

EVALUACIÓN DE UN PROGRAMA DE FORMACIÓN
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE
SECUNDARIA Y MEDIA: PRÁCTICAS DE
PLANIFICACIÓN E IMPLEMENTACIÓN

Andrés Pinzón

Director:

Pedro Gómez

Universidad de los Andes
Facultad de Educación
Doctorado en Educación
Bogotá D. C.
2020

La necesidad de evaluar programas de formación de profesores surge de la responsabilidad ética y profesional de los programas de formación para asegurar a la sociedad que se están preparando profesores eficaces y eficientes para las escuelas (Worrell, Brabeck, Dwyer, Geisinger, Marx, Noell *et al.*, 2014). Evaluar programas de formación de profesores es importante porque permite, entre otras cosas, apreciar la pertinencia del diseño y la implementación de los programas a las necesidades de formación y valorar si se han logrado los cambios previstos en las prácticas curriculares de los participantes (Ruiz Bueno y Tejada Fernández, 2001). El foco de esta tesis doctoral es la evaluación de un programa de formación de profesores de matemáticas de secundaria y media que participó en la política pública de formación de profesores “Excelencia docente” del Ministerio de Educación (MEN): la Maestría en Educación Matemática, de la Universidad de los Andes. Para este propósito, en este primer capítulo, presento la relevancia del estudio; en el segundo capítulo el marco conceptual y los objetivos de investigación. En los capítulos siguientes, incluyo cinco manuscritos y artículos en los que caracterizo los profesores participantes del programa de formación desde sus prácticas de planificación (capítulo 3) e implementación del currículo de matemáticas (capítulo 4), comparo sus prácticas curriculares de planificación, implementación y evaluación antes y después de participar en el programa (capítulo 5), formulo un modelo de toma de decisiones del profesor (capítulo 6) y presento evidencia del funcionamiento del modelo de toma de decisiones (capítulo 7). Finalmente, cierro con un capítulo de conclusiones (capítulo 8) en el que describo los objetivos logrados y las líneas de investigación futuras con motivo de este trabajo.

TABLA DE CONTENIDO

| | |
|---|------------|
| 1. Introducción | 4 |
| 2. Marco conceptual | 5 |
| 2.1. Evaluación de programas de formación de profesores | 5 |
| 2.2. Prácticas curriculares de planificación e implementación | 5 |
| 2.3. Modelo del análisis didáctico | 6 |
| 2.4. Toma de decisiones del profesor..... | 7 |
| 2.5. Objetivos | 7 |
| 3. Artículo 1: Characterising lesson planning: a case study with mathematics teachers..... | 9 |
| 4. Artículo 2: Reactions of mathematics teachers to students' errors and unexpected strategies | 30 |
| 5. Artículo 3: Effects of a Professional Development Program on Teachers' Curricular Practices | 59 |
| 6. Artículo 4: Un modelo de toma de decisiones del profesor | 79 |
| 7. Artículo 5: Toma de decisiones en el aula: Estudios de caso de profesores de matemáticas | 97 |
| 8. Conclusiones | 118 |
| 9. Referencias..... | 121 |

1. INTRODUCCIÓN

Los países y regiones invierten millones de dólares en el desarrollo profesional de sus profesores para mejorar la calidad de la educación que ofrecen (Bautista y Ortega-Ruíz, 2015; Bayar, 2014). Sin embargo, existen pocos sistemas de seguimiento de los programas de desarrollo profesional de los profesores y, menos aún, sistemas para analizar la calidad y el impacto de estos programas. Sin una idea de lo que está funcionando y por qué, es difícil implementar y mejorar un desarrollo profesional basado en evidencia (Darling-Hammond, Hylar y Gardner, 2017).

En los últimos años, en Colombia, el MEN desarrolló una política de formación para sus profesores llamada “Excelencia docente”. Esta es una iniciativa que busca mejorar la calidad de las prácticas curriculares de sus profesores, para contribuir al desarrollo de las competencias básicas de los estudiantes en las asignaturas de matemáticas, lenguaje, ciencias naturales y ciencias sociales (MEN, 2015). Para este propósito, el MEN financió en su totalidad programas de maestría a profesores de estas asignaturas. El programa ha beneficiado a 7193 profesores con becas para estudios en 22 universidades y se han publicado 53 artículos procedentes de proyectos de grado destacados de estos profesores (MEN, 2018). No obstante, no se cuenta con una evaluación de esta iniciativa o de los programas de maestría que participan, en términos de la mejora en las prácticas curriculares de los profesores o del rendimiento escolar de sus estudiantes.

En consecuencia, surge la pregunta ¿qué efectos tiene un programa de formación de profesores, en el marco de la política de “Excelencia docente”, en las prácticas curriculares de planificación e implementación? Para responder esta pregunta, he tomado como un caso, un programa de formación de profesores de matemáticas: la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes.

Dentro de las posibles formas de evaluar un programa de formación (Guskey, 2000), estudio el cambio en las prácticas curriculares de los egresados en los procesos de planificación e implementación del currículo. Además, dentro del proceso de implementación, abordo un elemento específico: la toma de decisiones del profesor. Por tanto, esta tesis doctoral es la articulación de dos estudios: el primero se centra en las prácticas curriculares de planificación e implementación y el segundo profundiza en la toma de decisiones del profesor en el aula, como un elemento de las prácticas de implementación.

Con este trabajo, abordo problemas presentes en la literatura en Educación Matemática (Courey, Tappe, Siker y LePage, 2013; Zazkis, Liljedahl y Sinclair, 2009, p. 400). En particular, abordo la pregunta: ¿cómo la participación de un profesor en un programa de formación influye en las prácticas de planificación e implementación del currículo?

2. MARCO CONCEPTUAL

A continuación, describo brevemente el marco conceptual de esta tesis en cuatro apartados: la evaluación de programas de formación de profesores, las prácticas curriculares de planificación e implementación, el análisis didáctico y la toma de decisiones del profesor. En un apartado final, presento los objetivos de investigación.

2.1. Evaluación de programas de formación de profesores

La evaluación de programas de formación de profesores se puede realizar en al menos cinco niveles (Guskey, 2000). El primer nivel es la percepción que tienen los participantes de su experiencia en el programa. Es una medida de la satisfacción de los participantes con el programa. Esta información puede ser recolectada con cuestionarios o entrevistas a los participantes.

El segundo nivel es el aprendizaje de los participantes. Su foco es medir el conocimiento y las habilidades que los participantes desarrollan en el programa de formación. La información puede ser recolectada por una prueba estandarizada o portafolios que puedan documentar el aprendizaje de los participantes. La mayoría de las evaluaciones de programas de formación se ubican en estos dos primeros niveles.

El tercer nivel es el efecto del programa a nivel institucional. Es la percepción que tienen terceros (colegas, estudiantes, directivas, padres de familia) del efecto del programa con motivo de las actuaciones de los participantes en sus instituciones. Esta información puede ser recolectada con cuestionarios o entrevistas a terceros.

El cuarto nivel son los cambios en las prácticas de los participantes. Estos cambios son consecuencia de los conocimientos y habilidades desarrollados en el programa de formación. Es precisamente, en este cuarto nivel, que desarrollo la evaluación del programa de formación y abordó, en particular, las prácticas curriculares de planificación e implementación del profesor de matemáticas.

El quinto, y último nivel, es el aprendizaje de los estudiantes, como efecto del programa en el rendimiento de los estudiantes de los profesores participantes. Aunque en este nivel se han elaborado cientos de estudios, muy pocos cuentan con estándares de evidencia (Yoon, Duncan, Lee, Scarloss y Shapley, 2007).

2.2. Prácticas curriculares de planificación e implementación

La planificación del profesor se describe de diferentes maneras, pero gira alrededor de un tema común. Se trata de “la interacción del profesor con el contenido para llegar a decisiones sobre qué y cómo un contenido particular se debe abordar para satisfacer las condiciones únicas de una situación de enseñanza” (Lai y Lam, 2011, p. 221). Se refiere, por tanto, a las decisiones de enseñanza y aprendizaje que el profesor toma con anterioridad a la ejecución de sus planes en el aula (Sardo-Brown, 1996, p. 519). La importancia de la planificación del profesor en su actuación en el aula y, como consecuencia, en el aprendizaje de los estudiantes, ha generado diversos trabajos en la literatura de investigación.

De otra parte, dado que el propósito de un plan consiste en ser llevado a la práctica, es posible considerar diferentes momentos para la noción de currículo: desde su diseño o planificación, pasando por su implementación y terminando en su evaluación. Diversos estudios muestran que el

currículo se transforma en ese tránsito entre su planificación, su implementación y la constatación de lo que se logró con dicha implementación (p. ej., Cho, 1998; Fullan y Pomfret, 1977; Mowbray, Holter, Teague y Bybee, 2003; Remillard y Heck, 2014).

Aunque la noción de implementación tiene muchos significados, tomo de referencia la definición propuesta por Remillard y Heck (2014) como “las interacciones entre profesores y estudiantes alrededor de las tareas de cada sesión de clase y de las sesiones de clase que configuran una unidad de enseñanza” (p. 711). La implementación del currículo implica una transformación de aquello planificado puesto que la actuación del profesor debe adaptarse a la complejidad de los eventos que suceden en clase a lo largo de una sesión (Cho, 1998, p. 21). El profesor debe adaptar su actuación a las variaciones del contexto, a la actuación de los estudiantes, a la forma como ellos interactúan con el contenido matemático a través de materiales y recursos, y a la complejidad del mismo contenido matemático (Remillard y Heck, 2014, p. 714). Algunos autores (p. ej., Cohen y Ball, 1999; Rezat, 2012) representan algunas de estas interacciones mediante un triángulo cuyos vértices son los profesores, los estudiantes y el material educativo.

2.3. Modelo del análisis didáctico

El modelo del análisis didáctico permite establecer los conocimientos teóricos, técnicos y prácticos que un profesor debería tener idealmente a la hora de planificar e implementar una clase o una unidad didáctica sobre un tema concreto de las matemáticas escolares (Gómez, 2018). Para ello, el modelo utiliza, para cada dimensión del currículo, un conjunto de conceptos pedagógicos que permiten al profesor analizar y producir información sobre el tema, de cara a utilizar esa información para producir y fundamentar su propuesta curricular. El modelo se estructura con base en las cuatro dimensiones del currículo: conceptual, cognitiva, formativa y social (Rico, 1997). A continuación, presento una descripción general del modelo. Sus especificidades y funcionalidad se describen en detalle en cada uno de los artículos que configuran esta tesis.

El análisis de contenido (dimensión conceptual) implica la capacidad del profesor para identificar los conceptos y procedimientos que caracterizan un tema (y sus relaciones), las diversas formas de representarlo, y los fenómenos que le dan sentido. El resultado de analizar el tema desde esta dimensión es una descripción estructurada de los diferentes significados que lo caracterizan en el contexto de las matemáticas escolares.

La información que surge del análisis de contenido sirve de fundamento para el análisis cognitivo (dimensión cognitiva). Con este análisis, el profesor establece y caracteriza sus expectativas de aprendizaje con respecto al tema (en términos de competencias, objetivos de aprendizaje y capacidades), identifica los errores en los que los estudiantes pueden incurrir cuando aborden las tareas que les propone y describe sus previsiones acerca de cómo se desarrollará el aprendizaje de los estudiantes.

Con el análisis de instrucción (dimensión formativa) y con la caracterización de los objetivos de aprendizaje como referencia, el profesor selecciona y describe las tareas que configuran su planificación (en términos de sus requisitos, metas, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad), prevé las posibles actuaciones de sus estudiantes y la suya propia, analiza esas tareas y las modifica de tal forma que contribuyan eficientemente al logro de los objetivos de aprendizaje y a la superación de los errores y dificultades de los estudiantes. El profesor también describe, analiza y mejora la secuencia de tareas que configura su planificación.

Con el análisis de actuación (dimensión social), el profesor complementa su planificación, al incluir instrumentos y procedimientos de recolección y análisis de información que le permitan, en la práctica, constatar el avance de sus estudiantes en el logro de los objetivos de aprendizaje y la superación de sus errores y dificultades, evaluar a los estudiantes de acuerdo con los requisitos institucionales y verificar en qué medida su propuesta ha satisfecho esos propósitos (evaluar la enseñanza). Por tanto, este análisis atiende tanto a la evaluación de la actuación de los estudiantes para su aprendizaje, como a la evaluación de la actuación del profesor con el propósito de mejorar la enseñanza.

2.4. Toma de decisiones del profesor

Finalmente, y como indiqué en el análisis de instrucción, el profesor prevé las posibles actuaciones de sus estudiantes y la suya propia. Sin embargo, existen diversas circunstancias en el aula que le exigen tomar decisiones de forma espontánea. Por tanto, las decisiones que toma el profesor afectan las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes (Herbst, Chazan, Kosko, Dimmel y Erickson, 2016) y comprender la toma de decisiones del profesor nos puede ayudar a mejorar la calidad de la enseñanza (Bishop, 2008).

La toma de decisiones ha sido de interés para diversos autores y ha tenido diferentes aproximaciones. Autores como Bishop (2008), Shavelson y Stern (1981), y Schoenfeld (2000, 2015a) han propuesto modelos en los que destacan el papel de las creencias, los valores, los conocimientos y los propósitos en la toma de decisiones del profesor.

Por ejemplo, para Schoenfeld (2015a), la toma de decisiones va un poco más allá de la integración del conocimiento, las creencias y los objetivos de los profesores: la toma de decisiones involucra un monitoreo de las implicaciones de la decisión que entraña un proceso iterativo. Este proceso incluye, además, tres nociones que son relevantes en la toma de decisiones: la imagen de la sesión de clase, el plan de acción y la secuencia de acciones.

De manera complementaria, la aproximación desde la psicología al proceso de toma de decisiones del profesor (Klein, 2008) nos ofrece elementos sobre cómo se lleva a cabo el proceso cognitivo en situaciones inesperadas: interpretación de las situaciones, generación de opciones y evaluación de las opciones.

Por lo anteriormente expuesto, y como parte de este estudio, formulo un modelo de toma de decisiones del profesor y presento evidencia de cómo el modelo permite describir este aspecto del proceso de implementación. El modelo implica cinco nociones: la situación (su percepción e interpretación), el propósito, las opciones, las implicaciones, la valoración y selección de una opción, y la secuencia de acciones. Los modelos existentes no abordan en conjunto estas nociones.

2.5. Objetivos

Como he señalado anteriormente, me propongo evaluar un programa de formación de profesores de matemáticas de secundaria y media que participa en la política pública de formación de profesores del MEN, la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes. Mi foco son las prácticas de planificación e implementación, y el proceso de toma de decisiones que desarrollan sus egresados. Para alcanzar este objetivo, propongo dos estudios y unos objetivos específicos para cada uno de ellos. Para el primer estudio, centrado en las prácticas curriculares, los objetivos específicos son los siguientes.

- ◆ Caracterizar la actuación de los profesores que han participado en el programa de formación, desde las perspectivas de la planificación y la implementación, antes y después de su participación.
- ◆ Comparar las caracterizaciones de la actuación de los profesores que han participado en el programa de formación, desde la perspectiva de la planificación y la implementación, antes y después de su participación.

Para el segundo estudio, centrado en la toma de decisiones, los objetivos específicos son los siguientes.

- ◆ Contribuir con un modelo de toma de decisiones del profesor.
- ◆ Comprobar que el modelo permite describir el proceso de toma de decisiones de los profesores.

Desarrollo esta tesis doctoral en dos artículos publicados y 3 manuscritos que han sido sometidos a revistas del campo de la Educación y la Educación Matemática. Por esta razón, el lector encontrará cada artículo o manuscrito en el formato de la revista respectiva. En la tabla 1, presento los artículos y manuscritos que desarrollan los objetivos de investigación.

Tabla 1

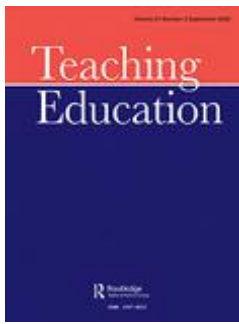
Desarrollo de los objetivos de investigación

| Ob. | Cap. | Propósito | Manuscrito o artículo |
|-----|------|---|---|
| 1 | 3 | Caracterización los profesores participantes del programa de formación desde sus prácticas de planificación | Characterising lesson planning: a case study with mathematics teachers (Artículo) |
| 1 | 4 | Caracterización los profesores participantes del programa de formación desde sus prácticas de implementación del currículo de matemáticas | Reactions of mathematics teachers to students' errors and unexpected strategies (Manuscrito sometido) |
| 1 | 5 | Comparación de las prácticas curriculares de planificación, implementación y evaluación antes y después de participar el programa | Effects of a professional development program on teachers' curricular practices (Manuscrito sometido) |
| 2 | 6 | Formulación de un modelo de toma de decisiones del profesor | Un modelo de toma de decisiones del profesor (Artículo) |
| 2 | 7 | Evidencia del funcionamiento del modelo | Toma de decisiones en el aula: estudios de caso de profesores de matemáticas (Manuscrito sometido) |

Nota. Ob.: objetivo; Cap.: capítulo.

En lo que sigue, presento los artículos y manuscritos en los capítulos indicados en la tabla 1. Finalmente, en el octavo capítulo, presento las conclusiones.

3. ARTÍCULO 1: CHARACTERISING LESSON PLANNING: A CASE
STUDY WITH MATHEMATICS TEACHERS



Characterising lesson planning: a case study with mathematics teachers

María José González , Pedro Gómez & Andrés Pinzón

To cite this article: María José González , Pedro Gómez & Andrés Pinzón (2020) Characterising lesson planning: a case study with mathematics teachers, Teaching Education, 31:3, 260-278, DOI: [10.1080/10476210.2018.1539071](https://doi.org/10.1080/10476210.2018.1539071)

To link to this article: <https://doi.org/10.1080/10476210.2018.1539071>



Published online: 03 Nov 2018.



