

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
APPLIQUÉES

PAR
MAXIME SAMSON

VALENCE DE GRAPHES ET POLYOMINOS ARBRES

OCTOBRE 2020

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Alain Goupil, directeur de mémoire
Département de mathématiques, Université du Québec à Trois-Rivières

M. Alexandre Blondin Massé, directeur de mémoire
Département d'informatique, Université du Québec à Montréal

M. Fadel Toure
Département d'informatique, Université du Québec à Trois-Rivières

Remerciements

Je remercie sincèrement mes directeurs de recherche, M. Alain Goupil et M. Alexandre Blondin-Massé, pour les opportunités de travail qu'ils m'ont offertes, leur appui et leur grande patience au travers de mon parcours mouvementé.

Je remercie les professeurs de mathématiques de l'UQTR, de l'UQAM et de l'Université Laval de m'avoir permis de développer ma passion et mon savoir-faire des mathématiques.

Finalement, je remercie les départements de mathématiques de l'UQTR et de l'UQAM pour le soutien financier nécessaire à la poursuite de mes travaux de recherche durant les années d'étude de deuxième cycle et les stages d'été de baccalauréat.

Résumé

Dans ce mémoire, le sujet principal d'intérêt est l'énumération de diverses classes de polyominos arbres, des structures connexes acycliques formés de carrés. Ce sujet est divisé en deux catégories, les polyominos arbres inscrits et les polyominos arbres pleinement feuillus. Les problèmes étudiés dans ce document sont reliés à l'énumération de certaines sous-classes de ces polyominos arbres.

Les deux premiers chapitres du mémoire présentent les notions algébriques nécessaires à résoudre les problèmes d'énumération des polyominos arbres. Avec la théorie de Pólya, on obtient une équation polynomiale comptant les objets d'un ensemble qui sont invariants selon un groupe de symétrie agissant sur l'ensemble. Ce résultat permet de résoudre les résultats importants de la théorie des graphes du chapitre suivant. Entre autre, on y énumère les arbres étiquetés et non-étiquetés, et plus particulièrement les k -arbres comme objet de comparaison avec les polyominos arbres pour le cas $k = 4$.

Le chapitre 3 traite des polyominos arbres inscrits. On établit les séries génératrices des polyominos arbres de format $b \times h$ pour $b \in [5]$ et les séries génératrices bivariées correspondantes en ajoutant la statistique sur la taille des polyominos. Ces séries sont obtenues entre autre en étudiant les pré-polyominos arbres remontés, une variante des polyominos arbres.

Finalement, le chapitre 4 présente les polyominos arbres pleinement feuillus, les polyominos possédant le plus grand nombre de feuilles pour leur taille. On génère la fonction donnant le nombre maximal de feuilles pour un polyomino arbre de taille quelconque. On développe aussi les distributions du nombre d'ensembles connexes maximaux non-vides de cellules de même degré d'un polyomino arbre pleinement feuillu, nommés amas. De plus, le concept de *kiss* donne une relation entre les polyominos arbres et les polyominos arbres pleinement feuillus.

Abstract

In this memoir, the main topic of interest is the enumeration of a few classes of tree polyominoes, acyclic connected structures constituted of squares. This subject is split into two categories, namely inscribed and fully-leafed tree polyominoes. The problems tackled in this document are related to the enumeration of certain sub-classes of these tree polyominoes.

The first two chapters of this memoir present the necessary algebraic notions to solve the enumeration problems of tree polyominoes. With Pólya theory, we obtain a polynomial equation counting objects of a set which are invariant with regards to a symmetry group acting on the set. This result enables us to solve important results in graph theory seen in the next chapter. Among them, we count labeled and unlabeled trees, and most particularly k -trees as an object of comparison with tree polyominoes in the case of $k = 4$.

Chapter 3 is about inscribed tree polyominoes. We establish the generating series of tree polyominoes of $b \times h$ format for $b \in [5]$ and the bivariate generating series of the corresponding tree polyominoes by adding the statistic on the size of the polyominoes. These series are obtained, amongst other things, due to the study of a variant of tree polyominoes called lifted tree pre-polyominoes.

Finally, chapter 4 presents the fully-leafed tree polyominoes, polyominoes which possess the highest amount of leaves for its size. We generate the function giving the maximal number of leaves for a tree polyomino for any size. We also develop the distributions of the number of non-empty, maximal connected sets of cells of same degree in a fully-leafed tree polyomino, called clusters. Also, the concept of *kiss* gives a relation between tree-polyominoes and fully leafed tree polyominoes.

Table des matières

Présentation du jury	i
Remerciements	ii
Résumé	iii
Abstract	iv
1 Théorie de Pólya	4
1.1 Notations et algèbre préliminaires	5
1.2 Théorème de Pólya	18
2 Graphes et arbres	30
2.1 Définitions et résultats préliminaires	31
2.2 Arbres étiquetés et non-étiquetés	35
2.3 k -arbres et arbres moléculaires	43
3 Polyominos arbres inscrits	55
3.1 Définitions	55
3.2 Méthode simplifiée d'énumération de polyominos arbres	63
3.3 $b \in [4]$	72
3.4 $b \geq 5$	81
4 Polyominos arbres pleinement feuillus	91
4.1 Définitions	91
4.2 Relations entre cellules et amas	93
4.3 Énumération	94
4.4 Distributions	99
4.5 Coins et <i>kiss</i>	107
Bibliographie	121
A Annexes	125
A.1 Relations de récurrences $A_{b,h,c}^i$	125
A.1.1 $b=1$	125
A.1.2 $b=2$	125
A.1.3 $b=3$	126
A.1.4 $b=4$	127

A.1.5	b=5	129
A.1.6	Programme de calcul de relations de récurrence	141
A.2	Relations de récurrences $A_{b,h,n,c}^i$	146
A.2.1	b=1	146
A.2.2	b=2	146
A.2.3	b=3	147
A.2.4	b=4	148
A.2.5	Programme de calcul de relations de récurrence	151

Liste des tableaux

2.1	Valeurs initiales de a_n et r_n	42
2.2	Valeurs initiales de $p_{n,4,r}$, le nombre de 4-arbres plantés de taille n et de diamètre de racine r , où $n \in [20], r \in [10]$	52
2.3	Valeurs initiales de $p_{n,4,r}$, le nombre de 4-arbres plantés de taille n et de diamètre de racine r , où $n \in [20], r \in \{11, \dots, 19\}$	52
2.4	Valeurs initiales de $a_{n,4,\delta}$, le nombre de 4-arbres de taille n et de diamètre δ , pour $n \in [20], \delta \in \{0, \dots, 10\}$	53
2.5	Valeurs initiales de $a_{n,4,\delta}$, le nombre de 4-arbres de taille n et de diamètre δ , et valeurs initiales de l_n , le nombre d'alcanes à n atomes de carbone, pour $n \in [20], \delta \in \{11, \dots, 19\}$	54
3.1	Valeurs initiales de $a_{b,h}$ pour $b \in [4]$	72
3.2	Taille maximale d'un polyomino arbre de format $b \times h$ pour $b \in [4], h \in [10]$	82
3.3	Valeurs initiales de $l_1(r)$	88

Table des figures

1.1	Rotation du cube autour de la droite passant par le centre de faces opposées.	15
1.2	Rotation de 180 degrés autour de la droite passant par le centre d'arêtes opposées.	16
1.3	Rotation de 120 degrés autour de la droite passant par le centre de sommets opposés.	16
1.4	Rotation de 90 degrés du carré et permutation induite sur la couleur des arêtes.	18
2.1	Sept ponts de Königsberg	31
2.2	Automorphisme d'arbre $g = (124)(3)(5)(6)$	35
2.3	Comparaison d'endomorphismes et de vertébrés	37
2.4	Séparation d'arbre à sommet distingué et centre de taille 2	41
2.5	4-arbre d'ordre 9 et de diamètre 4. Diamètre de l'arbre en bleu.	43
2.6	4-arbre planté d'ordre 15 et de diamètre de racine 4. Diamètre de racine de l'arbre en bleu.	44
2.7	Construction de deux 4-arbres plantés de diamètre de racine 4 à partir d'un 4-arbre de diamètre 7.	46
2.8	Construction de trois 4-arbres plantés, dont deux de diamètre de racine 3, à partir d'un 4-arbre de diamètre 6.	47
2.9	Construction de trois 4-arbres plantés, dont deux de diamètre de racine 2, à partir d'un 4-arbre planté de diamètre de racine 3 dont le degré du sommet adjacent est 3.	47
2.10	Molécule d'alcane C_5H_{12}	51
2.11	Graphe moléculaire de l'alcane C_5H_{12} et de son squelette, un 4-arbre.	51
3.1	Polytopes	56
3.2	2-parallélotopes	57
3.3	Pré-polyformes	57
3.4	(Pré-)polyomino arbres inscrits	58
3.5	Coordonnées des cellules d'un polyomino arbre.	59
3.6	Pré-polyomino arbre de format 5×4 à deux composantes connexes.	60
3.7	Composantes des mots associés aux rangées d'un polyomino de format 7×4	61
3.8	Pré-polyomino arbres inscrits dans un rectangle 3×5	62
3.9	Pré-polyomino arbre et restriction	62

3.10	Cas distincts de c	66
3.11	Composante isolée et jonctions	68
3.12	Liaisons singulière et non-singulière	83
3.13	Cas spéciaux de $a \in A_{b,h-1,c}^i$ avec $r \geq 3$ composantes de c et $i \geq 2$	84
3.14	Composante connexe appartenant à plusieurs liaisons	84
3.15	Cas interdits de liaisons dans un polyomino arbre	87
3.16	Ensemble des liaisons singulières possibles sur 4 éléments.	88
3.17	Pré-polyominos arbres et leurs liaisons singulières	89
4.1	Cellules de degré 4 et 3, en jaune, et leurs cellules voisines en bleu.	93
4.2	Polyominos arbres de taille $n \equiv i \pmod{4}$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$	96
4.3	Arbre pièce	97
4.4	Construction récursive d'un polyomino arbre par juxtaposition d'un arbre pièce.	97
4.5	3-amas de taille quelconque avec les feuilles connexes	100
4.6	Polyominos arbres de distributions de degrés données	101
4.7	Polyomino arbre pleinement feuillu et croix	102
4.8	Cellules de degré 2 et 4.	102
4.9	Application de la transformation croix. Les cellules ajoutées par la transformation croix en jaune et celles du polyomino arbre initial en rouge.	103
4.10	Polyomino arbre pleinement feuillu de taille $4k+2$ et de distribution d'amas $(2k+2, n_4-1, 0, n_4)$	106
4.11	Distributions d'amas de polyominos arbres de taille $4k+3$	107
4.12	Coin	108
4.13	<i>Kiss</i>	108
4.14	Cellules de degré 2 centre et non-centre de coin (en rouge)	109
4.15	Cellules centres de coins de degré 2 et 4 adjacentes	110
4.16	Distributions d'amas permettant un centre de coin de degré 2	111
4.17	Application de la transformation croix sur un coin et un <i>kiss</i>	114
4.18	Degrés de cellules de <i>kiss</i>	114
4.19	Positions des 4-amas adjacents aux cellules d'un <i>kiss</i>	114
4.20	Structures de <i>kiss</i> d'un polyomino arbre issu de la transformation croix	116

Introduction

Les polyominos, des ensembles connexes de cellules carrées, sont des objets mathématiques intrigants. L'utilisation de ces objets dans la littérature mathématique date du début du 20^e siècle dans des jeux et des casse-têtes, mais l'étude rigoureuse de leurs propriétés commence à la fin des années 1950. Cette rigueur de recherche a été motivée entre autre par des applications des polyominos en physique statistique [1] et en chimie [2]. Aussi, les polyominos sont un sujet d'intérêt naturel pour les combinatoriciens. Les problèmes reliés aux polyominos concernent entre autre l'énumération de ces objets selon une statistique telle que leur taille [3] et les dimensions de leur rectangle d'inscription [4]. L'énumération peut aussi être réduite à une classe spécifique de polyominos. Ces classes inclut les polyominos convexes, les polyominos minimaux ou les polyominos composés de cellules autres que des carrés, comme des hexagones ou des triangles. L'énumération des polyominos peut aussi prendre en compte plusieurs classes en même temps [5].

L'un des problèmes ouverts de la combinatoire des polyominos est sans doute le plus notable. Ce problème consiste à énumérer les polyominos fixes à n cellules carrées à translation près. Des combinatoriciens et informaticiens tels que Jensen, Knuth et Golomb s'y sont intéressés [3, 6, 7] et plusieurs algorithmes d'énumération de polyominos fixes à n cellules ont été créés afin de résoudre le problème. Il n'existe aucune formule générale donnant le nombre de polyominos à n cellules. Toutefois, une formule de croissance asymptotique est donnée pour leur taux de croissance [8].

Une classe précise de ces polyominos est adaptée, par ses caractéristiques, aux méthodes algorithmiques d'énumération qui ont été développées par ces chercheurs. Il s'agit des polyominos arbres. La distinction entre ces derniers et les polyominos est l'acyclicité de chaque chemin de cellules des polyominos arbres. Il est simple de construire ou d'énumérer les polyominos arbres à partir des algorithmes déjà existants car les méthodes de vérification de l'acyclicité du polyomino construit sont simples. Par contre, cette vérification rend la tâche plus ardue. La contribution principale aux données d'énumération des polyominos arbres provient de Jensen [3]. Celui-ci a énuméré les polyominos arbres jusqu'à ceux de taille 44, alors que les polyominos sont comptés jusqu'à ceux de taille 56. Dans ce mémoire, le problème d'énumérer les polyominos arbres à n cellules est approché de deux façons différentes. Ces façons portent le focus sur deux classes de polyominos arbres, soit les polyominos arbres inscrits et les polyominos arbres pleinement feuillus.

Les problèmes relatifs aux polyominos arbres requièrent un bagage algébrique et combinatoire afin d'être bien énoncés et de pouvoir les résoudre. Ce bagage est présenté aux chapitres 1 et 2 avec la théorie de Pólya et la théorie des graphes, respectivement. Premièrement, la théorie de Pólya s'intéresse à l'énumération d'objets combinatoires distincts selon leurs symétries. La théorie a été introduite par Redfield [9] et ses résultats les plus importants ont été établis par Pólya [10]. Pour ce faire, il est nécessaire d'introduire les concepts de groupe de symétrie agissant sur un ensemble. Les éléments de l'ensemble, sur lequel agit le groupe de symétrie, sont permutés de façon telle que la structure de l'ensemble est préservée. Cet objet correspond donc à un objet combinatoire possédant des éléments, comme un graphe possédant des sommets ou un sac possédant des billes de quelques couleurs différentes. Les symétries agissant sur l'ensemble doivent préserver la structure de l'ensemble sur lequel elles agissent, et elles varient selon le type d'objet d'étudié. La théorie de Pólya s'avère posséder plusieurs applications dans le monde scientifique, particulièrement en chimie [2], mais aussi dans d'autres branches de la combinatoire comme la théorie des graphes. Ces applications sont celles qui nous intéressent dans le cadre de ce document. Afin de pouvoir prouver certains résultats importants sur les polyominos arbres inscrits et pleinement feuillus, il est nécessaire de connaître quelques propriétés des arbres vus au chapitre 2.

Le chapitre 2 traite de la théorie des graphes. L'origine communément acceptée de cette théorie provient de [11] et s'est grandement développée depuis. La théorie des graphes établit les divers résultats relatifs aux graphes, des objets représentés par un ensemble X et un ensemble de couples d'éléments de X . Les objets pertinents de cette théorie sont ici les arbres. Les arbres sont des graphes simples connexes acycliques et plusieurs propriétés des arbres sont partagées avec les polyominos arbres, notamment leur connexité et leur acyclicité. Cette théorie est importante pour deux raisons. D'abord, les polyominos ont une représentation en tant que graphe, nommée graphe induit. De plus, les graphes sont des objets appliqués à la théorie de Pólya. Ainsi, certaines classes de graphes sont énumérables à partir des outils de la théorie de Pólya. L'union de ces deux raisons permet de trouver des propriétés des polyominos à partir des théories présentées aux chapitres 1 et 2. Cela permet aussi de présenter certaines classes d'arbres, nommées k -arbres non-étiquetés, comme des analogues des polyominos arbres pour le cas $k = 4$. Ces 4-arbres possèdent plusieurs caractéristiques en commun avec les polyominos arbres, soit l'acyclicité, la connexité, le manque de distinction des éléments sous-jacents (sommets et cellules) et le degré maximal des éléments sous-jacents aux deux objets. Ces propriétés permettent d'élaborer des identités comparables dans le contexte de la théorie des graphes et dans celui des polyominos. Dans le cadre de ce chapitre, on établit d'abord les définitions pertinentes de la théorie des graphes. Ensuite, on présente les fonctions donnant le nombre d'arbres étiquetés et non-étiquetés à n sommets. Finalement, on étudie les k -arbres et on établit séries génératrices de ses termes en fonction de k . Ces séries sont des fonctions des séries génératrices des k -arbres dits plantés, des k -arbres avec un sommet distingué de degré 1.

Les polyominos arbres sont des sujets d'intérêt récents dans le monde de la combinatoire. Le contenu du chapitre 3 est concentré sur les polyominos arbres inscrits. L'énumération des polyominos inscrits fait ses débuts avec [4], et les classes de polyominos inscrits principalement étudiées sont les polyominos minimaux et les polyominos convexes. Les algorithmes d'énumération de polyominos prennent naturellement compte des dimensions des polyominos car celles-ci forment une borne minimale et une borne maximale sur la taille du polyomino, et vice-versa. C'est le cas entre autre pour les algorithmes de Conway et Jensen, ce dernier repris par Knuth [6, 12]. Dans ce mémoire, l'attention est portée sur les polyominos arbres inscrits comme objet d'étude afin de dénombrer les polyominos arbres de taille donnée. La méthode utilisée pour énumérer les polyominos arbres inscrits fait ressortir des structures similaires et non documentées jusqu'ici dans la littérature sur le sujet. Ces structures possèdent les caractéristiques d'un ensemble de polyominos arbres dont la rangée la plus haute qui possède une cellule est la même pour chaque polyomino arbre. Le nom de pré-polyomino arbre remonté leur est attribué, et l'énumération de ces objets est nécessaire afin de résoudre le problème principal du chapitre. La méthode d'énumération développée au chapitre 3 peut être généralisée afin d'énumérer les polyominos inscrits si on délaisse la vérification des conditions d'acyclicité des chemins de cellules formés. Dans le chapitre, les définitions pertinentes sont fondées dans la théorie des langages pour faciliter la formulation des constructions utilisées dans les problèmes d'énumération. On formule les séries génératrices ordinaires des polyominos arbres de format $b \times h$ pour les premières valeurs de largeur b et de taille n fixes à partir d'une méthode simple d'énumération. L'étude des cas $b \geq 5$ présente une complexité additionnelle dans l'énumération des polyominos arbres qui est ensuite implémentée dans la méthode utilisée pour ceux des cas $b \leq 4$.

Le chapitre 4 est sur les polyominos arbres pleinement feuillus. L'étude de ces objets débute avec [13] et est le sujet d'étude du mémoire qui est introduit le plus tard dans la littérature mathématique. Les polyominos arbres pleinement feuillus possèdent un nombre maximal de feuilles pour leur taille. Dans le chapitre, on revisite les définitions et résultats élémentaires établis dans [13] et on étend ces concepts. Entre autre, on établit la formule donnant le nombre maximal de feuilles d'un polyomino arbre pleinement feuillu selon sa taille et la structure générale des polyominos arbres pleinement feuillus. Cette structure varie selon le nombre de cellules et d'amas, des ensembles connexes maximaux de cellules de même degré. Finalement, on établit quelques relations entre les polyominos arbres et les polyominos arbres pleinement feuillus de taille $1 \pmod 4$ par le biais d'une relation nommée *transformation croix*. La première relation est une bijection entre les polyominos arbres de taille n et les polyominos arbres pleinement feuillus de taille $4n + 1$. La seconde relation est formée sur les liens d'adjacences par les sommets entre cellules, nommés *kiss*, entre ces mêmes familles de polyominos.

Chapitre 1

Théorie de Pólya

Depuis l'Antiquité, la géométrie est une part intégrale de l'étude des mathématiques. Les symétries des objets géométriques étudiés sont l'un des sujets d'intérêt de cette discipline. Les méthodes pour étudier ces symétries sont restées élémentaires pendant plusieurs siècles jusqu'au développement de l'algèbre abstraite et du concept de structure algébrique. Divers mathématiciens du début du 20^e siècle ont alors utilisé cette nouvelle théorie pour étudier les symétries inhérentes d'objets géométriques [14]. Redfield [9] a élaboré des résultats que Pólya [10] a raffiné et établi une théorie combinatoire spécialisée. Cette théorie sert à résoudre divers types de problèmes dont deux nous intéressent. D'abord, le dénombrement d'objets géométriques à partir de leurs symétries. Ensuite, le dénombrement de tout ensemble de structures algébriques sur lequel peut agir un groupe de symétrie. Cette théorie porte aujourd'hui le nom de théorie de Pólya.

Un exemple d'objet dont les symétries ont été étudiées par Pólya est un carré dont les arêtes sont coloriées avec deux couleurs. Dans certains cas, une rotation de ce carré ou une réflexion selon une droite résulte en une figure possédant la même configuration de couleurs pour les arêtes. Une question intéressante à se poser alors est : Est-ce que les symétries du carré peuvent être à la base d'une méthode systématique d'énumération des carrés dont les arêtes sont coloriées avec deux couleurs différentes ? En effet, on peut voir ces carrés différents selon les symétries du carré comme des classes d'équivalence de carrés sous l'action de l'ensemble de symétries du carré, permettant de passer d'un carré à un autre. Ce chapitre porte sur des objets divers et sur leurs symétries. Les symétries dans ces objets induisent des permutations sur certains éléments sous-jacents à ces objets. Nous traitons d'abord des symétries inhérentes aux objets étudiés, puis de la façon dont ces symétries se représentent de façon algébrique en permutations. Ici, chacun des concepts est rattaché à des notions d'algèbre bien définies. Entre autre, l'ensemble des

symétries du carré forme un groupe sous la composition. Cette structure de groupe de symétries est le fondement des résultats démontrés dans ce document. Afin de bien comprendre les fondements de la théorie de Pólya et son fonctionnement, il est nécessaire de comprendre quelques concepts préliminaires. Ces concepts sont notamment fondés en algèbre car cette théorie s'appuie sur les concepts de groupe et d'action de groupe. L'ensemble des concepts préliminaires et des résultats fondamentaux dans ce chapitre proviennent de [15, 16, 17], où [16] est une version traduite et retravaillée de [10].

1.1 Notations et algèbre préliminaires

La théorie de Pólya est fondée dans l'algèbre. Nous avons donc besoin des définitions de base de l'algèbre pour formuler les résultats de la théorie de Pólya dans ce chapitre. On note $[n]$ l'ensemble des nombres $\{1, 2, \dots, n\}$ et $|E| = n$ le cardinal de l'ensemble E . Soit un groupe G , H un sous-groupe de G , $g \in G$ et \circ la loi de composition interne de G . On nomme **classe latérale à gauche** de H dans G , notée gH , l'ensemble $\{g \circ h, h \in H\}$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, l'opération $g \circ h$ est notée simplement gh . On note G/H ou $G \bmod H$ l'**ensemble des classes latérales à gauche** de H dans G . Quelques définitions plus spécifiques à la théorie de Pólya sont importantes à mentionner afin de développer les résultats importants de la théorie. Les voici :

Définition 1.1.0.1. [17] Soit un groupe G et un ensemble E . On nomme **action de groupe** de G sur E une application $G \times E \rightarrow E$, notée $*$, qui respecte les propriétés suivantes :

1. Pour tout $x \in E$: $e * x = x$, où e est l'élément neutre de G
2. Pour tout $g, h \in G$, pour tout $x \in E$: $g * (h * x) = (gh) * x$

Ici aussi, quand il n'y a pas d'ambiguïté, le symbole d'action de groupe $*$ est omis.

Définition 1.1.0.2. [17] Soit un groupe G et un ensemble E . Pour tout $x \in E$, on nomme **stabilisateur** de x dans G , noté $stab_G$, l'ensemble $\{g \in G \mid gx = x\}$.

Définition 1.1.0.3. [17] Soit un groupe G agissant sur un ensemble E . Pour tout $x \in E$, l'*orbite* de x dans G , noté $\text{orb}_G(x)$, est l'ensemble $\{gx \mid g \in G\}$.

Définition 1.1.0.4. [17] Soit un groupe G agissant sur un ensemble E et $g \in G$. L'*ensemble fixe* de g , ou l'ensemble des éléments de E fixés par g , noté $\text{fix}_E(g)$, est l'ensemble $\{x \in E \mid gx = x\}$.

Les concepts de stabilisateur et d'orbite d'un groupe G vus aux définitions 1.1.0.2 et 1.1.0.3 en sont d'importance. Ils dévoilent des informations importantes sur G qui sont vues au théorème 1.1.0.2 et au lemme 1.1.0.1. Afin de présenter ces résultats, on désire montrer que $\text{stab}_G(x)$ forme une partition de G à l'aide des trois propositions suivantes, suivies du théorème de Lagrange.

Proposition 1.1.0.1. [17] Soit un groupe G agissant sur un ensemble E . Alors pour tout $x \in E$: $\text{stab}_G(x)$ forme un sous-groupe de G .

Démonstration. Deux conditions doivent être vérifiées afin de démontrer que $\text{stab}_G(x)$ forme un sous-groupe de G :

1. $e \in \text{stab}_G(x)$
2. Pour tout $g, h \in \text{stab}_G(x)$: $g^{-1}h \in \text{stab}_G(x)$

Par la propriété 1 de la définition 1.1.0.1 : pour tout $x \in E$: $e * x = x$, donc $e \in \text{stab}_G(x)$ et la condition 1 est vérifiée. Supposons maintenant $g, h \in \text{stab}_G(x)$. Par la définition 1.1.0.2, $gx = x = hx$, donc $gx = hx$. En appliquant g^{-1} à chaque terme on obtient :

$$\begin{aligned} g^{-1}(gx) &= g^{-1}(hx) \\ (g^{-1}g)x &= (g^{-1}h)x \text{ (Définition 4.2)} \\ x &= g^{-1}hx, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $g^{-1}h$ stabilise x . Ainsi, $g^{-1}h \in \text{stab}_G(x)$ et la condition 2 est vérifiée. On en conclut que $\text{stab}_G(x)$ est bien un sous-groupe de G .

□

Proposition 1.1.0.2. [17] Soit G un groupe et G/H l'ensemble des classes latérales à gauche de G mod h . Alors G/H forme une partition de G .

Démonstration. Pour démontrer le résultat, il faut vérifier que $\bigcup_{g \in G} gH = G$ et $\bigcap_{g \in G} gH = \emptyset$.

Démontrons le premier énoncé. Par fermeture de G , on a que pour tout $g \in G, h \in H$:

$$gh \in G \text{ alors } \bigcup_{g \in G} gH \subseteq G$$

Soit e le neutre de G . Par propriété de sous-groupe, on a $e \in H$ et :

$$G = \{g \in G\} = \bigcup_{g \in G} \{g\} = \bigcup_{g \in G} \{ge\} \subseteq \bigcup_{g \in G} \{gh \mid h \in H\} = \bigcup_{g \in G} gH$$

Comme $\bigcup_{g \in G} gH \subseteq G$ et $G \subseteq \bigcup_{g \in G} gH$, on en déduit que $\bigcup_{g \in G} gH = G$. Démontrons le second énoncé. Si $g_1H \cap g_2H = \emptyset$, le résultat est démontré. Sinon, soit $x \in g_1H \cap g_2H$. Il existe $h_1, h_2 \in H$ tels que $x = g_1h_1 = g_2h_2$. Alors :

$$g_1 = g_1h_1h_1^{-1} = g_2h_2h_1^{-1}$$

Ainsi :

$$g_1H = \{g_1h_1 \mid h_1 \in H\} = \{g_2h_2h_1^{-1}h_1 \mid h_1, h_2 \in H\} = \{g_2h_2 \mid h_2 \in H\} = g_2H$$

En conclusion, toutes les classes latérales à gauche distinctes de G sont disjointes et le

résultat suit. □

Proposition 1.1.0.3. [17] Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G . Alors :

$$\text{Pour tout } g \in G : |gH| = |H|$$

Démonstration. Soit la fonction $f : H \rightarrow gH$ définie par $f(h) = gh$. Démontrons que f est injective. Soit $h, h' \in H$ tels que $f(h) = f(h')$. Alors :

$$\begin{aligned} gh &= gh' \\ g^{-1}gh &= g^{-1}gh' \\ \text{alors } h &= h' \end{aligned}$$

Ainsi, f est injective. Il faut maintenant démontrer que f est surjective, soit :

$$\text{Pour tout } y \in gH, \text{ il existe } h \in H \text{ tel que } y = f(h)$$

Soit $y \in gH$. On cherche h tel que $y = f(h) = gh$. Par définition de gH , il existe h tel que $y = f(h) = gh$. Ainsi, f est surjective. Comme f est aussi injective, elle est bijective et le résultat suit. □

Théorème 1.1.0.1 (de Lagrange). [17] Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G . Alors le nombre de classes latérales à gauche de H dans G est $\frac{|G|}{|H|}$.

Démonstration. Soit $|G/H| = r$. Alors G/H s'écrit de la façon suivante :

$$G/H = \{g_i H, i \in \{1, \dots, r\}\}$$

Par la proposition 1.1.0.2, G/H forme une partition de G .

$$G = \bigcup_{i=1}^r g_i H, i \neq j \text{ et } g_i H \cap g_j H = \emptyset$$

On peut écrire l'ordre de G comme la somme des cardinalités des classes latérales à gauche de H dans G .

$$|G| = \sum_{i=1}^r |g_i H|$$

Par la proposition 1.1.0.3, nous avons que $|g_i H| = |H|$ pour tout $i \in [r]$, alors l'équation précédente devient :

$$\begin{aligned} |G| &= \sum_{i=1}^r |g_i H| = r|H| \\ r &= \frac{|G|}{|H|} \end{aligned}$$

□

Les résultats précédents démontrent qu'on peut exprimer $|G|$ comme un multiple de $|H|$ pour H donné. Notamment, comme $stab_G(x)$ est un sous-groupe de G , alors $|G| = r|stab_G(x)|$ où $r \in \mathbb{N}$. Le théorème 1.1.0.2 démontre que ce r est un nombre représentable de quelques façons qui peuvent être utilisées pour obtenir le lemme 1.1.0.1. Le lemme de Burnside est le résultat fondamental pour énumérer des objets combinatoires à partir de leurs symétries. Il est aussi celui à partir duquel d'autres formules plus importantes pour l'énumération d'objets combinatoires peuvent être développées.

Théorème 1.1.0.2 (d'orbites-stabilisateurs). [17] *Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble E . Alors pour tout $x \in E$:*

$$|G| = |orb_G(x)| |stab_G(x)|$$

Démonstration. Par le théorème 2, $stab_G(x)$ est un sous-groupe de G . Ainsi, on peut déduire du théorème 1.1.0.1 que $\frac{|G|}{|stab_G(x)|}$ est le nombre de classes à gauche distinctes de $stab_G(x)$. Démontrer l'existence d'une bijection entre $orb_G(x)$ et l'ensemble des classes à gauche de $G/stab_G(x)$ prouve le théorème.

Soit $x \in E$ et soit la fonction $f_x : orb_G(x) \rightarrow G/stab_G(x)$ définie par : $f_x(g) = g stab_G(x)$ pour tout $g \in orb_G(x)$. Il faut d'abord démontrer que cette fonction est bien définie, c'est à dire que $gx = hx$ implique $f_x(g) = f_x(h)$.

$$\begin{aligned} gx &= hx \\ \text{alors } g^{-1}gx &= g^{-1}hx \\ \text{alors } x &= g^{-1}hx \\ \text{alors } g^{-1}h &\in stab_G(x) \end{aligned} \tag{1}$$

Comme $G/stab_G(x)$ forme une partition de G , alors :

$$\begin{aligned} g^{-1}h stab_G(x) &= stab_G(x) \quad (\text{Par (1)}). \\ \text{alors } gg^{-1}h stab_G(x) &= g stab_G(x) \\ \text{alors } h stab_G(x) &= g stab_G(x) \\ \text{alors } f_x(h) &= f_x(g) \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f_x est bien définie. Il faut maintenant démontrer l'injectivité de f_x .

$$\begin{aligned}
f_x(g) &= f_x(h) \\
\text{alors } g\text{stab}_G(x) &= h\text{stab}_G(x) \\
\text{alors } g^{-1}g\text{stab}_G(x) &= g^{-1}h\text{stab}_G(x) \\
\text{alors } \text{stab}_G(x) &= g^{-1}h\text{stab}_G(x) \tag{2}
\end{aligned}$$

On déduit de (2) que $g^{-1}h \in \text{stab}_G(x)$ car $e \in \text{stab}_G(x)$ pour tout $x \in E$. Par définition de $\text{stab}_G(x)$, on a :

$$\begin{aligned}
g^{-1}hx &= x \\
\text{alors } gg^{-1}hx &= gx \\
\text{alors } hx &= gx
\end{aligned}$$

Ainsi, on a démontré que f_x est injective. Démontrons maintenant que f_x est surjective, soit :

$$\text{Pour tout } z \in G/\text{stab}_G(x), \text{ il existe } y \in \text{orb}_G(x) : f_x(y) = z$$

Comme $z \in G/\text{stab}_G(x)$, alors z est de la forme gg' où $g' \in \text{stab}_G(x)$. Comme on cherche $y \in \text{orb}_G(x)$, alors y doit être de la forme g^*x où $g^* \in G$. En prenant $g' = g^*$, la surjectivité de f_x est vérifiée. Comme f_x est injective et surjective, elle est bijective et le résultat suit.

□

Lemme 1.1.0.1 (de Burnside). [17] Soit G un groupe fini agissant sur E et $\text{orb}_G(E)$ l'ensemble des orbites de G sur un ensemble E défini par :

$$\text{orb}_G(E) = \{\text{orb}_G(x) \mid x \in E\}$$

Alors :

$$|orb_G(E)| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |fix_E(g)|$$

Démonstration. Notons n le nombre de couples $(g, x), g \in G, x \in E$ tels que $gx = x$, et comptons ce nombre de deux façons. Premièrement, $|fix_E(g)|$ est le nombre d'éléments dans E fixés par g . En sommant pour chaque $g \in G$, chacun des n couples est compté une fois. Ainsi :

$$\sum_{g \in G} |fix_E(g)| = n \tag{3}$$

Deuxièmement, $|stab_G(x)|$ est le nombre de permutations dans G laissant un élément $x \in E$ fixe. En sommant pour chaque $x \in E$, chacun des n couples est aussi compté une fois. Ainsi :

$$\sum_{x \in E} |stab_G(x)| = n \tag{4}$$

Si deux éléments $x, y \in E$ sont dans la même orbite, alors $orb_G(x) = orb_G(y)$ et, par le théorème 1.1.0.2, $|stab_G(x)| = |stab_G(y)|$. Ainsi, si on prend $x \in E$ et qu'on somme $|stab_G(x)|$ sur l'ensemble des éléments de son orbite, le théorème d'orbites-stabilisateurs nous donne :

$$\sum_{y \in orb_G(x)} |stab_G(y)| = |orb_G(x)| |stab_G(x)| = |G|$$

Prenons l'ensemble des orbites $orb_G(E)$. En sommant maintenant pour chaque élément de G , et ce pour chaque orbite $z \in orb_G(E)$, on obtient :

$$\sum_{z \in \text{orb}_G(E)} \sum_{y \in \text{orb}_G(x)} |\text{stab}_G(y)| = \sum_{z \in \text{orb}_G(E)} |G| = |G| |\text{orb}_G(E)| \quad (5)$$

Les sommes du membre de gauche de l'équation (5) correspondent à une somme sur l'ensemble des éléments z de E . On peut réécrire l'équation et, en tenant compte des équations (3) et (4), on obtient :

$$\begin{aligned} |G| |\text{orb}_G(E)| &= \sum_{z \in \text{orb}_G(E)} \sum_{y \in \text{orb}_G(x)} |\text{stab}_G(y)| = \sum_{y \in E} |\text{stab}_G(y)| = n = \sum_{g \in G} |\text{fix}_E(g)| \\ |G| |\text{orb}_G(E)| &= \sum_{g \in G} |\text{fix}_E(g)| \\ |\text{orb}_G(E)| &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{fix}_E(g)| \end{aligned}$$

qui est le résultat désiré. □

L'interprétation du lemme de Burnside qui en suit est que le nombre d'orbites de l'action de G sur E est la moyenne du nombre d'éléments fixés de E par l'action de G . Ce lemme est un résultat important de la théorie de Pólya. En effet, l'énumération d'orbites peut être une tâche fastidieuse notamment lorsque vient le temps de comparer des éléments et vérifier s'ils font partie d'une même orbite. Cette vérification se fait en temps polynomial non-linéaire, donc plus il y a d'éléments, plus la vérification est longue. Une application du lemme de Burnside concerne notamment l'énumération de symétries d'objets géométriques.

Définition 1.1.0.5. [16] Soit un objet géométrique a possédant des éléments sous-jacents $a_i, i \in [m]$. Une **symétrie** de a est une application bijective de a ou un automorphisme de a . Un **groupe de symétrie** de a est un groupe d'automorphismes de a sous la composition interne.

Voyons quelques exemples d'application du lemme de Burnside à des problèmes de

dénombrement.

Exemple 1.1.0.1. Soit E l'ensemble des arêtes coloriées rouges ou bleues d'un cube. Un cube possède 12 arêtes et il existe deux façons de colorier chaque arête d'un cube, donc le nombre de coloriage des arêtes d'un cube est $|E| = 2^{12}$. Le groupe des symétries G de E correspond au groupe des isométries du cube et est isomorphe au groupe S_4 . Ce groupe possède en tout 24 symétries différentes d'un cube, soit :

1. L'identité, notée R_0 .
2. Pour chacune des trois paires de faces opposées, une rotation de 90, 180 et 270 degrés autour de la droite passant par le centre des faces opposées, notées $R_{i,90j}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, où i est l'indice d'une paire de faces opposées du cube. Les figures 1.1a et 1.1b illustrent une telle rotation.
3. Pour chacune des six paires d'arêtes opposées selon le centre du cube, une rotation de 180 degrés autour de la droite passant par le centre de ces arêtes, notée A_i , $i \in \{1, \dots, 6\}$, où i est l'indice d'une paire d'arêtes opposées du cube. La figure 1.2 illustre une telle rotation.
4. Pour chacune des quatre paires de sommets opposés selon le centre du cube, une rotation de 120 et 240 degrés autour de la droite passant par ces sommets, notée $S_{i,120j}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $j \in \{1, 2\}$, où i est l'indice d'une paire de sommets opposés du cube. La figure 1.3 illustre une telle rotation.

Nous allons étudier l'action des symétries $g \in G$ comme permutations de l'ensemble E des arêtes coloriées d'un cube afin de déterminer $|\text{fix}_E(g)|$ ou le nombre de cubes invariants en lui appliquant g pour chaque symétrie $g \in G$.

1. R_0 fixe les 2^{12} coloriages de E .
2. Les trois rotations $R_{i,180}$ fixent 2^6 coloriages de E . En effet, soit le cube gauche de la figure 1.1a, dont les arêtes sont étiquetées a_j , $j \in [12]$. On remarque que la rotation est une involution sur six paires d'arêtes du cube, soit les paires $\{a_1, a_5\}$, $\{a_2, a_8\}$,

$\{a_3, a_7\}$, $\{a_4, a_6\}$, $\{a_9, a_{10}\}$ et $\{a_{11}, a_{12}\}$. La rotation fixe le coloriage du cube si chacune de ces paires d'arêtes a la même couleur. Ainsi, il y a 2^6 coloriages d'ensembles d'arêtes fixés par $F_{i,180}$ car il existe deux choix de couleurs pour chaque paire d'arêtes.

Les six rotations $R_{i,90}$ et $R_{i,270}$ fixent chacune 2^3 coloriages des arêtes du cube. Prenons le cube gauche de la figure 1.1a, et appliquons-lui $R_{i,90}$ avec i quelconque. On remarque que la rotation forme trois cycles de taille 4 sur l'ensemble des arêtes du cube, soit les permutations $(a_1 a_9 a_5 a_{10})$, $(a_2 a_4 a_8 a_6)$ et $(a_3 a_{12} a_7 a_{11})$. La rotation fixe le coloriage du cube si chacune des arêtes d'un cycle a la même couleur. Ainsi, il y a 2^3 coloriages fixés par $R_{i,90}$ car il existe deux choix de couleurs pour chacun des ensembles de quatre arêtes. La rotation $F_{i,270}$ est l'inverse de $R_{i,90}$ et forme donc les mêmes permutations cycliques sur les arêtes, donc le même nombre de coloriages de cube fixés que $R_{i,90}$.

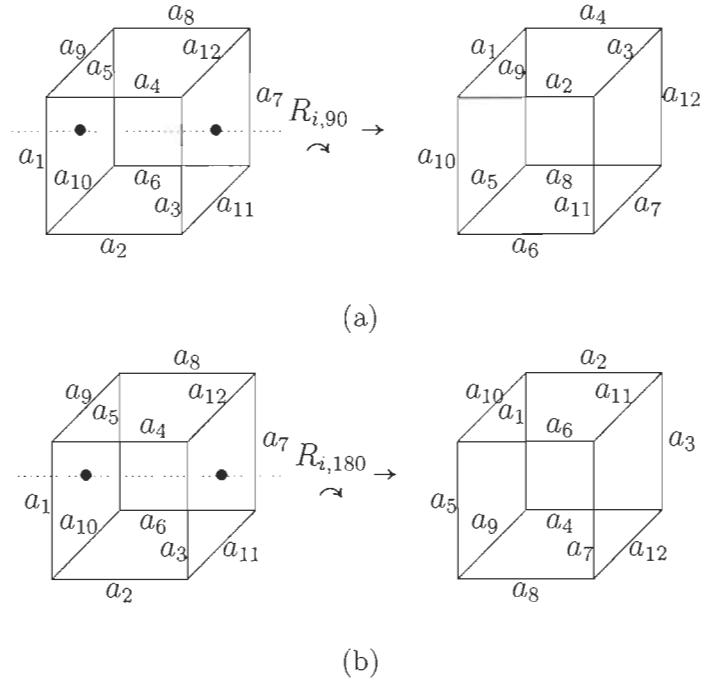


FIGURE 1.1 – Rotation du cube autour de la droite passant par le centre de faces opposées.

3. Les six rotations A_i fixent 2^7 coloriages des arêtes du cube. Prenons le cube de gauche de la figure 1.2, et appliquons-lui A_i avec i quelconque. La rotation laisse invariantes les arêtes a_9 et a_{11} , et forme une involution sur cinq couples d'arêtes, soit les couples $\{a_1, a_8\}$,

$\{a_2, a_{11}\}, \{a_3, a_6\}, \{a_4, a_5\}$ et $\{a_{10}, a_{12}\}$. La rotation fixe le coloriage du cube si chacune des arêtes de chaque permutation cyclique a la même couleur. Ainsi, il y a 2^7 coloriages fixés par A_i car il existe deux choix de couleurs pour chacune des arêtes a_9 et a_{11} et chacun des cinq couples d'arêtes précédents.

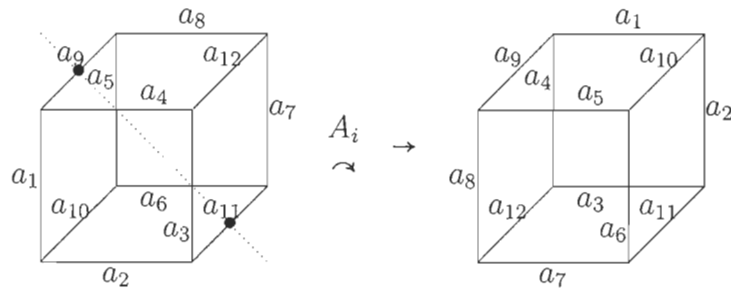


FIGURE 1.2 – Rotation de 180 degrés autour de la droite passant par le centre d'arêtes opposées.

4. Les huit rotations $S_{i,120}$ et $S_{i,240}$ fixent chacun des 2^4 coloriages du cube. Prenons le cube gauche de la figure 1.3, et appliquons-lui $S_{i,120}$ avec i quelconque. La rotation forme quatre cycles sur l'ensemble des arêtes, soit les ensembles $\{a_5, a_9, a_8\}$, $\{a_2, a_3, a_{11}\}$, $\{a_1, a_{12}, a_6\}$ et $\{a_4, a_7, a_{10}\}$. La rotation fixe le cube colorié si chacune des arêtes de chaque permutation cyclique a la même couleur. Ainsi, il y a 2^4 coloriages fixés par $S_{i,120}$. Les rotations $S_{i,240}$ sont les rotations inverses de $S_{i,120}$ et ont donc les mêmes ensembles d'arêtes permutées.

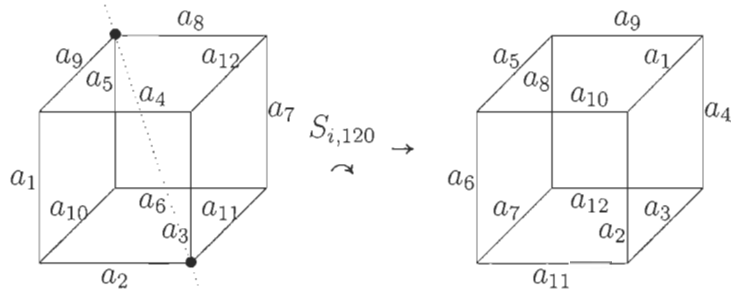


FIGURE 1.3 – Rotation de 120 degrés autour de la droite passant par le centre de sommets opposés.

En appliquant le lemme de Burnside, on trouve que le nombre d'orbites du groupe des symétries de E est :

$$\begin{aligned}
|orb_G(E)| &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |fix_E(g)| = \frac{1}{24} (2^{12} + 3(2^6) + 6(2^3 + 2^7) + 8(2^4)) \\
&= 218
\end{aligned} \tag{6}$$

soit 218 cubes coloriés à symétrie près.

Exemple 1.1.0.2. Soit E l'ensemble des coloriages de colliers à cinq perles, où chaque perle est de couleur rouge, bleue ou jaune. Il existe trois façons de colorier chaque perle d'un collier, donc le nombre de ces colliers coloriés est $|E| = 3^5$. Pour cet exemple, supposons que nous ne pouvons que faire tourner des colliers autour de leur centre afin d'obtenir un collier, donc que les réflexions des colliers autour de ses axes de symétries sont interdites. Le groupe de permutations de E est alors le groupe des permutations cycliques $C_5 = \{R_{\frac{360i}{5}}, i \in \{0, \dots, 4\}\}$ muni de la composition, où $|C_5| = 5$. L'identité fixe chacun des 3^5 coloriages de perles de E , donc $|fix_E(R_0)| = 3^5$. Pour chaque autre rotation, les seuls colliers fixés sont ceux dont chaque perle est de la même couleur. Ainsi, $|fix_E(R_{\frac{360i}{5}})| = 3, i \in \{1, \dots, 4\}$. En appliquant le lemme de Burnside, on obtient que le nombre d'orbites de l'action de C_5 sur les coloriages de perles de X est :

$$\begin{aligned}
|orb_{C_5}(E)| &= \frac{1}{|C_5|} \sum_{g \in C_5} |fix_E(g)| = \frac{1}{|C_5|} (3^5 + 3 + 3 + 3 + 3) \\
&= 43
\end{aligned} \tag{7}$$

ce qui correspond à 43 colliers différents à 5 perles et 3 couleurs à rotation près.

Dans les exemples 1.1.0.1 et 1.1.0.2, il est important de noter la distribution des équations obtenues en calculant $|orb_G(E)|$ avant simplification, soit les équations (6) et (7), et du rôle des permutations cycliques effectuées sur les ensembles d'arêtes ou de perles dans l'obtention de ces équations. Les éléments sur lesquels sont portées les symétries et leur image sont caractérisés par le résultat des permutations de ces éléments. Ceci est particulièrement utile pour visualiser les théorèmes simple et généralisé de Pólya qui forment les résultats principaux de la théorie de Pólya.

1.2 Théorème de Pólya

Pour mieux représenter le théorème 1.2.0.1, rappelons-nous les coloriage d'arêtes du carré décrits dans l'introduction. Avec un certain coloriage des arêtes d'un carré, il est possible d'obtenir un coloriage différent lorsqu'on applique une rotation, une réflexion ou une quelconque symétrie au carré. Voyons l'exemple d'une rotation de 90 degrés d'un carré aux arêtes coloriées en bleu et rouge (noté b et r respectivement pour plus de clarté) autour de son centre :

Exemple 1.2.0.1. *La rotation de 90 degrés autour du centre d'un carré donne, dans la figure 1.4, un carré différent. Autrement dit, la rotation fait varier la couleur des arêtes du carré. Si on applique une rotation de 180 degrés sur le carré dont les arêtes sont coloriées, on obtient un carré dont la couleur des arêtes est permutée. En tout, il existe 8 symétries du carré :*

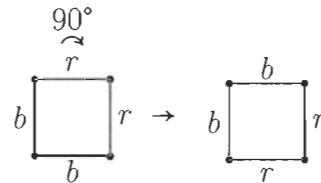


FIGURE 1.4 – Rotation de 90 degrés du carré et permutation induite sur la couleur des arêtes.

1. L'identité, notée R_0 .
2. Les trois rotations de 90, 180 et 270 degrés autour du centre du carré, notées R_{90} , R_{180} et R_{270} .
3. Les deux réflexions par rapport aux axes horizontal et vertical passant par le centre de deux arêtes opposées, notées respectivement H et V .
4. Deux réflexions dont une est autour des axes diagonaux passant respectivement par les sommets nord-ouest et sud-est du carré, notée D_1 , et une est autour des axes diagonaux passant par les sommets nord-est et sud-ouest du carré, notée D_2 .

Dans l'ensemble des coloriage d'arêtes de la figure 1.4, le carré contient 4 arêtes coloriées avec 2 choix de couleur pour chaque arête. Nous pouvons ainsi établir une fonction :

$$f : \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \rightarrow \{c_1, c_2\}$$

de l'ensemble des arêtes x du carré à un ensemble des couleurs c . On définit formellement le concept à la définition 1.2.0.1.

Définition 1.2.0.1. *Soit un ensemble E d'éléments x et soit C un ensemble de $m \geq 1$ couleurs c . Une **fonction de coloriage** est une fonction :*

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow C \\ x &\mapsto c(x) \end{aligned}$$

Dans l'exemple 1.1.0.1, il est aisé de voir qu'un nombre différent de couleurs d'arêtes implique un nombre différent de carrés distincts que celui donné dans l'exemple. Pour un tel type de problème, il est utile de créer un outil permettant d'encapsuler l'information du nombre de carrés distincts ayant n'importe quel nombre de couleurs d'arêtes différentes. Plus généralement, cet outil encapsule les termes d'une suite $(a_n, n \in \mathbb{Z})$. Les concepts vus aux définitions suivantes servent à contenir cette suite sous diverses formes et possédans diverses informations relatives aux termes de la suite. La définition 1.2.0.2 est réutilisée à plusieurs reprises au travers du mémoire.

