algunas actividades.

**Actividades para los alumnos.**

- Construcción de la maqueta de un pueblo o de la zona donde vive.

La actividad puede ser planteada de manera global. Para empezar los alumnos visitan la zona y hacen un plano que se elabora de forma completa en clase (localizando los edificios principales, lugares

más representativos, etc.). Dependiendo del nivel de los alumnos podemos ahora hacer actividades sobre este plano o podemos iniciar la construcción tridimensional.

Las casas pueden ser realizadas con cajitas de cartón (medicamentos, conservas,...) pintadas o coloreadas por los niños. Distinguiremos también los edificios principales como Ayuntamiento, Escuela, Iglesia, Ambulatorio, etc. Éstos normalmente nos valdrán de referencia para realizar actividades de orientación espacial. También se pueden realizar elementos propios de las calles como árboles, fuentes, bancos,... Se pueden dibujar personajes que son los que se mueven por el pueblo, como el cartero, policía, jardinero, cura, médico,... Los niños pueden traer muñequitos o coches pequeños para incorporarlos al pueblo. Para que la experiencia no se quede en un mero trabajo manual, cada grupo de alumno debe diseñar actividades de orientación espacial. Por ejemplo, *si el cartero le queda una última carta que entregar al médico antes de volver a Correos. Describe el trayecto que realiza el cartero para volver a Correos en términos de orientación espacial.*

Todo el análisis que hemos hecho del espacio vivido son los referentes necesarios para que el alumno pueda captar las nociones geográficas de orientación de norte y sur, o bien la situación de una determinada zona con respecto a cualquier punto de referencia. Estas nociones primeras de movimientos en relación a un punto les serán imprescindibles para empezar a estudiar los planos de una ciudad hasta llegar a los movimientos relativos de los planetas, estrellas, etc.

Esa percepción de las nociones geográficas bien mediante un paisaje, un plano o un mapa y las diferentes actividades que tenemos que realizar para que el niño comprenda la geografía, son la mejor preparación para que el alumno comprenda el espacio matemático de dos y tres dimensiones.

Es en las Ciencias Sociales y de la Naturaleza donde los conceptos estudiados como la profundidad, anterioridad y lateralidad serán la base para comprender nociones más elaboradas de localización (longitud y latitud), situación o emplazamiento de un punto, la orientación mediante distintos sistemas como la brújula y el estudio de la escala para el estudio de planos y mapas. El estudio del Medio va a ir progresivamente preparando al alumno para poder abordar el espacio matemático de una forma natural y práctica, posibilitándole la comprensión de las matemáticas en niveles superiores.

## **Tema 3. Recursos para la enseñanza-aprendizaje de la geometría**

### **3.1. Introducción**

El currículo de Didáctica de Geometría de los estudiantes para profesores se ha estructurado, en general, exclusivamente en torno a dos puntos básicos: el estudio de contenidos matemáticos fundamentales y el conocimiento de recursos didácticos de tipo instrumental. Esta situación ha ido poniendo de manifiesto un conjunto de deficiencias en la formación matemática inicial de los futuros profesores. En primer lugar, se ofrece una imagen excesivamente parcial de la Didáctica de la Geometría, que se reduce a considerarla como una aplicación directa de los principios psicopedagógicos generales a este campo específico de las matemáticas, donde la utilización de los materiales se reduce a algunos materiales estructurados como cuerpos rígidos. Esto hace que los alumnos partan de una concepción prácticamente algorítmica de la didáctica.

Este planteamiento, lejos de cambiar o satisfacer esta concepción de los alumnos, acaba por consolidarla, dando lugar a la utilización de métodos que fracasan, pues no se llega a conseguir los objetivos educativos propuestos. De este modo se hace necesario presentar un marco general, más elaborado y específico, que permita integrar las distintas aportaciones teóricas y que lleve a considerar la Didáctica de la Geometría como una materia, que se propone analizar y actuar sobre los fenómenos correspondientes al aprendizaje y la enseñanza de la geometría.

El primer recurso a utilizar es el propio entorno: aulas, pasillos, edificios, calles, pueblos... y todas aquellas partes del entorno cultural y social susceptibles de provocar experiencias matemáticas. Este material tan obvio y gratuito debe ser un primer escenario de actuación y una primera fuente de datos, y exigirá en contrapartida un diseño local de actividades adecuadas a cada nivel. Este nuevo punto de vista puede permitir un cambio en las concepciones de los alumnos, pasando de una concepción rígida y cerrada a una apreciación más rica, sin que esto les decepcione en sus expectativas. Para lograr un aprendizaje funcional, es decir, que los estudiantes para profesores incorporen lo aprendido al bagaje de recursos que utilizarán posteriormente en su tarea cotidiana, parece obvio que durante el mismo proceso de aprendizaje trabajen de manera efectiva algunas de las relaciones entre la Geometría y el entorno, valorando su utilidad.

Si consideramos el alumno como el sujeto central de su aprendizaje, que construye el conocimiento a partir de la reflexión obtenida de sus actividades (constructivismo), el libro de texto se va a revelar como un recurso insuficiente para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría básica. La concepción

estática del libro de texto no nos permite dar respuesta a todas las relaciones dinámicas que se pueden establecer entre los alumnos, el maestro y los conocimientos geométricos. Por ello, las tareas en el aula tienen que tener un comienzo basado en el uso de otros recursos y del material didáctico. La construcción del conocimiento necesita de la creación de imágenes mentales, tanto en el proceso de comprensión y asimilación de los problemas como en el de la búsqueda de las soluciones. Los recursos, la manipulación de distintos materiales, la visualización de ciertas imágenes, la construcción de formas geométricas... son una fuente importante para que el profesor realice las preguntas correspondientes y, además, una herramienta de análisis de los conocimientos previos que los alumnos tienen frente a una determinada actividad.

Los recursos y los materiales son herramientas que nos facilitan la descripción de situaciones o la identificación de variables del concepto a estudiar. Además ayudan en determinadas actividades geométricas que de otra manera serían difíciles de visualizar y comprender. Sin embargo, no basta solamente con la utilización de materiales y recursos sino que los alumnos, también, tienen que definir, deducir, resolver problemas y aprender a aplicar los resultados que necesite, en la sociedad en la que se desenvuelve.

De otra parte, los profesores deben realizar una programación minuciosa y atenta a las necesidades de sus futuros alumnos. Para ello, las unidades didácticas que integren dichas programaciones deberán constar de diferentes actividades relacionadas unas con otras en las que se utilicen todos los materiales y recursos necesarios para que se realice un aprendizaje significativo. En la medida en que un estudiante para profesor o un futuro profesor sea capaz de desarrollar juicios de valor y de tomar decisiones sobre su propia práctica, mayor será su autonomía profesional. El profesor se debe, por tanto, equipar de todos los recursos y materiales que faciliten la actividad docente y que contribuyan al aprendizaje del alumno. El aula de Primaria debe ser un laboratorio en el que además del libro de texto se contemplen distintos recursos y materiales reales y cotidianos como fichas de trabajo, catálogos, folletos, hojas de publicidad etc. a materiales más convencionales y simbólicos como geoplanos, libros de espejos, cuerpos geométricos...sin olvidar el gran bagaje que actualmente suponen los recursos tecnológicos bien utilizados.

Sin embargo, el profesor no puede olvidar la competencia lingüística mediante la propuesta de actividades de descripciones, usos de símbolos y vocabulario, así como lecturas e interpretaciones de distintos conceptos geométricos. La consecución de estrategias resolutorias se debe hacer mediante la

exploración, composición, descomposición, la clasificación o comparación de figuras, de forma que el alumno llegue a encontrar aquellos elementos, propiedades y relaciones válidas para la resolución de problemas.

Los recursos audiovisuales y el ordenador son instrumentos útiles para reforzar y ampliar las actividades matemáticas generando una actitud positiva hacia esta materia. Aunque los diferentes programas audiovisuales o de ordenador no deben sustituir a las experiencias vivenciadas ni deben utilizarse en actividades fuera de contextos que a veces son automáticas y repetitivas. Así pues, en los siguientes apartados vamos a reflexionar sobre como:

- La realidad y el entorno social son poderosos recursos para enseñar los contenidos geométricos.

- Los elementos de información como los diarios de papel o digitales, las guías de transportes o los mapas contribuyen a ubicar a los alumnos en el espacio en el que se mueven, contribuyendo a dicha ubicación la visualización, la percepción y la intuición como recursos importantes en la enseñanza de la geometría.

- La relación Geometría y Arte, hace que esta materia sea más apreciada y reconocida por los alumnos lejos de esa concepción que tienen algunos como materia aburrida y abstracta.

Por último, en este capítulo dedicado a los recursos, trataremos las rutas geométricas como elemento unificador de los demás recursos y actividades.

El empleo de recursos y material didáctico debe ser norma de conducta del profesor y el alumno en la enseñanza-aprendizaje de la geometría.

### **3.2. La realidad como recurso. Entorno natural y social**

El profesor debe utilizar la realidad para proponer tareas durante el curso escolar, pues hay muchas actividades que se pueden realizar fuera de la clase que se escapan al ritmo usual de trabajo. El entorno que nos rodea es un medio puesto a la disposición del profesor de Primaria, y éste debe utilizarlo y ponerlo al servicio de la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Desde el entorno urbano, con sus edificios típicos, centros comerciales, zonas verdes,...hasta el medio rural con sus campos, animales, bosques,... son una realidad rica y plural, viva y cercana, que ofrece innumerables posibilidades didácticas para trabajar actividades geométricas relacionadas con el currículo de Primaria. Por ejemplo, en los parques encontramos gran variedad de elementos que nos muestran las formas que el alumno estudia en el aula, como papeleras cilíndricas, farolas esféricas, rectas paralelas, cuadrados o rombos en el diseño del suelo: pero también encontramos simetrías en el ramaje de los

árboles hojas y formas triangulares, pentagonales de algunas flores,...En el parque, también se pueden realizar todo tipo de medidas de longitudes, cálculo de pesos, tiempos, áreas.

### ***Actividades para los alumnos.***

*Los alumnos eligen varios temas preferidos como Deportes, Automóviles, Música, Cine, objetos de una tienda especializada... y realizan un trabajo en grupo para mostrar cómo en todos ellos encontramos Geometría. Después hacemos una puesta en común en la que los alumnos exponen sus trabajos.*

Por ejemplo, si nos fijamos en el tema Deportes, podríamos escoger los elementos con los que se juega o participa (balones, paralelas, plintos) y observar que todos ellos pueden ser descritos mediante elementos geométricos. También los terrenos donde se juegan son geométricos e incluso los movimientos que hace el entrenador en la pizarra cuando explica las distintas estrategias. Si observamos las posiciones que los deportistas de gimnasia artística o deportiva adoptan, también representan formas geométricas como ángulos llanos, rectos, agudos, etc. como vemos en la figura 3.1.



Figura 3.1. Ángulos con el cuerpo

### **3.3. La Geometría y el Arte**

El origen cultural de la Geometría no hay que buscarlo sólo en la antigua necesidad de medir las tierras de los agricultores a la orilla del Nilo, como suele señalarse tradicionalmente, sino que el Arte que se ha desarrollado y se sigue desarrollando en todas las civilizaciones ha sido también fuente importante del desarrollo de la Geometría. El Arte surge de la organización del espacio a través de los sentidos y mente del artista. La Geometría es en gran parte una organización matemática de ese mismo espacio utilizando las ideas geométricas: distintas formas, simetría y regularidad. Es lógica pues una gran influencia de la Geometría en el Arte y viceversa. En esta influencia mutua se pueden dar dos casos: que el artista utilice un modelo matemático ya conocido o por el contrario utilice un modelo que

existe pero que no ha sido todavía formalizado por los matemáticos para construir su obra. Por ejemplo, en la catedral de Rávena se encuentran diseños del triángulo de Sierpinski que datan del siglo XII. El matemático polaco Waclaw Sierpinski introdujo este fractal en 1919 (figura 3.2.)

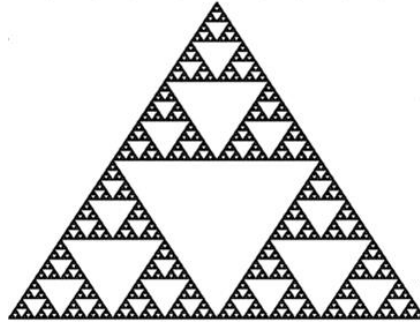


Figura 3.2. Triángulo de Sierpinski



Figura 3.3. El Sacramento de la última cena de Salvador Dalí (Galería Nacional de Arte de Washington D. C.) ([https://es.wikipedia.org/wiki/La\\_última\\_Cena\\_\(Dalí\)](https://es.wikipedia.org/wiki/La_última_Cena_(Dalí)))

En otras ocasiones, parece claro que el artista aplica un modelo geométrico teórico ya conocido como en el cuadro *El Sacramento de la Última Cena* de Dalí (figura 3.3).

#### ***Actividades para los alumnos.***

*El profesor mediante la observación del cuadro, El Sacramento de la Última Cena de Dalí, y sus preguntas hace ver al alumno un dodecaedro, doce apóstoles y doce cuadros en el mantel. Luego es una obra basada en el número doce. También pueden observar que hay una disposición claramente*

*simétrica de los apóstoles a partir de un eje que pasa por Jesucristo, incluso los ropajes de los apóstoles, el pan partido o los rayos de luz sobre la mesa cumplen la simetría. Cuando Dalí entregó este cuadro afirmó “La comunión debe ser simétrica”.*

En muchos casos, no se puede decir que el artista haya aplicado conscientemente ciertos conocimientos geométricos, o no estamos seguros de que lo haya hecho, pero su obra puede ser analizada con ojos geométricos en una especie de reconstrucción del modelo matemático que la define.

Vamos pues a plantear actividades que nos permitan como profesores mostrar a los alumnos un cierto camino en paralelismo con el arte, como son la pintura y la escultura, y los diseños actuales como logotipos, carteles publicitarios, construcción de objetos cotidianos... siempre teniendo en cuenta el nivel en el que nos encontramos. Estas actividades dan ocasión para realizar un estudio de cómo el espacio de tres dimensiones en el que el alumno se mueve es representado en el mundo de dos dimensiones a lo largo de la historia. El estudio, matemáticamente hablando, sirve para revisar ideas geométricas: (ángulos, formas, medidas, simetrías...) en contextos no matemáticos.

Hay que resaltar la idea, aplicada a las obras artísticas, de que la Geometría es también una forma de destacar ciertos aspectos de la vida ordinaria y de la realidad, además que el alumno conozca el carácter interdisciplinar de la Geometría y sus raíces culturales.

Debemos entender que la aplicación de la Geometría al Arte facilita el desarrollo del llamado “pensamiento espacial” El profesor debe hacer que se aprecie el valor de la creatividad y el “pensamiento divergente”, recuperando la actitud de muchos alumnos que quedan discriminados cuando sólo se tratan procesos secuenciales o lineales de razonamiento.

***Actividad individual para estudiantes para profesores. El quitasol.***

*Sabemos que Goya ha dejado por escrito su entusiasmo por las matemáticas. Vamos a utilizar la geometría dinámica para estudiar un cuadro de este famoso pintor, denominado “El quitasol” (figura 3.4.).*

- *Trazamos las diagonales al rectángulo que forma el cuadro. Observar cómo se relacionan esas diagonales con los elementos del cuadro.*
- *Construir un triángulo que tenga como base el lado inferior del rectángulo que forma el cuadro, y que contenga a los dos personajes. Comentar la relación de este triángulo con los elementos del cuadro.*
- *Intenta triangular a la dama.*



- Realizadas todas las actividades hacemos una puesta en común sobre “La relación de la Geometría con el Arte”
- Busca otros cuadros y realiza un estudio parecido.



Figura 3.4. El quitasol de Goya (Museo del Prado, Madrid)

(<https://www.museodelprado.es/coleccion/obra-de-arte/el-quitasol/a230a80f-a899-4535-9e90-ad883bd096c5>)

La forma de dibujar de los niños pequeños, como la de las culturas en alguna época primera, ha sido usando un tipo de representación que suele denominarse **conceptual**.



Figuras 3.5. Pinturas egipcias

Por ejemplo, los alumnos pueden observar cómo en el antiguo Egipto se representaban las figuras humanas con cabeza y piernas de perfil (figura 3.5), mientras que torso y ojos se representaban de frente; o bien, cómo en las pinturas islámicas y pre-renacentistas, las formas y superficies verticales se representaban como vistas desde abajo, mientras que los planos horizontales se representaban como vistos desde arriba.

Representar objetos de tres dimensiones sobre una superficie plana no es algo intuitivo. Estas representaciones se llaman **representación perceptual** o racional del espacio y las reglas son las mismas que si hiciéramos una fotografía con una cámara fotográfica. Los alumnos pueden observar que los objetos más cercanos se representan en tamaño más grande y los lejanos en tamaños más pequeños. En esto se basa el principio de la perspectiva. La perspectiva es el arte que se dedica a la representación de objetos tridimensionales en una superficie bidimensional (plana) con la intención de recrear la posición relativa y profundidad de dichos objetos. La finalidad de la perspectiva es, por lo tanto, reproducir la forma y disposición con que los objetos aparecen a la vista. Es Alberto Durero quien nos muestra el principio de la perspectiva, que domina en el Arte durante el Renacimiento y algunos siglos posteriores. En el cuadro de Piero de la Francesca (Figura 3.6), podemos ver el punto de fuga de la perspectiva, hacia dónde tienden las líneas, que en la realidad de tres dimensiones son paralelas.

***Ejercicio individual para estudiantes para profesores.***

*- Busca otros cuadros idóneos para alumnos de niveles superiores de E. Primaria y realiza un estudio parecido en el que se muestre a los alumnos la diferencia entre la representación conceptual y la representación perceptual.*

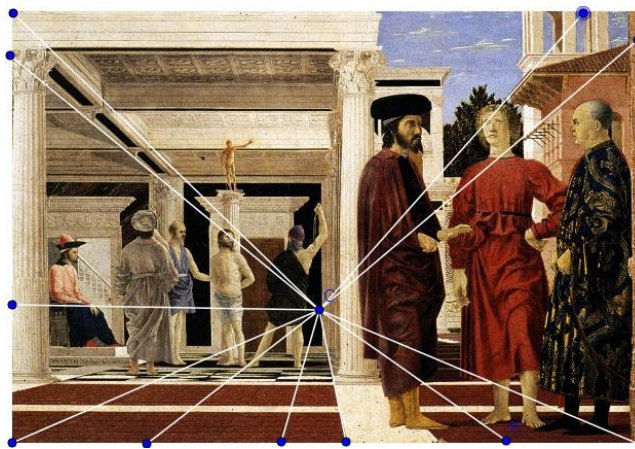


Figura 3.6. Piero della Francesca. La flagelación de Cristo. ([https://es.wikipedia.org/wiki/La\\_flagelacion\\_\(Piero\\_della\\_Francesca\)\)](https://es.wikipedia.org/wiki/La_flagelacion_(Piero_della_Francesca))))

Otra forma de realizar arte es mediante *piezas encajables*, que es lo que se denomina un **mosaico**. El mosaico primitivo se construye con guijarros y era utilizado por los griegos para decorar las paredes o los suelos de sus estancias y sus patios. Estos mosaicos representaban escenas cotidianas como la caza o bien algún hecho importante de guerra. En el mundo romano se sigue utilizando los mosaicos con el mismo fin, pero ahora el mosaico es cuadrado y se denomina **tesela**. En los mosaicos podemos encontrar diferentes diseños geométricos donde además de aparecer figuras geométricas se juega con las simetrías, traslaciones o giros. En esta etapa, las piezas se dejaban más o menos separadas para poder formar motivos curvos como ramos de flores o círculos como podemos ver en el mosaico romano de la figura 3-7 localizado en Mérida (Extremadura). Posteriormente, la tesela pasa a transformarse en formas poligonales clásicas como son rectángulos, trapecios isósceles, pero con la idea de que las piezas cubran todo el suelo, es decir, compacten de forma que la uniones son los lados de los polígonos. En la Mezquita de Córdoba encontramos mosaicos califales del siglo X, hechos con piezas cuadradas y rectangulares de ladrillo rojo y mármol blanco.



Figura 3.7. Mosaicos. Mérida.

(<https://ciclodemosaiico.wordpress.com/2013/02/07/merida-mosaicos-romanos/>)

De aquí se pasa a piezas recortadas de forma que puedan seguir encajando. Este arte tiene su máximo esplendor en España en el siglo XIV y los alicatados de La Alhambra son una buena muestra de ello (figura 3.8). El artista M.C. Escher (1898-1972), conocedor del Arte Islámico, basó parte de su obra en las ideas recogidas de los alicatados junto con nuevas ideas geométricas que estudia convenientemente. Así desarrolla toda una serie de estudios sobre división regular del plano con figuras humanas o animales (figura 3.9). De tal forma, nos resulta interesante el estudio de las decoraciones y mosaicos artísticos en nuestras clases, ya que nos da oportunidad para tratar temas, dentro de la Geometría, como son las formas y transformaciones geométricas.



Figura 3.8. Mosaico del Palacio de la Alhambra. Granada.

(<http://matemolivares.blogia.com/2013/011801-la-alhambra-la-mas-bella-joya-geometrica-y-arquitectonica..php>)

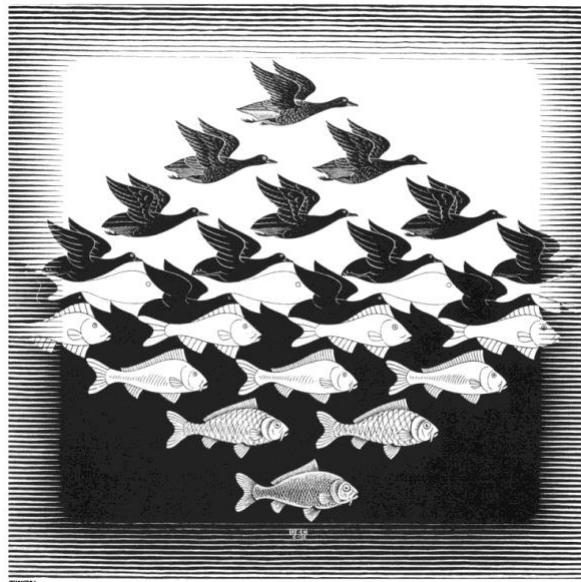


Figura 3.9. Cielo y agua. Escher (1938).

(<http://www.mcescher.com/gallery/switzerland-belgium/sky-and-water-i/>)

Hay otras muchas formas de relacionar la Geometría con el Arte, como los cuadros hechos con hilos tensados. Recordemos que mediante hilos y chinchetas o alfileres podemos construir diferentes curvas y superficies hechas con rectas que forman parte también del mundo del Arte como podemos ver en la figura 3.10.

Mediante el ordenador y un programa conveniente, los alumnos pueden desarrollar su creatividad construyendo sus propias obras de arte geométricas en las que podemos encontrar todo de tipo de figuras o transformaciones geométricas (figura 3.11).

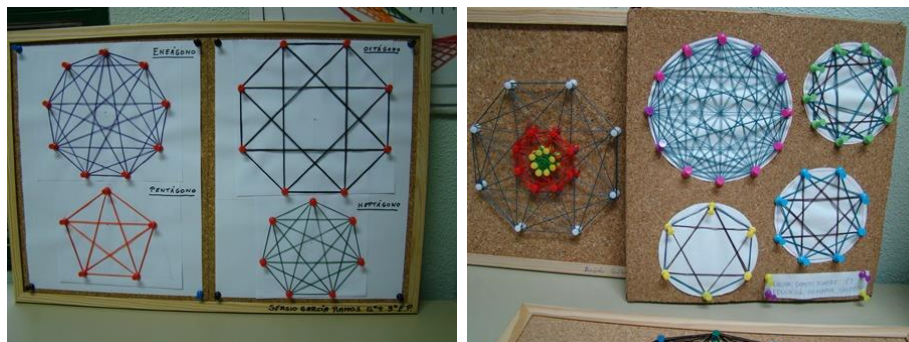


Figura 3.10. Geometría y Arte con hilos tensados

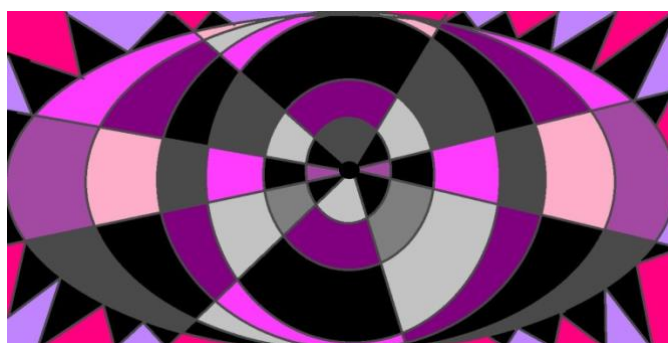


Figura 3.11. Ojo Elíptico hecho con Paint por los alumnos de la Unex

### *Actividades para los alumnos*

*Hacer un estudio sobre diversos autores que utilizan la geometría para la creación de sus obras de arte, como Escher, Mondrian, Kandinsky o Andy Gilmory.*

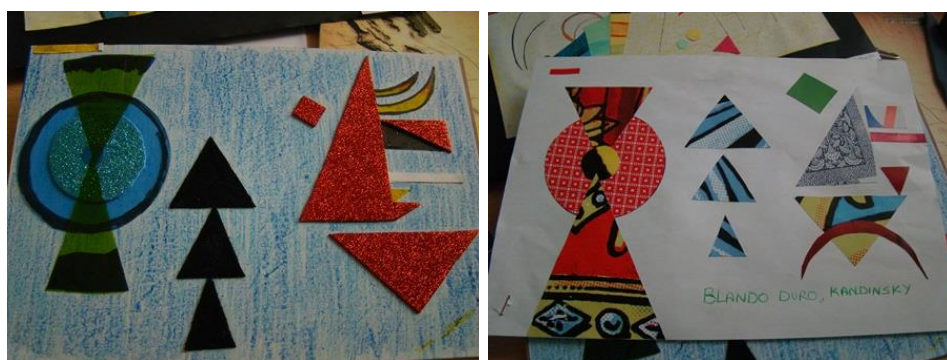


Figura 3.12. Imitando a Kandinsky realizados con distintos materiales por los alumnos

*Los alumnos en grupo observan las obras de estos autores e intentan hacer su propio cuadro imitándolos. En la figura 3.12 vemos dos construcciones a partir de la famosa obra “Duro y blando” de Kandinsky. (<http://matemolivares.blogia.com/2014/020102-vassili-kandinsky-la-geometria-hecha-arte..php>)*

### **3.4. El dibujo en geometría**

Otro tipo de actividades son las relacionadas con el dibujo. Éstas son importantes pues el dibujo en Geometría sirve para poder representar figuras, mapas, planos, etc. en un principio de manera informal, para, posteriormente, poder efectuar una representación fiel y más precisa de la realidad. El alumno debe adquirir conocimientos que le permitan manejar correctamente los instrumentos de dibujo para efectuar representaciones y poder hacer aplicaciones a la vida diaria.

Es importante que el alumno haga dibujos a mano alzada, para realizar croquis o dibujos esquemáticos que le sean útiles en la resolución de problemas. Para ello puede ayudarse de mallas y papel cuadriculado que una vez realizado el dibujo nos servirán para realizar actividades como el cálculo de áreas de polígonos o cómo efectuar traslaciones o giros. También, la escuadra y el cartabón, junto con el compás y la regla serán de uso obligado para el alumno en los distintos niveles y con una progresiva utilización de manejo y precisión dependiendo del nivel en que se encuentre el alumno. Los dibujos son importantes porque pueden hacer que los alumnos intuyan y comprendan algunas ideas geométricas, pero hay que tener cuidado de que no formen ideas erróneas del concepto como veremos en el tema 7.

Es mejor manipular que dibujar pues el inconveniente de éstos es que no son flexibles o modificables de una forma dinámica, salvo que utilicemos dibujos de programas de ordenador en los que, por ejemplo, un rombo puede ser convertible en un cuadrado y viceversa. Mediante la informática, el profesor puede trabajar con los alumnos las diferencias que existen entre las construcciones hechas con regla y compás, en un papel, y cuando se aplica el ordenador mediante el programa Cabri o GeoGebra u otro programa de dibujo. Es importante trabajar con los alumnos los dos métodos, provocando una discusión sobre las diferencias de los métodos y la conveniencia de cada uno de ellos. La discusión y comparación de estos métodos alternativos favorece la comprensión de los conceptos geométricos y la adquisición de estrategias de resolución de problemas.

#### ***Actividades individuales para estudiantes para profesores.***

*Realizar mediante lápiz y papel y un programa de ordenador las siguientes construcciones:*

- Construcción de rectas paralelas y perpendiculares a un punto dado.*
- Construcción de ángulos rectos y un ángulo de una medida dada.*
- Construcción de triángulos equiláteros dado el lado.*

- *Construcción de elementos notables de un triángulo, mediatriz, mediana, bisectriz y altura y sus puntos de intersección.*

- *Construcción de un rectángulo y cuadrado.*

- *Construcción de un exágono regular.*

- *Sacar conclusiones con respeto a su utilidad, su dificultad, el dinamismo, su conveniencia de unas u otras construcciones para utilizarlas con los alumnos en clase.*

### **3.5. Visualización en Geometría. Percepción e intuición espacial**

Podemos decir que la visualización en geometría es la formación de imágenes mentales, es decir, generar en nuestra mente un soporte relacionado con un objeto que estamos viendo, pensando o simplemente hablando de él. A modo de ejemplo: si decimos “cilindro” automáticamente se forma en nuestra mente una imagen de este objeto. Por ello, la importancia de los modelos visuales para la adquisición de conceptos geométricos y para fomentar la habilidad de los alumnos a la hora de dar razones lógicas que expliquen la validez de las fórmulas geométricas.

Los medios audiovisuales de comunicación están provocando en los alumnos unos grandes cambios en sus hábitos de percepción y en sus procesos mentales debido al paso de una cultura escrita a una cultura audiovisual. Estos cambios se deben tener en cuenta en la enseñanza con una metodología activa, en la que el profesor debe ser conocedor de los elementos específicos del lenguaje audiovisual para integrarlos como recurso didáctico en su docencia. Las impresiones visuales son esenciales para la adquisición de los conocimientos, por lo que es necesario dar mayor importancia a la percepción y a la intuición espacial en los currículos actuales.

En el diccionario de la Real Academia Española se considera **la percepción** como *sensación interior que resulta de una impresión material hecha en nuestros sentidos*, es decir, es un proceso nervioso superior que permite al organismo, a través de los sentidos, recibir, elaborar e interpretar la información proveniente de su entorno y de sí mismo.

**La intuición espacial** podríamos definirla como *el control de cualquier situación, bien sea espacial o problemática, desde la mente*. Esto es, nuestra mente trabaja con imágenes que son originadas por percepción sensorial (vista, oído, tacto, gusto y olfato) y son la base para localizarnos en el espacio y resolver los problemas que se nos pueden plantear en él. El desarrollo de la capacidad de percepción mediante actividades convenientemente seleccionadas, permite al alumno tener una

mejor representación de la realidad que a su vez puede ser mejorada trabajando las imágenes mentales que posee.

La mayoría de nuestros conocimientos se adquieren con impresiones visuales. Por ello, la intuición espacial debe ser una materia transversal con otras materias tales como en el medio Natural y Social, Plástica y Educación Física. Los alumnos que desarrollan sus relaciones espaciales de una manera sólida y además dominan el lenguaje y los conceptos geométricos, están mejor preparados para aprender la aritmética y las operaciones, y también en otros campos posteriores como la bioquímica, cirugía, aviación, mecánica, escultura, coreografía y arquitectura.

#### ***Actividades de percepción e intuición espacial.***

Vamos a presentar algunos ejemplos que consideramos útiles para desarrollar más adecuadamente la percepción y la intuición, pues consideramos que es necesario diseñar un trabajo para el aula en el que se incluyan actividades de percepción e intuición espacial, en las que se tendrán en cuenta los propios errores de los alumnos como una fuente más de información.

Antes de nada, señalar que también están relacionadas con la percepción e intuición espacial, las actividades que realizamos con las formas planas y los cuerpos como: distintas composiciones y descomposiciones con materiales constructores como el tangram o puzles matemáticos, que veremos cuando trabajemos con dichos materiales. También es importante la percepción y la intuición espacial en todas las imágenes gráficas que el profesor muestra a sus alumnos, tanto fotografías como dibujos, en los que pueden presentarse incorrectas interpretaciones al plasmar los cuerpos correspondientes en una representación de dos dimensiones. Estas situaciones se estudiarán en el capítulo dedicado a los obstáculos y errores en la enseñanza y aprendizaje de las figuras geométricas.

A continuación mostraremos actividades que hace que el alumno desarrolle su intuición espacial y están relacionadas con: observación, relación tacto y mente, la orientación y perspectiva de los objetos del espacio y pasar del espacio al plano.

**a) Actividades de observación.** Otro grupo de actividades que el profesor puede realizar con los alumnos para desarrollar sus dotes perceptivas y de visualización serían las actividades de observación del tipo:

*1- Elige un anuncio de la televisión y analiza: Las figuras y los cuerpos geométricos que aparecen. Clasificalos.*



2- El profesor saca un alumno al centro del aula y le das las siguientes ordenes: “Coge y observa el folio que te proporciono; sin soltarlo, mostrarlo, ni gesticular explica a tus compañeros las figuras que contiene de modo que todos puedan dibujarla” (Previamente el maestro prepara un folio con unos dibujos geométricos simples como los de la figura 3. 13).

El alumno que explica debe saber transmitir de forma correcta los dibujos para lo que no solamente tiene que utilizar su vocabulario geométrico sino también debe mostrar cuál es su control sobre el espacio (en este caso las figuras sobre el folio) utilizando vocabulario de orientación, perspectiva, formas y tamaños de los objetos: “la tangente está a la derecha”, “es un rectángulo”, “es un triángulo con un lado prolongado”, etc.

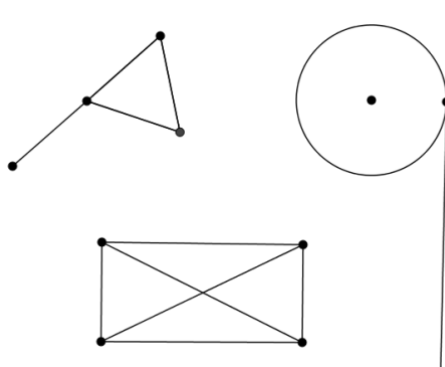


Figura 3.13. Dibujos geométricos

**b) Actividades de relación del tacto con la imagen que se forma en la mente.** Ya hemos dicho que una vez formadas las imágenes en la mente, éstas constituyen la base del aprendizaje. Por ello, conseguir una observación óptima de estas imágenes, su composición y posterior utilización debe ser una parte básica en el aprendizaje de los alumnos. Las actividades del tacto y la mente se caracterizan porque para la captación de la imagen se prescinde de todos los sentidos salvo el sentido del tacto. Esta dificultad le lleva a conflictos relativos a sus representaciones disposicionales, que tiene que resolver mediante el tacto, desarrollando éste para construir la imagen buscada.

***Actividades para los alumnos.***

*Se dan a los alumnos dos bolsas con los mismos objetos. Uno de los alumnos extrae un objeto de la primera bolsa y lo muestra a la clase. Otro alumno, debe extraer el mismo objeto de la segunda bolsa para no ser eliminado. Se repite el proceso explicando siempre las características de los objetos que van saliendo hasta que se sacan todos. Los objetos pueden ser de la vida ordinaria o formas y cuerpos geométricos. Una variante de este juego se puede hacer con cubos encajables (Multilink) y el juego*

*consiste en que cada alumno construye un cuerpo con dichos cubos y lo guarda cada uno en una bolsa. Los alumnos se intercambian las bolsas y, usando solo las manos, deben identificar el cubo que hay dentro de la bolsa que les ha tocado, para construir uno igual.*

Estas actividades, además de desarrollar la relación que existe entre el tacto y la imagen, hacen que el alumno trabaje otros elementos como es la terminología adecuada, así como las características físicas del correspondiente cuerpo geométrico

**c) Actividades de orientación y perspectiva de los objetos del espacio.** Las actividades de orientación en su entorno y/o fuera de él, posibilitan al alumnado que adquiera la capacidad de moverse en diferentes circunstancias y lugares.

Como sabemos, la orientación es muy importante para que el individuo sea capaz de ubicarse en el espacio en el que se mueve o se localiza. Ésta se relaciona directamente con la Geografía mediante la cartografía, las representaciones del espacio: proyecciones, escalas, signos, y las interpretaciones e interacciones con dicho espacio. En los siguientes ejercicios, el alumno debe cambiar varias veces su rol de espectador externo y situarse en el papel de los personajes de la actividad para poder percibir el espacio desde su situación, desarrollando así su intuición espacial desde el punto de vista del sentido espacial.

#### ***Actividades para los alumnos.***

*1- Tenemos sobre la mesa los objetos que vemos en la fotografía (figura 3.14) y numerados los ángulos de visión del 1 al 4. El ejercicio consiste en reconocer los objetos que están en la mesa y numerar las fotos de abajo (figuras 3.15) atendiendo a su ángulo de visión.*

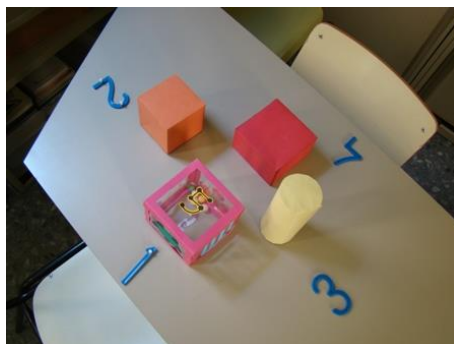


Figura 3.14

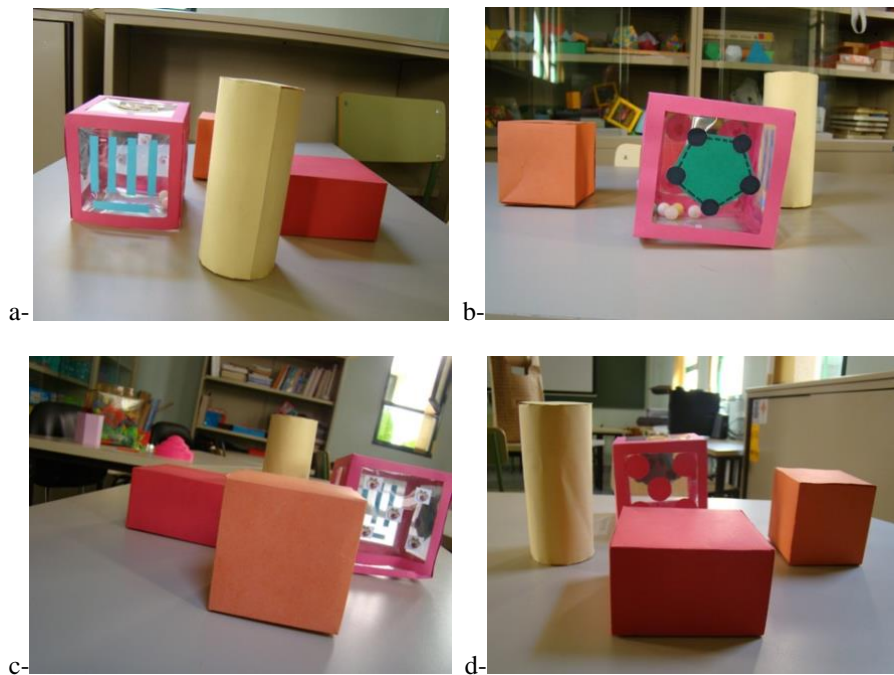


Figura 3.15

**d) Actividades del paso del espacio al plano y viceversa.** El paso mental de la imagen espacial al plano supone para el alumno diferentes problemas de ubicación, de orientación, de formas, es decir, de intuición espacial que, a veces, le lleva a no resolver el problema, pues no es capaz de visualizar la solución en el espacio para poder plasmarla en el plano. La representación del espacio (tridimensional) sabemos que se puede realizar en un paso intermedio al plano, mediante maquetas realizadas a escalas, en las que se pueden marcar los contornos de los cuerpos y luego suprimirlos para dejar solamente el plano dibujado. También, para obtener los desarrollos planos de los poliedros, el alumno puede realizar sucesivos giros del cuerpo para poder dibujar todas las caras del cuerpo en el plano.