Submit your article to this journal [↗](#)



Article views: 352



View related articles [↗](#)



View Crossmark data [↗](#)

ARTICLE



Characterising lesson planning: a case study with mathematics teachers

María José González^a, Pedro Gómez^b and Andrés Pinzón^b

^aDepartamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria, Santander, Spain;

^bFacultad de Educación, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia

ABSTRACT

The quality of students' learning experience depends on the learning activities that their teachers plan prior to classroom delivery. This article characterises the lesson planning practices of a group of 27 mathematics teachers. The questionnaire and the associated information coding and analysis procedures designed for that purpose may be applicable to lesson planning characterisation involving larger groups of teachers and of other disciplines. Some of the study group's needs and difficulties are established. One of the observations discussed is that planning procedures and criteria tend to be generic rather than specific to the lesson at issue. Another is that these teachers' vision of planning does not necessarily ensure a coordinated approach to all curricular dimensions.

ARTICLE HISTORY

Received 19 October 2017
Accepted 29 September 2018

KEYWORDS

Curriculum; lesson planning; teachers' practice

A considerable proportion of what students learn is the fruit of their classroom experience, which is, in turn, the result of the learning opportunities afforded by the teacher (e.g. Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001, p. 9; Little, 2003; Miller, Austin Windle, & Yazdanpanah, 2014).

The quality of teachers' classroom delivery and consequently the opportunities provided students to learn (through the activities they are to perform) depend on the quality of lesson planning (Li, Chen, & Kulm, 2009, p. 719). As teachers plan their classroom delivery in advance, they must be able to draw from lesson planning tools and to implement and review their plans (Akyuz, Dixon, & Stephan, 2013). Moreover, planning is regarded as an essential part of teacher training (Kang, 2017; Mutton, Hagger, & Burn, 2011, p. 400) and a number of experts have posed questions around what it should entail (Zazkis, Liljedahl, & Sinclair, 2009, p. 400).

In order to characterise the planning practices of a group of teachers, a conceptual framework for structuring teachers' lesson planning is necessary. We propose such a curriculum model for lesson planning practices in a section below. This model involves an integrated view of curriculum that takes into account its four dimensions – conceptual, cognitive, formative, and social –, the relationships among them, and the specific features of planning for concrete topics. As discussed in the following section, most researchers exploring this subject have used case study methodologies that involve, among others,

reviewing teachers' lesson scripts and conducting interviews and classroom observations. With that approach, lesson planning can be described and characterised in detail, but it is limited to a small number of teachers. Since the aim here is to characterise the lesson planning practices deployed by a group of 27 teachers, a questionnaire-based approach was adopted, grounded on the aforementioned conceptual framework. Ascertaining the planning practices deployed by a group (as opposed to an individual) furnishes information on the type of teaching conducted in an educational institution, in a given region or by a series of teachers engaging in an education programme.

The article is divided into three parts. The first consists of a brief review of the research on lesson planning and the introduction to a curriculum model (Gómez, 2007) for the conceptualisation of teachers' planning practices. Building on those conceptual foundations, the second part describes the questionnaire and the respective data gathering, coding and analysis procedures. Lastly, the results of applying the questionnaire and procedures are discussed to characterise the lesson planning performed by a group of 27 in-service secondary school mathematics teachers.

Lesson planning practices

Lesson planning is described in a number of ways, although such descriptions revolve around a common issue: 'the interaction of teachers and particular content in order to arrive at decisions regarding what and how particular content should be delivered to suit the unique circumstances of each teaching situation' (Lai & Lam, 2011, p. 221). It refers, then, to the teaching and learning decisions adopted by teachers prior to delivering a lesson (Sardo-Brown, 1996, p. 519).

Experts have proposed a number of schemes, models and conceptual frameworks for addressing lesson planning. This is the case, for instance, of the models proposed by Courey, Tappe, Siker, and LePage (2013), John (2006), and Simon (Simon, 1994, 1995, 2014; Tzur, Simon, Heinz, & Kinzel, 2001), among others.

From another perspective, research has been conducted on how teachers learn to plan lessons when participating in teacher education courses and programmes. This is the case, for instance, of subjects as the information acquisition when planning lessons (Tanni, 2012), how teacher trainees broach planning in terms either of the subject matter or students' cognition (Boudah, Deshler, Schumaker, Lenz, & Cook, 1997), the benefits of specific lesson planning tools in learning planning techniques (Rusznyak & Walton, 2011; Santagata, Zannoni, & Stigler, 2007; Theoharis & Causton-Theoharis, 2011), and rubrics for assessing planning competence, as in the PACT assessment used in California (Darling-Hammond, 2010; Raymond & Ruth, 2006).

These studies and others have used different information collection and analysis procedures. Most are based on case studies that explore the lesson planning performed by a small number of teachers in which interviewing is one of the primary sources of information. They also analyse any available teacher planning documents (lesson scripts). In some cases, classroom performance is observed and what are known as anecdotal records are taken into account.

The findings yielded by these studies cover a wide range, with reports to the effect that teachers plan more from intuition than from academic learning (Miller et al., 2014); experienced teachers' lesson planning focuses on preparation, reflection, anticipation,

evaluation and review (Akyuz et al., 2013), and they form a mental picture of how the lesson will unfold (Kyriacou, 1998); teachers are more concerned about the tasks to be assigned to students than what they aim to achieve (Akyuz et al., 2013; Strangis, Pringle, & Knopf, 2006); pre-service teachers seldom consider their students' learning needs and seldom anticipate how instructional activities facilitate students' thinking (Chizhik & Chizhik, 2018); and certain factors have a beneficial effect on lesson planning, such as the analysis of videos of students' performance (Leikin & Kawass, 2005), specific design methods (Courey et al., 2013) and teachers' creativity and know-how (Panasuk & Todd, 2005). The factors identified as affecting teachers' lesson planning include knowledge, curricular requirements and the materials and resources available (Lai & Lam, 2011); teachers' conceptions and beliefs and their vision of and preferences around the discipline and its teaching (Thompson, 1984) and teachers' knowledge of content and pedagogical know-how (Baumert et al., 2010; Yasemin, 2015).

Other studies have explored the difficulties experienced by teachers when planning lessons. They have been found to be unclear about the learning objective, to evaluate in ways inconsistent with learning objectives and to be uncertain about how to begin a lesson; to find it difficult to view a classroom session globally and align learning objectives, delivery and evaluation (Liyanage & Bartlett, 2010); to be unable to design tasks that are valid and gratifying for students and at the same time help attain learning objectives (Ainley, 2012); to have no notion about how to begin a lesson plan or identify students' needs, to tend to make scantily informed decisions and to report differences between what they plan and what they think about the subject (Schmidt, 2005); and to find it difficult to draw from their knowledge of the discipline when planning lessons (Bigelow & Ranney, 2005).

Our interest in this article focuses on characterising the planning practices of groups of teachers that share two features: they aim to improve their practices and they work in a curriculum autonomy context in which they are fully responsible for the complete design of the syllabus for their classes.

A curriculum model for lesson planning practices

Our idea is to address lesson planning as a whole, involving factors linked to the content to be taught, the way students learn, teaching methodologies and the way teachers plan to evaluate students. Therefore, we start from a view of curriculum aligned with the ideas of Beyer and Liston (1996), Rico (1997), or Stark and Lattuca (1996). According to this view, we assume the curriculum as composed of four dimensions: conceptual, cognitive, formative, and social, each of which deals with four fundamental and inter-related questions: 'what is knowledge, what is learning, what is teaching, and what is useful knowledge' (Rico, 1997, p. 386). The conceptual dimension refers to content and topics that are specific to a given discipline. The cognitive dimension refers to learning and the learner, and deals with understanding what is learning, how it happens, and how do different people learn. The formative dimension refers to teaching and the teacher and deals with aspects such as what are the practices that are believed to be useful for teaching. The social dimension refers to the value that the society places on the utility and usefulness of knowledge and it deals with the criteria and instruments that are used to judge the capacity of an individual on a given discipline or to assess the usefulness of a curriculum.

Furthermore, curriculum can be conceived as involving levels – from the national educational system through the classroom (Mesa, Gómez, & Cheah, 2013, pp. 867–868). At a given level, each one of the four dimensions of curriculum acquires a specific meaning. The curriculum model we use in this study focuses at the classroom level (Gómez, 2006). At this level, and on the basis of the four curricular dimensions, the model addresses actions and thoughts that teachers could make when planning an hour-long classroom session or series of lessons on a specific topic of school mathematics.

At this level, the conceptual dimension involves teachers' actions and thoughts to identify the concepts and procedures that characterise the lesson (and their inter-relationships), the ways it can be represented and the mathematical and non mathematical contexts that afford it meaning.

The information arising from the conceptual dimension serves as a basis for the cognitive dimension. In this dimension and level, we refer to teachers' actions and thoughts to establish and characterise their expectations around student learning (in terms of competences, learning objectives and capacities), identify the errors students may make when performing the tasks proposed and describe the pathways they believe students' learning process will take.

In the formative dimension, taking the characterisation of learning objectives as a reference, the concern refers to teachers' actions and thoughts to choose and describe the tasks comprising their lesson planning (in terms of requirements, instructions, materials and resources, grouping, interaction and timing), foresee students' and their own possible actions, analyse the tasks at issue and make any changes needed to meet learning objectives more efficiently and help students correct errors and surmount difficulties. Teachers also can describe, analyse and improve the task sequences set out in their lesson plans. Some of the ideas around the cognitive and formative dimensions stem from proposals put forward by Simon and others on teaching and learning cycles (Simon, 1994, 1995, 2014; Tzur et al., 2001).

Lastly, in the social dimension, teachers, at this curriculum level, include information gathering and analysis tools and procedures that enable them, in practice, to observe student progress in meeting learning objectives, correcting errors and surmounting difficulties; verify the extent to which their proposal has met all these aims; and evaluate students in keeping with institutional requirements.

In its inclusion of the four curricular dimensions, this curriculum model partially shares processes and ideas with most other models and schemes proposed for lesson planning. Most of those models focus on learning objectives (i.e. John, 2006), highlight instruction and evaluation (i.e. Little, 2003; Milkova, 2012) or include the subject matter analysis (i.e. Causton-Theoharis, Theoharis, & Trezek, 2008; Rusznyak & Walton, 2011). The advantage of this model is that it affords a coordinated approach to all these questions and takes into account the relationship among the four dimensions of curriculum. We will use this conceptual framework to guide the design of the structure of the questionnaire, interpret the coded data and obtain results.

Focus of the study

This study focuses on the content to be taught in school and the curriculum dimensions and elements handled by teachers when planning their lessons. The object of the study

is teachers' specific actions and thoughts, not what they think or believe is right or appropriate. The idea is to address lesson planning as a whole, from the selection of the lesson's topics to the way they plan to evaluate students. This descriptive study, then, forms part of the line of research that explores the features, including any difficulties, that characterise teachers' lesson planning.

This study revolved around the characterisation of the lesson planning practices of a group of teachers. Its subjects were teachers just beginning a teacher education programme. As done in other studies on teacher education (e.g. Schwarz, 2015), 'the decision was made to use a questionnaire in order to be able to survey more future mathematics teachers than would have been possible using an interview approach' (p. 384). A questionnaire was consequently designed which, based on the curriculum model proposed, could be used to describe and characterise their lesson planning practices. The section below describes the questionnaire, along with the information gathering, coding and analysis procedures. Lastly, the results of deploying the questionnaire and procedures are discussed to characterise lesson planning in the group of practising secondary school mathematics teachers studied.

Method

The target population, the information collection tool and the coding and analysis procedures are described below.

Context and target population

Law sets curriculum autonomy in Colombia. Schools and teachers are fully responsible for curriculum design and development in all areas. The Colombian State publishes curriculum guidelines that schools can use in their planning practices. Schools are expected to produce syllabi for each course and academic period and teachers are usually autonomous for designing and implementing the lessons they are in charge of. They often do so by producing what is known as 'teaching guides': sets of tasks that they design or copy from different resources, and propose to students. Very different, even opposite, approaches to curriculum and syllabi design are possible under this context.

The population studied comprised 27 practising public and private secondary school mathematics teachers from Bogotá and Cundinamarca, Colombia. The questionnaire was answered by this group of teachers at the beginning of a master teacher education program in which they were participating. Slightly over half (15) of the group were women, most (24) taught in public schools, had a degree (26) in mathematics, mathematics and statistics or mathematics and physics, and 7 to 15 years of experience (23).

The master teacher education programme that the subjects were just starting covers mathematics lesson planning, implementation and evaluation. Hence, this was a convenience sample of teachers interested in improving their teaching practices. In this programme, teachers are expected to develop a deep enough pedagogical content knowledge of a topic so that they can support the choices and decisions they make for their lesson plan (Charalambous, 2008). The master programme is founded in the previously stated curriculum model composed of four dimensions. The first part of the programme, corresponding to the lesson planning period, covers the first 15 months of

a two-year term. Participants work in small groups that systematically analyse a mathematical topic from the conceptual, cognitive, formative and social standpoints. Each group write up a report on these matters and formulate a lesson plan for the mathematical topic. In the second part of the programme, teachers implement the curriculum in place in their educational institutions, assess the relevance and effectiveness of the plan implemented, and establish a new and improved design.

We claim that the fact that the subjects were just at the beginning of the master programme did not generate bias on the teachers' responses: the subjects had not yet received any teaching on the topics included in the questionnaire and they were not yet emotionally linked to the programme.

Questionnaire

The questionnaire asked subjects to remember and report on general and specific issues concerning the planning of a recent lesson.¹ That is, it explored what teachers specifically did and thought when preparing a mathematics lesson recently taught. It did not explore their opinions on lesson planning in general or how they believed lessons should be planned in an ideal situation. Even though the lesson was on mathematics, the questions use the subject matter as a placeholder for inquiring into general issues related to the teachers' planning practices.

The four sections of the questionnaire are based on the curriculum model described above. Besides, the questionnaire includes two kinds of questions: main questions, which focus on the key points of the corresponding dimension, and subordinated questions, which have the purpose of obtaining details and clarifying different aspects of the main questions. For conciseness reasons, we do not show here the complete questionnaire: only the main questions and the most representative subordinated questions are described. The complete questionnaire can be downloaded at <http://bit.ly/1RsdvnK>.

The section of the questionnaire associated with the conceptual dimension contains the following question that refers to the mathematical matters borne in mind by the teacher when planning the lesson.

CD1. What aspects of the mathematics involved in the lesson did you have in mind?

Our purpose with this single question for this dimension was to establish which aspects of subject matter (as described in the conceptual framework) the teachers took into account for their lesson planning.

The questions in the cognitive dimension section (see [Table 1](#)) explored teachers' expectations (in terms of learning objectives), the possible strategies students could use to solve the tasks proposed by the teacher, and the errors in which they might foreseeably commit.

The section on the formative dimension was the longest of the questionnaire due to the variety of perspectives dealt with. Questions were organised from three perspectives: teaching methodology, task selection and task sequencing ([Table 2](#)). The questionnaire included five types of questions on teaching methodology: teacher's performance, moments for students' engagement in activities, students grouping, how students present the results of their work and teacher's interaction. Concerning tasks selection and sequencing, inasmuch as the tasks proposed by teachers constitute a core feature of this dimension, respondents were asked to provide examples, and questions were posed about the elements, sources and criteria involved in choosing and sequencing tasks.

Table 1. Cognitive dimension: main questions and representative subordinated questions.

| Main Questions | Representative Subordinated Questions |
|---|---|
| CgD1. Did you decide what you wanted students to learn from the lesson (in terms, for instance, of learning objectives, competencies, expected achievements or similar) before teaching it? | CgD1.1. What did you intend for them to learn? |
| CgD2. When working on this lesson, did you take into consideration the errors that your students might make? | CgD2.1. When preparing the lesson, did you include tasks that would address those errors? |
| CgD3. Before you taught the lesson, did you anticipate the strategies (ways of performing tasks) your students might use to perform the tasks you planned to propose? | CgD3.1. Could you give us a couple of examples of the strategies you anticipated? |

Table 2. Formative dimension: main questions and representative subordinated questions.

| Main Questions | Representative Subordinated Questions |
|---|--|
| FD1. Please describe what you planned to do in the classroom, in general, when you were working on this lesson. | FD1.1. Describe the order in which you were going to deliver explanations or present examples. FD1.2. Describe your plans for when students would engage in activities (problem solving, blackboard exercises. . .). FD1.3. Describe how students were going to perform the tasks (individually, two-by-two or in small teams). FD1.4. Describe how students were going to present the results of their work. FD1.5. Describe how you were going to interact with students (individually, with the class as a whole. . .). |
| FD2. Please explain how you chose the tasks you proposed for this lesson. | FD2.1. Where did you look for them (textbooks, earlier guides, internet, self-generated)? FD2.2. What kind of tasks did you propose (problems, routine exercises, etc.)? FD2.3. What proportion of the tasks that you proposed included the use of materials and resources? FD2.4. What proportion of the tasks that you proposed were problems that referred to non- mathematical situations? |
| FD3. Please explain how you sequenced the tasks you proposed for this lesson. | FD3.1. Please describe the criterion you used to determine the order in which you presented the tasks. |

Lastly, in the section on the social dimension, the two following questions were posed about teachers' design for student assessment.

SD1. Before delivering the lesson, did you think about how you would assess students' performance?

SD2. Provide a general description of what assessment approach you planned to adopt.