Définition 1.2.0.2. [17] *Soit une suite $A = (a_n \in \mathbb{Z}, n \geq 0)$. La **série génératrice ordinaire** de la suite A est la série formelle :*

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

Soit une matrice k -dimensionnelle $A_k = (a_{n_1, \dots, n_k})$ où $a_{n_1, \dots, n_k} \in \mathbb{Z}$ pour tout $i \in$

$[k], n_i \geq 0$). La *série génératrice multivariée ordinaire* est la série formelle :

$$A(x_1, \dots, x_k) = \sum_{n_1, \dots, n_k \geq 0} a_{n_1, \dots, n_k} x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$$

Définition 1.2.0.3. [17] Soit un groupe fini G de symétries d'un ensemble E où $|E| = m$. Notons $(i^{p_i}, i \in [m])$ le type cyclique de $g \in G$. Le **polynôme indicateur de cycles** de G est le polynôme :

$$Z_G(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{p_1} \dots x_m^{p_m}$$

Le polynôme indicateur de cycles d'un groupe de symétries de E contient l'information du type cyclique de chaque permutation de G ainsi que le nombre de permutations de chaque type cyclique. Ce polynôme est spécifique à E et au groupe de symétries agissant sur E . Voyons quelques exemples de polynômes indicateurs de cycle.

Lemme 1.2.0.1. [22] Soit $G = S_n$ le groupe symétrique des permutations d'un ensemble à n éléments. Alors son polynôme indicateur de cycles est :

$$Z_{S_n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \\ \sum_i i k_i = n}} \frac{1}{\prod_{j=1}^n k_j! j^{k_j}} \prod_{j=1}^n x_j^{k_j}$$

Démonstration. D'abord, $|S_n| = n!$, d'où le terme correspondant dans le polynôme. Soit une permutation g de S_n de type cyclique $(p_i, i \in \{1, \dots, n\})$. Le nombre d'éléments faisant partie des p_i permutations cycliques de taille i est $i p_i$. Ainsi, les valeurs de p_i sont telles que $\sum_{i=1}^n i p_i = n$. Toutes les permutations possibles de n éléments sont dans S_n , donc le problème revient à trouver le nombre de permutations possibles de type cyclique $(p_i, i \in \{1, \dots, n\})$.

Soit E l'ensemble sur lequel S_n agit. Prenons, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, $i p_i$ éléments

de E faisant partie des p_i permutations cycliques de taille i . On prend d'abord p_1 éléments parmi les n éléments de E , puis on prend $2p_2$ éléments parmi ceux qui restent, et ainsi de suite. Le nombre de façons pour ce faire est :

$$\binom{n}{p_1} \binom{n-p_1}{2p_2} \binom{n-p_1-2p_2}{3p_3} \dots \binom{n-\sum_{i=1}^{n-1} ip_i}{np_n} = \binom{n}{p_1, 2p_2, \dots, np_n} = \frac{n!}{p_1!(2p_2)! \dots (np_n)!}$$

Pour chaque sous-ensemble de ip_i éléments, on prend i éléments servant à la première permutation cyclique de taille i parmi les ip_i éléments, puis i autres éléments pour la seconde permutation cyclique parmi ceux restants, et ainsi de suite. Le nombre de façon pour ce faire est :

$$\binom{ip_i}{i} \binom{ip_i-i}{i} \dots \binom{i}{i} = \binom{ip_i}{i, i, \dots, i} = \frac{(ip_i)!}{(i!)^{p_i}}$$

Dans chacune des p_i permutations cycliques dont les éléments sont choisis, il existe $(i-1)!$ permutations cycliques différentes. Le nombre de façons différentes de construire l'ensemble des permutations cycliques dont les éléments sont choisis est donc :

$$\prod_{i=1}^n (i-1)!^{p_i}$$

En intervertissant l'ordre de choix des p_i permutations cycliques de taille i , on obtient la même permutation. Ainsi, on doit diviser le nombre de permutations par $\prod_{i=1}^n p_i!$.

Le nombre de permutations dont le type cyclique est $(p_i, i \in \{1, \dots, n\})$ est donné par le produit de chacun des termes précédents, et en divisant par $\prod_{i=1}^n p_i!$. On obtient lors :

$$\frac{n!}{p_1!(2p_2)! \dots (np_n)!} \prod_{i=1}^n \frac{(ip_i)!}{(i!)^{p_i}} \prod_{i=1}^n (i-1)!^{p_i} \frac{1}{\prod_{i=1}^n p_i!} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^n i^{p_i} p_i!}$$

Il suffit de multiplier ce terme par $\prod_{i=1}^n x_i^{p_i}$ pour obtenir le monôme correspondant dans le polynôme indicateur de cycles, sommer sur l'ensemble des types cycliques $(i^{p_i}, i \in \{1, \dots, n\})$ et diviser par $n!$ et le résultat suit. □

Exemple 1.2.0.2.

1. $Z_{S_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2)$
2. $Z_{S_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6} (x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3)$
3. $Z_{S_4}(x_1, \dots, x_4) = \frac{1}{24} (x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 3x_2^2 + 8x_1x_3 + 6x_4)$

Exemple 1.2.0.3. Soit G le groupe des symétries du carré agissant sur l'ensemble E des arêtes coloriées de deux couleurs différentes du carré. Le groupe G contient huit symétries, notées précédemment $R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}, H, V, D_1$ et D_2 , donc $|G| = 8$. Ici, les symétries agissent comme permutations sur les arêtes coloriées. L'identité fixe chacune des quatre arêtes, donc le monôme représentant l'identité dans le polynôme est x_1^4 . Les rotations R_{90} et R_{270} sont des permutations cycliques de taille quatre, donc leur monôme correspondant est x_4 . La rotation R_{180} forme deux permutations cycliques de taille deux sur les arêtes, ou deux involutions, donc son monôme correspondant est x_2^2 . Dans les symétries H et V , deux arêtes sont fixées alors que les deux autres forment une involution, donc leur monôme correspondant est $x_1^2x_2$. Finalement, les symétries D_1 et D_2 forment deux involutions sans points fixes sur les arêtes, donc leur monôme correspondant est x_2^2 . En sommant chaque monôme, on détermine que le polynôme indicateur de cycles de G est :

$$Z_G(x_1, x_2, x_4) = \frac{1}{8} (x_1^4 + 2x_1^2x_2 + 3x_2^2 + 2x_4)$$

Exemple 1.2.0.4. Soit G le groupe des symétries du collier à six perles coloriées avec n couleurs. On peut représenter un collier comme un hexagone régulier dont les sommets sont les perles. L'ensemble des symétries du collier comporte l'identité, les rotations de 60, 120, 180, 240 et 300 degrés, les réflexions par rapport à l'axe passant par le centre du collier et par une paire de perles opposées, et les réflexions par rapport à l'axe passant par

le centre du collier et par une paire de côtés opposés, correspondant au lien entre deux perles. Le groupe contient 12 permutations, donc $|G| = 12$. Ici, les symétries induisent des permutations des perles coloriées. On peut vérifier aisément que le polynôme indicateur de cycles du groupe des symétries du collier à six perles coloriées avec n couleurs est :

$$Z_G(x_1, x_2, x_3, x_6) = \frac{1}{12} (x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 4x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6)$$

On désire étudier l'effet d'une action de groupe d'un ensemble E sur les couleurs des éléments, soit les images des éléments de E selon la fonction donnant la couleur, et les orbites de fonctions de coloriage des éléments de E . Pour cela, nous avons besoin des définitions suivantes :

Définition 1.2.0.4. [16] Soit deux ensembles C, E et soit C^E l'ensemble des fonctions $f : E \rightarrow C$. Soient deux fonctions $f_1, f_2 \in C^E$ et un groupe de symétries G de E . f_1 et f_2 sont dites **équivalentes**, noté $f_1 \sim f_2$, s'il existe $g \in G$ tel que :

$$\text{Pour tout } x \in E : f_1(gx) = f_2(x)$$

On peut aisément vérifier que \sim constitue une relation d'équivalence. De ce fait, l'ensemble C^E est séparé en classes d'équivalences par rapport à \sim , ce qui permet d'introduire la définition suivante.

Définition 1.2.0.5. [16] Soit C, E deux ensembles. On nomme **motifs** les classes d'équivalences de C^E par rapport à \sim .

Avec les définitions et résultats développés jusqu'ici, nous avons le nécessaire pour formuler la version simple du théorème de Pólya. L'équation du théorème contient les informations sur les motifs de fonctions de coloriage et l'identité des couleurs de chaque motif obtenu par action d'un groupe G .

Théorème 1.2.0.1 (simple de Pólya). [16] Soit un ensemble E dont les éléments sont coloriés avec un ensemble de couleurs $C = \{c_i, i \in [m]\}$. Soit un groupe de symétries fini G agissant sur E et induisant des permutations sur les éléments de E et leur couleur. Le polynôme de variables c_i dont les coefficients indiquent le nombre de motifs de fonctions de coloriage de E utilisant les couleurs c_i est donné par :

$$Z_G \left(\sum_{i=1}^m c_i, \dots, \sum_{i=1}^m c_i^m \right) \quad (8)$$

Démonstration. Par le lemme de Burnside :

$$|\text{orb}_G(E)| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{fix}_E(g)|$$

où $|\text{orb}_G(E)|$ est le nombre d'orbites d'éléments de E induites par G , et $|\text{fix}_E(g)|$ est le nombre d'objets coloriés de E dont les couleurs sont fixées par une symétrie g . Soit $(i^{p_i}, i \in [m])$ le type cyclique multiplicatif de la permutation induite par g . Les couleurs des éléments de E sont fixées par g s'il y a une seule couleur dans les éléments de chaque permutation cyclique de la permutation induite par g . S'il existe $x, y \in E$ tels que leur couleur est différente, alors $f(x)$ n'est pas dans le motif de $f(y)$ dans C^E par rapport à g .

L'ensemble des éléments coloriés fixés par g est représenté en prenant chaque combinaison de couleurs dans chaque permutation cyclique de la permutation induite par g . Prenons le polynôme indicateur de cycle du groupe de symétries G de E de la forme :

$$Z_G(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{p_1} \dots x_m^{p_m}$$

En remplaçant chaque x_j par $\sum_{i=1}^m c_i^j$, chaque cycle de taille j est représenté par une couleur c_i tel que le terme c_i^j représente les j éléments de couleur c_i de la permutation cyclique. L'ensemble des variables du polynôme devient l'ensemble C des couleurs, faisant

ainsi l'inventaire des objets coloriés distincts de E utilisant les couleurs de C , et le résultat suit.

□

L'information extraite de chacun des monômes de (8) est le nombre de coloriages de E distincts utilisant p_i éléments de couleur c_i . Ici, c_i n'est qu'une variable permettant de présenter une caractéristique dénombrable, dans ce cas-ci le nombre d'éléments de couleur c_i dans un coloriage fixe de E . Maintenant, si nous voulons dénombrer les motifs de fonctions ayant une certaine caractéristique dénombrable autre que les couleurs, le même polyôme indicateur de cycle est utilisé, et on l'adapte afin de tenir compte des variables représentant les caractéristiques dénombrables que nous voulons représenter. Par exemple, si E représente l'ensemble des graphes à n sommets, alors on peut, à partir du polynôme indicateur de cycles, obtenir le nombre d'arêtes d'un graphe $x \in E$ ou le nombre de ses composantes connexes.

Reprenons l'exemple 1.1.0.1 et tentons d'appliquer le théorème simple de Pólya pour les cubes aux arêtes coloriées avec deux couleurs. Notons la forme particulière de l'équation (6) amenant au nombre d'orbites de cubes coloriés :

$$\frac{1}{24}(2^{12} + 3(2^6) + 6(2^3 + 2^7) + 8(2^4)) \quad (9)$$

Chaque exposant de l'équation (9) correspond au nombre de cycles disjoints de la permutation induite sur les couleurs des arêtes par les symétries du cube. Dans chacun de ces cycles, chaque arête possède la même couleur. Le nombre 2 récurrent dans l'équation correspond au nombre de choix de couleurs pour chaque cycle. En remplaçant ce nombre par une somme de variables $c_1^j + c_2^j$ représentant chaque couleur i de C dans chaque cycle de taille j , chaque orbite de coloriage d'arêtes est maintenant étiquetée par le nombre d'arêtes de couleur c_1 et c_2 qu'il possède.

$$\begin{aligned}
 Z_G \left(\sum_{i=1}^m c_i, \dots, \sum_{i=1}^m c_i^m \right) &= \frac{1}{24} \left((c_1 + c_2)^{12} + 3((c_1^2 + c_2^2)^6) + 6((c_1^4 + c_2^4)^3 + (c_1 + c_2)^2(c_1^2 + c_2^2)^5) + \right. \\
 &\quad \left. 8(c_1^3 + c_2^3)^4 \right) \\
 &= c_1^{12} + c_1^{11}c_2 + 5c_1^{10}c_2^2 + 13c_1^9c_2^3 + 27c_1^8c_2^4 + 38c_1^7c_2^5 + 48c_1^6c_2^6 + 38c_1^5c_2^7 + \\
 &\quad 27c_1^4c_2^8 + 13c_1^3c_2^9 + 5c_1^2c_2^{10} + c_1c_2^{11} + c_2^{12}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Ceci est le résultat attendu en appliquant le théorème simple de Pólya aux cubes aux arêtes coloriées avec 2 couleurs. À noter qu'en évaluant l'équation (10) en $c_1 = c_2 = 1$, on retrouve l'équation (6). Ce détail sera utile pour la version généralisée du théorème de Pólya. La fonction de coloriage vu à la définition 1.2.0.1 a l'avantage d'être facile à représenter visuellement et est intuitive. Elle sert de tremplin à la fonction de poids vue à la définition 1.2.0.6, un développement de la fonction de coloriage afin d'être utilisée pour dénombrer des statistiques diverses des ensembles sur lesquels sont appliqués des actions de groupe. Entre autre, il est possible d'étudier les graphes selon leurs symétries et de recueillir l'information sur le nombre de composantes connexes, le nombre de sommets ou le nombre de feuilles du graphe par l'entremise du polynôme indicateur de cycles. Une fonction de coloriage est un cas particulier de fonction de poids.

Définition 1.2.0.6. [16] Soit deux ensembles E, C et A un anneau commutatif tel que $\mathbb{Q} \subseteq A$. Une **fonction de poids** est une fonction $w : C \rightarrow A$. Pour tout $c \in C$, le **poids** de c est $w(c) \in A$. Le **poids d'une fonction** $f \in C^E$ est le produit :

$$W(f) = \prod_{x \in E} w(f(x))$$

Définition 1.2.0.7. [16] Soit M^* l'ensemble des motifs de C^E , $M \in M^*$ et $f \in M$. Le **poids d'un motif** $W(M)$ de M est le poids Wf pour tout $f \in M$. La **série génératrice des motifs** est la série formelle :

$$F(M^*) = \sum_{M \in M^*} W(M)$$

La fonction de poids requiert certaines propriétés afin de pouvoir la manipuler algébriquement comme la fonction de coloriage dans le théorème simple de Pólya, comme la

propriété de faire des produits de fonctions de poids dans l'indice de cycle, ce qui affecte le polynôme indicateur de cycles, d'où le prérequis que l'image d'une fonction de poids possède les propriétés d'un anneau commutatif.

Lemme 1.2.0.2. [16] Soit $M \subseteq C^E$ un motif et $f_1, f_2 \in M$. Alors :

$$W(f_1) = W(f_2)$$

Démonstration. Soient $f_1, f_2 \in M$. Comme vu au théorème 1.2.0.1, une fonction $f \in C^E$ est préservée par action de G , donc $f(x) = f(gx)$. Par la définition 1.2.0.4, il existe $g \in G$ tel que $f_1(gx) = f_2(x)$. donc :

$$W(f_1) = \prod_{x \in E} w(f_1(x)) = \prod_{x \in E} w(f_1(gx)) = \prod_{x \in E} w(f_2(x)) = W(f_2)$$

□

Les résultats obtenus dans ce chapitre sont suffisant pour démontrer le résultat principal de la théorie de Pólya, soit le théorème généralisé du même nom. Celui-ci est un développement sur la version simple du théorème 1.2.0.1 en extrapolant le concept de couleur à celui de poids représentant une donnée dénombrable quelconque.

Théorème 1.2.0.2 (généralisé de Pólya). [16] Soit un ensemble E de taille m , un ensemble fini C , un groupe de symétries fini G de E et un anneau commutatif A tel que $\mathbb{Q} \subseteq A$. Soient C^E l'ensemble des fonctions $f : E \rightarrow C$ et $w \in A^C$ une fonction de poids. Soit les motifs M respectivement de poids $W(f)$ de M^* . La série génératrice des motifs de M^* est donné par :

$$F(M^*) = Z_G \left(\sum_{c \in C} w(c), \dots, \sum_{c \in C} w(c)^m \right)$$

et le nombre de motifs différents est donné par :

$$Z_G(|C|, \dots, |C|)$$

Démonstration. La preuve de la première partie du théorème généralisé de Pólya est obtenue en remplaçant les couleurs c du théorème simplifié de Pólya par les poids correspondant $w(c)$ qui servent le même but.

La preuve de la seconde partie est faite en donnant à chaque élément c de C le poids $w(c) = 1$. En effet, soit $|C| = m$. Chaque motif contribue à une unité d'un monôme de la forme $w(c_1)^{p_1} \dots w(c_m)^{p_m}$ de l'inventaire des motifs. En remplaçant chaque $w(c_i)$ par 1, on ne compte que le motif. En remplaçant chaque $w(c_i)$ dans l'expression de $F(M^*)$ par la valeur qui lui est donnée, on obtient :

$$\begin{aligned} Z_G \left(\sum_{c \in C} w(c), \dots, \sum_{c \in C} w(c)^m \right) &= P_G \left(\sum_{c \in C} 1, \dots, \sum_{c \in C} 1 \right) \\ &= Z_G(|C|, \dots, |C|) \end{aligned}$$

□

Prenons l'exemple des cubes aux arêtes coloriées de deux couleurs différentes et voyons comment le théorème généralisé de Pólya permet de trouver le nombre d'orbites de coloriations des arêtes et le nombre de cubes distincts selon les coloriations. Le groupe de permutations de ces cubes possède 24 permutations. Les détails du travail sur ces cubes donnent immédiatement le type cyclique de chaque permutation des cubes. L'identité est de type cyclique x_1^{12} . Les six rotations $F_{i,90}$ et $F_{i,270}$ sont chacune de type cyclique x_4^3 . Les trois rotations $F_{i,180}$ sont chacune de type cyclique x_2^6 . Les six rotations A_i sont chacune de type cyclique $x_1^2 x_2^5$. Finalement, les huit rotations $S_{i,120}$ et $S_{i,240}$ sont chacune de type cyclique x_3^4 . Ainsi, le polynôme indicateur de cycle du groupe de permutations des cubes aux arêtes coloriées est :

$$Z_G(x_1, \dots, x_{12}) = \frac{1}{24} (x_1^{12} + 6x_4^3 + 3x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + 8x_3^4)$$

Pour appliquer le théorème généralisé de Pólya, l'ensemble des cubes aux arêtes coloriées en rouge et bleu devient l'ensemble des fonctions $f : E \rightarrow D$, où E est l'ensemble des 12 arêtes d'un cube et D l'ensemble des couleurs rouge et bleue. En effet, chaque fonction $f \in D^E$ associe à chaque arête d'un cube la couleur rouge ou bleue, donc à chacune de ces fonctions correspond un cube aux arêtes coloriées. Ici, associons à la couleur rouge le poids r , et au bleu le poids b . L'ensemble des inventaires des motifs des cubes coloriés devient :

$$\begin{aligned} Z_G(r+b, \dots, r^{12}+b^{12}) &= \frac{1}{24} \left((r+b)^{12} + 6(r^4+b^4)^3 + 3(r^2+b^2)^6 + 6(r+b)^2(r^2+b^2)^5 + \right. \\ &\quad \left. 8(r^3+b^3)^4 \right) \\ &= b^{12} + b^{11}r + 5b^{10}r^2 + 13b^9r^3 + 27b^8r^4 + 38b^7r^5 + 48b^6r^6 + 38b^5r^7 + \\ &\quad 27b^4r^8 + 13b^3r^9 + 5b^2r^{10} + br^{11} + r^{12} \end{aligned}$$

où chaque monôme indique le nombre de cubes distincts selon les permutations qui agissent sur les arêtes et le nombre d'arêtes de chacune des couleurs dans ces cubes. En remplaçant chaque instance de $r^i + b^i$ par deux, soit le nombre de couleurs d'arête possible, on obtient bien le nombre de cubes distincts obtenus précédemment.

Chapitre 2

Graphes et arbres

En 1735, un article mathématique traitant d'un problème original pour l'époque a été publié, nommé le problème des sept ponts de Königsberg [11]. Ce problème traite de la possibilité de visiter Königsberg en partant d'un point, d'aller à un ensemble de points donnés et de passer par les sept ponts de la ville une seule et unique fois. Plusieurs des définitions utilisées pour résoudre ce problème constituent aujourd'hui une théorie importante en combinatoire énumérative : la théorie des graphes. Les images présentées à la figure 2.1 présentent le schéma original que prit le problème et sa représentation traditionnelle en graphe. Un graphe est essentiellement un ensemble de points et de liens entre ces points et plusieurs caractéristiques intéressantes de ces graphes peuvent être étudiées. Le problème des sept ponts traite de ce qu'on appelle aujourd'hui des chemins et circuits eulériens, ce qui n'est pas étudié dans ce chapitre. Nous nous concentrons plutôt sur les arbres, qui sont des graphes simples connexes acycliques, et sont les premières structures acycliques formant le centre d'intérêt du mémoire.

Nous rappelons d'abord les définitions formelles de la théorie des graphes qui sont pertinentes à l'étude des arbres. Ensuite, nous verrons les arbres étiquetés et isomorphes qui partagent un lien par symétrie. Enfin les concepts d'arbres orientés et d'arborescences permettront de traiter des arbres moléculaires et k -valents qui forment un lien entre les arbres et les polyformes vus au chapitre suivant. Sauf mention contraire, les définitions et résultats présentés proviennent de [16, 18, 19, 20].

2.1 Définitions et résultats préliminaires

Les définitions suivantes sont fondamentales à l'étude des graphes, notamment des arbres et de chacune des caractéristiques des graphes qui sont pertinentes à ces derniers.

Un **graphe** est un couple $G = (X, Y)$ où $X = \{x_i, i \in [n]\}$ est un ensemble et $Y = \{\{x_i, x_j\}, i, j \in [n]\}$ est un ensemble de couples d'éléments de X . On nomme les éléments de X les **sommets** de G et les éléments de Y les **arêtes** de G . Le **degré** d'un sommet x de G , noté $deg(x)$, est le nombre d'arêtes qui lui est incidentes. Une **feuille** est un sommet de degré 1. L'**ordre** de G est la cardinalité de X , soit n . G est **simple** si pour tout $x, y \in X : \{x, x\} \notin Y$ et pour tout $\{x, y\} \in Y : |\{\{x, y\}\}| = 1$. En d'autres termes, G est simple s'il ne possède aucune arête d'un sommet vers lui-même et au plus une arête entre chaque paire de sommets de G . Une **chaîne** c de longueur k dans un graphe G est une suite de sommets $c = x_1, \dots, x_k$ telle que pour tout $i \in [k - 1] : \{x_i, x_{i+1}\} \in Y$. G est dit **connexe** s'il existe une chaîne entre chaque couple de sommets de G . Une chaîne est **eulérienne** si l'ensemble des arêtes donné par la suite des sommets de la chaîne est Y et chaque arête apparaît une fois dans la chaîne. Un **graphe eulérien** est un graphe possédant un cycle eulérien. Un **cycle** est une chaîne pour laquelle $x_1 = x_k$. Une chaîne non-cyclique est dite **simple**. La **longueur** d'une chaîne, notée $l(c)$ ou $|c|$, est le nombre d'arêtes qui la compose.

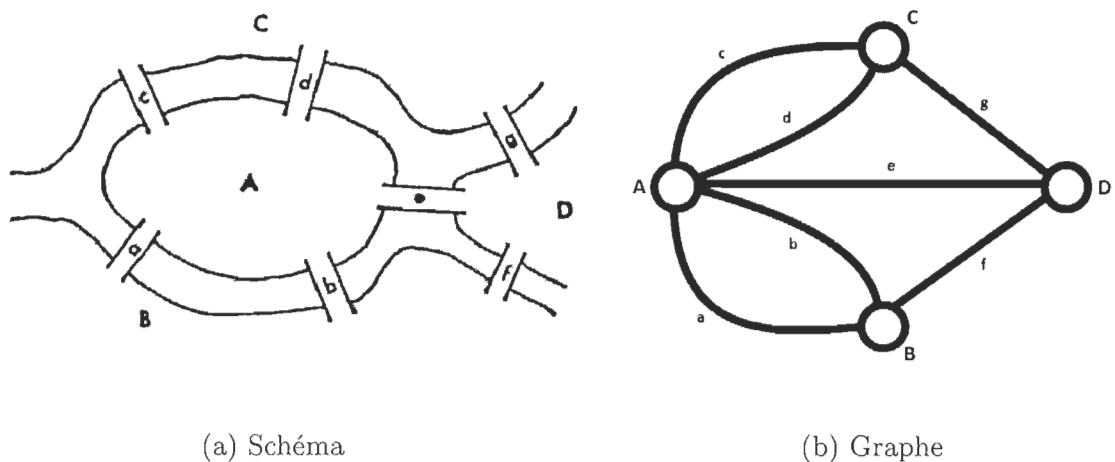


FIGURE 2.1 – Sept ponts de Königsberg

Définition 2.1.0.1. Une **forêt** est un graphe simple sans cycle. Un **arbre** est un graphe

simple, connexe et sans cycle.

Définition 2.1.0.2. *Soit un graphe G . G est **eulérien** s'il existe un chemin fermé est un graphe simple sans cycle. Un **arbre** est un graphe simple, connexe et sans cycle.*

Définition 2.1.0.3. *Une **arborescence** est un arbre possédant un sommet distingué. De façon plus formelle, une arborescence est un couple (a, x) où a est un arbre et x un sommet de a . Le sommet distingué est nommé la **racine** de a . Un **vertébré** est un couple $(a, (x, y))$, soit un arbre avec deux sommets où $x = y$ est possible. La **colonne** d'un vertébré est la chaîne orientée dont les extrémités sont les deux sommets distingués.*

Divers lemmes nous permettent d'obtenir des informations sur les degrés des sommets d'un arbre, ainsi qu'une condition sur la somme des degrés des sommets d'un arbre vue au corollaire 2.1.0.1. Cette condition façonne plusieurs preuves de résultats concernant les arbres et les autres structures acycliques présentées après le chapitre 2.

Lemme 2.1.0.1 (des poignées de mains). [11] *Soit un graphe $G = (X, Y)$ un graphe. Alors la somme des degrés des sommets de G est égal au double du nombre d'arêtes de G , ou :*

$$\sum_{x \in X} \deg(x) = 2|Y|$$

Lemme 2.1.0.2. [17] *Un graphe G est eulérien si et seulement si chaque sommet de G est de degré pair.*

Lemme 2.1.0.3. *Soit un arbre a d'ordre $n \geq 2$. Alors a possède au moins une feuille.*

Démonstration. Procédons par induction. Soit un arbre $a = (X, Y)$ où $X = \{x, y\}$. Alors $Y = \{\{x, y\}\}$. On observe que les deux sommets de a sont des feuilles, donc le cas $n = 2$

fonctionne.

Supposons que le lemme est vrai pour $|X| = n$. Démontrons que le lemme est vrai pour les arbres à $n+1$ sommets. Soit $a = (X, Y)$ un arbre à $|X| = n+1$ sommets. Supposons que a ne possède pas de feuille. Tous les sommets x de a sont alors de degré $\deg(x) \geq 2$. Si tous les sommets sont de degré pair, alors par le lemme 2.1.0.2, a est un graphe eulérien et possède un cycle, ce qui contredit l'hypothèse que a est non-cyclique. Si a possède un nombre impair de sommets de degré 3, alors :

$$\sum_{x \in X} \deg(x) = 2k + 1$$

pour $k \in \mathbb{N}$. Or, par le lemme 2.1.0.1 :

$$2|Y| = \sum_{x \in X} \deg(x) = 2k + 1,$$

ce qui est impossible puisque $2|Y|$ est pair et $2k+1$ est impair. Ainsi, a possède un nombre pair non-nul de sommets de degré 3.

Soient x, y deux sommets de degré 3 de a et un chemin (x, x_1, \dots, x_i, y) entre ces sommets. Supposons qu'il existe toujours un sommet de degré 3 dans un chemin entre x et y . Il existe alors un $k \in [i]$ minimal tel que $\deg(x_k) = 3$. Ainsi, (x, \dots, x_k) est un chemin de cellules dont les extrémités sont de degré 3 et qui ne contient aucun autre sommet de degré 3. Ceci contredit l'hypothèse qu'il existe toujours un sommet de degré 3 dans un chemin entre deux sommets de degré 3. Ainsi, soit (x, x_1, \dots, x_i, y) un chemin où $\deg(x) = \deg(y) = 3$ et $\deg(x_k)$ est pair pour tout $k \in [i]$. Retirons les arêtes de ce chemin de a . Soit a' la structure résultante du retrait des arêtes du chemin (x, x_1, \dots, x_i, y) .

Par hypothèse, $\deg(x_k) \in \{2, 4\}$ pour $k \in [i]$ dans a , et le retrait des arêtes implique que $\deg(x_k) \in \{0, 2\}$ pour $k \in [i]$ dans a' , donc a' peut avoir plus d'une composante connexe. De plus, $\deg(x) = \deg(y) = 2$ dans a' . Si les degrés des sommets d'une composante connexe de a' sont pairs, alors cette composante est un graphe eulérien et possède un cycle, donc a possède un cycle, ce qui contredit l'hypothèse que a est non-cyclique.

Par les arguments précédents, on déduit que toutes composantes connexes de a' possède au moins deux sommets de degrés 3. On applique ces arguments successive-

ment à chaque composante connexe de a' jusqu'à trouver soit une composante connexe dont les sommets sont tous de degré pair, soit jusqu'à réduire le nombre de sommets de degré 3 à 0, ce qui implique que a est un graphe eulérien. Ainsi, on rejette l'hypothèse originale et a possède au moins une feuille. □

Une variante du lemme 2.1.0.1 utile pour l'étude des arbres est présenté ici.

Corollaire 2.1.0.1. *Soit un graphe $G = (X, Y)$ un arbre. Alors :*

$$\sum_{x \in X} \deg(x) = 2(|X| - 1)$$

Démonstration. Démontrons le corollaire par induction sur $|X| \geq 2$. Soit $X = \{x, y\}$. Alors $Y = \{x, y\}$ et :

$$\sum_{x \in X} \deg(x) = 2 = 2(|X| - 1)$$

Le corollaire est vrai pour $|X| = 2$. Supposons que l'hypothèse est vraie pour $|X| = n$. Soit un graphe $G = (X, Y)$ où $|X| = n + 1$. Par 2.1.0.3, nous avons que G possède au moins une feuille. Soit y une feuille de G et x son sommet incident. Retirons y et son arête incidente de G . Nous obtenons $G' = G' = (X - \{y\}, Y - \{\{x, y\}\})$. Comme y est de degré 1, y n'est pas un sommet de degré 2 dans un chemin entre deux autres sommets de G , donc les sommets de G' sont connexes. S'il existe un cycle dans G' , alors ce cycle est présent dans G , ce qui contredit l'hypothèse que G est sans cycle, donc G' ne possède pas de cycle. On obtient que G' est un arbre de taille $|X - \{y\}| = n$. Par hypothèse que le corollaire est vrai pour n sommets, alors $|Y - \{\{x, y\}\}| = n - 1$, donc $|Y| = n$. L'hypothèse est donc vraie pour les arbres à $n + 1$ sommets et le résultat suit. □

2.2 Arbres étiquetés et non-étiquetés

Selon la définition de graphe, les sommets d'un graphe sont distincts. Cette distinction est représentée par une étiquette sur les sommets, souvent un nombre de $[n]$ pour un graphe à n sommets. Prenons un arbre étiqueté a et faisons une permutation des étiquettes des sommets de a . On s'intéresse aux permutations où les étiquettes des sommets de chaque arête sont préservées. Dans ces cas, les arbres possèdent une structure sous-jacente identique qu'on peut identifier en retirant les étiquettes des sommets. On nomme la structure sous-jacente un *arbre non-étiqueté*. Il est évident que les nombres d'arbres étiquetés et non-étiquetés d'ordre donné sont différents, le premier étant supérieur au second. Ici, nous nous intéresserons au dénombrement dans les deux cas.

Définition 2.2.0.1. [16] Soit un graphe $a = (X, Y)$. Un **automorphisme de graphe** est une permutation $g : X \rightarrow X$ tel que pour tout $(x_1, x_2) \in Y$ si et seulement si $(g(x_1), g(x_2)) \in Y$.

La figure 2.2 présente un automorphisme d'arbre.

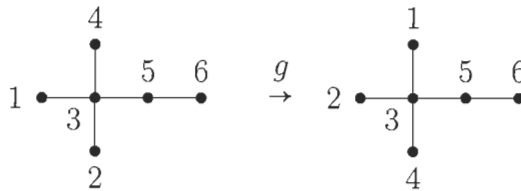


FIGURE 2.2 – Automorphisme d'arbre $g = (124)(3)(5)(6)$

Le cas d'arbres étiquetés à énumérer est présenté au théorème 2.2.0.1. Ceci est le cas le plus simple à traiter dû à la distinction des sommets, ce qui permet d'utiliser les automorphismes de graphe afin de générer le nombre d'arbres étiquetés à n sommets.

Théorème 2.2.0.1. (de Cayley) [19] Le nombre d'arbres étiquetés d'ordre n est n^{n-2} .

Démonstration. Une preuve du théorème de Cayley est essentiellement établie par une bijection entre l'ensemble des endomorphismes sur $[n]$ et le nombre de vertébrés d'ordre

n dont on déduit le nombre d'arbres d'ordre n .

Les endomorphismes d'un ensemble E à n éléments sont les fonctions $f : E \rightarrow E$ et peuvent être présentés comme des graphes orientés où les arêtes correspondent aux couples $(i, f(i))$ où $i \in [n]$ (voir figure 2.3a). Leur structure forme une permutation d'arborescences où la permutation agit sur les racines. Les vertébrés peuvent être présentés comme des graphes orientés où les chaînes de sommets ne faisant pas partie de la colonne sont des chemins orientés avec comme racines les sommets de la colonne (voir figure 2.3b). Leur structure forme un ordre linéaire d'arborescences où l'ordre est formé sur les racines des arborescences. Trouver une bijection entre les endomorphismes sur $[n]$ et les vertébrés d'ordre n revient à trouver une bijection entre les permutations des racines sous-jacentes aux endomorphismes et les ordres linéaires sur les racines sous-jacentes aux vertébrés, puisqu'il suffit de former les mêmes arborescences pour chaque racine dans les endomorphismes et les vertébrés.

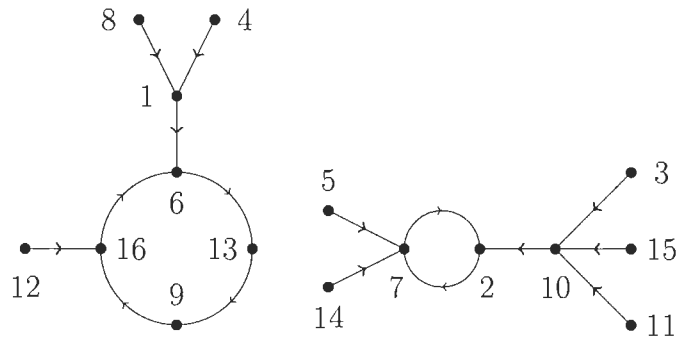
Soit v_n le nombre de vertébrés à n sommets et e_n le nombre d'endomorphismes à n éléments. Comme le nombre de permutations et d'ordres linéaires sont identiques sur des ensembles de même taille, alors $v_n = e_n$. Le nombre d'endomorphismes à n éléments est obtenu en prenant le nombre total de combinaisons d'images des éléments de $[n]$, soit n^n . Soit a_n le nombre d'arbres à n sommets. Le nombre de vertébrés à n sommets est obtenu en distinguant un sommet quelconque du vertébré à deux répétitions, avec n choix différents à chaque répétition. On obtient que $v_n = n^2 a_n$ et :

$$n^n = e_n = v_n = n^2 a_n, \text{ alors } a_n = n^{n-2}$$

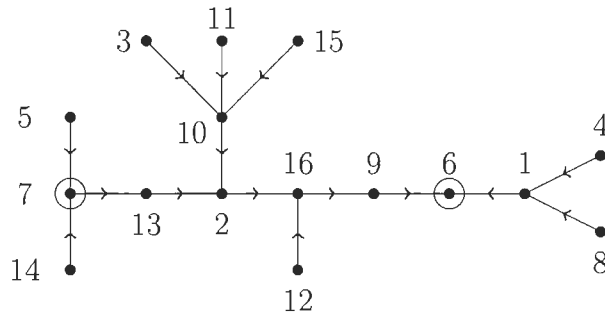
□

Exemple 2.2.0.1. À la figure 2.3, l'endomorphisme et le vertébré construit sur l'ensemble $[16]$ ont l'ensemble sous-jacent $\{2, 6, 7, 9, 13, 16\}$ de racines d'arborescences. En 2.3a, la permutation $(2, 7)(6, 13, 9, 16)$ est induite sur les racines et en 2.3b, l'ordre formé est $(7, 13, 2, 16, 9, 6)$ et correspond à la permutation précédente sur l'ensemble $\{2, 6, 7, 9, 13, 16\}$. À noter que les arborescences respectives à chaque racine sont les mêmes dans les deux figures.

L'étude des arbres et arborescences non-étiquetés se fait à partir de méthodes dis-



(a) Endomorphisme sous forme de graphe orienté.



(b) Vertébré

FIGURE 2.3 – Comparaison d’endomorphismes et de vertébrés

tinctes de celles utilisées pour ceux qui sont étiquetés. Les caractéristiques de la structure sous-jacente aux étiquettes, soit les sommets, arêtes et les statistiques qui leur sont propres, procurent les données importantes à l’étude des arbres non-étiquetés. Les définitions suivantes sont utiles à l’étude des arbres non-étiquetés.

Définition 2.2.0.2. [19] Soit un graphe simple G et $x, y \in X$. Notons la fonction :

$$d(x, y) = \begin{cases} \infty & \text{s'il n'existe pas de chaîne entre } x \text{ et } y \text{ dans } G \\ \min\{l(c) \mid c \text{ est un chemin de } x \text{ à } y\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un chemin entre x et y dans G de longueur $l(c) = d(x, y)$ se nomme une **géodésique**. Le **diamètre** d’un graphe simple G est la longueur de la plus longue géodésique dans G .

On le note :

$$\delta(G) = \max\{d(x, y) \mid x, y \in X\}$$

Définition 2.2.0.3. [19] L'*excentricité* d'un sommet x dans G est la longueur de la plus longue géodésique dans G dont il est une extrémité. On le note :

$$e(x) = \max_{y \in X} d(x, y)$$

Définition 2.2.0.4. [19] Le *centre* d'un graphe simple G est l'ensemble des sommets d'excentricité minimale dans G . On le note :

$$C(G) = \{x \in X \mid e(x) = \min_{y \in X} e(y)\}$$

L'excentricité des sommets du centre est nommée le *rayon* de G .

Définition 2.2.0.5. [19] Soit un arbre a de taille $n \geq 3$. Le *squelette* de a est le graphe obtenu en retirant chaque feuille de a .

L'acyclicité des arbres implique plusieurs lemmes intéressants et utiles à leur étude, et la preuve de ces lemmes est contenue dans [18] et [19].

Lemme 2.2.0.1. [18, 19]

1. Toute chaîne dans un arbre est simple.
2. Il existe une unique chaîne entre chaque couple de sommets d'un arbre.
3. Chaque chaîne d'un arbre est une géodésique.
4. Tout diamètre d'un arbre possède comme extrémités deux feuilles.

5. *Le squelette d'un arbre est un arbre.*

La proposition 2.2.0.1 contient l'information essentielle afin de procéder à l'énumération des arbres non-étiquetés. Cette proposition permet de distinguer certains sommets des arbres non-étiquetés. Les sommets distingués possèdent des caractéristiques permettant de générer des relations de récurrences du nombre d'arbres non-étiquetés selon leur taille.

Proposition 2.2.0.1. [21] *Soit un arbre a de diamètre $\delta(a)$. Si $\delta(a)$ est pair, alors le centre contient un sommet et son excentricité est $\frac{\delta(a)}{2}$. Sinon, le centre contient deux sommets incidents et leur excentricité est $\frac{\delta(a)+1}{2}$.*

Soit r_n le nombre d'arborescences non-étiquetées de taille n . Une façon de les étudier est d'observer les structures obtenues en retirant leur racine. Cela résulte en un ensemble de $j_i, i \in [n-1]$ arborescences non-étiquetées de taille i choisies parmi les r_i arborescences non-étiquetées de taille i avec répétitions possibles. Cela permet de générer la formule suivante sur r_n présentée au lemme 2.2.0.2, dont la série génératrice est présentée au théorème 2.2.0.2.

Lemme 2.2.0.2. [16] *Soit r_n le nombre d'arborescences non-étiquetées à n sommets et $r_1 = 1$. Alors r_n satisfait à la relation :*

$$r_n = \sum_{\substack{(j_i, i \in [n-1]) \\ \sum j_i = n-1}} \prod_{i \in [n-1]} \binom{r_i + j_i - 1}{j_i} \quad (11)$$

Nous avons besoin de la notation suivante pour obtenir une relation entre différents ensembles d'arbres non-étiquetés présentée au lemme 2.2.0.3. Cette relation nous permet d'établir une formule énumérant les arbres non-étiquetés de façon élégante.

Notation 2.2.0.1. *Soit A, B deux ensembles. On note $A \cup B$ l'union disjointe de A et B , $A \cdot B = \{A' \cup B' \mid A' \subseteq A, B' \subseteq B\}$ le produit ensembliste de A et B et $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ le produit cartésien de A et B .*

Lemme 2.2.0.3. [18] Soient R et V les ensembles respectivement des arborescences non-étiquetées et des vertébrés non-étiquetés dont la colonne est de longueur 1. Alors :

$$R \cup V = A \cup (R \cdot R)$$

Démonstration. Soit A l'ensemble des arbres non-étiquetés. Par la proposition 2.2.0.1, ces arbres ont naturellement un centre d'un sommet ou deux sommets adjacents. Chez les arbres possédant un centre singleton, on peut naturellement distinguer ce sommet comme le cas d'une racine dans une arborescence non-étiquetée. Chez les arbres possédant un centre à deux sommets incidents, on peut distinguer ces deux sommets ou similairement, l'arête qui leur est incidente. La structure résultante est un vertébré non-étiqueté dont la colonne est de longueur 1.

Soient R et V les ensembles respectivement des arborescences non-étiquetées et des vertébrés non-étiquetés dont la colonne est de longueur 1. De cette formule et de l'explication précédente, on en déduit naturellement que $A \subseteq R \cup V$ et $R \cup V - A$ constitue l'ensemble des arborescences et des vertébrés avec colonne de longueur 1 dont le sommet (l'arête) distingué(e) n'est pas le sommet (l'arête) du centre de l'arbre. Si le centre contient un sommet c et l'élément distingué est :

1. un sommet x , alors soit le sommet y adjacent à x et en direction du centre. Le retrait de l'arête $\{x, y\}$ génère deux arborescences formées sur les sommets de l'arbre.
2. une arête $\{x, y\}$, alors soit le sommet $z \in \{x, y\}$ le plus près du centre et z' l'autre sommet du couple. Le retrait de l'arête $\{x, y\}$ génère un couple d'arborescences (a_1, a_2) formées sur les sommets de l'arbre dont z et z' sont respectivement les racines.

Si le centre contient deux sommets c, c' et l'élément distingué est :

1. un sommet $x \notin \{c, c'\}$, alors soit le sommet y adjacent à x et en direction du centre. Le retrait de l'arête $\{x, y\}$ génère deux arborescences formées sur les sommets de l'arbre dont x et y sont les racines.
2. un sommet $x \in \{c, c'\}$, alors soit y l'autre sommet du centre adjacent à x . Le retrait

de l'arête $\{x, y\}$ génère deux arborescences formées sur les sommets de l'arbre dont x et y sont les racines.

- une arête $\{x, y\} \neq \{c, c'\}$, alors soit le sommet $z \in \{x, y\}$ le plus près du centre et z' l'autre sommet du couple. Le retrait de l'arête $\{x, y\}$ génère un couple d'arborescences (a_1, a_2) formées sur les sommets de l'arbre dont z et z' sont respectivement les racines.

Cette transformation est unique et réversible pour chaque arborescence et vertébré, assurant la bijection entre les ensembles $R \cup V - A$ et $R \cdot R$ et le résultat suit. \square

La figure 2.4 présente le cas où un arbre possède un centre à deux sommets et un sommet distingué distinct des deux sommets du centre. Les méthodes et algorithmes détaillés pour déterminer la série génératrice des arbres non-étiquetés et davantage de détails sur celle des arbres non-étiquetés sont présentés dans [16, 18, 21, 22]. Ces méthodes aboutissent aux séries du théorème 2.2.0.2. Les valeurs initiales des termes de ces séries sont présentées à la figure 2.1.

La première équation du théorème 2.2.0.2 est présentée par [16, 21] et requiert des techniques analytiques avancées pour la démontrer. La seconde est démontrable à partir des résultats établis dans le chapitre.

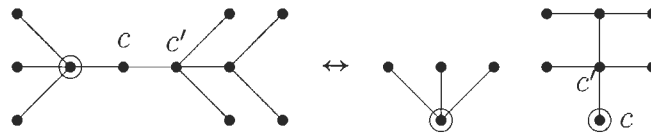


FIGURE 2.4 – Séparation d'arbre à sommet distingué et centre de taille 2

Théorème 2.2.0.2. Soit a_n le nombre d'arbres non-étiquetés d'ordre n , r_n le nombre d'arborescences non-étiquetées sur n sommets et $A(x)$ et $R(x)$ les séries génératrices ordinaires respectives de ces termes pour $n \geq 0$. Alors :

- [16, 21] $R(x) = x \exp\left(\sum_{i \geq 1} \frac{R(x^i)}{i}\right) = x \prod_{n \geq 1} (1 - x^n)^{-r_n}$
- [18, 22] $A(x) = 1 + R(x) - \frac{R^2(x)}{2} + \frac{R(x^2)}{2}$

Démonstration. Soit a_n le nombre d'arbres non-étiquetés de taille n , r_n le nombre d'arborescences non-étiquetées de taille n et v_n le nombre de vertébrés de taille n dont la colonne est de taille 1. Soient $A(x), R(x)$ et $V(x)$ leur série génératrice ordinaire respective. À partir de la formule et de la preuve du lemme 2.2.0.3, il est possible de formuler une relation entre $A(x)$ et $R(x)$. Les éléments de l'ensemble résultant du produit $R \cdot R$ sont des couples d'arborescences non-étiquetées. La série génératrice ordinaire de cet ensemble est $R^2(x)$. Par construction, on vérifie qu'un vertébré non-étiqueté de taille n dont la colonne est de longueur 1 est un couple ordonné d'arborescences non-étiquetées. On obtient ainsi la relation $V = R \times R$. On désire obtenir la série $V(x)$ en terme de $R(x)$. On désire utiliser une méthode énumérant chaque couple non-équivalent une seule fois car les couples de la forme $(r, r), r \in R$ sont compté deux fois dans le produit $R \times R$. On peut dorénavant voir le problème comme l'énumération des couples non-équivalents d'arborescences non-étiquetées par permutations des arborescences du couple. Le théorème généralisé de Pólya 1.2.0.2 nous aide dans cette démarche. L'ensemble des permutations agissant sur les couples d'éléments est le groupe S_2 et on vérifie aisément que son polynôme indicateur de cycle est :

$$Z_{S_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)$$

On attribue le poids $w(a) = x^n$ à $a \in R \cup V$, où n est le nombre de sommets de a , afin de comptabiliser chaque élément de V et R pour obtenir leur série génératrice ordinaire. En sommant sur les différents poids pour $n \geq 0$, on obtient du théorème 1.2.0.2 :

$$V(x) = Z_{S_2} \left(\sum_{n \geq 0} r_n x^n, \sum_{n \geq 0} r_n x^{2n} \right) = \frac{1}{2} (R^2(x) + R(x^2)) \tag{12}$$

En prenant les séries génératrices des ensembles en relation au lemme 2.2.0.3 et en appliquant l'équation (12), on obtient la seconde équation du théorème 2.2.0.2.

□

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_n	1	1	2	4	9	20	48	115	286	719
a_n	1	1	1	2	3	6	11	23	47	106

TABLE 2.1 – Valeurs initiales de a_n et r_n

2.3 k -arbres et arbres moléculaires

Le but principal de cette section est de présenter des définitions et des résultats utiles pour l'étude des objets définis au chapitre 3, les polyformes arbres. L'énumération des arbres vus dans cette section sert entre autre à établir des bornes sur le nombre de ces polyformes arbres. Les familles qui nous intéressent sont les arbres k -valents ou k -arbres et les arbres plantés. Le théorème généralisé de Pólya présenté au chapitre 1 est l'un des outils utilisé pour les énumérer. Les outils utilisés pour dénombrer ces familles d'arbres touchent aux symétries des structures sous-jacentes aux arbres et ne tiennent pas compte des étiquettes des sommets. Ainsi, les arbres étudiés dans cette section sont non-étiquetés.

Définition 2.3.0.1. *Un k -arbre ou arbre k -valent est un arbre dont tous les sommets sont de degré inférieur ou égal à k .*

Définition 2.3.0.2. *Un arbre planté est une arborescence dont la racine est de degré 1. Le diamètre de la racine d'une arborescence est l'excentricité de la racine.*

Un exemple de k -arbre et d'arbre planté sont illustrés aux figures 2.5 et 2.6. Soient $a_{n,k,\delta}$ le nombre de k -arbres de taille n et de diamètre δ et $p_{n,k,r}$ le nombre de k -arbres plantés de taille n et de diamètre de racine r . On utilise la proposition 2.2.0.1 afin de formuler une relation de récurrence sur $a_{n,k,\delta}$ en fonction de $p_{n,k,r}$ exemplifiée par les figures 2.7 et 2.8 pour le cas $k = 4$.

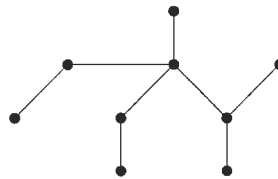


FIGURE 2.5 – 4-arbre d'ordre 9 et de diamètre 4. Diamètre de l'arbre en bleu.