Así, como en el caso de los desarrollos planos donde se representan las caras del cuerpo, la representación plana se hace mediante reglas o convenios que dan lugar a diversas maneras de representar una misma realidad, De esta forma, surgen las representaciones isométricas, proyectiva, ortogonal, cilíndrica, etc. en la que nosotros no vamos a entrar pues no son el cometido de nuestro trabajo. Pero si vamos a ver un tipo de representación acorde con la Primaria y que surge de los mismos juegos de los alumnos, que son los garabatos geométricos.

**a) Garabatos geométricos.**

Hay una serie de figuras que las personas utilizan como entretenimiento, pero que llevan en forma intrínseca apareada una cultura de representación de la realidad. Estas figuras son las que llamamos

Garabatos y son populares entre los alumnos para representar distintos personajes como mexicanos, vallas,... En nuestro caso, los hemos rebautizados como Garabatos geométricos.

Por lo tanto, Garabato geométricos son *los dibujos de representación plana en los que se utilizan la menor cantidad de líneas posibles y que representan algo espacial* (un objeto, personas, animales...), que generalmente es sorprendente, divertido e inesperado. Los garabatos geométricos suelen ser las primeras representaciones planas que hacen los alumnos sobre un cuerpo espacial. Este tipo de dibujos es un juego motivante y cotidiano entre los niños; además, su construcción es sencilla pues son unas pocas figuras planas vistas desde una perspectiva espacial.

### ***Actividades para los alumnos.***

*¿Qué formas geométricas son los dos dibujos de la figura 3.16 y 3.17? Imagina qué pueden representar dichos dibujos en la vida real.*

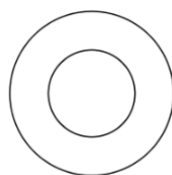


Figura 3.16. Respuestas: Un chupete visto de frente, papelera vista desde abajo, globo volador visto desde abajo, rosquilla, tubo de escape...

Las respuestas son las dadas por alumnos de tercer curso de Primaria, en una experiencia, ya publicada (ver bibliografía), que realizamos en el colegio San Fernando de Badajoz. Podemos observar la cantidad de imágenes distintas que se producen en la mente del alumno frente a una misma figura plana.

Estos nos indica cómo la mentes de los alumnos construyen imágenes espaciales distintas a partir de sus representaciones disposicionales que como ya dijimos son frutos del aprendizaje y las experiencias de cada uno. Es notorio, indicar la riqueza y la facilidad que tenían los alumnos para construir dichas imágenes, lo que nos muestra que estas actividades con garabatos pueden ser un importante elemento de desarrollo de su visualización, imprescindible para una buena construcción y comprensión de los conceptos y figuras geométricas.

Podemos observar como estas figuras, que se presentan en los libros de textos de forma abstracta sin significado ninguno, son tratadas por los alumnos como representaciones de objetos, personas o

situaciones que ellos conocen y que, además de su significado geométrico, le dan otro significado ingenioso y sorprendente que favorece su interiorización como objeto geométrico.

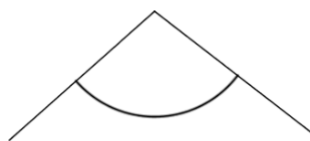


Figura 3.17. Respuestas: Un señor calvo leyendo el periódico, la punta de un lápiz, pico de caja de leche, esquina campo de fútbol, pico de pájaro,...

La realización de actividades con los garabatos geométricos potencia que los alumnos dibujen formas geométricas comunes y menos comunes como son: polígonos irregulares, cóncavos, sectores,... que generalmente no aparecen en los libros de textos y que pueden servir como motivación o de refuerzo de estudio de reconocimiento de formas planas. El objetivo de trabajar con los garabatos geométricos está en consonancia con la metodología de laboratorio de dar oportunidad a los alumnos de dibujar, observar, explicar, conjeturar y descubrir. Estas actividades desarrollan en los alumnos su percepción y visualización espacial pues, por ejemplo, se hace la observación de un mismo objeto desde distintas perspectiva, tan importante en el estudio posterior de los distintos sistemas de representación, como las proyecciones. Para familiarizar al estudiante para maestro, mostramos otros sencillos garabatos a modo de ejercicios, que pertenecen al estudio que realizamos con los alumnos de Primaria.

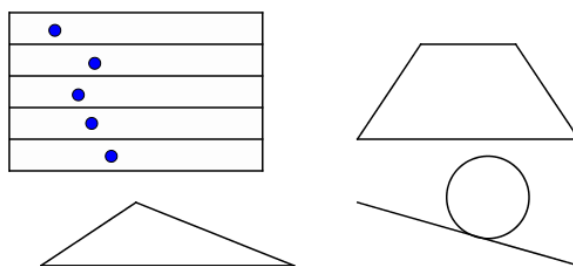


Figura 3.18. Garabatos geométricos

***Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.***

*Los estudiantes en grupo deben decir qué representan los garabatos que mostramos en la figura 3.18. Posteriormente, deben elaborar garabatos que tengan también algún interés geométrico. Por*

último, se hace una puesta en común del grupo para que todos conozcan los trabajos de los demás y se reflexione sobre la utilidad de éstos en la escuela primaria.

**e) La percepción e intuición espacial y las clasificaciones de formas y cuerpos geométricos.**

Para generar imágenes mentales apropiadas a los conceptos, cada modelo debe elaborarse de manera que las propiedades del modelo se idealicen mentalmente prescindiendo de imprecisiones inevitables del modelo o bien, como resultado de mediciones. Los alumnos deben tener en mente un modelo ideal en el que ya sin la necesidad de medir se encuentre la igualdad de longitudes o de ángulos, el paralelismo de rectas o la perpendicularidad. Esas percepciones sin embargo de las características del modelo tienen que estar siempre fundamentada por una definición o mediante una demostración por deducción lógica. No importa, pues, tanto que el alumno sepa definir un triángulo, como que sea capaz de reconocer y distinguir los triángulos de los que no lo son en una actividad de figuras planas.

La idea es presentar los conceptos de una forma dicotómica, con el objetivo de que el alumno descubra la definición del concepto a partir de las propiedades que cumplen o no cumplen las figuras dadas. Para ello, vamos a empezar primeramente con formas y propiedades no familiares al alumno. Dichas actividades se realizan anteriormente a que el profesor quiera enseñar a los alumnos, las distintas formas o cuerpos mediante sus características o propiedades.

**Actividades para los alumnos.**

*Suponemos un país llamado Palotilandia en el que viven sus habitantes llamados Palotes junto con otros que por sus propiedades no son Palotes.*

Dentro de las fases de la metodología de laboratorio, estaríamos en las dos fases primeras, es decir, trabajo a realizar y material a utilizar. Los Palotes y No Palotes pueden ser construidos en cartulinas.

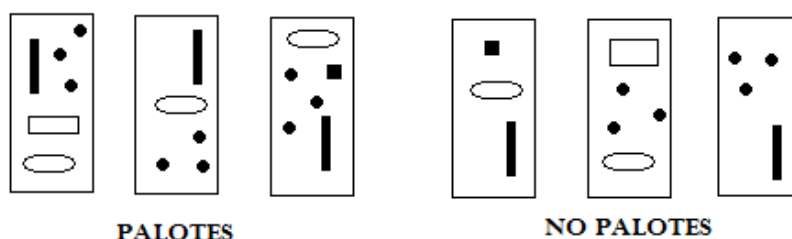


Figura 3.19. Palotes y no Palotes

En la figura 3.19. se definen los “Palotes” y los “No Palotes” mediante características de parecidos y de no parecidos.

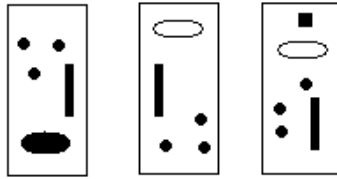


Figura 3.20. ¿Cuáles son de la familia de los Palotes?

Una vez identificados, vendría la fase de exploración (figura 3.20) El profesor pregunta a los alumnos *¿Cuál o cuáles de los siguientes individuos son, también, Palotes?* El alumno debe haber observado las propiedades que diferencian a los Palotes de los no Palotes

- Igualmente con el siguiente ejemplo donde las características necesitan mayor observación y precisión para ser descubiertas. Los “Ojos Negros” y los “No Ojos Negros” están juntos en una fiesta. Podrías descubrir *¿quiénes son unos y quiénes son los otros?* (figura 3.21)

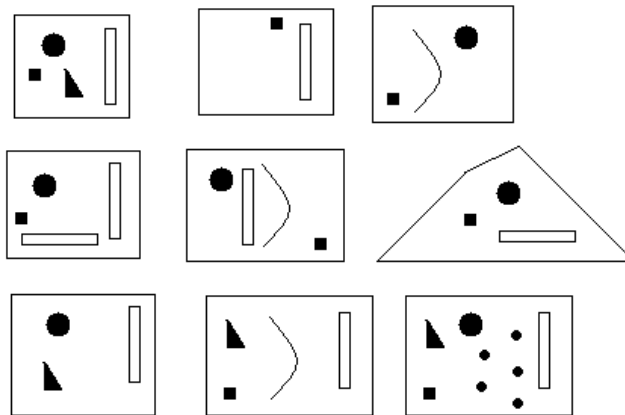


Figura 3.21. Los Ojos Negros y los No Ojos Negros

Tres individuos más llegan a la fiesta, ¿podrías decir si son Ojos negros o no? (figura 3.22)

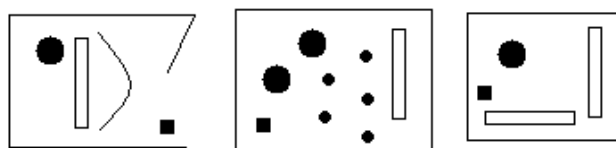


Figura 3.22. ¿Cuáles son de la familia de Ojos Negros?

Los estudiantes para profesores deben realizar estas actividades y experimentar qué ocurre cuando nos encontramos con figuras con propiedades desconocidas. Se debe establecer una puesta en común para expresar cuáles son las sensaciones que se sienten al trabajar con estos ejemplos y cuáles son las estrategias que utilizamos para resolver los problemas.

Una vez que los alumnos han aprendido a extraer propiedades con los ejercicios anteriores, el profesor puede trabajar con ellos los conceptos geométricos tales como segmentos, ángulos, polígonos, mediante dichas presentaciones dicotómicas. Vemos algunos ejemplos.

**Actividades para los alumnos.**

1- Distinguir entre polígonos y no polígonos en la figura 3.23

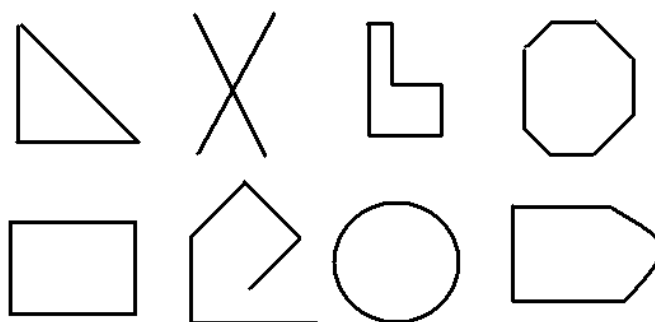


Figura 3.23. Polígonos y no polígonos

Si el alumno no sabe resolver, el profesor ayuda nombrando propiedades, del tipo: *Los polígonos son cerrados... los polígonos no tienen lados curvos...* Los siguientes ejercicios sirven de refuerzo.

- ¿Cuáles son polígonos (Figura 3.24)? ¿Por qué?

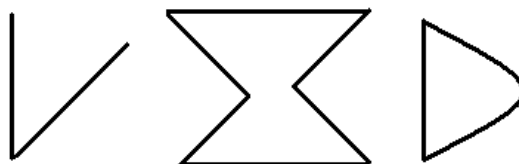


Figura 3.24. ¿Polígonos?

2- Distinguir entre polígonos cóncavos y convexos en la figura 3.25.

Seguramente en este tipo de ejercicios el profesor tendrá que prestar ayuda al alumno, mostrándoles un polígono convexo o mediante frases como *si podéis ir de un vértice a otro en línea recta sin salirse del polígono entonces es convexo.*



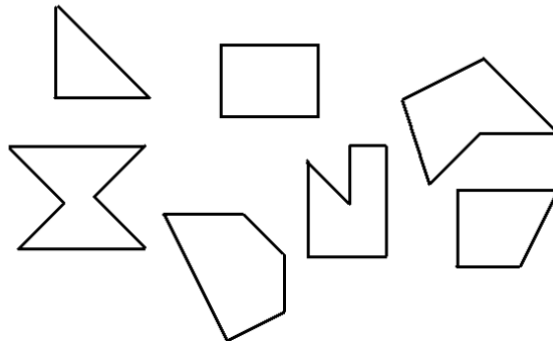


Figura 3.25. ¿Polígonos cóncavos o convexos?

Una vez terminadas todas las actividades de exploración se realizaría la última etapa, que puede ser una puesta en común o un documento en el que constaran todos los descubrimientos realizados mediante esquemas, tablas de clasificaciones como la figura 3.26, ejercicios de refuerzo individuales o en grupo...

|                     |                           |
|---------------------|---------------------------|
| <p>NO POLÍGONOS</p> | <p>POLÍGONOS CONVEXOS</p> |
|                     | <p>POLÍGONOS CÓNCAVOS</p> |

Figura 3.26. Clasificación de polígonos

### 3.6. Las Rutas Geométricas como recurso didáctico.

Como ejemplo de un proyecto en el que participan todos los alumnos comentamos la actividad denominada **Ruta Geométrica** en la que con motivo de una visita a una ciudad, un monumento, un parque... *se programan tareas que aúnan y dan significado a aspectos como: visualización, construcción, dibujar y medida...* El objetivo principal de la Ruta Geométrica por una zona determinada o una ciudad concreta, puede ser realizando una guía cultural común en la que se resalten los aspectos geométricos, sociales y naturales correspondientes. La guía además de la información correspondiente será complementada con una recopilación de fotografías geométricas de la visita.

Pero además, queremos conseguir que los estudiantes para profesores elaboren y, a su vez, conozcan el proceso de elaboración de esta guía para poder aplicarlo en un futuro con sus alumnos.

Todos los estudiantes, individualmente o en grupo, participan en las actividades que se van proponiendo, trabajan analizando (describir y explicar) y actuando (planificar la acción). Los estudiantes manejan libros, folletos, revistas, internet para construir los temas y realizar las actividades correspondientes.

Queremos que experimenten la relación de la Geometría con el Cálculo, la Medida y el lenguaje matemático, que observen y experimenten, también, la relación de la Geometría con otras áreas. El trabajo sobre el entorno es un punto de encuentro privilegiado entre las Matemáticas y el Medio Social y Natural. Esta relación interdisciplinar favorece la visión global que el alumnado tienen sobre su realidad, y facilita su integración en la misma.

En la enseñanza de las Matemáticas la historia tiene el papel de presentar a ésta como una Ciencia entre las otras Ciencias y como una integrante más de la cultura humana. Con las actividades de la Ruta Geométrica pretendemos que los estudiantes entiendan que lo que se está aprendiendo en clase de Matemáticas es el fruto de una actividad humana que tiene sus raíces en la propia subsistencia o modo de organización, o bien, debido a preguntas abiertas en el seno de las Matemáticas, a las que se le buscan respuestas.

El profesorado de Matemáticas utiliza en contadas ocasiones el propio entorno como recurso para el aula. Una parte de este desinterés se debe al desconocimiento de las posibilidades que ofrece el medio para el estudio concreto de la Geometría. Hay que reconocer que, en general, las instituciones culturales o de otro tipo no hacen una oferta didáctica en el terreno de las Ciencias, y menos aún en el de las Matemáticas. Es notable la carencia de guías, catálogos, carteles explicativos, etc. que hemos encontrado en muchas instituciones; otras veces, la información que existe es abigarrada y confusa, poco adecuada para alumnos de Primaria; y, en pocas ocasiones, se presta atención especial a los aspectos científicos y matemáticos presentes, aun pudiendo ser relevantes. Este descuido de las instituciones hace que el trabajo del profesorado para sacar rendimiento a una salida fuera del aula aumente considerablemente.

También hay que reconocer que una salida supone un método de trabajo diferente (trabajo en equipo, investigación autónoma, uso de materiales nuevos, ruptura de los horarios del centro...) además de proporcionar una cierta sensación de inseguridad, por ejemplo, de que sabemos muy poco de Historia o de Ciencias -otro motivo más para colaborar con otros profesores-. A pesar de todas estas dificultades, valoramos que los argumentos esgrimidos a favor pesan más y que merece la pena intentarlo. El medio

ha de ser uno de los recursos habituales, entre otros, para la clase de Geometría. Las etapas metodológicas de la Ruta Matemática podríamos resumirlas en las siguientes:

**1- Preparación de la visita.** No basta con salir a la calle para que la actividad resulte interesante y atractiva para el alumnado. Recordemos a los grupos de alumnos que deambulan con cara aburrida por calles y museos, siguiendo las explicaciones de algún guía o tomando notas mecánicamente. Es preciso preparar la actividad, motivarla y, desde luego, sacar partido de ella posteriormente. Por ello, es necesario realizar un diseño previo.

#### **Actividades para grupos de estudiantes para profesores.**

*Se elige una ciudad, un barrio, una zona natural, etc. entre todos los estudiantes. En las fotografías podemos ver la visita realizada por estudiantes para profesores a la comarca de la Vera de Cáceres durante dos días. Los estudiantes para profesores organizados en pequeños grupos, y asesorado por su profesor, tienen que descubrir posibles centros de interés, a través de la prensa o internet, de guías de recursos, de nuestras propias actividades personales, de la experiencia de otros docentes... en casi todos los lugares, quedan muchas cosas por descubrir. Los centros de interés seleccionados al realizar esta actividad pueden ser:*

*- En el campo antropológico: La arquitectura, las fiestas y el folclore y la gastronomía popular como muestra de la actuación del hombre sobre el medio.*

*- En el campo del medio físico: Los paisajes más representativos de la zona (ríos, valles, vegetación ...)*

*- En el campo económico: La visita a los establecimientos artesanales, ganaderos, industriales...*

*- En el campo geométrico y de la medida: Estudio y análisis sobre las diferentes actividades a formular y que nos iremos planteando a la vez que vamos desarrollando los otros centros de interés como actividades de orientación en la ciudad o pueblo, formas de los edificios o plazas, o medida de superficies, alturas, catálogo de medidas antiguas, etc. Y otros campos que el profesorado considere de interés.*

*Los estudiantes para profesores tendrá también que planificar ¿Qué objetivos cubrir con la visita?, ¿Qué van a ver exactamente? y la duración de la visita a ese lugar concreto. Deberá decidir si va a haber explicaciones, si se van a hacer observaciones libres o guiadas, si se trabajará en grupos... y los recursos necesarios (cámaras de fotos, cámaras de video, papel cuadriculado o isométrico, instrumentos para medir...). Debe realizar el diseño de actividades, tanto de preparación*

a la visita, guías de observación durante la misma o para su posterior explotación. En clase se debe analizar, mediante una puesta en común, los trabajos previos de cada grupo estudiando los lugares a visitar.

En la organización de los aspectos prácticos sería conveniente también, que el profesorado hiciera personalmente la visita pocos días antes, para asegurarse de que todo está en su sitio y concertar las visitas, confirmar los horarios de visitas de iglesias y museos, condiciones y precios de visitas colectivas, si se pueden hacer fotos, grabaciones de video... y acoplar la ruta a horarios en los que hubiera poca gente. Con esta organización de los aspectos prácticos queremos hacer ver que es importante comprobar que lo planificado corresponde con la realidad dinámica, observando por ellos mismos lo que han diseñado teóricamente.



Figura 3.28. Visita a una fábrica de Pimentón y una fuente pública (La Vera, Cáceres)

**2- La visita.** Es la realización práctica de todo lo programado y acordado anteriormente. Los estudiantes para profesores visitan los lugares programados y en cada lugar explican y realizan las actividades que realizarían con sus alumnos para que entre todos se estudie y se reflexione sobre la conveniencia o inconveniencia, las ventajas o dificultades, problemas encontrados, etc. de las actividades concretas. El grupo correspondiente encargados de cada lugar ha preparado un material complementario para cada una de las materias, con observaciones, explicaciones, actividades, concursos culturales, anécdotas y sugerencias que enriquezcan la experiencia en el lugar concreto asignado.



Figura 3.29. Visita a la comarca de la Vera (Cáceres). Fotografías geométricas de la zona.

**3- Explotación posterior.** Posteriormente en el aula volvemos a analizar la información, conjuntando la obtenida a priori con la recogida a lo largo de la visita. A partir de esta puesta en común realizaremos la guía recopilatoria de todos los lugares estudiados por los estudiantes añadiendo algunas actividades como: recopilación de datos, dibujos, gráficas y ampliaciones de lo que más haya interesado. Por último, podemos seleccionar una serie de fotografías y actividades para poder montar una exposición didáctica sobre esta Ruta Geométrica en nuestro centro de estudio.

Este tipo de experiencia suele propiciar un cambio a nivel curricular que conduce al estudiante para profesor a una renovación en los modelos didácticos, conjuntamente con una mejora en las actitudes, las concepciones y las expectativas de enseñanza respecto a la Geometría. Sería interesante realizar una Ruta Geométrica con los estudiantes aplicando lo expuesto en este apartado. No se necesitan grandes viajes, puede ser a una capital o una comarca de la Comunidad Autónoma. Nuestra experiencia nos dice que los estudiantes no olvidan nunca este tipo de actividades además de lo que pueden aprender en ella.

## **Tema 4. Materiales manipulativos para la enseñanza de la geometría y la medida.**

### **I parte**

#### **4.1. Introducción**

El acuerdo general entre investigadores y docentes es recomendar el empleo de materiales experimentales desde los niveles más bajos. El reto no consiste en hacer Geometría sino en cómo plantear actividades geométricas sobre materiales concretos que permitan construir una estructura mental adecuada en avance hacia conocimientos superiores. Actualmente, los materiales tienen una doble función: *favorece el aprendizaje de los alumnos mediante su uso en la resolución de problemas y metodología de laboratorio* y, a la vez, *son instrumentos de formación curricular del profesor*, es decir, que éstos adquieran conocimiento práctico suficiente para desarrollarse cada vez más como docentes. Así pues, las tareas en el aula deben tener un comienzo basado en el uso de los recursos y del material didáctico. Los profesores se deben equipar de todos los materiales que faciliten la actividad docente y contribuyan al aprendizaje del alumno

#### **4.2. Importancia de la utilización de los materiales manipulativos. Modelos**

Es totalmente reconocido por la comunidad matemática que los materiales didácticos favorecen el paso de lo concreto a lo abstracto mediante su manipulación por parte del alumno. Considerando a Puig Adam, doctor en Matemáticas y didacta de las matemáticas y la geometría, podíamos definir los modelos como *todo aquel material capaz de traducir o de sugerir ideas matemáticas*. Es decir, aquellos materiales que ofrecen al alumno la oportunidad de observar y trabajar los conceptos y sus propiedades de una manera concreta, que le permiten profundizar y afianzar su aprendizaje. Estas observaciones y las actividades realizadas hacen que el paso de lo concreto a lo abstracto se haga de una manera continua y natural.

La finalidad de los modelos es construir esquemas mentales abstractos aplicables a una variedad más amplia de problemas. Los modelos permiten prevenir, diagnosticar y superar errores o desconocimientos y aumentar el uso del lenguaje y la motivación de los alumnos. Nos permiten descubrir las actitudes que el alumno tiene hacia la matemática, desarrollar sus destrezas, habilidades y creatividad. La construcción y posterior estudio de un modelo es un paso intermedio entre la percepción intuitiva que tiene el alumno y lo que puede llevar a descubrir, mediante actividades de comparación, identificación..., sobre la realidad geométrica. Las experiencias del alumno al trabajar con los modelos

construidos con los materiales le llevarán a obtener imágenes mentales mucho más ricas capaces de poder interpretar y contrastar todo lo perciben. Los modelos nos dan un sinfín de posibilidades matemáticas. Por ello, el profesor tiene que estar convenientemente preparado para elegir minuciosamente aquellos modelos en los que la elaboración de conceptos matemáticos sea intuitiva y la atención del alumno no recaiga en las propiedades del modelo sino en las actividades que debe realizar con él. Atendiendo a la clasificación de los materiales que hace José M<sup>a</sup> Fortuny, doctor y didacta de la geometría, podemos decir que éstos se pueden dividir en:

1. **Materiales constructores** son aquellos que se *utilizan para construir modelos*, como el papel, el cartón o la cartulina con los que se construyen cuerpos geométricos. También se utilizan para crear situaciones de aprendizaje mediante las actividades que se nos permiten hacer en ellos. Dentro de estos materiales se encuentran los Geoplanos, Papel trama, Mecanos, Espejos, Papel, Tangram para el estudio de la Geometría plana y el material Plot, material Polydron y el material orbital para trabajar la geometría espacial.

2. **Modelos contruidos** son aquellos materiales *que sirven directamente para observar y concretar conceptos y profundizar en propiedades* que, por otro lado, serían de difícil imaginación. Entre ellos encontramos los sólidos de madera o transparentes, desarrollos planos, modelos de descomposiciones del cubo,...

También estudiaremos el generador de revolución que podíamos clasificarlo como un material mecanismo, pues trabaja con un motor.

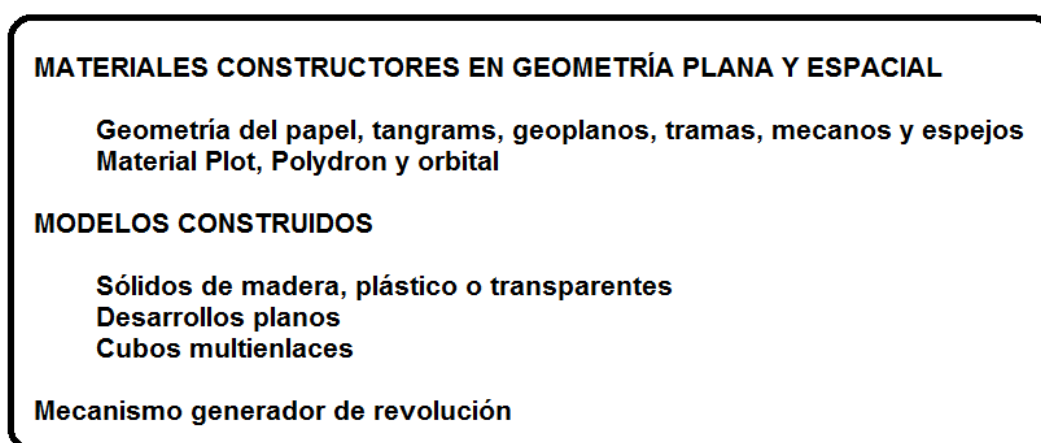


Figura 4.1. Tipos de materiales

### **4.3. Materiales constructores de geometría plana**

La manipulación en la Educación Primaria es un periodo fundamental e imprescindible para que los conceptos matemáticos sean comprendidos y asimilados, pues la etapa manual precede siempre a la simbólica o abstracta en todo aprendizaje matemático. Por ello, es conveniente comenzar por la intuición antes que por la lógica o la abstracción para conseguir una mayor comprensión. La intuición se refuerza con el uso de materiales tales como geoplanos, tangrams, espejos, papel, etc. Todos ellos son buenos elementos para que el alumno, mediante unas actividades de laboratorio bien orientadas, construya su propio conocimiento. Vamos a conocer mejor estos materiales. Estudiaremos su construcción, sus características y su utilidad para la enseñanza-aprendizaje de la geometría en Primaria mediante múltiples actividades que se pueden realizar con ellos. Estas actividades, como siempre, van enfocadas con el objetivo de que las conozcan el profesor o estudiante para profesor de forma que mediante la reflexión llegue a un convencimiento pleno de su utilidad en sus tareas prácticas de aula.

Comenzaremos con los más manipulables desde las primeras edades como es el papel o lo que nosotros llamamos *geometría del papel* con la que podemos trabajar todos los conceptos desde los más básicos, para pasar a los materiales más indicados para reconocimiento de formas y sus medidas como son los tangrams, los geoplanos, mecanos y papel trama. Acabamos con los espejos como materiales más propios del estudio de las transformaciones isométricas. Después, presentaremos en el siguiente tema tres materiales constructores para trabajar la geometría espacial: material Plot, Polidron y orbital

#### **4.3.1. Geometría del papel**

Las actividades con papel son una gran ayuda en la educación geométrica. Este material proporciona al profesor desde los primeros cursos una herramienta pedagógica que le permite desarrollar diferentes contenidos, no sólo conceptuales sino de procedimiento. También desarrolla la psicomotricidad, fundamentalmente, la psicomotricidad fina, así como la percepción espacial. La manipulación de papel desarrolla en el alumno la destreza manual, la exactitud en la realización del trabajo y la precisión manual. El manejo de papel, es una etapa esencial, fundamental e imprescindible para que los conceptos geométricos sean comprendidos y asimilados. Las actividades con papel se recomienda sean anteriores a las actividades de construcción de figuras mediante el dibujo, pues para conseguir una mayor comprensión en el campo de la Geometría es preciso comenzar por la intuición que se ve reforzada con actividades tales como el doblado de papel.



Este material relaciona la Geometría con otras Ciencias y con las Artes y, motiva al alumno a ser creativo, ya que puede desarrollar sus propios modelos e investigar la conexión que tiene con la Geometría no sólo plana, sino también espacial. Igualmente que con otros recursos, el profesor tiene que posibilitar que los alumnos hagan sus descubrimientos, los comprueben y los comuniquen. Las fijaciones de los conocimientos y destrezas que se han experimentado y comprobado personalmente doblando papel serán mucho más duradera que aquellas que son de corte transmisivo. A través de las actividades que vamos a enumerar y desarrollar, podremos observar la importancia que tiene el papel como recurso en la enseñanza de la geometría. Si seguimos el currículo de Primaria podemos observar que prácticamente todos los conceptos primarios se pueden trabajar con papel.

El alumno solamente necesita: papeles necesarios para realizar los ejercicios y rotuladores; a nosotros nos gusta trabajar con cuartillas (cuarta parte de un A4). Es importante que las rectas, puntos, etc. sean señalados suficientemente para que pueda ser visto por la cara de detrás y por ello, se recomienda a los alumnos dibujar con rotuladores. Esto ayuda bastante a la hora de doblar y obtener el resultado buscado. Por ejemplo, cuando queremos obtener la mediatriz de un segmento al querer superponer los extremos de éste, es mejor que se transparente por la otra cara. Estas primeras actividades de sencillo desarrollo las planteamos como ejercicios para los estudiantes y para los alumnos.

#### **Actividades para estudiantes para profesores y para los alumnos.**

*Realizar las siguientes actividades partiendo de un folio, Din A4 o cuartilla:*

- *Líneas rectas obtenidas mediante un pliegue.*
- *Dado un punto, obtener una recta que pasa por él. ¿Cuántas rectas puedes obtener?*
- *Trazar una recta paralela a los bordes del papel. Trazar varias rectas paralelas.*
- *Trazar una recta perpendicular a una recta paralela a los bordes del papel.*
- *Trazar una recta perpendicular a otra recta cualquiera. La recta no debe estar paralela a los bordes del papel.*
- *Trazar una recta perpendicular a otra recta que pase por un punto exterior a dicha recta.*
- *Construcción de la mediatriz de un segmento.*
- *Construcción de la recta que pasa por un punto dado y es paralela a otra recta dada.*
- *Trazar la bisectriz de un ángulo dado.*

Los estudiantes y los alumnos deben reflexionar y descubrir qué supone matemáticamente realizar ciertos movimientos y doblados. Por ejemplo, superponer una recta sobre ella misma da lugar a trazar perpendiculares, así, hacer coincidir los extremos de un segmento implica trazar una perpendicular particular que es su mediatriz. Por coincidencia de los lados obtenemos, en los ángulos, la bisectriz y en los polígonos, los ejes de simetría.

**1- Ángulo recto.** El papel nos permite realizar construcciones tan precisas como con la regla y el compás. El profesor hace con los alumnos, la construcción de un ángulo recto que explicamos mediante los siguientes dibujos (figura 4.2)

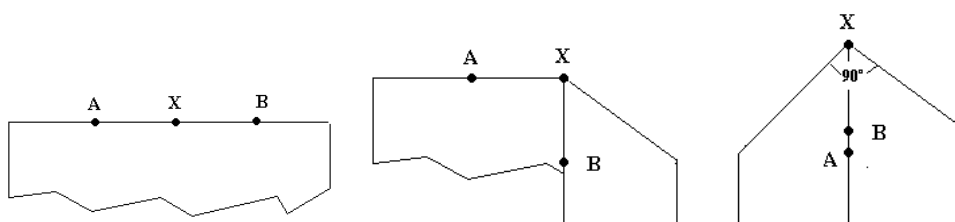


Figura 4.2. Construcción de un ángulo recto

*Seleccionados tres puntos en el borde de la cuartilla A, X y B. Solamente tenemos que doblar la cuartilla el punto X, dos veces, de forma que A y B queden alineados. El ángulo formado en el vértice X es recto. A partir de aquí, es sencillo construir, por ejemplo, un triángulo rectángulo*

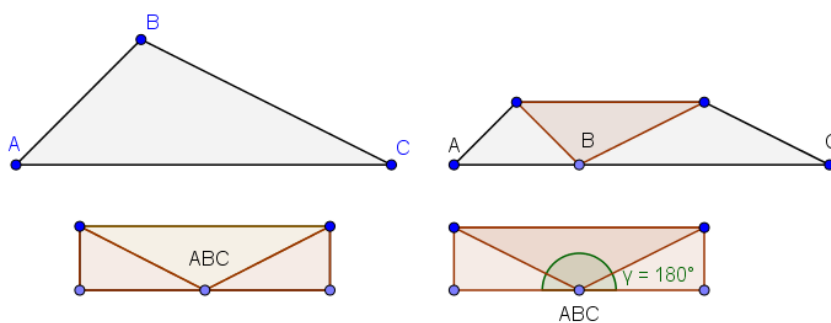


Figura 4.3. Suma de los ángulos de un triángulo

**2- Suma de los ángulos de un triángulo.** Los alumnos pueden probar propiedades como la comprobación de que “la suma de los ángulos de un triángulo miden dos rectos”. Se parte del triángulo dado (figura 4.3), y doblando convenientemente los tres vértices A, B y C en el lado BC podemos observar que los tres vértices unidos nos dan dos rectos.

**3- Elementos notables de un triángulo.** El papel es también un recurso importante para estudiar los elementos notables de un triángulo. Doblando papel podemos trazar las bisectrices, medianas, alturas y mediatrices de un triángulo acutángulo, obtusángulo, rectángulo y equilátero. Hay dos formas de realizar estos ejercicios, bien en triángulos dibujados en folios o en triángulos recortados. Cuando los triángulos están dibujados en folios, no hay problema en trazar doblando todos estos elementos y sus puntos de intersección, pues podemos seguir doblando fuera del triángulo cuando sea necesario. Sin embargo, en los triángulos recortados, cuando las alturas o las mediatrices salen fuera del triángulo, necesitamos auxiliarnos de cuerda o alambres que pueden considerarse como la continuación de la doblez. En la figura 4.4 vemos las alturas y mediatrices de triángulos obtusángulos sobre papel construidas mediante dobleces.

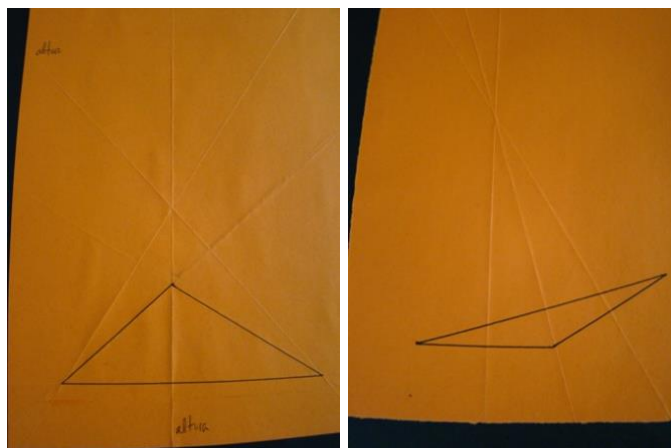


Figura 4.4. Alturas (primera foto) y mediatrices (segunda foto) de un triángulo obtusángulo, realizadas mediante dobleces

Es importante que el alumno, mientras dobla, vaya también observando todas las particularidades que se dan según los distintos triángulos. Por ejemplo, en el caso del triángulo rectángulo las alturas coinciden con los catetos y el ortocentro cae en el vértice del ángulo recto o en el caso del triángulo equilátero, todos los elementos notables coinciden, por tanto también coinciden las intersecciones de dichos elementos, es decir, ortocentro, baricentro, incentro y circuncentro. Vamos a ver como ejemplo:

- **La representación de medianas y alturas de un triángulo acutángulo.** *El alumno corta un triángulo de cartón y traza las medianas doblando. Ahora mediante un péndulo colocado en uno de sus vértices y sujetando dicho triángulo por el vértice, el péndulo nos da la mediana, que podemos ver que coincide con la doblada y comprobar que divide al lado opuesto en dos segmentos iguales. Si hacemos lo mismo para los tres vértices podemos observar que se cortan en un único punto que se llama*

baricentro. Se puede comprobar que el baricentro es el centro de gravedad del triángulo sosteniendo el triángulo por un dedo en dicho punto y demostrando que no se cae. Igualmente, se puede hacer para las alturas, pero en este caso, antes de usar el péndulo, el triángulo tiene que estar apoyado en una superficie lisa en uno de sus lados. Calculando las tres alturas, observamos que se cortan en un único punto que se llama ortocentro.

#### **Actividades para grupos de estudiantes para profesores y alumnos.**

- Calcular las mediatrices y las alturas para triángulos obtusángulos doblando papel.
- Calcular las medianas y bisectrices para triángulos obtusángulos doblando papel.
- Calcular las medianas y las alturas doblando papel para triángulos rectángulos y equiláteros.

En todos los casos extraer conclusiones.

- Comprobar doblando que el baricentro se encuentra situado sobre cada mediana a la tercera parte de cada lado y a las dos terceras partes de cada vértice.

- Calcula la intersección de las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo acutángulo que previamente hemos recortado ¿cómo se llama el punto intersección? Medir la distancia del punto de intersección a los lados ¿es la misma distancia? Explica el porqué. ¿se puede inscribir una circunferencia en el triángulo? ¿cuál será su centro y su radio?

- Calcula la intersección de las mediatrices de los ángulos interiores de un triángulo acutángulo que previamente hemos recortado. ¿cómo se llama el punto intersección? Medir la distancia del punto de intersección a los vértices ¿son la misma? Explica el porqué ¿se puede circunscribir una circunferencia en el triángulo? ¿cuál será su centro y su radio?

**4- Actividades con un círculo de papel.** Vamos a estudiar qué conceptos puede el profesor enseñar a los alumnos con un círculo de papel.

- Construir en un círculo de papel, mediante doblado, los elementos de la circunferencia y del círculo: Diámetro, centro, radio, cuerda, arco, ángulos centrales, segmentos y sectores circulares, ...

También en este caso se pueden comprobar propiedades, del tipo, comprobar que a cuerdas iguales corresponden arcos iguales o que a cuerdas desiguales, a la mayor cuerda corresponde un arco mayor.

#### **Actividades para grupos de estudiantes para profesores.**

- Trazar ángulos inscritos a una circunferencia doblando papel.

-Probar, mediante papel, la propiedad: todo ángulo inscrito recto abarca una semicircunferencia y viceversa, si un ángulo abarca una semicircunferencia es recto.

-Construir la tangente por un punto a una circunferencia dibujada en un Din A4. Explicar los pasos seguidos para que esté bien construida, pues debe ser perpendicular a un radio.