The questionnaire was compliant with all the minimum design requirements for this type of tool (Travers, 1986, pp. 246 and 273). It did not gather data unrelatedly: it was framed in a theory on the nature of the developments studied (curricular theory and the specific curriculum model proposed). The questions were not ambiguous: pilot tests were conducted prior to implementation to ensure their clarity. The information requested was available to teachers, since it referred to events that had occurred recently. The replies requested were not based on simulated or ideal situations, but on specific events in which the respondents had participated. The questions were short and, where deemed necessary, subdivided to ensure greater clarity. The questions were couched in emotionless terms, so as not to compromise teachers' answers.

Coding and analysis

The principles of qualitative content analysis (Mayring, 2015) were followed to analyse, group and code the replies to the open questions.

The coding procedure used a mixture of deductive and inductive category definition (Mayring (2015), p. 366):

We combine two fundamental steps of analysis: the first is a qualitative-interpretative step following a hermeneutical logic in assigning categories to text passages; the second is a quantitative analysis of frequencies of those assignments (if the same categories are coded in several text passages).

Categories emerged from teachers' answers. Furthermore, as suggested by Schwarz (2015), 'the theoretical basis of the categories followed from the theoretically-based development of the questionnaire' (p. 388). In what follows, we explain how the categories emerged from the conceptual framework, present anchor samples of their use, and describe the coding rules that we used.

Descriptors were designed in a way that enabled all researchers to classify a given reply under the same code. The list of codes was verified and refined by the three authors. The conceptual framework was used to define the codes, in order to establish whether a reply to a question on a given dimension might refer to aspects pertaining to other dimensions. For instance, when we ask teachers about what they expect their students to learn (cognitive dimension), we defined codes that allow establishing whether a reply refers to conceptual aspects of the subject matter or to issues related to the tasks proposed to the students (formative dimension). For this purpose, we grouped similar questions and decided whether they referred to issues of the question's dimension or other dimensions. We ensured that the number of codes per question was reasonable. 'Reasonable' was deemed to be from five to nine codes to a given question that could be suitably characterised.² As the questions were open, any given reply might include information classifiable under more than one code; i.e. a single reply could be labelled with more than one code.

Each author coded the replies separately. The results of the coding operation were subsequently compared. The replies for which the codes did not match were analysed to reach agreement on their interpretation and the coding was refined accordingly. For each question, the number of replies labelled with a given code was counted, the percentage over the total replies was calculated, and summary tables with those percentages were produced. These tables were used to characterise the group of teachers in respect to each question. That entailed identifying the codes with the highest and lowest percentages. After the responses to each question were characterised, the descriptions were arranged in accordance with the conceptual framework (the curriculum model). The outcome was the characterisation of the lesson planning conducted by the group of teachers in terms of the four dimensions of the curriculum model and the relationships among them.

Results

The group of teachers studied were characterised in terms of their replies to the questionnaire as described in the preceding section.³ The following is a short summary of the main results that we describe in more detail below for each section of the questionnaire (corresponding to

each dimension of the curriculum model). Teachers gave the same importance in their lesson planning to concepts, procedures and representation systems. They did not refer to the usefulness of mathematics. Almost all teachers claimed to have considered learning expectations when planning their lesson. Most of them took into account the mathematics involved when formulating those expectations, some of them referred to problems and none alluded to higher level learning expectations. The majority of teachers anticipated students' difficulties and errors, but only half of them envisaged specific activities to address them. More than half of the teachers thought about how students would solve the tasks proposed, but they did not so in detail. Most teachers asked students to solve tasks after presenting explanations and examples, which represents the bulk of the interaction between teacher and students. Even though they reported to make students work in pairs, most teachers asked them to present their work individually. The tasks that they selected for their lesson came from textbooks and Internet, are mainly exercises, require paper and pencil with little technology use, and are set up in mathematical contexts. Most teachers did not take into account students' learning when sequencing tasks; some of them use task complexity and the topics themselves as criteria for that purpose. Even though most teachers included assessment in their planning, very few referred to the assessment of learning expectations and the assessment tools used were not specific to the lesson's topic.

Conceptual dimension

When asked about the mathematical matters borne in mind when planning the lesson, the teachers' replies focused on concepts (28.9%), procedures (28.9%) and representation systems (22.2%). For example, a teacher claimed that, 'for the work with sum of rational numbers I took into account the previous concepts of addition of integers, multiplication of integers [concepts], law of signs of multiplication [procedures]'. No answer was related to the usefulness of mathematics. In [Figure 1](#), we summarise the results corresponding to the main questions in the conceptual dimension.

Cognitive dimension

All except one of the teachers (96.3%) claimed to have considered learning expectations when planning their lesson. When asked what they took into account for formulating learning expectations, most of the answers (65.9%) referred to mathematics (concepts, procedures and representations). Some of them (25%) referred to problems. None of them made any reference to higher level learning expectations when formulating the learning objectives. For example, a teacher claimed: 'the students had to learn to solve contextualized situations formulating a system of linear 2×2 equations and solve it using some method: graphic, substitution, elimination or matrix'. This answer refers to procedures, representations and problems. When asked whether they anticipated students' difficulties and errors when planning the lesson, more than two thirds (74.1%) of the teachers took them into account. However, only 55.6% said they envisaged specific activities to address them. For example, a teacher claimed, 'it is common for students to confuse the properties of addition with the properties of multiplication, so I propose activities to differentiate them in each case'. This teacher has anticipated a specific difficulty and, at the same time, he has proposed a way to address it.

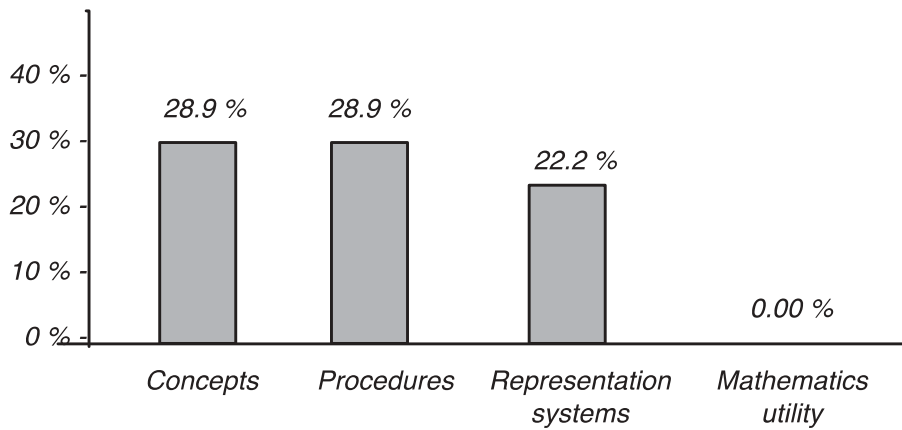


Figure 1. Results in the conceptual dimension.

More than half (59.2%) of the teachers also replied that they envisioned the strategies that students would deploy when trying to perform the tasks proposed, but most (74.1%) provided scant detail, referring to general procedures that students should follow: for example, ‘when students work with directly proportional magnitudes, they solve them arithmetically without using the properties and proportions’, or ‘some students try to solve operations horizontally, which will lead them to make mistakes’. In Figure 2, we summarise the results corresponding to the main questions in the cognitive dimension.

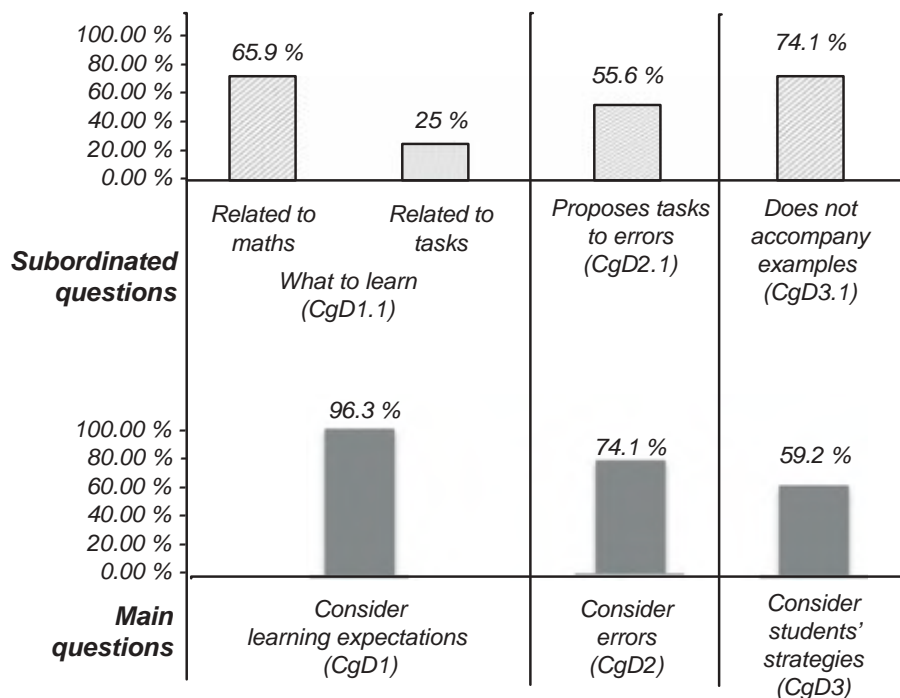


Figure 2. Results in the cognitive dimension.

Formative dimension

The first perspective of the formative dimension refers to teaching methodology. Many teachers (43.6%) start the lesson by presenting information (explanations or examples). Furthermore, most teachers (67.7%) ask students to solve tasks only after having given the explanations or solved their doubts: 'first the explanation and then the exercise'. Concerning the grouping of students when solving tasks, 60.5% of the teachers said that they organise students in pairs or groups. Nevertheless, most teachers (62.5%) asked students to present the results of their work individually. The questionnaire also asked about teachers' performance in class. The question that characterises this group of teachers concerns the teachers' purpose for interacting with his students: 27.7% did so for solving students' doubts or difficulties, whereas 12.8% presented new explanations. This is the case of a teacher who claimed: 'when I recognize that many students have the same doubt, I stop their work and present an example that can help solve that doubt'. **Figure 3** summarises the results corresponding to teaching methodology questions.

The second perspective of the formative dimension refers to tasks selection. Teachers answered questions concerning sources where they searched for tasks and type of tasks selected. There are three main sources where teachers reported that they search for tasks: textbooks (35.2%), Internet (37%) and tasks designed by themselves and their colleagues (24.1%). The questionnaire looked into the type of tasks that teachers selected from three points of view: kind of task (problem vs. routine exercise), use of materials and resources, and type of context (mathematical and non-mathematical). For this matter, 40.7% of the teachers reported selecting exercises, whereas 37% selected problems. On the other hand, 53% of teachers selected tasks that just required the use of the textbook and paper and pencil, and only 27.5% of teachers claimed to have selected tasks that involved the use of technology. Every task is set up in a context. This context can be mathematical (e.g. solve the equation $3x + 2 = 6$) or non-mathematical ('identify all triangles in the map of a city'). Tasks set up in non-mathematical contexts

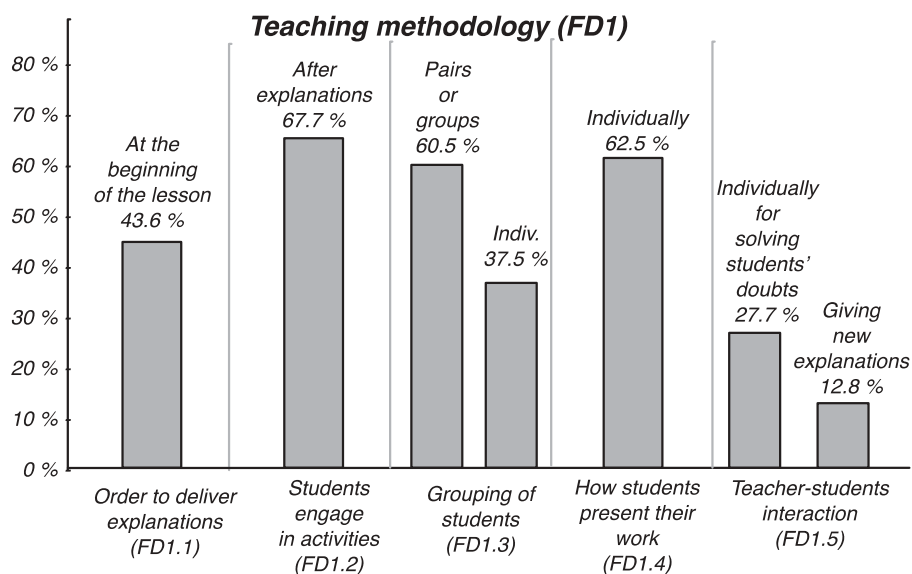


Figure 3. Teaching methodology results in the formative dimension.

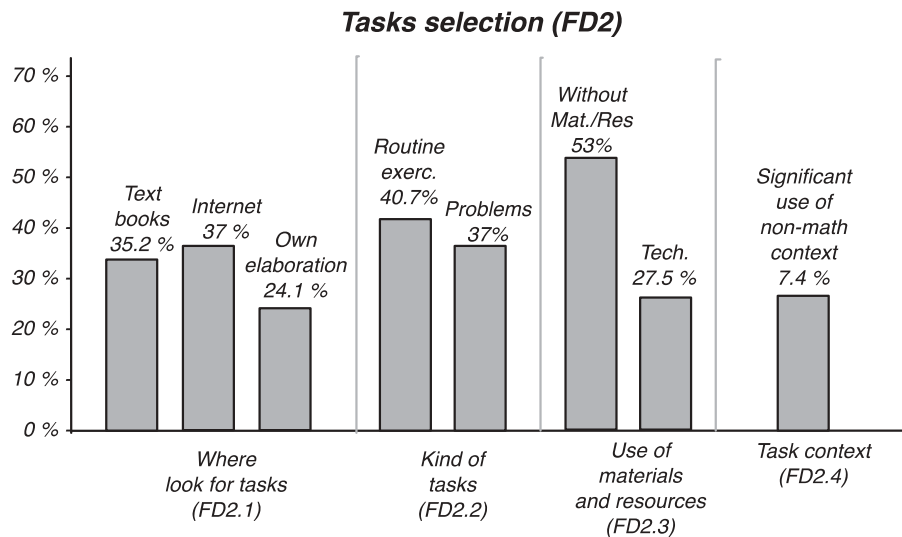


Figure 4. Tasks selection results in the formative dimension.

were not common in teachers' replies: only 7.4% of them used non-mathematical contexts in more than 60% of the tasks. [Figure 4](#) summarises the results corresponding to tasks selection.

Finally, the questionnaire inquired about teachers' task sequencing. Only 31.3% informed that they took into account students' learning when sequencing tasks ('For students to carry out a gradual learning process'). They considered two more criteria for organising their task sequence: task complexity (21.9%) ('first, I propose basic exercises that require simple procedures; then I propose exercises that require students to analyze the information; finally, I propose problems in different contexts that require students to put into practice what they have learned') and topics' order (21.9%) ('to establish the relationship between a topic that is familiar to them and a topic that is new'). [Figure 5](#) summarises the results corresponding to tasks sequencing.

Social dimension

The analysis of the social dimension focused on assessment planning (see [Figure 6](#)). Most (85%) of the teachers included assessment in their lesson planning. Further inquiry into how that was done showed that, whereas 41.7% of the replies focused on the assessment tools used, only 8.3% referred to assessing students in terms of learning expectations. The assessment tools were not specific to the mathematics lesson being planned.

Discussion

The importance of lesson planning in mathematics teachers' teaching practices and students' learning poses the need for characterising this teaching competence. Most studies conducted on the subject to date have used complex methodologies, including the review of planning documents (lesson scripts), interviews with teachers and classroom observation. Such approaches limit the number of teachers whose planning practices can be characterised. This article proposes a methodology (a questionnaire

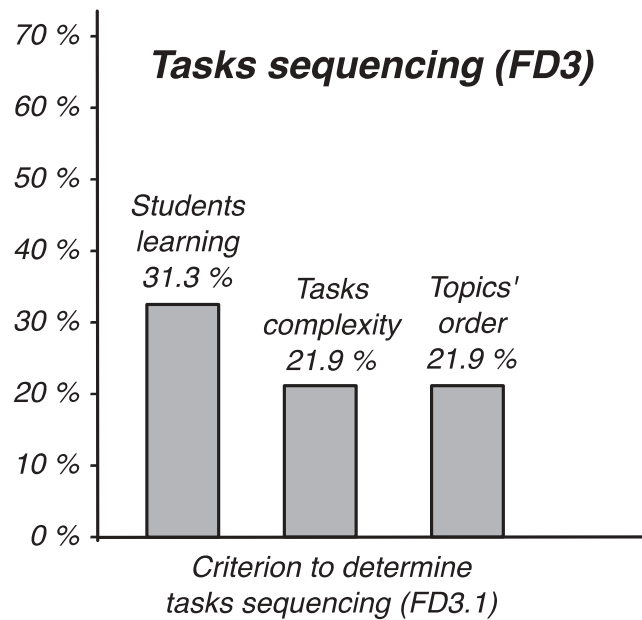


Figure 5. Tasks sequencing results in the formative dimension.