Théorème 2.3.0.1. [20] *Soient $a_{n,k,\delta}$ le nombre de k -arbre de taille n et de diamètre δ , et $p_{n,k,r}$ le nombre de k -arbre planté de taille n et de diamètre de racine r avec k, δ*

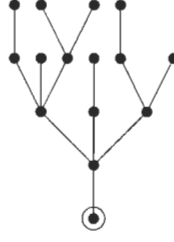


FIGURE 2.6 – 4-arbre planté d'ordre 15 et de diamètre de racine 4. Diamètre de racine de l'arbre en bleu.

et r fixes. Soient $A_{k,\delta}(x)$, $P_{k,r}(x)$ et $W_{k,r}(x)$ les séries génératrices ordinaires des termes $a_{n,k,\delta}$ et $p_{n,k,r}$ telles que :

$$\begin{aligned} A_{k,\delta}(x) &= \sum_{n \geq 1} a_{n,k,\delta} x^n \\ P_{k,r}(x) &= \sum_{n \geq 1} p_{n,k,r} x^n \\ W_{k,r}(x) &= \sum_{j=1}^r P_{k,j}(x) \end{aligned}$$

Alors :

$$1. \quad A_{k,2r-1}(x) = x^{-2} Z_{S_2} (P_{k,r}(x), P_{k,r}(x^2)) \quad (13)$$

$$2. \quad A_{k,2r}(x) = \sum_{i=1}^{k-1} x^{1-i} \sum_{j=2}^{i+1} Z_{S_j} (P_{k,r}(x), \dots, P_{k,r}(x^j)) Z_{S_{i+1-j}} (W_{k,r-1}(x), \dots, W_{k,r-1}(x^{i+1-j})) \quad (14)$$

$$3. \quad P_{k,r}(x) = \sum_{i=1}^r x^{3-i} \sum_{j=1}^i Z_{S_j} (P_{k,r-1}(x), \dots, P_{k,r-1}(x^j)) Z_{S_{i-j}} (W_{k,r-2}(x), \dots, W_{k,r-2}(x^{i-j})) \quad (15)$$

avec $Z_{S_0} = 1$, $Z_{S_1} (W_{k,r}(x)) = W_{k,r}(x)$.

Démonstration. Chaque équation présentée dans l'énoncé du théorème est démontrée en établissant une construction bijective entre un k -arbre ou un k -arbre planté et une classe d'équivalence d'un ensemble de k -arbres plantés à permutation près. D'un k -arbre ou k -arbre planté initial, un ensemble d'éléments est retiré (sommets et/ou arêtes), ce

qui met en évidence un ensemble de k -arborescences dont les racines sont uniques pour chaque transformation. Des k -arborescences obtenues, un sommet incident à chaque racine est ajouté et fixé comme nouvelle racine, formant ainsi un ensemble de k -arbres plantés. Les transformations sont réversibles à chaque étape. Le choix du groupe de symétries agissant sur l'ensemble de k -arbres plantés varie selon les cas. Voyons les constructions.

Soit un k -arbre a de diamètre impair $\delta(a) = 2r - 1$ tel que présenté à la figure 2.7a. Le centre de a contient deux sommets. On retire l'arête incidente aux sommets du centre de a et on obtient deux k -arborescences de diamètre de racine $r - 1$ dont les racines respectives sont les sommets du centre de a comme présenté à la figure 2.7b. À chaque k -arborescence, on ajoute un sommet avec une arête incidente à la racine et on définit ce nouveau sommet comme la racine comme présenté à la figure 2.7c. On obtient alors deux k -arbres plantés de diamètre de racine r .

Soit un k -arbre a de diamètre pair $\delta(a) = 2r$ tel que présenté à la figure 2.8a, sa racine de degré $i \in \{2, \dots, k\}$ et retirons la racine et ses arêtes incidentes. On obtient deux k -arborescences de diamètre de racine $r - 1$ et $i - 2$ k -arborescences de diamètre de racine respectif $j \in \{0, \dots, r - 1\}$ comme présenté à la figure 2.8b. À chaque k -arborescence, on effectue le même ajout de nouvelle racine décrit pour les k -arbres de diamètre impair et on obtient deux k -arbres plantés de diamètre de racine r et $i - 2$ k -arbres plantés de diamètre de racine $j \in [r]$ comme présenté à la figure 2.8c.

Soit un k -arbre planté a de diamètre de racine r tel que présenté à la figure 2.9a et soit d le degré du sommet adjacent à la racine. Notons E l'ensemble des $d - 1$ sommets dont la distance à la racine est deux, ou l'ensemble des sommets adjacents au sommet adjacent à la racine. On retire la racine, le sommet qui lui est adjacent et leurs arêtes incidentes et on obtient une k -arborescence de diamètre de racine $r - 1$ et $d - 2$ k -arborescences de diamètre de racine $j \in \{0, \dots, r - 2\}$ dont les racines respectives sont les sommets de E , comme présenté à la figure 2.9b. À chaque k -arborescence, on ajoute un sommet avec une arête incidente à la racine et on définit ce nouveau sommet comme la racine. On obtient alors un k -arbre planté de diamètre de racine $r - 1$ et $d - 2$ k -arbres plantés de diamètre de racine $i \in [r - 1]$ présenté à la figure 2.9c.

Les constructions entraînent un ajout total de deux sommets des k -arbres aux k -arbres

plantés pour le cas de diamètre impair et $i - 1$ sommets pour le cas pair, et entraîne un retrait ou ajout de $d - 3$ sommets selon la valeur de d pour la construction des k -plantés à partir d'un k -arbre planté. Aussi, elles sont réversibles, indiquant une correspondance entre les ensembles suivants :

1. L'ensemble des k -arbres de taille n et de diamètre $2r - 1$ et l'ensemble des couples de k -arbres plantés de diamètre de racine r .
2. L'ensemble des k -arbres de taille n , de diamètre $2r$ et de degré de racine i , et l'ensemble des ensembles constitués d'un couple de k -arbres plantés de diamètre de racine r et d'un ensemble de $i - 2$ k -arbres plantés de diamètre de racine $j \in [r]$.
3. L'ensemble des k -arbres plantés de diamètre r et de sommet adjacent à la racine de degré d , et l'ensemble constitué d'un k -arbre planté de diamètre de racine $r - 1$ et de 0 à $d - 2$ k -arbres plantés de diamètre de racine $i \in [r - 1]$.

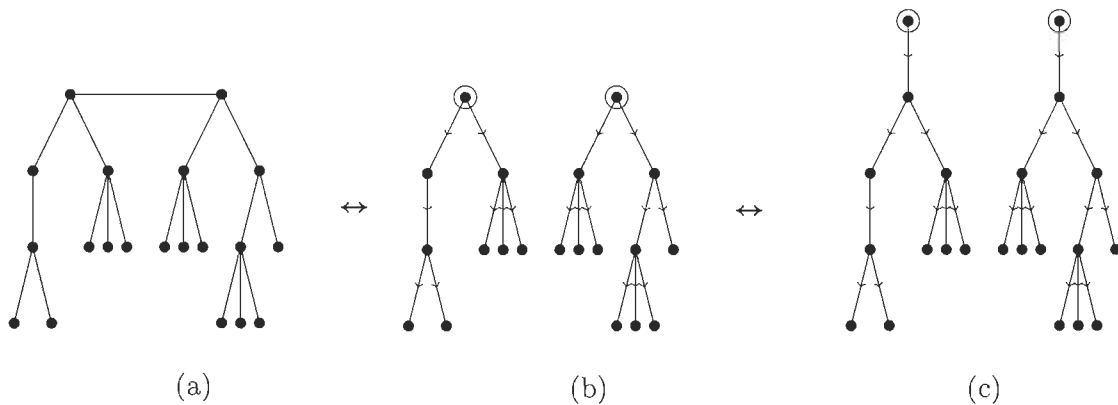


FIGURE 2.7 – Construction de deux 4-arbres plantés de diamètre de racine 4 à partir d'un 4-arbre de diamètre 7.

Selon la même idée que pour les k -arbres de diamètre pair, le groupe S_i agit sur les i k -arbres plantés de diamètre de racine $r - 1$ et le groupe S_{d-2-i} agit sur les k -arbres plantés de diamètre de racine inférieurs à $r - 1$.

Les ensembles de k -arbres plantés obtenus par les transformations présentées aux figures 2.7, 2.8 et 2.9s ont ordonnés et diverses permutations de ces ensembles donnent le même k -arbre ou k -arbre planté. On désire associer à chaque k -arbre et k -arbre planté

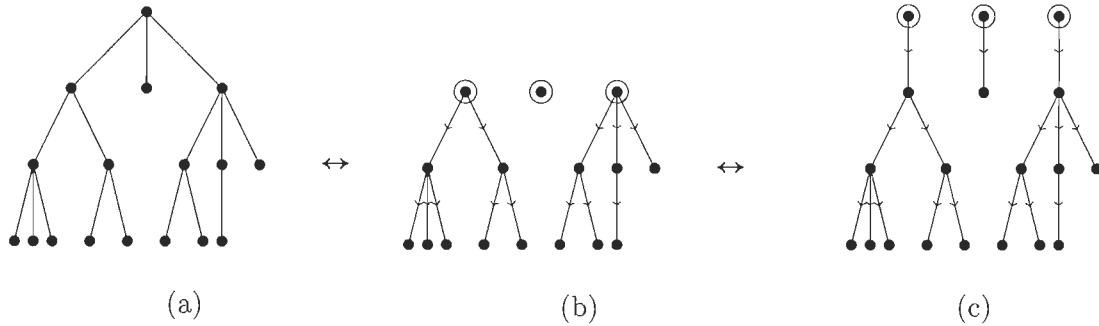


FIGURE 2.8 – Construction de trois 4-arbres plantés, dont deux de diamètre de racine 3, à partir d’un 4-arbre de diamètre 6.

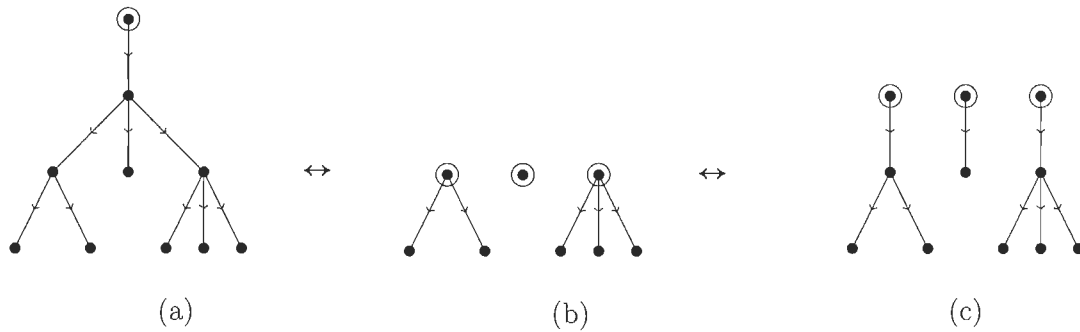


FIGURE 2.9 – Construction de trois 4-arbres plantés, dont deux de diamètre de racine 2, à partir d’un 4-arbre planté de diamètre de racine 3 dont le degré du sommet adjacent est 3.

un unique représentant des ensembles de k -arbres plantés par cette transformation. L’orbite du groupe de permutations sur cet ensemble de k -arbres plantés est ce représentant. Les termes $a_{n,k,\delta}$ sont donc obtenus à partir du théorème 1.2.0.2 et des termes $p_{n,k,r}$.

Le choix du groupe agissant sur les k -arbres plantés varie selon le nombre de sommets du centre des k -arbres et selon le degré du sommet adjacent à la racine du k -arbre planté. Dans le cas d’un k -arbre avec un centre de taille deux, l’action est portée par le groupe S_2 sur chaque paire de k -arbres plantés résultant de la transformation. En appliquant le théorème 1.2.0.2 en sommant sur tout k , le lemme 1.2.0.1 et en divisant le polynôme indicateur de cycle par x^2 afin de tenir compte de l’ajout de deux sommets dans la transformation, on obtient l’équation (13).

Dans le cas d’un k -arbre avec un centre singleton, un nombre $i \in [k]$ de k -arbres plantés de diamètre r et $k - i$ k -arbres plantés de diamètre inférieur à r sont obtenus par

transformation. Le groupe S_i agit sur les k -arbres plantés de diamètre r et S_{k-i} agit sur le reste des k -arbres plantés. En appliquant le théorème 1.2.0.2 et le lemme le lemme 1.2.0.1 de la même façon que pour l'équation (13) et en divisant le polynôme indicateur de cycle par x^{i-1} pour tenir compte de l'ajout de $i - 1$ sommets dans la transformation, on obtient l'équation (14).

Dans le cas d'un k -arbre planté dont le sommet adjacent à la racine est de degré d , le groupe S_i agit sur les i k -arbres plantés de diamètre de racine $r - 1$ et le groupe S_{d-2-i} agit sur les k -arbres plantés de diamètre de racine inférieurs à $r - 1$. En appliquant le théorème 1.2.0.2 et le lemme le lemme 1.2.0.1 de la même façon que pour l'équation (13) et en divisant le polynôme indicateur de cycle par x^{d-3} pour tenir compte de la différence de $d - 3$ sommets dans la transformation, on obtient l'équation (15). □

Le développement des séries $P_{k,r}(x)$ et $A_{k,2r}(x)$ donne des expressions volumineuses même pour de petites valeurs de r , mais on peut développer ceux de la série $A_{k,2r-1}(x)$ ainsi :

$$\begin{aligned}
A_{k,2r-1}(x) &= \sum_{r \geq 1} a_{n,k,2r-1} x^n = \frac{1}{2x^2} (P_{k,r}^2(x) + P_{k,r}(x^2)) \\
&= \frac{1}{2x^2} \left(\left(\sum_{n \geq 1} p_{n,k,r} x^n \right)^2 + \sum_{n \geq 1} p_{n,k,r} x^{2n} \right) \\
&= \frac{1}{2x^2} \left(\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{i \in [n]} p_{i,k,r} p_{n-i,k,r} \right) x^n + \sum_{n \geq 1} p_{n,k,r} x^{2n} \right) \\
&= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2} \left(\sum_{i \in [n]} p_{i,k,r} p_{n-i,k,r} \right) x^{n-2} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2} p_{n,k,r} x^{2n-2} \\
&= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2} \left(\sum_{i \in [n+2]} p_{i,k,r} p_{n+2-i,k,r} \right) x^n + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2} p_{\frac{n+2}{2},k,r} x^n
\end{aligned}$$

Cette formulation permet d'établir la relation suivante :

$$a_{n,k,2r-1} = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{i \in [n+2]} p_{i,k,r} p_{n+2-i,k,r} & \text{si } n \text{ est impair.} \\ \frac{1}{2} \left(\sum_{i \in [n+2]} p_{i,k,r} p_{n+2-i,k,r} + p_{\frac{n+2}{2},k,r} \right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

En somme, on en déduit que pour obtenir tous les k -arbres de taille n impaire et de diamètre $2r - 1$, on prend chaque couple de k -arbres plantés de diamètre de racine r et de tailles respectives i et $n+2-i$ pour $i \in [n+2]$. Ce faisant, on forme deux couples équivalents de k -arbres plantés de diamètre de racine r et de tailles respectives i et $n + 2 - i$ pour $i \in [n + 2]$, soient les couples (k_1, k_2) et (k_2, k_1) où $k_1 \in P_{i,k,r}$, $k_2 \in P_{n+2-i,k,r}$. On divise par 2 pour prendre un unique représentant de chaque couple de k -arbres plantés de diamètre r dans la somme totale des couples de k -arbres plantés.

On procède de la même façon pour obtenir tous les k -arbres de taille n paire et de diamètre $2r - 1$. Une exception qui n'apparaît pas dans la somme des couples de k -arbres plantés pour le cas de taille impaire est lorsque chaque couple est de taille $i = \frac{n+2}{2}$ et formé du même k -arbre planté. La division par 2 de la somme des couples de k -arbres plantés compte $\frac{p_{\frac{n+2}{2},k,r}}{2}$ comme nombre de représentants de couples de k -arbres plantés de taille $\frac{n+2}{2}$ et de diamètre r . Pour que la somme soit exacte, on ajoute ce même terme à la somme.

Exemple 2.3.0.1. [14] *En chimie organique, les alcanes sont des molécules acycliques dont la formule brute est de la forme $C_n H_{2n+2}$. Leur structure chimique forme un graphe, nommé graphe moléculaire tel que présenté à la figure 2.11, et correspond à un arbre de taille $3n + 2$ dont les sommets correspondent aux atomes d'hydrogène et de carbone et les arêtes correspondent aux liens de valence entre ces atomes. Le squelette de ce graphe moléculaire est un 4-arbre constitué des atomes de carbone et de leurs liens de valence. Les représentants des 4-arbres étudiés dans le théorème qui sont obtenus en prenant les classes d'équivalences de permutations de divers ensembles de 4-arbres plantés forment ici les alcanes. Soit :*

1. $a_{n,4,\delta}$ le nombre de 4-arbres de taille n et de diamètre δ .
2. $A_{4,\delta}(x) = \sum_{n \geq 1} a_{n,4,\delta} x^n$ la série génératrice des 4-arbres de diamètre δ .

3. $p_{n,4,r}$ le nombre de 4-arbres plantés de taille n et de diamètre de racine r .
4. $P_{4,r}(x) = \sum_{n \geq 1} p_{n,4,r} x^n$ la série génératrice des 4-arbres plantés de diamètre de racine r .
5. l_n le nombre d'alcane à n atomes de carbone.
6. $L(x) = \sum_{n \geq 1} l_n x^n$ la série génératrice du nombre d'alcane à n atomes de carbone.

On déduit de la structure du squelette d'un alcane que le nombre d'alcane à n atomes de carbone et de diamètre δ est égal à $a_{n,4,\delta}$. Le nombre d'alcane à n atomes de carbone est obtenu en sommant pour chaque diamètre possible. On obtient les égalités suivantes :

$$l_n = \sum_{\delta \geq 0} a_{n,4,\delta} \quad (16)$$

$$l_n x^n = \sum_{\delta \geq 0} a_{n,4,\delta} x^n \quad (\text{Produit de (16) par } x^n) \quad (17)$$

$$\sum_{n \geq 1} l_n x^n = \sum_{n \geq 1} \sum_{\delta \geq 0} a_{n,4,\delta} x^n = \sum_{\delta \geq 0} \sum_{n \geq 1} a_{n,4,\delta} x^n \quad (\text{Réécriture de somme de (17) sur } n \text{ et } \delta)$$

$$L(x) = \sum_{\delta \geq 0} A_{4,\delta}(x) \quad (18)$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} A_{4,2r-1}(x) + \sum_{r=0}^{\infty} A_{4,2r}(x) \quad (\text{Séparation de (18) selon la parité de } \delta) \quad (19)$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \left(x^{-2} Z_{S_2}(P_{4,r}(x), P_{4,r}(x^2)) + Z_{S_2}(P_{4,r}(x), P_{4,r}(x^2)) + \right. \\ \left. x^{-1} (Z_{S_3}(P_{4,r}(x), P_{4,r}(x^2), P_{4,r}(x^3)) + Z_{S_2}(P_{4,r}(x), P_{4,r}(x^2)) W_{r-1}(x)) + \right. \\ \left. x^{-2} (Z_{S_4}(P_{4,r}(x), \dots, P_{4,r}(x^4)) + Z_{S_3}(P_{4,r}(x), P_{4,r}(x^3), P_{4,r}(x^3)) W_{r-1}(x) + \right. \\ \left. Z_{S_2}(P_{4,r}(x), P_{4,r}(x^2)) Z_{S_2}(W_{4,r-1}(x), W_{4,r-1}(x^2))) \right) \quad (\text{Par le théorème 2.3.0.1})$$

où $P_{4,r}(x)$ est donnée par la relation de récurrence :

$$\begin{aligned}
 P_{4,r}(x) = & xP_{4,r-1}(x) + Z_{S_2}(P_{4,r-1}(x), P_{4,r-1}(x^2)) + P_{4,r-1}(x)W_{4,r-2}(x) + \\
 & x^{-1}(Z_{S_3}(P_{4,r-1}(x), P_{4,r-1}(x^2), P_{4,r-1}(x^3)) + \\
 & Z_{S_2}(P_{4,r-1}(x), P_{4,r-1}(x^2))W_{4,r-2}(x) + \\
 & P_{4,r-1}(x)Z_{S_2}(W_{4,r-2}(x), W_{4,r-2}(x^2))) \quad (\text{Par le théorème 2.3.0.1})
 \end{aligned}$$

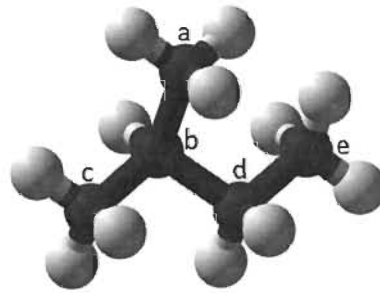


FIGURE 2.10 – Molécule d’alcane C_5H_{12} .

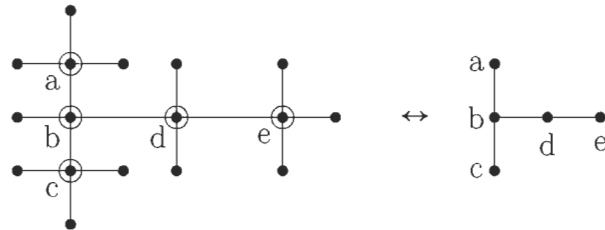


FIGURE 2.11 – Graphe moléculaire de l’alcane C_5H_{12} et de son squelette, un 4-arbre.

Les premières valeurs de $p_{n,4,r}$ sont présentées aux tableaux 2.2 et 2.3. Les premières valeurs de $a_{n,4,\delta}$ et l_n sont présentées aux tableaux 2.4 et 2.5.

$n \backslash r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0
6	0	0	4	3	1	0	0	0	0	0
7	0	0	4	8	4	1	0	0	0	0
8	0	0	5	15	13	5	1	0	0	0
9	0	0	4	27	32	19	6	1	0	0
10	0	0	4	43	74	56	26	7	1	0
11	0	0	3	67	155	151	88	34	8	1
12	0	0	2	97	316	374	267	129	43	9
13	0	0	1	136	612	889	743	432	180	53
14	0	0	1	183	1160	2032	1968	1320	657	242
15	0	0	0	239	2126	4529	5006	3807	2175	954
16	0	0	0	300	3829	9858	12394	10505	6746	3391
17	0	0	0	369	6737	21075	29984	28094	19923	11220
18	0	0	0	432	11672	44320	71289	73290	56766	35180
19	0	0	0	498	19856	91928	166927	187579	157273	105948
20	0	0	0	551	33332	188288	386042	472612	426372	309175

TABLE 2.2 – Valeurs initiales de $p_{n,4,r}$, le nombre de 4-arbres plantés de taille n et de diamètre de racine r , où $n \in [20], r \in [10]$

$n \backslash r$	11	12	13	14	15	16	17	18	19
12	1	0	0	0	0	0	0	0	0
13	10	1	0	0	0	0	0	0	0
14	64	11	1	0	0	0	0	0	0
15	316	76	12	1	0	0	0	0	0
16	1336	403	89	13	1	0	0	0	0
17	5065	1817	504	103	14	1	0	0	0
18	17774	7309	2412	620	118	15	1	0	0
19	58840	27079	10251	3137	752	134	16	1	0
20	186322	94252	39949	14036	4009	901	151	17	1

TABLE 2.3 – Valeurs initiales de $p_{n,4,r}$, le nombre de 4-arbres plantés de taille n et de diamètre de racine r , où $n \in [20], r \in \{11, \dots, 19\}$

$n \backslash \delta$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	2	2	1	0	0	0	0	0
7	0	0	0	1	5	2	1	0	0	0	0
8	0	0	0	1	6	7	3	1	0	0	0
9	0	0	0	0	8	12	11	3	1	0	0
10	0	0	0	0	7	23	26	14	4	1	0
11	0	0	0	0	7	30	59	39	19	4	1
12	0	0	0	0	5	42	109	108	62	23	5
13	0	0	0	0	5	47	196	244	191	84	29
14	0	0	0	0	3	55	313	532	503	293	118
15	0	0	0	0	2	53	485	1047	1252	867	442
16	0	0	0	0	1	53	700	1986	2880	2426	1439
17	0	0	0	0	1	45	982	3533	6337	6259	4375
18	0	0	0	0	0	40	1306	6086	13262	15451	12364
19	0	0	0	0	0	29	1703	10021	26835	36304	33312
20	0	0	0	0	0	23	2129	16047	52411	82471	85754

TABLE 2.4 – Valeurs initiales de $a_{n,4,\delta}$, le nombre de 4-arbres de taille n et de diamètre δ , pour $n \in [20], \delta \in \{0, \dots, 10\}$.

$n \backslash \delta$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	l_n
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	35
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	75
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	159
12	1	0	0	0	0	0	0	0	0	355
13	5	1	0	0	0	0	0	0	0	802
14	34	6	1	0	0	0	0	0	0	1858
15	151	41	6	1	0	0	0	0	0	4347
16	621	198	47	7	1	0	0	0	0	10359
17	2193	862	244	55	7	1	0	0	0	24894
18	7224	3267	1146	306	62	8	1	0	0	60523
19	22039	11452	4633	1509	367	71	8	1	0	148284
20	64000	37371	17284	6464	1930	446	79	9	1	366319

TABLE 2.5 – Valeurs initiales de $a_{n,4,\delta}$, le nombre de 4-arbres de taille n et de diamètre δ , et valeurs initiales de l_n , le nombre d'alcanes à n atomes de carbone, pour $n \in [20]$, $\delta \in \{11, \dots, 19\}$.

Chapitre 3

Polyominos arbres inscrits

Le présent chapitre porte sur les structures combinatoires nommées polyominos arbres et pré-polyominos arbres, un sous-ensemble des structures nommées polyformes arbres. L'étude de ces objets date de l'Antiquité, mais dans la culture moderne, ceux-ci ont été grandement popularisés par des casse-tête et des jeux mathématiques [7]. Les problèmes reliés aux polyominos relèvent principalement de l'énumération de ces structures ayant une caractéristique dénombrable. Quelques exemples sont la convexité [5], la cyclicité des cellules [3], le nombre de cellules, le nombre de cellules de degré 1 [13], les dimensions du rectangle d'inscription du polyomino et le périmètre [24].

Ce chapitre porte sur les polyominos arbres inscrits dans un rectangle de format donné. On y fait l'énumération des polyominos arbres de largeur $i \in [4]$ et de hauteur h arbitraire par le biais des séries génératrices. On établit un système de récurrences linéaires donnant le nombre de polyominos arbres de largeur b et de hauteur h fixes. Ces récurrences sont en fonction du nombre de certaines familles de polyominos et pré-polyominos arbres de hauteur $h - 1$ et de largeur $i \in [b]$. Finalement, on établit la définition de structures intéressantes afin de généraliser cette formule à b quelconque.

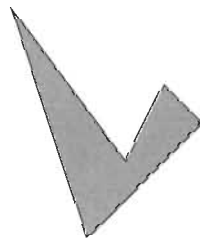
3.1 Définitions

Il faut d'abord établir les définitions des objets géométriques à partir desquelles les polyominos sont générés.

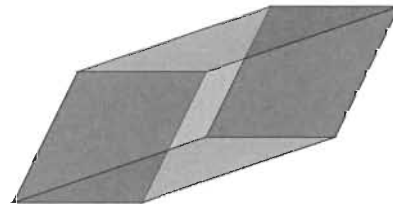
Définition 3.1.0.1. [25] Un **polytope** ou **n -polytope** est un objet géométrique borné de \mathbb{R}^n dont les côtés sont des $(n-1)$ -polytopes avec pour 0-polytope initial un sommet. Un **parallélotope** (**n -parallélotope**) est un polytope dont les côtés opposés sont congrus et parallèles. Un parallélotope est **régulier** si ses côtés sont identiques.

Définition 3.1.0.2. [25] Un **pré-polyforme** (**n -pré-polyforme**) est un couple $P = (X, Y)$ où X est un ensemble de parallélotopes (n -parallélotopes) réguliers, convexes, identiques, pavant un espace n -dimensionnel, et $Y = \{\{x_i, x_j\} \mid i, j \in [|X|], i \neq j\}$ est l'ensemble des côtés partagés par les parallélotopes x_i, x_j de X . Un **polyforme** (**n -polyforme**) est une composante connexe d'un pré-polyforme (n -pré-polyforme) respectivement.

Les côtés de n -polytopes étant des $(n-1)$ -polytopes, ces côtés sont des objets variables selon le nombre de dimensions dans lesquelles est borné le polytope dont ils sont les côtés. Par exemple, les côtés d'un 3-polytope forment dans ce cas des faces. Les figures 3.1, 3.2 et 3.3 présentent respectivement quelques exemples de polytopes, de parallélotopes et de pré-polyformes. La figure constitue aussi un 3-parallélotope.



(a) 2-Polytope quelconque



(b) 3-Parallélotope ou parallélépipède avec faces opposées identiques et congrues

FIGURE 3.1 – Polytopes

De la définition 3.1.0.1, on établit qu'un 1-polytope est un segment de droite, un 2-polytope est un polygone, un 3-parallélotope est un polyèdre, etc. Un 2-polytope régulier est un polygone dont les côtés, des segments de droite, sont de longueur égale. Similairement, un 3-polytope régulier est un polyèdre dont les côtés, des polygones, sont identiques. La similitude entre la définition 3.1.0.2 et celle de graphe nous permet de déduire les propriétés suivantes : Un pré-polyforme est un graphe dont les sommets sont

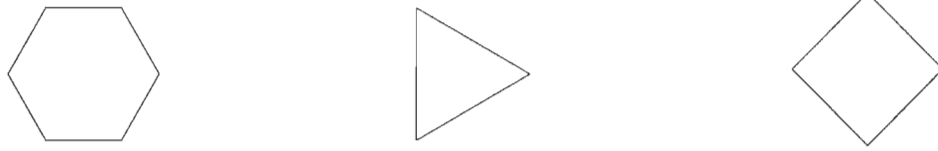


FIGURE 3.2 – 2-parallélotopes

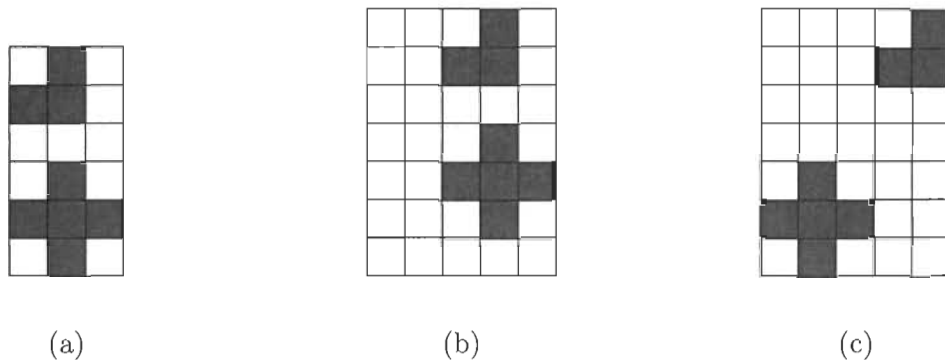


FIGURE 3.3 – Pré-polyformes

des parallélotopes, un polyforme est un graphe connexe et toutes les définitions relatives aux graphes s'appliquent aux pré-polyformes. Les pré-polyformes sont aussi définis par la position de l'ensemble des polyformes à translation près dans le réseau. Une translation d'un sous-ensemble propre d'un pré-polyforme ne constitue donc pas le même pré-polyforme. Supposons que les pré-polyformes de la figure 3.3 sont dans une grille de carrés \mathbb{N}^2 et le coin inférieur gauche de leur sous-grille de carrés respective correspond à l'origine. On en déduit que les figures 3.3a et 3.3b correspondent au même pré-polyforme. De plus, celui de la figure 3.3c leur est différent car la translation d'un des polyformes est nécessaire pour obtenir le pré-polyforme de la figure 3.3a ou 3.3b. La plupart du contenu du chapitre traite du cas $n = 2$ avec pour réseau particulier la grille \mathbb{N}^2 et les parallélotopes carrés. Les termes respectifs utilisés pour les parallélotopes et 2-polyformes seront *cellules* et *polyominos* pour ce chapitre et le suivant. Nous allons nous intéresser aux polyominos arbres.

On a besoin de définir une structure importante pour l'étude des polyominos arbres inscrits.

Définition 3.1.0.3. *Un pré-polymino arbre a est inscrit dans un rectangle $b \times h$*

ou **de format** $b \times h$ si a est contenu dans une grille de carrés de dimensions $b \times h$ et si, pour tout $i < b, j < h$, a n'est pas contenu dans une grille de carrés de dimensions $i \times j$.

La figure 3.4 illustre un pré-polyomino arbre à deux composantes connexes et un polyomino arbre, chacun de format respectif 3×6 et 5×3 .



(a) Pré-polyomino arbre inscrit de format 3×6 . (b) Polyomino arbre inscrit de format 5×3

FIGURE 3.4 – (Pré-)polyominos arbres inscrits

Afin de prendre un représentant unique à translation près des pré-polyominos, on fixe le rectangle d'inscription de ceux-ci dans la grille de carrés \mathbb{N}^2 avec pour sommet inférieur gauche fixe l'origine. Pour tout pré-polyomino, cela fixe alors la rangée et la colonne du rectangle d'inscription dans la grille \mathbb{N}^2 . Du fait même, les coordonnées de chacune de ses cellules qu'on définit comme la coordonnée du coin supérieur droit de la cellule. Les définitions de ce concept et de ceux subséquents qui sont pertinents pour les méthodes utilisées pour étudier les polyominos proviennent d'une théorie combinatoire appelée théorie des langages. Les définitions fondées dans la théorie des langages proviennent majoritairement de [26] et seront préservées pour faciliter la lecture aux initiés. Celles qui les suivent forment les concepts principaux qui sont utilisés afin d'établir la méthode simplifiée d'énumération des polyominos arbres de la section suivante.

Un **alphabet** est un ensemble $A = \{a_i, i \in [n]\}$ dont les éléments a_i sont des **lettres**. Un **mot** est un k -uplet de lettres de la forme $a_{i_1} \dots a_{i_k}$ où $a_{i_j} \in A$. La **longueur** d'un mot c , notée $|c|$, est le nombre de lettres composant c . Un **langage** est un ensemble de mot. Soit un mot $c = c_1 \dots c_n$ et $i \leq n$. Un **facteur** de c est un sous- i -uplet $c_j c_{j+1} \dots c_{i+j-1}$ de c où $i + j - 1 \leq n$. Soit les mots $c = c_1 \dots c_m$ et $d = d_1 \dots d_n$. La **concaténation** de c et d , notée cd , est le mot $cd = c_1 \dots c_m d_1 \dots d_n$.

Définition 3.1.0.4. Soit un pré-polyomino arbre a de format $b \times h$ et son rectangle d'inscription. On note $c : a \times [b] \times [h] \rightarrow \{0, 1\}$ la fonction telle que :

$$c(a, i, j) = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe une cellule de } a \text{ de coordonnée } (i, j). \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par les définitions 3.1.0.4 et de mot, on associe à chaque rangée k d'un pré-polyomino $a \in A_{b,h}^i$ le mot $c(a, 1, k) \dots c(a, b, k)$. Chacun de ces mots est formé sur l'alphabet binaire $\{0, 1\}$. Soit a le polyomino arbre de la figure 3.4b et son rectangle d'inscription. Les coordonnées des cellules sont présentées à même les cellules à la figure 3.5, et on déduit la valeur de $c(a, i, j)$ pour tout $i \in [3], j \in [6]$. Le mot de a , par exemple sur la rangée 2, est 01101.

(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)

$$c(a, i, j) = 1 \text{ pour } (i, j) \in \{(1, 1), (2, 1), (5, 1), (2, 2), (3, 2), (5, 2), (3, 3), (4, 3), (5, 3)\}$$

$$c(a, i, j) = 0 \text{ pour } (i, j) \in \{(3, 1), (4, 1), (1, 2), (4, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

FIGURE 3.5 – Coordonnées des cellules d'un polyomino arbre.

Définition 3.1.0.5. Soit a un pré-polyomino arbre inscrit dans un rectangle R de format $b \times h$. Alors a est **remonté** si toute composante connexe de a possède une cellule sur la rangée h de R . On note $A_{b,h}^i$ l'ensemble des pré-polyominos arbres remontés de format $b \times h$ à i composantes connexes et $a_{b,h}^i = |A_{b,h}^i|$. Similairement, on note $A_{b,h,c}^i$ l'ensemble des pré-polyominos arbres de format $b \times h$, à i composantes connexes et de mot c sur la rangée h et $a_{b,h,c}^i = |A_{b,h,c}^i|$. Si $i = 1$, on notera les termes respectivement $A_{b,h,c}^1 = A_{b,h,c}$ et $a_{b,h,c}^1 = a_{b,h,c}$.

Définition 3.1.0.6. Soit $c \in L_b$, i fixe et soit $A_{b,h,c}^i$, où $h \geq 2$. Un mot c' est **admissible pour** $A_{b,h,c}^i$ s'il existe $a \in A_{b,h,c}^i$ tel que $c(a, h-1) = c'$.

On déduit de la définition 3.1.0.5 qu'un pré-polyomino arbre remonté à une composante connexe est un polyomino arbre de format $b \times h$. La figure 3.6 présente un pré-polyomino arbre remonté à deux composantes connexes. Les mots associés aux rangées 3 et 4 sont 10010 et 11011 respectivement. On détermine que 10010 est admissible pour $A_{5,4,11011}^2$. La connexité des polyominos arbres de format $b \times h$ implique qu'il existe au moins une cellule sur chaque rangée de son rectangle d'inscription. Ainsi, les mots formant chaque rangée d'un polyomino font partie du langage $L_b = \{0, 1\}^b - \{0^b\}$. Ce détail est important pour l'étude des structures définies à la définition 3.1.0.5 et les définitions subséquentes qui sont les outils fondamentaux sur lesquels reposent l'énumération des polyominos arbres. En effet, les mots c de L_b partitionnent $A_{b,h,c}^i$ en sous-ensembles disjoints selon les mots c' admissibles pour $A_{b,h,c}^i$. Ceci permet de développer par la suite des systèmes d'équations linéaires en fonction de divers termes de la forme $a_{b,h,c}^i$. Ces systèmes d'équations sont développés à partir d'une méthode présentée à la section suivante.

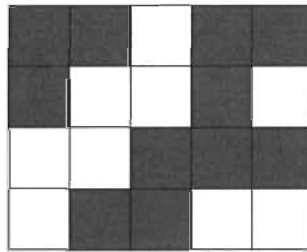


FIGURE 3.6 – Pré-polyomino arbre de format 5×4 à deux composantes connexes.

Notation 3.1.0.1. Les **composantes** d'un mot $c \in L_b$ sont les plus longs facteurs de c formés d'une unique lettre. Une composante est **connexe** si elle est formée de 1 et **vide** autrement. On note x_i la i^e composante connexe de c et o_i la i^e composante vide de c

Notation 3.1.0.2. Soit $L_b = \{0, 1\}^b - \{0^b\}$. On note les sous-ensembles de L_b :

$$L_b = XO_b \cup OX_b \cup OO_b \cup XX_b \cup \{1^b\}$$

où XO_b est l'ensemble des mots de L_b commençant par 1 et se terminant par 0, OX_b est l'ensemble des mots de L_b commençant par 0 et se terminant par 1, OO_b est l'ensemble des mots de L_b commençant et se terminant par 0 et XX_b est l'ensemble des mots de L_b différents de 1^b commençant et se terminant par 1.

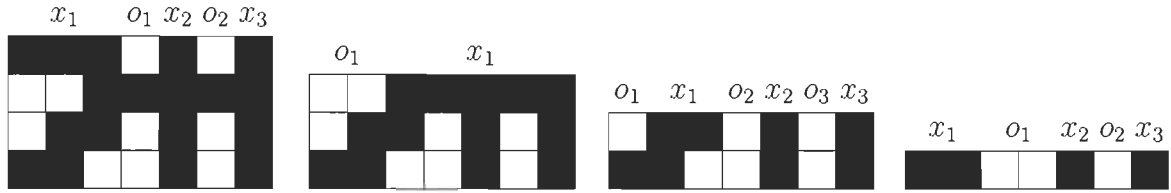


FIGURE 3.7 – Composantes des mots associés aux rangées d’un polyomino de format 7×4 .

La figure 3.7 présente les différentes composantes de chaque rangée d’un polyomino arbre. Par la notation 3.1.0.2, on déduit que les mots associés aux rangées 1 et 4 du polyomino de hauteur 4 de la figure 3.7 appartiennent à XX_7 et ceux des rangées 2 et 3 appartiennent à OX_7 . La figure 3.8a montre un pré-polyomino arbre remonté alors qu’à la figure 3.8b, il ne l’est pas. Les composantes de mots sont nommées connexes et vides en fonction de leur représentation des composantes connexes de cellules, ou l’absence de ces composantes connexes de cellules, dans une rangée d’un pré-polyomino. Il est maintenant utile de déterminer les bornes du nombre de composantes connexes d’un pré-polyomino arbre remonté selon sa largeur.

Lemme 3.1.0.1. *Soit a un pré-polyomino arbre remonté de format $b \times h$. Le nombre maximal de composantes connexes de a est $\lfloor \frac{b+1}{2} \rfloor$.*

Démonstration. Soit $a \in A_{b,h}^i$. Par la définition 3.1.0.5, chaque composante connexe de a possède au moins une cellule sur la rangée h . Chaque couple de composantes connexes consécutives sur la rangée h est séparé par une composante vide, donc il existe au moins $i-1$ composantes vides. Le mot sur la rangée h est de la forme générale $0^{m_0} 1^{n_1} 0^{m_1} \dots 1^{n_i} 0^{m_i}$ où $m_0, m_i \geq 0$, $m_j \geq 1$ pour tout $j \in [i-1]$ et $n_j \geq 1$ pour tout $j \in [i]$ autrement, et :

$$\sum_{j=0}^i m_j + \sum_{j=1}^i n_j = b$$

Maximiser i équivaut à minimiser m_i et n_i , donc $m_0 = m_i = 0$ et $m_j, n_j = 1$ autrement. Si b est de la forme $2i-1$, alors le nombre maximal de composantes connexes de a est $i = \frac{b+1}{2} = \lfloor \frac{b+1}{2} \rfloor$. Ajouter une composante connexe requiert aussi l’ajout d’une composante

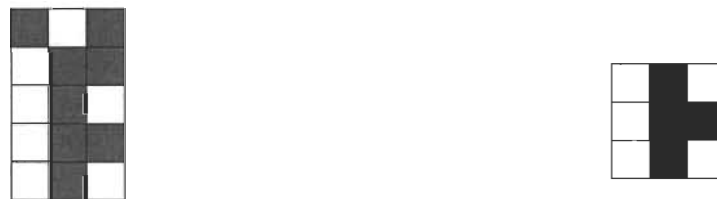
vide et au moins deux unités à b , donc si $b = 2i$, le nombre de composantes maximales demeure i et $i = \frac{b}{2} = \lfloor \frac{b+1}{2} \rfloor$ et le résultat suit. \square



FIGURE 3.8 – Pré-polyminos arbres inscrits dans un rectangle 3×5 .

Définition 3.1.0.7. Soit $a \in A_{b,h}^i$ et R son rectangle d'inscription. Alors a **restreint à la hauteur** $k \leq h$ est l'ensemble des cellules de a sur les k premières rangées de R . On note $a \downarrow_k$ cette restriction.

La figure 3.9 présente une telle restriction. On vérifie que le pré-polymino remonté a est de format 3×5 et que sa restriction à la rangée 3 est de largeur inférieure à celle de a . Aussi, le nombre de composantes connexes entre les deux structures est différent.



(a) Pré-polymino arbre remonté a de format 3×5 .

(b) Restriction de a à la rangée 3.

FIGURE 3.9 – Pré-polymino arbre et restriction

3.2 Méthode simplifiée d'énumération de polyominos arbres

Cette section présente la méthode utilisée pour énumérer les polyominos arbres de format $b \times h$, les objets principaux à l'étude, avec $b \in [4]$ et h quelconque à partir des termes définis à la section précédente. La méthode permet d'obtenir les séries génératrices des termes $a_{b,h,c}^i$, et plus précisément pour $i = 1$ et b fixé. La méthode développée en algorithme général pour $b \geq 5$ quelconque requiert un développement additionnel vu à la section 3.4. Voici d'abord la méthode simplifiée.

Soit $b \in [4]$, $i \in [\lfloor \frac{b+1}{2} \rfloor]$ et h quelconque.

1. On partitionne l'ensemble $A_{b,h}^i$ selon le mot de ses arbres associé aux cellules de la rangée h :

$$A_{b,h}^i = \bigsqcup_{c \in L_b} A_{b,h,c}^i \quad (20)$$

où \bigsqcup est l'union disjointe d'ensembles.

2. On prend $c \in L_b$.

(a) Pour tout $a \in A_{b,h,c}^i$, on restreint a à la hauteur $h-1$. On obtient $a \downarrow_{h-1} \in A_{j,h-1}^k$ où $j \in [b]$, $k \in [\lfloor \frac{b+1}{2} \rfloor]$. Des pré-polyominos obtenus, on identifie chaque mot possible $c' = c(a, h-1)$.

(b) On partitionne $A_{b,h-1,c}^i$ selon les mots c' obtenus en 2a, le format et le nombre de composantes connexes de $a \downarrow_{h-1}$. La partition est exprimée comme suit :

$$A_{b,h-1,c}^i = \bigcup_{j=1}^b \bigcup_{k=1}^{\lfloor \frac{b+1}{2} \rfloor} \bigcup_{c' \in L_b} \{a \in A_{b,h-1,c}^i \mid c(a, h-1) = c' \text{ et } a \downarrow_{h-1} \in A_{j,h-1}^k\} \quad (21)$$

- (c) On prend le cardinal de la partition des ensembles énoncée en (21). On obtient l'équation :

$$a_{b,h,c}^i = \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{b+1}{2} \rfloor} \sum_{c' \in L_b} a_{j,h-1,c'}^k \quad (22)$$

- (d) On construit la série génératrice ordinaire des termes $a_{b,h,c}^i$, notée $A_{b,c}^i(x)$, à partir de l'équation en (22).

$$A_{b,c}^i(x) = \sum_{h \geq 1} a_{b,h-1,c}^i x^h = \left(\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{b+1}{2} \rfloor} \sum_{c' \in L_b} a_{j,h-1,c'}^k \right) x^h$$

3. On répète l'étape 2 pour tout mot $c \in L_b$.
4. On reprend l'équation 20 dès l'étape 1 pour tout $i \in \llbracket \lfloor \frac{b+1}{2} \rfloor \rrbracket$.
5. On construit la série génératrice ordinaire des polyominos arbres inscrits dans un rectangle $b \times h$ à partir des séries obtenues à la conclusion de l'étape 3.

$$\begin{aligned}
 A_{b,h} &= \bigcup_{c \in L_b} A_{b,h,c} \text{ (Équation (20) où } i = 1.) \\
 |A_{b,h}| &= \left| \bigcup_{c \in L_b} A_{b,h,c} \right| \text{ (Cardinal des ensembles.)} \\
 a_{b,h} &= \sum_{c \in L_b} a_{b,h,c} \\
 \sum_{h \geq 1} a_{b,h} x^h &= \sum_{h \geq 1} \sum_{c \in L_b} a_{b,h,c} x^h = \sum_{c \in L_b} \sum_{h \geq 1} a_{b,h,c} x^h \text{ (Construction des séries génératrices.)} \\
 A_b(x) &= \sum_{c \in L_b} A_{b,c}(x) \tag{23}
 \end{aligned}$$

Les pré-polyominos arbres remontés de format $b \times h$ à plusieurs composantes connexes sont des objets combinatoires intéressants en eux-mêmes au plan de l'énumération. L'étude de ces objets sert toutefois, dans ce chapitre, à l'énumération des polyominos arbres inscrits dans un rectangle $b \times h$. Il faut déterminer les propriétés des différents objets obtenus de la restriction de ces polyominos arbres à la hauteur $h - 1$. Les arguments développés dans la section sont utilisés pour b quelconque. Les détails spécifiques aux pré-polyominos arbres remontés de largeur ≥ 5 seront développés dans leur section 3.4. Commençons par la largeur possible de $a \downarrow_{h-1}$. Soit $a \in A_{b,h,c}$. Il existe quatre cas distincts pour c :

1. $c \in OO_b$
2. $c \in XO_b \cup OX_b$
3. $c \in XX_b - \{1^b\}$
4. $c = 1^b$

Dans le cas 1, $a \downarrow_{h-1}$ est de largeur b pour assurer que a soit de largeur b , tel que présenté à la figure 3.10a. Dans tous les autres cas, la largeur de $a \downarrow_{h-1}$ peut être plus petite que b pour assurer que a soit de largeur b . Dans le cas 2, le facteur 1^r au début ou à la fin du mot fait qu'il existe au plus $r - 1$ des premières ou dernières colonnes dans lesquelles il n'y a aucune cellule de $a \downarrow_{h-1}$. Ainsi, $a \downarrow_{h-1}$ est de largeur $j \in \{b - (r - 1), \dots, b\}$. Le polyomino arbre a de la figure 3.10b présente cette condition avec une composante 1^3 sur la rangée 5 et deux colonnes de $a \downarrow_4$ dans lesquelles il n'existe aucune cellule. Dans le cas 3, les facteurs $1^{r_1}, 1^{r_2}$ aux extrémités de c font que le nombre de colonnes sans cellules

est au plus r_1+r_2-2 . Cette condition fait que $a \downarrow_{h-1}$ est de largeur $j \in \{b-(r_1+r_2-2), \dots, b\}$. Le polyomino arbre a de la figure 3.10c présente cette condition avec deux composantes 1^2 sur la rangée 5 et deux colonnes de $a \downarrow_4$ dans lesquelles il n'existe aucune cellule. Dans le cas 4, $a \downarrow_{h-1}$ est trivialement de largeur $j \in [b]$.

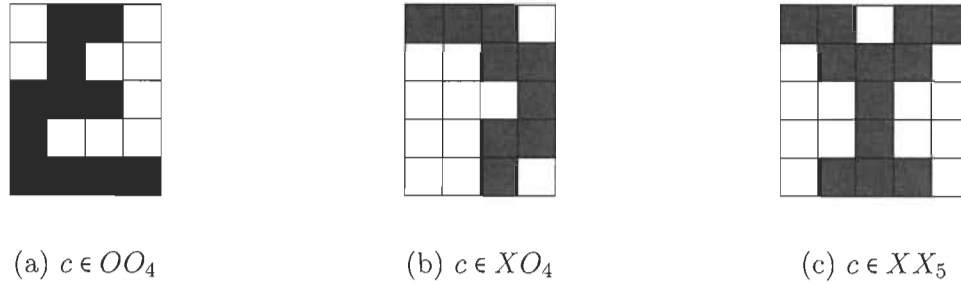


FIGURE 3.10 – Cas distincts de c

Dans quelques cas à l'étude, $a \downarrow_{h-1}$ est de largeur inférieure à celle de a . Lors de l'utilisation de la méthode simplifiée d'énumération des polyominos arbres pour établir des équations en fonction des divers termes de la forme $a_{b,h,c}^i$, il est important de connaître les colonnes du rectangle d'inscription de a dans lesquelles il n'existe pas de cellules de $a \downarrow_{h-1}$. Pour reconnaître la présence de colonnes vides dans $a \downarrow_{h-1}$ lors de l'application de la méthode, il faut adapter la notation binaire de cellules de la définition 3.1.0.4. Cela permet de prendre en compte les colonnes dans lesquelles il n'existe aucune cellule. La notation suivante va nous permettre de reconnaître les colonnes vides de $a \downarrow_{h-1}$.