**5- Construcción de polígonos.** Vamos a construir doblando papel, los polígonos más usuales y conocidos por los alumnos.

#### a) Triángulos.

1- **Un triángulo cualquiera.** Se puede hacer doblando tres rectas que se cortan dos a dos, si una de las dobleces forman un ángulo obtuso nos sale un triángulo obtusángulo, sino normalmente nos da un triángulo acutángulo.

2- **Un triángulo rectángulo.** Se puede construir fácilmente pues bastaría obtener dos rectas perpendiculares y unir las mediante una tercera doblez.

3- **Un triángulo isósceles.** Como la hoja la podemos considerar un rectángulo ABCD, podemos construir dos triángulos isósceles a partir de los vértices de un lado y el punto medio del lado opuesto, como se muestra en las figuras 4.5. Basta obtener mediante dobleces los ejes del rectángulo y unir los puntos indicados. También existen los dos triángulos simétricos a éstos.

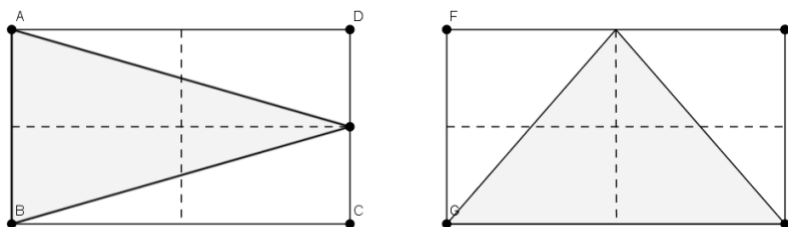


Figura 4.5. Triángulos isósceles doblando papel

- **Una nueva construcción de triángulo isósceles.** Sería tomando dos puntos cualesquiera de uno de los lados, por ejemplo T y U, y mediante la bisectriz de este segmento obtener el tercer vértice en el lado opuesto R (figura 4.6). Mediante esta construcción el alumno además de aprender a construir triángulos isósceles doblando papel, puede conocer la propiedad característica de la mediatriz, es decir, que “los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos, para lo que no necesita ni siquiera medir, pues, por definición, los lados del triángulo isósceles contruidos sobre ellas son los lados iguales”.

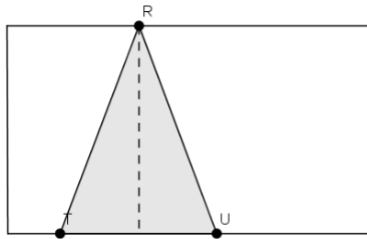


Figura 4.6. Otro triángulo isósceles

El papel enseña al alumno a relacionar dos conceptos como son mediatriz y triángulos isósceles; luego si es capaz de relacionarlos podemos decir que empieza a moverse en un nivel tercero de Van Hiele (tema1, apartado1.6).

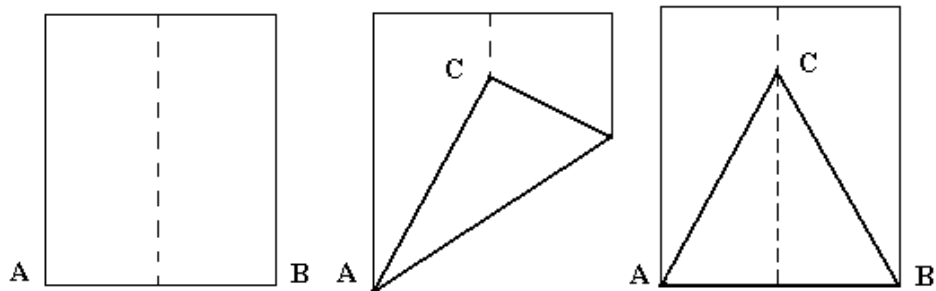


Figura 4.7. Construcción de un triángulo equilátero doblando papel

4- **Un triángulo equilátero.** La manera más sencilla sería tomando una hoja rectangular y doblando por la mitad paralelamente a los lados menores. Después doblamos uno de los vértices de modo que en la doblez, el vértice movido, en nuestro caso el B, se coloque sobre la doblez central. Marcamos ese punto como C, que será el otro vértice del triángulo equilátero, y doblando CB obtenemos el otro lado, como se muestra en los dibujos. Llevar B sobre el eje central es equivalente a buscar el punto C que nos da la medida que iguala los segmentos AC y AB para que sea equilátero (figura 4.7).

**Actividad para estudiantes para profesores.**

- Probar con razonamientos matemáticos que el triángulo que se construye así es un triángulo equilátero.

- Cortando varios triángulos isósceles de ángulos iguales  $30^\circ$  y desigual  $120^\circ$ . Con tres de ellos se puede formar un triángulo equilátero. Estudiar que otras figuras se pueden formar.

- Cortar triángulos isósceles rectángulos iguales, con cuatro de ellos se puede formar un cuadrado. Estudiar qué otras figuras se pueden formar.

### b) Cuadriláteros

1- **El cuadrado.** El primer cuadrilátero que construimos es el cuadrado. Podemos hacerlo mediante un nudo con dos tiras de igual anchura, como se ve en la figura 4.8. y suprimiendo con una tijera el trozo restante. También se puede hacer mediante un trozo de papel rectangular: llevando el lado más pequeño sobre el mayor, nos da la medida del lado, cortando el resto sobrante de rectángulo, obtenemos el cuadrado.

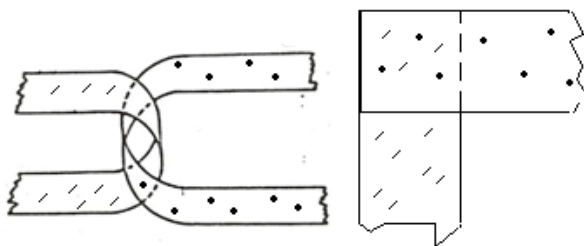


Figura 4.8. Construcción de un cuadrado con tiras de papel

2. **Un rombo.** Podemos construir un rombo a partir de un rectángulo. Basta con hallar los puntos medios de los lados y unirlos mediante dobleces (figura 4.9).

### Actividades para grupos de estudiantes para profesores.

- Cortando un cuadrado por sus diagonales que otras figuras planas se pueden conseguir.

Clasifíquelas. ¿qué tienen todas en común, además de ser figuras planas?

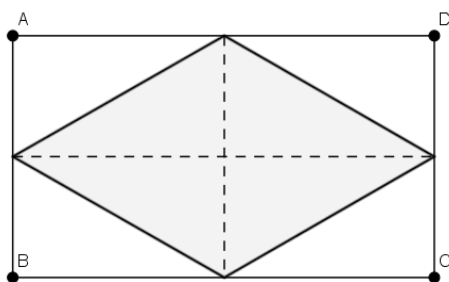


Figura 4.9. Construcción de un rombo doblando papel

- Igualmente cortando un rectángulo por una diagonal.

- Diseña una forma de construir un rectángulo y un paralelogramo doblando papel

- Calcular el área del paralelogramo a partir del área de un rectángulo doblando papel y si lo necesitas recortando.

- Comprobar doblando, que el punto de corte de las diagonales del paralelogramo es equidistante de los vértices. Idem cuadrado, rombo y rectángulo ¿en qué casos son iguales en longitud?

**c) Trapecios.**

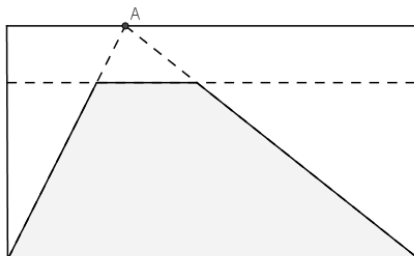


Figura 4.10. Construcción de un trapecio doblando papel

La construcción de un trapecio es sencilla. Para ello, tomamos un rectángulo, vale un A4 o cuartilla, y sobre uno de sus lados marcamos un punto A cualquiera. Trazamos dos segmentos (dobles) desde los vértices del lado opuesto hasta el punto A. Trazando una paralela al lado que contiene a A, obtenemos el trapecio, como vemos en la figura 4.10.

**Actividad individual para estudiantes para profesores.**

- ¿Qué condición debe cumplir el punto A para que el trapecio nos salga isósceles? ¿y para que nos salga trapecio rectángulo?

**d) Figuras de más de cuatro lados doblando papel.**

**1- El pentágono.** Es una figura que se puede conseguir mediante doblado de papel pero su construcción no la consideramos adecuada para la Primaria por la dificultad que entraña, por lo que nos limitaremos a mostrar un pentágono de papel que se construye con una tira haciendo en ella, simplemente, un nudo (Figura 4.11)



Figura 4.11. Construcción de un pentágono regular mediante un nudo



El alumno puede comprobar midiendo los lados que el pentágono que nos sale es totalmente regular.

**2- El exágono regular.** Es sencillo de construir pues para ello nos basta con tomar un triángulo equilátero y obtener su centro (por ejemplo, trazando dos alturas). Si doblamos los vértices del triángulo de modo que coincidan en el centro, obtenemos el exágono regular. Los alumnos pueden comprobar que es regular midiendo sus ángulos, sus lados, ... (figura 4.12.).

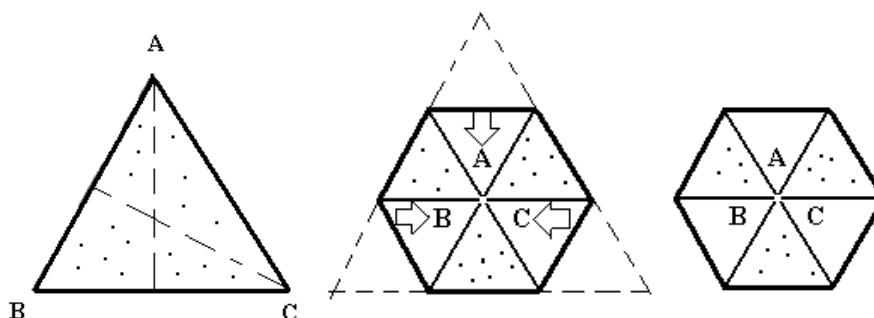


Figura 4.12. Construcción del exágono regular doblando papel

También se puede conseguir el hexágono, el heptágono o el octógono mediante un nudo de dos cintas de igual anchura, pero consideramos que estas formas, por su complicación, son apropiadas para cursos superiores a los de la Primaria. (ver Donovan, y Magnus(1975) en la bibliografía final).

**Actividad individual para estudiantes para profesores.**

- Partiendo de un exágono regular, dibujado en un papel, construye un dodecágono regular mediante dobleces.

**3- El octógono.** Puede ser obtenido por los alumnos a partir de un cuadrado. En primer lugar, trazamos (doblando) todos los ejes de simetrías del cuadrado. El siguiente paso es hacer coincidir dos de los ejes (A y B) y una vez hecho esto, podemos observar que nos quedan cuatro vértices no solapados (C, D, E, F). Sin desdoblar la coincidencia de ejes, doblamos los cuatro vértices, siempre hacia la cara posterior. Hecho esto, ya podemos desdoblar y obtener el octógono como se muestra en la figura 4.13.

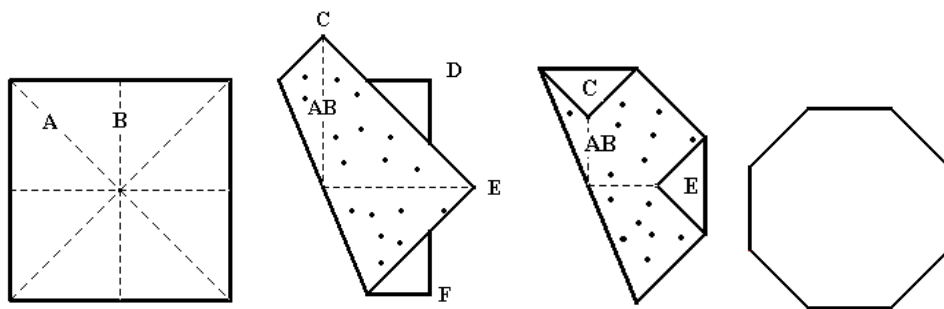


Figura 4.13. Construcción de un octógono regular doblando papel

- **Otra forma de trazar un octógono.** Se parte de un cuadrado en el que calculamos, doblando, los puntos medios de sus lado  $GEFH$ . Con estos puntos de vértices trazamos el cuadrado correspondiente (en el dibujo en línea discontinua). Ahora trazamos las bisectrices de los ángulos que forman los lados del cuadrado  $GEFH$  con los lados de  $ABCD$ , por ejemplo, vértice  $E$  y lados  $EA$  y  $EG$ . Trazadas dichas bisectrices y unidas de dos en dos se obtiene el octógono que vemos en la figura 4.14 en línea gruesa. El alumno puede observar, en los dos casos, que los octógonos obtenidos son regulares.

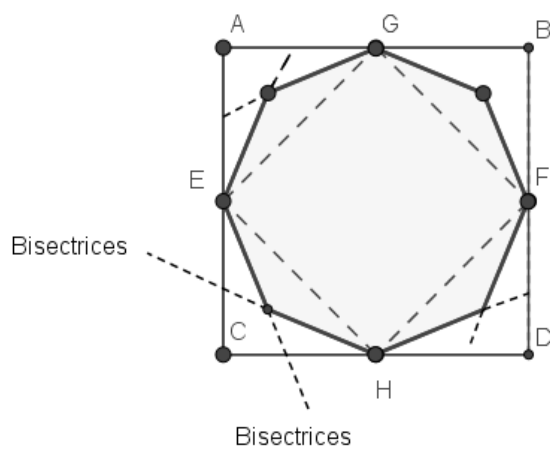


Figura 4.14. Construcción de un octógono regular mediante dobleces

e) **Construcción de un tetraedro.** Mediante doblado de papel se pueden construir también diferentes figuras espaciales. La construcción en su mayoría no es complicada pero son demasiado laboriosas por lo que nos limitamos a exponer a título orientativo la construcción de un **tetraedro** de papel que tiene un proceso de construcción muy sencillo.

Tenemos que partir de un sobre de carta cerrada, se dobla el sobre por el lado más largo obteniéndose un eje de simetría  $E$ .

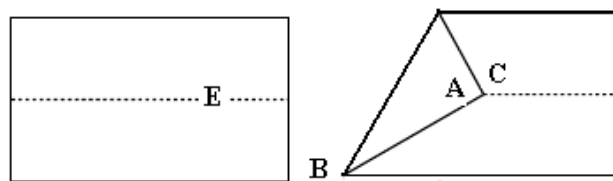


Figura 4.15. Fases primeras de construcción de un tetraedro

Según la figura 4.15 hacemos una doblez que pasando por B lleve al vértice A a coincidir con dicho eje. Marcamos dicho punto C donde ha caído A, trazamos la perpendicular por C al eje E como vemos en la figura 4.16. Cortamos el sobre por dicha línea perpendicular y trazamos doblando CA y CB, marcando bien las dobleces sobre los dos lados. El lado donde está C está abierto por el corte hecho, luego podemos meter la mano y doblando por CA y CB, adecuadamente, obtenemos el tetraedro. El proceso es más difícil de contar que de hacer como podrá comprobar el lector. Al final del texto se incluye una bibliografía en la que se pueden encontrar artículos y libros que proponen más actividades de papel.

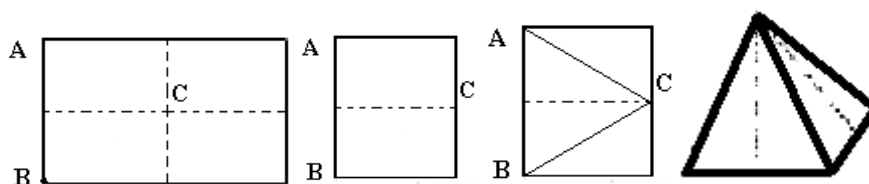


Figura 4.16. Fases últimas del tetraedro de papel

#### 4.3.2. Tangrams

Los puzles han sido juegos muy aceptados por los niños de todos los tiempos. Ya en la Educación infantil, el alumno realiza puzles para reconstruir figuras geométricas, símbolos numéricos,...

El tangram es un material de madera o cartón duro formado por un número de piezas a partir de las cuales podemos construir diferentes figuras y, en particular, figuras geométricas. Estas figuras pueden ser realizadas con todas las figuras del tangram o solamente con algunas de ellas. Podemos encontrar diferentes tipos de Tangram, que reciben su nombre normalmente de la figura en la que encuadramos sus piezas: Así tenemos: el Tangram triangular que tiene 8 piezas, el cuadrado con 7 piezas y pentagonal y pitagóricos con 7 piezas. Éstos no son todos los modelos de tangram que podemos encontrar, como podemos comprobar en internet.

Todos los tangram son iguales de útiles en la enseñanza de las figuras geométricas y sus áreas, y por ello, nosotros vamos a centrarnos el tangram cuadrado aunque posteriormente trabajaremos los demás tangram de forma genérica y planteando actividades para los estudiantes para profesores.

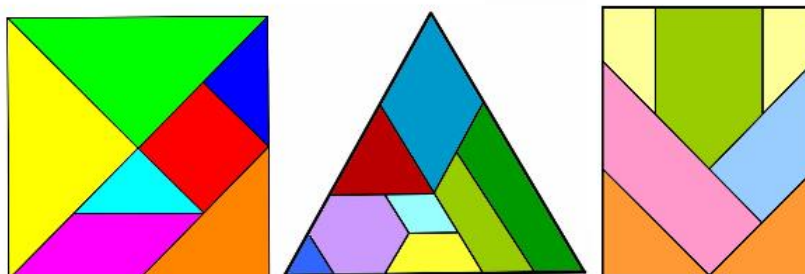


Figura 4.17. Tipos de tangrams

### ***1- Tangram cuadrado.***

El tangram no es un juego milenario como algunos indican sino que apareció posteriormente. Las últimas investigaciones de Jerry Slocum lo sitúan entre 1796 y 1801. Los primeros libros con tangram y soluciones aparecen en Europa a principios del siglo XIX. Estos libros tenían muchas propuestas de figuras chinas, animales, casas, flores,... pero es escasa la representación de construcciones de figuras geométricas planas con el tangram. Durante este siglo, este juego se hace popular en varios países, no solo como un juego de niños, sino también como una diversión de adultos. Actualmente además de ser un juego entretenido para todos, se utiliza como material didáctico para la enseñanza de algunas partes de las Matemáticas como pueden ser, las fracciones o las figuras geométricas y su medida.

#### ***Actividades para los alumnos.***

##### ***- Construcción de un tangram cuadrado.***

*Su construcción es fácil (figura 4.18). Para ello tomamos un cuadrado de lado AB como el de la figura y marcamos los puntos medios, G, H y F. Marcamos también el punto E central del cuadrado mediante las diagonales del cuadrado. La obtención de las piezas no tiene dificultad teniendo en cuenta que la pieza 3 es un cuadrado de lado FE.*

Una vez contruidos, vamos ahora a desarrollar una metodología de cómo se utiliza este material. Sería necesario que todos los alumnos tuvieran un tangram, que puede ser de plástico, madera o bien construido con papel fuerte o cartón.

a) En un primer momento, los alumnos se deben familiarizar con este material y para ello, los dejaremos un tiempo de juego libre en el que el alumno toca el tangram, construye figuras y va poco a poco conociendo las piezas.

b) En un segundo tiempo, hacemos actividades dirigidas. Para ello, el alumno se familiariza con las piezas mediante la observación y *nombrando el tipo de figuras que constituyen esas 7 piezas, así como su tamaño: único, grande, mediano o pequeño* (figura 4.18).

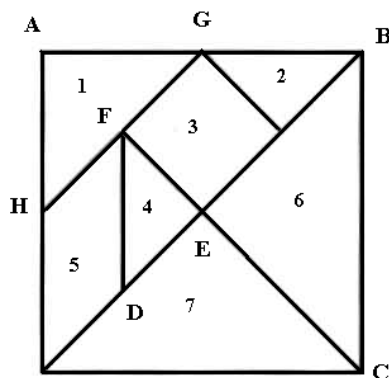


Figura 4.18. Tangram cuadrado

c) Podemos ya empezar a hacer actividades con los alumnos.

*En esta etapa, el profesor da a los alumnos siluetas de tamaño real de figuras geométricas y éste tiene que buscar las piezas que encajan en dicha silueta. Por ejemplo: le damos el trapecio de la figura 4.19 y tiene que buscar piezas que encajen en él.* El objetivo de estas actividades es el reconocimiento de formas geométricas mediante la visualización.

El alumno debe descubrir que se puede cubrir con un triángulo pequeño (tp) y el paralelogramo (pp). En esta etapa, el alumno dibuja sobre una plantilla la composición correspondiente, en un principio por superposición y posteriormente a mano alzada. Podemos observar la importancia que tiene la percepción, la intuición y las imágenes mentales que tengan los alumnos sobre las distintas formas para llevar a cabo estas actividades con éxito.



Figura 4.19. Siluetas de tamaño real de trapecio y solución

- Utilizando el cuadrado y los dos triángulos pequeños, construye las figuras que se indican en figura 4.20. Pon debajo de cada una su nombre como polígono.

En esta actividad, damos un paso más pues hay figuras que pueden ser obtenidas mediante distintas composiciones con distintas piezas. Debemos ejercitar al alumno en realizar todos los recubrimientos que encuentre. Este ejercicio desarrolla su nivel de orientación y de visualización mediante las diferentes posiciones y giros en los que tiene que colocar las piezas para que encajen.

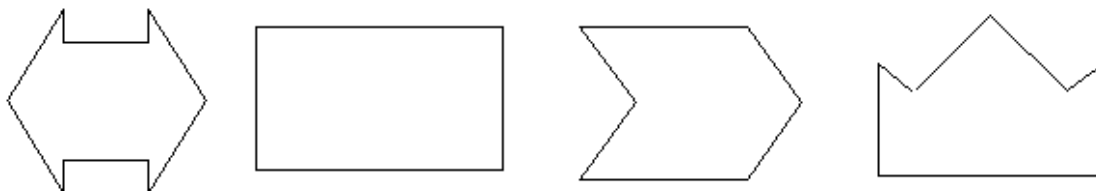


Figura 4.20. Siluetas variadas

d) En las siguientes actividades ya no le damos las siluetas de tamaño real sino que le indicamos de viva voz qué figura tienen que realizar.

- Con los dos triángulos pequeños y el paralelogramo construye un triángulo y un rectángulo.
- Construye un rectángulo y un exágono convexo con el cuadrado y dos triángulos pequeños.
- Con el paralelogramo, dos triángulos pequeños y dos medianos construye un pentágono no regular.
- Construir un triángulo, un pentágono y un exágono con todas las piezas del tangram.

e) Podemos reforzar o trabajar las clasificaciones.

- Construir todos los trapecios rectángulos o isósceles que puedas con 5 piezas.
- Construir paralelogramos utilizando cuatro piezas. Igualmente se pueden hacer con más piezas.
- Construir rectángulos, rombos y cuadrados con las piezas que quieras. Elabora una tabla de doble entrada en la que se indique el número de piezas, el nombre de la figura construida y la figura resultado.

f) Podemos iniciar al alumno en el tema de **figuras equivalentes**, es decir, figuras que tienen la misma superficie, para ello se pueden plantear actividades como las que siguen.

- Construye varias figuras con un triángulo grande, el paralelogramo, y dos triángulos pequeños. Observar que tienen distintas formas pero todas tienen la misma superficie. Añadimos ahora el cuadrado y construimos figuras como antes. El profesor pregunta a los

alumnos si las figuras construidas ahora tienen la misma superficie, y si tienen la misma superficie que las construidas anteriormente.

g) Con este material se puede estudiar o reforzar **el concepto de área**. Se puede tomar como medida unidad el triángulo más pequeño y, a partir de éste, obtener las áreas de las demás piezas del tangram. De este modo, llegamos a que los dos triángulos grandes miden cuatro pequeños y el resto de las piezas miden dos triángulos. Podíamos ahora preguntar:

- ¿cuántos triángulos mide el cuadrado total formado por todas las piezas?
- Medir las áreas de las figuras construidas en los ejercicios anteriores, tomando como medida unidad el triángulo pequeño. Por ejemplo: ¿cuánto mide la figura 4.19? ¿y la 4.20?

**Actividades para grupos de estudiantes para profesores.**

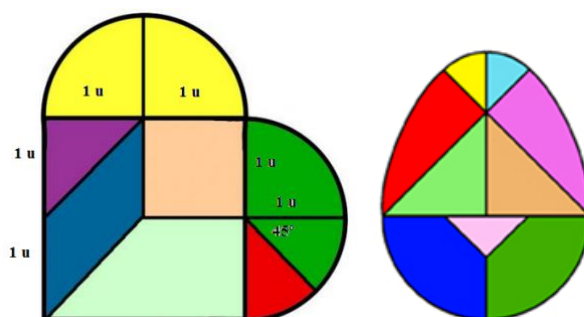


Figura 4.21. Tangram corazón y tangram ovoide

- Cada grupo va a hacer un estudio de cada uno de los tangram, similar al que hemos hecho anteriormente, cuyas líneas de trabajo pueden ser:

1º Investigar de forma libre las posibilidades del tangram elegido.

2º Estudiar qué conceptos del currículo escolar de Primaria podemos estudiar con dicho tangram.

Elaborar algunas actividades muestras de dichos conceptos.

Los tangrams objetos de estudios son los nombrados anteriormente (figura 4.17) añadiendo los tangrams corazón y ovoide (figura 4.21)

Dentro de los materiales podemos distinguir aquellos que desarrollan una geometría estática o una geometría dinámica. La **geometría estática** es aquella en la que el movimiento se expresa deshaciendo una figura para construir otra, como en el geoplano. Sin embargo, en la **geometría dinámica** los conceptos se aprenden mediante actividades en movimiento, como ángulos que rotan o líneas que se abren como con los mecanos o las actividades que se hacen con programas de ordenador como Cabri o GeoGebra. El dinamismo con el que se dota a los modelos aumentan la percepción y permiten la

construcción del conocimiento en pasos de tiempo y espacio mediante el descubrimiento de semejanzas y la comprensión de los pasos seguidos. Vamos a estudiar a continuación los geoplanos y los mecanos como ejemplos de materiales estáticos y dinámicos respectivamente.

### 4.3.3. Geoplanos

El geoplano es un recurso didáctico que el profesor puede utilizar para la introducción de gran parte de los conceptos geométricos del currículo de Primaria, mediante la actividad del alumno. Este recurso fue ideado por el profesor C. Gattegno conocido por sus innovaciones en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. La manipulación en el geoplano hace que los alumnos comprendan mejor los conceptos geométricos, que muchas veces o no entienden o han generado ideas erróneas motivadas por la no utilización de materiales. Vamos a trabajar con tres tipos de geoplanos: cuadrado, circular y triangular.

**1- Geoplano cuadrado.** El geoplano cuadrado es un tablero cuadrado, generalmente de madera, y cuadrado mediante pivotes en los vértices. El tamaño del tablero es variable dependiendo del nivel al que lo vayamos a utilizar. En los niveles de Infantil o principio de Primaria se usan tableros con pocas cuadrículas, suelen ser de 5 x 5. Los más frecuentes comercializados son los de 25 puntos y los de 36 puntos. En el resto de Primaria conviene disponer de geoplanos de 100 puntos. En la figura 4.22 vemos un geoplano de 5 x 5 que se ha utilizado para construir un triángulo. Sobre la base, se colocan gomas elásticas que se sujetan en los pivotes para realizar la actividad correspondiente. Es conveniente que el alumno juegue con ellas y con los dedos hasta que se familiaricen con el material y aprendan a su vez a conocer la resistencia de la goma y distinguir su límite de tensión. Éste es un buen ejercicio de desarrollo psicomotor. Para trabajar con ellos, también pueden utilizarse lanas, cordones e hilo de plástico, dependiendo de la actividad a utilizar.

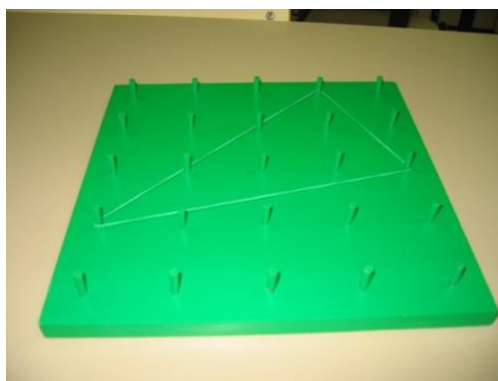


Figura 4.22. Geoplano cuadrado



**2- Geoplano circular.** El geoplano circular es una tabla cuadrada que lleva un pivote en el centro del cuadrado, cuatro en los vértices y el resto es una colección de puntos de una circunferencia, igualmente espaciados (figura 4.23). Los pivotes de las esquinas, sirven para sujetar las gomas en actividades como trazar la tangentes, polígonos circunscritos... Este geoplano sirve también para estudiar los elementos y propiedades de la circunferencia y de las figuras inscritas o circunscritas pues permite construir polígonos regulares.

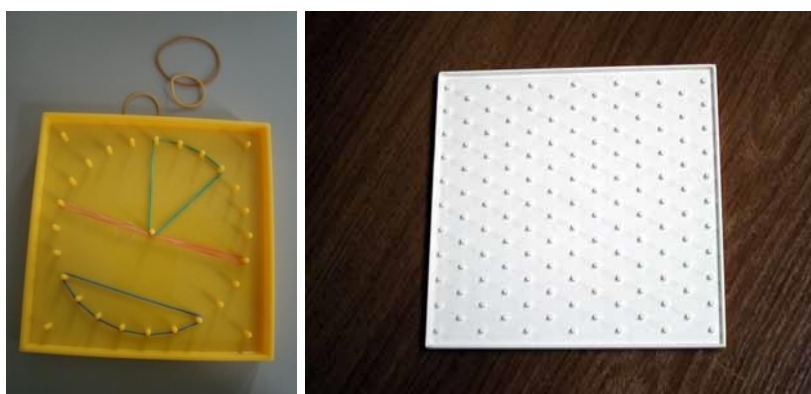


Figura 4.23. Geoplano circular y triangular

**3- Geoplano triangular.** Por último, el geoplano triangular es el menos utilizado y se caracteriza porque los pivotes están colocados formando triángulos equiláteros (figura 4.23). Por ello, es más adecuado para trabajar figuras triangulares y cálculos de áreas, tomando como unidad el triángulo base. Actualmente, se comercializan en plástico a doble cara, por una aparece este geoplano en trama triangular de 25 o 36 pivotes y por la otra suele venir el geoplano circular.

#### **Ventajas y actividades con los geoplanos.**

Para que el geoplano sea un material útil el profesor debe tener suficientes tableros para que todos los alumnos puedan trabajar en grupos pequeños o individualmente. La situación óptima sería que cada alumno tuviese uno, para ello se puede recurrir a los profesores de plástica o a los alumnos de los cursos superiores, que los pueden construir con facilidad.

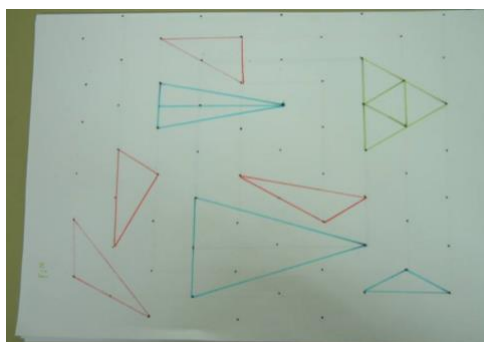


Figura 4.24. Triángulos en un geoplano

La práctica en el geoplano puede ser individual pero es mejor que aprendan en equipos para desarrollar la competencia lingüística mediante el esfuerzo de expresarse y contar lo que hace. El geoplano, como recurso didáctico es de fácil manejo y permite el paso rápido de una a otra actividad, lo que mantiene a los alumnos continuamente activos en la realización de ejercicios variados. Este recurso puede comenzar a utilizarse en los primeros años de escolarización, aunque su utilización óptima se da en los cursos tercero y cuarto de la Educación Primaria.

Como con otros recursos, es preciso que los alumnos se familiaricen con él y realicen un tiempo de juego libre, de manera que exploren las posibilidades de este material y adquieran las habilidades motrices suficientes, para que puedan poner las gomas elásticas de la forma más rápida y precisa. El alumno puede desarrollar su creatividad a través de los diseños geométricos que puede construir en un contexto de juego libre. Mediante el geoplano, se puede realizar la presentación de la geometría en los primeros años de forma lúdica y atractiva, evitando la metodología tradicional en las que se hacía de forma verbal y mediante el dibujo en la pizarra. El geoplano permite la representación de las figuras geométricas antes de que el alumno tenga la destreza manual necesaria para dibujarlas perfectamente.

En este material, el profesor puede trabajar, prácticamente, todos los conceptos geométricos planos, desde elementos básicos hasta formas geométricas, medidas, orientación espacial, conceptos topológicos o simetrías (figura 4.25). Por ejemplo, en el geoplano cuadrado o triangular el alumno puede realizar actividades para llegar a reconocer y adquirir la noción de ángulo, vértice y lado. También se pueden trabajar los segmentos y tipos de segmentos.

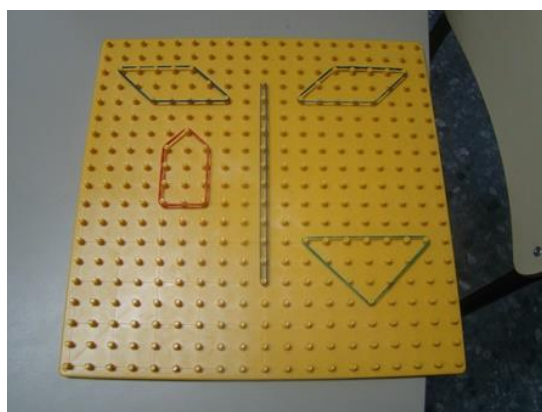


Foto 4.25. Figuras y simetrías en el geoplano

El alumno puede construir, reconocer y clasificar las formas geométricas planas. Es importante señalar que en el geoplano la formación de figuras no depende de la habilidad del alumno como constructor, en contraposición al uso de la pizarra, donde el dibujo de las figuras depende de la habilidad de dibujar. La actividad se puede comenzar mediante la construcción de figuras planas por el alumno de una forma libre. Seguramente formará figuras cóncavas y convexas. Entonces, se puede aprovechar para trabajar estos conceptos. También se le puede preguntar por los polígonos que conoce y que los señale, clasificándolos por el número de lados o bien haciendo clasificaciones dicotómicas como *buscar los que son cuadriláteros y los que no son cuadriláteros* (figura 4.26).

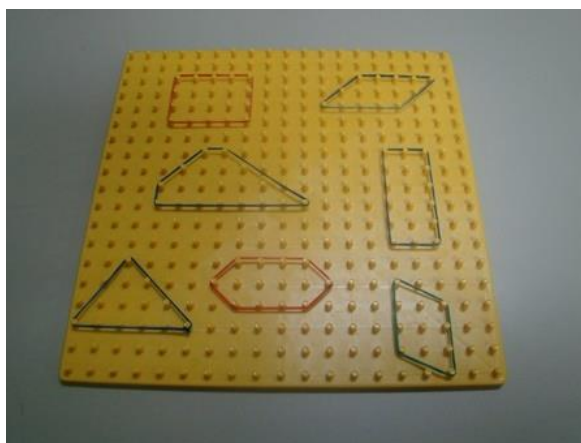


Figura 4.26. Clasificación dicotómica: “cuadriláteros y no cuadriláteros”

Con estas actividades, la imagen mental de polígono se enriquece debido a las múltiples posibilidades de distintos polígonos que encierra la construcción en el geoplano, en comparación a si se utilizan solamente los dibujos del libro o de la pizarra. El geoplano ayuda a que el alumno no asocie las distintas figuras con su posición pues mediante giros de éste, se puede observar una misma figura desde distintas orientaciones. Por ejemplo, los alumnos están acostumbrados a ver el cuadrado apoyado en uno de sus lados, girando el geoplano se puede ver apoyado en uno de sus ángulos. Igualmente ocurre con otras figuras como el triángulo rectángulo, en cuya imagen mental aparece siempre apoyado en uno de sus catetos.

El geoplano nos puede permitir llegar al concepto intuitivo de área mediante el conteo de las cuadrículas que contiene cada polígono construido con gomas. Pero además utilizando los dos geoplanos, cuadrado y triangular, el alumno puede observar el cambio de una unidad de medida cuadrangular a una unidad triangular. De esta forma modificamos en el alumno su imagen mental, muy arraigada, de que la unidad de medida siempre es cuadrada. La noción de área entraña, a veces, la

tendencia natural de confundirla con perímetro. Algunos alumnos no son capaces de comprender que la longitud de una circunferencia se mide en unidades lineales y no cuadradas debido a su curvatura, no conciben que algo curvo se pueda medir con unidades de longitud.

***Actividades para los alumnos.***

*1- Realizar actividades simples de cálculos de áreas y perímetros sencillos.*

*2- Estudiar cómo se relacionan los perímetros y las áreas. ¿a perímetros iguales corresponde áreas iguales o viceversa?*

*3- Obtención de las áreas planas de las distintas figuras (paralelogramo, triángulo, trapecio,...) a partir del área del rectángulo.*

*4- El profesor puede trabajar con el alumno la noción de figuras equivalentes de la siguiente forma: Partiendo de un rectángulo, construir todos los paralelogramos que tengan idéntica área. Esta actividad le llevará a elaborar una estrategia que le permita construirlos todos sin dejarse atrás ninguno.*

*5- En el geoplano circular se pueden hacer actividades para dar a conocer o reforzar todos los conceptos relativos a la circunferencia y sus elementos, como radio, cuerda, diámetro, etc. y algunas propiedades como, por ejemplo: descubrir cuál es la cuerda de mayor longitud.*

*6- El geoplano cuadrado también puede ser utilizado en los últimos cursos para introducción a la representación de coordenadas cartesianas rectangulares y gráficas sencillas.*

En Secundaria son también útiles para la semejanza y el teorema de Pitágoras, y el estudio de ángulos centrales, inscritos, semiinscritos o polígonos inscritos y circunscritos, entre otros conceptos

Con este material podemos lograr una mayor autonomía intelectual de los alumnos, potenciando que, mediante la búsqueda y la indagación, descubran por sí mismos los conocimientos geométricos necesarios a su nivel. Se puede, también, desarrollar la reversibilidad del pensamiento, pues la fácil y rápida manipulación de las gomas elásticas permite realizar transformaciones diversas y volver a la posición inicial deshaciendo el movimiento. El único inconveniente que podemos imputar al geoplano es que para pasar de una de una figura a otra, en general, hay que deshacer una figura para construir la otra. Ya veremos que esto no ocurre cuando se utilizan programas dinámicos de ordenador o el mecano en los que las figuras, áreas,... se transforman en otras de una manera continua.

### ***Actividades para grupos de estudiantes para profesores.***

El grupo realiza en el geoplano los diseños correspondientes para explicar a los alumnos razonadamente las soluciones a las siguientes actividades.

- *Diseña actividades para enseñar las simetrías y la rotación mediante el geoplano.*

- *Diseña actividades para clasificar triángulos con los alumnos de cuarto curso.*

- *Relación área-perímetro ¿A figuras de áreas iguales corresponde perímetros iguales? Razona la respuesta y diseña actividades para trabajarlo con los alumnos de sexto curso.*

- *¿Y a perímetros iguales corresponden áreas iguales? Idem anterior*

- *Construye dos triángulos con la misma base, y el tercer vértice sobre una misma línea recta de pivotes ¿qué ocurre con sus áreas? Extrae conclusiones.*

- *A partir del currículo de Primaria elabora una lista de contenidos que se pueden trabajar en el geoplano.*

### **4.3.4. Tramas**

Las tramas son el material que lógicamente sustituye al geoplano en cursos ya superiores. Llamamos **tramas** a una representación del geoplano (cuadrado, circular o triangular) mediante puntos en una hoja de papel. Con respecto al geoplano tiene como ventajas que es un material fácilmente adquirible mediante la copia de una muestra en una fotocopidora. Además, podemos tener suficiente material para cada alumno y fotocopiar para todos una actividad que nos resulte interesante.