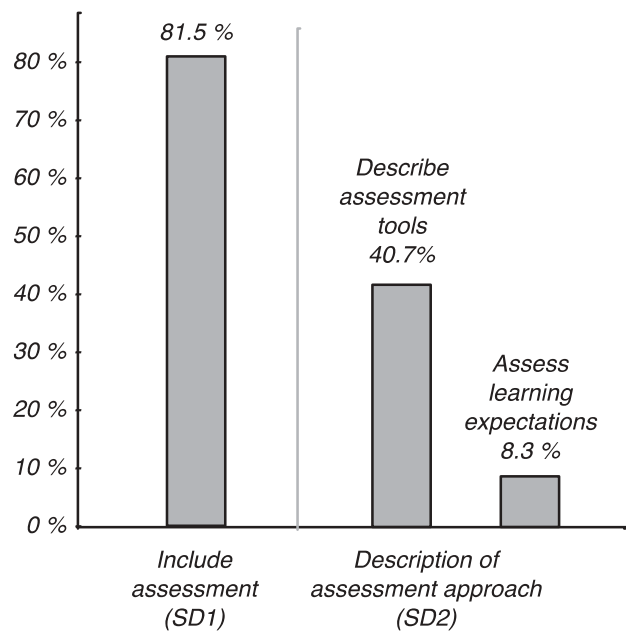


Figure 6. Results in the social dimension.

and information coding and analysis procedures) to surmount that problem with no need for major investments in resources. Lesson planning as implemented by a group of 27 practising mathematics teachers was characterised using this approach. Even though this is a medium-sized group, the information collection and analysis procedures proposed are apt for systematic application to large groups of teachers. Since the questionnaire asks teachers to recall what they did or thought, the information that is collected does not refer to their opinions on what is correct or appropriate.

Even though the subjects of this study were practicing mathematics teachers, we used a general curriculum model not specific to mathematics as a guide and conceptual background for designing the questionnaire and the coding and analysis procedures. Therefore, the results refer to planning questions that are not related to a specific discipline. Furthermore, the curriculum model used has enabled us to survey a broad spectrum of the issues that characterise teachers' planning practices.

An analysis of the findings showed that the lesson planning implemented by the teachers studied was characterised by the following: learning expectations formulated in mathematical terms; failure to address higher level learning expectations when establishing learning objectives; failure to include activities specifically designed to help students correct errors and overcome difficulties; mathematical tasks to be solved with paper and pencil, not contextualised, obtained in textbooks and Internet; designed for students working individually; introduction of examples or exercises only after the lesson is explained; student-teacher interaction is expected only during student activities; absence of clear criteria for task sequencing; and anticipation of the tools to be used for assessment, but without taking account of learning expectations nor lesson topics.

These findings concur in some respects with the results of earlier studies. The lesson planning conducted by the teachers studied addressed certain prominent criteria and procedures, while others were absent. This revealed difficulties and needs, as mentioned in the preceding paragraph. Specifically, contrary to expert recommendations for planning procedures and practice (Akyuz et al., 2013; Jones, Jones, & Vermette, 2011; Liyanage & Bartlett, 2010; Strangis et al., 2006), the teachers studied showed no systematic global or consistent vision of lesson planning that would afford a coordinated approach to the four curricular dimensions. Learning expectations, for instance, were not defined on the grounds of a characterisation of the topic to be taught. Very few members of the group anticipated students' performance when solving tasks (Chizhik & Chizhik, 2018) and reported that task design and selection were based on learning expectations, while no relationship was observed between assessment tools and procedures and such expectations.

This lack of a global and interrelated approach to lesson planning might be linked to the teacher education programmes in which these teachers had participated in the past. Some of these programmes present separately and do not link, for instance, subject knowledge, pedagogical knowledge or knowledge of students (Grossman, Hammerness, and McDonald, 2009). Since it has been found that the quality of teachers' lesson planning depends upon their subject content and pedagogical content knowledge (Baumert et al., 2010; Lai & Lam, 2011; Yasemin, 2015) and their beliefs around mathematics and mathematics teaching and learning (Thompson, 1984), many teachers' education programs tend to focus their attention on the development of these types of knowledge in an isolated manner. On the other hand, some studies suggest that the integration of these types of knowledge take place in professional contexts (Abernathy, Forsyth, and Mitchell, 2001, Gafoor and Umer Farooque, 2010) that cannot be achieved in pre-service teacher education. Nevertheless, this study shows that in-service teachers, working in professional contexts, also need help to achieve such integration in order to produce cohesive and coherent lesson plans.

Many variables are involved in teachers' planning practice. Results show that, perhaps as a consequence of their beliefs about teaching and learning, most teachers focus their attention on a few of those variables that they consider dominant. Teacher education programs could take these dominant variables as a starting point for adapting their design and implementation.

Although in some cases teachers' classroom practices differ from what they learned in academic education (Miller et al., 2014) and most continue to learn how to plan lessons throughout their career (Kang, 2017; Mutton et al., 2011), teacher education must address the lesson planning needs and difficulties detected here, which corroborate the results of earlier studies. Tools and procedures for effectively and efficiently evaluating the impact of such needs and difficulties should also be available in teacher education programmes. The tool and procedures proposed here are deemed suitable to meeting that purpose. That is why we claim that the instrument and procedures that we have proposed can be used for evaluating and improving the design and implementation of teachers' education programs. They provide a low-cost, efficient and quick way of establishing the shortcomings and limitations of groups of teachers. With this information, teacher education programmes can adapt their design and implementation to help them overcome those limitations.

The use of a questionnaire can be considered as a limitation of this study. Some authors question the reliability and validity of using questionnaires to investigate teachers' practices. Nevertheless, the literature on teachers' research shows that this issue is not clear-cut. In fact, some researchers consider that this argument bears examination. This is the case of Desimone (2009) who argues that arguments against the use of questionnaires come from early validity studies (i.e. Hook & Rosenshine, 1979; Jorgenson, 1975) which were based on misconceptions about methodology (p. 189). Other studies (i.e. Ross, McDougall, Hogaboam-Gray, & LeSage, 2003), better founded methodologically, have found contrasting results: 'focused teacher self-reports can gather reliable data on instructional practices' (Koziol & Burns, 1986, p. 205). This is the case, in particular, when teachers are asked about their practices on a specific topic for a single lesson (Desimone, 2009, p. 189), as is the case for the questionnaire that we propose.

The questionnaire did not address the second aspect of the definition of the social dimension (usefulness of the curriculum). Assessing the usefulness of the curriculum would have implied questions related to a topic taught over more than one lesson. As explained in the methodology section, we decided to focus the questionnaire in a specific lesson. Questions for further research, not contemplated in this study, are related to the impact of the planning on students' achievement and learning. In particular, we plan to analyse questions related to how teachers adapt their planning to students' diversity or how students' affective factors are considered in the teachers' planning process.

Notes

1. The text of the questionnaire can be downloaded from <http://bit.ly/1RsdvnK>.
2. The codes used are listed and described on <http://bit.ly/1PHUvMA>.
3. A full list of the replies is posted on <http://is.gd/Qtskwh>.

Disclosure statement

No potential conflict of interest was reported by the authors.

Funding

This work was supported by the Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación [54242], Colombia.

Notes on contributors

María José González is a lecturer for the Faculty of Education at Cantabria University in Spain. She has contributed to European and Spanish research and development projects such as InterGeo (Interoperable Interactive Geometry for Europe, ECP-410016), TutorMates (TRACE Project: PET2008_0329_01), or Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación (EDU2012-33030), and has published in the fields of mathematics teacher education and the use of technology for mathematics teaching.

Pedro Gómez is invited professor and director of “una empresa docente” of the Facultad de Educación of the Universidad de los Andes. He is in charge of Funes (a digital repository on mathematics education), and the master’s degree on mathematics teacher education of that university. He has published several books on mathematics education and research articles on high-ranked journals. His work focusses on mathematics teacher education. His lines of research are on government guidelines, institutional planning, teacher education, and resources and interaction spaces for mathematics teachers. His open access publications can be accessed at <http://is.gd/tZ68Ke>.

Andrés Pinzón is a PhD Student in Mathematics Education in the Facultad de Educación of the Universidad de los Andes. He is the coordinator of the master’s degree in Mathematics Education of that university. His research interests focus in mathematics teacher education.

References

- Abernathy, T. V., Forsyth, A., & Mitchell, J. (2001). The bridge from student to teacher: What principals, teacher education faculty, and students value in a teaching applicant. *Teacher Education Quarterly*, 28(4), 109.
- Ainley, J. (2012). Developing purposeful mathematical thinking: A curious tale of apple trees. *PNA*, 6(3), 85–103.
- Akyuz, D., Dixon, J. K., & Stephan, M. (2013). Improving the quality of mathematics teaching with effective planning practices. *Teacher Development*, 17(1), 92–106.
- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., ... Tsai, Y.-M. (2010). Teachers’ mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, 47(1), 133–180.
- Beyer, L. E., & Liston, D. P. (1996). *Curriculum in conflict: Social visions, educational agendas, and progressive school reform*. New York, NY: Teachers College Press.
- Bigelow, M., & Ranney, S. (2005). Pre-service ESL teachers’ knowledge about language and its transfer to lesson planning. In N. Bartels (Ed.), *Applied linguistics and language teacher education. Educational linguistics* (Vol. 4, pp. 179–200). Boston, MA: Springer.
- Boudah, D. J., Deshler, D. D., Schumaker, J. B., Lenz, B. K., & Cook, B. (1997). Student-centered or content-centered? A case study of a middle school teacher’s lesson planning and instruction in inclusive classes. *Teacher Education and Special Education: the Journal of the Teacher Education Division of the Council for Exceptional Children*, 20(3), 189–203.

- Causton-Theoharis, J. N., Theoharis, G. T., & Trezek, B. J. (2008). Teaching pre-service teachers to design inclusive instruction: A lesson planning template. *International Journal of Inclusive Education*, 12(4), 381–399.
- Charalambous, C. Y. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the unfolding of tasks in mathematics lessons: Integrating two lines of research. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *International group for the psychology of mathematics education* (pp. 281–288). Morelia: PME.
- Chizhik, E. W., & Chizhik, A. W. (2018). Using activity theory to examine how teachers' lesson plans meet students' learning needs. *The Teacher Educator*, 53(1), 67–85.
- Courey, S. J., Tappe, P., Siker, J., & LePage, P. (2013). Improved lesson planning with universal design for learning (UDL). *Teacher Education and Special Education: the Journal of the Teacher Education Division of the Council for Exceptional Children*, 36(1), 7–27.
- Darling-Hammond, L. (2010). *Evaluating teacher effectiveness: How teacher performance assessments can measure and improve teaching*. Washington, DC: Center for American Progress.
- Desimone, L. M. (2009). Improving impact studies of teachers' professional development: Toward better conceptualizations and measures. *Educational Researcher*, 38(3), 181–199.
- Gafoor, K. A., & Umer Farooque, T. (2010). *Ways to Improve Lesson Planning: A Student Teacher Perspective*. Paper presented at the International Seminar Cum Conference on Teacher Empowerment and Institutional Effectiveness, Karnataka, India.
- Gómez, P. (2006). Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. In P. Bolea, M. J. González, & M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15–35). Huesca, España: Instituto de Estudios Aragoneses.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Grossman, P., Hammerness, K., & McDonald, M. (2009). Redefining teaching, re-imagining teacher education. *Teachers and Teaching*, 15(2), 273–289. doi: 10.1080/13540600902875340
- Hook, C. M., & Rosenshine, B. V. (1979). Accuracy of teacher reports of their classroom behavior. *Review of Educational Research*, 49(1), 1–11.
- John, P. D. (2006). Lesson planning and the student teacher: Re-thinking the dominant model. *Journal of Curriculum Studies*, 38(4), 483–498.
- Jones, K. A., Jones, J., & Vermette, P. J. (2011). Six common lesson planning pitfalls - recommendations for novice educators. *Education*, 131(4), 845–864.
- Jorgenson, G. W. (1975). An analysis of teacher judgments of reading level. *American Educational Research Journal*, 12(1), 67–75.
- Kang, H. (2017). Preservice teachers' learning to plan intellectually challenging tasks. *Journal of Teacher Education*, 68(1), 55–68.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. O., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Koziol, S. M., & Burns, P. (1986). Teachers' accuracy in self-reporting about instructional practices using a focused self-report inventory. *The Journal of Educational Research*, 79(4), 205–209.
- Kyriacou, C. (1998). *Essential teaching skills* (2nd ed.). Cheltenham, UK: Stanley Thornes.
- Lai, E., & Lam, C. C. (2011). Learning to teach in a context of education reform: Liberal studies student teachers' decision-making in lesson planning. *Journal of Education for Teaching*, 37(2), 219–236.
- Leikin, R., & Kawass, S. (2005). Planning teaching an unfamiliar mathematics problem: The role of teachers' experience in solving the problem and watching pupils solving it. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24(3–4), 253–274.
- Li, Y., Chen, X., & Kulm, G. (2009). Mathematics teachers' practices and thinking in lesson plan development: A case of teaching fraction division. *ZDM*, 41(6), 717–731.
- Little, M. E. (2003). Successfully teaching mathematics: Planning is the key. *The Educational Forum*, 67(3), 276–282.

- Liyanage, I., & Bartlett, B. J. (2010). From autopsy to biopsy: A metacognitive view of lesson planning and teacher trainees in ELT. *Teaching and Teacher Education*, 26(7), 1362–1371.
- Mayring, P. (2015). Qualitative content analysis: Theoretical background and procedures. In A. Bikner-Ahsbals, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education. Examples of methodology and methods* (pp. 365–380). Dordrecht: Springer.
- Mesa, V. M., Gómez, P., & Cheah, U. H. (2013). Influence of international studies of student achievement on mathematics teaching and learning. In K. C., C. Keitel, A. Bishop, F. Leung, & J. Kilpatrick (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 861–900). Dordrecht: Kluwer.
- Milkova, S. (2012). *Strategies for effective lesson planning*. Center for Research on Learning and Teaching. Retrieved from <http://bit.ly/2LFIQnH>
- Miller, J., Austin Windle, J., & Yazdanpanah, L. K. (2014). Planning lessons for refugee-background students: Challenges and strategies. *International Journal of Pedagogies and Learning*, 9(1), 38–48.
- Mutton, T., Hagger, H., & Burn, K. (2011). Learning to plan, planning to learn: The developing expertise of beginning teachers. *Teachers and Teaching*, 17(4), 399–416.
- Panasuk, R. M., & Todd, J. (2005). Effectiveness of lesson planning: Factor analysis. *Journal of Instructional Psychology*, 32(3), 215–232.
- Raymond, L. P., & Ruth, R. C. (2006). Evidence in teacher education: The performance assessment for California teachers (PACT). *Journal of Teacher Education*, 57(1), 22–36.
- Rico, L. (1997). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. In L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 377–414). Madrid, Spain: Síntesis.
- Ross, J. A., McDougall, D., Hogaboam-Gray, A., & LeSage, A. (2003). A survey measuring elementary teachers implementation of standards based mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(4), 344–363.
- Rusznayak, L., & Walton, E. (2011). Lesson planning guidelines for student teachers: A scaffold for the development of pedagogical content knowledge. *Education as Change*, 15(2), 271–285.
- Santagata, R., Zannoni, C., & Stigler, J. (2007). The role of lesson analysis in pre-service teacher education: An empirical investigation of teacher learning from a virtual video-based field experience. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(2), 123–140.
- Sardo-Brown, D. (1996). A longitudinal study of novice secondary teachers' planning: year two. *Teaching and Teacher Education*, 12(5), 519–530. doi:10.1016/0742-051X(95)00056-P
- Schmidt, M. (2005). Preservice string teachers lesson planning processes: An exploratory study. *Journal of Research in Music Education*, 53(1), 6–25.
- Schwarz, B. (2015). A study on professional competence of future teacher students as an example of a study using qualitative content analysis. In A. Bikner-Ahsbals, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education. Examples of methodology and methods* (pp. 381–399). Dordrecht: Springer.
- Simon, M. (1994). Learning mathematics and learning to teach: Learning cycles in mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 26(1), 71–94.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114–145.
- Simon, M. (2014). Hypothetical learning trajectories in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 272–275). Dordrecht: Springer.
- Stark, J., & Lattuca, L. (1996). *Shaping the college curriculum: Academic plans in action*. Needham Heights, MA: Allyn and Bacon.
- Strangis, D. E., Pringle, R. M., & Knopf, H. T. (2006). Road map or roadblock? Science lesson planning and preservice teachers. *Action in Teacher Education*, 28(1), 73–84.
- Tanni, M. (2012). Teacher trainees' information acquisition in lesson planning. *Information Research: An International Electronic Journal*, 17(3), 1–19.
- Theoharis, G., & Causton-Theoharis, J. (2011). Preparing pre-service teachers for inclusive classrooms: Revising lesson-planning expectations. *International Journal of Inclusive Education*, 15(7), 743–761.
- Thompson, A. G. (1984). The relationship of teacher's conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 105–127.

- Travers, R. M. W. (1986). *Introducción a la investigación educativa*. Barcelona: Ediciones Paidós.
- Tzur, R., Simon, M. A., Heinz, K., & Kinzel, M. (2001). An account of a teacher's perspective on learning and teaching mathematics: Implications for teacher development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4(3), 227–254.
- Yasemin, C.-G. (2015). The effects of changes in mathematical knowledge on teaching: A longitudinal study of teachers' knowledge and instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(3), 280–330.
- Zazkis, R., Liljedahl, P., & Sinclair, N. (2009). Lesson plays: Planning teaching versus teaching planning. *For the Learning of Mathematics*, 29(1), 40–47.