Définition 3.2.0.1. Soit $c \in L_b$ et $A_{b,h,c}^i$ l'ensemble des pré-polyominos arbres de format $b \times h$ à i composantes connexes et de mot c sur la rangée h . Soit une grille g de carrés de hauteur h et de largeur $l \geq b$ contenant $a \in A_{b,h,c}^i$. Soit $l_1 \geq 0$ colonnes vides à gauche de a et $l_2 \geq 0$ colonnes vides à droite de a dans g . Alors on note $c' = {}^{-l_1}c(a, j){}^{-l_2}$ le mot associé aux cellules sur la j^e rangée de g et $a \in A_{b+l,h,c'}^i$.

Un exemple où la définition 3.2.0.1 s'applique est pour le polyomino arbre a de la figure 3.10b. Dans ce cas, $a \in A_{4,5,1110}$ et $a \downarrow_4$ ne possède aucune cellule dans les deux premières colonnes du rectangle contenant $a \downarrow_4$. Il est de largeur 2 et $c(a \downarrow_4, 4) = 11$. Pour les besoins de la méthode d'énumération, on note alors que $a \downarrow_4 \in A_{4,4,-11}$. La présence de colonnes vides n'est pas à considérer comme caractéristique pour l'énumération des polyominos arbres, donc on peut tirer de cet exemple que $|A_{4,4,-11}| = a_{2,4,11}$. Dans le cas général, le terme $-$ vient substituer le terme 0 car 0 ne donne l'information de l'absence

de cellule que pour une rangée et une colonne.

Soit $a \in A_{b,h,c}^i$. Par hypothèse et le lemme 3.1.0.1, a possède $i \in [\lfloor \frac{b+1}{2} \rfloor]$ composantes connexes. Déterminons maintenant comment calculer le nombre de composantes connexes de $a \downarrow_{h-1}$. Pour cela, nous avons besoin des définitions suivantes :

Définition 3.2.0.2. Soit $a \in A_{b,h,c}^i$ et de mot $c(h-1)$ sur la rangée $h-1$. Soit les facteurs $c'(h) = c(a, i, h)c(a, i+1, h)\dots c(a, i+l, h)$ et $c'(h-1) = c(a, k, h-1)c(a, k+1, h-1)\dots c(a, k+m, h-1)$ respectivement de $c(h)$ et $c(h-1)$. Alors $c'(h-1)$ est **sous** $c'(h)$ ($c'(h)$ est **sur** $c'(h-1)$) si $|c'(h)| = |c'(h-1)|$ ou $l = m$ et si $i = k$. En d'autres termes, $c'(h-1)$ est sous $c'(h)$ si les lettres des deux facteurs correspondent aux coordonnées des mêmes colonnes dans la grille de carrés inscrivant les pré-polyominos.

Avec la définition 3.2.0.2, on établit que du polyomino arbre de la figure 3.10a, le facteur $c(a, 2, 4)c(a, 3, 4) = 10$ du mot associé aux cellules sur la rangée 4 est sous le facteur $c(a, 2, 5)c(a, 3, 5) = 11$ du mot associé aux cellules sur la rangée 5. À la figure 3.10c, le facteur $c(a, 2, 5)c(a, 3, 5)c(a, 4, 5) = 101$ du mot sur la rangée 5 est sur le facteur $c(a, 2, 5)c(a, 3, 5) = 11$ sur la rangée 5.

Définition 3.2.0.3. Soient $c \in L_b, a \in A_{b,h,c}^i, h \geq 2$ et soit $x_i = 1^{n_i}$ l'une des composantes connexes de c . Alors c' est **isolée** si le facteur sous x_i est 0^{n_i} . Dans le cas contraire, la composante connexe est **non-isolée**. On note $i(a, k)$ le nombre de composantes connexes isolées sur la rangée k de a .

Définition 3.2.0.4. Soit $a \in A_{b,h}^i, h \geq 2$. Une **jonction** sur la rangée h de a est un facteur de forme 1^{n_j+2} sur un facteur de forme $10^{n_j}1$ avec $n_j \geq 1$. On note $j(a, h)$ le nombre de jonctions de a sur la rangée h .

La figure 3.11 présente des exemples pour les définitions 3.2.0.3 et 3.2.0.4. Du polyomino arbre a de la figure 3.11a, on déduit que $i(a, 5) = 1$. Du polyomino arbre a de la figure 3.11b, on déduit que $j(a, 5) = 2$.

Lemme 3.2.0.1. Soit $a \in A_{b,h}^i$. Notons $cc(a)$ le nombre de composantes connexes de a . Alors :



(a) Composante connexe isolée (en rouge)

(b) Jonctions (en rouge)

FIGURE 3.11 – Composante isolée et jonctions

$$cc(a \downarrow_{h-1}) = cc(a) + j(a, h) - i(a, h)$$

Démonstration. Soit $c \in L_b$ et $a \in A_{b,h,c}^i$. Par hypothèse, $i = cc(a)$. Retirons la rangée h de a et vérifions les conditions où le nombre de composantes connexes varie.

Posons k le nombre de cellules sous une composante connexe x_i retirée de c de la rangée h . Si $k = 0$, alors x_i est isolée et contribue uniquement à $cc(a)$ et non à $cc(a \downarrow_{h-1})$. Si $k = 1$, alors x_i est adjacente à une composante dans $a \downarrow_{h-1}$ et il n'y a aucune variation du nombre de composantes connexes.

Si $k \geq 2$ et si deux cellules sous x_i sont connexes dans $a \downarrow_{h-1}$, alors celles-ci forment un cycle avec les cellules de x_i sur elles, contredisant l'hypothèse que a est un pré-polyomino arbre. Ainsi, chaque cellule sous x_i est une composante connexe dans $a \downarrow_{h-1}$ et est unitaire dans la rangée $h - 1$. Il existe une jonction, un facteur de x_i , sur les $k - 1$ paires de composantes connexes successives sous x_i . Le retrait de x_i et de ses $k - 1$ jonctions contribue à l'ajout de $k - 1$ composantes connexes dans $a \downarrow_{h-1}$.

Supposons que les cellules sous les composantes vides de c ne font pas partie des mêmes composantes connexes que celles contenant les cellules sous les composantes connexes de c . Alors a n'est pas remonté et il y a contradiction. Ainsi, les cellules sous les composantes vides de c ne contribuent pas à une différence entre $cc(a)$ et $cc(a \downarrow_{h-1})$ lors du retrait de c . En sommant et soustrayant les composantes connexes issues du retrait de c , on obtient le résultat désiré.

□

Exemple 3.2.0.1. 1. Soit a le pré-polyomino arbre de la figure 3.11a où $h = 5$. Ici, $cc(a) = 2, j(a, h) = 0$ et $i(a, h) = 1$ et par le corollaire 3.2.0.1 : $cc(a \downarrow_4) = 1$.

2. Soit a le pré-polyomino arbre de la figure 3.11b où $b = h = 5$. Ici, $cc(a) = 1, j(a, h) = 1$ et $i(a, h) = 0$ et par le corollaire 3.2.0.1 : $cc(a \downarrow_4) = 2$.

Lemme 3.2.0.2. Soit $c = c_1 \dots c_b \in L_b$ et $\tilde{c} = c_b \dots c_1$ son mot miroir. Alors $a_{b,h,c}^i = a_{b,h,\tilde{c}}^i$.

Démonstration. Soit $c \in L_b, \tilde{c}$ le mot miroir de $c, a \in A_{b,h,c}^i$ et $f : A_{b,h,c}^i \rightarrow A_{b,h,\tilde{c}}^i$ telle que pour tout $j \in [b], k \in [h] : f(c(a, j, k)) = c(a, b + 1 - j, k)$. La fonction est une réflexion par rapport à l'axe vertical central du rectangle d'inscription de a , et $f^{-1} : A_{b,h,\tilde{c}}^i \rightarrow A_{b,h,c}^i$ est bien définie, donc il y a bijection entre $A_{b,h,c}^i$ et $A_{b,h,\tilde{c}}^i$ et le résultat suit.

□

Afin de raccourcir et simplifier les calculs des sous-sections ultérieures, nous utiliserons le lemme 3.2.0.2 et utiliserons un seul représentant unique de $\{c, \tilde{c}\}$ pour c et \tilde{c} . Voyons un exemple d'utilisation de la méthode simplifiée d'énumération des polyominos arbres afin de développer une série génératrice du système d'équations. Ces équations permettent de trouver une série génératrice de la forme $A_b(x)$. Pour ces sous-sections, l'établissement des systèmes d'équations est fait manuellement, et les séries génératrices de la forme $A_b(x)$ sont trouvées à partir d'un programme de calcul. Ces systèmes d'équations et le programme sont présentés en annexe.

Exemple 3.2.0.2. Soit l'ensemble $A_{3,h,110}$ des polyominos arbres de format $3 \times h$ et de mot 110 sur la rangée 3 et h fixe. Soit $a \in A_{3,h,110}$ et restreignons a à la hauteur $h - 1$. Les configurations de cellules admissibles sur la rangée $h - 1$ ont les propriétés suivantes : Avec les cellules sur la rangée h de a , l'ensemble des cellules est connexe, acyclique et de format $3 \times h$. Par la définition 3.1.0.4, les mots $c(a, h - 1)$ sont de la forme $c(a, 1, h - 1)c(a, 2, h - 1)c(a, 3, h - 1)$ avec $c(a, i, h - 1) \in \{0, 1\}, i \in [3]$. Voyons les mots $c(a, h - 1)$ associés aux cellules assurant que a possède ces caractéristiques. Ces mots déterminent les types de pré-polyominos que constituent $a \downarrow_{h-1}$.

La connexité de a est assurée par l'existence d'une cellule sur l'une des deux premières colonnes et sur la rangée $h - 1$. Sinon, il n'existe aucun chemin entre les cellules sur la rangée h et celle de $a \downarrow_{h-1}$. Par la définition 3.1.0.4, cela implique que $c(a, 1, h - 1) = 1$ ou $c(a, 2, h - 1) = 1$. L'acyclicité de a est assurée par l'existence d'une unique cellule sur l'une des deux premières colonnes et sur la rangée $h - 1$. Sinon, un cycle est formé entre les cellules sur la rangée h et celle de $c(a, h - 1)$. Par la définition 3.1.0.4, cela implique que le facteur $c(a, 1, h - 1)c(a, 2, h - 1) = 10$ ou 01 . Les contraintes de connexité et d'acyclicité de a n'affectent pas le choix de $c(a, 3, h - 1)$.

Le mot associé aux cellules de la rangée h est $c(a, h) = 110$ et sa première composante connexe x_1 est de taille 2. Ainsi, la première colonne de $a \downarrow_{h-1}$ peut être vide ou non. Selon le cas, $a \downarrow_{h-1}$ est de format $2 \times h - 1$ ou de format $3 \times h - 1$. Dans le premier cas, on traite $c(a, 1, h - 1)$ comme – et avec les informations amassées, on établit que $c(a, h - 1) \in \{-10, -11\}$. Dans le second cas, on établit que $c(a, h - 1) \in \{100, 010, 101, 011\}$. Dans chaque cas de $c(a, h - 1)$, on établit aisément que $cc(a \downarrow_{h-1}) = 1$.

Notons $L' = \{100, 010, 101, 011, -10, -11\}$ l'ensemble des mots admissibles $c(a, h - 1)$ de $a \in A_{3, h, 110}$, $L'_3 = \{100, 010, 101, 011\}$ et $L'_2 = \{-10, -11\}$. À partir des informations collectées et en utilisant la méthode simplifiée d'énumération des polyominos arbres, on établit les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
A_{3,h,110} &= \bigcup_{c' \in L'} \{a \in A_{3,h,110} \mid c(a, h-1) = c' \text{ et } a \downarrow_{h-1} \in A_{3,h-1,c'}\} \\
&= \bigcup_{c' \in L'_3} \{a \in A_{3,h,110} \mid c(a, h-1) = c' \text{ et } a \downarrow_{h-1} \in A_{3,h-1,c'}\} \bigcup \\
&\quad \bigcup_{c' \in L'_2} \{a \in A_{3,h,110} \mid c(a, h-1) = c' \text{ et } a \downarrow_{h-1} \in A_{3,h-1,c'}\} \quad (L' = L'_2 \cup L'_3) \\
|A_{3,h,110}| &= \left| \bigcup_{c' \in L'_3} \{a \in A_{3,h,110} \mid c(a, h-1) = c' \text{ et } a \downarrow_{h-1} \in A_{3,h-1,c'}\} \bigcup \right. \\
&\quad \left. \bigcup_{c' \in L'_2} \{a \in A_{3,h,110} \mid c(a, h-1) = c' \text{ et } a \downarrow_{h-1} \in A_{3,h-1,c'}\} \right| \\
&= \sum_{c' \in L'_3} |A_{3,h-1,c'}| + \sum_{c' \in L'_2} |A_{3,h-1,c'}| \\
a_{3,h,110} &= a_{3,h-1,100} + a_{3,h-1,010} + a_{3,h-1,101} + a_{3,h-1,011} + a_{2,h-1,10} + a_{2,h-1,11} \\
&\quad (|A_{3,h-1,-10}| = a_{2,h-1,10}, |A_{3,h-1,-11}| = a_{2,h-1,11}) \\
&= a_{3,h-1,100} + a_{3,h-1,010} + a_{3,h-1,101} + a_{3,h-1,110} + a_{2,h-1,10} + a_{2,h-1,11} \\
&\quad (110 \text{ est repr\u00e9sentant de } \{110, 011\}) \\
\sum_{h \geq 2} a_{3,h,110} x^h &= \sum_{h \geq 2} (a_{3,h-1,100} + a_{3,h-1,010} + a_{3,h-1,101} + a_{3,h-1,110} + a_{2,h-1,10} + a_{2,h-1,11}) x^h \\
&= x \sum_{h \geq 2} (a_{3,h-1,100} + a_{3,h-1,010} + a_{3,h-1,101} + a_{3,h-1,110} + a_{2,h-1,10} + a_{2,h-1,11}) x^{h-1} \\
&= x \sum_{h \geq 1} (a_{3,h,100} + a_{3,h,010} + a_{3,h,101} + a_{3,h,110} + a_{2,h,10} + a_{2,h,11}) x^h \\
A_{3,110}(x) &= x(A_{3,100}(x) + A_{3,010}(x) + A_{3,110}(x) + A_{3,101}(x) + A_{2,10}(x) + A_{2,11}(x)) \\
A_{3,110}(x)(1-x) &= x(A_{3,100}(x) + A_{3,010}(x) + A_{3,101}(x) + A_{2,10}(x) + A_{2,11}(x))
\end{aligned}$$

À partir du développement ci-haut, on obtient la relation suivante utilisée dans le système d'équations permettant de trouver la série génératrice $A_3(x)$:

$$A_{3,110}(x) = \frac{x}{1-x} (A_{3,100}(x) + A_{3,010}(x) + A_{3,101}(x) + A_{2,10}(x) + A_{2,11}(x))$$

3.3 $b \in [4]$

Cette sous-section traite des polyominos arbres de largeur ≤ 4 . Ces objets constituent les cas de base dans l'énumération des polyominos arbres inscrits. En effet, il est possible d'obtenir les séries génératrices $A_b(x)$ à partir de la méthode simplifiée d'énumération des polyominos arbres pour les valeurs de b mentionnées. Le tableau 3.1 présentent les premières valeurs de $a_{b,h}$ pour $b \in [4]$:

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_{1,h}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$a_{2,h}$	1	4	10	22	46	94	190	382	766	1534
$a_{3,h}$	1	10	55	243	980	3789	14357	53832	200723	746163
$a_{4,h}$	1	22	243	2024	14981	104946	716045	4816620	32149313	213645182

TABLE 3.1 – Valeurs initiales de $a_{b,h}$ pour $b \in [4]$

Les différentes relations de récurrence des termes $a_{b,h-1,c}^i$ issus des termes $c(a,h)$ développés ci-haut sont présentées en annexes. Les termes $a_{1,h}$ et leur série génératrice respective sont trouvés à partir de ces relations de récurrence :

Proposition 3.3.0.1. *Soit $A_b(x) = \sum_{h \geq 1} a_{b,h} x^h$ la série génératrice des polyominos arbres de format $b \times h$ où $b \in [4]$. Alors :*

$$A_1(x) = \sum_{h \geq 1} a_{1,h} x^h = \frac{x}{1-x}$$

$$A_2(x) = \sum_{h \geq 1} a_{2,h} x^h = \frac{x(1+x)}{(1-x)(1-2x)}$$

$$A_3(x) = \sum_{h \geq 1} a_{3,h} x^h = \frac{x(1+2x-4x^2-2x^3+7x^4-12x^5+4x^7)}{(1-x)(1-2x)(1-5x+4x^2+7x^3-21x^4+24x^5-6x^6)}$$

$$A_4(x) = \sum_{h \geq 1} a_{4,h} x^h = \frac{a}{b}$$

$$\begin{aligned} a &= x + 7x^2 - 13x^3 - 79x^4 + 188x^5 + 64x^6 - 723x^7 + 831x^8 - 335x^9 + 185x^{10} + 2890x^{11} - \\ &\quad 5272x^{12} - 192x^{13} + 4008x^{14} - 9368x^{15} + 10728x^{16} + 1680x^{17} - 1824x^{18} - 576x^{19} \\ b &= (1-2x)(1-5x+4x^2+7x^3-21x^4+24x^5-6x^6)(1-8x+4x^2+55x^3-167x^4+ \\ &\quad 180x^5+214x^6-653x^7+1232x^8-2428x^9+1968x^{10}-96x^{11}-192x^{12}) \end{aligned}$$

Démonstration. On utilise la méthode d'énumération de polyominos arbres pour déterminer l'ensemble des équations de récurrence formant les séries génératrices $A_b(x)$.

Soit $b \in [4]$. Les différents langages L_b selon b sont :

1. $L_1 = \{1\}$
2. $L_2 = \{10, 01, 11\}$
3. $L_3 = \{100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$
4. $L_4 = \{1000, 0100, 0010, 0001, 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011, 1110, 1101, 1011, 0111, 1111\}$

On en déduit la partition de $A_{b,h}$ pour $b \in [4]$:

$$A_{1,h} = A_{1,h,1}$$

$$A_{2,h} = A_{2,h,10} \cup A_{2,h,01} \cup A_{2,h,11}$$

$$A_{3,h} = A_{3,h,100} \cup A_{3,h,010} \cup A_{3,h,001} \cup A_{3,h,110} \cup A_{3,h,101} \cup A_{3,h,011} \cup A_{3,h,111}$$

$$A_{4,h} = A_{4,h,1000} \cup A_{4,h,0100} \cup A_{4,h,0010} \cup A_{4,h,0001} \cup A_{4,h,1100} \cup A_{4,h,1010} \cup A_{4,h,1001} \cup A_{4,h,0110} \cup \\ A_{4,h,0101} \cup A_{4,h,0011} \cup A_{4,h,1110} \cup A_{4,h,1101} \cup A_{4,h,1011} \cup A_{4,h,0111} \cup A_{4,h,1111}$$

Par le lemme 3.2.0.2, on établit les égalités suivantes et nous prendrons le premier terme de chaque équation comme représentant dans les équations subséquentes :

$$a_{2,h,10} = a_{2,h,01}$$

$$a_{1,h,100} = a_{3,h,001}$$

$$a_{3,h,110} = a_{3,h,011}$$

$$a_{4,h,1000} = a_{4,h,0001}$$

$$a_{4,h,0100} = a_{4,h,0010}$$

$$a_{4,h,1100} = a_{4,h,0011}$$

$$a_{4,h,1010} = a_{4,h,0101}$$

$$a_{4,h,1010}^i = a_{4,h,0101}^i, i \in [2]$$

$$a_{4,h,1110} = a_{4,h,0111}$$

$$a_{4,h,1101}^i = a_{4,h,1011}^i, i \in [2]$$

Soient les différents mots $c \in L_b$ associés aux cellules sur la rangée h d'un polyomino arbre $a \in A_{b,h,c}$. On établit les mots $c(a, h-1)$ possibles associés aux cellules sur la rangée $h-1$ de a tels que $cc(a \downarrow_{h-1}) = 1$:

$$c(a, h) = 1 : c(a, h - 1) = 1$$

$$c(a, h) = 10 : c(a, h - 1) \in \{10, 11\}$$

$$c(a, h) = 11 : c(a, h - 1) \in \{10, 01, 1-, -1\}$$

$$c(a, h) = 100 : c(a, h - 1) \in \{100, 110, 101, 111\}$$

$$c(a, h) = 010 : c(a, h - 1) \in \{010, 110, 011, 111\}$$

$$c(a, h) = 110 : c(a, h - 1) \in \{100, 010, 101, 011, -10, -11\}$$

$$c(a, h) = 101 : c(a, h - 1) \in \{101, 111\}$$

$$c(a, h) = 111 : c(a, h - 1) \in \{100, 010, 001, 101, -10, -01, 10-, 01-, 1--, --1\}$$

$$c(a, h) = 1000 : c(a, h - 1) \in \{1000, 1100, 1010, 1001, 1110, 1101, 1011, 1111\}$$

$$c(a, h) = 0100 : c(a, h - 1) \in \{0100, 1100, 0110, 0101, 1110, 1101, 0111, 1111\}$$

$$c(a, h) = 1100 : c(a, h - 1) \in \{1000, 0100, 1010, 1001, 0110, 0101, 1011, 0111, -100, -110, \\ -101, -111\}$$

$$c(a, h) = 1010 : c(a, h - 1) \in \{1010, 1110, 1011, 1111\}$$

$$c(a, h) = 1001 : c(a, h - 1) \in \{1001, 1101, 1011, 1111\}$$

$$c(a, h) = 0110 : c(a, h - 1) \in \{0100, 0010, 1100, 1010, 0101, 0011, 1101, 1011, 1111\}$$

$$c(a, h) = 1110 : c(a, h - 1) \in \{1000, 0100, 0010, 1001, 0101, 0011, -100, -010, -101, -011, \\ --10, --11\}$$

$$c(a, h) = 1101 : c(a, h - 1) \in \{1001, 0101, 1011, 0111, 1011, -101, -111\}$$

$$c(a, h) = 1111 : c(a, h - 1) \in \{1000, 0100, 0010, 0001, 100, 100-, 010-, 001-, -100, -010, \\ -001, 10--, 01--, -10-, -01-, --10, --01, 1---, -1--, \\ --1-, ---1\}$$

Soient les différents mots $c \in L_b$ associés aux cellules sur la rangée h d'un polyomino arbre $a \in A_{b,h,c}$. On établit les mots $c(a, h - 1)$ possibles associés aux cellules sur la rangée $h - 1$ de a tels que $cc(a \downarrow_{h-1}) = 2$:

$$c(a, h) = 111 : c(a, h - 1) = 101$$

$$c(a, h) = 1110 : c(a, h - 1) \in \{1010, 1011\}$$

$$c(a, h) = 1111 : c(a, h - 1) \in \{1010, 1001, 0101, 101-, -101\}$$

Soient les différents mots $c \in L_b$ associés aux cellules sur la rangée h d'un pré-polyomino arbre $a \in A_{b,h,c}^2$. On établit les mots $c(a, h - 1)$ possibles associés aux cellules sur la rangée $h - 1$ de a tels que $cc(a \downarrow_{h-1}) = 1$:

$$c(a, h) = 101 : c(a, h - 1) \in \{100, 001, 110, 011, 10-, 11-, -01, -11, 1--, --1\}$$

$$c(a, h) = 1010 : c(a, h - 1) \in \{1000, 0010, 1100, 1001, 0110, 0011, 1101, 0111, -010, -110, -011, -111, --10, --11\}$$

$$c(a, h) = 1001 : c(a, h - 1) \in \{1000, 0001, 1100, 1010, 0101, 0011, 1110, 0111, 100-, 110-, 101-, 111-, -001, -101, -011, -111, 10--, 11--, --01, --11, 1---, ---1\}$$

$$c(a, h) = 1101 : c(a, h - 1) \in \{1000, 0100, 0001, 1010, 0110, 0011, 100-, 010-, 101-, 011-, 101-, 111-, -001, -101, -011, -111, 10--, 11--, --01, -100, -001, -110, -011, 10--, 01--, -10-, -11-, --01, 101-, 111-, -001, -101, -011, -111, 10--, 11--, --01, --11, 1---, -1---, ---1\}$$

Soient les différents mots $c \in L_b$ associés aux cellules sur la rangée h d'un pré-polyomino arbre $a \in A_{b,h,c}^2$. On établit les mots $c(a, h - 1)$ possibles associés aux cellules sur la rangée $h - 1$ de a tels que $cc(a \downarrow_{h-1}) = 2$:

$$\begin{aligned}
c(a, h) = 101 & : c(a, h-1) = 101 \\
c(a, h) = 1010 & : c(a, h-1) \in \{1010, 1011\} \\
c(a, h) = 1001 & : c(a, h-1) \in \{1001, 1101, 1011\} \\
c(a, h) = 1101 & : c(a, h-1) \in \{1001, 0101, 1011, -101\}
\end{aligned}$$

Des partitions de $A_{b,h}$ et du lemme 3.2.0.2, on obtient les termes généraux $a_{b,h}$ et leur série génératrice respective :

$$\begin{aligned}
a_{1,h} &= a_{1,h-1,1} \\
a_{2,h} &= 2a_{2,h-1,10} + a_{2,h-1,11} \\
a_{3,h} &= 2(a_{3,h-1,100} + a_{3,h-1,110}) + a_{3,h-1,010} + a_{3,h-1,101} + a_{3,h-1,111} \\
a_{4,h} &= 2(a_{4,h-1,1000} + a_{4,h-1,0100} + a_{4,h-1,1100} + a_{4,h-1,1010} + a_{4,h-1,1110} + a_{4,h-1,1101}) + a_{4,h-1,1001} + \\
&\quad a_{4,h-1,0110} + a_{4,h-1,1111}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1(x) &= A_{1,1}(x) \\
A_2(x) &= 2A_{2,10}(x) + A_{2,11}(x) \\
A_3(x) &= 2(A_{3,100}(x) + A_{3,110}(x)) + A_{3,010}(x) + A_{3,101}(x) + A_{3,111}(x) \\
A_4(x) &= 2(A_{4,1000}(x) + A_{4,0100}(x) + A_{4,1100}(x) + A_{4,1010}(x) + A_{4,1110}(x) + A_{4,1101}(x)) + \\
&\quad A_{4,1001}(x) + A_{4,0110}(x) + A_{4,1111}(x)
\end{aligned}$$

Divers outils ont été étudiés : Les mots $c(a, h-1)$ possibles pour chaque mot $c(a, h) \in A_{b,h,c}^i$ étudié et l'ensemble des propriétés de $a \downarrow_{h-1}$ (format, largeur, nombre de composantes connexes). Ces outils amènent en conséquence au développement des relations de récurrence sur les séries génératrices $A_{b,c}^i(x)$ et $A_b(x)$ vues à la section A.1 de l'annexe. Ces relations de récurrence forment, pour tout $b \in [4]$, un système d'équations linéaires admettant une solution unique pour chaque série génératrice. La résolution des divers

systèmes d'équations donnent les séries génératrices $A_b(x)$, $b \in [4]$ présentées en résultat au théorème.

□

La méthode d'énumération des pré-polyominos arbres est généralisable afin de tenir compte de la taille ou du nombre de cellules du pré-polyomino. Ainsi, elle permet de générer les séries génératrices bivariées du nombre de pré-polyominos arbres remontés de largeur fixe selon la hauteur et la taille.

Proposition 3.3.0.2. *Soit $A_b(x, y) = \sum_{h, n \geq 0} a_{b, h, n} x^h y^n$ la série génératrice des polyominos arbres de format $b \times h$ et de taille n où $b \in [4]$. Alors :*

$$A_1(x, y) = \sum_{h, n \geq 1} a_{1, h, n} x^h y^n = \frac{xy}{1 - xy}$$

$$A_2(x, y) = \sum_{h \geq 1, n \geq 2} a_{2, h, n} x^h y^n = \frac{xy^2(1 + xy)^2}{(1 - xy)(1 - xy - 2x^2y^3)}$$

$$A_3(x, y) = \sum_{h \geq 1, n \geq 3} a_{3, h, n} x^h y^n = \frac{a}{b}$$

$$a = xy^3(1 + 4xy - xy^2 - x^2y^2 - 5x^2y^3 + 4x^2y^4 - 6x^3y^3 + 2x^4y^4 + 6x^4y^5 - 15x^4y^6 + 8x^4y^7 + 4x^4y^8 + 2x^5y^7 + 3x^5y^8 - 10x^5y^9 + 7x^6y^8 - 11x^6y^9 - 8x^6y^{10} - 4x^7y^{10} + 8x^7y^{11} + 4x^8y^{12})$$

$$b = (1 - xy)(1 - xy - 2x^2y^3)(1 - 2xy - 3xy^2 + x^2y^2 + 3x^2y^3 + 3x^3y^5 + 4x^3y^6 - 3x^4y^6 - 5x^4y^7 - 11x^4y^8 - 2x^4y^9 + 2x^5y^8 + 13x^5y^9 + 9x^5y^{10} + 6x^6y^{11})$$

$$A_4(x, y) = \sum_{h \geq 1, n \geq 4} a_{4,h,n} x^h y^n = \frac{a}{b}$$

$$\begin{aligned} a = & xy^4(1 + 7xy + 3xy^2 - (2x + 18x^2 + 20x^3)y^3 + (4x^2 - 46x^3 + 15x^4)y^4 + (7x^2 + \\ & 10x^3 + 58x^4 - 3x^5)y^5 + (x^2 - 23x^3 - 10x^4 + 7x^5)y^6 + (-2x^3 - 99x^4 + 70x^5 - \\ & 12x^6)y^7 + (-11x^3 + 76x^4 + 275x^5 + 20x^6)y^8 + (27x^4 + 173x^5 - 80x^6 - 44x^7)y^9 + \\ & (40x^4 - 172x^5 - 254x^6 - 194x^7)y^{10} + (2x^4 + 2x^5 - 137x^6 - 200x^7 + 44x^8)y^{11} - \\ & (74x^5 + 103x^6 + 274x^7 + 23x^8)y^{12} + (-26x^5 - 218x^6 - 64x^7 + 318x^8 + 141x^9)y^{13} + \\ & (35x^6 + 306x^7 + 924x^8 + 509x^9)y^{14} + (86x^6 + 481x^7 + 326x^8 + 267x^9 - 152x^{10})y^{15} + \\ & (4x^6 + 141x^7 + 975x^8 + 98x^9 - 732x^{10})y^{16} + (-24x^7 - 346x^8 - 1332x^9 - 944x^{10} + \\ & 86x^{11})y^{17} + (-20x^7 - 1080x^8 - 3222x^9 - 1836x^{10} + 290x^{11})y^{18} + (-542x^8 - \\ & 305x^9 + 1348x^{10} + 863x^{11})y^{19} + (-100x^8 + 1940x^9 + 5151x^{10} + 2155x^{11} + \\ & 96x^{12})y^{20} + (1442x^9 + 3458x^{10} + 1628x^{11} + 490x^{12} - 236x^{13})y^{21} + (312x^9 - \\ & 454x^{10} - 4842x^{11} - 2164x^{12} - 284x^{13})y^{22} + (-2044x^{10} - 5958x^{11} - 8264x^{12} - \\ & 1070x^{13} + 224x^{14})y^{23} + (-720x^{10} - 52x^{11} + 666x^{12} + 3550x^{13} + 536x^{14})y^{24} + \\ & (2616x^{11} + 5492x^{12} + 6744x^{13} + 2132x^{14} - 48x^{15})y^{25} + (832x^{11} + 36x^{12} - \\ & 3800x^{13} - 3160x^{14} - 400x^{15})y^{26} - (1304x^{12} + 4924x^{13} + 24x^{14} + 1212x^{15})y^{27} + \\ & (-512x^{12} + 1180x^{13} + 3988x^{14} + 4412x^{15} + 160x^{16})y^{28} + (2144x^{13} - 3920x^{14} + \\ & 256x^{15} + 1472x^{16})y^{29} + (512x^{13} - 4048x^{14} + 784x^{15} - 1496x^{16})y^{30} + (-1088x^{14} + \\ & 608x^{15} + 2976x^{16} - 848x^{17})y^{31} + (-2272x^{15} + 2960x^{16} - 800x^{17})y^{32} + (-768x^{15} + \\ & 3968x^{16} - 304x^{17})y^{33} + (2368x^{16} + 1968x^{17} + 192x^{18})y^{34} - (160x^{17} + 448x^{18})y^{35} - \\ & 2144x^{18}y^{36} + 576x^{19}y^{37}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b = & (1 - xy - 2x^2y^3)(1 - 2xy + (-3x + x^2)y^2 + 3x^2y^3 + 3x^3y^5 + (4x^3 - 3x^4)y^6 - 5x^4y^7 + \\
 & (-11x^4 + 2x^5)y^8 + (-2x^4 + 13x^5)y^9 + 9x^5y^{10} + 6x^6y^{11})(1 - 2xy + (-4x + x^2)y^2 + \\
 & (-2x + 4x^2)y^3 + 3x^2y^4 + (-5x^2 + 7x^3)y^5 + (x^2 + 26x^3 - 6x^4)y^6 + (20x^3 - 30x^4)y^7 + \\
 & (2x^3 - 46x^4 + 4x^5)y^8 + (-38x^4 + 20x^5)y^9 + (-37x^4 + 16x^5 + 9x^6)y^{10} + (-10x^4 + 52x^5 + \\
 & 46x^6)y^{11} + (36x^5 + 80x^6 - 12x^7)y^{12} + (40x^5 + 111x^6 - 73x^7)y^{13} + (12x^5 + 54x^6 - 200x^7 + \\
 & 4x^8)y^{14} + (-38x^6 - 198x^7 + 24x^8)y^{15} + (-46x^6 - 174x^7 + 68x^8)y^{16} + (-2x^6 + 172x^8 + \\
 & 4x^9)y^{17} + (-4x^7 + 168x^8 + 88x^9)y^{18} + (8x^7 + 428x^8 + 40x^9)y^{19} + (304x^8 - 720x^9 - \\
 & 32x^{10})y^{20} + (64x^8 - 1072x^9 + 40x^{10})y^{21} + (-640x^9 + 816x^{10})y^{22} + (-128x^9 + 936x^{10} - \\
 & 48x^{11})y^{23} + (208x^{10} - 224x^{11})y^{24} + 48x^{11}y^{25} + 128x^{11}y^{26} + 192x^{12}y^{27}
 \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $A_{b,h,n,c}^i$ l'ensemble des pré-polyominos arbres remontés de format $b \times h$, à i composantes connexes, de mot c sur la rangée h et de taille n . Les étapes de la méthode d'énumération de polyominos arbres forment les relations de récurrence développées dans la preuve de la proposition 3.3.0.1. À ces étapes, on ajoute la statistique de la taille du pré-polyomino arbre de chaque terme. Soit $m = \sum_{j \in [r]} |x_j|$ le nombre de cellules de c . Les séries génératrices bivariées $A_{b,c}^i(x, y)$ prennent la forme suivante en ajoutant la statistique de la taille des pré-polyominos énumérés :

$$A_{b,c}^i(x, y) = \sum_{h,n \geq 1} a_{b,h,n,c}^i x^h y^n = \left(\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{b+1}{2} \rfloor} \sum_{c' \in L_b} a_{j,h-1,n-m,c'}^k \right) x^h y^n$$

La résolution du système d'équations linéaires résultant est obtenue de la même façon que pour la proposition 3.3.0.1. Le développement des relations de récurrence sur les séries génératrices $A_{b,c}^i(x, y)$ et $A_b(x, y)$ est présenté à la section A.2 de l'annexe. Leur résolution donne les séries génératrices bivariées présentés dans l'énoncé du théorème.

□

Exemple 3.3.0.1. Prenons l'exemple 3.2.0.2 et développons les relations menant à l'équation de la série génératrice $A_{3,110}(x)$. Soit $A_{3,h,n,110}$ l'ensemble des polyominos arbres de largeur 3, de hauteur h , de taille n et pour lesquels $c(a, h) = 110$. Les pré-polyominos arbres remontés à \downarrow_{h-1} avec $c(a, h-1)$ admissible sont de taille $n-2$. En effet, les cel-

lules de $a \downarrow_{h-1}$ sont celles de a , sauf les deux cellules de $c(a, h) = 110$. Ainsi, chaque pré-polyomino arbre remonté $a \downarrow_{h-1}$ est de taille $n - 2$.

Soit $A_{3,110}(x, y) = \sum_{h \geq 2, n \geq 4} a_{3,h,n,110} x^h y^n$ la série génératrice bivariée du nombre de polyominos arbres a de largeur 3, de hauteur h , de taille n et pour lesquels $c(a, h) = 110$. On obtient trivialement le résultat suivant à partir des relations développées à l'exemple 3.2.0.2.

$$\begin{aligned}
a_{3,h,n,110} &= a_{3,h-1,n-2,100} + a_{3,h-1,n-2,010} + a_{3,h-1,n-2,101} + a_{3,h-1,n-2,110} + a_{2,h-1,n-2,10} + \\
&\quad a_{2,h-1,n-2,11} \\
\sum_{h \geq 2, n \geq 4} a_{3,h,n,110} x^h y^n &= \sum_{h \geq 2, n \geq 4} (a_{3,h-1,n-2,100} + a_{3,h-1,n-2,010} + a_{3,h-1,n-2,101} + a_{3,h-1,n-2,110} + \\
&\quad a_{2,h-1,n-2,10} + a_{2,h-1,n-2,11}) x^h y^n \\
&= xy^2 \sum_{h \geq 2, n \geq 4} (a_{3,h-1,n-2,100} + a_{3,h-1,n-2,010} + a_{3,h-1,n-2,101} + a_{3,h-1,n-2,110} + \\
&\quad a_{2,h-1,n-2,10} + a_{2,h-1,n-2,11}) x^{h-1} y^{n-2} \\
&= xy^2 \sum_{h \geq 1, n \geq 2} (a_{3,h,100} + a_{3,h,010} + a_{3,h,101} + a_{3,h,110} + a_{2,h,10} + a_{2,h,11}) x^h y^n \\
A_{3,110}(x, y) &= xy^2 (A_{3,100}(x, y) + A_{3,010}(x, y) + A_{3,110}(x, y) + A_{3,101}(x, y) + \\
&\quad A_{2,10}(x, y) + A_{2,11}(x, y)) \\
A_{3,110}(x)(1 - xy^2) &= xy^2 (A_{3,100}(x, y) + A_{3,010}(x, y) + A_{3,101}(x, y) + A_{2,10}(x, y) + A_{2,11}(x, y)) \\
A_{3,110}(x, y) &= \frac{xy^2}{1 - xy^2} (A_{3,100}(x) + A_{3,010}(x) + A_{3,101}(x) + A_{2,10}(x) + A_{2,11}(x))
\end{aligned}$$

Le développement des séries génératrices présentées à la proposition 3.3.0.2 permet d'obtenir quelques données intéressantes telle que la taille maximale d'un polyomino arbre de format $b \times h$ pour $b \in [4]$.

3.4 $b \geq 5$

L'énumération des pré-polyominos arbres remontés de largeur $b \geq 5$ comporte un problème qui n'affecte pas les cas de $b \leq 4$. La généralisation des cas problématiques de ces pré-polyominos fait ressortir des structures dont les caractéristiques ne sont pas décrites par les définitions établies dans ce chapitre. La méthode d'énumération des pré-

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_{1,h}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_{2,h}$	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15
$a_{3,h}$	3	5	7	9	12	14	16	18	21	23
$a_{4,h}$	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30

TABLE 3.2 – Taille maximale d’un polyomino arbre de format $b \times h$ pour $b \in [4], h \in [10]$

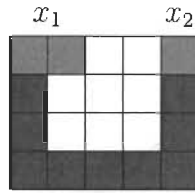
polyominos arbres vérifie la façon dont la connexité de certaines composantes successives est brisée par le retrait d’une jonction. Les structures étudiées dans cette section, nommées *liaisons*, sont une généralisation des jonctions aux composantes connexes d’un pré-polyomino arbre. Cette généralisation est indépendante de leur emplacement vis-à-vis l’une de l’autre. L’étude de ces structures permet d’établir l’intégralité des caractéristiques des restrictions $a \downarrow_{h-1}$ qui sont nécessaires pour modéliser l’algorithme généralisé d’énumération des pré-polyominos arbres. Quelques définitions sont semblables à celles développées par Knuth [6] dans son développement d’algorithmes d’énumération de polyominos. Définissons les objets qui ressortent de l’étude des cas problématiques mentionnés dans les lignes précédentes.

Définition 3.4.0.1. [6] Soit $c \in L_b, a \in A_{b,h,c}^i$ et $X(c) = \{x_i, i \in [r]\}$ l’ensemble des composantes connexes de c . Soit une composante connexe de $a \downarrow_{h-1}$ dont les cellules sur la rangée $h-1$ sont adjacentes à une cellule de chaque composante connexe $x_{i_j}, j \in [r]$ d’un sous-ensemble de $X(c)$. On dit alors que les composantes connexes $x_{i_j}, j \in [r]$ est une **liaison** dans a ou sont en liaison dans a . Si l’ensemble de composantes connexes en liaison est de taille 2, alors la liaison est **singulière**.

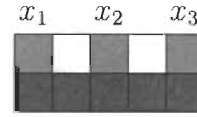
On note $L(a, c)$ l’ensemble des liaisons entre les composantes connexes de c dans a et $A_{b,h,c,l_1(a,c), \dots, l_k(a,c)}^i$ l’ensemble des pré-polyominos arbres remontés de format $b \times h$, à i composantes connexes, de mot c associé aux cellules de la rangée h et formant les liaisons $l_i(a, c) \in L(a, c)$.

La figure 3.12a présente une liaison singulière entre les deux composantes connexes sur la rangée 4 d’un polyomino $a \in A_{5,4,11001}$. Dans la figure 3.12b, les composantes connexes de la rangée 2 font partie d’une liaison non-singulière car elles font toutes partie de la même composante connexe dans le polyomino arbre. Ces polyominos arbres

font respectivement partie des ensembles $A_{5,4,11001,\{x_1,x_2\}}$ et $A_{5,2,10101,\{x_1,x_2,x_3\}}$. Les liaisons donnent l'information sur le nombre de composantes connexes du pré-polyomino arbre mais de façon générale, ne donnent pas l'information sur le format, ni les cellules des composantes connexes qui sont les extrémités des chemin de cellules connectant ces composantes connexes.



(a) Liaison singulière entre deux composantes connexes



(b) Liaison non-singulière

FIGURE 3.12 – Liaisons singulière et non-singulière

Soit $c \in L_b$ et $a \in A_{b,h,c}^i$. Pour $b \leq 4$, il existe au plus deux composantes connexes sur la rangée h et nous avons le cas trivial ou les composantes connexes sur cette rangée de a sont en liaison ou pas. Si $i = 1$ et c possède deux composantes connexes, il existe nécessairement une liaison entre elles dans a . Si $i = 2$ et c possède deux composantes connexes, alors il n'existe pas de liaison entre elles. Au plus une de ces composantes peut ne pas être de hauteur h , ce qui implique qu'il est possible qu'il existe $i \in [b - 1]$ tel que $cc(a \downarrow_i) = 1$. Ces cas déterminent les mots $c(a, h - 1)$ possibles sous $c(a, h)$ de manière simple. Pour $b \geq 5$, les nombres de composantes connexes de a et de ceux de $c(a, h)$ varient de telle façon que plusieurs cas de liaisons entre composantes connexes sur la rangée h de a sont possibles. Voyons quelques exemples de ces cas. Ensuite, lemme 3.4.0.1 précise les caractéristiques des ensembles de liaisons entre composantes connexes d'un mot $c(a, h)$ d'un pré-polyomino arbre $a \in A_{b,h,c}^i$. Aussi, voyons un cas particulier où seules les liaisons singulières sont permises.

Exemple 3.4.0.1. Soit $a \in A_{5,5,10101}^2$. Il existe trois composantes connexes sur la rangée $h = 5$ et par hypothèse deux composantes connexes dans a . Soit (x_1, x_2, x_3) les composantes connexes sur la rangée h . Il existe trois liaisons possibles dans a , soit $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$ et $\{x_2, x_3\}$. Quelques cas sont présentés à la figure 3.13. Certains mots $c(a, h - 1)$ sont admissibles selon la liaison. Par exemple, le mot $c(a, 4) = 10111$ est admissible si la liaison

existante est $\{x_2, x_3\}$ et ne l'est pas pour la liaison $\{x_1, x_3\}$ car une composante connexe de $c(a, h - 1)$ forme un sous-chemin entre x_2 et x_3 , ce qui contredit l'hypothèse que x_1 et x_3 sont en liaison. À cause d'un tel cas, nous devons maintenant aussi considérer quelles composantes connexes sur la rangée h sont en liaison dans a en vue de déterminer les mots $c(a, h - 1)$ admissibles sous $c(a, h)$. Cela s'applique avec $r \geq 3$ composantes ou plus de c forment $i \in \{2, \dots, r - 1\}$ composantes connexes dans a .



FIGURE 3.13 – Cas spéciaux de $a \in A_{b,h-1,c}^i$ avec $r \geq 3$ composantes de c et $i \geq 2$

Exemple 3.4.0.2. Soit $a \in A_{7,5,1110101}$ présenté à la figure 3.14. On remarque que la composante x_1 sur la rangée 5 est en liaison avec les composantes x_2 et x_3 et ces deux composantes ne sont pas en liaison entre elles. Une composante peut donc être en liaison avec plus d'une composante connexe comme présenté à la figure 3.14. On généralise cette idée de la façon suivante : Soit $r \geq 2$ composantes connexes sur la rangée h , une composante connexe x peut être en liaison avec les $r - 1$ autres composantes connexes sur la rangée $h - 1$.

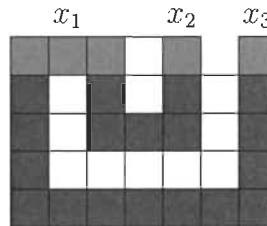


FIGURE 3.14 – Composante connexe appartenant à plusieurs liaisons

Une caractéristique des composantes connexes d'une rangée de polyomino arbre qui est dorénavant importante à prendre en considération est leur ordre sur leur rangée. Cela

nous permet de définir le concept à la définition 3.4.0.3 qui est nécessaire pour établir les caractéristiques des ensembles de liaisons.

Définition 3.4.0.2. Soit un ensemble $X = \{x_i, i \in [r]\}$. On définit la relation d'ordre $<_X$ par :

$$x_i <_X x_j \text{ si et seulement si } i < j$$

Définition 3.4.0.3. Soit $n \geq 4$, un ensemble ordonné $X = \{x_i, i \in [n]\}$, $<_X$ la relation d'ordre sur X et $P(X)$ l'ensemble puissance de X . Soient $X_1, X_2 \subseteq P(X)$ tels que $x_{i_1}, x_{i_2} \in X_1$, $x_{i_3}, x_{i_4} \in X_2$ avec $x_{i_1} <_X x_{i_2}$ et $x_{i_3} <_X x_{i_4}$. Il existe un **croisement** entre X_1 et X_2 si $x_{i_1} <_X x_{i_3} <_X x_{i_2} <_X x_{i_4}$ ou $x_{i_3} <_X x_{i_1} <_X x_{i_4} <_X x_{i_2}$.

Lemme 3.4.0.1. Soient $c \in L_b$, $a \in A_{b,h,c}^i$ et $X(c) = \{x_i, i \in [r]\}$, $r \in \lfloor \lfloor \frac{b+1}{2} \rfloor \rfloor$, les r composantes connexes de c . Soient $L(a, c) = \{\{x_{i,j} \in [k], k \leq r\} \mid x_{i,j} \text{ sont en liaison dans } a\}$ l'ensemble des liaisons dans a des composantes connexes de c . Soit $L_1(a, c)$ l'ensemble des liaisons singulières des composantes de c dans a . Les liaisons entre les différentes composantes x_i respectent les conditions suivantes :

1. $L(a, c)$ forme un sous-ensemble acyclique sans croisement de $P(X(c))$.
2. $L_1(a, c)$ forme une forêt sans croisement.

Démonstration. Soit $c \in L_b$, $a \in A_{b,h,c}^i$ et soient $X(c) = \{x_i, i \in [r]\}$, $r \in \lfloor \lfloor \frac{b+1}{2} \rfloor \rfloor$, les r composantes connexes de c et $L(a, c) = \{\{x_i, x_j\} \mid x_i \text{ et } x_j \text{ sont en liaison dans } a\}$ l'ensemble des liaisons dans a des composantes connexes de c .

Par les définitions 3.4.0.1, un ensemble de composantes connexes sur la rangée h en liaison dans a est un sous-ensemble $X'(c) \subseteq X(c)$ et $L(a, c)$ étant un ensemble de liaisons, on obtient :

$$L(a, c) \subseteq \{X'(c) \mid X'(c) \subseteq X(c)\} = P(X(c))$$

La définition de graphe convient au couple $(X(c), L_1(a, c))$. S'il existe une liaison de la forme $\{x_i, x_i\}$, alors les deux extrémités de la liaison sont adjacentes à une cellule de x_i et forme un cycle, contredisant l'hypothèse que a est acyclique. S'il existe deux liaisons entre deux composantes connexes x_i et x_j , alors ces deux liaisons viennent former un cycle, tel que présenté à la figure 3.15a, contredisant aussi l'hypothèse que a est acyclique. Par les énoncés précédents et la définition de graphe simple, on établit que $(X(c), L_1(a, c))$ est un graphe simple.

Soit $\leq_{X(c)}$ la relation d'ordre sur les composantes connexes de $X(c)$ décrite à la définition 3.4.0.3. Supposons un couple de liaisons de composantes connexes de la forme $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots\}$, $\{\dots, x_{i_3}, x_{i_4}, \dots\}$ tel que $x_{i_1} <_{X(c)} x_{i_3} <_{X(c)} x_{i_2} <_{X(c)} x_{i_4}$ ou $x_{i_3} <_{X(c)} x_{i_1} <_{X(c)} x_{i_4} <_{X(c)} x_{i_2}$, soit qu'il existe un croisement entre ces liaisons. On obtient alors des chemins dans $a \downarrow_{h-1}$ similaires à ceux du polyomino arbre de la figure 3.15c. On observe qu'au moins une cellule fait partie des deux liaisons et ainsi, ces liaisons ne forment qu'une composante connexe dans $a \downarrow_{h-1}$ et par définition 3.4.0.1, ne forment qu'une liaison. Ceci contredit l'hypothèse que les ensembles $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots\}$ et $\{\dots, x_{i_3}, x_{i_4}, \dots\}$ forment deux liaisons. On rejette l'hypothèse qu'il existe un croisement entre ces liaisons. L'hypothèse s'appliquant à tout ensemble de liaisons, nous obtenons que $L(a, c)$ et le graphe $(X(c), L_1(a, c))$ sont sans croisement.