También, la realización de las actividades es más rápida y el alumno puede obtener un mayor número de figuras, una vez que previamente ha manejado el geoplano. Las mediciones en la trama de punto son más precisas, tanto para el estudio de áreas como de perímetros u otra actividad en la que se impliquen las medidas. En las tramas se pueden realizar todas las actividades que hemos descrito en el geoplano, para no repetirnos vamos a mostrar algunas actividades relacionadas con áreas y perímetros para que los estudiantes para maestros reflexionen y conozcan la utilidad de este material.

### **Actividades para los alumnos. Actividades de áreas con tramas.**

Para calcular las áreas de figuras geométricas a veces es útil conocer figuras que representan medidas de áreas determinadas, a las que vamos a llamar **figuras patrones de área**.

1- *Vamos a obtener figuras patrones de área “media unidad” en un geoplano cuadrado, como se muestran en las figuras de la izquierda de 4.27. Descubre la que mide una unidad.*

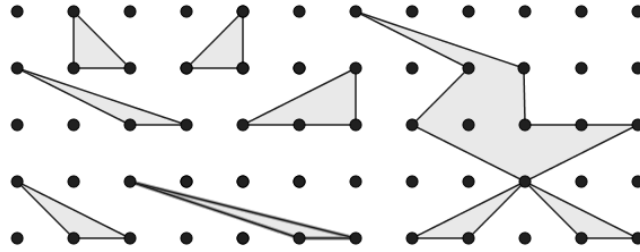


Figura 4.27. Figuras patrones de media unidad y AVE

Vemos en los ejemplos obtenidos que para comprobar que el área es media unidad basta con aplicar la fórmula del área del triángulo, también podemos recordar al alumno aquella propiedad estudiada en el geoplano que todos los triángulos que tienen la misma base y altura tienen la misma área. Podemos ver que esto se cumple siempre en las figuras patrones de la primera trama.

2- Utilizando estas áreas patrones de “media unidad” cuando sea preciso, calcula el área total de la figura geométrica AVE que aparece arriba a la derecha en figura 4.27.

3- Dibuja figuras patrones cuya área sea una unidad y a partir de ellas calcular el área de la figura 4.28.

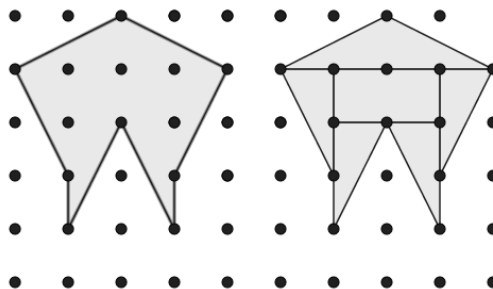


Figura 4.28. Área del octógono y solución

Para calcular el área de este octógono, el alumno debe buscar en principio las unidades cuadradas y luego a partir de las figuras patrones obtenidas de área una unidad, solucionar las áreas no cuadradas que le quedan en la figura. Por ejemplo, una buena partición sería la de la figura 4.28 y, a partir de ella, ya es fácil calcular el área total. En el siguiente ejercicio se utilizan las figuras patrones de media unidad y de una unidad.

4- Calcular el área del siguiente exágono (figura 4.29) teniendo en cuenta las figuras patrones de media y una unidad ya calculadas.

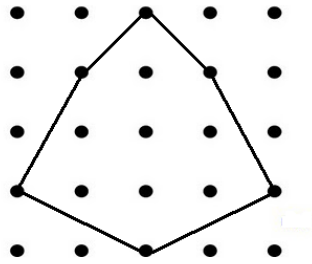


Figura 4.29. Área del exágono

Otras actividades pueden ser:

5-*Construir figuras patrones para dos, tres y cuatro unidades y diseñar actividades como las que hemos visto anteriormente en las que se utilicen un solo patrón o varios.*

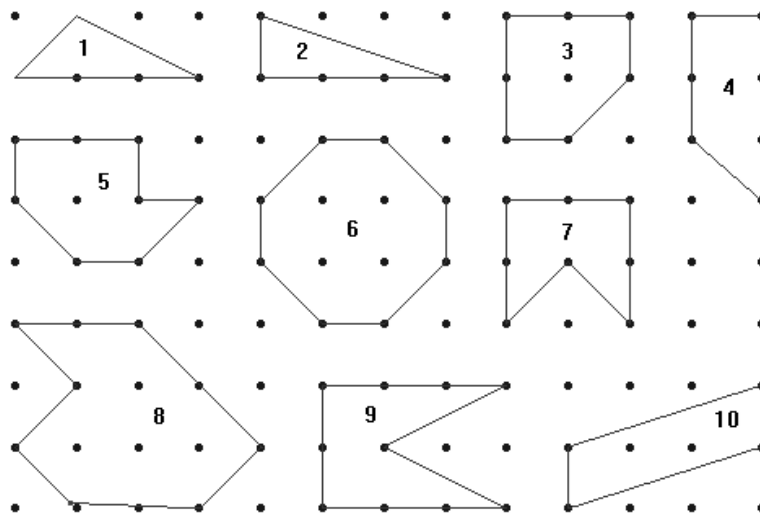


Figura 4.30. Cálculo de áreas y perímetros

6-*Construye la serie creciente de todos los cuadrados que puedas sobre una trama cuadrada. Es decir, de área 1, 2, 3, 4 ... unidades cuadradas ¿se pueden construir todos? Justifica la pregunta.*

7-*Idem sobre una trama triangular. Construye la serie creciente de todos los triángulos de área 1, 2, 3, 4 ... unidades triangulares. ¿se pueden construir todos? Justifica la pregunta.*

8-*Construye polígonos cóncavos de cinco, seis y siete lados. Calcula sus áreas teniendo en cuenta las figuras patrones de las distintas medidas.*

9-*Calcula el área y el perímetro de las figuras de 4.30, después de clasificarlas.*

En Barrantes, Barrantes y Zamora (2020) hemos descrito la enseñanza de las fórmulas de las áreas básicas en Primaria (áreas de triángulos, paralelogramos, trapecios, polígonos regulares o no,...)

utilizando la trama cuadrada, de forma que el alumno obtiene dichas fórmulas construyéndolas de una manera lógica, lo que nos da idea del potencial de esta material.

Por último, vamos a proponer algunas actividades en las que se calculan áreas de figuras con los lados curvos mediante las áreas conocidas de los polígonos y una adecuada transformación. En estas actividades, además de conocer las áreas, el alumno desarrolla la visualización y la percepción de los objetos.

- **Descomposición de la figura y acoplamiento.** El profesor propone ejercicios de cálculos de áreas en los que primero hay que descomponer la figura en las partes convenientes y acoplarlas de forma que el cálculo de la nueva superficie equivalente sea conocido.

### Actividades para los alumnos.

1- *¿Cómo calcularías el área de la primera figura 4.31?* La solución pasaría por recortar el medio círculo C y formar el rectángulo de la segunda figura. Dicho rectángulo es ya fácilmente calculable con lo que sabe el alumno.

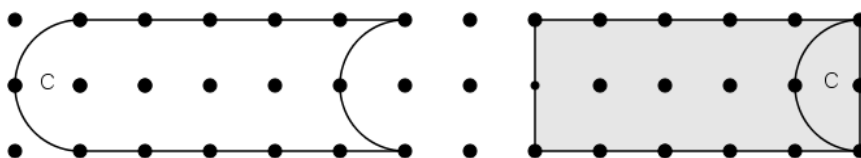


Figura 4.31. Cálculo por descomposición y acoplamiento

Aquí tenemos otros ejemplos más en las que se usa la misma estrategia.

2 - *Transforma el rombo de la figura 4.32 en un rectángulo que tenga igual área. Calcula el área rombo.*

3 - *Transforma la figura 4.32 segunda, mediante descomposición de partes y acoplamiento, en una figura que sea suma de cuadrados o rectángulos en la que sea más sencillo calcular su área. Idem la figura de la bailarina y del jarrón.*

*Si observamos bien estas dos figuras últimas, descomponiendo las figuras en los trozos adecuados y luego volviéndolas a componer pueden evitarse tanto las zonas angulosas (bailarín) como las zonas curvas (jarrón) convirtiendo las figuras en otras de áreas ya conocidas por los alumnos, que es de lo que se trata.*



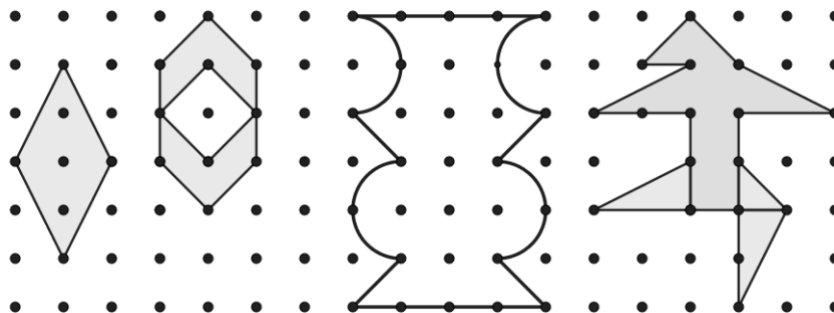


Figura 4.32. Cálculo de áreas por descomposición y acoplamiento

#### 4.3.5. Mecano

Las piezas de mecano son unas varillas de distintas longitudes con agujeros a la misma distancia que suele ser de 2 cm y dicha distancia es la que se toma como distancia unidad para la medida. La unión entre las varillas se puede hacer con encuadernadores, tornillos con tuercas o cualquier otra pieza que no sujete firmemente las piezas y nos permita girarlas. Una de las principales ventajas de estas varillas es que al ser no deformables, y también dinámicas, nos permite trabajar de forma continua algunas propiedades que veremos posteriormente.

Es un material, que nos deja, también, ver las figuras desde distintos ángulos favoreciendo así que el alumno forme una imagen mental del concepto más rica que la que le da el dibujo. El único inconveniente que tiene este material es que se trabaja con el contorno de la figura por lo que el alumno puede formar una idea equivocada de éstas, pues las figuras geométricas están formadas por los puntos interiores y los del perímetro.

Por ello, siempre es conveniente no ceñirse a la utilización de un solo material y completar con otros materiales que den una imagen mental adecuada del concepto que queremos enseñar. De igual forma que en el geoplano, este material permite estudiar prácticamente todos los conceptos planos que se dan en la Primaria desde segmentos, ángulos, ... hasta cálculo de áreas, exceptuando la circunferencia y elementos.

#### *Actividades para grupos de estudiantes para profesores.*

- *Diseñar actividades con las varillas de mecano para trabajar con los alumnos los diferentes tipos de ángulos.*

- *Ídem para estudiar la clasificación de los ángulos con respecto a otro ángulo (consecutivos, adyacentes, ...).*

*Indicar, en los dos estudios, el Curso al que va dirigida la actividad.*



Figura 4.33. Mecanos

Este material se adapta muy bien, por sus características, al estudio de los polígonos. Por ejemplo, sabemos que el triángulo es una figura importante en los estudios geométricos pues, recordemos que cualquier polígono se puede triangular. Por tanto, sus propiedades se pueden aplicar a cualquier figura triangulable.

***Actividades para los alumnos.***

*1- El mecano nos permite estudiar la relación entre los lados de un triángulo. El profesor propone al alumno que construya triángulos y que nos diga con qué varillas puede construirlas y con cuáles no. El alumno observa que cuando son más cortas al girarlas no se pueden encontrar los lados (figura 4.34).*

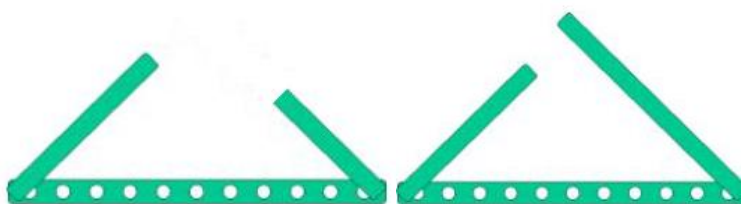


Figura 4.34. Construcción de triángulos

El alumno puede llegar a la conclusión de que *la suma de los dos lados que queremos unir tiene que ser mayor que el lado base*. Si no llega a esta conclusión el profesor puede indicarle que gire dichos lados y los coloque sobre el lado base. Esta pequeña indicación le puede llevar a que descubra dicha propiedad. El objetivo final es que manifieste que esta propiedad se tiene que cumplir para todos los lados, es decir, que en todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos.

2- Otra propiedad importante del triángulo es **su rigidez**.

*-Si el alumno construye un triángulo podrá observar que haciendo presión en sus ángulos, no es posible deformarlo ni desplazarlo.*

*- Si construye cualquier polígono con los mecanos, por ejemplo un cuadrado, puede comprobar que la mínima presión sobre uno de sus vértices deformará el cuadrado.*

*-Sin embargo, si triangula el polígono mediante otras varillas de mecano, una vez triangulado completamente, el polígono se convierte en indeformable.*



Figura 4.35. Propiedad de rigidez en un pentágono

Por tanto, la propiedad de rigidez se traspa al polígono en cuestión. En la figura 4.35 se muestra esta propiedad para un pentágono. Los alumnos pueden comprobar esta propiedad también, con un pentágono. En principio no se triangula, y comprueban que no es rígido; luego, lo triangulan parcialmente, comprobando lo mismo, para por último al triangularlo completamente, pueden observar que es indeformable y rígido, empujando cualquiera de sus vértices. Esta misma propiedad se puede hacer con tiras de papel y encuadernadores. Las tiras de papel sustituyen a las varillas de mecano.

Las varillas de mecano nos permiten así mismo realizar el estudio de los elementos notables de un triángulo como las alturas o las medianas.

*3- Los alumnos estudian **la altura de un triángulo**. Construyen dicho triángulo y mediante un hilo atado a un vértice y con un objeto colgando, a modo de péndulo, pueden construir la altura. Apoyando el triángulo en una superficie lisa observarán como ésta cae perpendicular al lado.*

También se puede hacer con una varilla que cuelga libremente del vértice, que hace de altura, como vemos en la figura 4.36. Los alumnos pueden, también, observar que si el triángulo es obtusángulo y lo apoyan en una superficie lisa sobre el ángulo obtuso entonces la altura es exterior al triángulo (figura 4.36).

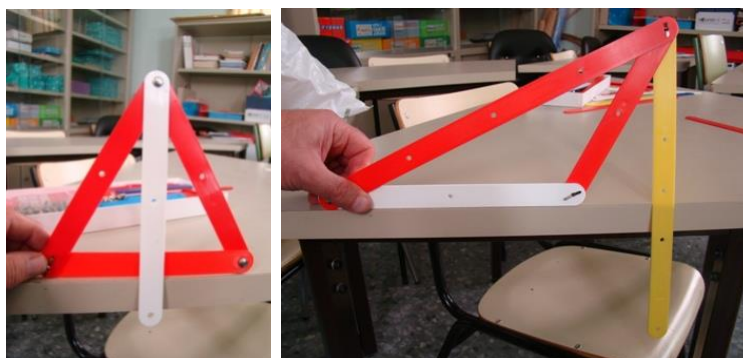


Figura 4.36. Alturas de un triángulo

4- Los alumnos estudian **la mediana**. Si no apoyan el triángulo en una base y lo dejan caer libremente, sujetándolo por el vértice, podrán ver que el hilo o la varilla suelta pasa justamente por el punto medio del lado opuesto al vértice sujetado (figura 4.37).



Figura 4.37. Trazado de la mediana

**Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.**

- Comprobar cómo caen las alturas y las medianas para cada uno de los vértices de distintos tipos de triángulos: acutángulos, obtusángulos, rectángulos, isósceles, equiláteros... mediante las varillas de mecano y el péndulo.

- Hacer un cuadro resumen de las conclusiones, utilizando dibujos lineales o esquemáticos de los resultados obtenidos.

Las varillas de mecano son un material muy útil para trabajar de forma muy completa los cuadriláteros y su clasificación.

### **Actividades para los alumnos.**

#### **1- Cuadrados en la familia de los rombos.**

El profesor selecciona varillas iguales o de distintas longitudes y propone a los alumnos, colocados en pequeños grupos, la construcción de varios cuadriláteros.

Si el alumno construye cuadriláteros con todas las varillas iguales, observará que ha construido un cuadrado, con lados iguales paralelos dos a dos y cuatro ángulos iguales y rectos. Si a continuación ejerce una pequeña presión sobre uno de los vértices, observará de una manera continua cómo el cuadrado se transforma de manera continua en otra figura, que sigue teniendo los cuatro lados iguales pero con ángulos iguales dos a dos, es decir, un rombo (figura 4.38). De esta forma el alumno puede experimentar algo que le es difícil de comprender y es que los cuadrados pertenecen a la familia de los rombos.

El alumno puede mediante gomas elásticas representar las diagonales y comprobar que son perpendiculares siempre, aunque en el caso del cuadrado son también iguales.



Figura 4.38. Familia de cuadrados y rombos

#### **2- Rectángulos en la familia de los paralelogramos.**

Con las piezas desiguales dos a dos, el alumno construye rectángulos. El profesor les estimula a observar sus propiedades, es decir, que tienen los lados iguales dos a dos y paralelos y además, los ángulos iguales y rectos. Si hacemos una presión sobre un vértice obtenemos un polígono con los lados paralelos dos a dos y los ángulos iguales dos a dos, que son los paralelogramos (figura 4.39). Luego los rectángulos pertenecen a la familia de los paralelogramos. De aquí, los alumnos pueden experimentar que los cuadrados y los rombos también son paralelogramos pues cumplen las condiciones de paralelogramos.

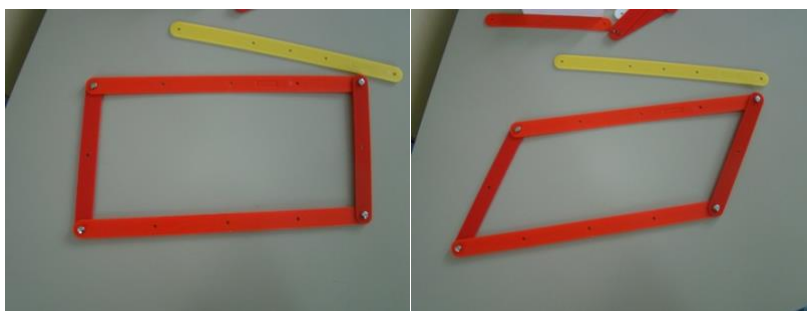


Figura 4.39. Familia de paralelogramos y rectángulos

### 3. Paralelogramos en la familia de los trapecios.

*El profesor puede encontrar, en las construcciones hechas por los alumnos, una figura con un par de lados paralelos, es decir, un trapecio. Si dejamos libre, sin clavija, una de los lados no básico y lo vamos colocando en distintos agujeros sobre la base más larga se seguirán formando trapecios hasta que dicho lado esté paralelo al lado opuesto, que se forma un paralelogramo (figura 4.40). Por consiguiente, podemos deducir que el paralelogramo es un caso particular del trapecio. También se puede reforzar esta deducción por el hecho de que si tiene un par de lados paralelos eso implica que tiene dos lados paralelos.*

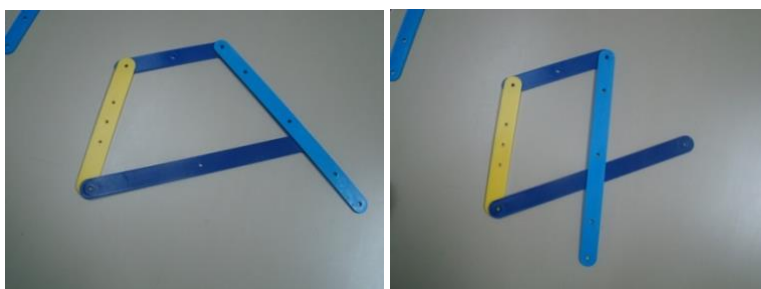


Figura 4.40. Familia de trapecios y paralelogramos

### 4- Cuadriláteros cóncavos y convexos.

*Se pueden separar los cuadriláteros en cóncavos y convexos, basta con hacer observar a los alumnos si los ángulos interiores son menores de  $180^\circ$  o bien mediante gomas elásticas colocadas sobre los vértices (que hacen de segmentos) comprobar si existen dos vértices que al unirlos, la goma queda fuera del cuadrilátero. Todo ello basado en las definiciones de cuadriláteros cóncavos y convexos que nos dicen que un cuadrilátero es cóncavo si existe un par de puntos, al menos, de la figura, tal que el segmento que los tiene por extremos no pertenece a la figura. En caso contrario es convexo.*

Con todas las premisas obtenidas, se podría incluso llegar a construir el esquema de clasificación de los cuadriláteros por inclusión. Aunque esta clasificación sabemos es propia de la Secundaria.

Este material nos permite observar propiedades como la relación área-perímetro que ya hemos tratado en los geoplanos. En este caso, se puede partir de un rectángulo, *el alumno mediante presión en uno de sus vértice va obteniendo paralelogramos cuya área, hueco interior, va disminuyendo al seguir presionando el vértice, incluso puede llegar al caso límite juntando los lados, en el que el área es cero; mientras el perímetro, que es la longitud de las cuatro varillas, permanece constante.*

Este material es mucho más adecuado que el geoplano para hacer observar esta propiedad, pues su continuidad hace ver al alumno que el área puede variar y el perímetro se mantiene constante.

Estas mismas actividades se pueden hacer con polígonos de un número superior de lados.

#### ***Actividades para grupos de estudiantes para profesores.***

*- Hacer un estudio similar al de los cuadriláteros cóncavos y convexos para los pentágonos.*

#### **4.3.6. Espejos**

Los espejos son un material útil en las aulas pues tienen muchas posibilidades para realizar actividades lúdicas con una gran carga de creatividad y otras propias de los desarrollos curriculares del área de Matemáticas y de Artísticas.

El espejo es un material que se puede utilizar en todos los niveles y con alumnos de desarrollos intelectuales muy distintos, es el profesor quien decide cuáles son las actividades adecuadas para cada caso. Principalmente los espejos se utilizan para trabajar los conceptos relacionados con las isometrías como son las reflexiones, traslaciones y giros.

Las actividades que podemos hacer con los alumnos se pueden realizar con un solo espejo, con dos espejos (libro de espejos) o con tres o más espejos. Los espejos a los que nos referimos son de tamaño pequeños es decir manuales, y contruidos de materiales adecuados para que el alumno no sufra peligros de corte. Debemos procurar que cada alumno tenga el suyo.

**1- Actividades con un solo espejo.** Podemos empezar con un espejo grande colocado en el aula. El alumno puede comenzar descubriendo su propia imagen, estudiar los conceptos de orientación espacial, viendo los conceptos que permanecen, como arriba y abajo, y los que varían como izquierda y derecha.

***Actividad individual de estudiantes para profesores.***

*Investigar cuál es la altura que debe tener un espejo para poder verse totalmente reflejado.*

*Diseñar una metodología para mostrar dicha propiedad a los alumnos.*

Con el espejo manual los alumnos pueden realizar actividades libres observando e investigando qué es lo que pasa cuando lo coloca sobre fotografías o dibujos.

***Actividades para grupos de estudiantes para profesores.***

*Los estudiantes pueden hacer una primera búsqueda de actividades relacionadas con las isometrías, y fotografías o dibujos para alumnos de Primaria. Consulta textos, libros o artículos. Posteriormente se hace una puesta en común de los grupos.*

***Actividades para los alumnos.***

Formulamos algunas actividades ya directamente para los alumnos de Primaria mediante ejemplos. La simetría se presenta en principio de una manera informal, como que una figura es simétrica si la mitad de la figura colocada a la derecha del eje es igual a la otra mitad. El eje de simetría es la línea sobre la que colocamos el espejo, como en la figura 4.41, es decir, en el sentido de que si la doblamos por el eje, coinciden las dos partes de la flor.



Figura 4.41. Simetría

***Ejemplo 1.*** *En esta vasija del Museo Provincial de Cáceres, hemos fotografiado solamente la mitad (figura 4.42).*

*- Coloca el espejo para verla entera. Coloca el espejo de manera que aparezca una vasija sin abertura. Coloca el espejo para que podamos contemplar una esfera. ¿Podemos obtener una vasija con dos aberturas? Mueve el espejo sobre la fotografía y observa qué obtienes.*





Figura 4.42. Simetría

Podemos observar que estamos iniciando al alumno en las simetrías axiales o reflexión mediante una actividad bastante lúdica para éste.

***Ejemplo 2.***

*-En el siguiente reloj (figura 4.43), coloca el espejo sobre la línea eje de la derecha. ¿qué hora se ve en el espejo? ¿qué hora tiene que tener el reloj para que en el espejo se vean las 7 y cuarto?, ¿las 3 menos cuarto? ¿y las 5? ¿A qué horas el reloj marca la misma hora en el reloj y en su reflejo del espejo? Evidentemente el profesor está trabajando, a la vez, la simetría y la magnitud tiempo, en particular las horas. Dibuja dicho reloj y compruébalo.*

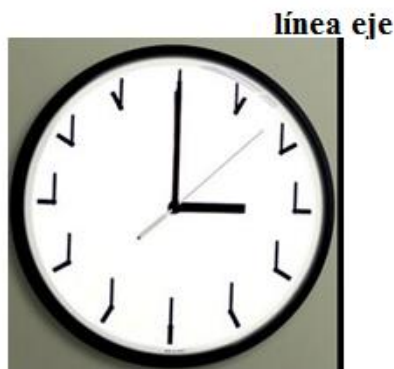


Figura 4.43. Simetrías en el reloj

Otras actividades que se pueden hacer sobre el reloj de la figura anterior u otro similar son:

*- Coloca el espejo sobre este reloj para conseguir otro con dos manecillas grandes y dos pequeñas. Igualmente, dos manecillas grandes solamente.*

Para estas actividades se coloca el espejo sobre el reloj de manera que la base siempre apoye en el centro, y cuando el alumno encuentra el resultado señala con una línea donde ha colocado el espejo y una flecha que indica el lugar donde está la zona reflectante del espejo, para que los compañeros puedan comprobarlo (figura 4.44).



Figura 4.44. Actividades con un espejo y un reloj

Un siguiente paso puede ser trabajar con las formas conocidas por los alumnos. En este caso, se puede empezar a estudiar los ejes de simetrías de las figuras cuadrados, triángulos, etc. Hacemos ver al alumno que un eje de simetría es aquel segmento tal que si colocamos el espejo, en el reflejo se ve la misma figura.

***Actividades para los alumnos.***

*- Estudiar los ejes de simetría de figuras geométricas dibujadas en una trama utilizando un espejo, por ejemplo, triángulos, cuadrados y pentágonos regulares y no regulares.*

*El profesor pregunta al alumno: ¿qué ocurre cuando colocamos el espejo sobre formas geométricas? ¿Cómo tenemos que colocar el espejo para que veamos la figura completa como si no hubiera espejo? Busca todas las formas distintas de colocar el espejo, sobre cada una de las figuras, para que ocurra esto. Hacer un listado de los ejes de simetrías de cada una de las figuras.*

*- Buscar los ejes de simetrías de otras figuras que pueden representar emblemas, o símbolos comerciales como, por ejemplo, las señales de tráfico.*

De esta forma se acerca el concepto a las formas de la vida ordinaria. Se puede aprovechar y estudiar conjuntamente las simetrías con espejos y con programas informáticos adecuados para ello, como muestra el siguiente ejercicio.

**Ejercicio individual para estudiantes para profesores.**

- Busca mediante un espejo los ejes de simetría de los polígonos regulares hasta el orden 12, y de la circunferencia.

- Enseña a los alumnos a construir con GeoGebra o Cabri u otro programa informático similar, los polígonos regulares hasta el orden 12 y sus ejes de simetría. Construye también una circunferencia y sus ejes de simetría.

- Diseña una tabla de doble entrada para estudiar los ejes de simetría de los polígonos regulares en la que el alumno tenga que señalar el número de ejes de simetría que van de lado a lado, de vértice a lado, de vértice a vértice y el número total de ejes para cada polígono regular hasta el dodecágono. Incluye también en la tabla la circunferencia. Rellena la tabla y elabora para los alumnos, preguntas de relaciones como las siguientes: ¿has observado alguna relación entre el número de lados del polígono regular y el número de ejes de simetría? ¿Cómo podríamos definir, por tanto, la circunferencia?

La siguiente etapa en la utilización de los espejos sería trabajar el dibujo de lo reflejado. Para ello, vamos a utilizar una trama cuadrada que facilita al alumno el dibujado de segmentos, ángulos y figuras geométricas.

**Ejercicio para los alumnos.**

1- La actividad consiste en dibujar las figuras dadas en la parte izquierda de la línea gruesa, utilizando ésta como si fuera un espejo (figura 4.45).

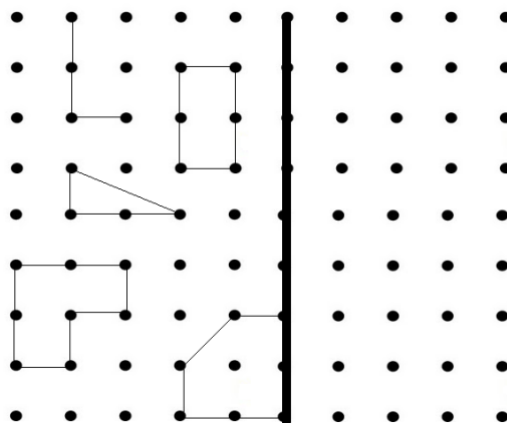


Figura 4.45. Dibujo de lo reflejado

El alumno puede colocar el espejo en dicha línea y observar lo que tiene que hacer o comprobar el resultado al final de la actividad. El profesor debe hacer observar al alumno las propiedades propias de las simetrías:

- *Por ejemplo, que los puntos sobre el espejo (línea gruesa negra) se transforman en ellos mismos.*

- *Al dibujar una figura debe observar que los vértices y lados tienen que quedar a la misma distancia del espejo, los que están más cerca debe quedar más cerca y así con todos.*

En este punto parece que los alumnos han experimentado lo suficiente para que podamos hablar ya con propiedad de los conceptos de simetría, eje de simetría y ejes de simetrías de las figuras. Un ejercicio interesante consiste en:

2- *Estudiar los ejes de simetría de las distintas letras del alfabeto (figura 4.46). Elaborar una tabla. Los alumnos estudian si los ejes de simetría son verticales, horizontales u oblicuos y elaboran una tabla en la que indican, también, el número de ejes de cada letra.*

A B C D E F G H I J  
K L L L M N Ñ O  
P Q R S T U V X Y Z

Figura 4.46. Ejes de simetrías de las letras del alfabeto

3- **Mensajes secretos.** El profesor puede, así mismo, plantear actividades llamadas “mensajes secretos” en las que el alumno debe descubrir mediante un espejo las palabras secretas o mensajes secretos.

- *Descubre el mensaje secreto (figura 4.47) en el que se juega con las simetrías horizontales y verticales.*

M A R C C S J L F G A  
C C M S L U J J C  
G F R M A J

Figura 4.47. Descubre el mensaje secreto

4- Busca palabras que se puedan leer totalmente después de reflejarse en el espejo como por ejemplo: BOB, colocando el espejo en el eje horizontal de la palabra.

5- Escribe frases en un papel, de manera que al colocar el papel frente al espejo se pueda leer la frase escrita en la imagen reflejada.

6- Realizar una puesta en común para mostrar los trabajos realizados y establecer un debate.

Una actividad importante para trabajar con un espejo es la relación de la simetría con la naturaleza, seres vivos e inertes que presentan una simetría perfecta, y con el arte: objetos o construcciones hechas por el hombre con una envidiable simetría que les hace realmente hermosos a nuestros ojos.

#### **Actividades para grupos de estudiantes para profesores.**

1- Elabora actividades que relacionen la simetría con la naturaleza viva, flores, mariposas... y con la naturaleza muerta, cristales de nieve, rocas, ...en las que el alumno tenga que utilizar un espejo.

2- Elabora actividades que relacionen la simetría con el arte, escultórico, pictórico o de edificio en las que el alumno tenga que utilizar un espejo.

En los dos casos hay que tener en cuenta el curso para el que se elaboran las actividades.

#### **2- Actividades con dos espejos (Libro de espejos)**

Podemos también trabajar con dos espejos unidos por un lado que se denomina **Libro de espejos**. Este libro es fácil de construir con dos espejos y cinta aislante o algún material que pueda unirlos por un lado de forma que forme un ángulo diedro variable como se muestra en la figura 4.48. Las actividades con el libro de espejo pasan también por una fase de ejercicios libres para que el alumno vaya familiarizándose con el librito y observando qué aparece cuando coloca un objeto delante del libro de espejos. El alumno puede hacer diseños y observarlos mediante el libro de espejos, puede colocar un cubo, por ejemplo, delante del espejo y observar qué ocurre cuando abre y cierra el libro.



Figura 4.48. Libro de Espejos

El profesor hace ahora actividades como la siguiente:

**Actividades para los alumnos.**

**1- Generación de polígonos regulares y estrellados.**

- Dibujar un segmento en un folio blanco y colocar sobre éste el libro de espejos. Mover el libro de forma que consigas generar polígonos regulares. Luego debes apuntar los ángulos de apertura del espejo para generar cada polígono y realizar con toda la información una tabla en la que aparezca: Nombre del polígono, número de lados de la figura, grados de apertura del libro. En la figura 4.49 esta actividad se hace con una pieza de mecano en lugar de dibujar un segmento.

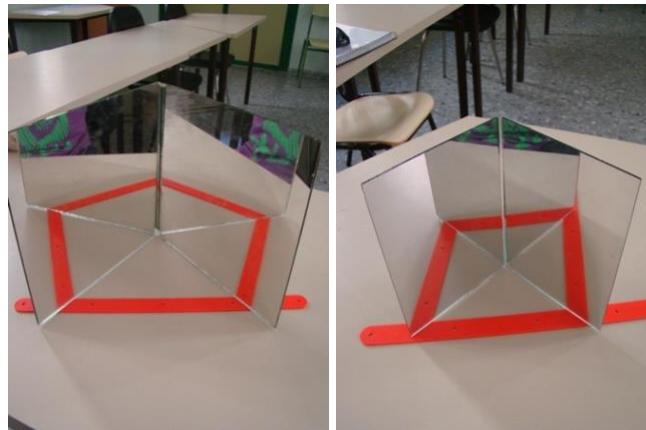


Figura 4.49. Generar polígonos regulares con el libro de espejos

- Buscar, también, polígonos estrellados, como puede ser un hexágono estrellado. Observa cómo debes colocar el libro de espejos sobre la línea dibujada en el folio.

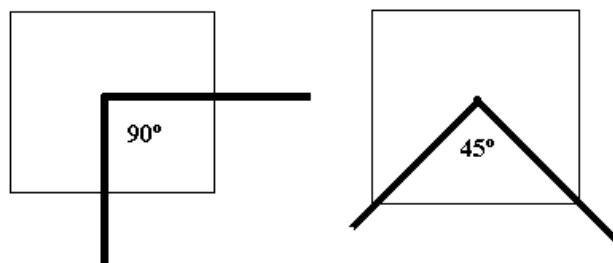


Figura 4.50. Cuadrado y diagonales en el libro de espejos

**a) Obtención de un cuadrado y un rombo mediante sus diagonales.**

- Se dibuja una línea en el papel. Conseguir obtener un cuadrado bien con una abertura de  $90^\circ$  o bien  $45^\circ$ . El profesor debe explicar esta actividad a partir de que el cuadrado es simétrico respecto de sus diagonales (figura 4.50).

- Conseguir un rombo con el libro de espejos. Observar la colocación del libro de espejo y medir el ángulo que forman los espejos.

**b) Paso al infinito desde los polígonos.**

Algo que los alumnos escuchan muchas veces pero que nunca el profesor se lo suele mostrar de una forma concreta es:

- Observar que al aumentar el número de lados de un polígono (paso al límite) podemos obtener una circunferencia. Hagamos esta actividad con el libro de espejos.

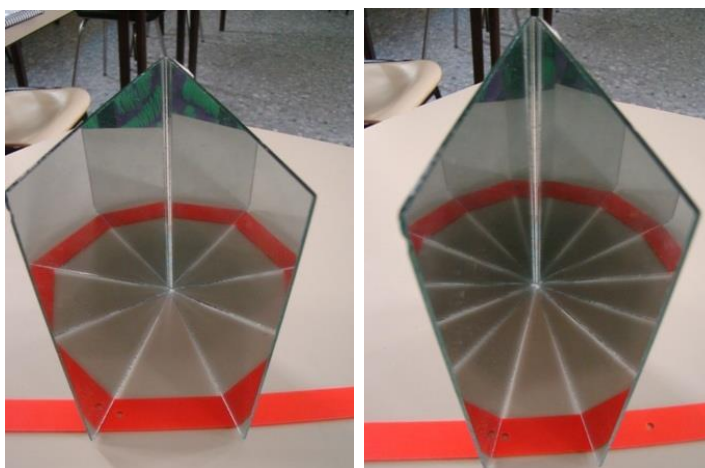


Figura 4.51. El límite del polígono es la circunferencia

Esto se observa cerrando, poco a poco, cada vez más, el libro de espejo sobre un segmento, pues recordemos que sobre éste, generamos los polígonos regulares y al cerrar el ángulo entre los espejos, aumenta el número de lados hasta infinito, que se consigue cuando los dos espejos se cierran (figura 4.51)

**3- Simetrías y caleidoscopios.**

Trabajando, también, la simetría con los dos espejos, el profesor puede construir con los alumnos caleidoscopios. Para ello, se usan tres espejos en forma rectangular, más largos que ancho. Se unen las caras de los espejos dos a dos, mediante cinta aislante, por la parte más larga quedando los espejos en el interior de un prisma triangular.

Podemos realizar las siguientes actividades:

- Coloca el caleidoscopio sobre el triángulo coloreado de la figura 4.52 (azul, rojo y amarillo) y mirando desde arriba podrás ver un mosaico, completa el dibujo de la derecha según lo que ves en el caleidoscopio.

- Ahora sobre un triángulo equilátero en blanco, los alumnos hacen sus propios dibujos y observan luego el resultado colocando el caleidoscopio sobre los lados del triángulo (figura 4.52). En este caso, el alumno ha dibujado cuatro figuras geométricas.

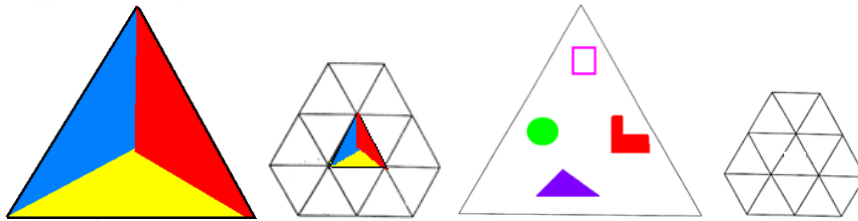


Figura 4.52. Iniciación al caleidoscopio

Es necesario, para que el alumno practique y aprenda de forma divertida la simetría, que una vez observado el mosaico obtenido con su dibujo, lo dibuje sobre la plantilla de la derecha.

- El alumno puede construir, mediante manualidades, su propio caleidoscopio, colocando unas piedritas de colores en el extremo abierto, y cerrándolas con plástico o papel transparente. Lo importante es que el alumno haya comprendido cuál es la razón para que se vean esos mosaicos tan maravillosos.



Figura 4.70. Caleidoscopios

### ***Ejercicio para los estudiantes.***

*Indagar cómo se construye un caleidoscopio con tres espejos para posteriormente enseñar a sus alumnos a hacerlo.*

- *Elaborar la lista de materiales. Método de construcción.*

- *Indagar si hay otros tipos de caleidoscopios (¿con más de tres espejos?) y en qué se diferencian unos de otros.*



## Tema 5. Materiales manipulativos para la enseñanza de la geometría y la medida.

### II parte

En este capítulo continuamos el estudio de los materiales constructores, pero en este caso, de Geometría Espacial. Estudiamos, también, los modelos construidos y acabamos describiendo el mecanismo generador de figuras de revolución.