4. ARTÍCULO 2: REACTIONS OF MATHEMATICS TEACHERS TO
STUDENTS' ERRORS AND UNEXPECTED STRATEGIES

| | |
|--|--|
| Manuscript Number: | |
| Full Title: | Reactions of mathematics teachers to students' errors and unexpected strategies |
| Article Type: | Original Full Paper |
| Keywords: | errors; in-service teachers; reactions; teacher decision-making; unexpected strategies. |
| Corresponding Author: | Andrés Pinzón Universidad de los Andes Bogota, Colombia COLOMBIA |
| Corresponding Author Secondary Information: | |
| Corresponding Author's Institution: | Universidad de los Andes |
| Corresponding Author's Secondary Institution: | |
| First Author: | Andrés Pinzón |
| First Author Secondary Information: | |
| Order of Authors: | Andrés Pinzón Pedro Gómez María José González |
| Order of Authors Secondary Information: | |
| Funding Information: | Colciencias (64639) Mr Andrés Pinzón |
| Abstract: | <p>A part of student learning in the classroom depends on the way the teacher reacts to the student's thinking. Literature has addressed separately teachers' reactions to the errors and unexpected strategies that students put into play when solving tasks. We propose a framework to analyse these reactions together from three criteria: the focus of the reactions (teacher or student), the type of knowledge (conceptual or procedural) that the teacher puts into play in the teacher-focused reactions, and the types of actions (ask and propose) involved in the student-focused reactions. We codified and analysed the responses of a group of mathematics teachers to a questionnaire that inquired about their curricular practices. We found similarities in their reactions to student mistakes and unexpected strategies: two thirds of teachers have a teacher-centred reaction. For student-centered answers, the amount of teacher reactions in which she or he proposes activities is three times the amount of reactions in which she or he asks students questions. In addition, reactions to unexpected strategies differ from reactions to errors because teachers evaluate, correct and accept those strategies.</p> |

Reactions of mathematics teachers to students' errors and unexpected strategies

Pinzón, Andrés^a. ^aFacultad de Educación, Universidad de los Andes. Carrera 1 N° 18A – 12 Bogotá, Colombia. aa.pinzon363@uniandes.edu.co, ORCID: 0000-0002-6463-8383

Gómez, Pedro^a. ^aFacultad de Educación, Universidad de los Andes. Carrera 1 N° 18A – 12 Bogotá, Colombia. argeifontes@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9929-4675

González, María José^b. ; ^b Science Faculty, Universidad de Cantabria, Av. Los Castros s/n, 39005 Santander, Spain. mariaj.gonzalez@unican.es, ORCID: 0000-0003-2519-5812

Corresponding author

Andrés Pinzón

Facultad de Educación, Universidad de los Andes

Bloque Ña Casita Rosada, Oficina 309

Carrera 1 N° 18A – 12 Bogotá, Colombia

(+571) 3394949 ext 3290

aa.pinzon364@uniandes.edu.co

Funding

This work was supported by Francisco José de Caldas Fund (Colciencias, Colombia), within the framework of the research program 64639, call for projects 808 of 2018, project Acometer la inequidad a través de la educación: matemáticas en la educación básica y media [Addressing inequity through education: mathematics in basic and secondary education], 2019-2021.

Reactions of mathematics teachers to students' errors and unexpected strategies

Abstract

A part of student learning in the classroom depends on the way the teacher reacts to the student's thinking. Literature has addressed separately teachers' reactions to the errors and unexpected strategies that students put into play when solving tasks. We propose a framework to analyse these reactions together from three criteria: the focus of the reactions (teacher or student), the type of knowledge (conceptual or procedural) that the teacher puts into play in the teacher-focused reactions, and the types of actions (ask and propose) involved in the student-focused reactions. We codified and analysed the responses of a group of mathematics teachers to a questionnaire that inquired about their curricular practices. We found similarities in their reactions to student mistakes and unexpected strategies: two thirds of teachers have a teacher-centred reaction. For student-centered answers, the amount of teacher reactions in which she or he proposes activities is three times the amount of

reactions in which she or he asks students questions. In addition, reactions to unexpected strategies differ from reactions to errors because teachers evaluate, correct and accept those strategies.

Keywords: errors, in-service teachers, reactions, teacher decision-making, unexpected strategies.

Introduction

Teacher decisions affect student learning opportunities (Herbst, Chazan, Kosko, Dimmel, & Erickson, 2016) and understanding teacher decision making can help us improve the quality of teaching (Bishop, 2008; Clough, Berg & Olson, 2009). There are various circumstances in the classroom that require the teacher to make decisions spontaneously. Two of these situations are errors and unexpected strategies of students. Therefore, a part of the students' learning in the classroom depends on the way the teacher reacts to their errors (Ball & Bass, 2003; Ma, 1999; Son & Sinclair, 2010) and to the unexpected strategies that they put into play when solving tasks (Son, 2016; Son & Crespo, 2009). What types of reactions do math teachers have to their students' errors and their strategies when addressing tasks?

In this article, we address this question by identifying and characterizing the reactions of teachers in practice to students' errors and unexpected strategies and organizing these reactions with respect to three criteria. The first is the focus of the reactions—teacher or student. When the reaction is focused on the teacher, we consider the kind of knowledge that the teacher puts into play—conceptual or procedural. When the reaction is focused on the student, we take into account the type of action—ask or propose—that he performs. We also identify similarities and differences in the teachers' reactions when she or he reacts to errors or strategies. We carried out an empirical study in which the participants were teachers in

secondary and middle school (with students between the ages of 10 and 18) who were starting a postgraduate training program. We rely on their answers to a questionnaire about one of their most recent classes, in which they answered items about the reactions they had during the teaching of a specific math topic chosen by each teacher.

We organize this article in five sections. In the first section, we place the study in the context of literature. Then, we develop the conceptual framework and present the aims of the study. In the third section, we present the methodology and, in the fourth, the results. Finally, we present a discussion section including the implications of the study.

Reactions to student actions in the classroom

Within the teacher's actions, we are interested in those that occur as a reaction to the students' thinking in the classroom. In the literature on teacher reactions to student thinking, those studies whose focus are responses to errors stand out. For example, in a study based on observations of math, German and economics classes, Tulis (2013) identified the following eleven categories of response by the teacher to student errors: the teacher ignores the error, corrects it, asks the same student to correct it, redirects the question to another student, encourages the student to keep trying, gives time to the student to reconsider his response, promotes the discussion with the whole class, avoid negative reactions from classmates (teasing), criticize or judge the student, has humiliating behavior (for example, laughter) and expresses expressions of discomfort (disappointment or hopelessness). Later, Sarkar Arani et al. (2017) took these categories and proposed an error management behavior framework for the math teacher. This framework is organized in seven categories: ignoring the mistake, correction by the teacher, correction by the students, redirecting the question to another student,

support following mistakes, and negative reaction (express annoyance or humiliating behavior).

Several studies have established comparisons between reactions to errors in different countries. For example, in a study of teacher responses to student errors in math classrooms in the United States and China, Schleppenbach, Flevares, Sims, and Perry (2007) found that teachers from both countries responded to errors differently. In particular, teachers in the United States made more statements about errors (indicate that the answer is wrong, give the correct answer, provide explanations and encourage students to correct themselves) than teachers in China, who, instead, asked more follow-up questions about the errors (repeat the question, redirect the question, expand the question, request agreement with a statement and asking for an addition to the answer). On the other hand, Santagata (2005) examined the responses that teachers in the United States and Italy made to student errors during math classes. For example, in the United States, she found that, when teachers addressed an error, they provided the correct answer or chose the correct answer from a series of student responses. When the teacher asked the student who made the error to correct himself, the teacher repeated the question to the same student, asked him to explain why she or he gave that answer or added a suggestion to help the student reach the correct answer. When the teacher asked another student to make the correction, the teacher redirected the question to a different student or added a clue while redirecting the question. Finally, on some occasions, the teacher asked the students to identify a classmate's error, or some students corrected a peer's error on their own initiative before the teacher intervened.

Son and Sinclair (2010), in a study that analyses how teachers interpret and respond to students' geometric errors, identified some response patterns. The dominant patterns are the

generalization of properties (the teacher does not directly address the error and, in his intervention, explains general properties in which the error is framed), the return to the basics (the teacher atomizes the error into more elements basics, concepts or procedures, to help the student overcome the difficulty) and the approach of Plato and the slave (the teacher assumes that the student knows how to solve the task, but, as the student does not remember, the teacher should help him to do so). In the first two cases, the teacher says or shows the basic properties or elements, and, in the third case, the teacher usually guides the student through asking for more information.

Complementary to the reactions to errors, we are also interested in teachers' reactions to students' unexpected strategies when they solve tasks in the classroom. Campbell, Rowan, and Suarez (1998) propose three criteria that math teachers should consider in the face of strategies invented by students, and that, therefore, could guide teachers' reactions to unexpected solution strategies. The first one is validity. The teacher must assess whether the strategy works or not for the given task. The second criterion is generalization. If the strategy works, then you should consider whether the strategy works for similar cases. And the third criterion is effectiveness. It consists in determining if the strategy is more appropriate than another (for example, the one suggested by the teacher) for the solution of the task in question.

In a study focused on the reasoning and responses of future teachers to a student's non-traditional strategy to divide fractions, Son and Crespo (2009) found that a small percentage of secondary school teachers (18%) and almost half of primary school teachers (41%) encouraged students to explain and justify their strategy. The other participants, on the other hand, focused their reactions on their own explanations and justifications and provided little space and opportunity for students to discuss their responses. Similarly, Son (2016), in a

study about preservice teachers' reasoning and responses to students' informal and formal strategies for whole number subtraction, found that a large part of the teachers (around 60%) focused their answers on the teacher: the teacher is who says or explains why the strategy works. This happened regardless of whether the students used traditional methods or methods generated by themselves.

As we have explained to this point, most of the literature has addressed the reactions of math teachers to errors and unexpected strategies separately, being dominant the research on errors. A significant proportion of these studies have been oriented to establish correlations between reactions and teacher knowledge and have been framed in specific topics of school mathematics. The different studies coincide in describing these reactions to the student's thinking in terms of student actions and teacher actions, and occasionally, they consider affective issues or attitudes of the teacher. This background shows the interest of deepening the characterization of the teacher's reactions with different purposes.

In this article, we identify and characterize the reactions of mathematics teachers to students' errors and unexpected strategies. We study these two types of reactions and identify similarities and differences between them. The teachers in the study freely expressed what they did during the development of recent classes corresponding a mathematical content chosen by them. We structure their reactions through a reference frameworks that we developed based on previous results (Boaler & Brodie, 2004; Brodie, 2011; Santagata, 2005; Sarkar Arani et al., 2017; Schleppenbach et al., 2007; Son, 2013, 2016; Son & Crespo, 2009; Son & Sinclair, 2010; Tulis, 2013). The reference frameworks rely on three criteria. First, we consider the focus of the reactions identified—teacher or student. In the case of teacher-focused reactions, we consider the type of knowledge that the teacher puts into play—conceptual or

procedural. And, in the case of student-focused reactions, we take into account the type of action—ask or propose. The results obtained allow us to reflect on the tendencies that teachers show in their reactions and conjecture about the origin of the reactions in teachers' general beliefs about the teaching and learning of mathematics.

Theoretical framework

We organize the theoretical framework of this study in three sections. First, we present a section in which we set out the notions of error and unexpected strategy. Then, we develop student-focused and teacher-focused approaches. Next, we present the distinction between conceptual knowledge and procedural knowledge, as a particular category to address teacher-focused reactions, and the distinction between the actions ask and propose, as a particular category to address student-focused reactions. Finally, we describe the frameworks of reference that we will use to classify the reactions of teachers.

Errors and unexpected strategies

An error is the visible manifestation of a learning difficulty. The error is directly observable in the student's wrong answers to the specific questions and tasks that the teacher demands. Because errors arise from partial knowledge that has worked for the student in other situations, they tend to be systematic, sporadic, persistent and not questionable by the student. This characterization excludes those erroneous manifestations of students that occur by chance or are the result of inattention or neglect (Authors, 2018; Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, & Inbar, 1987; Rico, 1995). Errors can prevent the student from moving forward in solving a task.

An unexpected strategy is a sequence of students' actions that the teacher did not plan as an alternative solution to a proposed task. Unexpected strategies may refer to basic algorithms (e.g., carrying out the addition or multiplication of natural numbers by methods other than those taught) to sophisticated procedures to solve a particular situation (e.g., find the solution of systems of equations by the graphic method when the algebraic method has been taught).

Student-focused and teacher-focused approaches

Teachers' reactions to students' errors and unexpected strategies can be organized in terms of who gives information, who makes an explanation or justification and who ultimately decides on the suitability of the ideas presented. Two major approaches are raised in the literature, depending on who is the subject of the action to be performed: student-focused and teacher-focused. The student-focused reactions can be observed, for example, when a teacher asks students to explain, present and justify their response (error or strategy), or ask and guide students as they discover if the answers are valid or not (Son & Crespo, 2009).

On the other hand, in teacher-focused reactions, the teacher clarifies, explains, evaluates or shows whether the answer is valid or not, and provides direct information about this answer (Son, 2013, 2016; Son & Crespo, 2009; Son & Sinclair, 2010).

Conceptual knowledge and procedural knowledge

In the field of cognition, there is a certain consensus in distinguishing two types of mathematical knowledge: the conceptual and the procedural (Son & Sinclair, 2010). Conceptual knowledge refers to the understanding of the principles that structure a topic and the interrelationships between its elements (Rittle-Johnson & Alibali, 1999). Examples of this type of knowledge are the properties and definitions of mathematical concepts. Procedural

knowledge refers to the ability to carry out action sequences, algorithms and procedures to respond to a task (Hiebert & Lefevre, 1986; Rittle-Johnson & Alibali, 1999). During the learning process, these two types of knowledge are in constant interaction and it is not always clear in what order they are acquired (Authors, 2018; Star, 2005).

In the context of this work, the distinction between these two types of knowledge has been used in some works for typifying reactions classified as teacher-focused. For example, Son and Crespo (2009) established that future math teachers tend to focus on reiterating procedures for schoolchildren to overcome an error, and leave aside the conceptual aspects that may be behind the error. Nevertheless, when asked to identify the origin of the error, they interpret it mostly in a conceptual key (Son y Sinclair, 2010). In a more recent study, Son (2013) distinguishes two profiles of teachers: those who have a concept-based approach (which in their reactions to errors use verbs such as “recognize” or “see” characteristics or properties) and teachers who have a procedure-based approach (that use verbs like “use”, “calculate” or “configure”).

Two types of actions: ask and propose

Within the teacher’s reactions to errors and unexpected strategies focused on the student, we distinguish the actions that seek to gather additional information about the student’s thinking, from the actions in which the teacher directly proposes the student to perform alternative activities. The first ones, which will be identified by the verb *ask*, consist in asking the student for more information about the task done, through questions, or asking him to indicate how she solved the task. These reactions have the purpose of verbalizing the student’s thinking (Boaler & Brodie, 2004; Santagata, 2005; Sarkar Arani et al., 2017; Schleppenbach et al., 2007; Son & Sinclair, 2010; Tulis, 2013). For example, the teacher asks a student to explain how he came to that answer —How did you do it?—, which focuses on what is requested by

the task —What information is requested? — or that relates his ideas to a known concept or procedure —Where is “x” in the diagram?—.

The reactions identified by the verb *propose* are intended for the student to do something additional to the original task so that she can contrast what was done. For example, the teacher proposes to a student who has made a mistake to discuss her solution with a classmate, to solve a new task or to solve an alternative task that induces him to identify his error (Son & Sinclair, 2010).

Reference frameworks to organize teacher reactions

Based on these conceptual references and the review of the literature we have presented, we propose the following frameworks of reference to organize the teacher’s reactions to errors, and to unexpected strategies. These frameworks of reference are conceived as structures that will allow us to apply the criteria for classifying the teacher’s reactions in a structured manner. To develop these frameworks, we have selected those criteria that have been proposed by at least two of the studies we reviewed. The first level distinguishes who is the subject of the action to be performed, student or teacher. The second level corresponds to the group of possible actions that the student or teacher can perform. When the reaction is focused on the student, we will use the distinction between the actions of asking (if the student is asked to provide additional information) and proposing (if the student is asked to perform a new task). When the reaction is focused on the teacher, we will distinguish the reaction as conceptual or procedural, depending on the type of knowledge that the teacher puts into play. In Figure 1, we present our synthesis of these reactions to errors.

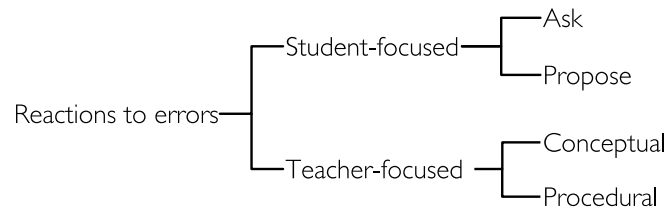


Figure 1. Reference framework for reactions to errors

In the reactions to unexpected strategies, in addition to the above criteria, the literature reports those teacher actions related to evaluate the strategy suggested by the student (Brodie, 2011; Campbell et al., 1998). In Figure 2, we present our synthesis of these reactions to unexpected strategies.

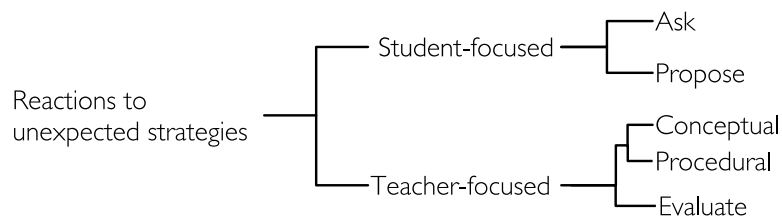


Figure 2. Reference framework for reactions to unexpected strategies

We will rely on these schemes to establish the categories and codes with which we will analyse the responses of the teachers who participated in our study. In particular, we seek to corroborate these frameworks of reference and complement them with a greater level of detail from the evidence.