Supposons un ensemble de liaisons de composantes connexes de la forme $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots\}$, $\{\dots, x_{i_2}, x_{i_3}, \dots\}$, \dots , $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_p}, \dots\}$, alors il existe un cycle entre composantes connexes de $X(c)$ de la forme $(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$ et un cycle dans a , tel que présenté à la figure 3.15b, contredisant l'hypothèse que a est acyclique. Cette hypothèse s'applique pour Ainsi, le graphe $(X(c), L_1(a, c))$ est acyclique. L'hypothèse s'appliquant à tout ensemble de liaisons, nous obtenons que $L(a, c)$ et le graphe $(X(c), L_1(a, c))$ sont acycliques. Par les caractéristiques de $L(a, c)$ démontrées dans cette preuve, on obtient la condition 1. Par celles de $L_1(a, c)$ qui ont été démontrées dans cette preuve, on obtient la condition 2. □

Les composantes sur la rangée h de $a \in A_{b,h,c}^i$ étant de taille variable et lorsque b est grand, il est complexe d'établir l'ensemble des combinaisons de composantes connexes de c en liaison entre elles. Un cas simple peut être traité, soit lorsque toutes les composantes sur la rangée h sont de taille suffisante pour permettre d'être en liaison singulière avec chaque autre composante connexe de c .

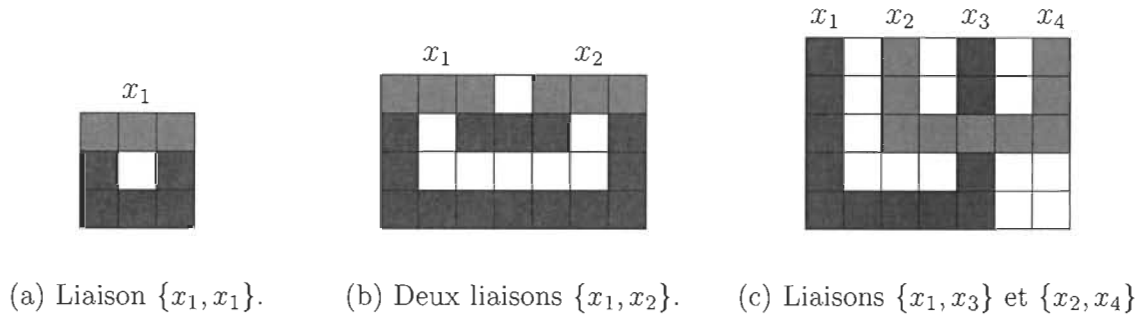


FIGURE 3.15 – Cas interdits de liaisons dans un polyomino arbre

Lemme 3.4.0.2. Soit $c \in L_b$, $X(c) = \{x_i, i \in [r]\}$ l'ensemble des r composantes connexes de c et notons $|x_i|$ la taille d'une composante connexe de c . La taille minimale de x_i afin que x_i puisse être en liaison avec chaque autre composante connexe de $X(c)$ est $|x_i| = \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor$.

Démonstration. Soit $c \in L_b$ et $X(c) = \{x_i, i \in [r]\}$ l'ensemble des r composantes connexes de c de taille respective $|x_i|$. Soit une composante x_i et $r - 1$ chemins formant des liaisons entre x_i et chaque autre composante de $X(c)$. Chaque extrémité des liaisons qui sont adjacentes à une cellule de x_i sont sur la rangée $h - 1$. Prenons le mot de taille $|x_i|$ associé aux cellules sous x_i . Ce mot, par construction, est associé au pré-polyomino arbre remonté de taille $|x_i| \times 1$ possédant $r - 1$ composantes connexes. Le problème consistant à trouver la taille minimale de x_i correspond alors au problème résolu au lemme 3.1.0.1, où le problème devient celui de trouver la largeur minimale d'un pré-polyomino arbre admettant $r - 1$ composantes connexes. En remplaçant b dans l'énoncé du lemme 3.1.0.1 par $r - 1$, on obtient que la taille recherchée est $|x_i| = \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor$. □

Notation 3.4.0.1. Soit un pré-polyomino arbre remonté a dont chacune des r composantes connexes sur la rangée h sont de taille minimale $\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor$. On note $l_1(r)$ le nombre de façons de former des liaisons singulières entre r composantes connexes de taille minimale $\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor$ et $L_1(x) = \sum_{r \geq 1} l_1(r)x^r$.

Les figures 3.16 et 3.3 présentent un schéma simplifié des liaisons singulières possibles sur un ensemble ordonné de quatre composantes connexes et les valeurs initiales de $l_1(r)$ pour $r \in [10]$. Par la condition 2 du lemme 3.4.0.1 et la taille de chaque composante connexe de $X(c)$, le problème revient à énumérer le nombre de forêts sans croisements à

r éléments. Yli-Jyrä et Gomez-Rodriguez [27] utilisent la représentation des liaisons singulières de la figure 3.16 pour décrire et établir une bijection entre les liaisons singulières et les forêts sans croisements, et une représentation plus connue, présentée par Flajolet et Noy [28], est celle de forêts avec sommets équidistants sur la circonférence d'un cercle et avec arêtes sans croisement. Aussi, la figure 3.17 présente quelques cas de pré-polyominos arbres remontés et la représentation de leur ensemble de liaisons en forêt.

Une méthode analytique développée par Kruchinin [29] permet d'établir une équation close pour $l_1(r)$ en fonction de $L_1(x)$. Cette méthode requiert la connaissance de plusieurs outils mathématiques spécialisés et uniquement pertinents à la preuve de cette équation, donc la preuve du théorème 3.4.0.1 présentant cette équation sera délaissée

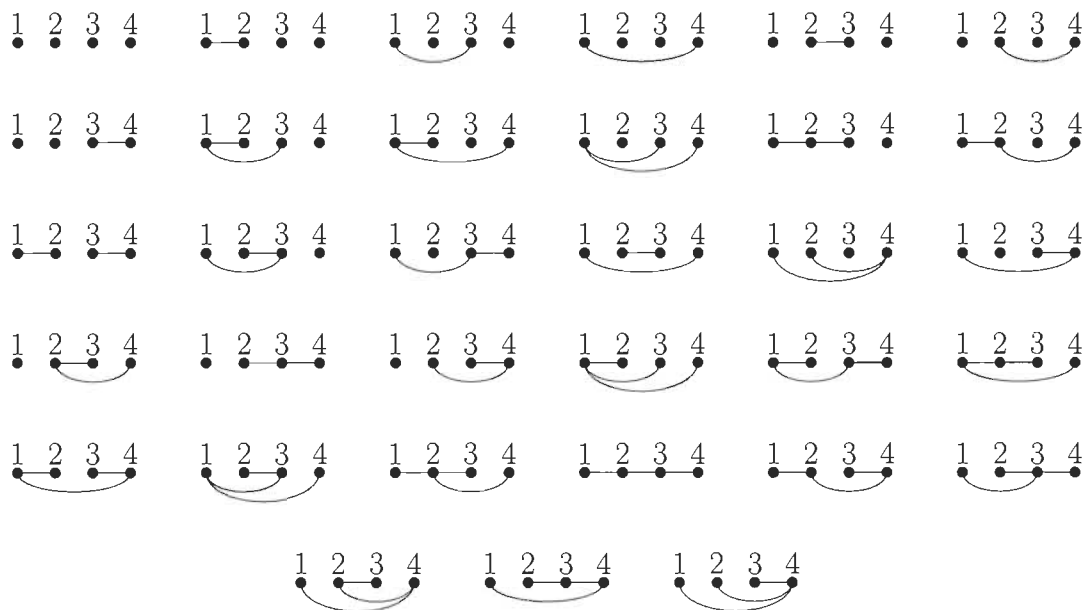
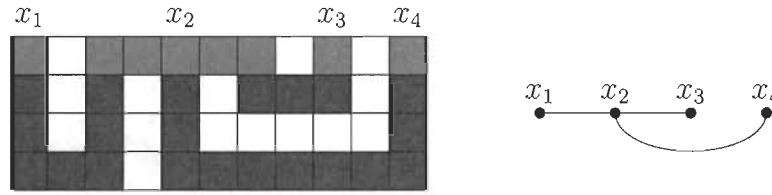


FIGURE 3.16 – Ensemble des liaisons singulières possibles sur 4 éléments.

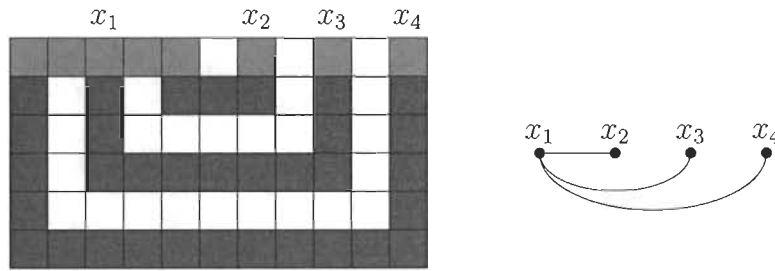
r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$l_1(r)$	1	2	7	33	181	1083	6854	45111	305629	2117283

TABLE 3.3 – Valeurs initiales de $l_1(r)$

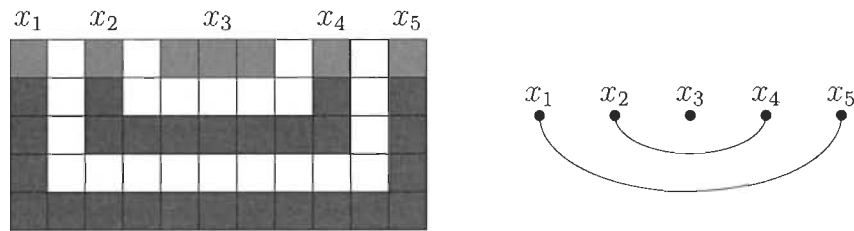
Théorème 3.4.0.1. [28] [29] Soit $l_+(r)$ le nombre de liaisons complètes de r composantes connexes et $L_+(x)$ sa série génératrice associée. Alors :



(a) Polyomino arbre de format 11×4 , mot 10111110101 sur la rangée 4, liaisons $\{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}\}$



(b) Polyomino arbre $a \in A_{11,6,11111010101}$, liaisons $\{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}\}$



(c) $a \downarrow_5 \in A_{11,5,10101110101}^3$, liaisons $\{\{x_1, x_5\}, \{x_2, x_4\}\}$

FIGURE 3.17 – Pré-polyominos arbres et leurs liaisons singulières

$$l_1(r) = \sum_{i \in [r]} \frac{1}{2r-i} \binom{r}{i-1} \binom{3r-2i-1}{r-i}$$

et $L_1(x)$ satisfait à l'équation :

$$2L_1^2(x) = x \left(1 - \sqrt{1 - 4L_1(x)}\right) (1 - L_1(x))$$

À partir des définitions et résultats présentés dans cette sous-section, il est possible de modifier la méthode d'énumération des polyominos arbres afin de prendre en compte les liaisons des pré-polyominos arbres remontés étudiés. Seul le cas $b = 5$ sera présenté dû à la croissance du nombre de séries génératrices générées par la méthode simplifiée. La preuve est identique à celle des $b \in [4]$ sauf pour le choix des liaisons, et ceux-ci apparaissent dans les termes des séries génératrices formés à partir des ensembles de la forme $A_{b,h,c,l_1(a,c),\dots,l_k(a,c)}^i$ vu à la définition 3.4.0.1. Les équations développées par la méthode d'énumération sont présentées à l'annexe A.1.

Proposition 3.4.0.1. *Soit $A_5(x) = \sum_{h \geq 1, n \geq 5} a_{5,h} x^h$ la série génératrice des polyominos arbres de format $5 \times h$. Alors :*

$$A_5(x) = \sum_{h \geq 1} a_{5,h} x^h = \frac{a}{b}$$

$$\begin{aligned} a = & x(1 + 12x - 138x^2 - 442x^3 + 8066x^4 - 19632x^5 - 93296x^6 + 565020x^7 - 263664x^8 - \\ & 4921548x^9 + 10473053x^{10} + 20636687x^{11} - 105804372x^{12} + 95654171x^{13} + 135608444x^{14} - \\ & 469337516x^{15} + 2339030864x^{16} - 7038741324x^{17} + 1822798767x^{18} + 27922855673x^{19} - \\ & 41455085521x^{20} + 19824712858x^{21} - 137908795741x^{22} + 349179705919x^{23} + \\ & 224839608427x^{24} - 2110820089854x^{25} + 3568719434544x^{26} - 1767272940096x^{27} - \\ & 4338388380635x^{28} + 13150237016105x^{29} - 18889051163649x^{30} + 10284294106563x^{31} + \\ & 18455373492162x^{32} - 50487994589284x^{33} + 50957209225312x^{34} - 482194011440x^{35} - \\ & 63283895537344x^{36} + 67329790499008x^{37} - 8201085160704x^{38} - 35498140645504x^{39} + \\ & 26746370701056x^{40} - 3701189458944x^{41} - 4088307769344x^{42} + 2489588895744x^{43} - \\ & 657807925248x^{44} + 54614458368x^{45} + 8576630784x^{46} + 5096079360x^{47} + 1528823808x^{48}) \\ b = & (1 - 5x + 4x^2 + 7x^3 - 21x^4 + 24x^5 + 6x^6)(1 - 8x + 4x^2 + 55x^3 - 167x^4 + 180x^5 + \\ & 214x^6 - 653x^7 + 1232x^8 - 2428x^9 + 1968x^{10} - 96x^{11} + 192x^{12})(+1 - 21x + 125x^2 + 4x^3 - \\ & 3567x^4 + 18660x^5 - 29430x^6 - 109048x^7 + 699995x^8 - 1717419x^9 + 1953674x^{10} + 1196704x^{11} - \\ & 14184038x^{12} + 52932713x^{13} - 107188611x^{14} + 63558714x^{15} + 164358479x^{16} - 434816948x^{17} + \\ & 980379306x^{18} - 2331319518x^{19} + 2123461888x^{20} + 3699374131x^{21} - 10518055454x^{22} + \\ & 7325826940x^{23} + 3797581168x^{24} - 9443519392x^{25} + 6219508288x^{26} - 1514793600x^{27} - \\ & 335356416x^{28} + 349516800x^{29} - 93634560x^{30} + 6635520x^{31}) \end{aligned}$$

Chapitre 4

Polyominos arbres pleinement feuillus

Ce chapitre porte sur les polyominos arbres ayant un nombre maximal de feuilles selon le nombre de cellules, nommés polyominos arbres pleinement feuillus. Il forme le sujet conjoint d'étude principal des polyominos arbres inscrits du chapitre précédent. Les polyominos arbres pleinement feuillus sont un sujet d'étude récent et les premiers résultats ne datent que de quelques années [13].

Ce chapitre constitue principalement un développement sur les idées développées dans [13]. On y détermine le nombre maximal de feuilles selon le nombre de cellules du polyomino arbre et on établit une bijection entre les polyominos arbres de taille n et les polyominos arbres pleinement feuillus de taille $4n + 1$. On y introduit le concept d'amas et on énumère certaines classes de polyominos arbres pleinement feuillus possédant un nombre déterminé de cellules de chaque degré. Finalement, on parle des concepts de *kiss* et coins qui procurent une relation additionnelle entre les polyominos arbres de taille n et les polyominos arbres pleinement feuillus de taille $4n + 1$ à partir d'une expansion sur la définition de connexité entre cellules. D'abord, définissons les objets fondamentaux étudiés dans ce chapitre.

4.1 Définitions

Définition 4.1.0.1. *Soit un polyomino arbre p et les cellules c de p . Le **degré total** de p , noté $D(p)$, est $D(p) = \sum_{c \in p} \deg(c)$.*

Notation 4.1.0.1. On note $n_i(p)$ le nombre de cellules de degré i d'un polyomino arbre p .

Définition 4.1.0.2. Soit un polyomino arbre p . La **distribution des degrés** de p est le quadruplet $(n_1(p), n_2(p), n_3(p), n_4(p))$.

Définition 4.1.0.3. Soit un polyomino arbre p . Un **d -amas** ou **d -cluster** de p est un ensemble connexe non-vide maximal de cellules de degré d dans p . Le degré d'un amas est le degré de ses cellules. On note $A(p)$ l'ensemble des amas dans p . On note $A_d(p)$ l'ensemble des d -amas de p et $a_d(p)$ le nombre de d -amas dans p . La **distribution des amas** de p est le quadruplet $(a_1(p), a_2(p), a_3(p), a_4(p))$.

Lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté possible sur le polyomino arbre, les notations n_i , a_i et A seront utilisées au lieu de $n_i(p)$, $a_i(p)$ et $A(p)$.

Définition 4.1.0.4. Soient c, d et e trois cellules d'un polyomino arbre p . On dit que e est **entre** c et d s'il existe un chemin de cellules d'extrémités c et d contenant e . Un amas E est **entre** deux amas C et D s'il existe un chemin de cellules d'extrémités $c \in C$ et $d \in D$ contenant une cellule $e \in E$.

Définition 4.1.0.5. Soit p un polyomino arbre. Un **sous-arbre** de p est un sous-graphe de p qui est un arbre.

Notation 4.1.0.2. Soit P_n l'ensemble des polyominos arbres de taille n . On note $F(n)$ le nombre maximal de feuilles d'un polyomino arbre de taille n . En d'autres termes :

$$F(n) = \max\{n_1(p), p \in P_n\}$$

Définition 4.1.0.6. Un **polyomino arbre pleinement feuillu** est un polyomino arbre de taille n et possédant $F(n)$ feuilles.

4.2 Relations entre cellules et amas

Lemme 4.2.0.1. *Soit p un polyomino arbre de taille $n \geq 3$ et A_d l'ensemble de ses d -amas.*

1. *Pour tout $a \in A_d$ où $d \in \{1, 4\}$: $|a| = 1$.*
2. *Pour toute paire d'amas $(a_d, b_{d'})$ avec $a_d \in A_d, b_{d'} \in B_{d'}, d, d' \in \{3, 4\}$, il existe au moins un 2-amas entre a_d et $b_{d'}$.*

Démonstration. 1. Soit une feuille f connexe à une cellule c . Par définition de feuille, $deg(f) = 1$, donc elle n'est voisine que de c . Supposons $deg(c) = 1$. Alors c n'est voisine que de f et les deux cellules sont seules voisines l'une de l'autre. Par hypothèse, $n \geq 3$, donc il existe au moins une autre cellule dans a et a n'est pas connexe. Il y a contradiction car a est par hypothèse connexe. Ainsi, $deg(c) \geq 2$. Par hypothèse, f n'est voisine que de c , donc f est seule dans son amas.

Soient c, c' deux cellules adjacentes où $deg(c) = 4, deg(c') \geq 3$. La structure de a, b et des cellules qui leur sont voisines est l'une de celle présentée à la figure 4.1. Cette structure forme un cycle et contredit l'hypothèse que p est un arbre. Ainsi, on rejette l'hypothèse qu'il existe une cellule de degré ≥ 3 adjacente à une cellule de degré 4 dans un polyomino arbre et en particulier, pour tout 4-amas a_4 : $|a_4| = 1$.

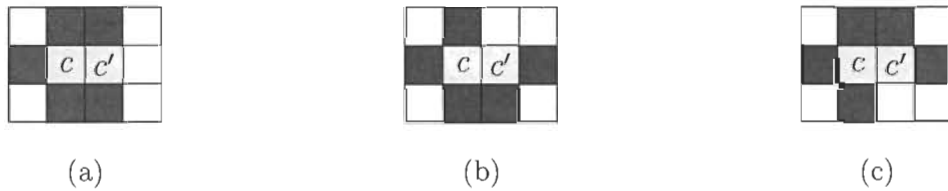


FIGURE 4.1 – Cellules de degré 4 et 3, en jaune, et leurs cellules voisines en bleu.

2. Prenons un chemin de cellules $c_1 \dots c_k$ où $c_1 \in a_d, c_k \in b_{d'}, d, d' \geq 3$ et c_1, c_k ne font pas partie du même amas. Pour prouver ce lemme, il faut traiter trois cas :

- (a) $d = 4, d' = 3$.
- (b) $d = d' = 4$.

(c) $d = d' = 3$.

Prenons le premier cas. Soit $c_1 \in a_4, c_k \in b_3$. Si $k = 2$, alors par la description de la première partie du lemme 4.2.0.1, $\deg(c_2) \notin \{3, 4\}$, donc $\deg(c_2) \leq 2$. Par hypothèse, $\deg(c_k) \geq 3$, alors $k \geq 3$ pour assurer la non-adjacence de c_1 et c_k . Par connexité de c_1 et c_3 , $\deg(c_2) \geq 2$. La combinaison des inégalités sur $\deg(c_2)$ implique que $\deg(c_2) = 2$ et le résultat suit pour les cas 2a et 2b.

Soit $c_1 \in a_3, c_k \in b_3$. Si $k = 2$, alors c_1 et c_k sont adjacentes et par définition de maximalité d'amas, font partie du même 3-amas et $a_3 = b_3$. Il y a contradiction avec l'hypothèse que $a_3 \neq b_3$, donc $k \geq 3$. Par cette même hypothèse, il existe $i \in \{2, \dots, k-1\}$ pour lequel $\deg(c_i) \neq 3$. Soit c_i cette cellule de degré différent de 3. Par la description de la première partie du lemme 4.2.0.1, $\deg(c_i) \neq 4$ et par connexité avec c_{i-1} et c_{i+1} , $\deg(c_i) \geq 2$, donc $\deg(c_2) = 2$ et le résultat suit pour le cas .

□

Corollaire 4.2.0.1. *Soit un polyomino arbre p et $(a_i, i \in [4])$ sa distribution d'amas. Alors :*

$$a_2 \geq a_3 + a_4 - 1$$

Démonstration. D'abord, les cas où $a_3 + a_4 \leq 1$ donne le résultat trivial $c_2 \geq 0$. Supposons $c_3 + c_4 \geq 2$. Par la deuxième partie du lemme 4.2.0.1, il existe au moins un 2-amas entre un d -amas et un d' -amas où $d, d' \in \{3, 4\}$ et les 2-amas représentent donc des arêtes entre les 3 et 4-amas d'un arbre dont les sommets sont les 3 et 4-amas. Par le corollaire 2.1.0.1, il y a donc au moins $a_3 + a_4 - 1$ 2-amas.

□

4.3 Énumération

Notation 4.3.0.1. *Soit un polyomino arbre p . Pour les figures présentant un polyomino arbre dans ce chapitre :*

Notation 4.3.0.2. Soit un polyomino arbre p . Pour les figures présentant un polyomino arbre dans ce chapitre :

$$\text{On colorie une cellule } c \text{ de } p \text{ en : } \begin{cases} \text{blanc} & \text{si } c \text{ est une feuille.} \\ \text{jaune} & \text{si } c \text{ est de degré 2.} \\ \text{bleu} & \text{si } c \text{ est de degré 3.} \\ \text{rouge} & \text{si } c \text{ est de degré 4.} \end{cases}$$

Proposition 4.3.0.1. Soit $F(n)$ le nombre maximal de feuilles d'un polyomino arbre de taille n . Alors :

$$F(n) = \begin{cases} 2k + 1 & \text{si } n = 4k, k \in \mathbb{N} \\ 2(k + 1) & \text{si } n = 4k + i, i \in \{1, 2, 3\}, k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (24)$$

Démonstration. Démontrons d'abord que les valeurs de $F(n)$ en (24) sont des bornes minimales. La preuve se fait par construction. Considérons les familles de polyominos de la figure 4.2.

Chaque polyomino arbre de taille $n \equiv i \pmod{4}, i \in \{0, \dots, 36\}$ tel que présenté à la figure 4.2 est construit par récurrence en adjoignant une suite de longueur k de polyominos arbres tels que présenté à la figure 4.3, nommé arbre pièce, de façon à ce que la cellule de degré 3 de l'arbre pièce soit voisine d'une feuille. La méthode est représentée par la figure 4.4. Ensuite, on ajoute les i cellules restantes à droite de façon à obtenir le polyomino arbre désiré de la figure 4.2.

On peut aisément vérifier que la juxtaposition de k pièces résultant en le polyomino arbre de la figure 4.2a possède $4k$ cellules et $2k + 1$ feuilles. Pour chaque ajout de cellule résultant en un polyomino arbre représenté dans l'une des autres figures, une feuille est ajoutée et on obtient $2k + 2$ feuilles. Ces nombres de feuilles selon la taille sont des bornes inférieures de $F(n)$ et sont donnés par les expressions :

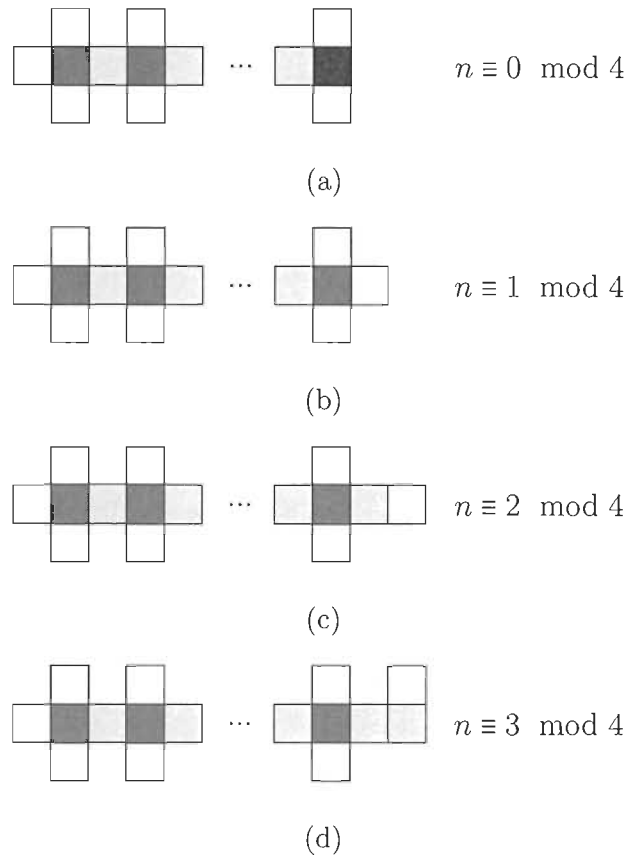


FIGURE 4.2 – Polyominos arbres de taille $n \equiv i \pmod{4}, i \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned}
 n = 4k, \text{ alors } F(n) &\geq 2k + 1 = \frac{4k + 2}{2} = \frac{n + 2}{2} \\
 n = 4k + 1, \text{ alors } F(n) &\geq 2k + 2 = \frac{(4k + 1) + 3}{2} = \frac{n + 3}{2} \\
 n = 4k + 2, \text{ alors } F(n) &\geq 2k + 2 = \frac{(4k + 2) + 2}{2} = \frac{n + 2}{2} \\
 n = 4k + 3, \text{ alors } F(n) &\geq 2k + 2 = \frac{(4k + 3) + 1}{2} = \frac{n + 1}{2}
 \end{aligned}$$

Démontrons maintenant que les valeurs de $F(n)$ mentionnées sont des bornes supérieures de $F(n)$. Soit un arbre a de taille n et de distribution de degrés (n_1, n_2, n_3, n_4) . La taille de a est donnée par le nombre total de ses cellules et sommable selon le nombre total de cellules de chaque degré. Aussi, a est un arbre au sens de la théorie des graphes et il existe donc $n - 1$ liens de voisinage entre deux cellules dans a ou arêtes dans son graphe représentatif. Par ces éléments et le corollaire 2.1.0.1, nous avons les relations

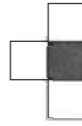


FIGURE 4.3 – Arbre pièce

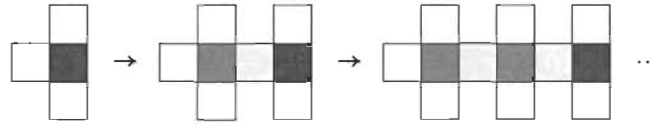


FIGURE 4.4 – Construction récursive d’un polyomino arbre par juxtaposition d’un arbre pièce.

suyvantes sur n :

$$n = \sum_{i=1}^4 n_i \tag{25}$$

$$2(n - 1) = \sum_{i=1}^4 i n_i \tag{26}$$

En remplaçant n dans l’équation 26 par son expression donné par l’équation 25 et en isolant n_1 ou n_4 , nous obtenons les expressions suivantes des éléments n_i de la distribution de degrés.

$$n_1 = n_3 + 2n_4 + 2 \tag{27}$$

$$n_4 = \frac{n_1 - n_3 - 2}{2} \tag{28}$$

Supposons $n_1 \geq 2k + 3$ et tentons de minimiser $n = 4k + i$ pour lequel les équations (25) et (26) sont respectées. Pour $n_3 = 0$ et $n_3 \geq 1$, nous obtenons les équations suivantes en substituant l’inégalité dans l’équation 28 :

$$n_3 = 0, \text{ alors } n_4 = \frac{n_1 - n_3 - 2}{2} \geq \frac{2k + 1}{2} \geq k + 1 \quad (29)$$

$$n_3 \geq 1, \text{ alors } n_4 = \frac{n_1 - n_3 - 2}{2} \geq \frac{2k}{2} = k \quad (30)$$

Par les égalités et inégalités (29) et (30), nous obtenons du lemme 4.2.0.1 :

$$n_3 = 0, \text{ alors } n_2 \geq c_2 \geq c_3 + c_4 - 1 = n_4 - 1 \geq (k + 1) - 1 = k$$

$$n_3 \geq 1, \text{ alors } n_2 \geq c_2 \geq c_3 + c_4 - 1 = n_4 \geq k$$

Des différentes bornes données pour chacune des valeurs de n_i , nous obtenons la borne minimale pour la taille n suivante :

$$n_3 = 0, \text{ alors } n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \geq (2k + 3) + k + 0 + (k + 1) = 4k + 4$$

$$n_3 \geq 1, \text{ alors } n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \geq (2k + 3) + k + 1 + k = 4k + 4$$

Par l'ensemble des hypothèses établies, nous obtenons la condition : $n_1 \geq 2k + 3$, alors $n \geq 4k + 4$ et par contraposée : $n \leq 4k + 3$, alors $n_1 \leq 2k + 2$. Supposons $n_1 \geq 2k + 2$ et appliquons le même procédé pour déterminer une borne maximale de n . Sans perte de généralité, nous obtenons, pour $n_3 = 0$ et $n_3 \geq 1$:

$$n_3 = 0, \text{ alors } n_4 = \frac{n_1 - n_3 - 2}{2} \geq \frac{2k}{2} = k$$

$$n_2 \geq c_2 \geq c_3 + c_4 - 1 = n_4 - 1 \geq k - 1$$

$$n_3 \geq 1, \text{ alors } n_4 = \frac{n_1 - n_3 - 2}{2} \geq \frac{2k - 1}{2} \geq k - 1$$

$$n_2 \geq c_2 \geq c_3 + c_4 - 1 = n_4 \geq k - 1$$

À partir des nouvelles inégalités sur n_i , on obtient la borne suivante pour n :

$$\begin{aligned} n_3 = 0, \text{ alors } n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 &\geq (2k + 2) + (k - 1) + 0 + k = 4k + 1 \\ n_3 \geq 1, \text{ alors } n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 &\geq (2k + 2) + (k - 1) + 1 + (k - 1) = 4k + 1 \end{aligned}$$

La condition que $n_1 \geq 2k + 2$, alors $n \geq 4k + 1$ implique par contraposée que $n \leq 4k$, alors $n_1 \leq 2k + 1$. En résumé, nous avons obtenu les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} n \leq 4k + 3, \text{ alors } n_1 &\leq 2k + 2 \\ n \leq 4k, \text{ alors } n_1 &\leq 2k + 1 \end{aligned}$$

et les inégalités s'appliquent en particulier pour $F(n)$, et le résultat suit. \square

4.4 Distributions

Théorème 4.4.0.1. *Soit p un arbre de taille n pleinement feuillu. Alors :*

$$p \text{ est de distribution de degrés } \begin{cases} (2k + 1, n_4, 2(k - n_4) - 1, n_4), 0 \leq n_4 \leq k - 1 \text{ si } n = 4k \\ (2(k + 1), k - 1, 0, k), \text{ si } n = 4k + 1 \\ (2(k + 1), n_4, 2(k - n_4), n_4), 0 \leq n_4 \leq k \text{ si } n = 4k + 2 \\ (2(k + 1), n_4 + 1, 2(k - n_4), n_4), 0 \leq n_4 \leq k \text{ si } n = 4k + 3 \end{cases}$$

Démonstration. Soit $n = 4k$. Par l'équation (27), on établit les bornes de n_4 , soit $n_4 \in \{0, \dots, k - 1\}$. De la même façon, on déduit que $n_4 \in \{0, \dots, k\}$ pour $n = 4k + i, i \in [3]$. Encore par l'équation (27) et par (25), on en déduit que :

$$\begin{aligned} n = 4k, \text{ alors } n_3 &= 2(k - n_4) - 1 \\ n = 4k + i, \text{ alors } n_3 &= 2(k - n_4), i \in [3] \end{aligned}$$

Par l'équation (25), on obtient que $n_2 = n - n_1 - n_3 - n_4$. Avec les valeurs de $F(n)$ et de n_3 , on obtient les valeurs de n_2 suivantes :

$$n = 4k, \text{ alors } n_2 = 4k - (2k + 1) - (2(k - n_4) - 1) - n_4 = n_4$$

$$n = 4k + i, \text{ alors } n_2 = 4k + i - (2k + 2) - (2(k - n_4)) - n_4 = n_4 + i - 2, i \in [3]$$

Soit $n = 4k + 1$ et posons $n_3 \geq 1$. Par (27) et le lemme 4.2.0.1 :

$$n_4 = \frac{n_1 - n_3 - 2}{2} = \frac{2k - n_3}{2}$$

$$n_2 \geq c_2 \geq c_3 + c_4 - 1 \geq n_4 = \frac{2k - n_3}{2}$$

Par (25), on a : $n = \sum_{i \in [4]} n_i \geq 2k + 2 + \frac{2k - n_3}{2} + n_3 + \frac{2k - n_3}{2} = 4k + 2$. Il y a contradiction avec l'hypothèse que $n = 4k + 1$, donc $n_3 = 0$. Par (27) et le lemme 4.2.0.1, on établit que $n_4 = k$ et $n_2 \geq k - 1$. Par (25) : $n = \sum_{i \in [4]} n_i = 4k + 1$ si et seulement si $n_2 = k - 1$. Nous avons alors que les distributions possibles de a selon les différentes inégalités posées sont :

$$(n_1, n_2, n_3, n_4) = \begin{cases} (2k + 1, n_4, 2(k - n_4) - 1, n_4), 0 \leq n_4 \leq k - 1 \text{ si } n = 4k \\ (2(k + 1), n_4 - 1, 2(k - n_4), n_4) \text{ si } n = 4k + 1 \\ (2(k + 1), n_4, 2(k - n_4), n_4), 0 \leq n_4 \leq k \text{ si } n = 4k + 2 \\ (2(k + 1), n_4 + 1, 2(k - n_4), n_4), 0 \leq n_4 \leq k \text{ si } n = 4k + 3 \end{cases}$$

Démontrons par construction l'existence de polyominos arbres ayant chacune des distributions énoncées. Soit le polyomino arbre de la figure 4.5, composé d'un 3-amas de taille n_3 quelconque et de feuilles. Par 27, le nombre de feuilles connexes au 3-amas est $n_3 + 2$. La figure 4.6 présente les différents cas de taille et leur distribution de degrés.

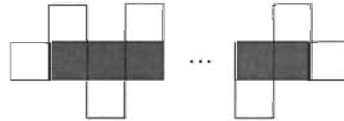


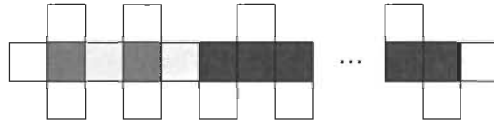
FIGURE 4.5 – 3-amas de taille quelconque avec les feuilles connexes

Soit $n = 4k$. Prenons $n_4, n_4 \in \{0, \dots, k - 1\}$ arbres pièces de la figure 4.3 et un polyomino arbre décrit à la figure 4.5 dont le 3-amas est de taille $2(k - n_4) - 1$. Construisons

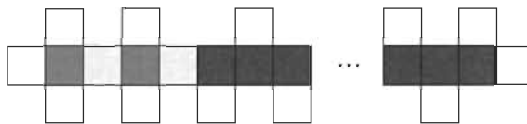
un polyomino arbre de façon similaire à la construction de la figure 4.4 avec les arbres pièces, puis connectons la cellule de degré 3 du polyomino arbre construit à une feuille adjacente au 3-amas. Par construction, on obtient un polyomino arbre de taille $4k$ et de distribution $(2k + 1, n_4, 2(k - n_4) - 1, n_4)$ où $n_4 \in \{0, \dots, k - 1\}$.

Soit $n = 4k + 2$. La construction est similaire au cas $n = 4k$ excepté pour $n_4 \in \{0, \dots, k\}$ arbres pièces et le 3-amas du polyomino arbre décrit à la figure 4.5 est de taille $2(k - n_4)$. Par construction, on obtient un polyomino arbre de taille $4k$ et de distribution $(2k + 2, n_4, 2(k - n_4), n_4)$ où $n_4 \in \{0, \dots, k\}$.

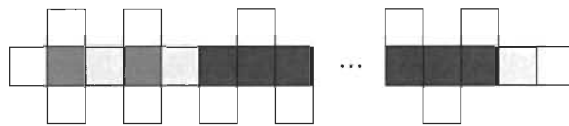
Soit $n = 4k + 3$, simplement prendre la construction pour le cas $n = 4k + 2$ et ajouter une feuille connexe à une autre feuille du polyomino arbre pleinement feuillu, augmentant n_2 d'une unité, et le résultat suit.



(a) Distribution de degrés $(2k + 1, n_4, 2(k - n_4) - 1, n_4)$



(b) Distribution de degrés $(2k + 2, n_4, 2(k - n_4), n_4)$



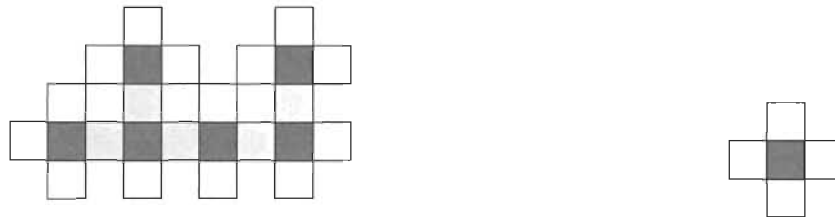
(c) Distribution de degrés $(2k + 2, n_4 + 1, 2(k - n_4), n_4)$

FIGURE 4.6 – Polyominos arbres de distributions de degrés données

□

Les polyominos arbres pleinement feuillus de taille $4k + 1$ possèdent une structure particulière. Voyons un exemple à la figure 4.7a de ces arbres pleinement feuillus. Il est possible d'identifier plusieurs sous-arbres du polyomino de la figure 4.7a de taille 5 et

possédant 4 feuilles. Ce polyomino arbre que nous nommerons *croix* est présenté à la figure 4.7b.



(a) Polyomino arbre pleinement feuillu de taille 25 et à 14 feuilles.

(b) Croix

FIGURE 4.7 – Polyomino arbre pleinement feuillu et croix

À la figure 4.8, les croix de la figure 4.7b sont encerclées pour mieux les visualiser.

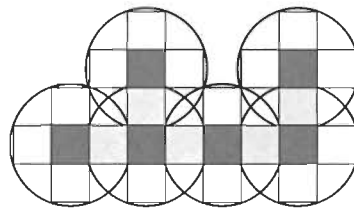


FIGURE 4.8 – Cellules de degré 2 et 4.

La figure 4.8 présente les cellules de degré 2 de la figure 4.7a, en jaune, qui sont chacune adjacente à un couple de centre de croix ou de cellules de degré 4, en rouge. Chaque cellule de degré 2 est associée à un couple de croix et de cellules de degré 4 séparées par une cellule de la même façon qu’une arête commune à deux cellules adjacentes. Dans ce cas-ci, les cellules adjacentes sont associées aux cellules de degré 4 des polyominos arbres pleinement feuillus. La définition suivante pose formellement cette association et fournit un résultat intéressant.

Définition 4.4.0.1. Soit P_n l’ensemble des polyominos arbres de taille n , $p \in P_n$. La **transformation croix** est l’application Cr sur P_n transformant p de la façon suivante :

1. On retire tout lien d’adjacence entre chaque couple de cellules de p .

2. On place quatre cellules adjacentes à chaque cellule de p .
3. Pour tout couple de cellules adjacentes $\{x_1, x_2\}$ dans p , soit les arêtes de x_1 et x_2 par lesquelles x_1 et x_2 sont adjacentes. Chaque couple de cellules ajoutées à l'étape 2 qui sont adjacentes à x_1 et x_2 par ces arêtes est unifié.

La transformation croix peut être représentée dans le réseau \mathbb{N}^2 de la façon suivante : Soit $p \in P_n$ et $C(a) = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid c(a, x, y) = 1\}$ l'ensemble des coordonnées des cellules de a . Alors :

$$C(Cr(a)) = C^*(a) \cup F(a) \text{ où :}$$

$$C^*(a) = \{(2x, 2y) \mid (x, y) \in C(a)\}$$

$$F(a) = \{(x + 1, y), (x - 1, y), (x, y + 1), (x, y - 1) \mid (x, y) \in C^*(a)\}$$

où $C^*(a)$ est l'ensemble des cellules de a espacées d'une cellule et $F(a)$ est l'ensemble des cellules adjacentes aux cellules de $C^*(a)$. On se fie à la figure 4.9 pour visualiser la transformation croix. La transformation fait en sorte de transformer chaque cellule de a en cellules de degré 4, et chacune de ses arêtes communes à une autre cellule par une cellule de degré 2. On désire démontrer que Cr transforme les polyominos arbres en polyominos arbres pleinement feuillus et qu'il existe une transformation croix inverse. En conclusion, le but est de trouver une bijection entre les polyominos arbres de taille n et les polyominos arbres pleinement feuillus de taille $4n + 1$.

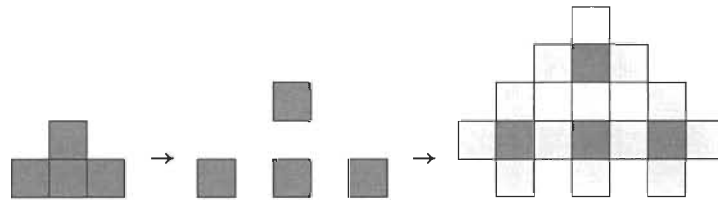


FIGURE 4.9 – Application de la transformation croix. Les cellules ajoutées par la transformation croix en jaune et celles du polyomino arbre initial en rouge.

Théorème 4.4.0.2. Soit P_n l'ensemble des polyominos arbres de taille n et S_{4n+1} l'en-

semble des polyominos arbres pleinement feuillus de taille $4n + 1$. Alors :

$$|P_n| = |S_{4n+1}|$$

Démonstration. Soit $p \in P_n$ de distribution de degrés (n_1, n_2, n_3, n_4) , et appliquons-lui Cr . On brise p et on place quatre cellules adjacentes à chacune des n cellules de p tel que présenté à la figure 4.9. Pour tout couple de cellules adjacentes $\{x, y\}$ dans p , il existe par construction un 3-uplet (x, z, y) de cellules dans $Cr(p)$, donc $Cr(p)$ est connexe. Soit (n'_1, n'_2, n'_3, n'_4) la distribution de degrés de $Cr(p)$.

Par construction et parce que $C^*(p)$ et $F(p)$ sont disjoints, $|Cr(p)| = |C^*(p)| + |F(p)|$. Trivialement, $|C^*(p)| = n$. On peut partitionner $F(p)$ de la façon suivante :

$$F(p) = \bigcup_{i \in [2]} F_i(p) = \bigcup_{i \in [2]} \{c \in F(p) \mid c \text{ est adjacente à } i \text{ cellules de } C^*(p).\}$$

Par construction, $|F_2(p)|$ est le nombre de cellules de $F(p)$ adjacentes à deux cellules de $C^*(p)$, soit le nombre de couples de cellules adjacentes de p . Par le corollaire 2.1.0.1, ce nombre est $n - 1$. Aussi par construction, $|F_1(p)|$ est $4n$ moins le nombre d'instances de cellules placés à une même coordonnée deux fois. Ce nombre est $2|F_2(p)|$ et $|F_1(p)| = 4n - 2|F_2(p)| = 2n + 2$. On obtient que la distribution de $Cr(p)$ est $(2n + 2, n - 1, 0, n)$. Par le corollaire 2.1.0.1, $\sum_{i \in [4]} in_i = 2|Cr(p)| - 2$ et donc $Cr(p)$ est un arbre. Par l'ensemble des résultats démontrés, $Cr(p)$ est un polyomino arbre, $|Cr(p)| = 4n + 1$ et $n_1(Cr(p)) = F(4n + 1)$, donc $Cr(p) \in S_{4n+1}$.

Soit $p' \in S_{4n+1}$. Par le théorème 4.4.0.1, p' est de distribution $(2n + 2, n - 1, 0, n)$. Par le corollaire 2.1.0.1, chaque cellule de degré 2 est adjacente à deux cellules de degré 4. Cela implique que toutes les feuilles ne sont adjacentes qu'aux cellules de degré 4. Soit Cr^{-1} l'application sur S_{4n+1} nommée transformation croix inverse telle que, pour $p' \in S_{4n+1}$:

1. On retire les $2(n + 1)$ feuilles de p' .
2. Pour chaque couple de cellules de degré 4, on retire la cellule de degré 2 entre les deux, puis on déclare adjacentes ces cellules de degré 4.

Pour tout 3-uplet de cellules adjacentes (x, z, y) dans un chemin de cellules dans p' où x, y sont des cellules de degré 4, x et ces 3-uplets sont de la forme (x, y) dans $Cr^{-1}(p')$, donc la connexité et l'acyclité de p' sont préservées dans $Cr^{-1}(p')$. Le nombre de cellules retirées de p' par Cr^{-1} est $2n + 2 + (n - 1) = 3n + 1$, d'où $|Cr^{-1}(p')| = n$. Ainsi, $Cr^{-1}(p')$ est un polyomino arbre de taille n et le résultat suit. \square

Théorème 4.4.0.3. *Soit un polyomino arbre pleinement feuillu p de taille n . Les distributions d'amas (a_1, a_2, a_3, a_4) de p sont de la forme :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (2k + 1, n_4, 1, n_4), 0 \leq n_4 \leq k - 1 \text{ si } n = 4k \\ (2(k + 1), k - 1, 0, k) \text{ si } n = 4k + 1 \\ (2(k + 1), k - 1, 0, k), (2(k + 1), k, 0, k), (2(k + 1), n_4, 1, n_4), 0 \leq n_4 \leq k \text{ si } n = 4k + 2 \\ (2(k + 1), n_4 - 1, 0, n_4), (2(k + 1), n_4, 0, n_4), (2(k + 1), n_4 + 1, 0, n_4), (2(k + 1), n_4, 1, n_4), \\ (2(k + 1), n_4 + 1, 1, n_4), (2(k + 1), n_4 + 1, 2, n_4), 0 \leq n_4 \leq k \text{ si } n = 4k + 3 \end{array} \right.$$

Démonstration. Pour le cas $n = 4k + 1$, chaque amas est unitaire et est donné par le théorème 4.4.0.1 car les distributions d'amas et de cellules sont identiques. Pour les autres cas, nous avons que par le lemme 4.2.0.1 et le théorème 4.4.0.1 : pour tout $n : a_1 = n_1$ et $a_4 = n_4$. Par le lemme 4.2.0.1 : $a_3 + a_4 - 1 \leq a_2 \leq n_2$ et trivialement, $0 \leq a_3 \leq n_3$. Voyons les cas particuliers de a_2 et a_3 donnés selon n :

$$n = 4k, \text{ alors } n_4 \leq a_3 + a_4 - 1 \leq a_2 \leq n_2 = n_4, \text{ alors } a_2 = n_4$$

$$n = 4k + 2, \text{ alors } n_4 - 1 \leq a_3 + n_4 - 1 \leq a_2 \leq n_2 = n_4, \text{ alors } a_2 \in \{n_4 - 1, n_4\}$$

$$n = 4k + 3, \text{ alors } n_4 - 1 \leq a_3 + n_4 - 1 \leq a_2 \leq n_2 = n_4 + 1, \text{ alors } a_2 \in \{n_4 - 1, n_4, n_4 + 1\}$$

Par le lemme 4.2.0.1 et le théorème 4.4.0.1, les bornes de a_3 sont données par $a_2 \leq n_2 - (n_4 - 1)$ et $a_3 \leq n_3 = n_1 - 2n_4 - 2$. Aussi $n_3 \geq 1$, alors $a_3 \geq 1$.

$$n = 4k, \text{ alors } n_3 = 2(k - n_4) - 1 \geq 1, \text{ alors } a_3 \geq 1$$

$$n = 4k, \text{ alors } a_3 + a_4 - 1 \leq a_2 \leq n_2 = n_4, \text{ alors } a_3 \leq 1$$

$$n = 4k + 2, \text{ alors } a_3 + a_4 - 1 \leq a_2 \leq n_2 = n_4, \text{ alors } a_3 \leq 1$$

$$n = 4k + 3, \text{ alors } a_3 + a_4 - 1 \leq a_2 \leq n_2 = n_4 + 1, \text{ alors } a_3 \leq 2$$

Pour $n = 4k$, on déduit que $a_3 = 1$. Pour $n = 4k+2$ et $a_3 = 0$, nous avons $a_2 \in \{n_4-1, n_4\}$. Pour $a_3 = 1$, nous avons $a_2 = n_4$. Pour $n = 4k+3$ et $a_3 = 0$, nous avons $a_2 \in \{n_4-1, n_4, n_4+1\}$. Pour $a_3 = 1$, nous avons $a_2 \in \{n_4, n_4+1\}$ et pour $a_3 = 2$, $a_2 = n_4+1$. Nous devons démontrer par construction que des polyominos arbres ayant les distributions d'amas mentionnées pour chaque taille existent.

Soit $n = 4k$. La construction présentée à la figure 4.6a possède la distribution d'amas formulée. Soit $n = 4k + 2$. Les polyominos des figures 4.2c et 4.6b présentent un cas pour les distributions d'amas respectives $(2k+2, n_4, 0, n_4)$ et $(2k+2, n_4, 1, n_4)$. Un déplacement de deux feuilles de la figure 4.2c tel que présenté à la figure 4.10 forme un polyomino arbre pleinement feuillu de taille $4k + 2$ et de distribution $(2k + 2, n_4 - 1, 0, n_4)$.