#### 5.1. Materiales constructores en Geometría espacial

Tres son los materiales constructores que vamos a considerar y que son aptos para la enseñanza-aprendizaje de los cuerpos geométricos en Primaria son: el material Plot, material Polydron y material Orbital. La metodología de trabajo que vamos a seguir a continuación es describir cada uno de estos materiales para pasar, posteriormente, a comentar de forma genérica las actividades que se pueden hacer con ellos. Estas actividades son idénticas para los tres materiales, salvo en casos excepcionales que serán precisados cuando ocurran.

##### 5.1.1. Material Plot, Polydron y Orbital

a) **El material Plot** está formado por unas láminas de cartón en las que se encuentran troquelados polígonos regulares y otros polígonos como triángulos isósceles, rectángulos... Los cuerpos geométricos se forman mediante la unión de las pestañas salientes de estas piezas, dos a dos, con una goma elástica hasta cerrar la figura correspondiente. Al cerrar la figura las pestañas quedan a la vista como se muestra en la fotografía (figura 5.1)

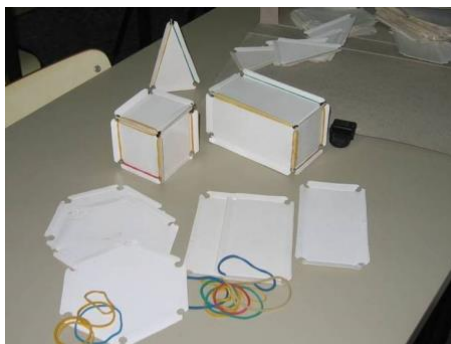


Figura 5.1. Material Plot

b) **El material Polydron** son unas piezas de plástico de distintos colores en forma de polígonos regulares. Las piezas se engarzan por medio de adecuados entrantes y salientes en los correspondientes lados de las piezas, para formar las figuras geométricas espaciales deseadas (figura 5.2).



Figura 5.2. Material Polydrón

Los niños deben captar intuitivamente las dos alternativas o estrategias posibles: ir encajando pieza a pieza para crear el volumen o bien partir del desarrollo, engarzando las piezas en el plano para posteriormente realizar la forma tridimensional. En la reproducción de figuras tridimensionales debe ofrecerse una variada gama de modelos. Como modelos tridimensionales el profesor puede utilizar tanto el mismo polydrón o modelos en otros materiales (plástico, cartulina, madera, etc.).

c) **Material orbital** está formado por unas pajitas o sorbetes de plástico que se unen mediante unas piezas especiales llamadas conectores. Este material puede ser improvisado en las aulas mediante el uso de las pajitas o palillos de madera y utilizando como conectores bolitas de plastilina. Las figuras 5.3 y 5.4 muestran los dos tipos de materiales orbitales.

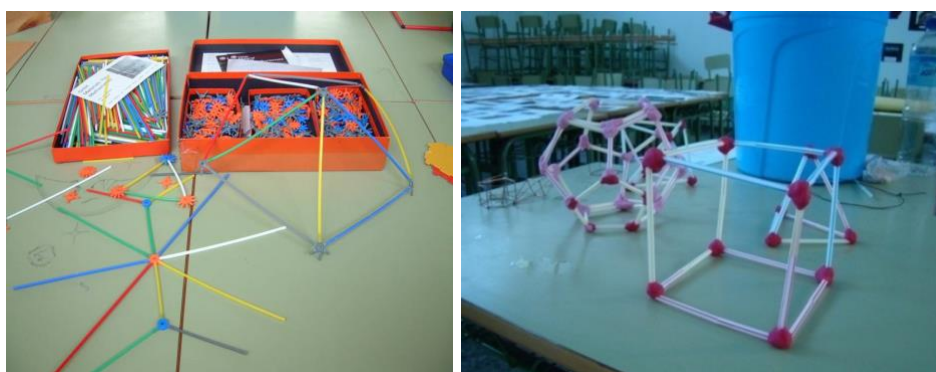


Figura 5.3. y 5.4. Material orbital y construcciones con pajitas y plastilina

### 1- Actividades con los materiales.

Para la utilización de estos materiales es necesario comenzar con una fase inicial: libre, de toma de contacto y manipulación. El alumno aprende cómo se unen las piezas poligonales mediante las gomas o cómo se unen las piezas del polydrón mediante los entrantes y salientes que tienen sus lados. Para unir

las piezas del polydrón se precisa un dominio de la motricidad fina que generalmente no se dispone hasta los cuatro o cinco años. Poco a poco, cuando el alumnado conoce bien las piezas, los polígonos planos, y va construyendo diferentes cuerpos pasamos de esta fase inicial a una fase dirigida en la que le vamos proponiendo diferentes actividades.

Por ejemplo, con cualquiera de estos materiales podemos realizar las actividades que nos proponen los currículos oficiales de Primaria respecto a la geometría espacial.

#### ***Actividades para los alumnos.***

*- Hacer el reconocimiento de cuerpos geométricos y sus elementos como son caras, aristas, vértices.*

*- Construir el cuerpo geométrico indicado por el profesor y posteriormente deshacerlo para obtener su desarrollo o representación plana.*

Esta actividad es más recomendada con los dos primeros materiales.

*- A partir de las figuras geométricas construidas, buscar en el entorno próximo objetos que tengan las mismas formas que dichas figuras construidas.* Esta actividad tiene como objetivo que el alumno valore la capacidad de reconocer las formas espaciales más elementales en su propio entorno.

Para desarrollar la competencia lingüística, los alumnos en estas actividades deben comunicarse entre ellos y con el profesor, mediante informaciones orales y escritas sobre dichos cuerpos y su ubicación en el espacio cotidiano. Las frases pronunciadas deben hacerse de manera adecuada, es decir, utilizando con propiedad el vocabulario correcto.

En los cursos superiores, además de reforzar estas actividades, el profesor puede comenzar a realizar actividades de comparaciones y clasificación de cuerpos geométricos. Las comparaciones se pueden hacer de forma dicotómica, para ir progresivamente acercándose a la clasificación general de los cuerpos geométricos

*- El profesor da al alumno diferentes cuerpos geométricos y debe separar los que son prismas de los que no lo son.* El alumno previamente debe conocer por este curso o el anterior, los criterios necesarios para ser prisma.

*- Realizar otras clasificaciones: poliedros y no poliedros, regulares e irregulares, ortoedros y no ortoedros,...*

- Describir el cuerpo geométrico indicado por el profesor, para valorar si conoces las propiedades básicas de los cuerpos.

También, se trabajan los ángulos diedros, basta con ensamblar dos piezas del material Plot o Polydron.

- Construir los distintos tipos de ángulos diedros: rectos, agudos, obtusos... y en cada caso les hace observar cómo son los planos caras entre sí. Luego en el aula se buscan también dichos ángulos.

Otra opción más es trabajar las teselaciones. Una **teselación**, sabemos, es cuando podemos cubrir el plano con formas planas de manera que no se superponen y no hay huecos entre ellas. Por ejemplo, con triángulos equiláteros podemos cubrir todo el plano. Esta actividad se puede ayudar con los libros de espejos pues clarifican qué polígonos cubren y cuáles no cubren el plano.

#### **Actividades para grupos de estudiantes para profesores.**

- Construir con cualquier material, cartón, papel etc., muchos triángulos y después formar figuras geométricas espaciales solamente con dichos triángulos. Estudiar los distintos casos que nos vamos encontrando y comentar si serían apropiados para Primaria o Secundaria. Elaborar un informe del estudio.

- Hacer lo mismo con cuadrados, pentágonos y exágonos.

- Con el material Plot, estudiar qué desarrollos planos podemos construir. Dibujarlos en papel. De acuerdo con el currículo oficial vigente en esa comunidad, seleccionar los desarrollos apropiados para Primaria y diseñar actividades para cómo enseñarlos en el aula.

- Mediante el material Plot o Polydron realiza el estudio de cubrimiento del plano con las formas de estos materiales. Para las experiencias es aconsejable disponer de libros de espejos.

- Ahora busca el cubrimiento del plano con las formas regulares, de una en una, o utilizando dos distintas

- Enuncia, una vez hecho los dos estudios, actividades que se puedan hacer con los alumnos de Primaria. Hacer una puesta en común con toda la clase.

## **5.2. Modelos construidos**

Como hemos dicho al principio de este capítulo, llamamos modelos construidos a *aquellos materiales que sirven directamente para observar y concretar conceptos y profundizar en propiedades*

que, por otro lado, sería difícil hacerlo. En los siguientes apartados y para Primaria vamos a tratar los siguientes modelos: Sólidos de madera o transparentes, desarrollos planos y cubos multienlaces.



Figura 5.5.Sólidos de madera

### 5.2.1. Sólidos de madera, plásticos o transparentes

**Las cajas de sólidos** de madera o plástico son cajas que contienen algunos de los cuerpos geométricos más representativos. Suelen tener los cinco poliedros regulares, prismas: triangular, cuadrado (ortopedro) y exagonal, un cilindro recto y otro oblicuo, pirámide con base cuadrada y exagonal, tronco de pirámide cuadrangular, cono recto y oblicuo, tronco de cono y dos medias esferas.

Si pertenecen a una misma caja suelen tener la particularidad de tener medidas comunes; por ejemplo, todos los cuerpos con base cuadrada tienen la misma medida de la base, que suele ser de lado 5cm o 4cm. Los cuerpos de base circular tienen la misma base de diámetro, 5 cm o 4 cm. Todos los cuerpos tienen la misma altura que suele ser el doble de las medidas anteriores, es decir, 10 cm o 8 cm, menos los troncos o las esferas que miden de altura la mitad, y los poliedros regulares que se acercan también a estas medidas. En el siguiente resumen, vemos algunas relaciones que van a ser básicas para el estudio de áreas o volúmenes.

**Mismas medidas de base circular y altura:** cilindro recto, oblicuo, cono, cono oblicuo. También tienen esta misma base circular la semiesfera y el tronco de cono, cuya altura es la mitad.

**Mismas medidas de base cuadrada y altura:** pirámide recta, ortopedro. También el tronco de pirámide tiene la misma base cuadrada pero la mitad de la altura.

**Mismas medidas base exagonal y misma altura:** prisma y pirámide hexagonal.

Hay también una misma medida lineal que coincide en los siguientes cuerpos:

- arista base del prisma de base cuadrada,

- arista del cubo,
- altura de la cara base (triángulo) del prisma de base triangular,
- arista base de la pirámide de base triangular,
- arista basal mayor del prisma de base rectangular,
- diámetro de la cara base del cilindro,
- diámetro de la cara base del cono,
- diámetro de la esfera y
- diámetro del círculo circunscrito a la cara base del prisma de base hexagonal.

Estas mismas relaciones se suelen dar en los llamados **cuerpos transparentes** que son *aquellos cuerpos de plástico transparente que tienen una abertura en una de sus caras de forma que se pueden rellenar de líquidos, arena, etc.* A veces también se pueden rellenar los sólidos de plástico, solamente practicándoles un agujero por el que rellenarlos. Los de madera suelen ser de madera maciza.

Los sólidos de madera o plástico son el único material que la mayoría de los estudiantes para profesores recuerdan como material que han utilizado, aunque, como ellos mismo afirman, su utilización se reducía a una caja que llevaba el profesor y conforme los iba explicando los iba mostrando. En la mayoría de los casos, los alumnos no tocaban, ni siquiera, dichos cuerpos sólidos.



Figura 5.6. Cuerpos geométricos transparentes

Sin embargo, este material debe ser utilizado para favorecer la enseñanza de los cuerpos geométricos mediante la experimentación manual. También puede ser utilizado para el estudio manual de las áreas laterales o totales y los volúmenes de los cuerpos, aunque estos usos son más apropiados en Secundaria. Es necesario resaltar que para el uso adecuado de estos materiales, el alumno tiene que tener suficientes objetos para poderlos tocar, organizar, medir, etc. Lo ideal sería, al menos, una caja cada cuatro alumnos. Este material debe ser complementario de otros materiales como son el material

Polydron o material Plot que al ser materiales constructores dan posibilidades de construir otros cuerpos diferentes a estos sólidos.

Podemos observar que la única utilización de este material crea en el alumno una imagen mental escasa pues hay muchos cuerpos que no va a tratar. Por ejemplo, no hay cuerpos convexos, no aparece la base pentagonal, todas las bases son polígonos regulares,... Que todos sean también de la misma altura puede también delimitar la imagen del alumno que puede llegar a no considerar como prismas o pirámides aquellas que tienen poca altura.

Las actividades deben comenzar por el juego libre, para un primer contacto con el material; desde el principio hay diversas distinciones que los alumnos pueden ir asimilando mediante clasificaciones dicotómicas. Por ejemplo, mediante el tacto, deben distinguir que los poliedros están constituidos por caras que son superficies planas y que los cuerpos redondos, sin embargo, incluyen superficies curvas.

Posteriormente, deben comenzar a distinguir entre las distintas clases de poliedros, pirámides y prismas, y las de cuerpos redondos: cilindro, cono y esferas. Siempre, como ya hemos dicho mediante clasificaciones dicotómicas y actividades como las que enunciamos a continuación.

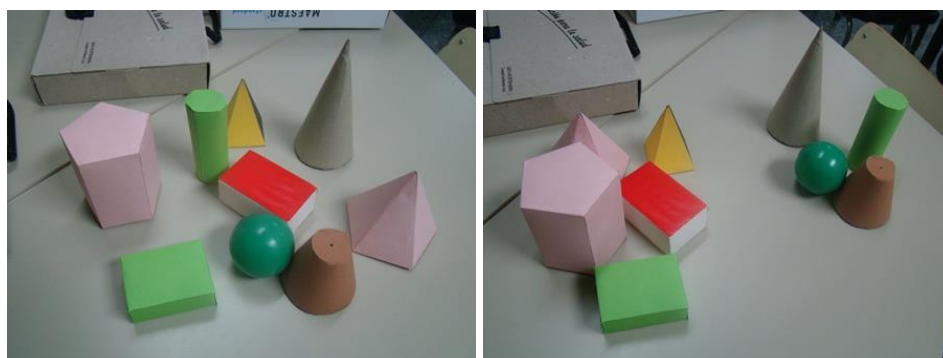


Figura 5.7. Clasificación dicotómica: “poliedros y no poliedros”

### **Actividades para los alumnos.**

- *El profesor les da una serie de cuerpos geométricos (figura 5.7) y hay que separarlos en poliedros y no poliedros.*

Los alumnos manipulan los distintos cuerpos observando que algunos ruedan sobre el piso o la mesa y otros no. Observan el desplazamiento de los diferentes cuerpos (esfera, cono, cilindro) al rodar. El profesor da los nombres geométricos y promueve la adecuada expresión oral.

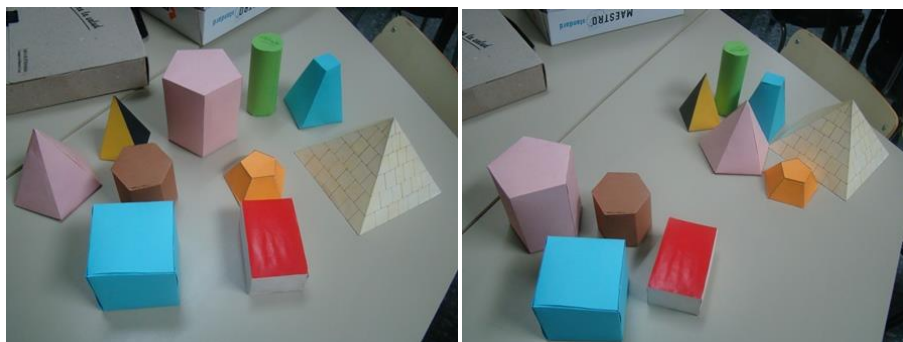


Figura 5.8. Clasificación dicotómica: “prismas y no prismas”

- Los alumnos colocan cada uno de los cuerpos en distintas posiciones, asocian los distintos cuerpos a objetos del entorno, comparan los cuerpos entre sí y con la ayuda del profesor, van ensayando alguna clasificación posterior.

- Los alumnos buscan los prismas y no prismas, pirámides y no pirámides... y van verbalizando las razones, en forma de propiedades.

- Estudian las propiedades de los cuerpos redondos. Por ejemplo: “Éstos todos tienen dos caras iguales. Éstos todos terminan en pico aunque uno rueda y los otros no”.

- Colocan los cuerpos redondos en distintas posiciones y los asocian a objetos del entorno, Ejemplos: “este cuerpo es como una caja, un vaso alto, un balón, ...

El objetivo es familiarizar al alumno con el material e ir poco a poco incorporando el lenguaje geométrico para desarrollar la competencia lingüística.

Otra distinción importante es la comparación entre los elementos de las figuras planas y los cuerpos.

- Observar que en las formas planas tenemos puntos, lados (una dimensión) y en los diferentes cuerpos geométricos encontramos elementos que llamamos vértices (puntos), aristas (de una dimensión), y otros llamados caras (de dos dimensiones).

- En la geometría plana tenemos que existen en los polígonos: ángulo con vértice (punto) y lados (una dimensión) y en geometría espacial, en los cuerpos: ángulo diedro con arista (una dimensión) y caras (dos dimensiones).

### **Actividades para los alumnos.**

#### **1- Reconocimiento de cuerpos y figuras planas.**

El objetivo de esta actividad es que reconozcan los distintos elementos de los cuerpos geométricos.



Los alumnos se distribuyen en pequeños grupos y entre todos eligen a un alumno que es el director del juego. Este alumno realiza las siguientes actividades:

*En primer lugar, elige una figura plana y luego un cuerpo y los demás alumnos hacen lo mismo. Desplaza el dedo por cada uno de los lados de la figura plana o coloca el dedo en cada uno de los vértices. Después, desplaza un dedo por cada, una de las aristas del cuerpo y, desplaza la mano por cada una, de las caras del cuerpo. A la vez que manipula, debe ir dando el nombre correspondiente de la parte de la figura o el cuerpo que toca.*

*Los otros compañeros imitan la acción en la figura y cuerpo seleccionado. Los alumnos constatan que todos realicen la acción correspondiente en forma correcta. A continuación, cada niño verbaliza el nombre de la figura que cogió y la cantidad de aristas y vértices de dicha figura. Igualmente verbaliza el nombre del cuerpo que eligió y qué cantidad de caras, arista o vértices tiene dicha figura. Después se hace un conteo y cada uno anota en su cuaderno cuántos lados, vértices, aristas, ... ha tocado y pone el nombre de la forma y el cuerpo con el que ha trabajado.*

La actividad se puede realizar de forma que todos tengan la misma figura plana y el mismo cuerpo o distintas figuras y cuerpos, elegidos aleatoriamente.

## **2 - Juego de adivinar cuerpos.**

El objetivo de esta actividad es que identifiquen los distintos cuerpos geométricos, sus partes y memoricen sus nombres. Los alumnos se agrupan de cuatro o cinco.

*- Cada alumno por turno selecciona a ojos cerrados un cuerpo de la caja y después de manipularlo sin verlo, dice el nombre del cuerpo que seleccionó. También debe expresar las razones que lo llevaron a descubrir el nombre del cuerpo. Por ejemplo, “me di cuenta que era una pirámide por el vértice que tiene arriba y porque solo tenía una base”.*

Las actividades con este material se pueden simultanear con las del material Plot y material Polydron.

Vamos a enunciar algunas otras actividades con los cuerpos geométricos relacionadas con el cálculo de superficies laterales y volúmenes; para ello, nos vamos a valer de las igualdades de medidas que se producen en los distintos cuerpos y que ya hemos comentado anteriormente. Estos ejercicios son para los estudiantes para profesores, de forma que repasan o aprenden estos conceptos básicos.

***Actividades para grupos de estudiantes para profesores.***

Teniendo en cuenta que en la caja de cuerpos que estamos utilizando el ortoedro tiene la misma base que el cubo y el doble de altura, y que el ortoedro y la pirámide cuadrangular tienen también la misma altura y la misma base, enunciamos:

- *Calcular el área lateral y total del ortoedro y del cubo ¿cómo se relacionan?*
- *¿Qué ocurre con los volúmenes?*
- *Calcular el área total de la pirámide cuadrangular y relacionarla con la del cubo y el ortoedro.*

Para hacer los problemas no se darán datos, se miden los elementos (aristas, apotema) correspondientes para calcular las áreas.

Las actividades que siguen se debe hacer con cuerpos transparentes o de plástico (en éstos últimos, previamente, se les ha hecho un orificio para introducir el líquido o la arena).

- *Calcular los volúmenes de los tres cuerpos mediante relleno a partir de una unidad y observar cómo se relacionan.*

Teniendo en cuenta que el prisma exagonal y la pirámide exagonal tienen la misma base y altura.

- *Calcular el área lateral y total del prisma y la pirámide. Establecer la relación entre ellas.*
- *Calcular el volumen mediante relleno a partir de una unidad. Comparar sus fórmulas.*



Figura 5.9. Cuerpos transparentes con orificios, aptos para ser llenados

Teniendo en cuenta que el cilindro y el cono tienen la misma base y altura.

- *Calcular el área lateral y total del cilindro y el cono. Establecer la relación entre ellas.*
- *Mediante relleno establecer las relaciones entre los volúmenes de éstos dos cuerpos.*
- *Calcular las áreas totales de todos los poliedros regulares mediante mediciones en los cuerpos correspondientes.*

- Esta actividad solamente supone saber las áreas del triángulo equilátero, cuadrado y pentágono regular. Podemos observar que para los problemas que se plantean solo necesitan saber las áreas planas básicas y multiplicar el número de caras iguales. En los volúmenes también se trabaja mediante rellenado, para sembrar el concepto de volumen y la relación que se establece entre los prismas y las pirámides o, en el caso límite, cilindros y conos que al tener la misma base y altura es siempre de un tercio, aspecto que después se refleja en las fórmulas de estos cuerpos.

### 5.2.2. Desarrollos planos

El desarrollo plano de una figura es *la representación de esa figura en el plano, que montándolo de forma adecuada nos permite obtener la figura*. El desarrollo plano tiene que ser conexo para que se una de una sola vez, sin romperse. Los desarrollos planos suelen estar contruidos en papel o cartulina y en la matemática tradicional se utilizaban para construir los diferentes cuerpos geométricos. Su función en dicha matemática no era más que de pura construcción sin ser utilizados posteriormente para ninguna actividad de reconocimiento de figuras, de sus elementos, etc.

Los desarrollos planos, sin embargo, son un material muy válidos para estudiar la relación plano-espacio de las distintas figuras, reforzar o estudiar las distintas partes de las figuras (caras, aristas,...) y para el estudio de las áreas laterales, totales en complementación con los cuerpos geométricos estudiados anteriormente. Para que los alumnos interioricen bien que es lo que queremos decir con desarrollo planos, es preciso que el profesor comience por actividades manipulativas en las que el alumno vea cómo se construyen y obtienen dichos desarrollos.

#### *Actividades para los alumnos.*

1- El profesor dice al alumno: *“Vamos a coger un envase de cartón y vamos a desplegarlo totalmente como en la figura 5.10.”*



Figura 5.10. Desarrollo plano de una caja de leche (ortocentro)

- Haz un dibujo o un croquis del envase totalmente desplegado y dibuja el desarrollo plano. Si dicho desarrollo queremos hacerlo a tamaño natural habrá que tomar las medidas correspondientes.

- Haz también el desarrollo plano pero reduciendo las medidas de longitud a la mitad. ¿Cuánto se reducen las áreas?

- Observa los distintos elementos en el desarrollo plano que conozcas del tetrabrik. Por ejemplo las aristas, ángulos rectos, etc.

Este ejercicio muestra a los alumnos los desarrollos planos y cómo surgen a partir de los cuerpos geométricos, haciendo también hincapié en la siembra de la proporcionalidad.

Los alumnos pueden empezar la manipulación utilizando el material Plot mediante las siguientes actividades:

**Actividades para los alumnos. Desarrollo plano con material Plot o Polydron.**

1- A los alumnos agrupados de cuatro en cuatro se le dan dos cuerpos geométricos cualesquiera que ellos conozcan y contruidos con material Plot. Los alumnos los abren de forma que pueden obtener su desarrollo plano y dejarlo sobre la mesa (figura 5.11) Luego copian en su cuaderno dicho desarrollo plano y ponen al lado el nombre del cuerpo geométrico.

Por ejemplo, se le da al alumno un tetraedro y quitan las gomas correspondientes de forma que el cuerpo siga siendo conexo y se obtenga su desarrollo plano. El desarrollo plano necesariamente no tiene porqué ser único, pero si hay que comprobar con los alumnos que efectivamente el desarrollo obtenido al cerrarlo nos da el cuerpo de partida.

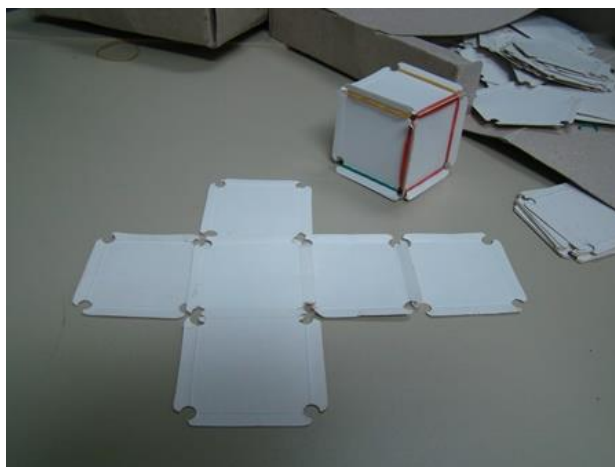


Figura 5.11. Desarrollo plano de un cubo con material Plot

2- *La tienda del indio con material Polydron.*

- *El profesor construye una figura con material Polydron. Igualmente podemos hacerlo con el material Plot.*

Mediante esta actividad, el alumno relaciona las figuras tridimensionales con las planas, conociendo tanto las figuras espaciales como las planas. Al cabo de varias actividades, los alumnos van observando qué piezas planas son las necesarias para construir las figuras correspondientes.



Figura 5.12. Tetraedro en material Polydron

- *La figura se coloca en medio de cada grupo y no se puede tocar. Damos un nombre a la figura por ejemplo la llamamos “La tienda del Indio” (Figura 5.12)*

- *Construye “La tienda del indio”. Cada alumno va tomando las piezas correspondientes para formar otra figura igual.*

- *Una vez que los alumnos construyen varias figuras podemos volver a realizar la actividad, pero en este caso sin la figura modelo.*

La presentación de la actividad sin el modelo a la vista le fuerza a construir la imagen mental y a considerar también la disposición de las piezas planas, que son las caras del cuerpo, para acabar la figura de manera correcta.

3- *El profesor toma una figura y ahora los alumnos van a dibujar dicha figura tridimensional en un papel de manera que todos sepan de qué figura se trata.*

- *A continuación vamos a deshacer la figura sobre el plano de la mesa y vamos a dibujar el desarrollo plano.*

El dibujo de la figura nos informará de cómo el alumno reproduce en el plano la figura, si no se puede identificar, si intenta mostrar las caras, si lo hace de manera frontal, etc. El dibujo del desarrollo

nos informa también si hay poca relación con el modelo, si hay una coincidencia global, es decir, es parecida pero no coinciden las proporciones, el número de caras, el tamaño, ... y la coincidencia total.

La puesta en común ayuda a utilizar las representaciones como un elemento de discusión y contraste en la que todos los alumnos pueden observar distintas representaciones a las suyas, sus éxitos o errores, y la corrección de éstos sobre la marcha de una manera significativa.

4 - El alumno parte ahora del desarrollo de un cuerpo dibujado. (figura 5.13)

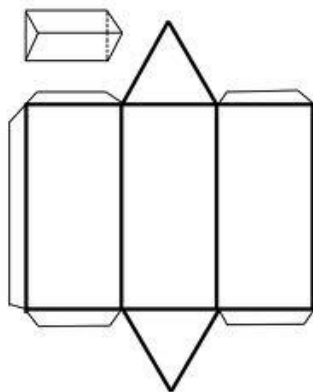


Figura 5.13. Desarrollo plano del prisma triangular

*Debe reproducir el cuerpo correspondiente a este desarrollo mediante:*

*- Cartulinas. Palillos y bolas de plastilina para las uniones. El material Plot o Polydron.*

*-Dibuja el cuerpo*

Estas construcciones nos dan información de cómo los alumnos colocan las piezas respecto a otras, qué ángulos forman, el lenguaje geométrico que utilizan para comunicarse...



Figura 5.14. Posiciones de un cuerpo

5- El alumno va a reproducir el cuerpo que vemos en las figuras mediante el material Polydron o Plot y de la siguiente forma:

- Se enseña a los alumnos la figura 5.14. Construye todas las figuras que pueden corresponderse con la de la foto.

- Se muestra a los alumnos la primera foto del mismo cuerpo (figura 5.15). Elimina las que no pueden ser ya figuras validas para las dos fotos.

- Se enseña a los alumnos la segunda foto (figura 5.15) como solución final.

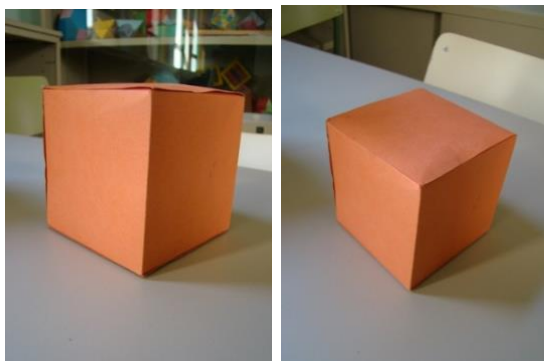


Figura 5.15. Otras posiciones del mismo cuerpo

Es importante llegar a la figura correspondiente al final pero no menos significativo son las discusiones y conversaciones establecidas entre los alumnos durante la realización del ejercicio. Estas conversaciones informan al profesor del nivel de conocimiento que tiene sobre el tema el alumno que habla, así como la forma de expresar ese conocimiento. Este tipo de actividades hace que el alumno preste interés y aprenda significativamente.

#### **Desarrollos planos de cuerpos redondos.**

El material Plot no es apto para construir cuerpos geométricos redondos por lo que para enseñar el desarrollo plano de estos cuerpos es preciso utilizar figuras ya construidas en las que se pueden construir las pestañas con algún tipo de enganche, que se pueda abrir o cerrar. También se pueden utilizar ciertas láminas comercializadas en las que se presentan unas muestras de los cuerpos y, entre ellos, los cuerpos redondos.

#### **Actividades para los alumnos.**

- Se da al alumno cuerpos redondos y busca el desarrollo correspondiente deshaciendo el cuerpo como en la figura 5.16.

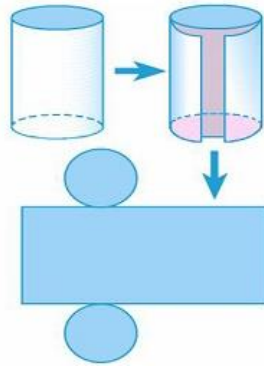


Figura 5.16. Desarrollo plano del cilindro

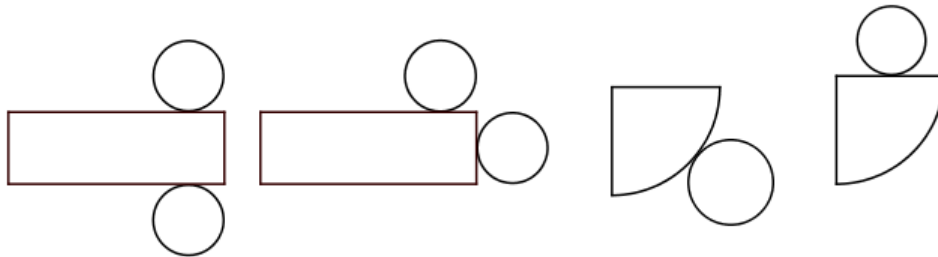


Figura 5.17. Ejercicio de desarrollos planos

- ¿Qué desarrollos planos corresponden a un cilindro (figura 5.17)? ¿y a un cono?

Posteriormente, realizamos actividades con todos los cuerpos estudiados

**Actividades conjuntas para los alumnos.**

1- . Encuentra el desarrollo plano que corresponde a los cuerpos geométricos dados (figura 5.18).

Nombra dicho cuerpo en todos los conjuntos que conozca, por ejemplo, es un poliedro, es un prisma, etc. Recorta el desarrollo plano y comprueba que pertenece a dicho cuerpo, luego encuentra objetos de la vida ordinaria que se parezcan a dicho cuerpo.

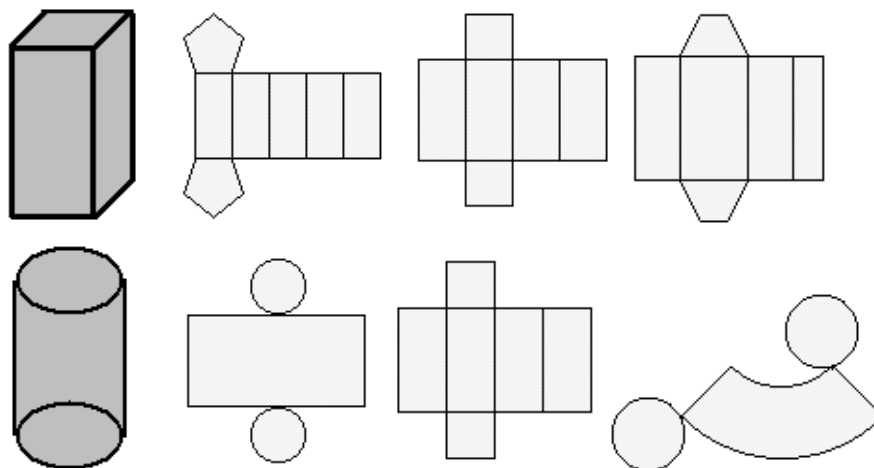


Figura 5.18. Desarrollos planos



Si el alumno ha realizado suficientes actividades con el material Plot o con las figuras de cartón, no tendría mucho problema en hacer estas actividades.

Una segunda actividad sería la identificación de los desarrollos planos sin el modelo espacial correspondiente y, por último, que el alumno construya dichos desarrollos planos.

- *Dados los siguientes desarrollos planos (figura 5.19), nombra el cuerpo al que pertenecen, recórtalos y comprueba que efectivamente son dichos cuerpos. Busca en el aula o en la vida ordinaria cosas parecidas a estos cuerpos. Calcula el área lateral y el total de dichos cuerpos mediante mediciones.*

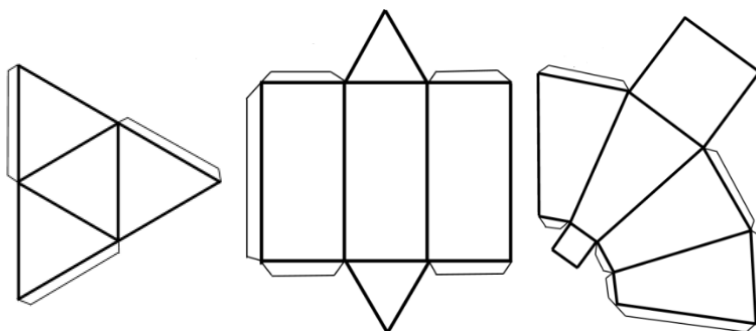


Figura 5.19. Busca el cuerpo al que corresponde estos desarrollos

- *Construye el desarrollo plano de un ortoedro de aristas 5, 5 y 10 cm y el desarrollo plano de un cubo de arista 10 cm.*

Hazlos con cartulina suficientemente fuerte para poder rellenar los dos cuerpos y relacionar sus volúmenes. El relleno se hace mediante arena o introduciendo una bolsa de plástico moldeable para verter líquidos.

Estos desarrollos planos también valen para aprender o reforzar los elementos de los distintos cuerpos, como son: vértices, aristas, formas de las caras, ángulos diedros, etc.

- *Construye un paralelepípedo y una pirámide triangular y sus desarrollos planos. Señala en ellos sus partes importantes.*

Hay que mostrar también a los alumnos que no todos los desarrollos planos son válidos, es decir, que no a todo desarrollo plano le corresponde un cuerpo.

- *¿Es la figura 5.20 un desarrollo imposible de un prisma triangular? Comprueba recortando.*

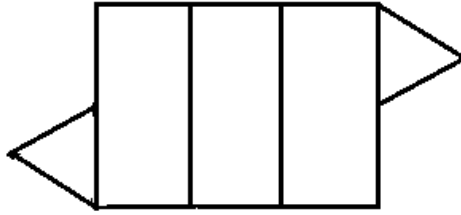


Figura 5.20. ¿Desarrollo imposible?

- *Dibuja un desarrollo imposible de una pirámide y un cubo.*

### 5.2.3. Cubos encajables.

Conocidos como cubos encajables, cubos multienlaces, policubos o multicubos se presentan fabricados en plástico. Son de tamaño muy manejable (2 cm. de arista) para los alumnos. Sus colores corresponden a los de las regletas Cuisenaire : blanco, rojo, verde claro, rosa, amarillo, verde oscuro, negro, marrón, azul y naranja. Se unen por simple presión. Cada cubo tiene un pivote por una de las caras para engarzar con el siguiente y por las otras cinco lleva hendiduras circulares (figura 5.21).

Estos cubos son apropiados para trabajar con los alumnos los ortoedros, los cubos y establecer las características de estos cuerpos. Por otra parte, en Primaria, sabemos que se recomienda comenzar a trabajar el volumen en los últimos cursos, de una manera manipulativa en la que se pretende que el alumno capte el concepto de volumen y lo diferencie del concepto de área, que también está trabajando y aprendiendo.

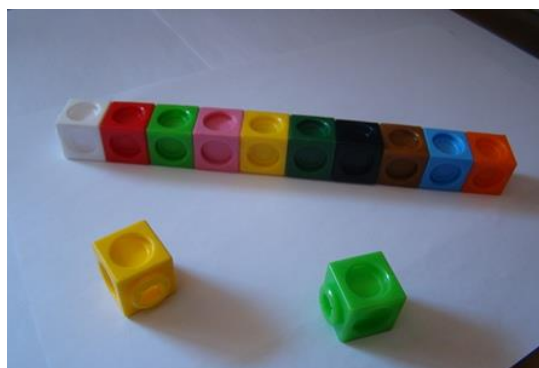


Figura 5.21. Cubos encajables

La principal característica de este material es que no debemos esperar al final de la Primaria para ir sembrando el concepto de volumen. Ya desde el principio, se pueden ir proponiendo actividades en

las que conjuntamente trabajamos con los alumnos: los cubos, los ortoedros y la iniciación al concepto de volumen como vemos en las siguientes actividades.

**Actividades para los alumnos.**

*1-El profesor propone en un principio ir haciendo seriaciones de modelos construidos con dos cubos, tres cubos, cuatro cubos, cinco cubos, seis cubos,...*



Figura 5.22. Construcciones de 4 cubos

*2- Hacer construcciones de cuatro cubos (figura 5.22), haciéndoles observar que tengan la forma que tengan tienen el mismo número de cubos, e igualmente con las de cinco, seis,...*

*3- Construir un cubo mayor con ocho cubos y partirlo en dos piezas que tengan la misma forma (figura 5.23).*

Como podemos ver la partición no tiene por qué ser única. Los alumnos deben captar que los modelos construidos tienen tres dimensiones, largo, ancho y alto, mediante la construcción de pisos y líneas de cubos, como veremos en las actividades posteriores.

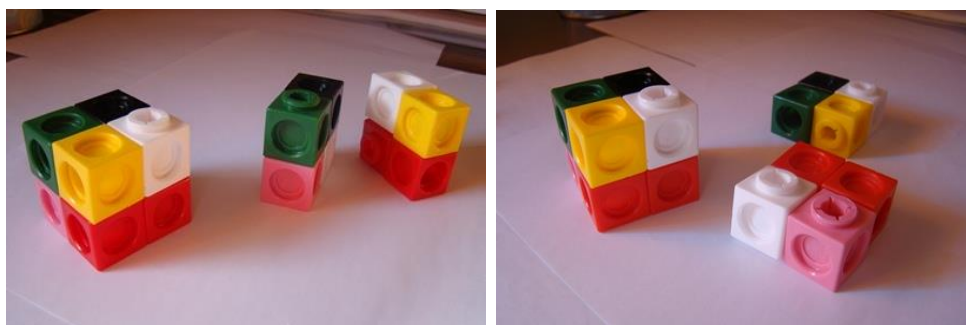


Figura 5.23

El concepto de volumen también se puede ir sembrando mediante la noción de conservación de las cantidades a través de experiencias de recuento, medida y movimientos de las figuras.