Research objectives

Based on the notions that we have presented in the previous sections, we establish the following objectives of this study.

1. To check that the frameworks of reference allow organizing the reactions of the mathematics teachers to students' errors and unexpected strategies.

2. To identify similarities and differences in the reactions of math teachers to students' errors and unexpected strategies

Method

The participants of this study were in-service mathematics teachers who had just started a postgraduate training program. A questionnaire was designed that, based on the model of the curriculum proposed in the program, could be used to describe and characterize their classroom implementation practices. Next, we present the context in which the study was carried out, the description of the sample of teachers and the phases of data collecting, coding and analysis.

Context and sample

The sample consisted of 94 mathematics teachers from public and private secondary schools in Bogotá, Cundinamarca and Tolima (Colombia). Slightly over half of the group (53%) were men, most of them (85%) worked in public schools and 86% of them had more than five years of experience. The data was collected through a questionnaire that was answered by all the teachers who participated in the postgraduate program between 2014 and 2018. The responses were collected at the beginning of the program, in order to avoid program influence on the teachers' responses. Therefore, this was a convenience sample of teachers interested in improving their teaching practices.

The training program they just started covers the planning, implementation and evaluation of mathematics curricular designs. In this program, teachers are expected to develop deep pedagogical knowledge on mathematical contents oriented to support their decisions for lesson planning and implementation (Authors, 2018).

Data collection

We designed a questionnaire in which the teachers reported what they did during the development of a recent lesson. Being a lesson that they had just implemented, the information provided was reliable (Desimone, 2009; Ross, McDougall, Hogaboam-Gray, & LeSage, 2003). We did not ask for teachers' opinions; we asked them to report on the actions they actually performed. Some of them used evidence of the students' work to answer some of the questions. The selection of the topic and the group of students was left at the discretion of the teacher. The questionnaire items that we consider in this paper are the following.

1. Did your students make errors when they tried to solve the tasks? If you answered yes to the previous item, how did you react to this situation?
2. Were there any students who solved a task differently than what you explained in class? If you answered yes to the previous item, how did you react to this situation?

These items went through multiple reviews and pilot tests were conducted with volunteer teachers who were interviewed to verify possible interpretations of the questions. Teachers answered individually, without interaction with the researchers, by filling an online form. They had no limited time to answer.

Data coding and analysis

Of the 94 teachers that answered the questionnaire, 85 reported that at least one student made an error and 54 indicated that at least one student employed unexpected strategies. The mathematical content and the school level of the group in which the class took place were not the focus of attention for coding. Our coding focused on the actions that were part of the teacher's reaction, without referring to a specific mathematical content (Hiebert et al., 2003).

Teachers' responses were coded by text segments, that is, by teacher phrases that refer to a

single action that is part of their reaction. Therefore, the same answer could be coded with more than one code if the teacher mentioned different actions in his answer and, consequently, his answer was separated into different text segments.

We found answers composed by up to six text segments. For example, in the answer “I gave them orientations and asked them questions about the issue so they could solve it,” we have two text segments. The first text segment “gave them orientations” is focused on teacher actions; the second, “I asked them questions about the subject so they could solve it”, is focused on student actions.

Based on the frameworks of reference, three researchers, separately, coded the responses. From this first coding, each researcher made adjustments to the code structure of the reference frameworks and complemented them with additional codes when the existing ones were insufficient or when they could be further refined. Then, in discussion sessions, the researchers compared their new code structures and reached agreements to formulate a single organization of these codes, both for errors and for unexpected strategies.

With the new code structures, the researchers performed a second coding. Reliability analyses were performed among the researchers using the Kappa coefficient to determine the consistency between them. A Kappa coefficient of 0.87 was obtained ($p < 0,05$) and the average percentage of agreement among researchers was 96%. The differences between the researchers were resolved in a discussion of the results, which included the criteria used and more detailed descriptions of the codes.

Once all the text segments were coded, we proceeded to calculate the proportion of each of the codes over the total of text segments. Any of the text segments could be coded at least in the first two levels contemplated in the frameworks of reference: reaction centred on the

teacher or the student on the first level; and, for the second level, type of conceptual or procedural knowledge, if the reaction was centred on the teacher, and ask or propose, if the reaction was centred on the student. In the case of teacher-centred reactions in unforeseen strategies, the second level also included evaluation of those strategies.

Since the text segments could be encoded at least in the first two levels, the percentages of the text segments encoded in those levels add up to 100%. However, when refining the levels, it may happen that the percentages do not sum 100%, as not all text segments contain enough information to code them with the refined codes.

Results

Next, we present the results obtained for each research objective. We first show the structure of the reactions to the two stimuli—errors and unexpected strategies—and the percentages of each type of reaction, providing examples of the teachers' reactions. Then, we present the similarities and differences in teachers' reactions depending on the stimuli.

Teachers' reactions to students' errors

In Figure 3, we present the structure of the teachers' reactions to the students' errors and the respective percentages of the answers.

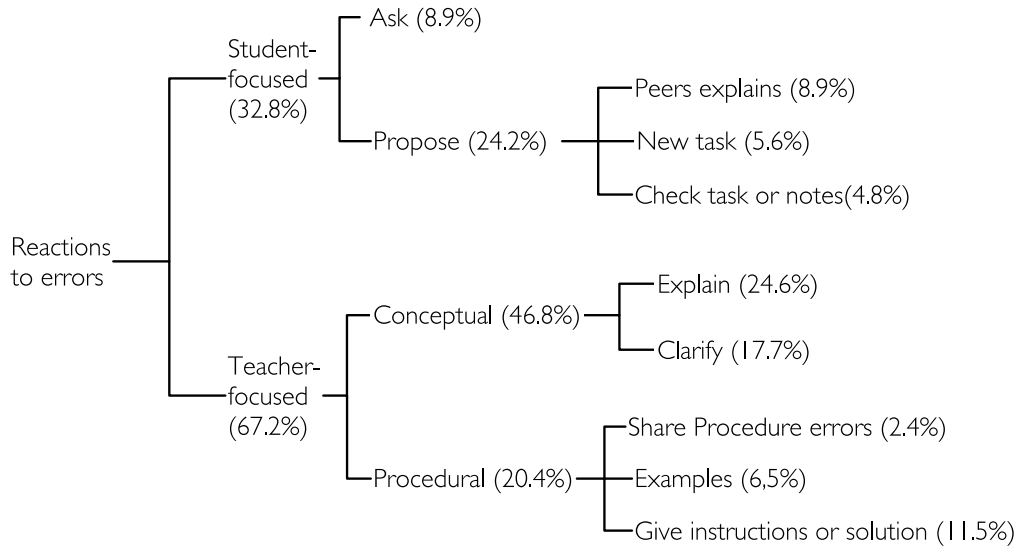


Figure 3. Structure and percentages of the teacher's reactions to student errors

About one-third (32.9%) of the reactions to errors were student-focused, being teacher-focused about two-thirds (67.1%). In the first of these categories, we identified those reactions related to asking students questions to gather additional information (8.9%) and those in which they proposed to do something new (24.2%). Within the Ask category we found questions aimed at identifying the difficulty in the student, seeking that the students express their opinion and definitions of the mathematical concepts involved in the solution. Examples of this type of reaction are: “I asked them questions to find the difficulty”, “I asked them which solution they considered correct” and “I asked the students the definition of each trigonometric ratio”. The Propose category was subdivided taking into account if the student is asked to explain to her/his classmates what she/he did (13.79%), if new more basic or similar tasks are proposed (5.6%) and if she/he is asked to review what they did or review their notes (4.8%). For example, the latter case corresponds to answers such as “[I asked him] to do the exercises again”.

The teacher-focused reactions to errors were organized according to the type of knowledge involved: conceptual (46.8%) and procedural (20.4%). Within the conceptual reactions, the explanations made by the teacher dominate (24.6%). These explanations can consist in presenting the subject in different ways (different contexts, feedback or reinforcing the theme or concepts), explaining the same (but with more detail) or explaining the specific situation. This is the case of answers such as “I tried to explain them more thoroughly” and “I looked for another strategy to explain the issue”. Teachers also reacted by clarifying students doubts, solving questions or solving the task with the students (17.7%). For example, a teacher said “[I used] different words to clarify doubts”. In the procedural reactions, there are actions aimed at sharing calculation or procedure errors with the whole group (2.4%), giving examples with similar cases (6.5%), and giving specific instructions to solve the task or give the correct solution (11.5%). The latter is the case of answers such as “write the beginning of the process so that they can finish the rest of the procedure”.

In summary, these results show that the majority of teachers who participated in this study reacted to errors with actions focused on their own performance (67.1%): They apparently believe that offering new explanations or clarifying doubts is what they should do to help the students overcome their errors. When teachers’ reactions focus on the student, they slightly prefer to propose new tasks, and the actions focus on helping the students to assist other students to overcome the errors.

Teachers’ reactions to students’ unexpected strategies

In Figure 4, we present the structure of the different reactions of teachers to unexpected strategies and indicate the percentage of each response.

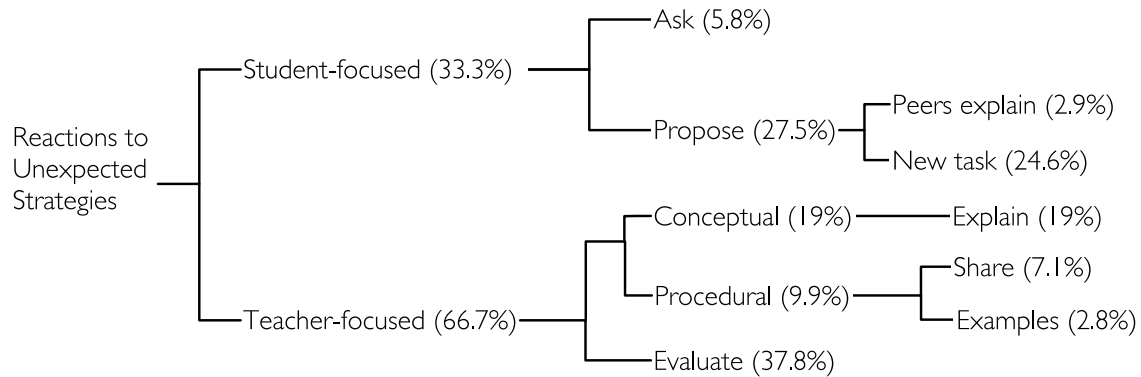


Figure 4. Structure and percentages of teachers' reactions to students' unexpected strategies

In reactions to unexpected student-centered strategies (33.3%), we found that in a small portion the teacher asks students questions so that they can express their opinion or for them to explain the advantages and disadvantages of the new strategy. (5.8%). Examples of these responses are “I asked him how he solved it” and “I asked the group about the advantages and disadvantages of the partner method.” Likewise, in this category, the teacher makes different types of proposals to students (27.5%): they propose to explain the strategy to their classmates (2.9%) and propose new situations that confirm the validity of the strategy (24.6%). For example, the response “I suggested to the student to show his strategy to make different possibilities known” is representative of the proposal aimed at explaining the strategy to his classmates.

Teachers' reactions to unexpected strategies teacher-centered (66.7%) were coded as focused in conceptual knowledge (19%), focused in procedural knowledge (9.9%), or evaluation-related (37.8%). Within the conceptual reactions, we find the explanations made by the teacher in order to show that there are different strategies to solve the task. An example of this type of response is “I showed [to students] why there are several ways to get to the same result.” In the procedural reactions we find the reactions of sharing the new procedure with

the whole group (7.1%). This is the case of answers such as “I present it to the group as an alternative solution”; and give examples to students of other cases in which the strategy works (2.8%).

In the reactions related to the evaluation (37.8%), the teacher determines if the new strategy proposed by the students is adequate. For example, a teacher said: “I check the strategy to see that it is correct” and another said: “I showed [to students] where there was a mistake”.

In summary, these results show that the majority of teachers react to unexpected strategies with actions focused on their own performance (66.7%), especially oriented to evaluate proposals for new strategies before sharing them with all the group (37.8%). The type of knowledge dominant is conceptual (19%) and is evidenced by means of explanations given by the teacher.

Similarities in teachers’ reactions to student responses

We found similarities in teachers’ reactions to errors and unexpected strategies. The first finding is the similarity of proportions in the reactions focused on the student (32.9% and 33.3%, respectively) and on the teacher (67.1% and 66.7%, respectively). When comparing proportions, we found that there is no statistically significant evidence to reject the hypothesis of equality of these proportions ($P= 0.009$).

In the student-focused reactions, we observe that, for both stimuli, the percentage of ask reactions (8.9% and 5.8%, respectively) is less than one half of the propose reactions (24.2% and 27.5%, respectively).

In the teacher-focused reactions, we observe that, in both stimuli, the percentage of conceptual reactions (46.8% and 19%, respectively) is very close to double the percentage of procedural reactions (20.4% and 9.9%, respectively).

This analysis of similarities provides evidence to assert that reactions to errors and unexpected strategies are two sides of the same coin. In both cases, the teacher reacts based on his planning, his experience, his beliefs and his knowledge to respond to the student's thinking. In this study, we show that these reactions are essentially the same, regardless of the type of stimuli that generates them.

For the group of teachers who participated in this study, these results show a tendency to react to errors and unexpected strategies in a teacher-focused way. In particular, this group of teachers focused their answers on the explanations and justifications of the teacher and limited the opportunities for students to discuss their errors and strategies.

Differences in teacher reactions to student responses

Teachers' reactions differ according to the stimulus only when a high level of detail is reached in the coding. At that level of detail, we found relevant differences in three aspects. The first is that, in reactions to unexpected strategies, evaluating percentage is bigger than conceptual and procedural percentages. The second aspect is the explanations. In reactions to errors, this response represents slightly more than a half of the conceptual reactions. However, in the reactions to unexpected strategies, the explanations are less used by the teachers, who are the ones who disseminate the students' proposals. The last difference between the reactions refers to explaining to the other students. In reactions to errors, this reaction is more frequent than in reactions to unexpected strategies.

Discussion

In this study, we identified and structured the reactions of practicing math teachers to errors and unexpected strategies of their students. The participating teachers were secondary and

middle school teachers who were starting a training program. These teachers answered questions from a questionnaire that inquired about their reactions to the errors and unexpected strategies of a particular group of students in a recent class, on a specific math topic. These frames the study in teacher reactions in real classroom situations.

We built frameworks of reference to organize teachers' reactions based on the results of other studies (Santagata, 2005; Sarkar Arani et al., 2017; Schleppenbach et al., 2007; Son, 2013, 2016; Son & Crespo, 2009; Son & Sinclair, 2010; Tulis, 2013). These frameworks of reference have as central axis the reactions focused on the students and focused on the teacher. Each of these categories is broken down, in turn, into two, depending respectively on whether the reaction is a question or a proposal, if it is student-centered; and the type of conceptual or procedural knowledge, if it is teacher-centered. By coding the teachers' responses, we managed to organize their reactions with these frameworks and new categories emerged from the evidence with which we complemented and refined these frameworks of reference. With this, we achieved our first objective, in which we tried to corroborate whether the reference frameworks allowed us to organize the teachers' reactions to students' errors and unexpected strategies.

For our second aim, we set a joint analysis of teachers' reactions to errors and unexpected strategies. Our results show certain aspects of teachers' reactions that, being common for errors and strategies, suggest general beliefs and tendencies of teachers. Therefore, a contribution of this study is to show that these reactions of mathematics teachers are independent of the stimulus that generated the reaction, error or unexpected strategy, and that, therefore, even if they are immediate reactions that arise in the classroom spontaneously, they obey certain general patterns of teacher behavior.

These results are consistent with those obtained by Son (2013), who found that pre-service teachers, in the face of student errors, do not usually listen to their students and prefer to give information and repeat the procedure until the students identify their errors. Similar results were obtained in studies on student reactions to strategies (Son & Crespo, 2009), in which most pre-service teachers focused their answers on explaining why the strategy worked.

Son and collaborators (Son, 2013; Son & Crespo, 2009) assert that teachers' reactions to errors and unexpected strategies could be due to the fact that the subjects of their studies were pre-service teachers. Given that our sample was made up of in-service teachers, a contribution of this study is to show that these reactions do not differ if they are pre-service or in-service teachers. Teachers' beliefs about how mathematics is taught and learned seem to be an explanation of their reactions to errors and unexpected strategies, independently of whether they are pre-service teachers or in-service teachers (Cross, 2009).

Unlike other studies (Sarkar Arani et al., 2017; Tulis, 2013), in this work, no negative reactions from teachers have been identified (e.g., ignore the error or criticize the student). Although this type of response usually corresponds to a very small percentage of all possible answers, this type of absence could seem to show that the teachers of the sample studied have beliefs about learning and teaching different from those from other studies. This is an issue that could be studied in the future.

Some authors question the reliability and validity of self-reports to investigate teachers' practices. However, these instruments prove to be very reliable when teachers are asked about specific topics of their classroom practices. In fact, Desimone (2009) has shown, on the basis of several studies, that surveys that ask behavioral and descriptive questions, not evaluative, have been shown to have good validity and reliability. In addition, it turns out to be a

powerful instrument to collect information from large groups of teachers (Uysal, 2012). In this study, we asked the participating teachers about what happened in a recent class and about two specific aspects, and we obtained information of good quality.

Our results also confirm the importance of math teacher training programs to help teachers interpret and respond to unexpected situations in the classroom, assuming that these reactions are of great importance in learning. This information is useful for teacher trainers. It tells trainers that teachers must incorporate better reactions in their teaching. In particular, teacher training programs should train teachers in helping students overcome their difficulties, through their reactions to students' errors and unexpected strategies.