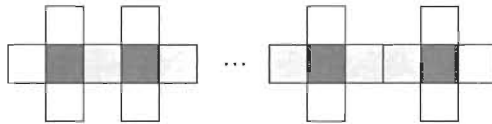


FIGURE 4.10 – Polyomino arbre pleinement feuillu de taille $4k + 2$ et de distribution d'amas $(2k + 2, n_4 - 1, 0, n_4)$

Soit $n = 4k + 3$. Les polyominos des figures 4.2d et 4.6c présentent un cas des distributions d'amas $(2k + 2, n_4, 0, n_4)$ et $(2k + 2, n_4 + 1, 1, n_4)$. On se fie à la figure 4.11 pour les exemples des autres distributions d'amas des polyominos arbres pleinement feuillus de taille $4k + 3$. En augmentant la taille du 2-amas du polyomino de la figure 4.10 d'une unité, on obtient un polyomino arbre pleinement feuillu de distribution d'amas $(2k + 2, n_4 - 1, 0, n_4)$. En adjoignant une feuille à une autre feuille du polyomino de la figure 4.2c autre que celle adjacente à une cellule de degré 2, on obtient un polyomino arbre pleinement feuillu de distribution d'amas $(2k+2, n_4+1, 0, n_4)$. Prenons le polyomino de la figure 4.6b. En plaçant une cellule entre ses cellules de degrés 2 et 3, on obtient un polyomino arbre pleinement feuillu de distribution d'amas $(2k + 2, n_4, 1, n_4)$. Finalement, en plaçant une cellule entre deux cellules du 3-amas, on obtient un polyomino arbre pleinement feuillu de distribution d'amas $(2k + 2, n_4 + 1, 2, n_4)$.

□

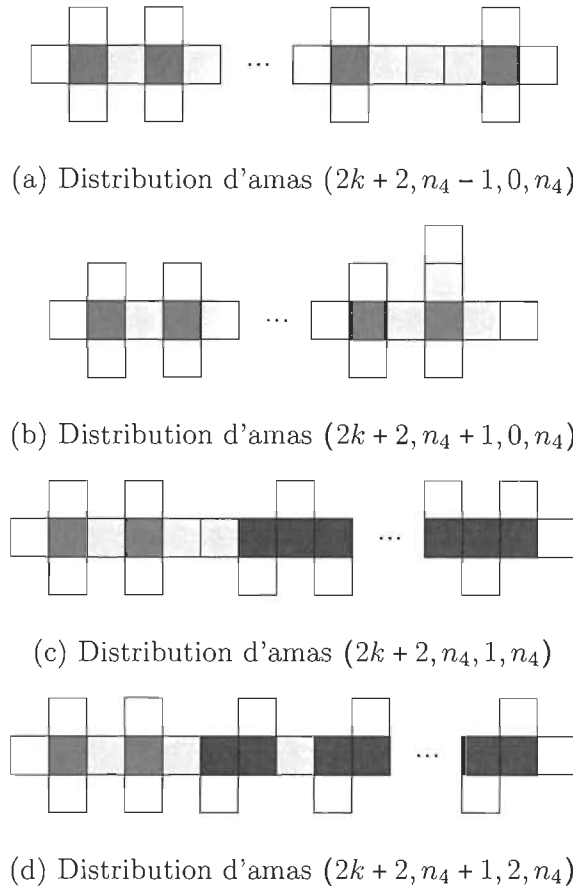


FIGURE 4.11 – Distributions d'amas de polyominoes arbres de taille $4k + 3$

4.5 Coins et *kiss*

La connexité entre deux cellules d'un polyomino est définie par convention comme l'adjacence de ces cellules par une arête. Cette définition est parfois appelée *4-connexité* [23] dû à la connexité entre deux cellules par l'une de leur quatre arêtes. Une variante de cette définition tient aussi compte de l'adjacence des cellules par un sommet comme condition de connexité, nommée *8-connexité* en raison des huit éléments par lesquels la connexité est possible. Ici, on s'intéresse à l'adjacence entre cellules par les sommets comme caractéristique mettant en relation les polyominoes arbres et les polyominoes arbres pleinement feuillus. Toutefois, la définition originale de connexité entre cellules sera préservée.

Définition 4.5.0.1. Soit un polyomino a . Un *coin* de a est un sous-polyomino arbre de a de format 2×2 et obtenu à symétrie près du polyomino de la figure 4.12. Le *centre*

d'un coin est la cellule de degré 2 du coin. On note $\text{coin}(a)$ le nombre de coins dans a .



FIGURE 4.12 – Coin

Les cellules d'un polyomino peuvent appartenir à plus d'un coin selon le sous-polyomino de format 2×2 choisi. Par exemple, la croix de la figure 4.7b possède quatre coins distincts. Sa cellule de degré 4 fait partie de chaque coin et chaque feuille fait partie de deux coins.

Définition 4.5.0.2. Soit un polyomino a . Un *kiss* est un pré-polyomino de format 2×2 , de taille 2 et obtenu à symétrie du pré-polyomino de la figure 4.13, soit un couple de cellules non-adjacentes, partageant un sommet en commun et ne partageant pas de cellule adjacente commune. Le *kissing number* de a , noté $\text{Kiss}(a)$, est le nombre de kiss de a .



FIGURE 4.13 – Kiss

Lemme 4.5.0.1. Soit a un polyomino arbre à n_1 feuilles. Alors :

$$\text{coin}(a) = 2(n_1 - 2) + \sum_{\substack{c \in a \\ \text{deg}(c)=2}} \chi(c \text{ est le centre d'un coin.})$$

où χ est la fonction caractéristique.

Démonstration. Soit un polyomino arbre a et supposons un sous-polyomino de format 2×2 de a . Le centre de chaque coin v de a est une cellule c de degré $\text{deg}(c) \in \{2, 3, 4\}$ voisine à deux autres cellules du coin. Si $\text{deg}(c) \in \{3, 4\}$, alors le sous-polyomino composé de c et de ses cellules adjacentes est obtenu à symétrie près d'un arbre pièce comme à la figure

4.3 ou une croix comme à la figure 4.7b. On identifie respectivement deux et quatre coins parmi ces sous-polyominos. Si $\deg(c) = 2$, alors le sous-polyomino composé de c et de ses cellules adjacentes est isomorphe à l'un des polyominos de la figure 4.14. Sans hypothèse additionnelle, il est impossible de connaître si une cellule de degré 2 est un centre de coin.



FIGURE 4.14 – Cellules de degré 2 centre et non-centre de coin (en rouge)

Le nombre de coins de a est donné en sommant les coins dont chaque cellule de degré $\deg(c) \in \{2, 3, 4\}$ est le centre et en appliquant la formule (27) :

$$\begin{aligned}
 \text{coin}(a) &= \sum_{i=2}^4 \sum_{c \in a} |\{v \in a \mid c \text{ est le centre de } v \text{ et } \deg(c) = i.\}| \\
 &= 2n_3 + 4n_4 + \sum_{c \in a} \chi(c \text{ est le centre de } v \text{ et } \deg(c) = 2) \\
 &= 2(n_3 + 2n_4) + \sum_{c \in a} \chi(c \text{ est le centre de } v \text{ et } \deg(c) = 2) \\
 &= 2(n_1 - 2) + \sum_{c \in a} \chi(c \text{ est le centre de } v \text{ et } \deg(c) = 2) \text{ (par (27))}
 \end{aligned}$$

□

Lemme 4.5.0.2. *Soient b, c deux cellules adjacentes dans un polyomino arbre a . Si $\deg(b) = 2$ et $\deg(c) = 4$, alors b n'est pas le centre d'un coin.*

Démonstration. Soit un polyomino arbre a et deux cellules voisines $b, c \in a$ telles que $\deg(b) = 2$, $\deg(c) = 4$. Si b est le centre d'un coin, alors la structure du polyomino est obtenue à symétrie près de celle de l'arbre de la figure 4.15 :

La structure comprend un cycle, ce qui contredit l'hypothèse que a est un arbre. Ainsi, b n'est pas le centre d'un coin.

□

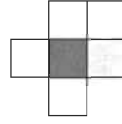


FIGURE 4.15 – Cellules centres de coins de degré 2 et 4 adjacentes

Lemme 4.5.0.3. *Soit a un polyomino arbre pleinement feuillu de taille n . Alors :*

$$\sum_{\substack{c \in \mathcal{C}a \\ \text{deg}(c)=2}} \chi(c \text{ est le centre d'un coin}) \begin{cases} = 0 & \text{si } n \equiv 0, 1, 2 \pmod{4} \\ \in \{0, 1\} & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Démonstration. Soit un polyomino arbre pleinement feuillu a . Par le lemme 4.2.0.1, on détermine que chaque couple d'amas de degré 3 et 4 doit être séparé par au moins une cellule de degré 2. Par les théorèmes 4.4.0.1 et 4.4.0.3, on calcule aisément le nombre de cellules de degré 2 pouvant ne pas être adjacente à un 4-amas.

Soit $n = 4k$. Par les théorèmes 4.4.0.1 et 4.4.0.3, $n_2 = n_4 = c_2$, donc chaque 2-amas est un singleton. Le nombre de 3-amas et 4-amas dans a est $n_4 + 1$, et par le lemme 4.2.0.1, chaque 2-amas est adjacent à au moins un 4-amas. Par le lemme 4.5.0.2, aucun de ces amas n'est le centre d'un coin. Par le même raisonnement, on déduit le même résultat pour les polyominos arbres pleinement feuillus de taille $n = 4k + 1$.

Soit $n = 4k + 2$. Par les théorèmes 4.4.0.1 et 4.4.0.3, a est de distribution de degrés $(2k + 2, n_4, 2(k - n_4), n_4)$, $0 \leq n_4 \leq k$ et de distribution d'amas $(2(k + 1), k - 1, 0, k)$, $(2(k + 1), k, 0, k)$ ou $(2(k + 1), n_4, 1, n_4)$, $0 \leq n_4 \leq k - 1$.

Supposons que la distribution d'amas de a est la première. Un 2-amas est de taille 2 et les autres sont des singletons. Par le lemme 4.2.0.1, chaque 2-amas est entre deux 4-amas. Comme chaque 2-amas est de taille 1 ou 2, alors chacune de ses cellules est voisine d'un 4-amas. Par le lemme 4.5.0.2, aucune cellule de degré 2 n'est le centre d'un coin.

Supposons la deuxième distribution d'amas. Par le théorème 4.4.0.1 et l'hypothèse de la distribution d'amas, $n_2 = c_2 = k$, donc chaque 2-amas est un singleton. D'entre eux, $k - 1$ sont entre deux 4-amas. Le dernier 2-amas ne peut qu'être entre un 4-amas et une feuille. Par le lemme 4.5.0.2, chaque 2-amas n'est pas le centre d'un coin.

Supposons la troisième distribution d'amas. Par le théorème 4.4.0.1 et l'hypothèse de la distribution d'amas, on a $n_2 = c_2 = n_4$. Donc chaque 2-amas est un singleton. La somme des 3-amas et 4-amas est $n_4 + 1$, donc par le lemme 4.2.0.1, chacun des n_4 2-amas est entre un couple de 4 et/ou 3-amas. Par hypothèse, $c_3 = 1$, donc chaque 2-amas est voisin à au moins un 4-amas. Par le lemme 4.5.0.2, aucun 2-amas n'est le centre d'un coin.

Soit $n = 4k + 3$. Par le théorème 4.4.0.1, a est de distribution de degrés $(2k + 2, n_4 + 1, 2(k - n_4), n_4), 0 \leq n_4 \leq k$. Par le théorème 4.4.0.3, la distribution d'amas de a est l'une des suivantes pour $n_4 \in \{0, \dots, k\}$:

1. $(2(k + 1), k - 1, 0, k)$
2. $(2(k + 1), k, 0, k)$
3. $(2(k + 1), k + 1, 0, k)$
4. $(2(k + 1), n_4, 1, n_4)$
5. $(2(k + 1), n_4 + 1, 1, n_4)$
6. $(2(k + 1), n_4 + 1, 2, n_4)$

Pour diverses distributions d'amas, il existe des exemples de polyominos arbres pleinement feuillus dont un centre de coin est une cellule de degré 2 tel que présenté à la figure 4.16. Démontrons que pour chaque distribution d'amas, le nombre de centre de coins de degré 2 est au plus un.



(a) Distribution d'amas $(2k+2, k-1, 0, k), k = 3$ (b) Distribution d'amas $(2k + 2, n_4 + 1, 1, n_4), n_4 = 1$ et centre de coin de degré 2

FIGURE 4.16 – Distributions d'amas permettant un centre de coin de degré 2

Supposons la première distribution d'amas. Par le lemme 4.2.0.1, chaque 2-amas est entre deux 4-amas. Tout 2-amas de taille inférieure ou égale à 2 a ses deux cellules adjacentes à un 4-amas. Dans un cas, $k - 2$ des 2-amas sont des singletons et un 2-amas est

de taille 3, et la cellule au centre du 2-amas n'est pas voisine d'un 4-amas. Seule cette cellule peut être au centre d'un coin.

Supposons la deuxième distribution d'amas. Par le théorème 4.4.0.1 et l'hypothèse de la distribution d'amas, $n_2 = k + 1$ et $c_2 = k$. On en déduit que $(k - 1)$ 2-amas sont des singletons et un 2-amas est de taille 2. Si le 2-amas de taille 2 est entre deux 4-amas, alors ses deux cellules sont adjacentes à un 4-amas. Sinon, il est entre un 4-amas et une feuille, et seule une cellule de degré 2 n'est pas voisine d'un 4-amas et peut être le centre d'un coin.

Supposons la troisième distribution d'amas. Par le théorème 4.4.0.1 et l'hypothèse de la distribution d'amas, $n_2 = c_2 = k + 1$, donc chaque 2-amas est un singleton. $k - 1$ 2-amas sont entre deux 4-amas et deux d'entre eux sont entre un 4-amas et une feuille. Chaque 2-amas est voisin d'un 4-amas et n'est pas le centre d'un coin.

Supposons la quatrième distribution d'amas. Par le théorème 4.4.0.1 et l'hypothèse de la distribution d'amas, $n_2 = n_4 + 1$ et $c_2 = n_4$, donc $n_4 - 1$ 2-amas sont des singletons et un 2-amas est de taille 2. La somme des 3-amas et 4-amas est $n_4 + 1$, donc par le lemme 4.2.0.1, chaque 2-amas est entre un 4 et/ou un 3-amas. La seule cellule de degré 2 non-adjacente à un 4-amas provient du 2-amas de taille 2 dans le cas où il est entre un 4-amas et un 3-amas et seule celle-ci peut être le centre d'un coin.

Supposons la cinquième distribution d'amas. Par le théorème 4.4.0.1 et l'hypothèse de la distribution d'amas, $n_2 = c_2 = n_4 + 1$, donc chaque 2-amas est un singleton. Il existe $n_4 + 1$ 3 et 4-amas. Par le lemme 4.2.0.1, n_4 2-amas sont entre deux 4-amas ou un 4-amas et un 3-amas, et de ce fait adjacent à un 4-amas. Ainsi, au plus un 2-amas singleton n'est pas adjacent à un 4-amas et peut être le centre d'un coin.

Supposons la dernière distribution d'amas. Par le théorème 4.4.0.1 et l'hypothèse de la distribution d'amas, $n_2 = c_2 = n_4 + 1$, donc chaque 2-amas est un singleton. La somme des 3-amas et 4-amas est $n_4 + 2$, donc par le lemme des poignées de main, tous ces 2-amas sont entre un 4 et/ou un 3-amas. Chaque 2-amas est soit entre deux 4-amas, un 4-amas et un 3-amas, ou deux 3-amas. Dans ce dernier cas, le 2-amas peut être le centre d'un coin. Pour chaque distribution d'amas de polyomino arbre pleinement feuillu de taille $4k + 3$, on vérifie qu'il existe au plus un centre de coin de degré 2.

□

En combinant les résultats des lemmes 4.5.0.1 et 4.5.0.3, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 4.5.0.1. *Soit a un polyomino arbre pleinement feuillu de taille n . Alors :*

$$\text{coin}(a) \begin{cases} = n - 2 & \text{si } n \equiv 0, 2 \pmod{4} \\ = n - 1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ \in \{n - 2, n - 3\} & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Proposition 4.5.0.1. *Soit un polyomino arbre a . Alors :*

$$\text{Kiss}(\text{Cr}(a)) = \text{coin}(a) + 2\text{Kiss}(a)$$

Démonstration. Soit a un polyomino arbre et définissons les ensembles de sous-polyominos et sous-pré-polyominos suivants :

$$L(a) = \{l \in a \mid l \text{ est un coin de } a.\}$$

$$K(a) = \{k \in a \mid k \text{ est un } \textit{kiss} \text{ de } a.\}$$

En d'autres termes, $L(a)$ est l'ensemble des coins de a et $K(a)$ est l'ensemble des *kiss* de a . Appliquons la transformation croix à $l \in L(a)$ et $k \in K(a)$. Les images sont présentées à la figure 4.17. On vérifie que l'image d'un coin l , soit $\text{Cr}(l)$, possède un *kiss* et l'image d'un *kiss* k , $\text{Cr}(k)$, possède deux *kiss*. On obtient alors la relation $\text{Kiss}(\text{Cr}(a)) \geq \text{coin}(a) + 2\text{Kiss}(a)$.

Tentons de démontrer que $\text{Kiss}(\text{Cr}(a)) \leq \text{coin}(a) + 2\text{Kiss}(a)$. Soit un polyomino arbre pleinement feuillu a' de taille $n = 4k + 1$. Par le théorème Soient k_1, k_2 les deux cellules d'un *kiss* $k \in K(a')$. Par le théorème 4.4.0.1, $\text{deg}(k_1), \text{deg}(k_2) \in \{1, 2, 4\}$. Sans perte de généralité, supposons $\text{deg}(k_1) = 4$. Alors k_1 et k_2 sont adjacents dans leur carré d'inscription comme vu à la figure 4.18a, ce qui contredit l'hypothèse que k est un *kiss*. Si $\text{deg}(k_1) = 2$, alors les cellules adjacentes à k_1 sont extérieures au carré d'inscription



FIGURE 4.17 – Application de la transformation croix sur un coin et un *kiss*.

tracé comme présenté à la figure 4.18b. Car k_1 est une cellule de degré 2 dans un polyomino arbre pleinement feuillu, les deux cellules qui lui sont adjacentes sont de degré 4. La position de ces cellules de degré 4 implique une position de leurs cellules adjacentes telle qu'un cycle est formé, contredisant l'hypothèse que a est un polyomino arbre. Ainsi, $deg(k_1) = deg(k_2) = 1$.



FIGURE 4.18 – Degrés de cellules de *kiss*

Par construction, k_1 et k_2 sont voisines uniquement à une cellule de degré 4 dans a' . Par hypothèse de *kiss*, il n'existe pas d'autres cellules dans le carré d'inscription du *kiss*. Ainsi, l'ensemble des cas des endroits où peuvent se trouver les 4-amas adjacents à k_1 et k_2 sont montrés à la figure 4.19.

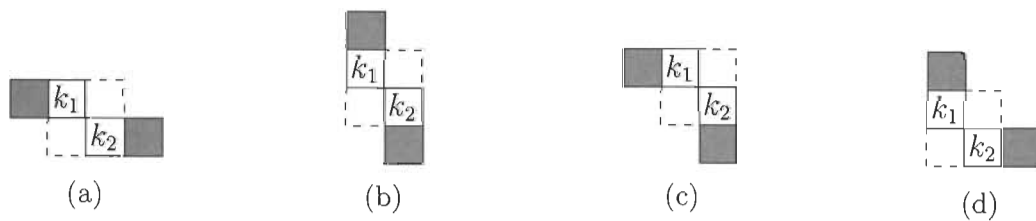


FIGURE 4.19 – Positions des 4-amas adjacents aux cellules d'un *kiss*.

Par le théorème 4.4.0.2, il existe un polyomino arbre a tel que $Cr(a) = a'$ et par la définition 4.4.0.1, L'ensemble des coordonnées des cellules de $a' = Cr(a)$ peut être partitionné en ensembles de la forme :

$$\begin{aligned} C(a') &= C^*(a) \cup F(a) \text{ où :} \\ C^*(a) &= \{(2x, 2y) \mid (x, y) \in C(a)\} \\ F(a) &= \{(x+1, y), (x-1, y), (x, y+1), (x, y-1) \mid (x, y) \in C^*(a)\} \end{aligned}$$

Par cette définition, les 4-amas de a' font partie de l'ensemble $C^*(a)$. À translation près, la parité de chaque coordonnée de tous les 4-amas de a' est préservée pour chaque coordonnée. C'est à dire que toutes les coordonnées en x des 4-amas ont la même parité et de même pour les coordonnées en y des 4-amas. Par cette condition, les cas des figures 4.19a et 4.19b sont impossibles car la parité des coordonnées en x et en y des deux 4-amas est différente. Ceci laisse les cas des figures 4.19c et 4.19d. Sans perte de généralité, ces deux cas sont équivalents à symétrie près et constituent un seul cas à traiter.

Par hypothèse, les cellules adjacentes à k_1 et k_2 sont de degré 4. Ajoutons les cellules adjacentes à ces cellules de degré 4. La structure obtenue est présentée à la figure 4.20a. Soient k_3, k_4 les cellules notées dans la figure 4.20a. Il existe un *kiss* entre les couples de cellules $\{k_1, k_2\}$ et $\{k_3, k_4\}$. Par hypothèse, il existe un chemin de cellules entre k_1 et k_2 et deux cas sont possibles : Soit il existe une cellule adjacente à k_1 et k_2 (ou de manière équivalente, à k_3 et k_4), où il n'existe pas de cellules adjacentes à l'un de ces couples de cellules. Supposons qu'il n'en existe pas. Alors la préimage du pré-polyomino de la figure 4.20a est un *kiss*. Supposons sans perte de généralité qu'il existe une cellule c adjacente à k_1 et k_2 . Alors $deg(k_1) = deg(k_2) = 2$ et par hypothèse de construction d'un polyomino arbre pleinement feuillu, $deg(c) = 4$. L'ensemble des cellules obtenu en ajoutant c et ses cellules adjacentes est vu à la figure 4.20b. La préimage de ce sous-polyomino est un coin. Des deux cas obtenus, on démontre que les *kiss* d'un polyomino arbre pleinement feuillu viennent en singleton ou en couple et la préimage de ces *kiss* est respectivement un coin ou un *kiss*, et le résultat suit.

□



FIGURE 4.20 – Structures de *kiss* d'un polyomino arbre issu de la transformation croix

Conclusion

Le but de ce document est d'étudier diverses classes de polyominos arbres afin d'obtenir des résultats permettant l'énumération des polyominos arbres de taille n . Ces classes comportent les polyominos arbres inscrits et pleinement feuillus. Leur étude est faite principalement par trois méthodes. D'abord, une méthode élémentaire d'énumération des polyominos qui vise à obtenir de l'information sur la connexité entre cellules et sur les dimensions du polyomino. Ensuite, la théorie des graphes fournit des propriétés des polyominos arbres qui accentuent l'importance des méthodes élémentaires d'énumération. Finalement, la théorie de Pólya présente une méthode algébrique pour obtenir les séries génératrices de classes d'objets combinatoires, notamment celles reliées aux arbres. Deux objectifs finaux peuvent être extrapolés de cette étude. La première est de développer des résultats permettant d'énumérer les polyominos arbres à n cellules. La seconde est de comparer les propriétés des 4-arbres et des polyominos arbres.

D'abord, la théorie de Pólya du chapitre 1 établit des fondements algébriques nécessaires à l'étude de groupes de symétries de certaines classes d'arbres, particulièrement les k -arbres, les k -arbres plantés et les arbres non-étiquetés vus au chapitre 2. Le chapitre 2 présente les fondement théoriques de la théorie des graphes permettant l'étude, à part celle des classes d'arbres mentionnées précédemment, des arbres étiquetés. Pour le cas $k = 4$, les 4-arbres possèdent une caractéristique additionnelle en commun avec les polyominos arbres que les arbres n'ont pas, soit le même ensemble de degrés possibles des éléments sous-jacents propres aux deux classes d'objets. Le fait de transporter les graphes dans une grille rectangulaire discrète et de garder les définitions propres aux graphes pour les objets obtenus par ce transport créé une suite naturelle de la recherche vers les polyominos arbres. Le chapitre 3 présente la résolution du problème de l'énumération des polyominos arbres inscrits de largeur $b \in [5]$ avec l'ajout de la statistique sur la taille des polyominos. L'approche adoptée fait apparaître les pré-polyominos arbres remontés dont l'énumération est aussi essentielle pour la résolution du problème. Aussi, on étudie

les liaisons, les liens de connexités entre les composantes connexes de cellules sur une rangée d'un polyomino arbre. On vérifie comment elles se forment de façon générale et combien de combinaisons différentes de ces liaisons sont possibles. Le chapitre 4 traite des polyominos arbres pleinement feuillus, définis comme possédant le nombre maximal de feuilles pour leur taille. Dans ce chapitre, on établit la fonction donnant ce nombre pour une taille quelconque, ainsi que l'ensemble des distributions de degrés et d'amas des cellules des polyominos arbres pleinement feuillus. Finalement, on introduit le concept de *kiss* entre cellules qui nous permet d'établir quelques identités sur les polyominos arbres pleinement feuillus et en particulier, une relation entre ceux-ci et les polyominos arbres. Ces deux derniers chapitres forment les sujets principaux de recherche du mémoire et les objets de recherche future, tant en eux-mêmes que pour associer ces objets aux 4-arbres et étudier les structures connexes acycliques en général.

Quelques associations simples peuvent être faites entre certaines classes d'arbres et de polyominos arbres étudiées. D'abord, les 4-arbres et les polyominos arbres sont comparables par leur connexité, leur acyclicité et l'ensemble des degrés possibles des éléments sous-jacents. De plus, les alcanes et les polyominos arbres pleinement feuillus de taille $4n+1$ possèdent, en plus des caractéristiques partagées par les 4-arbres et les polyominos arbres, le même nombre de feuilles et de sommets ou cellules de degré 4. Il ne semble pas y avoir de caractéristique liant les polyominos arbres inscrits et une classe d'arbre étudiée dans ce mémoire, et constitue une recherche apparemment indépendante de celle des arbres. Toutefois, la définition de format d'un polyomino arbre établit une forme d'étendue de ce polyomino de façon similaire à celle de diamètre ou de rayon d'un arbre.

Comme les polyominos possèdent une structure de graphe, les concepts reliés aux graphes sont aisés à représenter chez les polyominos. Par exemple, on peut définir le diamètre d'un polyomino arbre et énumérer les polyominos arbres de diamètre donné. Une direction de recherche intéressante est alors de procéder à l'énumération de classes de graphes et de polyominos possédant les mêmes caractéristiques énumérables, vérifier la différence entre les nombres de graphes et de polyominos possédant ces caractéristiques et assumer que la différence est due aux restrictions géométriques des polyominos. La définition du diamètre d'un polyomino arbre, notons-le δ' , peut être fait de quelques façons différentes afin porter cette définition aux polyominos arbres étudiés dans ce document. Par exemple, δ' peut être égal à $b+h$, bh ou une autre fonction des dimensions b, h du polyomino arbre. Une définition plus restreinte est simplement $\delta'_b = h$ et est définie

pour les polyominos arbres inscrits de largeur b donnée. La définition est à ajuster selon le contexte et l'orientation de la recherche effectuée.

Soit $a(\delta)$ le nombre d'arbres de diamètre δ et $p(\delta')$ le nombre de polyominos arbres de diamètre δ' . La série génératrice des termes $|p(\delta') - a(\delta)|$ donnerait un aperçu de l'influence des restrictions géométriques des polyominos arbres vis-à-vis celle de l'ensemble des caractéristiques propres aux deux classes d'objets, soit la structure de graphe de ces objets, l'acyclicité et la connexité. À noter que ce type de recherche s'applique pour toute autre caractéristique énumérable chez ces deux classes d'objets telle que la taille, le nombre de sommets ou cellules de chaque degré si on restreint le cas aux 4-arbres, etc. Le comportement asymptotique de $|p(\delta') - a(\delta)|$ est aussi un sujet intéressant à étudier pour toutes les définitions de δ' mentionnées. Nous pouvons faire une observation préliminaire des termes $|p(n) - a(n)|$, soit la différence entre le nombre de polyominos arbres à n cellules et d'arbres à n sommets à partir des recherches déjà établies. Les données initiales de $p(n)$ fournies par Jensen [3] nous permettent de formuler des hypothèses sur le comportement asymptotique de la croissance de $|p(n) - a(n)|$.

Les symétries des rectangles d'inscriptions de polyominos arbres sont des éléments naturels d'application pour la théorie de Pólya et celle-ci permet d'établir de nouvelles méthodes pour énumérer les polyominos. Des études sur le sujet ont été produites par Redelmeier [30] qui a énuméré les polyominos selon les divers axes de symétries de leur rectangle d'inscription. Avec plus de développement dans cette recherche, le théorème généralisé de Pólya pourrait nous fournir une série génératrice énumérant les polyominos arbres de taille n qui sont invariants selon les diverses symétries de leur rectangle d'inscription. Ces symétries diffèrent si $b = h$ ou non car le groupe des symétries du carré est différent de celui du rectangle, et le problème peut aussi être séparé selon ces groupes de symétries. Les polyominos étudiés dans ce document sont équivalents à translation près ou *fixes*. Les polyominos fixes se distinguent selon les symétries agissant sur leur rectangle d'inscription et du fait même, sur les cellules du polyomino. Les classes d'équivalences de polyominos fixes selon leurs symétries sont nommées *polyominos libres* et forment une application de la théorie de Pólya aux polyominos fixes.

Une avenue de recherche possible chez les polyominos arbres pleinement feuillus concernent les distributions de degrés et d'amas. À partir de ces distributions, un problème qui apparaît est : Existe-t-il une fonction donnant le nombre de polyominos arbres plei-

nement feuillus de taille $4n+i$, $i \in \{0, \dots, 3\}$ à partir du nombre de ceux de taille $4n+i-1$? Le développement d'une telle fonction pour chaque valeur de i permettrait de générer une relation de récurrence sur le nombre de polyominos arbres de taille n et obtenir le terme général. Ce développement est possible en analysant comment un polyomino arbre pleinement feuillu a de distributions de degrés et d'amas données peut être obtenu en ajoutant une cellule à un polyomino arbre pleinement feuillu a' de taille inférieure d'un, selon les distributions de degrés et d'amas de a' . L'analyse des emplacements où ajouter une cellule à a' , des distributions de a obtenues et du nombre d'emplacements valides différents devront être systématisés afin de ne pas rendre la tâche trop lourde. En effet, les distributions de degré et d'amas donnent peu d'information sur ces critères d'étude et le nombre de combinaisons de distributions de degré et d'amas est suffisamment grand pour rendre lourde la tâche de vérifier chaque cas de façon distincte.

La généralisation la plus naturelle des travaux de ce mémoire est l'ajout des polyominos cycliques à l'étude des deux derniers chapitres pour étudier l'ensemble des polyominos. Les polyominos inscrits sont une extension naturelle aux polyominos arbres inscrits. Si on retire la condition d'acyclicité, les démarches de résolution de problème établies au chapitre 3 s'appliquent aussi à l'énumération des polyominos inscrits et, du fait même, au polyominos de taille quelconque. Les identités sur les polyominos cycliques sont aussi obtenues en prenant la différence entre les polyominos et les polyominos arbres sur une statistique comme la taille, les dimensions, etc. Le périmètre d'un polyomino arbre peut être une statistique qu'on peut étudier à partir de la méthode d'énumération des polyominos arbres en prenant soin de calculer le périmètre fourni par les cellules sur la rangée h d'un polyomino arbre de format $b \times h$. Finalement, la transformation croix peut être définie pour les polyominos de la même façon que les polyominos arbres. L'application de cette transformation sur les polyominos génère des polyominos avec des trous, soit des sous-polyominos cycliques de format 3×3 dont la cellule centrale est vide. Il est aisé de vérifier que la transformation croix appliquée à un polyomino possédant plusieurs cycles génère un polyomino possédant plusieurs trous. De la même façon que la transformation croix est associée à des polyominos arbres pleinement feuillus, nous pouvons peut-être associer la transformation croix à des polyominos possédant un nombre maximal de trous, ou pleinement troués, et vérifier si cette transformation génère des polyominos possédant un nombre maximal de trous pour leur taille.

Bibliographie

- [1] **Temperley**, Harold Neville Vazeille (1956), *Combinatorial problems suggested by the statistical mechanics of domains and of rubber-like molecules*. Physical Review 2, No. 103, p. 1-16

- [2] **Balaban**, Alexandru T. et Frank **Harary** (1968), *Chemical graphs V : enumeration and proposed nomenclature of benzenoid cata-condensed polycyclic aromatic hydrocarbons*. Tetrahedron, Vol.24, Issue6, p. 2505-2516

- [3] **Jensen**, Iwan (2001), *Enumeration of Lattice Animals and Trees*. Journal of Statistical Physics, Vol.102, p. 865-881

- [4] **Goupil**, Alain, Hugo **Cloutier** et Fathallah **Nouboud** (2010), *Enumeration of inscribed polyominoes*. FPSAC 2010, DMTCS proceedings, p. 737-748

- [5] **Bousquet-Mélou**, Mireille et Jean-Marc **Fédou** (1995), *The generating function of convex polyominoes : the resolution of a q-differential system*. Bordeaux : Discrete Math Vol. 137, 53-75

- [6] **Knuth**, Donald, <https://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/programs/polynum.w>.

- [7] **Golomb**, Solomon Wolf (1966), *Polyominoes*. Princeton : Allen & Unwin

- [8] **Madras**, Neal (1999), *A pattern theorem for lattice clusters*. Annals of Combinatorics, Vol. 3, p. 357-384

- [9] **Redfield**, John Howard (1927), *The theory of group-reduced distributions*. American Journal of Mathematics, Vol. 49, no. 3
- [10] **Pólya**, George (1937), *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen*. Acta Math., 68, 145-254
- [11] **Euler**, Leonhard (1759), *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. Berlin : Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin
- [12] **Conway**, Andrew (1995), *Enumerating 2D percolation series by the finite-lattice method : theory*. Journal of Physics A : Mathematical and General Vol. 28 (2), p. 335-349
- [13] **Goupil**, Alain, **Blondin-Massé**, Maxime **Samson** et **Julien De Carufel** (2017), *Fully-leafed tree-like polyominoes and polycubes*. Combinatorial algorithms, Vol. 10765 of Lecture Notes of Computer Science, 28th International workshop, IWOCA
- [14] **Cayley**, Arthur (1875), *On the analytical forms called trees, with applications to the theory of chemical combinations*. Edinburgh : Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci.
- [15] **De Bruijn**, Nicolaas Govert (1964), *Pólya's Theory of Counting*. New York : Applied Combinatorial Mathematics, John Wiley & Sons, Inc
- [16] **Pólya**, George, et **Ronald C. Read** (1987), *Combinatorial enumeration of groups, graphs and chemical compounds*. New York : Springer-Verlag
- [17] **Goupil**, Alain (2015), *Fondements de la combinatoire*. Trois-Rivières
- [18] **Otter**, Richard (1948), *The Number of Trees*. Annals of Mathematics, Second Series 49, no 3., p. 583-599
- [19] **Labelle**, Jacques (1981), *Théorie des graphes*. Montréal : Édition Modulo, 184 p.

- [20] **Balaban**, Alexandru T., John W. **Kennedy** et Louis **Quintas** (1988), *The number of alkanes having n carbons and a longest chain of length d : an application of a theorem of Pólya*. Journal of chemical education
- [21] **Knuth**, Donald Ervin (1968), *The Art of Computer Programming Vol. 1 : Fundamental Algorithms*. Addison-Wesley
- [22] **Bergeron**, François, Gilbert **Labelle** et Pierre **Leroux** (1994), *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes*. Montréal : Publication du LaCim
- [23] **Rosenfeld**, Azriel (1970), *Connectivity in digital pictures*. New York : Journal of the Association for Computing Machinery
- [24] **Jensen**, Iwan et Anthony J. **Guttmann** (2000), *Statistics of Lattice Animals (Polyominoes) and Polygons*. Melbourne : Journal of Physics A : Mathematical and General, Vol.33, No. 29
- [25] **Coxeter**, Harold Scott MacDonal (1947), *Regular Polytopes*. Methuen : Dover Publications, 321 p.
- [26] **Autebert**, Jean-Michel (1994), *Théorie des Langages et des Automates*. Paris : Milan : Barcelone : Masson : 179 p.
- [27] **Yli-Jyrä**, Anssi et Carlos **Gomez-Rodriguez** (2017), *Generic Axiomatization of Families of Noncrossing Graphs in Dependency Parsing*. The Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics, Vol.55, p.1745-1755
- [28] **Flajolet**, Philippe et Marc **Noy** (1997), *Analytic Combinatorics of non-crossing configurations*. Rocquencourt : Barcelone : INRIA
- [29] **Kruchinin**, Vladimir (2011), *Derivation of Bell Polynomials of the Second Kind*. arXiv :1104.5065v1

- [30] **Redelmeier**, David Hugh (1981), *Counting polyominoes : yet another attack*.
Discrete mathematics, Vol. 36 (2), p. 191-203

Annexe A

Annexes

A.1 Relations de récurrences $A_{b,h,c}^i$

A.1.1 $b=1$

$$a_{1,h,1} = a_{1,h-1,1}$$
$$A_{1,1}(x) = \frac{x}{1-x}$$

A.1.2 $b=2$

$$a_{2,h,10} = a_{2,h-1,10} + a_{2,h-1,11}$$
$$A_{2,10}(x) = \frac{x}{1-x} A_{2,11}(x)$$

$$a_{2,h,11} = a_{2,h-1,10} + a_{2,h-1,01} + 2a_{1,h-1,1}$$
$$= 2a_{2,h-1,10} + 2a_{1,h-1,1}$$
$$A_{2,11}(x) = 2x(A_{2,10}(x) + A_{1,1}(x))$$

A.1.3 b=3

$$a_{3,h,100} = a_{3,h-1,100} + a_{3,h-1,110} + a_{3,h-1,101} + a_{3,h-1,111}$$

$$A_{3,100}(x) = \frac{x}{1-x} (A_{3,110}(x) + A_{3,101}(x) + A_{3,111}(x))$$

$$a_{3,h,010} = a_{3,h-1,010} + a_{3,h-1,110} + a_{3,h-1,011} + a_{3,h-1,111}$$

$$= a_{3,h-1,010} + 2a_{3,h-1,110} + a_{3,h-1,111}$$

$$A_{3,010}(x) = \frac{x}{1-x} (2A_{3,110}(x) + A_{3,111}(x))$$

$$a_{3,h,110} = a_{3,h-1,100} + a_{3,h-1,010} + a_{3,h-1,101} + a_{3,h-1,011} + a_{2,h-1,10} + a_{2,h-1,11}$$

$$= a_{3,h-1,100} + a_{3,h-1,010} + a_{3,h-1,101} + a_{3,h-1,110} + a_{2,h-1,10} + a_{2,h-1,11}$$

$$A_{3,110}(x) = \frac{x}{1-x} (A_{3,100}(x) + A_{3,010}(x) + A_{3,101}(x) + A_{2,10}(x) + A_{2,11}(x))$$

$$a_{3,h,101} = a_{3,h-1,101} + a_{3,h-1,111}$$

$$A_{3,101}(x) = \frac{x}{1-x} A_{3,111}(x)$$

$$a_{3,h,111} = a_{3,h-1,100} + a_{3,h-1,010} + a_{3,h-1,001} + 2a_{2,h-1,10} + 2a_{2,h-1,01} + 3a_{1,h-1,1} + a_{3,h-1,101}^2$$

$$= 2a_{3,h-1,100} + a_{3,h-1,010} + 4a_{2,h-1,10} + 3a_{1,h-1,1} + a_{3,h-1,101}^2$$

$$A_{3,111}(x) = x(2A_{3,100}(x) + A_{3,010}(x) + 4A_{2,10}(x) + 3A_{1,1}(x) + A_{3,101}^2(x))$$

$$a_{3,h,101}^2 = a_{3,h-1,100} + a_{3,h-1,001} + a_{3,h-1,110} + a_{3,h-1,011} + a_{2,h-1,10} + a_{2,h-1,01} + 2a_{2,h-1,11} + 2a_{1,h-1,1} +$$

$$a_{3,h-1,101}^2$$

$$= 2a_{3,h-1,100} + 2a_{3,h-1,110} + 2a_{2,h-1,10} + 2a_{2,h-1,11} + 2a_{1,h-1,1} + a_{3,h-1,101}^2$$

$$A_{3,101}^2(x) = \frac{x}{1-x} (2A_{3,100}(x) + 2A_{3,110}(x) + 2A_{2,10}(x) + 2A_{2,11}(x) + 2A_{1,1}(x))$$

A.1.4 b=4

$$a_{4,h,1000} = a_{4,h-1,1000} + a_{4,h-1,1100} + a_{4,h-1,1010} + a_{4,h-1,1001} + a_{4,h-1,1110} + a_{4,h-1,1101} + a_{4,h-1,1011} + a_{4,h-1,1111}$$

$$= a_{4,h-1,1000} + a_{4,h-1,1100} + a_{4,h-1,1010} + a_{4,h-1,1001} + a_{4,h-1,1110} + 2a_{4,h-1,1101} + a_{4,h-1,1111}$$

$$A_{4,1000}(x) = \frac{x}{1-x} (A_{4,1100}(x) + A_{4,1010}(x) + A_{4,1001}(x) + A_{4,1110}(x) + 2A_{4,1101}(x) + a_{4,1111}(x))$$

$$a_{4,h,0100} = a_{4,h-1,0100} + a_{4,h-1,1100} + a_{4,h-1,0110} + a_{4,h-1,0101} + a_{4,h-1,1110} + a_{4,h-1,1101} + a_{4,h-1,0111} + a_{4,h-1,1111}$$

$$= a_{4,h-1,0100} + a_{4,h-1,1100} + a_{4,h-1,0110} + a_{4,h-1,0101} + 2a_{4,h-1,1110} + a_{4,h-1,1101} + a_{4,h-1,1111}$$

$$A_{4,0100}(x) = \frac{x}{1-x} (A_{4,1100}(x) + A_{4,0110}(x) + A_{4,1010}(x) + 2A_{4,1110}(x) + A_{4,1101}(x) + A_{4,1111}(x))$$

$$a_{4,h,1100} = a_{4,h-1,1000} + a_{4,h-1,0100} + a_{4,h-1,1010} + a_{4,h-1,1001} + a_{4,h-1,0110} + a_{4,h-1,0101} + a_{4,h-1,1011} + a_{4,h-1,0111} + a_{3,h-1,100} + a_{3,h-1,110} + a_{3,h-1,101} + a_{3,h-1,111}$$

$$= a_{4,h-1,1000} + a_{4,h-1,0100} + 2a_{4,h-1,1010} + a_{4,h-1,1001} + a_{4,h-1,0110} + a_{4,h-1,1110} + a_{4,h-1,1101} + a_{3,h-1,100} + a_{3,h-1,110} + a_{3,h-1,101} + a_{3,h-1,111}$$

$$A_{4,1100}(x) = x(A_{4,1000}(x) + A_{4,0100}(x) + 2A_{4,1010}(x) + A_{4,1001}(x) + A_{4,0110}(x) + A_{4,1110}(x) + a_{4,1101}(x) + A_{3,100}(x) + A_{3,110}(x) + A_{3,101}(x) + A_{3,111}(x))$$

$$a_{4,h,1010} = a_{4,h-1,1010} + a_{4,h-1,1110} + a_{4,h-1,1011} + a_{4,h-1,1111}$$

$$= a_{4,h-1,1010} + a_{4,h-1,1110} + a_{4,h-1,1101} + a_{4,h-1,1111}$$

$$A_{4,1010}(x) = \frac{x}{1-x} (A_{4,1110}(x) + A_{4,1101}(x) + A_{4,1111}(x))$$

$$a_{4,h,1001} = a_{4,h-1,1001} + a_{4,h-1,1101} + a_{4,h-1,1011} + a_{4,h-1,1111}$$

$$= a_{4,h-1,1001} + 2a_{4,h-1,1101} + a_{4,h-1,1111}$$

$$A_{4,1001}(x) = \frac{x}{1-x} (2A_{4,1101}(x) + A_{4,1111}(x))$$

$$a_{4,h,0110} = a_{4,h-1,0100} + a_{4,h-1,0010} + a_{4,h-1,1100} + a_{4,h-1,1010} + a_{4,h-1,0101} + a_{4,h-1,0011} + a_{4,h-1,1101} + a_{4,h-1,1011}$$

$$= 2a_{4,h-1,0100} + 2a_{4,h-1,1100} + 2a_{4,h-1,1010} + 2a_{4,h-1,1101}$$

$$A_{4,0110}(x) = x(2A_{4,0100}(x) + 2A_{4,1100}(x) + 2A_{4,1010}(x) + 2A_{4,1101}(x))$$

$$\begin{aligned}
a_{4,h,1110} &= a_{4,h-1,1000} + a_{4,h-1,0100} + a_{4,h-1,0010} + a_{4,h-1,1001} + a_{4,h-1,0101} + a_{4,h-1,0011} + a_{3,h-1,100} + \\
& a_{3,h-1,010} + a_{3,h-1,101} + a_{3,h-1,011} + a_{2,h-1,10} + a_{2,h-1,11} + a_{4,h-1,1010}^2 + a_{4,h-1,1011}^2 \\
&= a_{4,h-1,1000} + 2a_{4,h-1,0100} + a_{4,h-1,1001} + a_{4,h-1,1100} + a_{4,h-1,1010} + a_{3,h-1,100} + a_{3,h-1,010} + a_{3,h-1,110} + \\
& a_{3,h-1,101} + a_{2,h-1,10} + a_{2,h-1,11} + a_{4,h-1,1010}^2 + a_{4,h-1,1101}^2 \\
A_{4,1110}(x) &= x(A_{4,1000}(x) + 2A_{4,0100}(x) + A_{4,1001}(x) + A_{4,1100}(x) + A_{4,1010}(x) + A_{3,100}(x) + \\
& a_{3,010}(x) + A_{3,110}(x) + A_{3,101}(x) + A_{2,10}(x) + A_{2,11}(x) + A_{4,1010}^2(x) + A_{4,1101}^2(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,h,1101} &= a_{4,h-1,1001} + a_{4,h-1,0101} + a_{4,h-1,1011} + a_{4,h-1,0111} + a_{3,h-1,101} + a_{3,h-1,111} \\
&= a_{4,h-1,1010} + a_{4,h-1,1001} + a_{4,h-1,1110} + a_{4,h-1,1101} + a_{3,h-1,101} + a_{3,h-1,111} \\
A_{4,1101}(x) &= \frac{x}{1-x}(A_{4,1010}(x) + A_{4,1001}(x) + A_{4,1110}(x) + A_{3,101}(x) + A_{3,111}(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,h,1111} &= a_{4,h-1,1000} + a_{4,h-1,0100} + a_{4,h-1,0010} + a_{4,h-1,0001} + 2a_{3,h-1,100} + 2a_{3,h-1,010} + 2a_{3,h-1,001} + \\
& 3a_{2,h-1,10} + 3a_{2,h-1,01} + 4a_{1,h-1,1} + a_{4,h-1,1010}^2 + a_{4,h-1,1001}^2 + a_{4,h-1,0101}^2 + 2a_{3,h-1,101}^2 \\
&= 2a_{4,h-1,1000} + 2a_{4,h-1,0100} + 4a_{3,h-1,100} + 2a_{3,h-1,010} + 6a_{2,h-1,10} + 4a_{1,h-1,1} + 2a_{4,h-1,1010}^2 + \\
& a_{4,h-1,1001}^2 + 2a_{3,h-1,101}^2 \\
A_{4,1111}(x) &= x(2A_{4,1000}(x) + 2A_{4,0100}(x) + 4A_{3,100}(x) + 2A_{3,010}(x) + 6A_{2,10}(x) + 4A_{1,1}(x) + \\
& 2A_{4,1010}^2(x) + A_{4,1001}^2(x) + 2A_{3,101}^2(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,h,1010}^2 &= a_{4,h-1,1000} + a_{4,h-1,0010} + a_{4,h-1,1100} + a_{4,h-1,1001} + a_{4,h-1,0110} + a_{4,h-1,0011} + a_{4,h-1,1101} + \\
& a_{4,h-1,0111} + a_{3,h-1,010} + a_{3,h-1,110} + a_{3,h-1,011} + a_{3,h-1,111} + a_{2,h-1,10} + a_{2,h-1,11} + a_{4,h-1,1010}^2 + \\
& a_{4,h-1,1011}^2 \\
&= a_{4,h-1,1000} + a_{4,h-1,0100} + 2a_{4,h-1,1100} + a_{4,h-1,1001} + a_{4,h-1,0110} + a_{4,h-1,1110} + a_{4,h-1,1101} + \\
& a_{3,h-1,010} + 2a_{3,h-1,110} + a_{3,h-1,111} + a_{2,h-1,10} + a_{2,h-1,11} + a_{4,h-1,1010}^2 + a_{4,h-1,1101}^2 \\
A_{4,1010}^2(x) &= \frac{x}{1-x}(A_{4,1000}(x) + A_{4,0100}(x) + 2A_{4,1100}(x) + A_{4,1001}(x) + A_{4,0110}(x) + A_{4,1110}(x) + \\
& A_{4,1101}(x) + A_{3,010}(x) + 2A_{3,110}(x) + A_{3,111}(x) + A_{2,10}(x) + A_{2,11}(x) + A_{4,1101}^2(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,h,1001}^2 &= a_{4,h-1,1000} + a_{4,h-1,0001} + a_{4,h-1,1100} + a_{4,h-1,1010} + a_{4,h-1,0101} + a_{4,h-1,0011} + a_{4,h-1,1110} + \\
& a_{4,h-1,0111} + a_{3,h-1,100} + a_{3,h-1,001} + a_{3,h-1,110} + 2a_{3,h-1,101} + a_{3,h-1,011} + 2a_{3,h-1,111} + a_{2,h-1,10} + \\
& a_{2,h-1,01} + 2a_{2,h-1,11} + 2a_{1,h-1,1} + a_{4,h-1,1001}^2 + a_{4,h-1,1101}^2 + a_{4,h-1,1011}^2 \\
&= 2a_{4,h-1,1000} + 2a_{4,h-1,1100} + 2a_{4,h-1,1010} + 2a_{4,h-1,1110} + 2a_{3,h-1,100} + 2a_{3,h-1,110} + 2a_{3,h-1,101} + \\
& 2a_{3,h-1,111} + 2a_{2,h-1,10} + 2a_{2,h-1,11} + 2a_{1,h-1,1} + a_{4,h-1,1001}^2 + 2a_{4,h-1,1101}^2 \\
A_{4,1001}^2(x) &= \frac{x}{1-x}(2A_{4,1000}(x) + 2A_{4,1100}(x) + 2A_{4,1010}(x) + 2A_{4,1110}(x) + 2A_{3,100}(x) + \\
& 2A_{3,110}(x) + 2A_{3,101}(x) + 2A_{3,111}(x) + 2A_{2,10}(x) + 2A_{2,11}(x) + 2A_{1,1}(x) + 2A_{4,1101}^2(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,h,1101}^2 &= a_{4,h-1,1000} + a_{4,h-1,0100} + a_{4,h-1,0001} + a_{4,h-1,1010} + a_{4,h-1,0110} + a_{4,h-1,0011} + 2a_{3,h-1,100} + \\
& a_{3,h-1,010} + a_{3,h-1,001} + a_{3,h-1,110} + a_{3,h-1,101} + 2a_{3,h-1,011} + 2a_{2,h-1,10} + 2a_{2,h-1,01} + 2a_{2,h-1,11} + \\
& 3a_{1,h-1,1} + a_{4,h-1,1001}^2 + a_{4,h-1,0101}^2 + a_{4,h-1,1011}^2 + a_{3,h-1,101}^2 \\
&= 2a_{4,h-1,1000} + a_{4,h-1,0100} + a_{4,h-1,1100} + a_{4,h-1,1010} + a_{4,h-1,0110} + 3a_{3,h-1,100} + a_{3,h-1,010} + \\
& 3a_{3,h-1,110} + a_{3,h-1,101} + 4a_{2,h-1,10} + 2a_{2,h-1,11} + 3a_{1,h-1,1} + a_{4,h-1,1010}^2 + a_{4,h-1,1001}^2 + a_{4,h-1,1101}^2 + \\
& a_{3,h-1,101}^2 \\
A_{4,1101}^2(x) &= \frac{x}{1-x} (2A_{4,1000}(x) + A_{4,0100}(x) + A_{4,1100}(x) + A_{4,1010}(x) + A_{4,0110}(x) + 3A_{3,100}(x) + \\
& A_{3,010}(x) + 3A_{3,110}(x) + A_{3,101}(x) + 4A_{2,10}(x) + 2A_{2,11}(x) + 3A_{1,1}(x) + A_{4,1010}^2(x) + A_{4,1001}^2(x) + \\
& A_{3,101}^2(x))
\end{aligned}$$