**Actividades para los alumnos.**

4 - El profesor invita al alumno a realizar construcciones libre con 12 cubos.

Esta actividad se puede hacer con el número de cubos que estime el profesor

5 - Se da un modelo y se tiene que construir otro igual al dado. Dicho modelo puede ser una figura geométrica ya conocida como un cubo, un ortoedro...

6 - Construcciones en plano con 20 cubos.

7 - Construcción de una pirámide escalonada con 35 cubos.

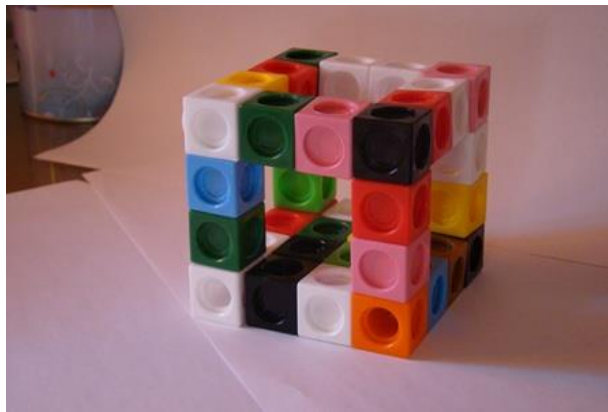


Figura 5.24. ¿Cuántos cubos faltan?

8 - Construir un cubo con caras huecas y averiguar cuántos cubos faltan; después, calcular el número total de cubos que tendría que tener el cubo si se hubiera construido completo (figura 5.24).

9 - Construir un ortoedro con caras huecas y averiguar cuántos cubos faltan.

10 - Dado el cubo  $2 \times 2 \times 2$  ¿cuántos cubos tenemos que añadir para obtener el cubo de  $3 \times 3 \times 3$ ?

11- ¿Cuántos cubos hay que añadir al primer cuerpo para obtener el segundo, según la fotografía? (figura 5.25).



Figura 5.25. ¿Cuántos cubos hay que añadir al primer cuerpo para obtener el segundo?

12- Contar el número de piezas de la construcción de la fotografía y reproducirla (figura 5.26)

¿cómo se llama este cuerpo?



Figura 5.26. ¿Cuántos cubos hay?

Estas actividades es preferible realizarlas en el laboratorio matemático con los alumnos delante de los materiales y, no mediante fotografías. El niño a este nivel debe haber comprendido que lo que nos interesa es un cuerpo igual con el mismo número de piezas aunque el colorido de los cubos sea distinto. Esa es la verdadera finalidad que nos muestra si el alumno está interiorizando el concepto de volumen o dicho concepto aparece apareado con cualidades, como el color, que son irrelevantes para la comprensión completa del concepto. Podemos introducir los espejos en las actividades o trabajar las proyecciones en el plano.

13- Crear simetrías con espejo y con libro de espejos, contar los cubos totales reales y reflejados que se ven.

14- Realizar una construcción a partir de su planta y su vista lateral.

15- Presentada la mitad de una construcción de cubos en tres dimensiones completarla de forma simétrica y calcular el número total de cubos (figura 5.27).



Figura 5.27. Completar la figura

16- Construir placas de  $5 \times 5$ ,  $10 \times 10$  y cubos de  $5 \times 5 \times 5$ ,  $10 \times 10 \times 10$ . Contar los cubos y establecer relaciones con las placas.

17- Construir y contar los cubos de ortoedros de  $5 \times 5 \times 2$ ,  $6 \times 2 \times 3$ .

18- Construir un cuerpo que tenga 24 cubitos de base y de alto 6 cubos de alto.

Es preciso enseñar al alumno a contar las placas como productos de dos factores y los cubos como productos de tres factores para facilitarle la tarea del conteo e irle sembrando las fórmulas que posteriormente, en la Secundaria, va a utilizar.

- Contar construcciones de cubos y ortoedros, y luego realizar la puesta en común de las diferentes estrategias desarrolladas por los alumnos para elegir la de menos gasto matemático.

Por último, si es posible podemos llegar a una puesta en común sobre cómo medir el volumen de un cubo y de un ortoedro de forma genérica.

#### 5.2.4. Mecanismo generador de figuras de revolución.

Una vez hemos presentado los distintos modelos construidos y materiales constructores idóneos para la Enseñanza Primaria, vamos a estudiar, dentro del apartado de materiales, los denominados mecanismos. Nosotros solamente estudiamos el denominado mecanismo generador de figuras de revolución.

**Un mecanismo generador** está formado básicamente por dos varillas separadas por una hendidura y un motor que las hace girar. En medio de las varillas se coloca una figura plana que al girar produce un cuerpo que llamamos de revolución.

Este aparato es un mecanismo idóneo para Primaria y posteriormente para la Secundaria pues los alumnos pueden ver cómo se obtienen los cuerpos geométricos, ya estudiados, a partir de una sección plana. En Primaria solamente se utilizará para generar cuerpos de revolución sencillos como son el cilindro, el cono, la esfera y los cuerpos asociados como son tronco de cono, casquetes,...El alumno experimenta el concepto cuerpo de revolución.



Figura 5.28. Generador de revolución elaborado por alumnos

### **Actividades para los alumnos.**

1 - El profesor comenta con los alumnos qué formas planas geométricas podemos construir para colocarlas en el generador y observar qué cuerpo geométrico obtenemos. De esta forma, los alumnos construyen cuadrados, rectángulos triángulos, trapecios,... y todo tipo de formas planas para posteriormente colocadas en el generador y observar la figura espacial que se obtiene.

También se puede trabajar con los alumnos a modo de siembra con figuras planas que generan cuerpos que ya no corresponden a la Primaria pero que el alumno conocerá posteriormente tales como paraboloides, elipsoides,...

2 - Vamos a construir en cartulina un triángulo rectángulo y colocarlo en el generador de las siguientes formas.

a) Colocamos el eje de giro en un cateto.

b) Colocamos el eje de giro en el otro cateto.

c) Colocamos el eje de giro en la hipotenusa.

¿Qué figura se obtiene en cada caso? ¿Sabes su nombre?

3 -Ahora vamos a construir en cartulina un trapecio rectángulo.

¿Describe oralmente cómo tenemos que colocar dicho trapecio en el generador para que se obtenga un tronco de cono? Luego compruébalo.

4- Probar con el generador de revolución a que cuerpos corresponden el giro de las figuras planas de la figura 5.29 tomando como eje la línea gruesa. Une la figura plana con su correspondiente figura espacial mediante una línea.

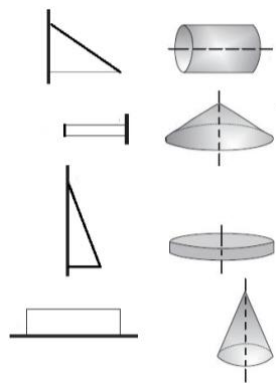


Figura 5.29. Asocia cada figura plana con la figura que genera

### **Ejercicio para pequeños grupos de estudiantes para profesores.**

- Diseña como futuro profesor otras actividades con el generador de figuras de revolución para Primaria.

## **TEMA 6. Recursos tecnológicos en la enseñanza de la geometría**

### **6.1. Reflexiones sobre los recursos tecnológicos**

Las investigaciones y las experiencias actuales nos muestran que la utilización de una tecnología adecuada puede hacer que los alumnos aprendan una mayor cantidad de contenidos matemáticos de una forma más significativa. Los recursos tecnológicos suponen, cada vez más, un proceso de innovación y de adecuación de la metodología y de las actividades utilizadas por el profesor en el aula.

El profesor debe estar preparado para poder obtener nuevas maneras de desarrollar la enseñanza, adecuando las actividades ordinarias a los recursos tecnológicos con los que cuente en su aula. Éste puede utilizar los recursos tecnológicos de una forma didáctica o bien como instrumento de consulta. Su utilización didáctica supone el diseño de actividades, utilizándolos para que contribuyan a la adquisición o refuerzo de los contenidos programados y a la consecución de las competencias básicas correspondientes. Los recursos tecnológicos son una potente herramienta como instrumento de consulta y de comunicación, que puede dar lugar a un intercambio de información importante entre profesorado, el alumnado y las instituciones.

Esta manera de utilizar los recursos tecnológicos también requiere una preparación y diseño, a priori, por parte del profesor de forma que los alumnos puedan llegar a donde éste pretende, y no se pierdan en contenidos, actividades o divagaciones que no son del interés del aprendizaje o la competencia que se quiere alcanzar. Por ello, el profesor debe planificar los recursos a utilizar, su finalidad, los momentos precisos en los que van a ser utilizados y la evaluación de la eficacia didáctica de dicho recurso, una vez ha sido utilizado. La existencia, versatilidad y potencia de la tecnología hace posible y necesario que el profesor se cuestione qué matemáticas deberían aprender los alumnos y cómo deberían conseguir mejor aprendizaje.

Consideramos que en ningún caso en la Educación Primaria, los recursos tecnológicos serán un fin en sí mismos sino un medio para diseñar momentos de aprendizaje significativos, teniendo en cuenta las múltiples posibilidades didácticas que se pueden generar. Los recursos tecnológicos no deben utilizarse para intuiciones y comprensiones elementales que no necesitan de ellos, éstos deben orientarse más a hacer que dichas intuiciones y comprensiones se vuelvan en el alumno más significativas y sólidas de manera que den lugar a nuevos conocimientos que enriquezcan su aprendizaje matemático mediante una reflexión permanente. No debemos olvidar que estos recursos deben también generar en el alumnado actitudes abiertas hacia las matemáticas.



El profesor debe también estudiar qué recursos son los idóneos para los alumnos de manera que no añadan complejidad a la actividad matemática. Por ejemplo, puede ocurrir que el aprendizaje de cierto software sea dificultoso para los alumnos pues no sea adecuado para su edad o no esté familiarizado con él. A veces, también, esta dificultad entraña el empleo de un tiempo extra que el docente tiene que restar a la enseñanza de las matemáticas para invertir en el aprendizaje de la tecnología.

Una vez hecha esta reflexión sobre los recursos tecnológicos en Matemáticas, nos acercamos a nuestro campo de estudio, que es la Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, y nos preguntamos por los recursos a utilizar en esta materia y en la Etapa de Primaria. De todo el amplio espectro de materiales que supone la tecnología actual y teniendo en cuenta la etapa en la que el profesor va a trabajar consideramos que sería bueno utilizar en Geometría como recursos tecnológicos: las imágenes fijas como es la fotografía, las imágenes en movimiento como son videos y películas, el ordenador con sus programas adecuados para Geometría en Primaria, y las posibilidades de internet.

Hablaremos en general sobre estos recursos tecnológicos, aunque en algunos casos, citaremos algunos materiales concretos, conscientes de que algunas recomendaciones se vuelven obsoletas desde el momento de nombrarlas, es por ello que las personas se encuentran siempre interesadas pero a la vez siempre insatisfechas.

## **6.2. Las imágenes**

Las imágenes, además de instrumentos de conocimiento, nos sirven para comunicarnos de una manera muy completa y muy acorde con el contexto en el que vive actualmente el alumno, rodeado de gráficos, iconos y signos. La imagen como medio de expresión debe ser utilizada convenientemente por el profesor con el fin de incorporar los códigos transmisibles y ayudar a leerlos y traducirlos adecuadamente. Por ejemplo, los audiovisuales matemáticos y didácticos no son para ser proyectados y nada más. Debe haber un trabajo anterior de visionado, por parte del profesor o el equipo de profesores correspondiente, de manera que: se seleccionen las partes principales de la película, se estudie qué objetivos o competencias se quieren conseguir con ese visionado y se preparen las actividades posteriores a realizar.

## 1- Las fotografías como material didáctico.

Dentro de las imágenes, un material importante que puede ayudarnos en la enseñanza-aprendizaje de la geometría son las fotografías. La fotografía combina muy bien los aspectos educativos con los estéticos y a su vez los relaciona con la vida cotidiana. Es importante la relación que existe entre la fotografía y la Matemática, y en particular la Geometría, pues conceptos como paralelismo, simetría, proporción áurea, perspectiva, proyección, escala, proporción, ritmo, etc. pueden ser bien expresados mediante la imagen fija, como podemos ver en las fotografías que mostramos donde aparecen la idea de paralelismo en construcciones y, el pentágono en la naturaleza mediante una simetría rotacional de orden cinco (figura 6.1).



Figura 6.1. Fotografías geométricas

También, todas las formas geométricas de los seres inanimados y de los animados que siguen sus leyes matemáticas son bien representadas mediante las fotografías, las formas pentagonales de las flores o la hexagonal de los cristales de la nieve, etc.

Vamos a definir nuestra idea de **fotografía matemática** como *aquella en la que aparece algún concepto matemático o un objeto que se pueda relacionar con algún concepto matemático*. Muchas fotografías, pensemos en una foto de una catedral, pueden sugerir muchos conceptos matemáticos, pero normalmente nuestras fotografías son minimalistas, en el sentido de que solamente destacan, claramente, un concepto matemático. El mundo está lleno de formas geométricas, de objetos y lugares con sugerencias matemáticas. Sólo se precisa una mirada matemática que los descubra y sea capaz de plasmarlo con una máquina. Una vez hecha esta introducción, vemos cómo el profesor puede utilizar la fotografía en la Educación Primaria.

La fotografía es un recurso que puede ser de gran ayuda para el trabajo matemático. Es útil y se debe utilizar en investigaciones de aula, rutas matemáticas, para la visualización, percepción e intuición

espacial y en la relación de la Geometría con el Arte. La idea general es, como siempre, poner al alumno frente a una situación problemática. El profesor pretende motivar al alumno de forma que utilice todo su bagaje matemático, desarrolle la competencia lingüística, y exprese sus nociones sobre la belleza y el arte mediante la utilización de la fotografía.

La obtención de una fotografía matemática es para el alumno la realización de un problema, que en principio no tiene una solución clara ni estrategia evidente. En los momentos de realización de las fotografías, el alumno observa que debe tener en cuenta todo su conocimiento matemático inmediato y de otras materias como son el medio natural y social, el arte, conocimientos fotográficos, etc. para construir la estrategia concreta que le lleve a la solución. Para la realización de las fotografías el alumno debe explorar el mundo que le rodea e interrelacionar la Geometría con las demás áreas. El propio proceso fotográfico incluye procesos de interés relacionados con las matemáticas.

La realización de fotografías desarrolla la capacidad de observar, analizar y sintetizar del alumno, fomentando su percepción con visión matemática de la vida cotidiana. El alumnado desarrolla una nueva forma de expresión como es la fotografía, que no es contemplada en el currículo.



Figura 6.2. Curvas geométricas

En el aula, el trabajo previo a la realización de fotografías por parte de los alumnos sería la observación de imágenes de internet o prensa escrita. El alumno busca contenidos matemáticos en estas imágenes, es decir, se les enseña a mirar las fotografías con mirada matemática y a seleccionar aquellas imágenes que destacan de manera principal un contenido matemático. Por ejemplo, en la foto de la figura 6.2, se destaca claramente, de una sola mirada, el contenido “curvas” aparte de otros contenidos que no son tan significativos.

### ***Ejercicio para estudiantes para profesores en pequeños grupos.***

- Busca en internet o en prensa escrita fotografías que destaquen de manera principal formas planas. Haz una clasificación de dichas fotografías. Elige dos fotografías de manera que puedas, en cada una de ellas, enunciar dos actividades matemáticas para Primaria, utilizando el contenido de sus imágenes.

- Realiza la misma actividad pero con formas geométricas del currículo de Primaria.

### ***Actividades para los alumnos.***

Vamos a desglosar algunas actividades con los alumnos mediante las que pueden aprender geometría. Las dividimos en cinco apartados: Preparación, realización de fotografías propias, álbum y concurso fotográfico.

**1- Preparación.** Esta actividad enseñará al alumno cómo son las fotos que queremos que realice en las distintas actividades que vamos a proponerles.

*Por grupos, los alumnos buscan fotos digitales o en revistas sobre un tema general como pueden ser: tipos de rectas, triángulos, cuadriláteros, otros polígonos ... o prismas, cilindros, pirámides, ... para posteriormente hacer una puesta en común de todos los grupos, donde estudiamos la idoneidad de las fotos, acorde con nuestros objetivos de que sean matemáticas y destaquen un concepto.*

**2- Realización de fotografías propias.** Pasamos a la etapa en la que el alumno realiza sus propias fotografías matemáticas. En esta actividad, cada alumno o grupo realiza un número determinado de fotografías, no suelen ser más de tres o cuatro. Una vez seleccionadas se hace una ficha para cada foto.

- Realiza para cada foto una ficha que contenga:

1- Contenido que se quiere trabajar con la fotografía.

2- Una foto más amplia para poder localizar el lugar donde se encuentra el motivo fotografiado.

3- Breve descripción del lugar oral o por escrito.

4 - Lema que represente la fotografía en la que se juega con el lenguaje ordinario y las matemáticas, de forma que se obtiene una frase ingeniosa y graciosa.

5- Actividades diseñadas por el alumno relacionada con la fotografía y propias del curso al que pertenecen los alumnos, no necesariamente de geometría.

6- Opcionalmente se puede montar la foto enmarcada en una cartulina negra, bajo la cual aparece el lema sobre un fondo rectangular blanco.

En la figura 6.3 vemos una fotografía en la que se destacan rectángulos que parecen estar en relieve, y al lado la vista general de la plaza donde se ha obtenido el detalle. Leemos también el título dado por el alumno.



Figura 6.3. Título: Geofachada espacial  
Fotografía y vista general del motivo (Plaza alta de Badajoz)

**3- Álbum fotográfico.** La siguiente etapa es hacer un álbum geométrico relacionado con alguna zona de su ámbito diario como puede ser: el colegio, el barrio o alguna zona específica como puede ser un parque, un museo, ...

*- Los alumnos se organizan en grupos y realizan fotografías de la zona convenida en mutuo acuerdo. Imaginemos es el colegio.*

*El profesor distribuye los grupos de forma que asigna a cada grupo:*

*1- Zonas más pequeñas en las que realizar las fotos, por ejemplo, fotos del patio del colegio, fotos de las aulas, fotos de la sección de gestión...*

*2- Conjuntos geométricos como grupo de las fotos de triángulo y su clasificación, de cuadriláteros y clasificación, paralelismo y perpendicularidad,...*

Estas actividades ya se realizan en algunos colegios de España, y una de las actividades más conocidas en ellos son los concursos de fotografía matemática para todos los niveles, que conllevan a una exposición fotográfica como actividad última.

**4- Concurso fotográfico.** Para que el profesor o grupo de profesores organicen un concurso fotográfico en el centro donde trabajan, deben tener en cuenta las siguientes recomendaciones para que la actividad salga bien.

- En primer lugar, elegir el tema. El concurso fotográfico puede ser de todo tipo de fotografías o puede ser temático, por ejemplo, el deporte, un día normal en el centro escolar, triángulos en el barrio,...

- Una vez seleccionado el tema del concurso, deben acotar el lugar donde los alumnos van a realizar las fotografías, pueden ser el centro, el barrio o toda la ciudad.

- Deben establecer un calendario con fechas de realización, entregas del trabajo, exposición,...

- Es primordial que el alumno tenga las ideas claras sobre qué tiene exactamente que hacer. Una reunión general sería deseable para que se les expliquen todos los pormenores del concurso y el calendario establecido.

- Una vez entregados los trabajos fotográficos de los alumnos sería conveniente elegir aquellas fotos o grupos de fotos que fueran más significativas para montar en la exposición, salvo que se decidiera montar todas.

- Si se hacen muchas fotos es preferible una selección para que la exposición gane en calidad. Hay varias formas de elección como: poner una foto por alumno para que todos se sientan representados o seleccionar las mejores fotos de todo el grupo, pero en ese caso, en ninguna foto aparece el nombre del autor pues puede haber alumnos sin fotos seleccionadas. En este segundo caso la mentalidad debe ser de exposición de grupo, es decir, todas las fotos son de todos.

- También hay que decidir el montaje de la exposición: se pueden clasificar las fotos por temas geométricos, fotos de cuadrados, triángulos... o por zonas visitadas. Por ejemplo si la exposición es de fotografías del colegio se pueden montar las fotos de las aulas, el patio, el gimnasio,...

- Los lemas de las fotografías de la exposición pueden ser también contruidos entre todos, unos alumnos suelen ser más creativos que otros y esto mejora la exposición más que si cada uno construye su propio lema.

- El profesor o grupo de profesores puede elaborar un cuaderno de actividades para la exposición, de manera que los alumnos que la visiten interactúen con ellas y no sean meros sujetos pasivos que miran fotografías. Dicho cuaderno puede incluir una breve explicación de la exposición, actividades generales sobre toda la exposición y específicas sobre alguna fotografía en particular. Por último se puede incluir un breve cuestionario sobre la opinión del alumno sobre la exposición y si se ha producido o no un cambio actitudinal hacia las matemáticas. Este cuestionario puede ser

aprovechado posteriormente, mediante el recuento de respuestas, para hacer ejercicios de estadísticas basados en datos reales de la exposición.

- El montaje puede ser clásico, montando las fotos ampliadas sobre fondo negro con el lema correspondiente o bien, se pueden utilizar, conjuntamente, medios informáticos como pantallas grandes en la que vayan apareciendo las fotografías de forma espontáneas, u ordenadores en los que el alumno visitante de la exposición elige qué quiere ver. El cuaderno de actividades descrito anteriormente también se puede implementar en dichos ordenadores

***Actividades para grupos de estudiantes para profesores.***

- *Elaborar un informe de manera que se resalte la importancia de la fotografía para aprender matemáticas.*

- *Dadas las fotografías de la figura 6.4, ponles un lema a cada una.*

- *Inventa o busca actividades generales para una exposición en la que presentaríamos estas fotografías.*

- *Elabora un pequeño cuestionario que recoja la opinión de los alumnos sobre la exposición y si se ha producido un cambio en su manera de ver las matemáticas.*

La actividad se puede variar aportando cada grupo de alumnos sus propias fotografías.

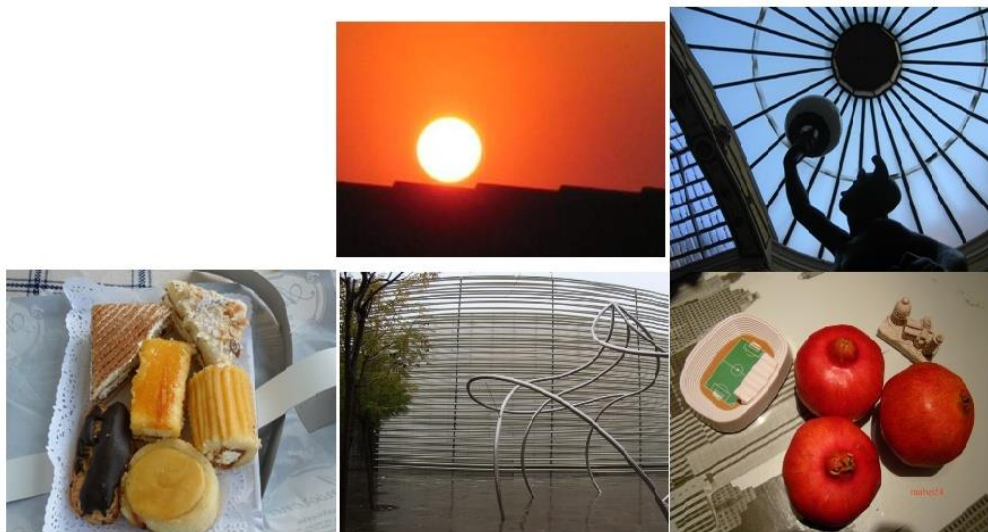


Figura 6.4. Fotografías matemáticas

Las exposiciones matemáticas de fotografía tienen como eje principal el alumnado; debe dejar traslucir los conocimientos matemáticos, técnicas y actitudes de éstos, de manera que sea un fiel reflejo del trabajo matemático del grupo y no de unos cuantos alumnos. Este tipo de exposiciones debe provocar

reflexiones y simpatías hacia una materia tan impopular como son las Matemáticas, y en particular la Geometría, de forma que los alumnos que la visiten experimenten un acercamiento más amable hacia estas materias.

Consideramos, por último, que todas estas series de actividades con fotografías son importantes porque fomentan el trabajo interdisciplinar; aúnan las Matemáticas con el Arte haciendo que los alumnos estudien su cultura en el propio medio y hacen que el aprendizaje del contenido matemático, intuitivo y experimental, sea significativo.

## **2-. Imágenes en movimiento.**

Cuando hablamos de imágenes en movimiento nos estamos refiriendo a las películas que mediante los diversos sistemas de proyección podemos ofrecer al alumnado. Constituyen, por tanto, un medio más del que nos podemos servir para hablar del contenido matemático. El material existente con la tecnología actual ha aumentado considerablemente; las posibilidades de internet hacen que podamos conseguir suficiente material didáctico de interés, basados en la historia de la matemáticas y otros contenidos como cálculo, medida, geometría o simples experiencias de otros maestros que nos enseñan cómo trabajan sus alumnos en el aula. Otra opción son las películas comercializadas y que también podemos encontrar en librerías especializadas en material escolar.

El profesor debe hacer una indagación en bibliografía e internet para poder encontrar materiales animados que sean interesantes, y desde los que se pueda realizar una reflexión de aula a partir de un buen guión de trabajo elaborado sobre la exposición de películas o segmentos de ellas. Actualmente, mediante internet, se pueden encontrar películas didácticas que tratan muchos de los contenidos matemáticos de la Educación Primaria. Estos contenidos son nuevos contenidos o ya clásicos que han sido digitalizados, bien por instituciones, universidades, centros de enseñanza o simplemente por algún profesor o maestro amante de las matemáticas.

Dentro de los contenidos antiguos digitalizados podemos encontrar series famosas como los capítulos de la colección Ojo Matemático (1990) o bien el ya famoso corto de Walt Disney titulado “Donald en el país de las Matemáticas”, series de Historias de las Matemáticas,...en las que muchos de sus contenidos son adaptables a Primaria. También las televisiones ofrecen películas dedicadas a las matemáticas de interés para los alumnos que pueden ser visionadas o bajadas de las páginas correspondientes. Por ejemplo, en la página de RTVE encontramos algunos capítulos de la serie la



Aventura del saber (Universo matemático). Después de la bibliografía, hemos añadido una webgrafía en la que se incluyen páginas de interés para esta cuestión.

Por otra parte, hay también en Internet (Youtube) una serie de contenidos útiles para la enseñanza como son los segmentos, que muestran experiencias de profesores y su enseñanza específica: trabajos concretos con los niños en el aula, cortos elaborados sobre algún contenido concreto... que aunque no tienen gran valor artístico pues son caseros, sí lo tienen desde el punto didáctico para la enseñanza o el refuerzo de contenidos

Si bien las películas (llamamos película a cualquier contenido visual de los que hemos hablado anteriormente) permite tratar los contenidos de una manera muy diferentes como lo hace un libro de texto, hay que tener cuidado pues las proyecciones pueden resultar una actividad muy pasiva para los alumnos. Algunos consejos generales para que su utilización sea más eficaz serían los siguientes:

-Podemos hacer que el alumnado visiona la película correspondiente en general para tener una idea clara de su contenido pero la forma más adecuada de utilizarla es mediante los segmentos.

Llamamos segmentos a aquellas partes de la película que es interesante porque trabaja un contenido concreto. Por ejemplo, Pato Donald en el País de las Matemáticas es un corto cuyo objetivo es mostrar la importancia de las matemáticas en general. Para cumplir este objetivo la película se puede subdividir en distintos segmentos que pueden ser utilizados en Primaria o Secundaria, como pueden ser: la relación de las matemáticas y la música, las formas geométricas en los objetos de la vida ordinaria y profesional, el número áureo en el arte y la naturaleza, las matemáticas y los juegos, la idea de infinito en la mente... Los cortos sobre experiencias, materiales... realizados por los mismos docentes suelen ser suficientemente explícitos y breves para poder proyectarlos y aprovecharlos en una sola sesión

- Antes de llevarlo al aula, hay que determinar qué parte se va a usar, por qué y para qué. El profesor necesita verlo completo para determinar qué segmentos son adecuados para los alumnos. Por ejemplo, los documentales sobre la historia de las Matemáticas pueden ser muy interesante para nosotros y aburridos para los alumnos, pero su proyección en segmentos cortos puede ser muy provechosa, por ejemplo, proyectar solamente la necesidad de medir en Egipto por las inundaciones del río Nilo, el segmento que habla sobre Pitágoras y los pitagóricos, etc.

- Debe haber, antes de la emisión, una pequeña explicación por parte del profesor sobre qué trata el segmento y qué objetivos o competencias se quieren conseguir con la proyección.

- Debe plantearse alguna actividad antes de la proyección, a realizar posteriormente de la visualización, para evitar la pasividad de ver una película simplemente por verla. Dicha actividad no debe ser tan agobiante que haga que el alumno no la vea relajadamente, y se sienta oprimido por la actividad a realizar. Por ejemplo, el profesor puede proponer a los alumnos una opinión sobre lo que van a ver, relacionada con las matemáticas. La actividad se realizará una vez finalizado el segmento y el alumno no puede tomar apuntes durante la proyección, para desarrollar su capacidad de retención y de síntesis.

- En general, para el buen aprovechamiento del vídeo o de los distintos segmentos proyectados hay que diseñar actividades que permitan a los alumnos estar atentos antes, durante y después de las visualizaciones.

Las temáticas generales sobre las que podemos encontrar películas o cortos abarcan prácticamente todo el currículo escolar, sobre todo si se amplía la búsqueda en internet a otros idiomas. En este caso, el profesor es quien debe seleccionar los buenos segmentos atendiendo a las necesidades de su aula, como pueden ser segmentos de introducción, de refuerzos, para realizar tareas, para mostrar la relación de las matemáticas con la historia, el arte, la vida cotidiana, etc.

### **6.3 Herramientas TICs**

No es necesario decir cómo las TICs (tecnología de la información y de la comunicación) están cambiando la manera de enseñar matemáticas, debido principalmente a la revolución que ha hecho que los ordenadores estén a disposición de todos, y al desarrollo del lenguaje natural en el manejo del software que hace tan accesible su uso. Los programas de ordenador proporcionan imágenes visuales que evocan nociones geométricas, facilitan la organización, el análisis de los datos, los gráficos y el cálculo de manera eficiente y precisa. Pueden apoyar la investigación de los propios alumnos en las distintas áreas de matemáticas: en nuestro caso, Geometría y su enseñanza-aprendizaje. Cuando proporcionamos herramientas tecnológicas, los alumnos pueden centrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas.

La gran ventaja de los ordenadores es su naturaleza dinámica, su velocidad, y el creciente rango de software que soportan. De esta manera, permiten a los alumnos y profesores experimentar y explorar todos los aspectos de la geometría, dando oportunidad de trabajo sobre preguntas de investigación reales, las cuales brindan mayor interés.

Podemos resaltar entre otras las siguientes herramientas tecnológicas:

**1-Herramientas de autor.** Las herramientas de autor son aplicaciones informáticas que facilitan la creación, publicación y gestión de materiales educativos en formato digital. Generalmente son de carácter multimedia y permiten combinar documentos digitales, imágenes, sonidos, videos y actividades interactivas desde la misma herramienta para crear objetos de aprendizaje que pueden insertarse en entornos virtuales. Algunos de estos programas son: JClic, Hot Potatoes, eXeLearning, LIM, Ardora o Constructor. Nosotros, en particular, vamos a comentar los dos primeros y a estudiar las posibilidades de eXeLearning, pues permite la integración de otras herramientas de autor.

a) **JClic** está formado por un conjunto de aplicaciones informáticas que sirven para realizar diversos tipos de actividades educativas como rompecabezas, asociaciones,...Las actividades no se acostumbran a presentar solas, sino empaquetadas en proyectos. Un proyecto está formado por un conjunto de actividades y una o más secuencias, que indican el orden en que se han de mostrar. El antecesor de jClic es Clic, una aplicación que desde 1992 ha sido utilizada por educadores de diversos países como herramienta de creación de actividades didácticas para sus alumnos.

JClic está desarrollado en la plataforma Java, es un proyecto de código abierto y funciona en diversos entornos y sistemas operativos. Para más información se puede visitar la siguiente página <http://clic.xtec.cat/es/jclic/>

En este sentido es conveniente resaltar que el profesor puede utilizar Jclic para la enseñanza-aprendizaje de la Geometría Plana en Primaria a través de una serie de actividades. Estas actividades pueden ser estructuradas y reorganizadas en ocho bloques fundamentados en los objetivos, contenidos y criterios de evaluación establecida para el currículo de Primaria. Dichos bloques son: Líneas Poligonales, Polígonos, Triángulos, Alturas de Triángulos, El Perímetro, Cuadriláteros, Paralelogramos y Polígonos Regulares

Atendiendo a las fases de aprendizaje de Van Hiele (ver 1.6.2.), a través de Jclic, podemos dar lugar a una toma de contacto con el nuevo tema de estudio, en este caso, figuras planas. El profesor puede comprobar e identificar los conocimientos previos que pueden tener los alumnos y su nivel de razonamiento en el mismo (fase de información). El alumno va a recibir información para conocer el campo de estudio que va a iniciar, los tipos de problemas que va a resolver, los métodos y materiales que va a emplear.

Una segunda fase va a estar marcado por lo que se conoce como orientación dirigida, puesto que el profesor puede dar el caso que plantee una secuencia graduada de actividades a realizar y explorar.

Permitiendo así que los estudiantes descubran y aprendan las propiedades de los conceptos implicados. Para ello, se emplean tareas cortas y diseñadas para que les lleven directamente al resultado, dando lugar a que se produzca un aprendizaje y entendimiento de las propiedades. En este caso, el paquete de ocho bloques, nombrado anteriormente, contiene actividades interrelacionadas, donde el aprendizaje que se da lugar en la primera actividad te va a llevar a que puedas realizar las posteriores.

La explicitación se consigue cuando los alumno intercambien sus experiencias, van a dialogar sobre ellas, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y afiancen así, su lenguaje. El alumno puede consolidar su aprendizaje de las figuras planas. Esto le va a permitir utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes, más abiertos, con varias vías de resolución y con una o varias soluciones.

Y por último, Jelic nos facilita una síntesis de lo que los alumnos han trabajado y aprendido, ayudándoles a revisar, integrar y diferenciar los conceptos, propiedades y procedimientos que han adquiridos.

**b) Hot Potatoes** es un conjunto de herramientas de autor desarrollado por el Centro de Humanidades de la Universidad de Victoria (UVIC) en Canadá, que permite elaborar ejercicios interactivos multimedia. Estos ejercicios se elaboran con varias herramientas o esquemas predeterminados denominados “patatas”. Los ejercicios se pueden publicar en un servidor web y difundir a través de Internet, siendo soportado por todos los navegadores. La interactividad de los ejercicios se consigue mediante JavaScript, que es un código informático que permite cierta interactividad con el visitante de una página web.

Para crear ejercicios sólo se necesita, después de instalar el programa, introducir los datos que se desee (preguntas, respuestas, ordenar, etc.) en los esquemas predeterminados o *patatas* y guardarlos. Se puede conseguir más información en su web oficial <https://hotpot.uvic.ca/>

**c) eXeLearning** es una herramienta de autor de código abierto que facilita la creación de contenidos educativos sin ser un experto en lenguajes HTML o XML. Se trata de una aplicación multiplataforma que nos permite la utilización de árboles de contenido, elementos multimedia, actividades interactivas de autoevaluación..., facilitando la exportación del contenido generado a múltiples formatos: HTML, SCORM, IMS, etc.

El proyecto eXeLearning fue financiado por el Gobierno de Nueva Zelanda y coordinado por la University of Auckland, The Auckland University of Technology y Tairāwhiti Polytechnic. En el

proyecto también participan un amplio grupo de colaboradores de todo el mundo. En estos momentos la evolución de esta herramienta se está realizando en <http://exelearning.net>

Los recursos que se pueden utilizar con eXeLearning son: Crear un árbol de navegación básico que facilitará la navegación; escribir texto y copiarlo desde otras aplicaciones; incluir imágenes, pero no es un editor de imágenes como Photoshop o Gimp; incluir sonidos, previamente grabados de otra aplicación; incluir vídeos y animaciones, pero no permite crearlas; incluir actividades sencillas: pregunta de tipo test, de verdadero/falso, de espacios en blanco...; embeber elementos multimedia como vídeos, presentaciones, textos o audios e incluir actividades realizadas con otras aplicaciones

**2. Software didáctico.** Debido a la complejidad de los programas profesionales algunos investigadores han realizado adaptaciones de estos programas a los contenidos y actividades que generalmente se requieren en el aula o han construido su propio paquete didáctico. Éstos consisten en grupos de programas que sirven para estudiar conceptos particulares. Entre estos destacan los programas Cabri y GeoGebra y sus distintas versiones que están especialmente pensados para su aplicación a la geometría

El software de estos programas se ha diseñado, siguiendo la filosofía de los *micromundos* y el alumnado puede representar situaciones mediante la construcción de figuras geométricas, experimentando, explorando y descubriendo propiedades. La idea pedagógica básica reside en la posibilidad de la manipulación directa de las figuras creadas, pudiéndolas desplazar y capturar sus elementos básicos. Estos micromundos hacen las veces de un cuaderno interactivo que es manipulable por el profesor y sus alumnos. Éstos pueden hacer desde construcciones sencillas a otras más elaboradas, revisándolas, reproduciendo sus pasos (historia), modificando las representaciones y pudiendo reconocer generalizaciones. Los alumnos trabajan con estos programas todos los temas geométricos y de medida, de igual forma que trabajan los temas aritméticos con una calculadora. Estos programas son muy válidos para las investigaciones de los estudiantes para maestros, y la resolución de problemas complejos de forma que adquieran destrezas en la realización de planteamientos mediante la reflexión y el razonamiento.

La geometría es experimentada por el alumno como algo dinámico que se mueve, de manera que unas figuras pueden ser obtenidas a partir de otras y se puede observar si se cumplen propiedades o no, mediante el movimiento de los distintos elementos como puntos, rectas,... Lo vemos con un ejemplo.

*Se trata de observar dónde está el ortocentro, es decir, el punto donde se cortan las alturas, según el tipo de triángulo que se tome.*

Si utilizamos GeoGebra, por ejemplo, para estudiar esta propiedad observamos que:

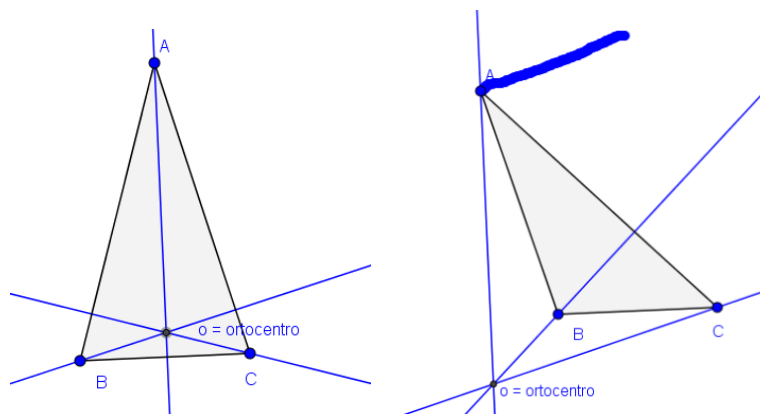


Figura.6.6. Variaciones del ortocentro de un triángulo

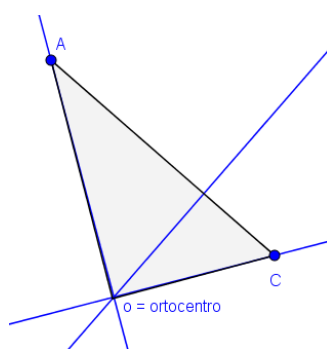


Figura 6.7. El ortocentro en el vértice del triángulo rectángulo

El triángulo ABC de la figura 6.6 (derecha) con sus alturas correspondientes se puede transformar en el triángulo de la figura 6.6 (izquierda) solamente deslizando el punto A mediante la instrucción ELIGE Y MUEVE de GeoGebra. Estas dos figuras nos muestran cómo el ortocentro O es interior en el caso del triángulo acutángulo y exterior en el caso del triángulo obtusángulo. El límite entre las dos figuras se obtiene transformando el triángulo (como muestra la figura 6.7) en triángulo rectángulo, en cuyo caso el ortocentro coincide con el vértice del ángulo recto.