Finally, this study also has implications for future lines of research. We intend to continue with studies that compare teachers' reactions to errors and unexpected strategies, before and after they go through training programs, to show to what extent these reactions are modified. We also intend to deepen the relationship between the reactions identified and the types of teachers' beliefs, an issue that will be of great interest for the improvement of in-service teacher training programs.

References

- Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Knowing mathematics for teaching. In R. Strässer, G. Brandell, & B. Grevholm (Eds.), *Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education* (pp. 159-178). Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciences.
- Bishop, A. J. (2008). Decision-making, the intervening variable. In P. Clarkson & N. Presmeg (Eds.), *Critical issues in mathematics education* (pp. 29-35). Dordrecht: Springer.

- Boaler, J., & Brodie, K. (2004). The important nature and impact of teacher questions. In Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Toronto, Ontario, Canada.(pp. 774-782).
- Brodie, K. (2011). Working with learners' mathematical thinking: Towards a language of description for changing pedagogy. *Teaching and Teacher Education*, 27(1), 174-186. doi:<https://doi.org/10.1016/j.tate.2010.07.014>
- Campbell, P. F., Rowan, T. E., & Suarez, A. R. (1998). What criteria for student-invented algorithms. *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*, 49-55.
- Authors (2018). In *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares [Training of mathematics teacher and classroom practice: concepts and curricular techniques]*.
- Clough, M. P., Berg, C. A., & Olson, J. K. (2009). Promoting effective science teacher education and science teaching: A framework for teacher decision-making. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7(4), 821-847. <https://doi.org/10.1007/s10763-008-9146-7>
- Cross, D. I. (2009). Alignment, cohesion, and change: Examining mathematics teachers' belief structures and their influence on instructional practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(5), 325-346. doi: 10.1007/s10857-009-9120-5
- Desimone, L. M. (2009). Improving impact studies of teachers' professional development: Toward better conceptualizations and measures. *Educational Researcher*, 38(3), 181-199. doi:<https://doi.org/10.3102/0013189X08331140>
- Authors (2018). Universidad de los Andes.

- Authors (2018). In *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares [Training of mathematics teacher and classroom practice: concepts and curricular techniques]*.
- Herbst, P., Chazan, D., Kosko, K. W., Dimmel, J., & Erickson, A. (2016). Using multimedia questionnaires to study influences on the decisions mathematics teachers make in instructional situations. *ZDM*, 48(1), 167-183. doi:10.1007/s11858-015-0727-y
- Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., . . . Kersting, N. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study*. Washington, DC: National Center for Education Statistics.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal For Research in Mathematics Education*, 18(1), 3-14. DOI: 10.2307/749532
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. In J. Kilpatrick, L. Rico, & P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.
- Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, 91(1), 175-189. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.1.175>

- Santagata, R. (2005). Practices and beliefs in mistake-handling activities: A video study of Italian and US mathematics lessons. *Teaching and Teacher Education*, 21(5), 491-508. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2005.03.004>
- Sarkar Arani, M. R., Shibata, Y., Sakamoto, M., Iksan, Z., Amirullah, A. H., & Lander, B. (2017). How teachers respond to students' mistakes in lessons. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 6(3), 249-267. doi:10.1108/IJLLS-12-2016-0058
- Schleppenbach, M., Flevares, L. M., Sims, L. M., & Perry, M. (2007). Teachers' responses to student mistakes in Chinese and US mathematics classrooms. *The Elementary school journal*, 108(2), 131-147. <https://doi.org/10.1086/525551>
- Son, J.-W. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics*, 84(1), 49-70. Retrieved from <http://tinyurl.com/m87trfs>
- Son, J.-W. (2016). Moving beyond a traditional algorithm in whole number subtraction: Preservice teachers' responses to a student's invented strategy. *Educational Studies in Mathematics : An International Journal*, 93(1), 105-129. doi:10.1007/s10649-016-9693-8
- Son, J.-W., & Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(4), 235-261. doi: 10.1007/s10857-009-9112-5
- Son, J.-W., & Sinclair, N. (2010). How Preservice Teachers Interpret and Respond to Student Geometric Errors. *School Science and Mathematics*, 110(1), 31-46. Retrieved from <http://tinyurl.com/qzvw6my>.
- Star, J. R. (2005). Reconceptualizing Procedural Knowledge. *Journal, for Research in Mathematics Education*. 36(5), 404-411. doi: 10.2307/30034943

5. ARTÍCULO 3: EFFECTS OF A PROFESSIONAL DEVELOPMENT
PROGRAM ON TEACHERS' CURRICULAR PRACTICES

Studies in Educational Evaluation

Effects of a professional development program on teachers' curricular practices --Manuscript Draft--

| | |
|------------------------------|--|
| Manuscript Number: | |
| Article Type: | Review Article |
| Keywords: | program evaluation; curricular practices; implementing; lesson planning; training teachers |
| Corresponding Author: | Andrés Pinzón Universidad de los Andes Bogota, Colombia COLOMBIA |
| First Author: | Andrés Pinzón |
| Order of Authors: | Andrés Pinzón Pedro Gómez María José González |
| Abstract: | The professional development of teachers is an important component of the quality of education in Colombia. However, few systems for monitoring and analyzing the quality and impact of teacher professional development program have been created. In this article, we present the effects on curricular practices of a professional development program for in-service mathematics teachers. We compare the teacher's curricular practices of planning, implementation and assessment, before and after participating in the program. We found that the professional development program shows a statistically significant and positive effect on planning, implementing and assessment practices. These results serve as evidence of teacher training policy in terms of changes in classroom practices |
| Suggested Reviewers: | Vilma Mesa University of Michigan vmesa@umich.edu She is currently associate editor of Educational Studies in Mathematics Martin Rothland University of Siegen martin.rothland@uni-siegen.de He has published an article in your journal that relates to our paper |
| Opposed Reviewers: | |

Effects of a Professional Development Program on Teachers' Curricular Practices

Pinzón, Andrés^a. ^aFacultad de Educación, Universidad de los Andes. Carrera 1 N° 18A – 12 Bogotá, Colombia. aa.pinzon363@uniandes.edu.co, ORCID: 0000-0002-6463-8383

Gómez, Pedro^a. ^aFacultad de Educación, Universidad de los Andes. Carrera 1 N° 18A – 12 Bogotá, Colombia. argeifontes@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9929-4675

González, María José^b. ; ^b Science Faculty, Universidad de Cantabria, Av. Los Castros s/n, 39005 Santander, Spain. mariaj.gonzalez@unican.es, ORCID: 0000-0003-2519-5812

Corresponding author

Andrés Pinzón

Facultad de Educación, Universidad de los Andes

Bloque Ña Casita Rosada, Oficina 309

Carrera 1 N° 18A – 12 Bogotá, Colombia

(+571) 3394949 ext 3290

aa.pinzon364@uniandes.edu.co

Declarations of interest

Declarations of interest: none.

Funding

This work was supported by Francisco José de Caldas Fund (Colciencias, Colombia), within the framework of the research program 64639, call for projects 808 of 2018, project Acometer la inequidad a través de la educación: matemáticas en la educación básica y media [Addressing inequity through education: mathematics in basic and secondary education], 2019-2021.

EFFECTS OF A PROFESSIONAL DEVELOPMENT PROGRAM ON TEACHERS' CURRICULAR PRACTICES

The professional development of teachers is an important component of the quality of education in Colombia. However, few systems for monitoring and analyzing the quality and impact of teacher professional development program have been created. In this article, we present the effects on curricular practices of a professional development program for in-service mathematics teachers. We compare the teacher's curricular practices of planning, implementation and assessment, before and after participating in the program. We found that the professional development program shows a statistically significant and positive effect on planning, implementing and assessment practices. These results serve as evidence of teacher training policy in terms of changes in classroom practices.

Keywords: program evaluation, curricular practices, implementing, lesson planning, training teachers.

INTRODUCTION

The quality of education depends largely on the training of teachers (Bayar, 2014; Borko, 2004). Therefore, the professional development of teachers is an important component of the quality of education in a country (Desimone, Porter, Garet, Yoon & Birman, 2002; Guskey, 2002). Countries and regions invest millions of dollars in the professional development of their teachers to improve the quality of education they offer (Bautista & Ortega-Ruíz, 2015; Bayar, 2014). However, few education agencies have created good monitoring systems for teachers' professional development programs, even less systems to analyze the quality and impact of

these programs. Without an idea of what is working and why, it is difficult to implement professional development that can be improved based on evidence (Darling-Hammond, Hyler & Gardner, 2017).

Colombia is not the exception. In recent years, the Ministry of National Education (MEN) developed a teacher training policy called “Teaching Excellence.” It is an initiative that seeks to improve the quality of the curricular practices of teachers, and to contribute to the development of the basic skills of students in the subjects of mathematics, language, and natural and social sciences (MEN, 2015). For this purpose, the ministry fully funded master’s programs focused on curricular practices to teachers of these subjects. The program has benefited 7193 teachers with scholarships for studies in 22 universities. More than 50 papers from outstanding degree projects of these teachers have been published (MEN 2018). However, there is no assessment of this initiative or of the participating master’s programs, in terms of improvement in the curricular practices of the teachers or in the outcomes of their students. These assessments are invaluable as they provide information not only on the weaknesses, strengths, and results of the training programs, but also on the needs of teachers for future professional development programs (Uysal, 2012).

The assessment of these types of professional development is a concern in the academic community. The field of research on teacher training asks how professional development program developers can demonstrate the effectiveness of their programs (Buisse, Castro & Peisner-Feinberg, 2010; Chalmers & Gardiner, 2015; Darling-Hammond et al., 2017; Desimone, 2009; Kennedy, 2019). In this article, we address this question by identifying the effects on math teachers’ curricular practices of a professional development program focused on curricular practices. We compare teachers’ curricular practices before and after participating in the program. We rely on their answers to a questionnaire about one of their most recent classes.

We organize this article in four sections. In the first section, we place the study in the context of the literature on professional development and put forward our conceptual framework. In the second section, we present the methodology and, in the third, the results. Finally, we present a discussion section and suggest some implications of the study.

PROFESSIONAL DEVELOPMENT PROGRAMS OF TEACHERS

The professional development of teachers has multiple forms. Six types of professional development are identified in the literature: professional development programs, teacher collaboration, university courses, professional conferences, informal communication and individual learning activities. We understand a professional development program as an organized activity with the purpose of learning about and improving the teaching and learning of students (Akiba & Liang, 2016).

In the literature, we find different studies that characterize professional development programs. For example, Desimone and Garet (2015) identify characteristics that differentiate effective professional development programs from non-effective ones. An effective professional development program is characterized by a content approach focused on the subject that the teacher teaches, an active learning of its participants, a design consistent with the needs of students and public policies, a sustained duration over time and a collective participation that generates learning communities.

Kennedy (2019) classifies professional development studies according to her hypotheses about what teachers need to learn. The most common hypotheses involve specific procedures (teachers are trained in a particular teaching technique), content knowledge (focus on both subject and pedagogical content) or strategies and ideas (tools are presented for the teacher to make decisions in the classroom).

Evaluation of professional development programs

Evaluation of professional development programs can be carried out at different levels (Guskey, 2000). The first of these levels is the perception that participants have of their experience in the program. It is a measure of the participants' satisfaction with the program. This information can be collected with questionnaires or interviews with participants. The second level is the learning of the participants. Its focus is to measure the knowledge and skills that participants developed. The information can be collected with a standardized test or portfolios that can document the participants' learning. Most training program assessments are located in these first two levels. The third level is the effect of the program at the institutional level. It is the perception that third parties (colleagues, students, managers, parents) have of the effect of the program on the actions of the participants in their institutions. This information can be collected with questionnaires or interviews with third parties. The fourth level is the changes in the practices of the participants. These changes are a consequence of the knowledge and skills developed in the training program. The information for this level usually comes from direct observations or by reviewing videos. The fifth, and last level, is student learning, as an effect of the program on the students of the participating teachers. In this case, student learning measures not only include cognitive indicators of student performance; It is also possible to consider affective outcomes (attitudes and dispositions) and psychomotor outcomes (skills and behaviors). Although hundreds of studies have been developed at this level, very few have sufficient evidence (Yoon, Duncan, Lee, Scarloss & Shapley, 2007).

Finally, Chalmers and Gardiner (2015) classify the results of program assessment into three broad categories: teacher-centered (satisfaction, knowledge and practices), student-centered (school achievement or acquisition of skills) or institutional (conditions for the improvement of teaching and learning).

Curricular practices

The term curricular practices can be understood in different ways. In this work, we link this term to the notion of curriculum. We assume that the curriculum refers to a training plan that involves, on the part of the teacher, an initial planning of the experiences that the students will find, an implementation associated with the interaction in the classrooms during the teaching processes and an assessment of the achievements (Travers & Westbury, 1989). Consequently, curricular practices are those actions of the teacher that allow the curriculum to take place. Among the multiple actions covered by this perspective, we focus on three of them: planning, implementation and assessment.

Sardo-Brown (1996, p. 519) defines planning as the teaching and learning decisions that the teacher makes prior to the execution of his plans in the classroom. Teacher's planning can be recorded in a written document or may simply done it mentally. The planning gathers and orders the decisions that the teacher could make around the teaching and learning during a lesson. Schoenfeld (2015) defines this plan or script as the image of the lesson.

The implementation of the curriculum refers to the moment in which the teacher puts into play his planning in the classroom. Remillard and Heck (2014) define implementation as the interactions between teacher and students around the tasks of each lesson: it is an emerging curriculum that the teacher builds with the students. The implementation of the curriculum implies a transformation of what was planned since the teacher's performance must adapt to the complexity of the events that happen in class throughout a lesson (Cho, 1998, p. 21).

Finally, the assessment practices refer to the comparison that the teacher can do between the planned and the implemented. It allows the teacher to reflect and make decisions about what happened as she or he expected and about what is necessary to modify for future implementations (Authors, 2019). This assessment includes both the learning achieved by the students and the assessment of the teacher's performance.

Model of didactic analysis as the framework of a professional development program

The didactic analysis model proposes a conceptualization of the activities that the math teacher carries out to plan, implement and evaluate teaching units (Authors, 2002, 2007, 2018). In describing the procedure that a teacher would be expected to perform when designing, implementing and evaluating a teaching unit, this model describes, in a systematic and sequenced manner, the actions of that ideal teacher. Based on a functional vision of math teacher training (Authors, 2008), it is possible, then, to identify the knowledge and skills that are necessary to materialize those actions (Authors 2006). This knowledge and skills characterize their skills in planning, implementation and assessment of teaching units. This is the didactic knowledge that is expected to be developed in a teacher training program (Authors, 2012). In this way, the didactic analysis model allows structuring the design and implementation of professional development programs for math teachers (Authors, 2013).

The didactic analysis model is configured around four analyzes—corresponding to each of the dimensions of the curriculum—which make up a cycle: conceptual, cognitive, formative and social. Each of these dimensions brings into play pedagogical concepts based on which teachers in training can identify and organize the multiple meanings, concepts, procedures, representation systems and phenomena of a mathematical topic (conceptual dimension); select the relevant meanings for instruction and anticipate the performance of students when addressing tasks in terms of possible errors and solution strategies (cognitive dimension); select resources and materials, and select and organize the tasks that can contribute to the achievement of the learning objectives and interactions (formative dimension); and design the assessment of the students and, based on the information that emerges from the implementation, the assessment of teaching (social dimension).

The didactic analysis model shares processes and ideas with most of the models and schemes that have been proposed for curricular practices. Most of these models focus on learning objectives (e.g., John, 2006), the role of teaching activities and assessment (e. g., Little, 2003; Milkova, 2012), the teaching and learning cycles (Simon, 1994, 1995, 2014; Tzur, Simon, Heinz & Kinzel, 2001), or include subject matter analysis (e. g., Causton-Theoharis, Theoharis & Trezek, 2008; Rusznyak & Walton, 2011).

Professional development and effects on classroom practices

An operational theory of how participation in training programs works and influences the results of teachers and students has been formulated (Desimone, 2009; Kennedy, 2016). First, teachers experience effective professional development. Second, this participation increases

the knowledge and skills of teachers and/or changes their beliefs. Third, teachers use these new knowledge, skills and beliefs to change their curricular practices. Finally, these changes in their practices encourage student learning. Other authors discuss different types of impact of training programs (Ingvarson, Meiers & Beavis, 2005). These include the impact on teacher knowledge and practice, student learning and teacher effectiveness. However, the effects of any teacher training program depend largely on the motivation of teachers to learn and change their practice (Kennedy, 2016).

RESEARCH QUESTION

Evaluating the professional development programs of teachers is important because it allows, among other things, to appreciate the relevance of the design and implementation of the program to the training needs and assess whether the planned changes in the curricular practices of the participants have been achieved (Ruiz Bueno & Tejada Fernández, 2001). The assessment of a professional teacher development program will allow us to address problems in the literature on teacher training and its curricular practices. In particular, for the purposes of this article, it will allow us to address the following question: what effects on curricular practices occur in math teachers after participating in a professional development program?

METHOD

The participants of this study were practicing secondary mathematics teachers who completed a professional development program at the graduate level. A questionnaire was designed, based on the didactic analysis model, to describe and characterize their planning, implementation and assessment practices of the curriculum. Next, we present the context in which the study was carried out, the description of the participating teachers, and the phases of information gathering, coding and analysis.

Mathematics teacher professional development program

The professional development program that is being studied is the master's degree in Mathematics Education. It is a master's degree focused on curricular practices for in-service secondary and high school mathematics teachers. This program has been supported by the Colombian Government's teaching excellence initiative. In each semester, two consecutive courses are taken, and each course has a duration of nine weeks. The content of each course refers to one aspect of the didactic analysis model.