A.1.5 b=5

$$\begin{aligned}
a_{5,h,10000} &= a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,11000} + a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,10001} + a_{5,h-1,11100} + \\
& a_{5,h-1,11010} + a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,10011} + a_{5,h-1,11110} + a_{5,h-1,11101} + \\
& a_{5,h-1,11011} + a_{5,h-1,10111} + a_{5,h-1,11111} \\
&= a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,11000} + a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,10001} + a_{5,h-1,11100} + a_{5,h-1,11010} + \\
& 2a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,11110} + 2a_{5,h-1,11101} + a_{5,h-1,11011} + a_{5,h-1,11111} \\
A_{5,10000}(x) &= \frac{x}{1-x} (A_{5,11000}(x) + A_{5,10100}(x) + A_{5,10010}(x) + A_{5,10001}(x) + A_{5,11100}(x) + \\
& A_{5,11010}(x) + 2A_{5,11001}(x) + A_{5,10110}(x) + A_{5,10101}(x) + A_{5,11110}(x) + 2A_{5,11101}(x) + \\
& A_{5,11011}(x) + A_{5,11111}(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,01000} &= a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,11000} + a_{5,h-1,01100} + a_{5,h-1,01010} + a_{5,h-1,01001} + a_{5,h-1,11100} + \\
& a_{5,h-1,11010} + a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,01110} + a_{5,h-1,01101} + a_{5,h-1,01011} + a_{5,h-1,11110} + a_{5,h-1,11101} + \\
& a_{5,h-1,11011} + a_{5,h-1,01111} + a_{5,h-1,11111} \\
&= a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,11000} + a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,01100} + a_{5,h-1,01010} + a_{5,h-1,11100} + 2a_{5,h-1,11010} + \\
& a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,01110} + 2a_{5,h-1,11110} + a_{5,h-1,11101} + a_{5,h-1,11011} + a_{5,h-1,11111} \\
A_{5,01000}(x) &= \frac{x}{1-x} (A_{5,11000}(x) + A_{5,10010}(x) + A_{5,01100}(x) + A_{5,01010}(x) + A_{5,11100}(x) + \\
& 2A_{5,11010}(x) + A_{5,11001}(x) + A_{5,10110}(x) + A_{5,01110}(x) + 2A_{5,11110}(x) + A_{5,11101}(x) + \\
& A_{5,11011}(x) + A_{5,11111}(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,00100} &= a_{5,h-1,00100} + a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,01100} + a_{5,h-1,00110} + a_{5,h-1,00101} + a_{5,h-1,11100} + \\
& a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,01110} + a_{5,h-1,01101} + a_{5,h-1,00111} + a_{5,h-1,11110} + a_{5,h-1,11101} + \\
& a_{5,h-1,10111} + a_{5,h-1,01111} + a_{5,h-1,11111} \\
&= a_{5,h-1,00100} + 2a_{5,h-1,10100} + 2a_{5,h-1,01100} + 2a_{5,h-1,11100} + 2a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,01110} + \\
& 2a_{5,h-1,11110} + 2a_{5,h-1,11101} + a_{5,h-1,11111} \\
A_{5,00100}(x) &= \frac{x}{1-x} (2A_{5,10100}(x) + 2A_{5,01100}(x) + 2A_{5,11100}(x) + 2A_{5,10110}(x) + A_{5,10101}(x) + \\
& A_{5,01110}(x) + 2A_{5,11110}(x) + 2A_{5,11101}(x) + A_{5,11111}(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,11000} &= a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,10001} + a_{5,h-1,01100} + \\
& a_{5,h-1,01010} + a_{5,h-1,01001} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,10011} + a_{5,h-1,01110} + a_{5,h-1,01101} + \\
& a_{5,h-1,01011} + a_{5,h-1,10111} + a_{5,h-1,01111} + a_{4,h-1,-1000} + a_{4,h-1,-1100} + a_{4,h-1,-1010} + a_{4,h-1,-1001} + \\
& a_{4,h-1,-1110} + a_{4,h-1,-1101} + a_{4,h-1,-1011} + a_{4,h-1,-1111} \\
&= a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,10100} + 2a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,10001} + a_{5,h-1,01100} + a_{5,h-1,01010} + \\
& a_{5,h-1,11010} + a_{5,h-1,11001} + 2a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,01110} + a_{5,h-1,11110} + a_{5,h-1,11101} + \\
& a_{4,h-1,1000} + a_{4,h-1,1100} + a_{4,h-1,1010} + a_{4,h-1,1001} + a_{4,h-1,1110} + 2a_{4,h-1,1101} + a_{4,h-1,1111} \\
A_{5,11000}(x) &= x(A_{5,10000}(x) + A_{5,01000}(x) + A_{5,10100}(x) + 2A_{5,10010}(x) + A_{5,10001}(x) + \\
& A_{5,01100}(x) + A_{5,01010}(x) + A_{5,11010}(x) + A_{5,11001}(x) + 2A_{5,10110}(x) + A_{5,10101}(x) + A_{5,01110}(x) + \\
& A_{5,11110}(x) + A_{5,11101}(x) + A_{4,1000}(x) + A_{4,1100}(x) + A_{4,1010}(x) + A_{4,1001}(x) + A_{4,1110}(x) + \\
& 2A_{4,1101}(x) + A_{4,1111}(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,10100} &= a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,11100} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,11110} + a_{5,h-1,11101} + \\
& a_{5,h-1,10111} + a_{5,h-1,11111} \\
&= a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,11100} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,11110} + 2a_{5,h-1,11101} + a_{5,h-1,11111} \\
A_{5,10100}(x) &= \frac{x}{1-x} (A_{5,11100}(x) + A_{5,10110}(x) + A_{5,10101}(x) + A_{5,11110}(x) + 2A_{5,11101}(x) + \\
& A_{5,11111}(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,10010} &= a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,11010} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,10011} + a_{5,h-1,11110} + a_{5,h-1,11011} + \\
& a_{5,h-1,10111} + a_{5,h-1,11111} \\
&= a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,11010} + a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,11110} + a_{5,h-1,11101} + a_{5,h-1,11011} + \\
& a_{5,h-1,11111} \\
A_{5,10010}(x) &= \frac{x}{1-x} (A_{5,11010}(x) + A_{5,11001}(x) + A_{5,10110}(x) + A_{5,11110}(x) + A_{5,11101}(x) + \\
& A_{5,11011}(x) + A_{5,11111}(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,10001} &= a_{5,h-1,10001} + a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,10011} + a_{5,h-1,11101} + a_{5,h-1,11011} + \\
& a_{5,h-1,10111} + a_{5,h-1,11111} \\
&= a_{5,h-1,10001} + 2a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,10101} + 2a_{5,h-1,11101} + a_{5,h-1,11011} + a_{5,h-1,11111} \\
A_{5,10001}(x) &= \frac{x}{1-x} (2A_{5,11001}(x) + A_{5,10101}(x) + 2A_{5,11101}(x) + A_{5,11011}(x) + A_{5,11111}(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,01100} &= a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,00100} + a_{5,h-1,11000} + a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,01010} + a_{5,h-1,01001} + \\
& a_{5,h-1,00110} + a_{5,h-1,00101} + a_{5,h-1,11010} + a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,01011} + \\
& a_{5,h-1,00111} + a_{5,h-1,11011} + a_{5,h-1,10111} \\
&= a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,00100} + a_{5,h-1,11000} + 2a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,01100} + a_{5,h-1,01010} + \\
& a_{5,h-1,11100} + 2a_{5,h-1,11010} + a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,11101} + a_{5,h-1,11011} \\
A_{5,01100}(x) &= \frac{x}{1-x} (A_{5,01000}(x) + A_{5,00100}(x) + A_{5,11000}(x) + 2A_{5,10100}(x) + A_{5,10010}(x) + \\
& A_{5,01010}(x) + A_{5,11100}(x) + 2A_{5,11010}(x) + A_{5,11001}(x) + A_{5,10110}(x) + A_{5,10101}(x) + A_{5,11101}(x) + \\
& A_{5,11011}(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,01010} &= a_{5,h-1,01010} + a_{5,h-1,11010} + a_{5,h-1,01110} + a_{5,h-1,01011} + a_{5,h-1,11110} + a_{5,h-1,11011} + \\
& a_{5,h-1,01111} + a_{5,h-1,11111} \\
&= a_{5,h-1,01010} + 2a_{5,h-1,11010} + a_{5,h-1,01110} + 2a_{5,h-1,11110} + a_{5,h-1,11011} + a_{5,h-1,11111} \\
A_{5,01010}(x) &= \frac{x}{1-x} (2A_{5,11010}(x) + A_{5,01110}(x) + 2A_{5,11110}(x) + A_{5,11011}(x) + A_{5,11111}(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,11100} &= a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,00100} + a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,10001} + a_{5,h-1,01010} + \\
& a_{5,h-1,01001} + a_{5,h-1,00110} + a_{5,h-1,00101} + a_{5,h-1,10011} + a_{5,h-1,01011} + a_{5,h-1,00111} + a_{4,h-1,-1000} + \\
& a_{4,h-1,-0100} + a_{4,h-1,-1010} + a_{4,h-1,-1001} + a_{4,h-1,-0110} + a_{4,h-1,-0101} + a_{4,h-1,-1011} + a_{4,h-1,-0111} + \\
& a_{3,h-1,--100} + a_{3,h-1,--110} + a_{3,h-1,--101} + a_{3,h-1,--111} + a_{5,h-1,10100}^2 + a_{5,h-1,10110}^2 + a_{5,h-1,10101,1-3}^2 + \\
& a_{5,h-1,10101,2-3}^2 + a_{5,h-1,10111}^2 \\
&= a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,00100} + a_{5,h-1,10100} + 2a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,10001} + a_{5,h-1,01100} + \\
& a_{5,h-1,01010} + a_{5,h-1,11100} + a_{5,h-1,11010} + a_{5,h-1,11001} + a_{4,h-1,1000} + a_{4,h-1,0100} + 2a_{4,h-1,1010} + \\
& a_{4,h-1,1001} + a_{4,h-1,0110} + a_{4,h-1,1110} + a_{4,h-1,1101} + a_{3,h-1,100} + a_{3,h-1,110} + a_{3,h-1,101} + a_{3,h-1,111} + \\
& a_{5,h-1,10100}^2 + a_{5,h-1,10110}^2 + a_{5,h-1,10101,1-2}^2 + a_{5,h-1,10101,1-3}^2 + a_{5,h-1,11101}^2 \\
A_{5,11100}(x) &= \frac{x}{1-x} (A_{5,10000}(x) + A_{5,01000}(x) + A_{5,00100}(x) + A_{5,10100}(x) + 2A_{5,10010}(x) + \\
& A_{5,10001}(x) + A_{5,01100}(x) + A_{5,01010}(x) + A_{5,11010}(x) + A_{5,11001}(x) + A_{4,1000}(x) + A_{4,0100}(x) + \\
& 2A_{4,1010}(x) + A_{4,1001}(x) + A_{4,0110}(x) + A_{4,1110}(x) + A_{4,1101}(x) + A_{3,100}(x) + A_{3,110}(x) + \\
& A_{3,101}(x) + A_{3,111}(x) + A_{5,10100}^2(x) + A_{5,10110}^2(x) + A_{5,10101,1-2}^2(x) + A_{5,10101,1-3}^2(x) + \\
& A_{5,11101}^2(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,11010} &= a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,01010} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,10011} + a_{5,h-1,01110} + a_{5,h-1,01011} + \\
& a_{5,h-1,10111} + a_{5,h-1,01111} + a_{4,h-1,-1010} + a_{4,h-1,-1110} + a_{4,h-1,-1011} + a_{4,h-1,-1111} \\
&= a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,01010} + a_{5,h-1,11010} + a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,01110} + a_{5,h-1,11110} + \\
& a_{5,h-1,11101} + a_{4,h-1,1010} + a_{4,h-1,1110} + a_{4,h-1,1101} + a_{4,h-1,1111} \\
A_{5,11010}(x) &= \frac{x}{1-x} (A_{5,10010}(x) + A_{5,01010}(x) + A_{5,11001}(x) + A_{5,10110}(x) + A_{5,01110}(x) + \\
& A_{5,11110}(x) + A_{5,11101}(x) + A_{4,1010}(x) + A_{4,1110}(x) + A_{4,1101}(x) + A_{4,1111}(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,11001} &= a_{5,h-1,10001} + a_{5,h-1,01001} + a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,10011} + a_{5,h-1,01101} + a_{5,h-1,01011} + \\
& a_{5,h-1,10111} + a_{5,h-1,01111} + a_{4,h-1,-1001} + a_{4,h-1,-1101} + a_{4,h-1,-1011} + a_{4,h-1,-1111} \\
&= a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,10001} + a_{5,h-1,11010} + a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,11110} + \\
& a_{5,h-1,11101} + a_{4,h-1,1001} + 2a_{4,h-1,1101} + a_{4,h-1,1111} \\
A_{5,11001}(x) &= \frac{x}{1-x} (A_{5,10010}(x) + A_{5,10001}(x) + A_{5,11010}(x) + A_{5,10110}(x) + A_{5,10101}(x) + \\
& A_{5,11110}(x) + A_{5,11101}(x) + A_{4,1001}(x) + 2A_{4,1101}(x) + A_{4,1111}(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,10110} &= a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,11100} + a_{5,h-1,11010} + a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,10011} + \\
& a_{5,h-1,11101} + a_{5,h-1,11011} \\
&= a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,11100} + a_{5,h-1,11010} + a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,11101} + \\
& a_{5,h-1,11011} \\
A_{5,10110}(x) &= x(A_{5,10100}(x) + A_{5,10010}(x) + A_{5,11100}(x) + A_{5,11010}(x) + A_{5,11001}(x) + \\
& A_{5,10101}(x) + A_{5,11101}(x) + A_{5,11011}(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,10101} &= a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,11101} + a_{5,h-1,10111} + a_{5,h-1,11111} \\
&= a_{5,h-1,10101} + 2a_{5,h-1,11101} + a_{5,h-1,11111} \\
A_{5,10101}(x) &= \frac{x}{1-x} (2A_{5,11101}(x) + A_{5,11111}(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,01110} &= a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,00100} + a_{5,h-1,00010} + a_{5,h-1,11000} + a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,10010} + \\
& a_{5,h-1,01001} + a_{5,h-1,00101} + a_{5,h-1,00011} + a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,10011} + a_{5,h-1,01010}^2 + \\
& a_{5,h-1,11010}^2 + a_{5,h-1,01011}^2 + a_{5,h-1,11011}^2 \\
&= 2a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,00100} + 2a_{5,h-1,11000} + 2a_{5,h-1,10100} + 2a_{5,h-1,10010} + 2a_{5,h-1,11001} + \\
& a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,01010}^2 + 2a_{5,h-1,11010}^2 + a_{5,h-1,11011}^2 \\
A_{5,01110}(x) &= x(2A_{5,01000}(x) + A_{5,00100}(x) + 2A_{5,11000}(x) + 2A_{5,10100}(x) + 2A_{5,10010}(x) + \\
& 2A_{5,11001}(x) + A_{5,10101}(x) + A_{5,01010}^2(x) + 2A_{5,11010}^2(x) + A_{5,11011}^2(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,11110} &= a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,00100} + a_{5,h-1,00010} + a_{5,h-1,10001} + a_{5,h-1,01001} + \\
& a_{5,h-1,00101} + a_{5,h-1,00011} + a_{4,h-1,-1000} + a_{4,h-1,-0100} + a_{4,h-1,-0010} + a_{4,h-1,-1001} + a_{4,h-1,-0101} + \\
& a_{4,h-1,-0011} + a_{3,h-1,--100} + a_{3,h-1,--010} + a_{3,h-1,--101} + a_{3,h-1,--011} + a_{2,h-1,---10} + a_{2,h-1,---11} + \\
& a_{5,h-1,10100}^2 + a_{5,h-1,10010}^2 + a_{5,h-1,01010}^2 + a_{5,h-1,10101,1-3}^2 + a_{5,h-1,10101,2-3}^2 + a_{5,h-1,10011}^2 + a_{5,h-1,01011}^2 + \\
& a_{4,h-1,-1010}^2 + a_{4,h-1,-1011}^2 \\
&= a_{5,h-1,10000} + 2a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,00100} + a_{5,h-1,11000} + a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,10001} + \\
& a_{4,h-1,1000} + 2a_{4,h-1,0100} + a_{4,h-1,1100} + a_{4,h-1,1010} + a_{4,h-1,1001} + a_{3,h-1,100} + a_{3,h-1,010} + a_{3,h-1,110} + \\
& a_{3,h-1,101} + a_{2,h-1,10} + a_{2,h-1,11} + a_{5,h-1,10100}^2 + a_{5,h-1,10010}^2 + a_{5,h-1,01010}^2 + a_{5,h-1,11010}^2 + a_{5,h-1,11001}^2 + \\
& a_{5,h-1,10101,1-2}^2 + a_{5,h-1,10101,1-3}^2 + a_{4,h-1,1010}^2 + a_{4,h-1,1101}^2 \\
A_{5,11110}(x) &= x(A_{5,10000}(x) + 2A_{5,01000}(x) + A_{5,00100}(x) + A_{5,11000}(x) + A_{5,10100}(x) + \\
& A_{5,10010}(x) + A_{5,10001}(x) + A_{4,1000}(x) + 2A_{4,0100}(x) + A_{4,1100}(x) + A_{4,1010}(x) + A_{4,1001}(x) + \\
& A_{3,100}(x) + A_{3,010}(x) + A_{3,110}(x) + A_{3,101}(x) + A_{2,10}(x) + A_{2,11}(x) + A_{5,10100}^2(x) + A_{5,10010}^2(x) + \\
& A_{5,01010}^2(x) + A_{5,11010}^2(x) + A_{5,11001}^2(x) + A_{5,10101,1-2}^2(x) + A_{5,10101,1-3}^2(x) + A_{4,1010}^2(x) + \\
& A_{4,1101}^2(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,11101} &= a_{5,h-1,10001} + a_{5,h-1,01001} + a_{5,h-1,00101} + a_{5,h-1,10011} + a_{5,h-1,01011} + a_{5,h-1,00111} + \\
& a_{4,h-1,-1001} + a_{4,h-1,-0101} + a_{4,h-1,-1011} + a_{4,h-1,-0111} + a_{3,h-1,--101} + a_{3,h-1,--111} + a_{5,h-1,10101,1-3}^2 + \\
& a_{5,h-1,10101,2-3}^2 + a_{5,h-1,10111}^2 \\
&= a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,10001} + a_{5,h-1,11100} + a_{5,h-1,11010} + a_{5,h-1,11001} + a_{4,h-1,1010} + \\
& a_{4,h-1,1001} + a_{4,h-1,1110} + a_{4,h-1,1101} + a_{3,h-1,101} + a_{3,h-1,111} + a_{5,h-1,10101,1-2}^2 + a_{5,h-1,10101,1-3}^2 + \\
& a_{5,h-1,11101}^2 \\
A_{5,11101}(x) &= x(A_{5,10100}(x) + A_{5,10010}(x) + A_{5,10001}(x) + A_{5,11100}(x) + A_{5,11010}(x) + \\
& A_{5,11001}(x) + A_{4,1010}(x) + A_{4,1001}(x) + A_{4,1110}(x) + A_{4,1101}(x) + A_{3,101}(x) + A_{3,111}(x) + \\
& A_{5,10101,1-2}^2(x) + A_{5,10101,1-3}^2(x) + A_{5,11101}^2(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,11011} &= a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,10001} + a_{5,h-1,01010} + a_{5,h-1,01001} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,10101} + \\
& a_{5,h-1,01110} + a_{5,h-1,01101} + a_{4,h-1,1001-} + a_{4,h-1,0101-} + a_{4,h-1,1011-} + a_{4,h-1,0111-} + a_{4,h-1,-1010} + \\
& a_{4,h-1,-1001} + a_{4,h-1,-1110} + a_{4,h-1,-1101} + a_{3,h-1,-101-} + a_{3,h-1,-111-} \\
&= 2a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,10001} + a_{5,h-1,01010} + 2a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,01110} + 2a_{4,h-1,1010} + \\
& 2a_{4,h-1,1001} + 2a_{4,h-1,1110} + 2a_{4,h-1,1101} + a_{3,h-1,101} + a_{3,h-1,111} \\
A_{5,11011}(x) &= x(2A_{5,10010}(x) + A_{5,10001}(x) + A_{5,01010}(x) + 2A_{5,10110}(x) + A_{5,10101}(x) + \\
& A_{5,01110}(x) + 2A_{4,1010}(x) + 2A_{4,1001}(x) + 2A_{4,1110}(x) + 2A_{4,1101}(x) + A_{3,101}(x) + A_{3,111}(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,11111} &= a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,00100} + a_{5,h-1,00010} + a_{5,h-1,00001} + a_{4,h-1,1000-} + \\
&a_{4,h-1,0100-} + a_{4,h-1,0010-} + a_{4,h-1,0001-} + a_{4,h-1,-1000} + a_{4,h-1,-0100} + a_{4,h-1,-0010} + a_{4,h-1,-0001} + \\
&a_{3,h-1,100--} + a_{3,h-1,010--} + a_{3,h-1,001--} + a_{3,h-1,-100-} + a_{3,h-1,-010-} + a_{3,h-1,-001-} + a_{3,h-1,--100} + \\
&a_{3,h-1,--010} + a_{3,h-1,--001} + a_{2,h-1,10---} + a_{2,h-1,01---} + a_{2,h-1,-10--} + a_{2,h-1,-01--} + a_{2,h-1,--10-} + \\
&a_{2,h-1,--01-} + a_{2,h-1,---10} + a_{2,h-1,---01} + a_{1,h-1,1----} + a_{1,h-1,-1---} + a_{1,h-1,--1--} + a_{1,h-1,---1-} + \\
&a_{1,h-1,----1} + a_{5,h-1,10100}^2 + a_{5,h-1,10010}^2 + a_{5,h-1,10001}^2 + a_{5,h-1,01010}^2 + a_{5,h-1,01001}^2 + a_{5,h-1,00101}^2 + \\
&a_{4,h-1,-1010}^2 + a_{4,h-1,-1001}^2 + a_{4,h-1,-0101}^2 + a_{4,h-1,1010-}^2 + a_{4,h-1,1001-}^2 + a_{4,h-1,0101-}^2 + a_{3,h-1,--101}^2 + \\
&a_{3,h-1,-101-}^2 + a_{3,h-1,101--}^2 + a_{5,h-1,10101}^3 \\
&= 2a_{5,h-1,10000} + 2a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,00100} + 4a_{4,h-1,1000} + 4a_{4,h-1,0100} + 6a_{3,h-1,100} + 3a_{3,h-1,010} + \\
&8a_{2,h-1,10} + 5a_{1,h-1,1} + 2a_{5,h-1,10100}^2 + 2a_{5,h-1,10010}^2 + a_{5,h-1,10001}^2 + a_{5,h-1,01010}^2 + 4a_{4,h-1,1010}^2 + \\
&2a_{4,h-1,1001}^2 + 3a_{3,h-1,101}^2 + a_{5,h-1,10101}^3 \\
A_{5,11111}(x) &= x(1 + 2A_{5,10000}(x) + 2A_{5,01000}(x) + A_{5,00100}(x) + 4A_{4,1000}(x) + 4A_{4,0100}(x) + \\
&6A_{3,100}(x) + 3A_{3,010}(x) + 8A_{2,10}(x) + 5A_{1,1}(x) + 2A_{5,10100}^2(x) + 2A_{5,10010}^2(x) + A_{5,10001}^2(x) + \\
&A_{5,01010}^2(x) + 4A_{4,1010}^2(x) + 2A_{4,1001}^2(x) + 3A_{3,101}^2(x) + A_{5,10101}^3(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,10100}^2 &= a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,00100} + a_{5,h-1,11000} + a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,10001} + a_{5,h-1,01100} + \\
&a_{5,h-1,00110} + a_{5,h-1,00101} + a_{5,h-1,11010} + a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,10011} + a_{5,h-1,01110} + a_{5,h-1,01101} + \\
&a_{5,h-1,00111} + a_{5,h-1,11011} + a_{5,h-1,01111} + a_{4,h-1,-0100} + a_{4,h-1,-1100} + a_{4,h-1,-0110} + a_{4,h-1,-0101} + \\
&a_{4,h-1,-1110} + a_{4,h-1,-1101} + a_{4,h-1,-0111} + a_{4,h-1,-1111} + a_{3,h-1,--100} + a_{3,h-1,--110} + a_{3,h-1,--101} + \\
&a_{3,h-1,--111} + a_{5,h-1,10100}^2 + a_{5,h-1,10110}^2 + a_{5,h-1,10101,1-3}^2 + a_{5,h-1,10101,2-3}^2 + a_{5,h-1,10111}^2 \\
&= a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,00100} + a_{5,h-1,11000} + a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,10001} + 2a_{5,h-1,01100} + \\
&a_{5,h-1,11100} + a_{5,h-1,11010} + 2a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,01110} + a_{5,h-1,11110} + a_{5,h-1,11011} + \\
&a_{4,h-1,0100} + a_{4,h-1,1100} + a_{4,h-1,1010} + a_{4,h-1,0110} + 2a_{4,h-1,1110} + a_{4,h-1,1101} + a_{4,h-1,1111} + a_{3,h-1,100} + \\
&a_{3,h-1,110} + a_{3,h-1,101} + a_{3,h-1,111} + a_{5,h-1,10100}^2 + a_{5,h-1,10110}^2 + a_{5,h-1,10101,1-2}^2 + a_{5,h-1,10101,1-3}^2 + \\
&a_{5,h-1,11101}^2 \\
A_{5,10100}^2(x) &= \frac{x}{1-x}(A_{5,10000}(x) + A_{5,00100}(x) + A_{5,11000}(x) + A_{5,10100}(x) + A_{5,10010}(x) + \\
&A_{5,10001}(x) + 2A_{5,01100}(x) + A_{5,11100}(x) + A_{5,11010}(x) + 2A_{5,11001}(x) + A_{5,10110}(x) + \\
&A_{5,01110}(x) + A_{5,11110}(x) + A_{5,11011}(x) + A_{4,0100}(x) + A_{4,1100}(x) + A_{4,1010}(x) + A_{4,0110}(x) + \\
&2A_{4,1110}(x) + A_{4,1101}(x) + A_{4,1111}(x) + A_{3,100}(x) + A_{3,110}(x) + A_{3,101}(x) + A_{3,111}(x) + \\
&A_{5,10110}^2(x) + A_{5,10101,1-2}^2(x) + A_{5,10101,1-3}^2(x) + A_{5,11101}^2(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,10010}^2 &= a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,00010} + a_{5,h-1,11000} + a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,10001} + a_{5,h-1,01010} + \\
& a_{5,h-1,00110} + a_{5,h-1,00011} + a_{5,h-1,11100} + a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,01110} + a_{5,h-1,01011} + \\
& a_{5,h-1,00111} + a_{5,h-1,11101} + a_{5,h-1,01111} + a_{4,h-1,-0010} + a_{4,h-1,-1010} + a_{4,h-1,-0110} + a_{4,h-1,-0011} + \\
& a_{4,h-1,-1110} + a_{4,h-1,-1011} + a_{4,h-1,-0111} + a_{4,h-1,-1111} + a_{3,h-1,--010} + a_{3,h-1,--110} + a_{3,h-1,--011} + \\
& a_{3,h-1,--111} + a_{2,h-1,---10} + a_{2,h-1,---11} + a_{5,h-1,10010}^2 + a_{5,h-1,11010}^2 + a_{5,h-1,10110}^2 + a_{5,h-1,10011}^2 + \\
& a_{5,h-1,11011}^2 + a_{5,h-1,10111}^2 \\
&= a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,01000} + 2a_{5,h-1,11000} + a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,10001} + a_{5,h-1,01100} + a_{5,h-1,01010} + \\
& 2a_{5,h-1,11100} + a_{5,h-1,11010} + a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,01110} + a_{5,h-1,11110} + a_{5,h-1,11101} + \\
& a_{4,h-1,0100} + a_{4,h-1,1100} + a_{4,h-1,1010} + a_{4,h-1,0110} + 2a_{4,h-1,1110} + a_{4,h-1,1101} + a_{4,h-1,1111} + a_{3,h-1,010} + \\
& 2a_{3,h-1,110} + a_{3,h-1,111} + a_{2,h-1,10} + a_{2,h-1,11} + a_{5,h-1,10010}^2 + a_{5,h-1,11010}^2 + a_{5,h-1,11001}^2 + a_{5,h-1,10110}^2 + \\
& a_{5,h-1,11101}^2 + a_{5,h-1,11011}^2 \\
A_{5,10010}^2(x) &= \frac{x}{1-x} (A_{5,10000}(x) + A_{5,01000}(x) + 2A_{5,11000}(x) + A_{5,10100}(x) + A_{5,10001}(x) + \\
& A_{5,01100}(x) + A_{5,01010}(x) + 2A_{5,11100}(x) + A_{5,11010}(x) + A_{5,11001}(x) + A_{5,10101}(x) + A_{5,01110}(x) + \\
& A_{5,11110}(x) + A_{5,11101}(x) + A_{4,0100}(x) + A_{4,1100}(x) + A_{4,1010}(x) + A_{4,0110}(x) + 2A_{4,1110}(x) + \\
& A_{4,1101}(x) + A_{4,1111}(x) + A_{3,010}(x) + 2A_{3,110}(x) + A_{3,111}(x) + A_{2,10}(x) + A_{2,11}(x) + A_{5,11010}^2(x) + \\
& A_{5,11001}^2(x) + A_{5,10110}^2(x) + A_{5,11101}^2(x) + A_{5,11011}^2(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,10001}^2 &= a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,00001} + a_{5,h-1,11000} + a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,01001} + \\
& a_{5,h-1,00101} + a_{5,h-1,00011} + a_{5,h-1,11100} + a_{5,h-1,11010} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,01101} + a_{5,h-1,01011} + \\
& a_{5,h-1,00111} + a_{5,h-1,11110} + a_{5,h-1,01111} + a_{4,h-1,1000-} + a_{4,h-1,1100-} + a_{4,h-1,1010-} + a_{4,h-1,1001-} + \\
& a_{4,h-1,1110-} + a_{4,h-1,1101-} + a_{4,h-1,1011-} + a_{4,h-1,1111-} + a_{4,h-1,-0001} + a_{4,h-1,-1001} + a_{4,h-1,-0101} + \\
& a_{4,h-1,-0011} + a_{4,h-1,-1101} + a_{4,h-1,-1011} + a_{4,h-1,-0111} + a_{4,h-1,-1111} + a_{3,h-1,100--} + a_{3,h-1,110--} + \\
& a_{3,h-1,101--} + a_{3,h-1,111--} + a_{3,h-1,--001} + a_{3,h-1,--101} + a_{3,h-1,--011} + a_{3,h-1,--111} + a_{2,h-1,10---} + \\
& a_{2,h-1,11---} + a_{2,h-1,---01} + a_{2,h-1,---11} + a_{1,h-1,1----} + a_{1,h-1,----1} + a_{5,h-1,10001}^2 + a_{5,h-1,11001}^2 + \\
& a_{5,h-1,10101,1-2}^2 + a_{5,h-1,10101,2-3}^2 + a_{5,h-1,10011}^2 + a_{5,h-1,11101}^2 + a_{5,h-1,11011}^2 + a_{5,h-1,10111}^2 \\
&= 2a_{5,h-1,10000} + 2a_{5,h-1,11000} + 2a_{5,h-1,10100} + 2a_{5,h-1,10010} + 2a_{5,h-1,11100} + 2a_{5,h-1,11010} + \\
& 2a_{5,h-1,10110} + 2a_{5,h-1,11110} + 2a_{4,h-1,1000} + 2a_{4,h-1,1100} + 2a_{4,h-1,1010} + 2a_{4,h-1,1001} + 2a_{4,h-1,1110} + \\
& 4a_{4,h-1,1101} + 2a_{4,h-1,1111} + 2a_{3,h-1,100} + 2a_{3,h-1,110} + 2a_{3,h-1,101} + 2a_{3,h-1,111} + 2a_{2,h-1,10} + \\
& 2a_{2,h-1,11} + 2a_{1,h-1,1} + a_{5,h-1,10001}^2 + 2a_{5,h-1,11001}^2 + 2a_{5,h-1,10101,1-2}^2 + 2a_{5,h-1,11101}^2 + a_{5,h-1,11011}^2 \\
A_{5,10001}^2(x) &= \frac{x}{1-x} (1 + 2A_{5,10000}(x) + 2A_{5,11000}(x) + 2A_{5,10100}(x) + 2A_{5,10010}(x) + 2A_{5,11100}(x) + \\
& 2A_{5,11010}(x) + 2A_{5,10110}(x) + 2A_{5,11110}(x) + 2A_{4,1000}(x) + 2A_{4,1100}(x) + 2A_{4,1010}(x) + \\
& 2A_{4,1001}(x) + 2A_{4,1110}(x) + 4A_{4,1101}(x) + 2A_{4,1111}(x) + 2A_{3,100}(x) + 2A_{3,110}(x) + 2A_{3,101}(x) + \\
& 2A_{3,111}(x) + 2A_{2,10}(x) + 2A_{2,11}(x) + 2A_{1,1}(x) + 2A_{5,11001}^2(x) + 2A_{5,10101,1-2}^2(x) + 2A_{5,11101}^2(x) + \\
& A_{5,11011}^2(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,01010}^2 &= a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,00010} + a_{5,h-1,11000} + a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,01100} + a_{5,h-1,01001} + \\
& a_{5,h-1,00110} + a_{5,h-1,00011} + a_{5,h-1,11100} + a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,10011} + a_{5,h-1,01101} + \\
& a_{5,h-1,00111} + a_{5,h-1,11101} + a_{5,h-1,10111} + a_{5,h-1,01010}^2 + a_{5,h-1,11010}^2 + a_{5,h-1,01011}^2 + a_{5,h-1,11011}^2 \\
&= 2a_{5,h-1,01000} + 2a_{5,h-1,11000} + 2a_{5,h-1,10010} + 2a_{5,h-1,01100} + 2a_{5,h-1,11100} + 2a_{5,h-1,11001} + \\
& 2a_{5,h-1,10110} + 2a_{5,h-1,11101} + a_{5,h-1,01010}^2 + a_{5,h-1,11010}^2 + a_{5,h-1,11011}^2 \\
A_{5,01010}^2(x) &= \frac{x}{1-x} (2A_{5,01000}(x) + 2A_{5,11000}(x) + 2A_{5,10010}(x) + 2A_{5,01100}(x) + 2A_{5,11100}(x) + \\
& 2A_{5,11001}(x) + 2A_{5,10110}(x) + 2A_{5,11101}(x) + 2A_{5,11010}^2(x) + A_{5,11011}^2(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,11010}^2 &= a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,00010} + a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,10001} + a_{5,h-1,01100} + \\
& a_{5,h-1,01001} + a_{5,h-1,00110} + a_{5,h-1,00011} + a_{5,h-1,10101} + a_{5,h-1,01101} + a_{5,h-1,00111} + a_{4,h-1,-1000} + \\
& a_{4,h-1,-0010} + a_{4,h-1,-1100} + a_{4,h-1,-1001} + a_{4,h-1,-0110} + a_{4,h-1,-0011} + a_{4,h-1,-1101} + a_{4,h-1,-0111} + \\
& a_{3,h-1,-010} + a_{3,h-1,-110} + a_{3,h-1,-011} + a_{3,h-1,-111} + a_{2,h-1,---10} + a_{2,h-1,---11} + a_{5,h-1,10010}^2 + \\
& a_{5,h-1,01010}^2 + a_{5,h-1,10110}^2 + a_{5,h-1,10011}^2 + a_{5,h-1,01011}^2 + a_{5,h-1,10111}^2 + a_{4,h-1,-1010}^2 + a_{4,h-1,-1011}^2 \\
&= a_{5,h-1,10000} + 2a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,11000} + a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,10001} + 2a_{5,h-1,01100} + \\
& a_{5,h-1,11100} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,10101} + a_{4,h-1,1000} + a_{4,h-1,0100} + 2a_{4,h-1,1100} + a_{4,h-1,1001} + \\
& a_{4,h-1,0110} + a_{4,h-1,1110} + a_{4,h-1,1101} + a_{3,h-1,010} + 2a_{3,h-1,110} + a_{3,h-1,111} + a_{2,h-1,10} + a_{2,h-1,11} + \\
& a_{5,h-1,10010}^2 + a_{5,h-1,01010}^2 + a_{5,h-1,11010}^2 + a_{5,h-1,11001}^2 + a_{5,h-1,10110}^2 + a_{5,h-1,11101}^2 + a_{4,h-1,1010}^2 + \\
& a_{4,h-1,1101}^2 \\
A_{5,11010}^2(x) &= \frac{x}{1-x} (A_{5,10000}(x) + 2A_{5,01000}(x) + A_{5,11000}(x) + A_{5,10100}(x) + A_{5,10010}(x) + \\
& A_{5,10001}(x) + 2A_{5,01100}(x) + A_{5,11100}(x) + A_{5,10110}(x) + A_{5,10101}(x) + A_{4,1000}(x) + A_{4,0100}(x) + \\
& 2A_{4,1100}(x) + A_{4,1001}(x) + A_{4,0110}(x) + A_{4,1110}(x) + A_{4,1101}(x) + A_{3,010}(x) + 2A_{3,110}(x) + \\
& A_{3,111}(x) + A_{2,10}(x) + A_{2,11}(x) + A_{5,10010}^2(x) + A_{5,01010}^2(x) + A_{5,11001}^2(x) + A_{5,10110}^2(x) + \\
& A_{5,11101}^2(x) + A_{4,1010}^2(x) + A_{4,1101}^2(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,11001}^2 &= a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,00001} + a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,01100} + \\
& a_{5,h-1,01010} + a_{5,h-1,00101} + a_{5,h-1,00011} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,01110} + a_{5,h-1,00111} + a_{4,h-1,1000-} + \\
& a_{4,h-1,0100-} + a_{4,h-1,1010-} + a_{4,h-1,1001-} + a_{4,h-1,0110-} + a_{4,h-1,0101-} + a_{4,h-1,1011-} + a_{4,h-1,0111-} + \\
& a_{4,h-1,-1000} + a_{4,h-1,-0001} + a_{4,h-1,-1100} + a_{4,h-1,-1010} + a_{4,h-1,-0101} + a_{4,h-1,-0011} + a_{4,h-1,-1110} + \\
& a_{4,h-1,-0111} + a_{3,h-1,100--} + a_{3,h-1,010--} + a_{3,h-1,101--} + a_{3,h-1,011--} + a_{3,h-1,-100-} + a_{3,h-1,-110-} + \\
& a_{3,h-1,-101-} + a_{3,h-1,-111-} + a_{3,h-1,--001} + a_{3,h-1,--101} + a_{3,h-1,--011} + a_{3,h-1,--111} + a_{2,h-1,10---} + \\
& a_{2,h-1,01---} + a_{2,h-1,-10--} + a_{2,h-1,-11--} + a_{2,h-1,---01} + a_{2,h-1,---11} + a_{1,h-1,1----} + a_{1,h-1,-1----} + \\
& a_{1,h-1,-----} + a_{5,h-1,10001}^2 + a_{5,h-1,01001}^2 + a_{5,h-1,10101,1-2}^2 + a_{5,h-1,10101,2-3}^2 + a_{5,h-1,10011}^2 + \\
& a_{5,h-1,01101}^2 + a_{5,h-1,01011}^2 + a_{5,h-1,10111}^2 + a_{4,h-1,-1001}^2 + a_{4,h-1,-1101}^2 + a_{4,h-1,-1011}^2 \\
& = 2a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,11000} + 2a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,01100} + a_{5,h-1,01010} + \\
& a_{5,h-1,11100} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,01110} + 3a_{4,h-1,1000} + a_{4,h-1,0100} + 2a_{4,h-1,1100} + 4a_{4,h-1,1010} + \\
& a_{4,h-1,1001} + a_{4,h-1,0110} + 3a_{4,h-1,1110} + a_{4,h-1,1101} + 3a_{3,h-1,100} + a_{3,h-1,010} + 3a_{3,h-1,110} + 3a_{3,h-1,101} + \\
& 2a_{3,h-1,111} + 4a_{2,h-1,10} + 2a_{2,h-1,11} + 3a_{1,h-1,1} + a_{5,h-1,10010}^2 + a_{5,h-1,10001}^2 + a_{5,h-1,11010}^2 + a_{5,h-1,11001}^2 + \\
& a_{5,h-1,10110}^2 + 2a_{5,h-1,10101,1-2}^2 + a_{5,h-1,11101}^2 + a_{4,h-1,1001}^2 + 2a_{4,h-1,1101}^2 \\
A_{5,11001}^2(x) &= \frac{x}{1-x} (1 + 2A_{5,10000}(x) + A_{5,01000}(x) + A_{5,11000}(x) + 2A_{5,10100}(x) + A_{5,10010}(x) + \\
& A_{5,01100}(x) + A_{5,01010}(x) + A_{5,11100}(x) + A_{5,10110}(x) + A_{5,01110}(x) + 3A_{4,1000}(x) + A_{4,0100}(x) + \\
& 2A_{4,1100}(x) + 4A_{4,1010}(x) + A_{4,1001}(x) + A_{4,0110}(x) + 3A_{4,1110}(x) + A_{4,1101}(x) + 3A_{3,100}(x) + \\
& A_{3,010}(x) + 3A_{3,110}(x) + 3A_{3,101}(x) + 2A_{3,111}(x) + 4A_{2,10}(x) + 2A_{2,11}(x) + 3A_{1,1}(x) + \\
& A_{5,10010}^2(x) + A_{5,10001}^2(x) + A_{5,11010}^2(x) + A_{5,10110}^2(x) + 2A_{5,10101,1-2}^2(x) + A_{5,11101}^2(x) + \\
& A_{4,1001}^2(x) + 2A_{4,1101}^2(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,10110}^2 &= a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,00100} + a_{5,h-1,00010} + a_{5,h-1,11000} + a_{5,h-1,10001} + a_{5,h-1,01100} + \\
& a_{5,h-1,01010} + a_{5,h-1,00101} + a_{5,h-1,00011} + a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,01101} + a_{5,h-1,01011} + a_{4,h-1,-0100} + \\
& a_{4,h-1,-0010} + a_{4,h-1,-1100} + a_{4,h-1,-1010} + a_{4,h-1,-0101} + a_{4,h-1,-0011} + a_{4,h-1,-1101} + a_{4,h-1,-1011} + \\
& a_{3,h-1,--100} + a_{3,h-1,--010} + a_{3,h-1,--101} + a_{3,h-1,--011} + a_{2,h-1,---10} + a_{2,h-1,---11} + a_{5,h-1,10100}^2 + \\
& a_{5,h-1,10010}^2 + a_{5,h-1,11010}^2 + a_{5,h-1,10101,1-3}^2 + a_{5,h-1,10101,2-3}^2 + a_{5,h-1,10011}^2 + a_{5,h-1,11011}^2 \\
& = a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,00100} + 2a_{5,h-1,11000} + a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,10001} + a_{5,h-1,01100} + \\
& a_{5,h-1,01010} + a_{5,h-1,11010} + a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,10110} + 2a_{4,h-1,0100} + 2a_{4,h-1,1100} + 2a_{4,h-1,1010} + \\
& 2a_{4,h-1,1101} + a_{3,h-1,100} + a_{3,h-1,010} + a_{3,h-1,110} + a_{3,h-1,101} + a_{2,h-1,10} + a_{2,h-1,11} + a_{5,h-1,10100}^2 + \\
& a_{5,h-1,10010}^2 + a_{5,h-1,11010}^2 + a_{5,h-1,11001}^2 + a_{5,h-1,10101,1-2}^2 + a_{5,h-1,10101,1-3}^2 + a_{5,h-1,11011}^2 \\
A_{5,10110}^2(x) &= x(A_{5,10000}(x) + A_{5,01000}(x) + A_{5,00100}(x) + 2A_{5,11000}(x) + A_{5,10100}(x) + \\
& A_{5,10001}(x) + A_{5,01100}(x) + A_{5,01010}(x) + A_{5,11010}(x) + A_{5,11001}(x) + A_{5,10110}(x) + 2A_{4,0100}(x) + \\
& 2A_{4,1100}(x) + 2A_{4,1010}(x) + 2A_{4,1101}(x) + A_{3,100}(x) + A_{3,010}(x) + A_{3,110}(x) + A_{3,101}(x) + \\
& A_{2,10}(x) + A_{2,11}(x) + A_{5,10100}^2(x) + A_{5,10010}^2(x) + A_{5,11010}^2(x) + A_{5,11001}^2(x) + A_{5,10101,1-2}^2(x) + \\
& A_{5,10101,1-3}^2(x) + A_{5,11011}^2(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,10101,1-2}^2 &= a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,11100} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,11110} + a_{4,h-1,1010-} + a_{4,h-1,1110-} + \\
& a_{4,h-1,1011-} + a_{4,h-1,1111-} + a_{3,h-1,101--} + a_{3,h-1,111--} + a_{5,h-1,10101,1-2}^2 + a_{5,h-1,11101}^2 \\
& = a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,11100} + a_{5,h-1,10110} + a_{5,h-1,11110} + a_{4,h-1,1010} + a_{4,h-1,1110} + a_{4,h-1,1101} + \\
& a_{4,h-1,1111} + a_{3,h-1,101} + a_{3,h-1,111} + a_{5,h-1,10101,1-2}^2 + a_{5,h-1,11101}^2 \\
A_{5,10101,1-2}^2(x) &= \frac{x}{1-x}(A_{5,10100}(x) + A_{5,11100}(x) + A_{5,10110}(x) + A_{5,11110}(x) + A_{4,1010}(x) + \\
& A_{4,1110}(x) + A_{4,1101}(x) + A_{4,1111}(x) + A_{3,101}(x) + A_{3,111}(x) + A_{5,11101}^2(x)) \\
a_{5,h,10101,1-3}^2 &= a_{5,h-1,10001} + a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,10011} + a_{5,h-1,11011} + a_{5,h-1,10101,1-3}^2 \\
& = a_{5,h-1,10001} + 2a_{5,h-1,11001} + a_{5,h-1,11011} + a_{5,h-1,10101,1-3}^2 \\
A_{5,10101,1-3}^2(x) &= \frac{x}{1-x}(A_{5,10001}(x) + 2A_{5,11001}(x) + A_{5,11011}(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,11101}^2 &= a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,00100} + a_{5,h-1,00001} + a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,01010} + \\
& a_{5,h-1,00110} + a_{5,h-1,00011} + a_{4,h-1,1000-} + a_{4,h-1,0100-} + a_{4,h-1,0010-} + a_{4,h-1,1001-} + a_{4,h-1,0101-} + \\
& a_{4,h-1,0011-} + a_{4,h-1,-1000} + a_{4,h-1,-0100} + a_{4,h-1,-0001} + a_{4,h-1,-1010} + a_{4,h-1,-0110} + a_{4,h-1,-0011} + \\
& a_{3,h-1,100--} + a_{3,h-1,010--} + a_{3,h-1,001--} + a_{3,h-1,-100-} + a_{3,h-1,-010-} + a_{3,h-1,-101-} + a_{3,h-1,-011-} + \\
& a_{3,h-1,--100} + a_{3,h-1,--001} + a_{3,h-1,--110} + a_{3,h-1,--011} + a_{2,h-1,10---} + a_{2,h-1,01---} + a_{2,h-1,-10--} + \\
& a_{2,h-1,-01--} + a_{2,h-1,--10-} + a_{2,h-1,--11-} + a_{2,h-1,---01} + a_{2,h-1,---11} + a_{1,h-1,1----} + a_{1,h-1,-1---} + \\
& a_{1,h-1,--1--} + a_{1,h-1,----1} + a_{5,h-1,10100}^2 + a_{5,h-1,10001}^2 + a_{5,h-1,01001}^2 + a_{5,h-1,00101}^2 + a_{5,h-1,10110}^2 + \\
& a_{5,h-1,10011}^2 + a_{5,h-1,01011}^2 + a_{4,h-1,-1001}^2 + a_{4,h-1,-0101}^2 + a_{4,h-1,-1011}^2 + a_{4,h-1,1010-}^2 + a_{4,h-1,1011-}^2 + \\
& a_{3,h-1,--101}^2 + a_{3,h-1,101--}^2 + a_{5,h-1,10101}^3 \\
& = 2a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,00100} + a_{5,h-1,11000} + a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,01100} + a_{5,h-1,01010} + \\
& 3a_{4,h-1,1000} + 3a_{4,h-1,0100} + 2a_{4,h-1,1100} + 2a_{4,h-1,1010} + a_{4,h-1,1001} + a_{4,h-1,0110} + 5a_{3,h-1,100} + \\
& 2a_{3,h-1,010} + 3a_{3,h-1,110} + a_{3,h-1,101} + 6a_{2,h-1,10} + 2a_{2,h-1,11} + 4a_{1,h-1,1} + 2a_{5,h-1,10100}^2 + a_{5,h-1,10010}^2 + \\
& a_{5,h-1,10001}^2 + a_{5,h-1,11010}^2 + a_{5,h-1,11001}^2 + a_{5,h-1,10110}^2 + 2a_{4,h-1,1010}^2 + a_{4,h-1,1001}^2 + 2a_{4,h-1,1101}^2 + \\
& 2a_{3,h-1,101}^2 + a_{5,h-1,10101}^3 \\
A_{5,11101}^2(x) &= x(1 + 2A_{5,10000}(x) + A_{5,01000}(x) + A_{5,00100}(x) + A_{5,11000}(x) + A_{5,10010}(x) + \\
& A_{5,01100}(x) + A_{5,01010}(x) + 3A_{4,1000}(x) + 3A_{4,0100}(x) + 2A_{4,1100}(x) + 2A_{4,1010}(x) + A_{4,1001}(x) + \\
& A_{4,0110}(x) + 5A_{3,100}(x) + 2A_{3,010}(x) + 3A_{3,110}(x) + A_{3,101}(x) + 6A_{2,10}(x) + 2A_{2,11}(x) + \\
& 4A_{1,1}(x) + 2A_{5,10100}^2(x) + A_{5,10010}^2(x) + A_{5,10001}^2(x) + A_{5,11010}^2(x) + A_{5,11001}^2(x) + A_{5,10110}^2(x) + \\
& 2A_{4,1010}^2(x) + A_{4,1001}^2(x) + 2A_{4,1101}^2(x) + 2A_{3,101}^2(x) + A_{5,10101}^3(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,11011}^2 &= a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,01000} + a_{5,h-1,00010} + a_{5,h-1,00001} + a_{5,h-1,10100} + a_{5,h-1,01100} + \\
& a_{5,h-1,00110} + a_{5,h-1,00101} + a_{4,h-1,1000-} + a_{4,h-1,0100-} + a_{4,h-1,0001-} + a_{4,h-1,1010-} + a_{4,h-1,0110-} + \\
& a_{4,h-1,0011-} + a_{4,h-1,-1000} + a_{4,h-1,-0010} + a_{4,h-1,-0001} + a_{4,h-1,-1100} + a_{4,h-1,-0110} + a_{4,h-1,-0101} + \\
& a_{3,h-1,100--} + a_{3,h-1,010--} + a_{3,h-1,101--} + a_{3,h-1,011--} + a_{3,h-1,-100-} + a_{3,h-1,-001-} + a_{3,h-1,-110-} + \\
& a_{3,h-1,-011-} + a_{3,h-1,-010} + a_{3,h-1,-001} + a_{3,h-1,-110} + a_{3,h-1,-101} + a_{2,h-1,10---} + a_{2,h-1,01---} + \\
& a_{2,h-1,-10--} + a_{2,h-1,-11--} + a_{2,h-1,-01-} + a_{2,h-1,-11-} + a_{2,h-1,---10} + a_{2,h-1,---01} + a_{1,h-1,1----} + \\
& a_{1,h-1,-1---} + a_{1,h-1,---1-} + a_{1,h-1,----1} + a_{5,h-1,10010}^2 + a_{5,h-1,10001}^2 + a_{5,h-1,01010}^2 + a_{5,h-1,01001}^2 + \\
& a_{5,h-1,10110}^2 + a_{5,h-1,10101,1-2}^2 + a_{5,h-1,10101,2-3}^2 + a_{5,h-1,01101}^2 + a_{4,h-1,-1010}^2 + a_{4,h-1,-1001}^2 + \\
& a_{4,h-1,-1101}^2 + a_{4,h-1,1001-}^2 + a_{4,h-1,0101-}^2 + a_{4,h-1,1011-}^2 + a_{3,h-1,-101-}^2 \\
& = 2a_{5,h-1,10000} + 2a_{5,h-1,01000} + 2a_{5,h-1,10100} + 2a_{5,h-1,01100} + 4a_{4,h-1,1000} + 2a_{4,h-1,0100} + \\
& 2a_{4,h-1,1100} + 2a_{4,h-1,1010} + 2a_{4,h-1,0110} + 4a_{3,h-1,100} + 2a_{3,h-1,010} + 4a_{3,h-1,110} + 2a_{3,h-1,101} + \\
& 6a_{2,h-1,10} + 2a_{2,h-1,11} + 4a_{1,h-1,1} + 2a_{5,h-1,10010}^2 + a_{5,h-1,10001}^2 + a_{5,h-1,01010}^2 + 2a_{5,h-1,10110}^2 + \\
& 2a_{5,h-1,10101,1-2}^2 + 2a_{4,h-1,1010}^2 + 2a_{4,h-1,1001}^2 + 2a_{4,h-1,1101}^2 + a_{3,h-1,101}^2 \\
A_{5,11011}^2(x) &= x(1 + 2A_{5,10000}(x) + 2A_{5,01000}(x) + 2A_{5,10100}(x) + 2A_{5,01100}(x) + 4A_{4,1000}(x) + \\
& 2A_{4,0100}(x) + 2A_{4,1100}(x) + 2A_{4,1010}(x) + 2A_{4,0110}(x) + 4A_{3,100}(x) + 2A_{3,010}(x) + 4A_{3,110}(x) + \\
& 2A_{3,101}(x) + 6A_{2,10}(x) + 2A_{2,11}(x) + 4A_{1,1}(x) + 2A_{5,10010}^2(x) + A_{5,10001}^2(x) + A_{5,01010}^2(x) + \\
& 2A_{5,10110}^2(x) + 2A_{5,10101,1-2}^2(x) + 2A_{4,1010}^2(x) + 2A_{4,1001}^2(x) + 2A_{4,1101}^2(x) + A_{3,101}^2(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5,h,10101}^3 &= a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,00100} + a_{5,h-1,00001} + a_{5,h-1,11000} + a_{5,h-1,10010} + a_{5,h-1,01100} + \\
& a_{5,h-1,01001} + a_{5,h-1,00110} + a_{5,h-1,00011} + a_{5,h-1,11010} + a_{5,h-1,01110} + a_{5,h-1,01011} + a_{4,h-1,1000-} + \\
& a_{4,h-1,0010-} + a_{4,h-1,1100-} + a_{4,h-1,1001-} + a_{4,h-1,0110-} + a_{4,h-1,0011-} + a_{4,h-1,1101-} + a_{4,h-1,0111-} + \\
& a_{4,h-1,-0100} + a_{4,h-1,-0001} + a_{4,h-1,-1100} + a_{4,h-1,-1001} + a_{4,h-1,-0110} + a_{4,h-1,-0011} + a_{4,h-1,-1110} + \\
& a_{4,h-1,-1011} + a_{3,h-1,100--} + a_{3,h-1,001--} + a_{3,h-1,110--} + a_{3,h-1,011--} + a_{3,h-1,-010-} + a_{3,h-1,-110-} + \\
& a_{3,h-1,-011-} + a_{3,h-1,-111-} + a_{3,h-1,--100} + a_{3,h-1,--001} + a_{3,h-1,--110} + a_{3,h-1,--011} + a_{2,h-1,10---} + \\
& a_{2,h-1,11---} + a_{2,h-1,-01--} + a_{2,h-1,-11--} + a_{2,h-1,--10-} + a_{2,h-1,--11-} + a_{2,h-1,---01} + a_{2,h-1,---11} + \\
& a_{1,h-1,1----} + a_{1,h-1,--1--} + a_{1,h-1,----1} + a_{5,h-1,10100}^2 + a_{5,h-1,10001}^2 + a_{5,h-1,00101}^2 + a_{5,h-1,11001}^2 + \\
& a_{5,h-1,10110}^2 + a_{5,h-1,10011}^2 + a_{5,h-1,01101}^2 + a_{5,h-1,11011}^2 + a_{4,h-1,-0101}^2 + a_{4,h-1,-1101}^2 + a_{4,h-1,1010-}^2 + \\
& a_{4,h-1,1011-}^2 + a_{3,h-1,--101}^2 + a_{3,h-1,101--}^2 + a_{5,h-1,10101}^3 \\
& = 2a_{5,h-1,10000} + a_{5,h-1,00100} + 2a_{5,h-1,11000} + 2a_{5,h-1,10010} + 2a_{5,h-1,01100} + 2a_{5,h-1,11010} + \\
& a_{5,h-1,01110} + 2a_{4,h-1,1000} + 2a_{4,h-1,0100} + 4a_{4,h-1,1100} + 2a_{4,h-1,1001} + 2a_{4,h-1,0110} + 2a_{4,h-1,1110} + \\
& 2a_{4,h-1,1101} + 4a_{3,h-1,100} + a_{3,h-1,010} + 6a_{3,h-1,110} + a_{3,h-1,111} + 4a_{2,h-1,10} + 4a_{2,h-1,11} + 3a_{1,h-1,1} + \\
& 2a_{5,h-1,10100}^2 + a_{5,h-1,10001}^2 + 2a_{5,h-1,11001}^2 + 2a_{5,h-1,10110}^2 + a_{5,h-1,11011}^2 + 2a_{4,h-1,1010}^2 + 2a_{4,h-1,1101}^2 + \\
& 2a_{3,h-1,101}^2 + a_{5,h-1,10101}^3 \\
A_{5,10101}^3(x) &= \frac{x}{1-x} (1 + 2A_{5,10000}(x) + A_{5,00100}(x) + 2A_{5,11000}(x) + 2A_{5,10010}(x) + 2A_{5,01100}(x) + \\
& 2A_{5,11010}(x) + A_{5,01110}(x) + 2A_{4,1000}(x) + 2A_{4,0100}(x) + 4A_{4,1100}(x) + 2A_{4,1001}(x) + \\
& 2A_{4,0110}(x) + 2A_{4,1110}(x) + 2A_{4,1101}(x) + 4A_{3,100}(x) + A_{3,010}(x) + 6A_{3,110}(x) + A_{3,111}(x) + \\
& 4A_{2,10}(x) + 4A_{2,11}(x) + 3A_{1,1}(x) + 2A_{5,10100}^2(x) + A_{5,10001}^2(x) + 2A_{5,11001}^2(x) + 2A_{5,10110}^2(x) + \\
& A_{5,11011}^2(x) + 2A_{4,1010}^2(x) + 2A_{4,1101}^2(x) + 2A_{3,101}^2(x))
\end{aligned}$$