**3. Software de uso general.** Por último, los programas informáticos llamados de "propósito general" como los procesadores de texto, hojas de cálculo, etc. son programas que están disponibles en casi todos los ordenadores y que pueden ser muy útiles para trabajar diferentes contenidos geométricos. Por ejemplo, con el programa WORD o con el PAINT los profesores y alumnos pueden trabajar

contenidos geométricos como los frisos y mosaicos, mientras que con la hoja de cálculo se pueden realizar actividades que relacionen la Geometría con la Aritmética, Estadística y Probabilidad.

#### **6.4. Recursos tecnológicos orientados al estudiante para profesor**

El enorme potencial de la tecnología y la rapidez con que su uso se está generalizando es especialmente visible en la educación, en la que se puede utilizar de diferentes maneras: blogs, twitter, correos electrónicos, wassapp, plataformas y los distintos recursos nuevos que surgen cada día. Estos recursos permiten la interacción directa e instantánea del profesor y el alumno mediante mensajes que pueden contener documentos de texto o gráficos u otro material informático adosados que posibilita la tutoría y el trabajo conjunto de profesor y alumnos o grupo de alumnos, incluso a distancia. También hay software disponible en Internet, y algunos programas pueden encargarse directamente o bien ser solicitados a través de correo electrónico.

Se llama **software libre** al software *que respeta la libertad de todos los usuarios que adquirieron dicho software* y, por ello, el usuario puede copiar, distribuir y estudiar el mismo, e incluso modificarlo y distribuirlo modificado. Dicho software no puede ser confundido con software gratis por lo ambiguo que es el término “free” en inglés. A veces también se confunde con software de dominio público. Éste último es aquel software que no requiere de licencia pues sus derechos de explotación son para toda la humanidad, porque pertenece a todos por igual. Cualquiera puede hacer uso de él, siempre con fines legales y consignando su autoría original. El autor lo dona a la humanidad o los derechos de autor han caducado.

Un ejemplo importante y muy útil es GeoGebra que es un Programa Dinámico para la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas para la educación en todos sus niveles. Su creador Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001 en la Universidad de Salzburgo y lo continúa en la Universidad de Atlantic, Florida.

Es un programa gratis y de muy fácil aprendizaje. Su característica más importante para nuestro trabajo es la doble percepción de los objetos desde una representación gráfica y otra algebraica, dando lugar a una dualidad permanente entre los símbolos algebraicos y las figuras geométricas. Con GeoGebra podemos trabajar todos los conceptos de geometría plana desde los más básicos como puntos, rectas, segmentos hasta las transformaciones isométricas: reflexiones, giros y simetrías. Existe también una configuración en tres dimensiones para trabajar la Geometría espacial.

### **Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.**

Esta actividad se puede desarrollar en el laboratorio de Matemáticas y completarla con actividades primeras de conocimiento de los menús del programa para poder posteriormente resolver los problemas.

*Aprende a utilizar GeoGebra en configuración geométrica y resuelve los siguientes ejercicios para comprobar el dinamismo y potencial de dicho programa.*

*1- Traza la tangente (solo una) a una circunferencia y comprueba que siempre forma ángulo recto con el radio.*

*2- Construye todos los elementos notables de un triángulo. Estudia como varían para el caso de que el triángulo sea acutángulo, rectángulo o obtusángulo.*

*3- Construye los ejes de simetrías de las principales figuras planas.*

*4- Busca el cuadro “El quitasol de Goya” (figura 3.4) y haz un estudio geométrico.*

*5- Reproduce con GeoGebra el estudio geométrico que se hace en el cuadro “La flagelación de Cristo” (figura 3.6) en el apartado de la Geometría y el Arte.*

*6- ¿De qué tipo son todos los triángulos inscritos en una semicircunferencia, dos de cuyos vértices son los extremos de la semicircunferencia?*

Con este último problema queremos hacer ver a los alumnos como GeoGebra simplifica un problema más complicado con lápiz y papel.

Ahora, nos vamos a centrar en dos recursos que consideramos importantes para la formación inicial y continua del profesorado como son las sociedades y las revistas electrónicas, que contribuyen a una formación actualizada del principiante y del profesor experto.

**a) Sociedades:** El número de asociaciones educativas y de profesores de matemáticas que construyen sus propias páginas, con información sobre sus actividades y desde las cuales podemos acceder a recursos útiles para la enseñanza de las matemáticas es cada día creciente.

En las páginas de estas sociedades, el estudiante para profesor puede encontrar información importante sobre jornadas, congresos, revistas, conferencias etc. que le pueden ser muy útil para su constante formación.

### **Actividades para grupos de estudiantes para profesores.**

*Haz una búsqueda en Internet de las siguientes sociedades y elabora un pequeño informe sobre las actividades, jornadas, etc. que nos puedan ser útiles en nuestro trabajo de futuros profesores.*

*- FESPM (Federación española de sociedades de Profesores de Matemáticas)*



- *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.*

-*La sociedad de tu comunidad de Educación Matemática.*

*Ejemplo: Sociedad Extremeña de Educación Matemática. Ventura Reyes Prósper.*

**b) Revistas electrónicas.** La nueva filosofía de la difusión del conocimiento pasa por las revistas electrónicas. Ésta tiene las ventajas de acortar el proceso desde que se remite un trabajo hasta que se publica y llega al lector. También, su difusión es potencialmente mucho mayor, pues no existen distancias para que una persona de cualquier lugar del planeta pueda ser lector de la revista y no hay costes de distribución implicados, por lo que, generalmente, estas revistas se distribuyen libre de coste. El estudiante para profesor y el profesor puede encontrar en estas revistas información suficiente para poder poner al día sus conocimientos en materia didáctica sobre cualquier contenido a enseñar. Señalamos algunas más conocidas por su carácter didáctico y de enseñanza en Primaria en el siguiente ejercicio.

**Actividades para pequeños grupos de estudiantes para profesores.**

- *Hay revistas importantes dedicadas a la enseñanza de las matemáticas que nos pueden servir para encontrar artículos sobre la enseñanza-aprendizaje de la geometría como son Enseñanza de las Ciencias, Suma, Uno, Épsilon, Números, ... Busca sus enlaces en Internet.*

- *Haz un estudio sobre si es posible acceder o no a los artículos digitalmente. En caso positivo, explica exactamente a qué puede acceder el lector: todos los artículos, solo los índices, números anteriores, ... En las que puedas acceder, haz un estudio a partir de sus índices sobre qué temas de geometría han publicado en sus últimos números. Si puedes acceder a los artículos indica si son adecuados para Primaria.*

- *Busca otras revistas matemáticas que contengan artículos sobre enseñanza-aprendizaje de la geometría. En caso afirmativo hacer el estudio como en el primer caso.*

- *Investiga si en tu universidad existen publicaciones digitales o no y si alguna está dedicada a las Matemáticas y si contienen artículos de enseñanza-aprendizaje de la geometría. En caso afirmativo hacer el estudio como en primer caso.*

**c) Otros recursos didácticos.** En general, el profesor y el alumno pueden encontrar múltiples recursos didácticos que incluyen desde conjuntos de datos para el trabajo en la clase de estadística, hasta juegos y pasatiempos matemáticos, libros de texto interactivos, notas sobre historia de las matemáticas, etc.

### **Actividades para los estudiantes para profesores.**

*- Todas las comunidades suelen tener páginas didácticas para los distintos niveles de enseñanza. Busca la página de tu comunidad y las de otras comunidades. Una vez encontradas, haz un estudio de qué contenidos, actividades, etc. podemos utilizar de ellas para la enseñanza-aprendizaje de la geometría.*

*- Busca páginas sobre juegos y pasatiempos matemáticos que nos sean útiles para la enseñanza-aprendizaje de la geometría.*

*- Busca páginas que nos sirvan para poder interrelacionar la Geometría con otras materias tales como: historia de las matemáticas, la Geometría y el Arte, la geometría en las Ciencias Sociales...*

*- Busca una página que interrelacione el Cine y las Matemáticas. Haz un estudio genérico de cómo se podría aprovechar esta página en el aula. Plantea actividades concretas.*

Como reflexión final, tanto estudiantes para profesores como profesores deben concienciarse que los recursos tecnológicos suponen, cada vez más, un proceso de innovación y de adecuación de la metodología y de las actividades utilizadas por el profesor en el aula. Por ello, hay que estar preparados para poder adecuar la enseñanza y las actividades a realizar con los recursos tecnológicos que tengamos en el aula y los que nos van llegando paulatinamente.

## **Tema 7. Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de geometría**

### **7.1. Introducción**

En las enseñanzas de tendencia tradicional y en los libros de textos es frecuente encontrarse con ciertas presentaciones sobre las figuras y los conceptos geométricos, que crean esquemas mentales inadecuados para que el alumno desarrolle un pensamiento abierto y divergente. Dichas presentaciones obstaculizan los procesos de abstracción y la agilidad en el manejo de ideas y contenidos.

Podemos afirmar sin equivocarnos que la característica más importante e inseparable de la Geometría es su componente visual. Realmente, es inconcebible estar inmerso dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría sin utilizar representaciones gráficas. Es más, cuando se expone verbalmente una situación o figura geométrica siempre intentamos dibujarla mentalmente. La visualización es un aspecto clave para las matemáticas, tanto en la resolución de problemas como en su efecto sobre el significado que se atribuye a las Matemáticas.

Aunque nunca hemos defendido su uso exclusivo, el libro de texto sigue siendo un recurso ampliamente utilizado durante las etapas de escolaridad y un objeto de uso diario por parte de alumnos y profesores. Por lo tanto, siempre es necesario realizar una revisión crítica de éstos para conseguir un uso eficaz encaminado a mejorar la enseñanza y el aprendizaje. Su importancia como recurso básico para el profesor viene reflejada por la cantidad de investigaciones que en torno a él se han desarrollado en los últimos años, y que ponen de manifiesto la influencia de los libros de texto y manuales escolares en la actividad desarrollada en el aula, siendo gran parte de la práctica educativa determinada por éstos.

Es habitual su utilización en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje y, en muchas ocasiones, determinan el currículo real. Este hecho hace que la elección del texto escolar sea una labor muy importante, aunque no es una tarea sencilla debido a la gran cantidad de variables que se deben tener en cuenta. Por otra parte, desde hace tiempo, los errores que cometen los alumnos han dejado de ser elementos sancionables o incapacidades carentes de interés y que había que ignorar hasta que se corrigieran por sí solos. Actualmente, los errores son considerados, en coherencia con la tendencia constructivista, como una línea de trabajo en la que se investigan las concepciones erróneas, el examen de sus causas y la evolución de dichos errores en la formación académica. En los últimos diseños curriculares, que consideran al alumno como el eje del aprendizaje, se admiten los errores como un elemento más de los procesos de aprendizaje.

Es notorio que algunos alumnos muestran errores que no evolucionan ni son corregidos durante los distintos niveles educativos. Estos errores suelen perdurar durante toda su formación académica e incluso son detectados en su formación de profesores por lo que si no son subsanados pueden ser transmitidos a sus futuros alumnos.

También ha sido probado y hemos experimentado en nuestro trabajo docente la resistencia que los estudiantes para profesor ponen para eliminar los errores, también después de comprobar su falsedad, lo que muestra su profunda interiorización de la que se ven influidas sus concepciones. Consideramos, por tanto, que hacer surgir y conocer los errores ayuda a captar sus concepciones, la forma en que los alumnos aprenden o han aprendido, y las dificultades con las que se encuentran en la realización de tareas. Este conocimiento es eficaz para los profesores pues constituye un modelo para la reflexión que le ayuda a desarrollar una enseñanza y un aprendizaje más significativos.

## **7.2. Errores y esquemas conceptuales**

La implementación y utilización del texto escolar en el aula de matemáticas se ha producido de forma generalizada desde los inicios de la educación hasta nuestros días. Además, entendemos que la legislación actual se nutre de las investigaciones previas en educación y que los libros de texto actuales se ajustan a la normativa e incorporan disposiciones didácticas de la comunidad investigadora en su organización y contenidos. El libro de texto ha tenido diferentes papeles: como objeto de estudio, como material de consulta, como registro de las actividades del alumno y como colección de ejercicios propuestos y problemas a resolver.

Empezamos estudiando algunos errores sobre la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas que pueden haber sido generados en el mismo proceso de aprendizaje de las figuras. Estos errores, en la enseñanza de la geometría, son causados muchas veces por una utilización exclusiva del libro de texto y la no utilización de otros recursos o materiales que amplíen el esquema conceptual del alumno.

En primer lugar, tenemos que preguntarnos ¿qué ocurre en la mente de los alumnos cuando una vez que se supone que el concepto ha sido adquirido se les pide que identifiquen o construyan ejemplos?

La identificación o construcción de ejemplos de un concepto supone que hay que tener en cuenta la *imagen del concepto* (el reflejo en la mente del alumno) y la *definición del concepto* (verbal) así como aquellas *operaciones mentales* (ej.: esquemas lógicos) o físicas (ej.: giros de la figura) en las que una comparación con el dibujo mental sea más fácil.

Tall y Vinner, profesores e investigadores de la enseñanza de las matemáticas, consideran el término **concepto de imagen** como *la estructura cognitiva en la mente del alumno asociada a un concepto dado*. Esta imagen incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados. El concepto de imagen puede no ser coherente y diferir bastante de la definición formal del concepto. Estos autores consideran **la definición formal del concepto** como *el conjunto de palabras que se usan para especificar dicho concepto y que es aceptado por la comunidad matemática*. Sin embargo, *la definición de un concepto para los alumnos*, que los autores llaman **definición personal del concepto**, puede variar mucho de la anterior, pues puede ser aprendida de memoria o de una forma significativa pero con un cierto grado de alejamiento o acercamiento a la definición formal. Esta definición personal genera una imagen propia del concepto, que si se mejora incide positivamente en el acercamiento a la definición formal.

Así pues, utilizar un único dibujo o un número reducido de dibujos, para enseñar un concepto, provoca que el alumno construya esquemas conceptuales con imágenes estándar que suelen alejarse de la verdadera definición del concepto. Consideramos que deben introducirse una variedad de ejemplos en diferentes orientaciones al presentar los conceptos geométricos. Un esquema conceptual no se forma a partir de las definiciones de los libros sino que se forma a partir de la experiencia.

El material que utilizan los alumnos, los libros, pueden incluir **representaciones geométricas estereotipadas**, es decir, que *repiten ciertos patrones o que presenten algunos elementos en las representaciones que inducen a que se les atribuyan propiedades inexistentes o se formen conceptos erróneos acerca de las mismas*. Lo mismo ocurre con las representaciones planas de figuras tridimensionales, que pueden ser interpretadas de forma errónea por los alumnos ya que el paso del espacio al plano admite varias posibilidades y éstos pueden tener falta de dominio de los sistemas de representación. Así pues, **comprender** significa *haber construido un esquema conceptual asociado con los significados de la palabra que nombra el concepto*. Estos significados pueden ser imágenes mentales, propiedades, prácticas, procedimientos...

### **7.3. La simbología visual del concepto**

En la enseñanza-aprendizaje de la geometría de tendencia tradicional, en la que ya hemos dicho no se suelen utilizar materiales o recursos distintos al libro de texto, las imágenes juegan un papel muy importante. Dichos libros de texto presentan las distintas figuras geométricas mediante un único dibujo

o un número tan pequeños de ellos que el alumno construye esquemas conceptuales estándar sobre ellos (cuadriláteros, prismas, etc.), que suelen alejarse de la verdadera definición del concepto.

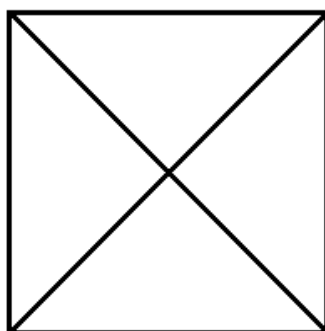


Figura 7.1 ¿Es figura espacial o plana?  
¿Cuál es?

En estas figuras, a veces, no se presta atención a la simbología del lenguaje visual, de forma que el profesor y el alumno interpretan cosas distintas sobre un dibujo, sobre todo si es representación plana de una figura tridimensional. Así el dibujo de la figura 7.1 puede ser interpretado como una pirámide cuadrada, una bipirámide cuadrada o un cuadrado y sus diagonales.

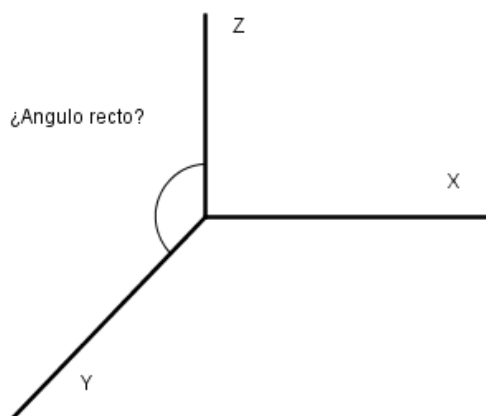


Figura 7.2 ¿Son ángulos rectos?

Otras veces los alumnos no son capaces de ver en el plano ángulos rectos por su falta de dominio del sistema de representación en el que está construidas las figuras (figura 7.2). Las tareas de los profesores y los libros de textos es posible que incluyan representaciones que los alumnos interpreten de maneras distintas debido a que el paso del espacio al plano admite varias posibilidades como en los casos anteriores.

#### 7.4. Distractores de orientación

Para Hershkowitz, profesor e investigador matemático, el concepto se deriva de su definición matemática y por ello, tiene atributos relevantes críticos, que son los adecuados para ser ejemplo del concepto, y atributo no críticos, que son los que sólo poseen algunos ejemplos. Los alumnos comienzan por tener una imagen del concepto muy amplia que da lugar a ejemplos estándar, que mejoran con la práctica (procesos visuales o analíticos), de los que se obtienen ejemplos más críticos y analíticos. Sin embargo, ciertos atributos irrelevantes tienen fuertes características visuales y actúan como distractores.

Uno de los distractores más conocidos son los **distractores de orientación**, que se refieren a *aquellas propiedades visuales que se incluyen en el esquema conceptual del alumno y que no tienen nada que ver con la definición del concepto*. Por ejemplo, en el tema de Ángulos podemos observar como éstos suelen ser presentados con un lado horizontal paralelo al borde inferior del libro. Los alumnos incluyen en su esquema conceptual de ángulo dicho atributo de forma que consideran que siempre tienen que dibujarlos con un lado horizontal, sobre todo el ángulo obtuso. En la figura 7.3 observamos los estereotipos o posición estándar y los no estereotipos.

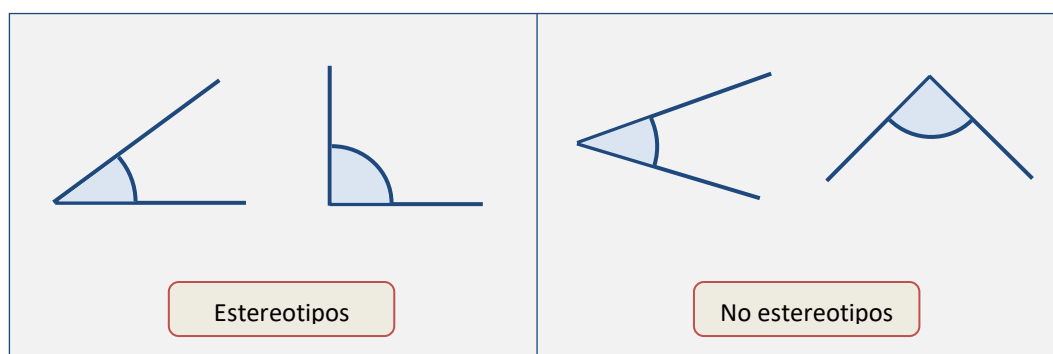


Figura 7.3. Ángulos en distintas orientaciones

Otro ejemplo, el paralelismo de la figura con los lados de libro o del folio se acusa mayormente cuando se trazan rectas perpendiculares o paralelas que se dibujan siempre siguiendo la dirección de estos lados (figura 7.4).

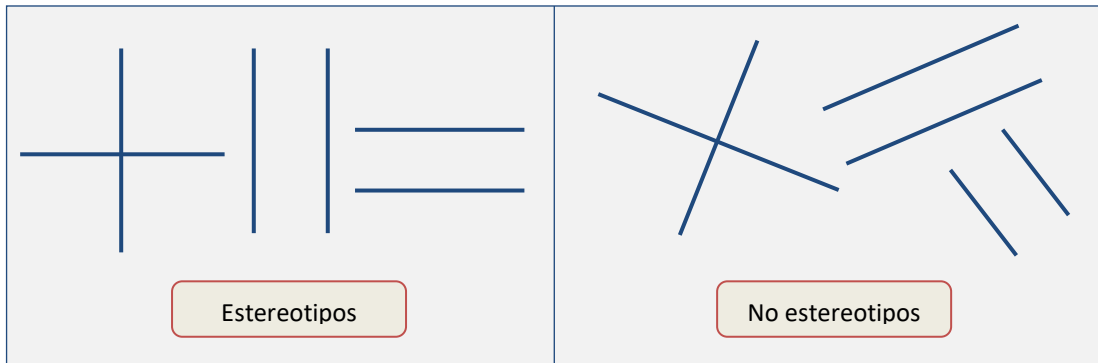


Figura 7.4. Paralelas y perpendiculares

Igualmente ocurre con la construcción del triángulo rectángulo que se presenta apoyado sobre el cateto o los rombos apoyados siempre en un vértice (figura 7.5 y 7. 6).

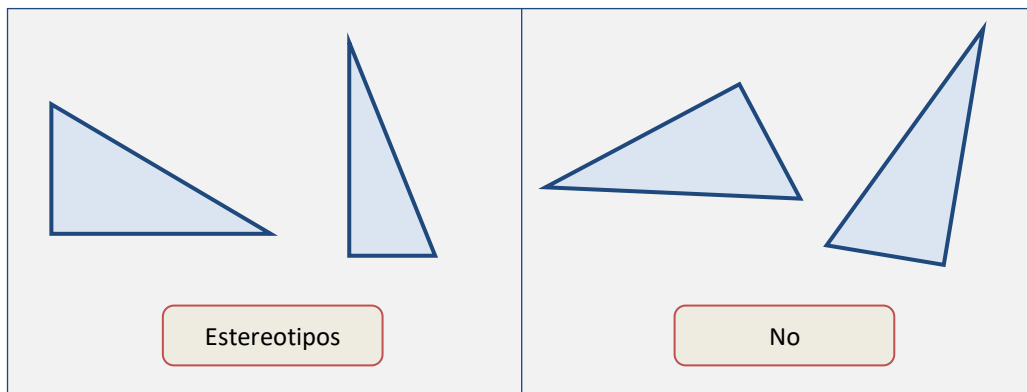


Figura 7.5 ¿Triángulos rectángulos?

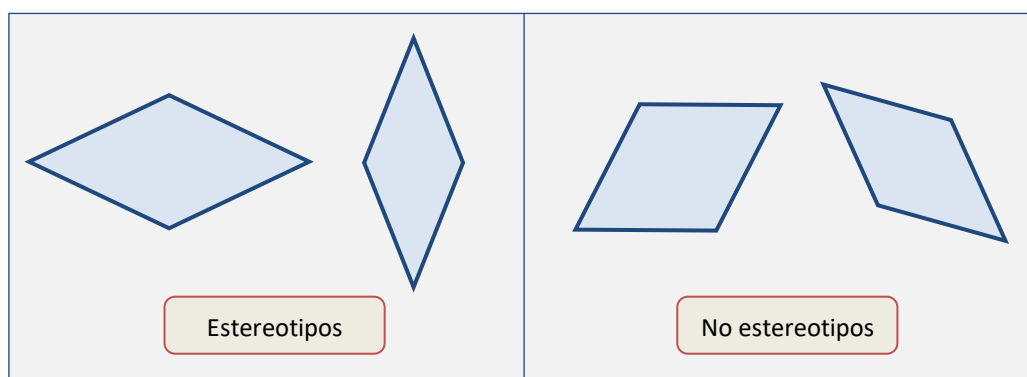


Figura 7.6 ¿Rombos?

También los trapecios se encuentran dibujados, en los libros de texto, con los lados paralelos a los márgenes inferior y superior del libro de texto, y apoyados en el lado paralelo mayor (figura 7.7) De esta forma los alumnos pueden no interiorizar como ejemplos también válidos las rectas perpendiculares



no paralelas a los bordes del libro, triángulos rectos colocados en otras orientaciones, rombos apoyados en uno de sus lados y trapecios apoyados en la base pequeña (figura 7.7)

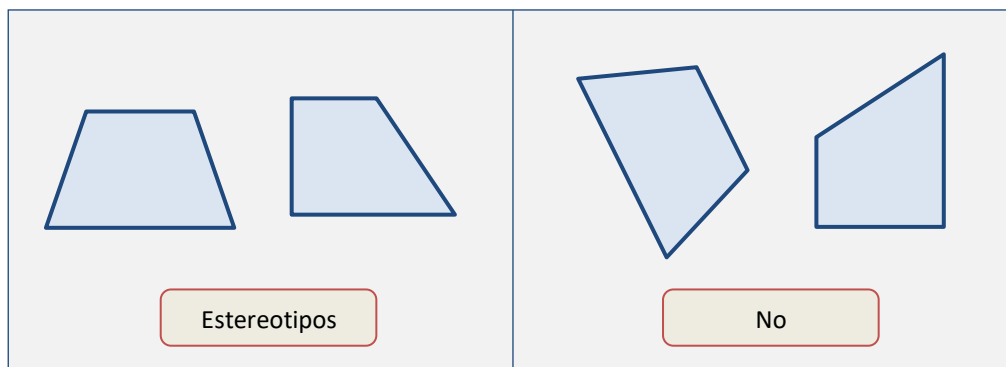


Figura 7.7. ¿Trapecios?

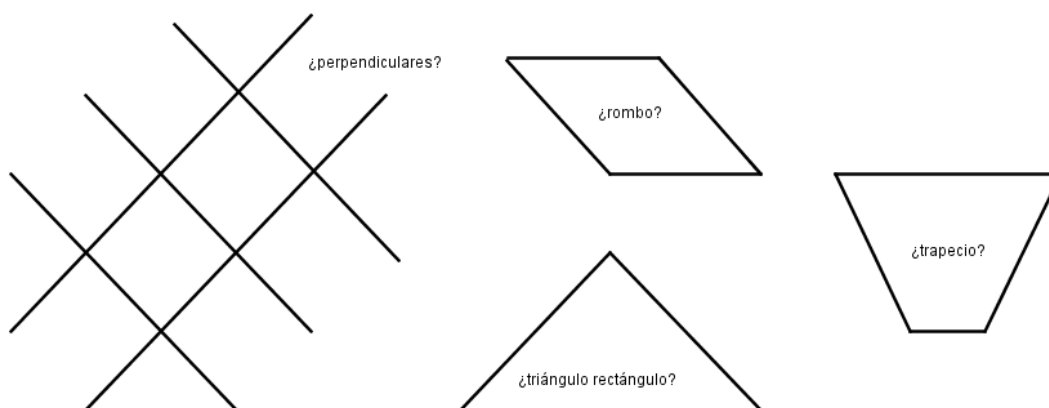


Figura 7.8. Posiciones no estándares

En Geometría espacial, también encontramos prototipos que crean una imagen mental incompleta. En el caso de prismas, pirámides, conos y cilindros, aparecen en los libros en posición estándar, es decir, apoyados sobre la base (figura 7.9) . En el caso de otros sólidos, entendemos que son representados de forma estándar si se apoyan sobre una de sus caras planas. El octaedro lo consideraremos estándar si se apoya sobre uno de sus vértices. Así, en todos los demás casos, que no suelen aparecer en los libros de texto, se consideran posiciones no estereotipadas.

La orientación de los sólidos apoyados siempre sobre la base forma también en los alumnos imágenes mentales que hacen que no identifiquen como prismas aquellos que están apoyados sobre una cara lateral, como los de la figura 7.10.

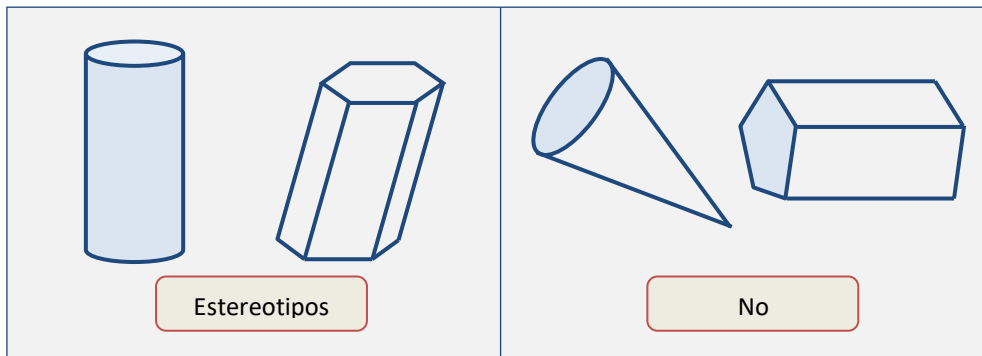


Figura 7.9. Posiciones no estándares de cuerpos

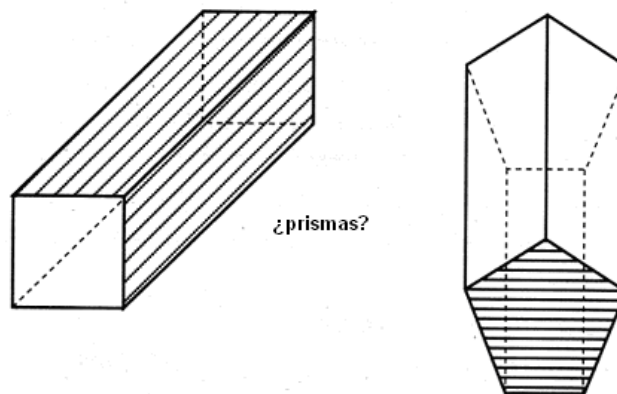


Figura 7.10 ¿Estos cuerpos son prismas?

Podemos encontrar en el alumnado distintos errores comunes como considerar que la base es la cara en la que apoyan los objetos o que la base no es una cara, sobre todo en figuras como los prismas y las pirámides, donde sólo consideran las caras laterales como caras de la figuras. Los libros de texto contribuyen a esa imagen del concepto cara debido a la importancia que se le da a la base como objeto clasificador; por ejemplo, sabemos que la base determina el nombre de los prismas y si el prisma es regular o no.

### 7.5. Distractores de estructuración

A veces los alumnos tienen ideas erróneas que se desarrollan con el proceso de aprendizaje y que tienen incidencia durante varios cursos. De esta manera, los alumnos pueden tener esquemas mentales incompletos debido a los **distractores de estructuración**, es decir, a *una presentación débil del concepto en el que ciertos elementos y propiedades son excluidos, probablemente sin intención*. Un ejemplo alusivo a estos distractores es la presentación de los triángulos isósceles con los lados iguales siempre más grande que el lado desigual y siempre apoyado sobre este lado (figura 7.11). A veces,

cuando los alumnos estudian los elementos notables de un triángulo, como son alturas, medianas, mediatrices y bisectrices, presuponen que todas son siempre interiores al triángulo (figura 7.12). Esto explica la dificultad que tienen para trazar alturas a los lados de un triángulo obtusángulo o a un triángulo rectángulo, en el que dos alturas coinciden con los lados.

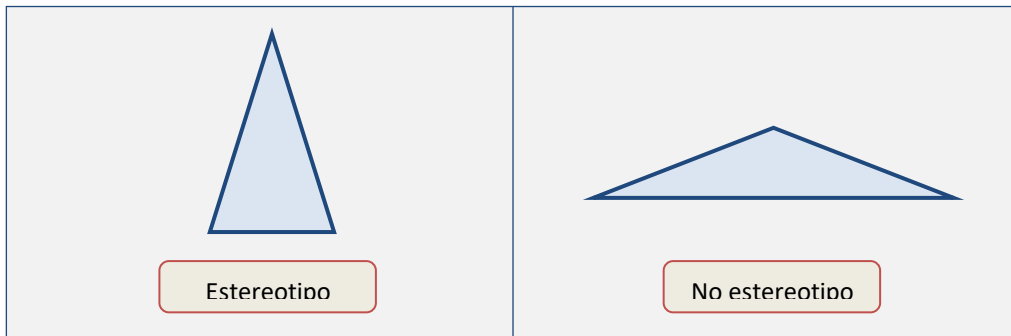


Figura 7.11. Triángulos isósceles

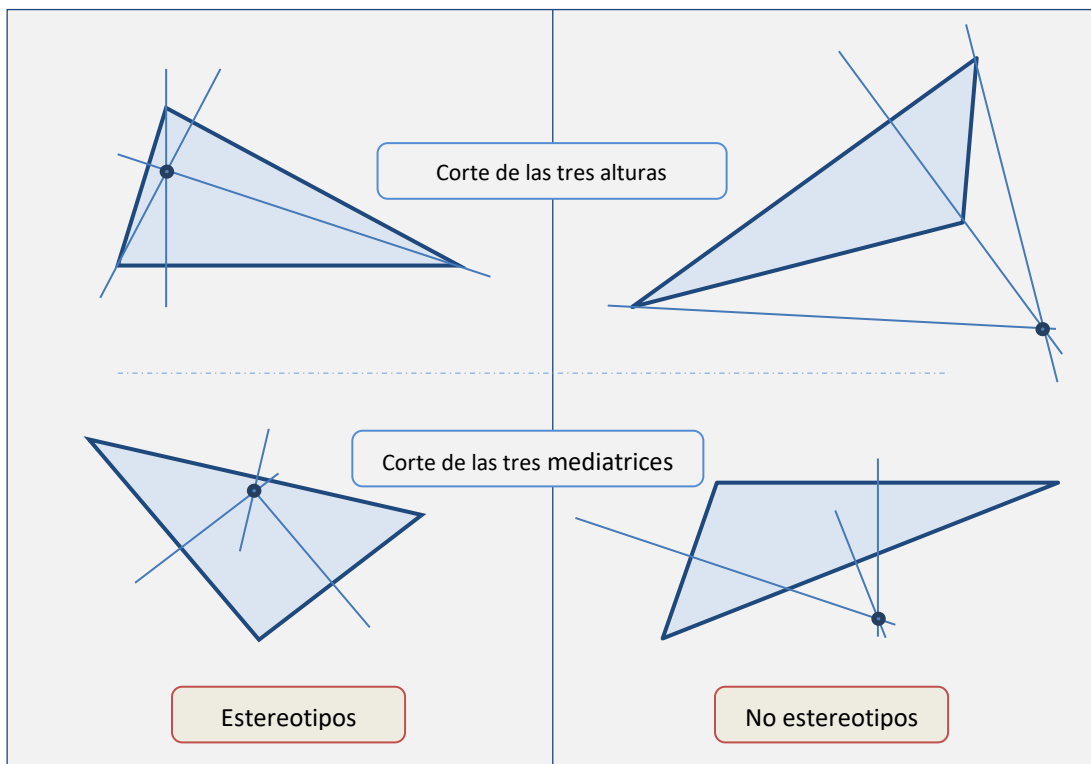


Figura 7.12. Elementos notables de los triángulos

Es interesante observar cómo en el trazado de alturas el alumno puede buscar también la vertical paralela al borde del libro más que la perpendicular a la base (figura 7.13). En algunos libros de texto, las alturas de los triángulos siempre presentan esta orientación, es decir, son paralelas al borde del libro.

La presentación constante de esta altura estándar paralela al borde, siempre única, tanto en la definición como en las actividades de medida, etc. hace también concebir a los alumnos la existencia de una sola altura en los triángulos (figura 7.14)

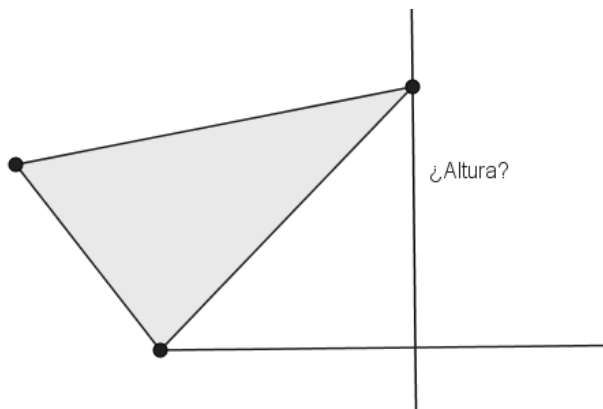


Figura 7.13. Altura paralela al borde del libro

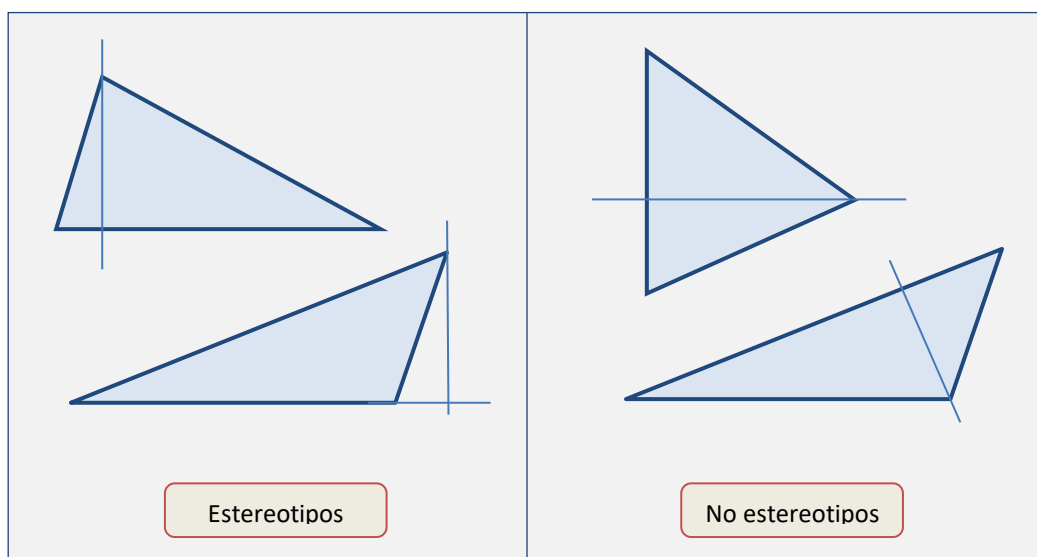


Figura 7.14. ¿Una sola altura?

Así, cuando el profesor les pide trazar las alturas de un triángulo solo trazan esta altura estándar, pues algunos alumnos desconocen que existen otras alturas o tienen dificultad para trazar otras que no sean la estándar. Esto hace que les sea dificultoso trabajar en las actividades con alturas no estándar.

Un distractor de estructuración a la hora de presentar los polígonos, y figuras planas en general, es la convexidad. En este caso, consideramos que una figura plana es un estereotipo si es convexa. Es característico observar la escasez de figuras planas o sólidos de forma cóncava en las imágenes que recibe el alumno durante la enseñanza de la geometría en Primaria. Esto hace que no sean capaces de identificarlas ni de clasificarlas. Los alumnos conciben que solamente existan figuras y sólidos convexos (figura 7.15).