A.1.6 Programme de calcul de relations de récurrence

Calculé avec SageMath :


```

f=solve([X - x/(1 - x),
XO - x*XX/(1 - x),
XX - x*(1 + 2*XO + 2*X),
A2 - 2*XO - XX,
XOO - x*(XOX + XO + XXX)/(1 - x),
OXO - x*(2*XOX + XXX)/(1 - x),
XOX - x*(XOO + OXO + XO + XX)/(1 - x),
XOX - x*XXX/(1 - x),
XXX - x*(1 + 2*XOO + OXO + 4*XO + 3*X + XOX2),
XOX2 - x*(1 + 2*(XOO + XXO + XO + XX + X))/(1 - x),
A3 - 2*(XOO + XXO) - (OXO + XOX + XXX),
XOOO - x*(XOXO + XOXO + XOXO + XXXO + 2*XOXO + XXXX)/(1 - x),
OXOO - x*(XOXO + XOXO + OXOX + 2*XXXO + XOXO + XXXX)/(1 - x),
XXOO - x*(XOOO + OXOO + 2*XOXO + XOXO + OXOX + XXXO + XOXO +
XOO + XXO + XOX + XXX),
XOXO - x*(XXXO + XOXO + XXXX)/(1 - x),
XOXO - x*(2*XOXO + XXXX)/(1 - x),
OXOX - 2*x*(OXOO + XXOO + XOXO + XXOX),
XXXO - x*(XOOO + 2*OXOO + XXOO + XOXO + XOXO + XOO + OXO + XXO
+ XOX + XO + XX + XOXO2 + XXOX2),
XXOX - x*(XOXO + XOXO + XXXO + XOX + XXX)/(1 - x),
XXXX - x*(1 + 2*(XOOO + OXOO + 2*XOO + OXO + 3*XO + 2*X + XOXO2 +
XOX2) + XOXO2),
XOXO2 - x*(XOOO + OXOO + 2*XXOO + XOXO + OXOX + XXXO + XOXO +
OXO + 2*XXO + XXX + XO + XX + XXOX2)/(1 - x),
XOXO2 - x*(1 + 2*(XOOO + XXOO + XOXO + XXXO + XOO + XXO + XOX +
XXX + XO + XX + X + XXOX2))/(1 - x),
XXOX2 - x*(1 + 2*XOOO + OXOO + XXOO + XOXO + OXOX + 3*XOO + OXO
+ 3*XXO + XOX + 4*XO + 2*XX + 3*X + XOXO2 + XOXO2 + XOX2)/(1 - x),
A4 - 2*(XOOO + OXOO + XXOO + XOXO + XXXO + XXOX) - (XOXO + OXOX
+ XXXX),

```

$$\begin{aligned}
&XOOOO - x*(XXOOO + XOXOO + XOOXO + XOOOX + XXXOO + XXOXO + \\
&2*XXOOX + XOXXO + XOXOX + XXXXO + 2*XXXOX + XXOXX + XXXXX)/(1 \\
&- x), \\
&OXOOO - x*(XXOOO + XOOXO + OXXOO + OXOXO + XXXOO + 2*XXOXO + \\
&XXOOX + XOXXO + OXXXO + 2*XXXXO + XXXOX + XXOXX + XXXXX)/(1 \\
&- x), \\
&OOXOO - x*(2*XOXOO + 2*OXXOO + 2*XXXOO + 2*XOXXO + XOXOX + \\
&OXXXO + 2*XXXXO + 2*XXXOX + XXXXX)/(1 - x), \\
&XXOOO - x*(XOOOO + OXOOO + XOXOO + 2*XOOXO + XOOOX + OXXOO \\
&+ OXOXO + XXOXO + XXOOX + 2*XOXXO + XOXOX + OXXXO + XXXXO \\
&+ XXXOX + XOOO + XXOO + XOXO + XOOX + XXXO + 2*XXOX + XXXX), \\
&XOXOO - x*(XXXOO + XOXXO + XOXOX + XXXXO + 2*XXXOX + XXXXX)/(1 \\
&- x), \\
&XOOXO - x*(XXOXO + XXOOX + XOXXO + XXXXO + XXXOX + XXOXX + \\
&XXXXX)/(1 - x), \\
&XOOOX - x*(2*XXOOX + XOXOX + 2*XXXOX + XXOXX + XXXXX)/(1 - x), \\
&OXXOO - x*(OXOOO + OOXOO + XXOOO + 2*XOXOO + XOOXO + OXOXO + \\
&XXXOO + 2*XXOXO + XXOOX + XOXXO + XOXOX + XXXOX + XXOXX)/(1 \\
&- x), \\
&OXOXO - x*(2*XXOXO + OXXXO + 2*XXXXO + XXOXX + XXXXX)/(1 - x), \\
&XXXOO - x*(XOOOO + OXOOO + OOXOO + XOXOO + 2*XOOXO + XOOOX \\
&+ OXXOO + OXOXO + XXOXO + XXOOX + XOOO + OXOO + 2*XOXO + \\
&XOOX + OXXO + XXXO + XXOX + XOO + XXO + XOX + XXX + XOXOO2 + \\
&XOXXO2 + XOXOX12 + XOXOX13 + XXXOX2)/(1 - x), \\
&XXOXO - x*(XOOXO + OXOXO + XXOOX + XOXXO + OXXXO + XXXXO + \\
&XXXOX + XOXO + XXXO + XXOX + XXXX)/(1 - x), \\
&XXOOX - x*(XOOXO + XOOOX + XXOXO + XOXXO + XOXOX + XXXXO + \\
&XXXOX + XOOX + 2*XXOX + XXXX)/(1 - x), \\
&XOXXO - x*(XOXOO + XOOXO + XXXOO + XXOXO + XXOOX + XOXOX + \\
&XXXOX + XXOXX), \\
&XOXOX - x*(2*XXXOX + XXXXX)/(1 - x), \\
&OXXXO - x*(2*OXOOO + OOXOO + 2*XXOOO + 2*XOXOO + 2*XOOXO + \\
&2*XXOOX + XOXOX + OXOXO2 + 2*XXOXO2 + XXOXX2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &XXXXO - x*(XOOOO + 2*OXOOO + OOXOO + XXOOO + XOXOO + XOOXO + \\ &XOOOX + XOOO + 2*OXOO + XXOO + XOXO + XOOX + XOO + OXO + XXO \\ &+ XOX + XO + XX + XOXOO2 + XOOXO2 + OXOXO2 + XXOXO2 + XXOOX2 \\ &+ XOXOX12 + XOXOX13 + XOXO2 + XXOX2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &XXXOX - x*(XOXOO + XOOXO + XOOOX + XXXOO + XXOXO + XXOOX + \\ &XOXO + XOOX + XXXO + XXOX + XOX + XXX + XOXOX12 + XOXOX13 + \\ &XXXOX2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &XXOXX - x*(2*XOOXO + XOOOX + OXOXO + 2*XOXXO + XOXOX + OXXXO \\ &+ 2*XOXO + 2*XOOX + 2*XXXO + 2*XXOX + XOX + XXX), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &XXXXX - x*(1 + 2*XOOOO + 2*OXOOO + OOXOO + 4*XOOO + 4*OXOO + \\ &6*XOO + 3*OXO + 8*XO + 5*X + 2*XOXOO2 + 2*XOOXO2 + XOOOX2 + \\ &OXOXO2 + XOXOX3 + 4*XOXO2 + 2*XOOX2 + 3*XOX2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &XOXOO2 - x*(XOOOO + OOXOO + XXOOO + XOXOO + XOOXO + XOOOX + \\ &2*OXXOO + XXXOO + XXOXO + 2*XXOOX + XOXXO + OXXXO + XXXXO \\ &+ XXOXX + OXOO + XXOO + XOXO + OXXO + 2*XXXO + XXOX + XXXX + \\ &XOO + XXO + XOX + XXX + XOXXO2 + XOXOX12 + XOXOX13 + XXXOX2)/(1 \\ &- x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &XOOXO2 - x*(XOOOO + OXOOO + 2*XXOOO + XOXOO + XOOOX + OXXOO \\ &+ OXOXO + 2*XXXOO + XXOXO + XXOOX + XOXOX + OXXXO + XXXXO \\ &+ XXXOX + OXOO + XXOO + XOXO + OXXO + 2*XXXO + XXOX + XXXX \\ &+ OXO + 2*XXO + XXX + XO + XX + XXOXO2 + XXOOX2 + XOXXO2 + \\ &XXXOX2 + XXOXX2)/(1 - x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &XOOOX2 - x*(1 + 2*XOOOO + 2*XXOOO + 2*XOXOO + 2*XOOXO + 2*XXXOO \\ &+ 2*XXOXO + 2*XOXXO + 2*XXXXO + 2*XOOO + 2*XXOO + 2*XOXO + \\ &2*XOOX + 2*XXXO + 4*XXOX + 2*XXXX + 2*XOO + 2*XXO + 2*XOX + \\ &2*XXX + 2*XO + 2*XX + 2*X + 2*XXOOX2 + 2*XOXOX12 + 2*XXXOX2 + \\ &XXOXX2)/(1 - x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &OXOXO2 - x*(2*OXOOO + 2*XXOOO + 2*XOOXO + 2*OXXOO + 2*XXXOO + \\ &2*XXOOX + 2*XOXXO + 2*XXXOX + 2*XXOXO2 + XXOXX2)/(1 - x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &XXOXO2 - x*(XOOOO + 2*OXOOO + XXOOO + XOXOO + XOOXO + XOOOX \\ &+ 2*OXXOO + XXXOO + XOXXO + XOXOX + XOOO + OXOO + 2*XXOO \\ &+ XOOX + OXXO + XXXO + XXOX + OXO + 2*XXO + XXX + XO + XX + \\ &XOOXO2 + OXOXO2 + XXOOX2 + XOXXO2 + XXXOX2 + XOXO2 + XXOX2)/(1 \\ &- x), \end{aligned}$$

$XXOOX2 - x*(1 + 2*XOOOO + OXOOO + XXOOO + 2*XOXOO + XOOXO +$
 $OXXOO + OXOXO + XXXOO + XOXXO + OXXXO + 3*XOOO + OXOO +$
 $2*XXOO + 4*XOXO + XOOX + OXXO + 3*XXXO + XXOX + 3*XOO + OXO$
 $+ 3*XXO + 3*XOX + 2*XXX + 4*XO + 2*XX + 3*X + XOOXO2 + XOOOX2 +$
 $XXOXO2 + XOXXO2 + 2*XOXOX12 + XXXOX2 + XOOX2 + 2*XXOX2)/(1 - x),$
 $XOXXO2 - x*(XOOOO + OXOOO + OOXOO + 2*XXOOO + XOXOO + XOOOX$
 $+ OXXOO + OXOXO + XXOXO + XXOOX + XOXXO + 2*OXOO + 2*XXOO +$
 $2*XOXO + 2*XXOX + XOO + OXO + XXO + XOX + XO + XX + XOXOO2 +$
 $XOOXO2 + XXOXO2 + XXOOX2 + XOXOX12 + XOXOX13 + XXOXX2),$
 $XOXOX12 - x*(XOXOO + XXXOO + XOXXO + XXXXO + XOXO + XXXO +$
 $XXOX + XXXX + XOX + XXX + XXXOX2)/(1 - x),$
 $XOXOX13 - x*(XOOOX + 2*XXOOX + XXOXX)/(1 - x),$
 $XXXOX2 - x*(1 + 2*XOOOO + OXOOO + OOXOO + XXOOO + XOOXO +$
 $OXXOO + OXOXO + 3*XOOO + 3*OXOO + 2*XXOO + 2*XOXO + XOOX +$
 $OXXO + 5*XOO + 2*OXO + 3*XXO + XOX + 6*XO + 2*XX + 4*X + 2*XOXOO2$
 $+ XOOXO2 + XOOOX2 + XXOXO2 + XXOOX2 + XOXXO2 + XOXOX3 +$
 $2*XOXO2 + XOOX2 + 2*XXOX2 + 2*XOX2),$
 $XXOXX2 - x*(1 + 2*XOOOO + 2*OXOOO + 2*XOXOO + 2*OXXOO + 4*XOOO$
 $+ 2*OXOO + 2*XXOO + 2*XOXO + 2*OXXO + 4*XOO + 2*OXO + 4*XXO$
 $+ 2*XOX + 6*XO + 2*XX + 4*X + 2*XOOXO2 + XOOOX2 + OXOXO2 +$
 $2*XOXXO2 + 2*XOXOX12 + 2*XOXO2 + 2*XOOX2 + 2*XXOX2 + XOX2),$
 $XOXOX3 - x*(1 + 2*XOOOO + OOXOO + 2*XXOOO + 2*XOOXO + 2*OXXOO$
 $+ 2*XXOXO + OXXXO + 2*XOOO + 2*OXOO + 4*XXOO + 2*XOOX + 2*OXXO$
 $+ 2*XXXO + 2*XXOX + 4*XOO + OXO + 6*XXO + XXX + 4*XO + 4*XX + 3*X$
 $+ 2*XOXOO2 + XOOOX2 + 2*XXOOX2 + 2*XOXXO2 + XXOXX2 + 2*XOXO2$
 $+ 2*XXOX2 + 2*XOX2)/(1 - x),$
 $A5 - (2*(XOOOO + OXOOO + XXOOO + XOXOO + XOOXO + OXXOO +$
 $XXXOO + XXOXO + XXOOX + XOXXO + XXXXO + XXXOX) + OOXOO +$
 $XOOOX + OXOXO + XOXOX + OXXXO + XXOXX + XXXXX)], X, XO, XX,$
 $XOO, OXO, XXO, XOX, XXX, XOX2, XOOO, OXOO, XXOO, XOXO, XOOX,$
 $OXXO, XXXO, XXOX, XXXX, XOXO2, XOOX2, XXOX2, XOOOO, OXOOO,$
 $OOXOO, XXOOO, XOXOO, XOOXO, XOOOX, OXXOO, OXOXO, XXXOO,$
 $XXOXO, XXOOX, XOXXO, XOXOX, OXXXO, XXXXO, XXXOX, XXOXX,$
 $XXXXX, XOXOO2, XOOXO2, XOOOX2, OXOXO2, XXOXO2, XXOOX2, XOXXO2,$
 $XOXOX12, XOXOX13, XOXOX3, XXXOX2, XXOXX2, A2, A3, A4, A5)$

Évaluation des séries génératrices $A_b(x)$, $b \in [5]$. Pour :

$A_2(x)$: factor(f[0][121])

$A_3(x)$: factor(f[0][122])

$A_4(x)$: factor(f[0][123])

$A_5(x)$: factor(f[0][124])

Évaluation des termes séries génératrices $A_b(x)$, $b \in [5]$. Remplacer n par nombre de termes initiaux voulus. Pour :

$A_2(x)$: taylor(f[0][121].right(), (x,0), n)

$A_3(x)$: taylor(f[0][122].right(), (x,0), n)

$A_4(x)$: taylor(f[0][123].right(), (x,0), n)

$A_5(x)$: taylor(f[0][124].right(), (x,0), n)

A.2 Relations de récurrences $A_{b,h,n,c}^i$

A.2.1 b=1

$$a_{1,h,n,1} = a_{1,h-1,n-1,1}$$

$$A_{1,1}(x, y) = \frac{xy}{1 - xy}$$

A.2.2 b=2

$$a_{2,h,n,10} = a_{2,h-1,n-1,10} + a_{2,h-1,11}$$

$$A_{2,10}(x, y) = \frac{xy}{1 - xy} A_{2,11}(x, y)$$

$$\begin{aligned}
a_{2,h,n,11} &= a_{2,h-1,n-2,10} + a_{2,h-1,n-2,01} + 2a_{1,h-1,n-2,1} \\
&= 2a_{2,h-1,n-2,10} + 2a_{1,h-1,n-2,1} \\
A_{2,11}(x, y) &= 2xy^2(A_{2,10}(x, y) + A_{1,1}(x, y))
\end{aligned}$$

A.2.3 b=3

$$\begin{aligned}
a_{3,h,n,100} &= a_{3,h-1,n-1,100} + a_{3,h-1,n-1,110} + a_{3,h-1,n-1,101} + a_{3,h-1,n-1,111} \\
A_{3,100}(x, y) &= \frac{xy}{1-xy}(A_{3,110}(x, y) + A_{3,101}(x, y) + A_{3,111}(x, y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{3,h,n,010} &= a_{3,h-1,n-1,010} + a_{3,h-1,n-1,110} + a_{3,h-1,n-1,011} + a_{3,h-1,n-1,111} \\
&= a_{3,h-1,n-1,010} + 2a_{3,h-1,n-1,110} + a_{3,h-1,n-1,111} \\
A_{3,010}(x, y) &= \frac{xy}{1-xy}(2A_{3,110}(x, y) + A_{3,111}(x, y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{3,h,n,110} &= a_{3,h-1,n-2,100} + a_{3,h-1,n-2,010} + a_{3,h-1,n-2,101} + a_{3,h-1,n-2,011} + a_{2,h-1,n-2,10} + a_{2,h-1,n-2,11} \\
&= a_{3,h-1,n-2,100} + a_{3,h-1,n-2,010} + a_{3,h-1,n-2,101} + a_{3,h-1,n-2,110} + a_{2,h-1,n-2,10} + a_{2,h-1,n-2,11} \\
A_{3,110}(x, y) &= \frac{xy^2}{1-xy^2}(A_{3,100}(x, y) + A_{3,010}(x, y) + A_{3,101}(x, y) + A_{2,10}(x, y) + A_{2,11}(x, y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{3,h,n,101} &= a_{3,h-1,n-2,101} + a_{3,h-1,n-2,111} \\
A_{3,101}(x, y) &= \frac{xy^2}{1-xy^2}A_{3,111}(x, y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{3,h,n,111} &= a_{3,h-1,n-3,100} + a_{3,h-1,n-3,010} + a_{3,h-1,n-3,001} + 2a_{2,h-1,n-3,10} + 2a_{2,h-1,n-3,01} + \\
&3a_{1,h-1,n-3,1} + a_{3,h-1,n-3,101}^2 \\
&= 2a_{3,h-1,n-3,100} + a_{3,h-1,n-3,010} + 4a_{2,h-1,n-3,10} + 3a_{1,h-1,n-3,1} + a_{3,h-1,n-3,101}^2 \\
A_{3,111}(x, y) &= xy^3(2A_{3,100}(x, y) + A_{3,010}(x, y) + 4A_{2,10}(x, y) + 3A_{1,1}(x, y) + A_{3,101}^2(x, y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{3,h,n,101}^2 &= a_{3,h-1,n-2,100} + a_{3,h-1,n-2,001} + a_{3,h-1,n-2,110} + a_{3,h-1,n-2,011} + a_{2,h-1,n-2,10} + \\
&a_{2,h-1,n-2,01} + 2a_{2,h-1,n-2,11} + 2a_{1,h-1,n-2,1} + a_{3,h-1,n-2,101}^2 \\
&= 2a_{3,h-1,n-2,100} + 2a_{3,h-1,n-2,110} + 2a_{2,h-1,n-2,10} + 2a_{2,h-1,n-2,11} + 2a_{1,h-1,n-2,1} + a_{3,h-1,n-2,101}^2 \\
A_{3,101}^2(x, y) &= \frac{xy^2}{1-xy^2}(2A_{3,100}(x, y) + 2A_{3,110}(x, y) + 2A_{2,10}(x, y) + 2A_{2,11}(x, y) + 2A_{1,1}(x, y))
\end{aligned}$$

A.2.4 b=4

$$\begin{aligned}
a_{4,h,n,1000} &= a_{4,h-1,n-1,1000} + a_{4,h-1,n-1,1100} + a_{4,h-1,n-1,1010} + a_{4,h-1,n-1,1001} + a_{4,h-1,n-1,1110} + \\
& a_{4,h-1,n-1,1101} + a_{4,h-1,n-1,1011} + a_{4,h-1,n-1,1111} \\
&= a_{4,h-1,n-1,1000} + a_{4,h-1,n-1,1100} + a_{4,h-1,n-1,1010} + a_{4,h-1,n-1,1001} + a_{4,h-1,n-1,1110} + 2a_{4,h-1,n-1,1101} + \\
& a_{4,h-1,n-1,1111} \\
A_{4,1000}(x, y) &= \frac{xy}{1-xy} (A_{4,1100}(x, y) + A_{4,1010}(x, y) + A_{4,1001}(x, y) + A_{4,1110}(x, y) + \\
& 2A_{4,1101}(x, y) + A_{4,1111}(x, y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,h,n,0100} &= a_{4,h-1,n-1,0100} + a_{4,h-1,n-1,1100} + a_{4,h-1,n-1,0110} + a_{4,h-1,n-1,0101} + a_{4,h-1,n-1,1110} + \\
& a_{4,h-1,n-1,1101} + a_{4,h-1,n-1,0111} + a_{4,h-1,n-1,1111} \\
&= a_{4,h-1,n-1,0100} + a_{4,h-1,n-1,1100} + a_{4,h-1,n-1,0110} + a_{4,h-1,n-1,1010} + 2a_{4,h-1,n-1,1110} + a_{4,h-1,n-1,1101} + \\
& a_{4,h-1,n-1,1111} \\
A_{4,0100}(x, y) &= \frac{xy}{1-xy} (A_{4,1100}(x, y) + A_{4,0110}(x, y) + A_{4,1010}(x, y) + 2A_{4,1110}(x, y) + \\
& A_{4,1101}(x, y) + A_{4,1111}(x, y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,h,n,1100} &= a_{4,h-1,n-2,1000} + a_{4,h-1,n-2,0100} + a_{4,h-1,n-2,1010} + a_{4,h-1,n-2,1001} + a_{4,h-1,n-2,0110} + \\
& a_{4,h-1,n-2,0101} + a_{4,h-1,n-2,1011} + a_{4,h-1,n-2,0111} + a_{3,h-1,n-2,100} + a_{3,h-1,n-2,110} + a_{3,h-1,n-2,101} + \\
& a_{3,h-1,n-2,111} \\
&= a_{4,h-1,n-2,1000} + a_{4,h-1,n-2,0100} + 2a_{4,h-1,n-2,1010} + a_{4,h-1,n-2,1001} + a_{4,h-1,n-2,0110} + a_{4,h-1,n-2,1110} + \\
& a_{4,h-1,n-2,1101} + a_{3,h-1,n-2,100} + a_{3,h-1,n-2,110} + a_{3,h-1,n-2,101} + a_{3,h-1,n-2,111} \\
A_{4,1100}(x, y) &= xy^2 (A_{4,1000}(x, y) + A_{4,0100}(x, y) + 2A_{4,1010}(x, y) + A_{4,1001}(x, y) + \\
& A_{4,0110}(x, y) + A_{4,1110}(x, y) + A_{4,1101}(x, y) + A_{3,100}(x, y) + A_{3,110}(x, y) + A_{3,101}(x, y) + \\
& A_{3,111}(x, y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,h,n,1010} &= a_{4,h-1,n-2,1010} + a_{4,h-1,n-2,1110} + a_{4,h-1,n-2,1011} + a_{4,h-1,n-2,1111} \\
&= a_{4,h-1,n-2,1010} + a_{4,h-1,n-2,1110} + a_{4,h-1,n-2,1101} + a_{4,h-1,n-2,1111} \\
A_{4,1010}(x, y) &= \frac{xy^2}{1-xy^2} (A_{4,1110}(x, y) + A_{4,1101}(x, y) + A_{4,1111}(x, y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,h,n,1001} &= a_{4,h-1,n-2,1001} + a_{4,h-1,n-2,1101} + a_{4,h-1,n-2,1011} + a_{4,h-1,n-2,1111} \\
&= a_{4,h-1,n-2,1001} + 2a_{4,h-1,n-2,1101} + a_{4,h-1,n-2,1111} \\
A_{4,1001}(x, y) &= \frac{xy^2}{1-xy^2} (2A_{4,1101}(x, y) + A_{4,1111}(x, y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,h,n,0110} &= a_{4,h-1,n-2,0100} + a_{4,h-1,n-2,0010} + a_{4,h-1,n-2,1100} + a_{4,h-1,n-2,1010} + a_{4,h-1,n-2,0101} + \\
& a_{4,h-1,n-2,0011} + a_{4,h-1,n-2,1101} + a_{4,h-1,n-2,1011} \\
&= 2a_{4,h-1,n-2,0100} + 2a_{4,h-1,n-2,1100} + 2a_{4,h-1,n-2,1010} + 2a_{4,h-1,n-2,1101} \\
A_{4,0110}(x, y) &= xy^2(2A_{4,0100}(x, y) + 2A_{4,1100}(x, y) + 2A_{4,1010}(x, y) + 2A_{4,1101}(x, y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,h,n,1110} &= a_{4,h-1,n-3,1000} + a_{4,h-1,n-3,0100} + a_{4,h-1,n-3,0010} + a_{4,h-1,n-3,1001} + a_{4,h-1,n-3,0101} + \\
& a_{4,h-1,n-3,0011} + a_{3,h-1,n-3,100} + a_{3,h-1,n-3,010} + a_{3,h-1,n-3,101} + a_{3,h-1,n-3,011} + a_{2,h-1,n-3,10} + \\
& a_{2,h-1,n-3,11} + a_{4,h-1,n-3,1010}^2 + a_{4,h-1,n-3,1011}^2 \\
&= a_{4,h-1,n-3,1000} + 2a_{4,h-1,n-3,0100} + a_{4,h-1,n-3,1001} + a_{4,h-1,n-3,1100} + a_{4,h-1,n-3,1010} + a_{3,h-1,n-3,100} + \\
& a_{3,h-1,n-3,010} + a_{3,h-1,n-3,110} + a_{3,h-1,n-3,101} + a_{2,h-1,n-3,10} + a_{2,h-1,n-3,11} + a_{4,h-1,n-3,1010}^2 + \\
& a_{4,h-1,n-3,1101}^2 \\
A_{4,1110}(x, y) &= xy^3(A_{4,1000}(x, y) + 2A_{4,0100}(x, y) + A_{4,1001}(x, y) + A_{4,1100}(x, y) + \\
& A_{4,1010}(x, y) + A_{3,100}(x, y) + A_{3,010}(x, y) + A_{3,110}(x, y) + A_{3,101}(x, y) + A_{2,10}(x, y) + \\
& A_{2,11}(x, y) + A_{4,1010}^2(x, y) + A_{4,1101}^2(x, y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,h,n,1101} &= a_{4,h-1,n-3,1001} + a_{4,h-1,n-3,0101} + a_{4,h-1,n-3,1011} + a_{4,h-1,n-3,0111} + a_{3,h-1,n-3,101} + \\
& a_{3,h-1,n-3,111} \\
&= a_{4,h-1,n-3,1010} + a_{4,h-1,n-3,1001} + a_{4,h-1,n-3,1110} + a_{4,h-1,n-3,1101} + a_{3,h-1,n-3,101} + a_{3,h-1,n-3,111} \\
A_{4,1101}(x, y) &= \frac{xy^3}{1-xy^3}(A_{4,1010}(x, y) + A_{4,1001}(x, y) + A_{4,1110}(x, y) + A_{3,101}(x, y) + A_{3,111}(x, y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,h,n,1111} &= a_{4,h-1,n-4,1000} + a_{4,h-1,n-4,0100} + a_{4,h-1,n-4,0010} + a_{4,h-1,n-4,0001} + 2a_{3,h-1,n-4,100} + \\
& 2a_{3,h-1,n-4,010} + 2a_{3,h-1,n-4,001} + 3a_{2,h-1,n-4,10} + 3a_{2,h-1,n-4,01} + 4a_{1,h-1,n-4,1} + a_{4,h-1,n-4,1010}^2 + \\
& a_{4,h-1,n-4,1001}^2 + a_{4,h-1,n-4,0101}^2 + 2a_{3,h-1,n-4,101}^2 \\
&= 2a_{4,h-1,n-4,1000} + 2a_{4,h-1,n-4,0100} + 4a_{3,h-1,n-4,100} + 2a_{3,h-1,n-4,010} + 6a_{2,h-1,n-4,10} + 4a_{1,h-1,n-4,1} + \\
& 2a_{4,h-1,n-4,1010}^2 + a_{4,h-1,n-4,1001}^2 + 2a_{3,h-1,n-4,101}^2 \\
A_{4,1111}(x, y) &= xy^4(2A_{4,1000}(x, y) + 2A_{4,0100}(x, y) + 4A_{3,100}(x, y) + 2A_{3,010}(x, y) + \\
& 6A_{2,10}(x, y) + 4A_{1,1}(x, y) + 2A_{4,1010}^2(x, y) + A_{4,1001}^2(x, y) + 2A_{3,101}^2(x, y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,h,n,1010}^2 &= a_{4,h-1,n-2,1000} + a_{4,h-1,n-2,0010} + a_{4,h-1,n-2,1100} + a_{4,h-1,n-2,1001} + a_{4,h-1,n-2,0110} + \\
& a_{4,h-1,n-2,0011} + a_{4,h-1,n-2,1101} + a_{4,h-1,n-2,0111} + a_{3,h-1,n-2,010} + a_{3,h-1,n-2,110} + a_{3,h-1,n-2,011} + \\
& a_{3,h-1,n-2,111} + a_{2,h-1,n-2,10} + a_{2,h-1,n-2,11} + a_{4,h-1,n-2,1010}^2 + a_{4,h-1,n-2,1011}^2 \\
&= a_{4,h-1,n-2,1000} + a_{4,h-1,n-2,0100} + 2a_{4,h-1,n-2,1100} + a_{4,h-1,n-2,1001} + a_{4,h-1,n-2,0110} + a_{4,h-1,n-2,1110} + \\
& a_{4,h-1,n-2,1101} + a_{3,h-1,n-2,010} + 2a_{3,h-1,n-2,110} + a_{3,h-1,n-2,111} + a_{2,h-1,n-2,10} + a_{2,h-1,n-2,11} + \\
& a_{4,h-1,n-2,1010}^2 + a_{4,h-1,n-2,1101}^2 \\
A_{4,1010}^2(x,y) &= \frac{xy^2}{1-xy^2} (A_{4,1000}(x,y) + A_{4,0100}(x,y) + 2A_{4,1100}(x,y) + A_{4,1001}(x,y) + \\
& A_{4,0110}(x,y) + A_{4,1110}(x,y) + A_{4,1101}(x,y) + A_{3,010}(x,y) + 2A_{3,110}(x,y) + A_{3,111}(x,y) + \\
& A_{2,10}(x,y) + A_{2,11}(x,y) + A_{4,1101}^2(x,y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,h,n,1001}^2 &= a_{4,h-1,n-2,1000} + a_{4,h-1,n-2,0001} + a_{4,h-1,n-2,1100} + a_{4,h-1,n-2,1010} + a_{4,h-1,n-2,0101} + \\
& a_{4,h-1,n-2,0011} + a_{4,h-1,n-2,1110} + a_{4,h-1,n-2,0111} + a_{3,h-1,n-2,100} + a_{3,h-1,n-2,001} + a_{3,h-1,n-2,110} + \\
& 2a_{3,h-1,n-2,101} + a_{3,h-1,n-2,011} + 2a_{3,h-1,n-2,111} + a_{2,h-1,n-2,10} + a_{2,h-1,n-2,01} + 2a_{2,h-1,n-2,11} + \\
& 2a_{1,h-1,n-2,1} + a_{4,h-1,n-2,1001}^2 + a_{4,h-1,n-2,1101}^2 + a_{4,h-1,n-2,1011}^2 \\
&= 2a_{4,h-1,n-2,1000} + 2a_{4,h-1,n-2,1100} + 2a_{4,h-1,n-2,1010} + 2a_{4,h-1,n-2,1110} + 2a_{3,h-1,n-2,100} + \\
& 2a_{3,h-1,n-2,110} + 2a_{3,h-1,n-2,101} + 2a_{3,h-1,n-2,111} + 2a_{2,h-1,n-2,10} + 2a_{2,h-1,n-2,11} + 2a_{1,h-1,n-2,1} + \\
& a_{4,h-1,n-2,1001}^2 + 2a_{4,h-1,n-2,1101}^2 \\
A_{4,1001}^2(x,y) &= \frac{xy^2}{1-xy^2} (2A_{4,1000}(x,y) + 2A_{4,1100}(x,y) + 2A_{4,1010}(x,y) + 2A_{4,1110}(x,y) + \\
& 2A_{3,100}(x,y) + 2A_{3,110}(x,y) + 2A_{3,101}(x,y) + 2A_{3,111}(x,y) + 2A_{2,10}(x,y) + 2A_{2,11}(x,y) + \\
& 2A_{1,1}(x,y) + 2A_{4,1101}^2(x,y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,h,n,1101}^2 &= a_{4,h-1,n-3,1000} + a_{4,h-1,n-3,0100} + a_{4,h-1,n-3,0001} + a_{4,h-1,n-3,1010} + a_{4,h-1,n-3,0110} + \\
& a_{4,h-1,n-3,0011} + 2a_{3,h-1,n-3,100} + a_{3,h-1,n-3,010} + a_{3,h-1,n-3,001} + a_{3,h-1,n-3,110} + a_{3,h-1,n-3,101} + \\
& 2a_{3,h-1,n-3,011} + 2a_{2,h-1,n-3,10} + 2a_{2,h-1,n-3,01} + 2a_{2,h-1,n-3,11} + 3a_{1,h-1,n-3,1} + a_{4,h-1,n-3,1001}^2 + \\
& a_{4,h-1,n-3,0101}^2 + a_{4,h-1,n-3,1011}^2 + a_{3,h-1,n-3,101}^2 \\
&= 2a_{4,h-1,n-3,1000} + a_{4,h-1,n-3,0100} + a_{4,h-1,n-3,1100} + a_{4,h-1,n-3,1010} + a_{4,h-1,n-3,0110} + \\
& 3a_{3,h-1,n-3,100} + a_{3,h-1,n-3,010} + 3a_{3,h-1,n-3,110} + a_{3,h-1,n-3,101} + 4a_{2,h-1,n-3,10} + 2a_{2,h-1,n-3,11} + \\
& 3a_{1,h-1,n-3,1} + a_{4,h-1,n-3,1010}^2 + a_{4,h-1,n-3,1001}^2 + a_{4,h-1,n-3,1101}^2 + a_{3,h-1,n-3,101}^2 \\
A_{4,1101}^2(x,y) &= \frac{xy^3}{1-xy^3} (2A_{4,1000}(x,y) + A_{4,0100}(x,y) + A_{4,1100}(x,y) + A_{4,1010}(x,y) + \\
& A_{4,0110}(x,y) + 3A_{3,100}(x,y) + A_{3,010}(x,y) + 3A_{3,110}(x,y) + A_{3,101}(x,y) + 4A_{2,10}(x,y) + \\
& 2A_{2,11}(x,y) + 3A_{1,1}(x,y) + A_{4,1010}^2(x,y) + A_{4,1001}^2(x,y) + A_{3,101}^2(x,y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,h,n,1101}^2 &= a_{4,h-1,n-3,1000} + a_{4,h-1,n-3,0100} + a_{4,h-1,n-3,0001} + a_{4,h-1,n-3,1010} + a_{4,h-1,n-3,0110} + \\
& a_{4,h-1,n-3,0011} + 2a_{3,h-1,n-3,100} + a_{3,h-1,n-3,010} + a_{3,h-1,n-3,001} + a_{3,h-1,n-3,110} + a_{3,h-1,n-3,101} + \\
& 2a_{3,h-1,n-3,011} + 2a_{2,h-1,n-3,10} + 2a_{2,h-1,n-3,01} + 2a_{2,h-1,n-3,11} + 3a_{1,h-1,n-3,1} + a_{4,h-1,n-3,1001}^2 + \\
& a_{4,h-1,n-3,0101}^2 + a_{4,h-1,n-3,1011}^2 + a_{3,h-1,n-3,101}^2 \\
&= 2a_{4,h-1,n-3,1000} + a_{4,h-1,n-3,0100} + a_{4,h-1,n-3,1100} + a_{4,h-1,n-3,1010} + a_{4,h-1,n-3,0110} + \\
& 3a_{3,h-1,n-3,100} + a_{3,h-1,n-3,010} + 3a_{3,h-1,n-3,110} + a_{3,h-1,n-3,101} + 4a_{2,h-1,n-3,10} + 2a_{2,h-1,n-3,11} + \\
& 3a_{1,h-1,n-3,1} + a_{4,h-1,n-3,1010}^2 + a_{4,h-1,n-3,1001}^2 + a_{4,h-1,n-3,1101}^2 + a_{3,h-1,n-3,101}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{4,1101}^2(x, y) &= \frac{xy^3}{1-xy^3} (2A_{4,1000}(x, y) + A_{4,0100}(x, y) + A_{4,1100}(x, y) + A_{4,1010}(x, y) + \\
& A_{4,0110}(x, y) + 3A_{3,100}(x, y) + A_{3,010}(x, y) + 3A_{3,110}(x, y) + A_{3,101}(x, y) + 4A_{2,10}(x, y) + \\
& 2A_{2,11}(x, y) + 3A_{1,1}(x, y) + A_{4,1010}^2(x, y) + A_{4,1001}^2(x, y) + A_{3,101}^2(x, y))
\end{aligned}$$

A.2.5 Programme de calcul de relations de récurrence

Calculé avec Sagemath :

$$\begin{aligned}
g &= \text{solve}([X - x*y/(1 - x*y), XO - x*y*XX/(1 - x*y), XX - x*y^2 - 2*x*y^2*(XO + X), \\
& A2 - 2*XO - XX, XOO - x*y*(XXO + XOX + XXX)/(1 - x*y), OXO - x*y*(2*XXO \\
& + XXX)/(1 - x*y), XXO - x*y^2*(XOO + OXO + XOX + XO + XX)/(1 - x*y^2), \\
& XOX - x*y^2*XXX/(1 - x*y^2), XXX - x*y^3*(1 + 2*XOO + OXO + 4*XO + 3*X \\
& + XOX2), XOX2 - x*y^2*(1 + 2*(XOO + XXO + XO + XX + X))/(1 - x*y^2), \\
& A3 - 2*(XOO + XXO) - (OXO + XOX + XXX), XOOO - x*y*(XXOO + XOXO + \\
& XOOX + XXXO + 2*XXOX + XXXX)/(1 - x*y), OXOO - x*y*(XXOO + XOXO + \\
& OXXO + 2*XXXO + XXOX + XXXX)/(1 - x*y), XXOO - x*y^2*(XOOO + OXOO \\
& + 2*XOXO + XOOX + OXXO + XXXO + XXOX + XOO + XXO + XOX + XXX), \\
& XOXO - x*y^2*(XXXO + XXOX + XXXX)/(1 - x*y^2), XOOX - x*y^2*(2*XXOX + \\
& XXXX)/(1 - x*y^2), OXXO - 2*x*y^2*(OXOO + XXOO + XOXO + XXOX), XXXO \\
& - x*y^3*(XOOO + 2*OXOO + XXOO + XOXO + XOOX + XOO + OXO + XXO \\
& + XOX + XO + XX + XOXO2 + XXOX2),
\end{aligned}$$

$XXOX - x^*y^3*(XOXO + XOOX + XXXO + XOX + XXX)/(1 - x^*y^3)$, $XXXX - x^*y^4*(1 + 2*(XOOO + OXOO + 2*XOO + OXO + 3*XO + 2*X + XOXO2 + XOX2) + XOOX2)$, $XOXO2 - x^*y^2*(XOOO + OXOO + 2*XXOO + XOOX + OXXO + XXXO + XXOX + OXO + 2*XXO + XXX + XO + XX + XXOX2)/(1 - x^*y^2)$, $XOOX2 - x^*y^2*(1 + 2*(XOOO + XXOO + XOXO + XXXO + XOO + XXO + XOX + XXX + XO + XX + X + XXOX2))/(1 - x^*y^2)$, $XXOX2 - x^*y^3*(1 + 2*XOOO + OXOO + XXOO + XOXO + OXXO + 3*XOO + OXO + 3*XXO + XOX + 4*XO + 2*XX + 3*X + XOXO2 + XOOX2 + XOX2)/(1 - x^*y^3)$, $A4 - 2*(XOOO + OXOO + XXOO + XOXO + XXXO + XXOX) - (XOOX + OXXO + XXXX)]$, X, XO, XX, A2, XOO, OXO, XXO, XOX, XXX, XOX2, A3, XOOO, OXOO, XXOO, XOXO, XOOX, OXXO, XXXO, XXOX, XXXX, XOXO2, XOOX2, XXOX2, A4)

Évaluation des séries génératrices $A_b(x, y)$, $b \in [4]$. Pour :

$A_2(x, y) : \text{factor}(f[0][121])$

$A_3(x, y) : \text{factor}(f[0][122])$

$A_4(x, y) : \text{factor}(f[0][123])$

Évaluation des termes séries génératrices $A_b(x, y)$, $b \in [4]$. Remplacer n par nombre de termes initiaux voulus. Pour :

$A_2(x, y) : \text{taylor}(g[0][3].\text{right}(), (x,0), (y,0), n)$

$A_3(x, y) : \text{taylor}(g[0][10].\text{right}(), (x,0), (y,0), n)$

$A_4(x, y) : \text{taylor}(g[0][23].\text{right}(), (x,0), (y,0), n)$