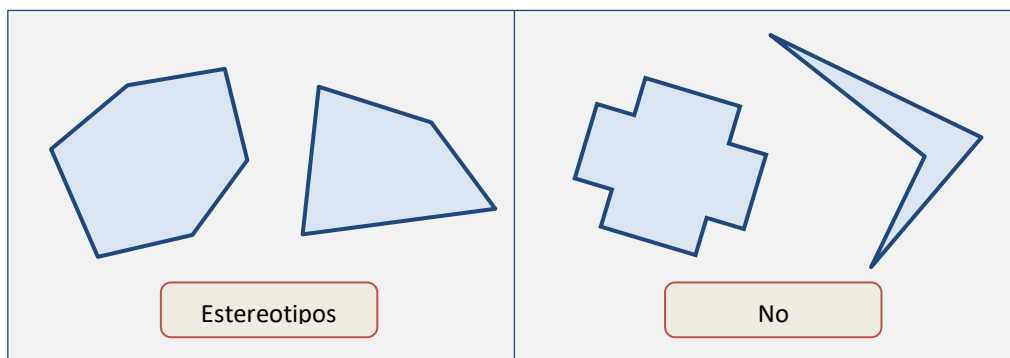


Figura 7.15. Figuras cóncavas y convexas

Igualmente ocurre con los trapecios en las clasificaciones de polígonos de la geometría plana. La imagen tan pobre que los alumnos reciben de estos polígonos hace que los alumnos no los consideren en la clasificación de cuadriláteros.

En la Geometría espacial, es también característico considerar que en conos, cilindros, prismas y pirámides, la longitud de la altura es mayor que el ancho de la base. Así, algunos alumnos no son capaces de clasificar cuerpos con alturas pequeñas como puede ser un tornillo de tuerca o una pila de reloj.

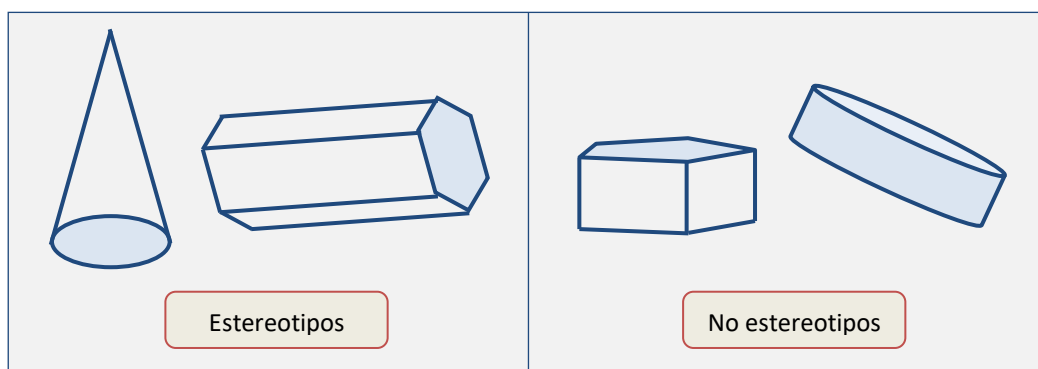


Figura 7.16. Cuerpos con alturas pequeñas

## 7.6. Errores debido a los nombres y a las imágenes reales del concepto

Diversos estudios muestran que los alumnos identifican más fácilmente aquellas figuras que tienen un nombre común “oficial”, De acuerdo con este estudio, los alumnos reconocen más fácilmente como polígonos aquellos que conocen su nombre como cuadrado o pentágono. Igualmente dentro de los sólidos identifican los que tienen nombre como poliedro y cilindro. Éstos sienten bastante reticencia a identificar, por ejemplo, como polígonos a aquellos que tienen más de diez lados ya que no tienen un nombre común.

Con respecto a la nomenclatura, no merece la pena dar nombre a las figuras por las características que no tienen ya que normalmente se atiende más a las cualidades que poseen que a las que carecen. Por ejemplo, en la mayoría de los textos, cuando clasifican los cuadriláteros presentan nombres como el *trapezoide* para un cuadrilátero convexo sin lados opuestos paralelos o el de *romboide* para un paralelogramo no equilátero ni equiángulo. Estas nomenclaturas son redundantes pues estas figuras planas quedarían siempre nombradas como cuadriláteros o paralelogramos respectivamente sin necesidad de añadirles un nuevo nombre.

En el aprendizaje de las figuras geométricas tenemos que tener también en cuenta otros obstáculos con respecto a las imágenes reales del concepto. Mesquita llama *doble estatus de los objetos geométricos* a todo aquello que se apoya en objetos generales y abstractos que no puede ser expresado más que por una configuración específica que implica objetos concretos y particulares. Es decir, los conceptos en Geometría son distintos de sus representaciones externas por lo que son difícilmente dissociables de ellas. Esta ambigüedad, aunque no la perciba el alumno, puede ser una fuente de conflictos para los alumnos que se enfrentan con un problema geométrico. En la Geometría se habla de abstracciones mientras los niños encuentran en las habitaciones objetos reales que solamente se asemejan a esos objetos ideales geométricos.

A la complicación que supone el separar el objeto abstracto del real se añade, otras veces, la presentación en los libros de textos de fotografías que no son muy adecuadas para una primera presentación del sólido correspondiente. Así observamos caramelos de palo, además con superficie rugosa e irregular, como ejemplo de esfera; botes de bebidas con extremos curvados como ejemplos de cilindros, o jabones con formas redondeadas y con huecos como ejemplos de prismas. Un ejemplo también poco idóneo es presentar una fotografía de las pirámides de Egipto que no suelen estar en planos principales, sino que se ven a lo lejos, y que no pueden formar una imagen mental adecuada al concepto.

En distintos trabajos con estudiantes para profesores hemos observado como éstos identifican, además de los ejemplos anteriores, tiendas canadienses con lados curvos como prismas triangulares o sombrillas como octógonos, lo que muestra la poca rigurosidad de los esquemas mentales construidos sobre esos conceptos.

### **7.7. Errores al definir los conceptos**

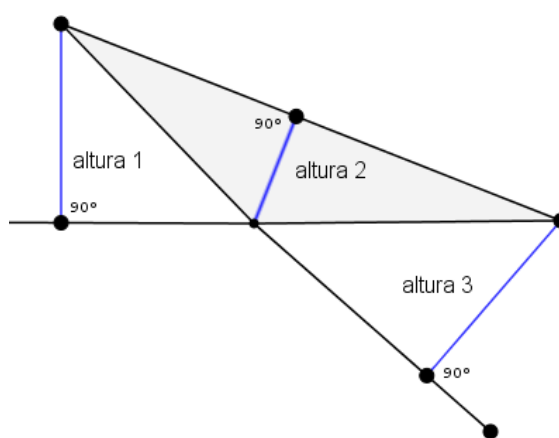
Otro problema importante que hay que tener en cuenta en la enseñanza-aprendizaje de la geometría son las definiciones de los conceptos. Los profesores presentan los conceptos de Geometría elemental de dos formas distintas. El profesor puede dar la definición o bien presentar primeramente ejemplos de figuras, describiendo sus características para pasar a definirlos. En ambos casos posteriormente el alumno realiza ejercicios memorísticos sobre definición, así como actividades de reconocimiento de otras figuras similares.

Ambas metodologías ponen el acento en las definiciones más que en los ejemplos, que son los que realmente modelan y construyen la imagen mental del alumno de una forma más duradera. Mediante estas metodologías los alumnos memorizan las definiciones cuando el profesor les pregunta, pero no las utilizan para resolver las actividades que se le plantean, pues carecen de una imagen conceptual apta para poderla usar. Esta forma de actuar hace que se formen alumnos que conocen los conceptos geométricos de forma teórica pero poco práctica, incapaces de afrontar los problemas geométricos que se le plantean o se le plantearán en su vida cotidiana.

Esta importancia de las definiciones se ve agravada debido a los errores que presentan los libros de textos. Así, ciertos objetos geométricos pueden ser definidos de formas diferentes y llevar a los alumnos a graves confusiones. Por ejemplo, las definiciones de los elementos notables de un triángulo como altura o medianas tienen dos acepciones: bien como segmentos (en textos de Primaria) o bien como rectas (textos de E. Secundaria). Si nos fijamos, por ejemplo, en las alturas y las definimos como rectas, cuando el alumno trabaja el tema de medida tiene que dar valores finitos a las alturas que aparecen en los problemas que se le plantean. Esto lleva a contradicción en la construcción del esquema conceptual del alumno referente a la altura pues, por una parte se considera una recta ilimitada y por otra podemos medirla en metros y obtener un resultado finito. Sin embargo, si las definimos como segmentos no podríamos deducir la propiedad de que *“las tres alturas se cortan en un punto”*, ya que para el caso del triángulo obtuso no se cumpliría (figura 7.18).

Los errores pueden también ser ocasionados por las interpretaciones distintas que se le pueden dar a la misma expresión gramatical. Así la definición de triángulo isósceles como *el triángulo que tiene dos lados iguales* puede ser interpretada como que *dos lados son iguales y uno desigual* o bien que *tiene dos lados iguales y el otro puede ser desigual o no*. En esta última definición el triángulo equilátero se podría incluir como isósceles pero no sería así en la primera interpretación. Por tanto, distintas interpretaciones de la misma expresión gramatical puede llevar a los alumnos a clasificar un mismo conjunto de elementos geométricos en diferentes familias de polígonos y a construir imágenes mentales poco fiables.

Figura 7.18 ¿Se cortan las tres alturas?



### 7.8. Errores al realizar las clasificaciones

Un problema que se plantea desde la Primaria y que los alumnos arrastran hasta la universidad, por ejemplo, los estudiantes para profesores, es la clasificación de las formas planas, tanto de triángulos como de cuadriláteros. Las confusiones que los alumnos tienen sobre estas clasificaciones, hacen que les sea imposible clasificar otros conjuntos donde repercuten éstas como es la clasificación de los sólidos, en particular en el caso de los paralelepípedos.

Vamos a considerar la clasificación por particiones (no hay intersección entre los conjuntos) y la clasificación por inclusiones o jerárquica (los conjuntos están contenidos unos en otros).

En Primaria, si nos fijamos en las definiciones que se dan en los libros de textos, se clasifican los triángulos y los cuadriláteros en particiones. Así, aparece la definición de isósceles como *el triángulo que tiene sólo dos lados iguales* o también como *el que tiene dos lados iguales y uno desigual*. Estas definiciones predisponen a una clasificación por **partición** de los triángulos en: escalenos, isósceles y equiláteros que es la que los profesores enseñan en Primaria (figura 7.19). Sin embargo, en 2º de E.S.O. encontramos la definición de triángulo isósceles como *el que tiene dos lados iguales al menos* lo que



presupone una clasificación por **inclusión** en la que el triángulo equilátero es un subconjunto de los triángulos isósceles y éstos de los triángulos en general (figura 7.19)

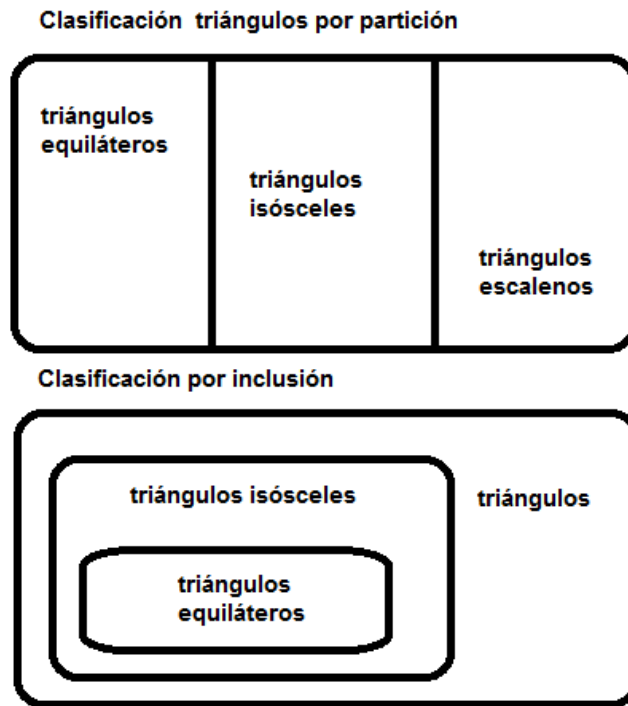


Figura 7.19. Clasificaciones de triángulos

Igualmente ocurre con los cuadriláteros que son clasificados, en Primaria como clases disjuntas en las que el rectángulo, el cuadrado y el rombo pertenecen a clases distintas (figura 7.20). Posteriormente, en Secundaria y en la formación de profesores se clasifican por inclusión. Esta clasificación es más precisa incluyendo más conjuntos como tipos de trapecios, deltoides, etc. que no hemos considerado en este estudio.

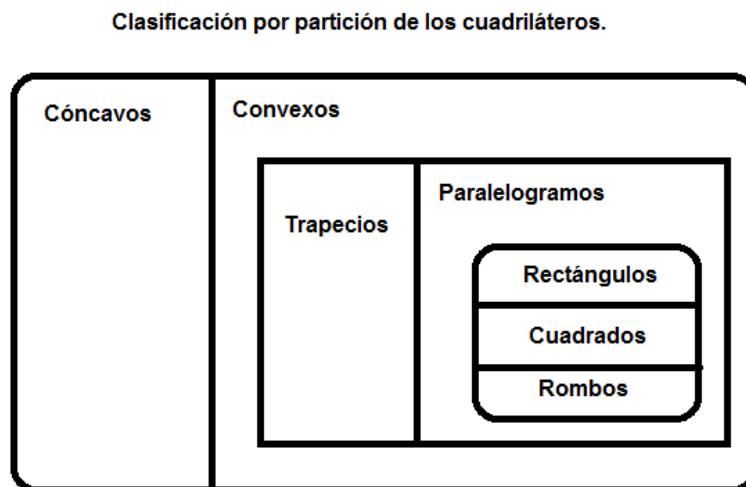


Figura 7.20. Clasificación cuadriláteros por partición

Así, a partir de las definiciones que se dan en la figura 7.21, los alumnos tienen serias dificultades para admitir que el cuadrado pertenece a la familia de los rombos o a la familia de los rectángulos, incluso después de entender perfectamente las propiedades que corresponden a cada definición.

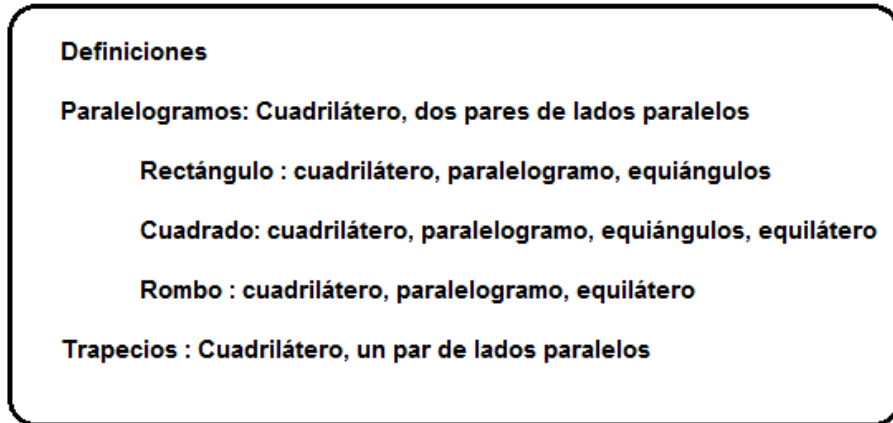


Figura 7.21. Definiciones

De igual forma les cuesta trabajo admitir que los paralelogramos están incluidos en el conjunto de los trapeacios, incluso entendiendo que si los paralelogramos tienen dos pares de lados paralelos entonces tienen también uno (figura 7.22).

Todo esto conlleva a que la falta de criterios claros de clasificación de las figuras planas hace que los alumnos manifiesten serias dificultades en la clasificación de sólidos. Un ejemplo claro es la clasificación de los paralelepípedos y, por el mismo motivo que con el cuadrado, los alumnos no pueden entender la inclusión del cubo en la familia de los romboedros y los ortoedros.

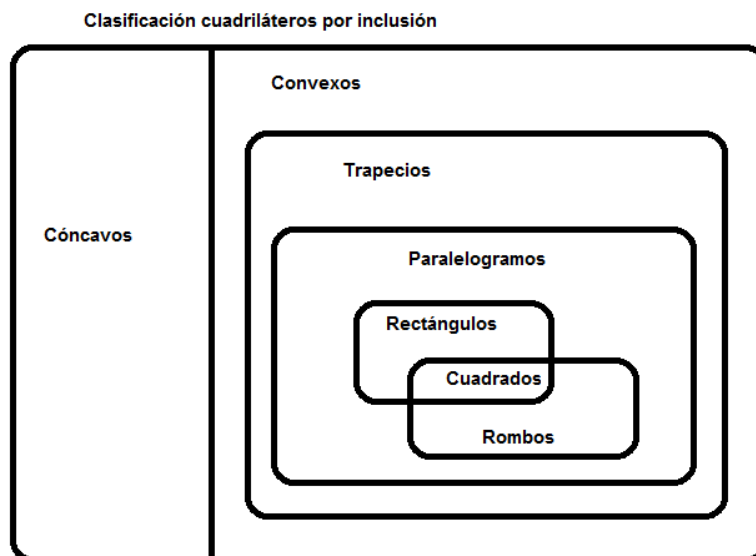


Figura 7.22. Clasificación cuadriláteros por inclusión

Las imágenes conceptuales y las definiciones de los alumnos en el segundo nivel de Van Hiele (Primaria) están muy arraigadas, de forma que las nuevas definiciones en Secundaria que implican un cambio de imagen conceptual, no son admitidas, incluso cuando alcanzan el tercer nivel, debido a que ni por parte del libro, ni por parte del profesor se les prepara para que adviertan los cambios de definiciones que implican cambios en las clasificaciones. Los alumnos llegan a su formación como maestros admitiendo solamente la ordenación por partición y mostrando grandes recelos sobre la ordenación por inclusión. Estos cambios originan muchas confusiones en los alumnos, que incluso pueden generar concepciones y actitudes de rechazo hacia la Geometría

### **7.9. Recomendaciones metodológicas para evitar los errores**

Nuestro interés en este capítulo, al comentar los distintos errores, no es otro que mostrar a los profesores una fuente de información de lo que pueden haber aprendido sus alumnos y cómo lo han aprendido. Es notorio observar como en la enseñanza-aprendizaje de la geometría, se fuerzan los tiempos de la conceptualización y se introducen muy pronto los conceptos abstractos obviando la realización de actividades concretas como consecuencia de esa utilización temprana de la nomenclatura definitiva.

Es necesario aumentar el número de actividades de laboratorio en las que los conceptos y propiedades de las figuras geométricas se manipulen, y realizar investigaciones y proyectos de estudios de las figuras geométricas. Estas actividades deben incluir tareas de orientación de las figuras, de estructuración y de las distintas representaciones de una figura en el plano, así como reflexiones o debates sobre los nombres de las figuras, la relación imagen real y concepto...

Por otra parte, como hemos comentado, las definiciones de los libros de texto crean un problema en el aprendizaje. Los libros de texto y algunos profesores parten de que los esquemas conceptuales se construyen a partir de las definiciones y por tanto en la resolución de problemas y actividades es la definición la que se activa en la mente del alumno y la que domina el proceso. Esta concepción puede producir la incapacidad del alumno de resolver situaciones cotidianas. Por ello, los profesores deben partir de que el esquema conceptual se construya a partir de la experiencia del alumno, a partir de situaciones muy variadas y sin necesidad de recurrir en un principio a la definición.

Es esencial que los profesores presten principal atención a las propiedades, a las imágenes visuales y reales de los conceptos que trabajan con los alumnos. Deben recordar permanentemente que los conceptos fundamentales en los distintos lenguajes (verbal o gráfico) pueden esconder objetos mentales distintos a los que piensan, produciéndose una falta de entendimiento entre el discurso como profesor y el

conocimiento del alumno. Esta especial atención nos hará descubrir, cuando los alumnos realicen tareas, si su esquema conceptual es incompleto o mal construido, y nos dará oportunidad para modificarlo.

También, los profesores tienen que especificar a sus alumnos el cambio de definiciones y clasificaciones que se produce al pasar de Primaria a Secundaria. En Primaria, de acuerdo con los niveles de Van Hiele, los alumnos clasifican por particiones y en las etapas posteriores, el paso al tercer nivel, permite otras clasificaciones como la inclusión.

Entre los problemas que detectamos en la formación de profesores, observamos como la inclusión del cuadrado como rectángulo o como rombo tiene bastante dificultad, Siguiendo a De Villiers, profesor matemático e investigador, hemos obtenido resultados favorables utilizando la palabra *especial* afirmando que un cuadrado es un *rectángulo especial*. Los alumnos suelen tener problemas de considerar el cuadrado como rectángulo pues, en lugar de fijarse en las definiciones, recurren a su imagen mental de las figuras en las que no se admite en ningún caso que un cuadrado sea igual a un rectángulo.

Con respecto a la inclusión del cuadrado en las familias de los rombos ayuda también bastante la utilización de programas dinámicos de Geometría (GeoGebra en sus versiones u otros) y los materiales dinámicos como los mecanos con los que podemos observar mediante movimientos cómo cada cuadrado pertenece a la familia de todos los rombos que tienen los mismos lados, como vimos en el capítulo de materiales manipulativos para la enseñanza-aprendizaje de la geometría. La geometría dinámica permite que los alumnos prueben las nuevas ideas, las examinen y las interioricen produciéndose las modificaciones necesarias.

El profesor debe observar que los errores considerados no se deban a distracción o inadvertencia, casualidad o fallo de la memoria sino a errores que sean persistentes y reproducibles. A veces, podemos pensar que el alumno ha superado un error y sin embargo, se vuelve a presentar en otras actividades con el consiguiente desencanto del profesor. Por tanto, no basta con advertir al alumno de su error sobre determinado tópico dándole una explicación, sino que debemos desarrollar un proceso continuo de afianzamiento, ya que no se puede sustituir una concepción antigua por otra nueva de una forma radical.

La metodología constructivista hace que los alumnos se enfrenten a sus propios errores mediante tareas en las que necesiten comprobar y reflexionar. Debemos provocar conflictos en sus mentes que verifiquen la inconsistencia de sus ideas frente a los distintos errores. Así estaremos en el camino de conseguir una mejora del conocimiento de las concepciones que los alumnos tienen sobre las figuras geométricas y todos los tópicos relacionados con ellas.

## Bibliografía.

- Aballe, M.A. Aproximación al nivel de conocimiento matemático básico de futuros maestros de Primaria. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2000, 25, 89-107.
- Alsina, A. *Desarrollo de Competencias Matemáticas con recursos lúdicos-manipulativos*. Madrid: Ed. Narcea, 2004.
- Alsina, C. y otros (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Ed. Síntesis, 1987.
- Alsina, C. y otros. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Ed. Síntesis, 1987.
- Alsina, C. y Fortuny, J. M<sup>º</sup>. : *Miralandia un viaje geométrico al país de los espejos*. Granada: Editorial Proyecto Sur, 1992.
- Barrantes, M. y Revilla, D.: Geometría para profesores de E.G.B. *Campo Abierto*, 1988, 5, 209- 227.
- Barrantes, M. La Geometría en la Formación de Profesores de Primaria. En Mellado, V. y Blanco, L. J. (eds.): *La Formación del Profesorado de Ciencias y Matemáticas en España y Portugal*. Badajoz: Ed. Dpto. Dca. C. Ex. y de las Matemáticas, 1995,49-55.
- Barrantes, M.; Barrero, M. y Ruiz, C. Garabatos geométricos. *Campo Abierto*, 1997a, 13, 139-153.
- Barrantes, M.: Matemáticas: Ciencias y Letras. *Puertas a la lectura*, 1997b, 2, 10-12.
- Barrantes, M. (ed.) : *La Geometría y la Formación del profesorado en Primaria y Secundaria*. Cáceres: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura, 1998.
- Barrantes, M.; Masot, M.; Redondo, C. y Rodríguez, I.: Interdisciplinaridad en Primaria a través de una ruta geométrica. *Campo Abierto*, 1998, 15, 311-329.
- Barrantes, M.: Caracterización de la enseñanza aprendizaje de la geometría en primaria y secundaria. *Campo abierto*, 2003, 24, 15-36
- Barrantes, M y Blanco, L. J.: Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la Geometría escolar. *Enseñanza de las Ciencias*, 2004, 22(2), 241-250.
- Barrantes, M y Blanco, L. J.: A study of prospective Primary teacher`s conceptions of teaching and learning geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2006, 9(5), 411-436.
- Barrantes, M. y Zapata, M.: Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto*, 2008, 27(1), 55-71.
- Barrantes, M. y Balletbo, I.: *La enseñanza-aprendizaje de la geometría en revistas científicas españolas de mayor impacto de la última década*. Gobernación de Misiones. Universidad Nacional de Pilar. Asunción, Paraguay: Litocolor S.R.L., 2011.
- Barrantes, M.; Balletbo, I. y Fernández, M. A.: La enseñanza-aprendizaje de la Matemática (Geometría) en Educación Secundaria en la última década. *Premisa. Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática*, 2013, Año 15, nº 56, 41-50.
- Barrantes, M.; Balletbo, I. y López, M.: La componente visual de la Geometría en los libros de textos de Secundaria. *Revista Premisa*, 2014, 16 (62), 24-35.
- Barrantes, M., López, M. y Fernández, M. A.: Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. *PNA*, 2015, 9(2), 107- 127.
- Barrantes, M. Balletbo, I. y Fernández, M.: Imágenes: un recurso rentable para aprender geometría. *Recifuna*, 2016, 3(2), 1-10.

- Barrantes, M.; Barrantes, M.C. y Zamora, V.: *Didáctica de la medida en Primaria*. Cáceres: Servicio Publicaciones Universidad de Extremadura, 2020.
- Barrantes, M., Zapata, M. y Barrantes, M.C.: *Didáctica de los números y las operaciones en la Educación Primaria*. Piura: Ed. Universidad de Piura. (Perú), 2021.
- Bermejo, A.: El libro de espejos: aplicaciones didácticas. *Suma*, 2002, 41, 83-92.
- Bressan, A.M.; Bogosic, B. y Crego, K.: *Razones para enseñar geometría en la Educación Básica*. Buenos Aires: Ed. Novedades Educativas. Argentina, 2000.
- Callejo, M. L.: Representaciones gráficas en la resolución de problemas geométricos. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 1994, 2, 91-101.
- Calvo, X. : El polydrón, un material que engancha. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 1996, 7, 19-30.
- Carrillo, J.: La formación del profesorado para el aprendizaje de las Matemáticas. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2000, 24, 79-91.
- Carrión, J.C.: Situaciones metodológicas para la enseñanza de la Geometría en la formación de maestros. *El guiniguada*, 1999-2000, 8-9, 407-414.
- Castro, E. (ed.): *Didáctica de las Matemáticas en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis, 2001.
- Clements, D.H. y Battista, M.T.: Geometry and Spatial Reasoning. En Grouws, D.A. (ed.): *Handbook of research on Mathematics teaching and learning*. Nueva York: MacMillan, 1992, 420-464.
- Corrales, J.; Sanduay, M.; Rodríguez, G.; Malik de Tchara, C. y Poblete, A.: ¿Es posible dotar de alguna dinámica a los conceptos de Geometría y a las propiedades de las figuras en el aula? *Números*, 2001, 48, 13-24.
- Chamorro, C.: Fenómenos de enseñanza de la medida en la escuela elemental. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 1998, 18, 95-112.
- Chamorro, C.: Ingeniería Didáctica para el aprendizaje de la longitud y la superficie. Esquemas invariantes operativos. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 1999, 19, 89- 103.
- Chamorro, M.C. (coord.): *Didáctica de las Matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson, 2003.
- Chamoso, J. y Rawson, W.: *Contando la Geometría*. Madrid: Nivola, 2004.
- De la Fuente, M.: Geometría y arte. En Barrantes, M. (ed.): *La Geometría y la Formación del profesorado en Primaria y Secundaria*. Cáceres: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura, 1998, 49-67.
- De la Torre, E.: Estrategias de enseñanza de la Geometría en Primaria y Secundaria. En Barrantes, M. (ed.): *La Geometría y la Formación del profesorado en Primaria y Secundaria*. Cáceres: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura, 1998, 23-38.
- De la Torre, E.: Implicación de la Educación Matemática en la formación de profesionales para una sociedad democrática. En Penalva, M.C., Torregrosa, G. y Valls, J. (coords.). *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales*. Alicante: Universidad de Alicante, 2002, 245-253.
- Dickson, L.: *El aprendizaje de las matemáticas*. Cerdanyola: Editorial Labor SA, 1991.
- Donovan, A. J. y Magnus, J.W.: *Matemáticas más fáciles con manualidades de papel*. Barcelona: Vanguardia pedagógica Distein, 1975.

- Ernest, P.: The knowledge, belief and attitudes of the mathematic teacher. A model. *Journal of Educational for Teaching*, 1989, 15(1), 13-33.
- Ernest, P.: Los valores y la imagen de las Matemáticas: una perspectiva filosófica. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2000, 2, 9-27.
- Fernández, S.: Investigando en Geometría. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 1994, 2, 57-63.
- Fernández, M. T.: Geometría para futuros profesores de primaria: experiencias con el tangram chino. *Suma*, 2003, 42, 13-22.
- Fiol, M.L. y De la Torre, E.: Geometría saber en acción. En Corral, C. y Zurbano, E. (coord.): *IV Simposio de Propuestas Metodológicas en la Formación Inicial de los Profesores del Área de Didáctica de las Matemáticas*. Oviedo: Dpto. de Estadística, Investigación Operativa y Dca. de la Matemática de la Universidad de Oviedo, 2000.
- Flores, P.: Conocimiento profesional en el área de Didáctica de las Matemáticas, en el primer curso de la formación de maestros de Educación Primaria. En Carrillo, J. y Climent, N. (eds.): *Modelos de formación de maestros en Matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva, 1999, 91-110.
- Flores, P.: Actividades de Educación Matemática para la formación de profesores. En Corral, C. y Zurbano, E. (coords.): *IV Simposio de Propuestas Metodológicas en la Formación Inicial de los Profesores del Área de Didáctica de las Matemáticas*. Oviedo: Ed. Dpto. de Estadística, Investigación Operativa y Dca. de la Matemática de la Universidad de Oviedo, 2000.
- Fortuny, J. M<sup>a</sup>.: Materiales y recursos. Geometría en Primaria y Secundaria. En Barrantes, M. (ed.): *La Geometría y la Formación del profesorado en Primaria y Secundaria*. Cáceres: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura, 1998, 39-48.
- Foss, D.H. y Kleinsasser, R.C.: Preservice elementary teacher views of pedagogical and mathematical content knowledge. *Teaching and teacher Education*, 1996, 4 (12), 429-442.
- Fouz, F.: Reflexiones en torno a la Didáctica de la Geometría. *Aula Innovación Educativa*, 1994, 29, 11-16.
- Giménez, J.: Problemas de corte de... papel y algunos sabios. *Cacumen*, 1984, 18, 33-37.
- Giménez, J.: Aprendiendo a enseñar Geometría en Primaria. Análisis de simulaciones sobre la intervención. *Revista electrónica de Investigación y Evaluación Educativa*, 1998, 3 (2-1), 1-19.
- Godino J. (dic.): *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*. Granada: Proyecto Edumat-Maestros, 2004.
- González, E.: Fotografía y matemáticas. *Aula de Innovación educativa*, 1997, 58, 15-19.
- Gracia, F.: Percepción e intuición espacial. *Uno: revista de Dca. de las matemáticas*, 1994, 2, 120-130.
- Gracia, F.: Representación del espacio en el plano. *Uno: revista de Dca. de las matemáticas*, 1995, 4, 29-40.
- Guillén, G.: Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las Ciencias*, 2000a, 18(1), 35-53.
- Guillén, G.: Las relaciones entre familias de prismas. Una experiencia con estudiantes de magisterio. *Enseñanza de las Ciencias*, 2000b, 19(3), 415-431.
- Gutiérrez, A. y Jaime, A.: Bibliografía sobre el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele. *Enseñanza de las Ciencias*, 1990, 1(7), 89-95.

- Gutiérrez, A. y Jaime, A.: El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los Giros. *Educación Matemática*, 1991, 3(2), 49-65.
- Gutiérrez, A.; Jaime, A.: Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En Giménez, J; Llinares, S.; Sánchez, M.V. (eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria*. Cuestiones desde la educación matemática (colección "Mathema" n° 8). Granada: Comares, 1996, 143-170.
- Gutiérrez, A.; Jaime, A.: Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria, *Tecné, Episteme y Didaxis*, 2012, 32, 55-7.
- Guzmán, M.: Experimentos de Geometría. *Números*, 1987, 16, 17-35.
- Hannoun, H.: *El niño conquista el medio*. Buenos Aires: Kapelusz, 1977.
- Hernández, J.; Palarea, M<sup>a</sup>. M.; y Socas, M. M.: Análisis de las concepciones, creencias y actitudes hacia las Matemáticas de los alumnos que comienzan la diplomatura de maestro. En Socas, M.M.; Camacho, M. y otros (eds). *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III*, La Laguna: Campus, 2001, 115-125.
- Hershkowitz, R.: Visualization in Geometry-two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 1989, 1(11), 61-76.
- Hershkowitz, R. y Vinner, S.: The role of critical and non-critical attributes in the concept-image of geometrical concepts. En Hershkowitz (ed.): *Proceedings of the Seventh International Conference for the PME*, 1983, 223-228.
- Houdement, C. Y Kuzniak, A.: Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géometrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, 1999, 40, 283-312.
- Jaime, A.: La enseñanza de las isometrías del plano desde la perspectiva del modelo de Van Hiele. *UNO*, 1994, 1, 85-94.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A.: Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: el Modelo de Van Hiele. En Llinares y Sánchez (eds): *Teoría y Práctica en Educación Matemática*. Sevilla: Alfar, 1990, 295-384.
- Ledesma, A.: Aventuras y desventuras matemáticas de un folio DIN-A en el instituto. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2010, 53, 45-70
- Llinares, S. y Sánchez, M<sup>a</sup>.V.: *Teoría y Práctica en Educación Matemática*. Sevilla: Alfar, 1990.
- Llinares, S.: Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas y procesos de formación. *UNO*, 1998, 17, 51-63.
- Llinares, S. y Sánchez, M<sup>a</sup>.V. (eds.): *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. Granada: Ed. Comares, 1996, 145-169.
- Lovell, K.: *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños*. Madrid: Ed. Morata, 1977.
- Maiher, H.: Sobre el trabajo con medios visuales en las clases de Geometría. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 1995, 4, 97-112.
- Malara, N.A. y Gherpelli, L.: El planteamiento de problemas y el razonamiento hipotético en Geometría. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 1994, 1, 57-74.



- Mandly, A.: Transformaciones isométricas. En Barrantes, M. (ed.): *La Geometría y la Formación del profesorado en Primaria y Secundaria*. Cáceres: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura, 1998, 119-130.
- Martínez, A y Rivaya, F. J.: *Una Metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría*. Madrid: Ed. Síntesis, 1989.
- Martínez, E. y López, J.A.: Puntos, rectas notables y propiedades de los triángulos. Una actividad interdisciplinar utilizando dobleces de papel. *Epsilon*, 2001, 50, 257-271.
- Medici, D.; Speranza, F.; Vighi, P.: Sobre la formación de los conceptos geométricos y sobre el léxico geométrico. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 1986, 4(1), 16-22,
- Morales, A.: Intuición y razonamiento en Geometría Elemental. Algunas situaciones prácticas. *El guiniguada*, 1999-2000, 8-9, 433-444.
- Morales, A. y Moreno, M<sup>a</sup>. D.: EL uso de la visualización en Matemáticas. Ejemplos prácticos. En Afonso, M<sup>a</sup>. C.; Camacho, M. y Socas, M.M. (eds.): *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática II*. La Laguna: Universidad de La Laguna, 2000, 11-50.
- Moreira, E.: Enseñar y aprender matemáticas con origami. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2010, 53, 25-37.
- Nardi, J.; Paternoster, F.; Facenda, A. M.; Fulgenzi, P.; Damiani, A.M. y Masi, F.: El uso de modelos dinámicos en la Didáctica de las Matemáticas. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2000, 24, 62-79.
- Murari, C y Pérez, G.: Caleidoscopios educativos: coloraciones múltiples. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2001, 27, 7-20.
- Pérez, A.: Las tecnologías audiovisuales: Hábitos perceptivos y enseñanza de la Geometría. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 1995, 4, 17-28.
- Pérez, R.: Construir la Geometría. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 1994, 2, 65-80.
- Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1970). *The child's conception of geometry*. Londres: Routledge and Kegan Paul, 1994.
- Potari, D. y Spiliotopoulou, V.: Children's approaches to the concept of volume. *Science Education*, 1996, 80 (3), 341-360.
- Rizo, C. y Campistrous, L.: Una didáctica para el tratamiento de las situaciones de aprendizaje de la geometría con un enfoque dinámico en la escuela. *UNO: revista de didáctica de las matemáticas*, 2008, 49, 73-85
- Rodríguez, P.: Experiencia de aula con alumnos de 11-12 años: Utilización del espejo para crear y aprender Geometría. *Epsilon*, 1996, 36, 417- 432.
- Royo, J. I.: Matemáticas y papiroflexia: una relación bidireccional. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2010, 53, 11-24.
- Sánchez, V., Llinares, S., García, M. y Escudero, I.: La formación de profesores de Primaria desde la Didáctica de las Matemáticas. *Números*, 2000, 43-44, 143-146.
- Santinelli, R. y Siñeriz, L.: Construcciones con regla y compás en el entorno Cabri. *Epsilon*, 2001, 50, 249-256.

- Santos, M.A.: La formación inicial: El currículum del nadador. *Cuadernos de Pedagogía*, 1993, 220, 50-54.
- Segovia, I. y Rico, L.: *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Madrid: Pirámide, 2011.
- Sierra, M.: El papel de la historia de la Matemática en la enseñanza. *Números*, 2000, 43-44, 93-96.
- Socas, M.M.: El papel de los materiales concretos con fines didácticos en la clase de Matemáticas. En Socas, M.M.; Camacho, M. y Morales, A. (eds.): *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, La Laguna: Universidad de La Laguna, 1999, 7-32.
- Socas, M.M.: Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria. Buenas prácticas. *Educatio Siglo XXI*, 2011, 29(2), 199-224.
- Thompson, A.G.: Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En Grouws, D.A. (ed.): *Handbook of research on Mathematics teaching and learning*. Nueva York: MacMillan, 1992, 127-146.
- Tirosh, D. y Graeber, A.: Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics*, 1989, 20, 79-96.
- Velázquez, F.: De la instrucción Matemática a la educación Matemática. *Números*, 2000, 43-44, 129-134.
- Villaroya, F.: El empleo de materiales en la enseñanza de la Geometría. *Rvta. Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 1994, 21, 95-104.
- Vinner, S.: The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics. En Tall, D. (ed.): *Advanced Mathematical Thinking*. Londres: Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 1991, 65-81.
- Vinner INNER, S. y Hershkowitz, R.: On concept formation in Geometry. *Zentralblatt für Didaktik der mathematic*, 1983, 1(83), 20-25.

## Webgrafía

### Sociedades

Sociedad Extremeña de Educación Matemática. Ventura Reyes Prósper

<http://ice.unex.es:16080/seem/>

FESPM (Federación española de sociedades de Profesores de Matemáticas)

<http://www.fespm.es/>

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

<http://www.seiem.es/>

### Revistas

Campo abierto

<http://dialnet.unirioja.es/servlet/revista?codigo=266>

Enseñanza de las Ciencias

<http://www.blues.uab.es/rev-ens-ciencias/>

Epsilon

<http://thales.cica.es/>

<http://thales.cica.es/epsilon/?q=node/20>

Números

<http://www.sinewton.org/numeros/>

Sigma

[http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43573/es/contenidos/informacion/dia6\\_sigma/es\\_sigma/sigma\\_aldizkaria.html](http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/sigma_aldizkaria.html)

Suma

<http://www.revistasuma.es/index.php>

Uno

<http://uno.grao.com/revistas/presentacion.asp?ID=12>

**Otras páginas.**

Jclíc

<http://clíc.xtec.cat/es/jclíc/>

Hot Potatoes

<https://hotpot.uvic.ca/>

La oca de las Ciencias, juego

<http://contenidos.educarex.es/mci/2005/31/fil/laoca.html>

Rayuela plataforma educativa extremeña

<https://rayuela.educarex.es/>

Rayuela contenidos educativos digitales para E. Infantil, Primaria, Especial y Secundaria.

<http://conteni2.educarex.es/>