At the beginning of the program, the participants are organized in groups of 3 or 4 people. Each group works on a specific mathematical topic. Each group has a tutor that accompanies it throughout the entire program. His role is to comment on the work of the group in each of the activities. The groups also receive permanent support from the coordinator who is in charge of program management.

The topics are selected based on the courses that the teachers in training expect to be in charge in the second year, in order to implement their curriculum design proposal. These topics are articulated with the schools' study plans, and the national curricular guidelines and standardized tests. Each group carries out a cycle of didactic analysis model on its subject throughout the two years of the program (see Figure 1). At the end of the first five courses, the groups

produce a curriculum design for their topic in which they describe its conceptual structure, systems of representation and phenomena; the learning expectations and the students' limitations; the anticipation of the actions of students when addressing tasks; the sequences of tasks that contribute to the achievement of learning expectations and to overcome learning limitations; and, finally, the assessment of learning and teaching (planning in Figure 1). Between the fifth and sixth courses, the groups work on the implementation of the teaching unit. There, the focus is the interaction between students and between teacher and students (implementation in Figure 1). Between the sixth and seventh course they focus on the collection and analysis of information that emerges from the implementation (assessment in Figure 1) and, in the last course, on the production of the final report.

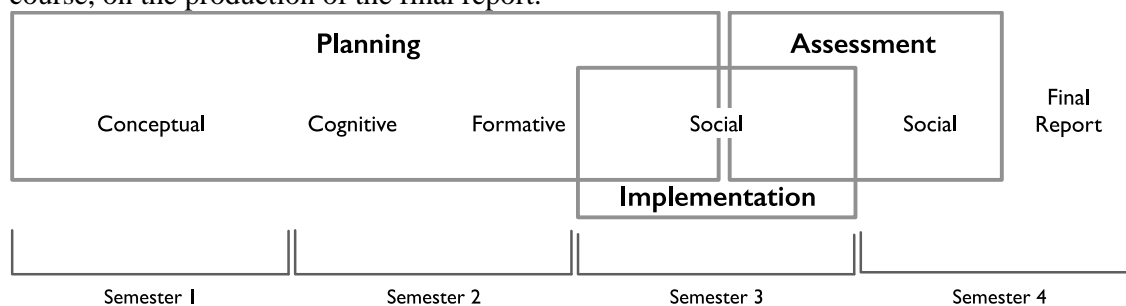


Figure 1. Curriculum practices and didactic analysis cycle in the professional development program

Each course is set up around four activities (two weeks per activity). For example, in the course corresponding to the cognitive dimension, the activities correspond to (a) formulation of learning expectations, (b) difficulties and errors of the students when addressing the mathematical content, (c) learning trajectories and (d) coherence of the set of learning and affective expectations. Throughout the two weeks of an activity, the groups interact with trainers and tutors in carrying out their work. At the end of an activity, the groups attend a 4-hour face-to-face session. In total, the program includes 920 hours of professional development.

Groups are expected to inquire into the characteristics of their topic in relation to the activity's requirements, make proposals to solve the activity, compare their points of view and reach agreements that allow presenting the results of their work. In this way, a collaborative environment is enhanced in which each member of the group contributes to the learning of their peers.

In addition to promoting interdependent learning among members of a group, the program encourages interaction between students through the comments and criticisms that each student makes, in each activity, to the final work of another group. Each group receives comments from at least three peers. Groups can react to these individual comments in the following face-to-face session. Another interaction with peers arises from the discussions generated by the presentations of each activity. Once the groups finish their presentations, the colleagues make comments and criticisms of their work. The groups react immediately resolving the concerns that may arise at that time or that have been identified in the individual comments (Authors, 2020).

Participants

The participants in the program were mathematics teachers from official and private secondary and high schools in Bogotá, Cundinamarca and Tolima (Colombia). Of these, 82% had specific training in mathematics education (bachelor's degrees), 85% taught in schools in the public sector and 86% had more than 5 years of experience.

Information Collection

The information needed for this study was collected through a questionnaire that was answered by the participants between 2014 and 2018. The responses were collected at the beginning of the program (entrance), and six months after finished (exit). We got answers from 51 of these teachers. This represents a response rate of 71%. This is because the participation was voluntary and by email, and the teachers no longer had any link with the program. We considered valid those questionnaires that had at least 80% of the complete information. Those questionnaires in which we identified non-response biases were discarded. In total, we identified 44 entrance/exit valid questionnaires. Of these 44 valid questionnaires, it was necessary to eliminate a questionnaire from a teacher who claimed to have participated simultaneously in another training program. Therefore, 43 questionnaires were considered valid for the purposes of this study. This group of 43 teachers has the same characteristics as the original group of 51 teachers, as shown in Table 1.

Table 1
Participants characteristics (percentages)

| | Women | 5 or more years of experience | Working in public schools | With bache- lor's degrees |
|---------------------------|-------|----------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| Answers (51) | 49% | 86% | 82% | 82.3% |
| Valid questionnaires (43) | 50% | 88% | 79.5% | 84% |

The questionnaire is organized in three sections: planning, implementation and assessment. The questionnaire items are open and multiple choice. The planning questions address the documents that the teacher took into account for his design such as the school's study plan and the official documents (use curricular documents), the conceptual structure—concepts, procedures and representation systems—and phenomena of the mathematical topic (conceptual dimension); the learning expectations, possible errors and difficulties, and the different ways of solving a task (cognitive dimension); the possible actions of the students and the teacher, the selection of resources and materials, and the selection and sequencing of the tasks (formative dimension); and finally, the assessment planned in terms of the purpose and form in which it will be carried out (social dimension). The implementation section focuses on three specific issues: the teacher's reactions to students' unexpected strategies and errors, and interactions. The third and last part inquiries about the teacher's use of the information collected in order to assess their students and evaluate the implementation. In Figure 2, we describe the organization of the questionnaire based on the three sections indicated.

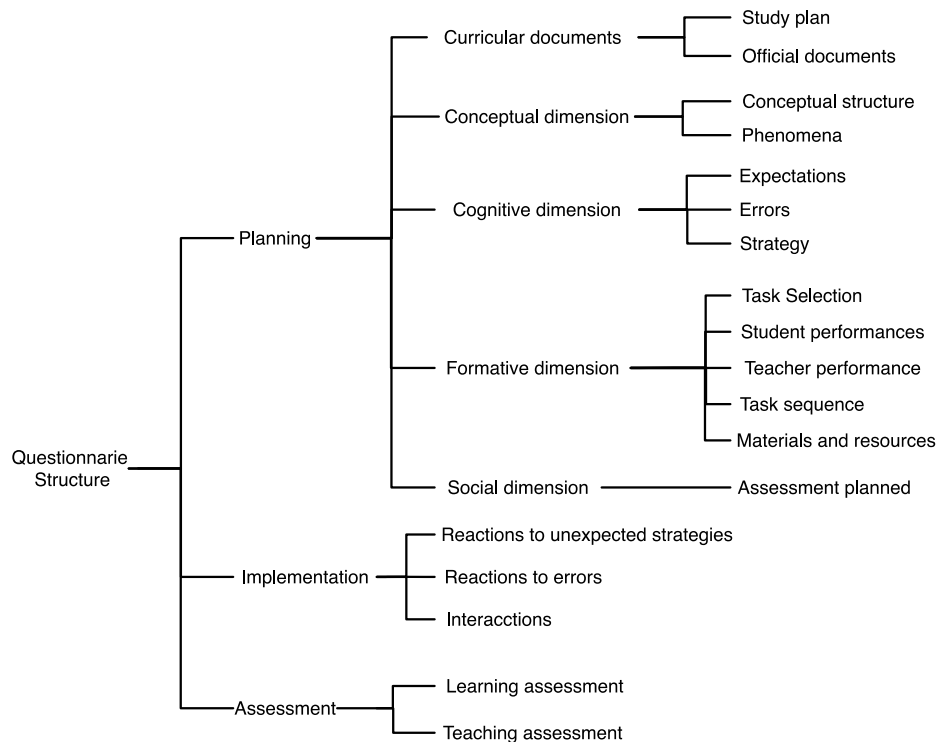


Figure 2. Questionnaire structure

The questions in the questionnaire went through multiple reviews and pilot tests were conducted with volunteer teachers who were interviewed to verify possible interpretations of the questions. To answer the questionnaire, we asked teachers to take the most recent class as a reference. The topic and group of students was at the discretion of every teacher. They were expected to provide information on the planning, implementation and assessment of the selected lesson. Some of them used evidence of student work to answer the proposed questions. The teachers answered the questionnaire individually, through an electronic form, without interaction by the researchers. They had 70 minutes to respond.

Coding and analysis of information

Teachers' responses were coded by text segments. Each text segment is a phrase that refers to a single action. Therefore, the same answer could be coded with more than one code in cases where the teacher mentioned different actions in his answer and, consequently, his answer was separated into different text segments. We found answers formed by a single text segment up to answers formed by six text segments. For example, in a response referring to the use of the school's study plan, a teacher responded, "The contents, objectives and performance". This answer has three text segments that correspond to the codes Contents (for the contents), Expectations (for the objectives) and Assessment (for the performance).

Our coding focused on the evidences of curricular practices. Based on the framework of the didactic analysis model, three researchers, separately, codified each of the responses. From this first coding, each researcher made adjustments to the code structure and complemented them based on the evidence. Then, in a discussion session, the researchers compared their cod-

ings and reached agreements to formulate a single organization of these codes. Reliability analyzes were performed among the researchers: A Kappa coefficient of 0.86 ($p < 0.05$) and an average percentage of agreement between researchers of 92% were obtained. The differences between the researchers were resolved in a discussion of the results, which included the criteria used and the more detailed descriptions of the codes.

Once all the text segments of the teachers' responses were coded, we proceeded to calculate the extent to which these responses represented the achievement of the objectives of the program. To do this, with the support of the academic committee of the program and with a similar procedure to the one just described for establishing the codes, we assigned a weight to each code. These weights represent the relative importance that, according to the expectations of the program, would have the answers of an ideal teacher that has finished the program. For example, for the question, why did you use the information from the school's study plan in preparing the topic? we formulated eight codes. In the table 2, we present the descriptions and weights for these codes.

Table 2

Codes, descriptions and weights for the question Why did you use the information from the school's study plan in preparing the topic?

| Codes | Description | Weights (%) |
|------------------------------|--|-------------|
| Does not answer the question | The teacher does not answer, or s/her answer does not correspond to the question | 0 |
| Expectations | Reference about objectives, standards, general processes or competencies | 30 |
| Assessment | Reference is made to performances, achievements or indicators | 25 |
| Contents | Reference is made to the topics, the order and sequence of the topics, mathematical thoughts or criteria for handling them | 15 |
| Temporality | Moments of the year or times to develop the topics (hours, weeks, cycles, periods) | 10 |
| Methodology | Activities that are proposed in the study plan, resources and / or teaching methods | 15 |
| Institutional | It refers to transversal projects or institutional projects | 5 |

We assigned the highest importance to the "Expectations" and "Assessment" codes. This translates into percentages of 30% and 25%, respectively. These weights are consistent with the purpose of the program: the focus of planning should be the learning of the students rather than the presentation of content. The value of the measurement that corresponds to an answer is the sum of the weights of the codes assigned to it. In the case of a teacher's response "To identify what you want to evaluate at the end of the quarter" the assigned code was "assessment" and its measurement corresponded to 25. Another answer recorded was "For the performances and objectives proposed by the department mathematics". It was coded with "expectations" and "assessment" and its measure corresponded to 55.

This procedure was similarly replicated for groups of questions, in which weights are assigned for each question. For example, the implementation section has the following weights:

30% for teacher reactions to unexpected student strategies, 30% for teacher reactions to student mistakes, and 40% for interactions.

After the measure of each answer was established, we were able to compare the measures of two answers of the same teacher to a question before and after participating in the program and establish the percentage difference between the two. For example, if a teacher's response to the previous question has a measure of 35% in the exit questionnaire and 20% in the entry questionnaire, we can establish that there is a positive difference and that this represents 15 percentage points of progress in achieving the purpose established by the program. Finally, since the same teachers answered the input and output questionnaire, we used the t-Student test for paired data to determine whether the differences were statistically significant or not and, if they were, we calculated the size of the effect with the Cohen's d.

RESULTS

Next, we present for each category (set of questions) the value of the arithmetic mean of the differences between the output and the input, the standard deviation of the difference, the P value of a tail to the right, the rejection or not of the hypothesis of difference of the means equal to zero (the alternative hypothesis is the difference between the output and the input is greater than zero) and the size of the effect, if the hypothesis of equality of the means is rejected.

An effect value for Cohen's d near 0.2 is considered small, an effect close to 0.5 is considered medium and close to 0.8 is considered large (Coe & Soto, 2003). However, as more researchers have presented their findings in the effect size metric, the standard proposed by Cohen appears to be optimistic (Kennedy, 2019). Therefore, a near effect size of 0.5 in educational interventions is considered optimal (Gertler, Martínez, Premand, B. & Vermeersch, 2017).

Planning practices

We present the results obtained for the planning section in table 3.

Table 3
Results in planning practices

| Variables | Mean | Standard deviation | P-value | Rejection of H_0 * | Effect** |
|-----------------------------------|-------|--------------------|---------|----------------------|----------|
| Curricular documents | | | | | |
| Study plan | 7.11 | 22.64 | 0.046 | Yes | 0.24 |
| Official documents | 6.28 | 12.09 | 0.019 | Yes | 0.48 |
| <i>Total curricular documents</i> | 13.39 | 30.3 | 0.001 | Yes | 0.44 |
| Conceptual dimension | | | | | |
| Conceptual structure | 2.98 | 25.43 | 0.25 | No | - |

Table 3
Results in planning practices

| Variables | Mean | Standard deviation | P-value | Rejection of H_0 * | Effect** |
|-----------------------------------|-------|--------------------|---------|----------------------|----------|
| Phenomena | 7.34 | 11.81 | 0.001 | Yes | 0.73 |
| <i>Total conceptual dimension</i> | 8.77 | 22.51 | 0.005 | Yes | 0.55 |
| Cognitive dimension | | | | | |
| Expectations | -0.45 | 20.23 | 0.43 | No | - |
| Errors | 10.93 | 39.65 | 0.035 | Yes | 0.38 |
| Strategy | -1.38 | 59.92 | 0.439 | No | - |
| <i>Total cognitive dimension</i> | 3.22 | 23.10 | 0.18 | No | - |
| Formative dimension | | | | | |
| Task Selection | 5.77 | 18.73 | 0.021 | Yes | 0.3 |
| Student performances | 0.85 | 22.68 | 0.403 | No | - |
| Teacher performance | 2.30 | 27.21 | 0.29 | No | - |
| Task Sequence | 8.91 | 34.71 | 0.046 | Yes | 0.38 |
| Materials and resources | -2.38 | 44.18 | 0.462 | No | - |
| <i>Total formative dimension</i> | 4.39 | 15.72 | 0.035 | Yes | 0.34 |
| Social dimension | | | | | |
| Assessment planned | 1.58 | 58.83 | 0.43 | No | - |
| <i>Total social dimension</i> | 1.58 | 58.83 | 0.43 | No | - |
| <i>Total planning</i> | 5.01 | 15.38 | 0.016 | Yes | 0.43 |

* $\alpha=0.05$, equivalent to a 95% confidence interval

** Cohen's d

The results of table 3 show us that, in almost half of the categories considered in the planning curricular practice, there are statistically significant differences and with a considerable effect. The use of the school's study plan has an increase of 7.11 percentage points and an effect of 0.24. The use of official documents has an increase of 6.28 percentage points and an effect of 0.48. Overall, the use of curricular documents has an increase of 13.39 percentage points and an effect of 0.44. The student errors have an increase of 10.93 percentage points and an effect

of 0.38. The selection of tasks has an increase of 5.77 percentage points and an effect of 0.3. The sequencing of tasks has an increase of 8.91 percentage points and an effect of 0.38. The variables of Conceptual structure, Performance of the teacher, Expectations, Student Performance and Materials and resources do not show statistically significant changes.

As for the dimensions of the curriculum, the conceptual and formative dimensions show a statistically significant difference and with a very positive effect. The conceptual dimension (which brings together the conceptual structure and phenomena) has an increase of 8.77 percentage points and an effect of 0.55. The formative dimension (which brings together the possible actions of the students and the teacher, the selection of resources and materials, and the selection and sequencing of the tasks) has an increase of 4.39 percentage points and an effect of 0.34. The cognitive and social dimensions do not show statistically significant changes.

Finally, when assessing the entire planning curricular practices section, we find that there is a statistically significant difference of 5.01 percentage points, with an effect size of 0.43. Therefore, the professional development program shows a positive effect on the planning curricular practices of the participating teachers.

Implementation practices

In table 4, we present the results related to the implementation curricular practices.

Table 4
Results in implementation practices

| Variables | Mean | Standard deviation | P-value | Rejection of H_0 * | Effect* * |
|------------------------------------|-------|--------------------|---------|----------------------|--------------|
| Reactions to unexpected strategies | -3.38 | 15.09 | 0.07 | No | - |
| Reactions to errors | 7.5 | 27.28 | 0.035 | Yes | 0.15 |
| Interactions | 3.92 | 15.22 | 0.045 | Yes | 0.28 |
| <i>Total implementation</i> | 2.8 | 9.6 | 0.027 | Yes | 0.06 |

* $\alpha=0.05$, equivalent to a 95% confidence interval

** Cohen's d

The results in table 4 show us that the program has a statistically significant effect on how teachers react to student mistakes with an increase of 7.5 percentage points and an effect of 0.15. In interactions, there is an increase of 3.92 percentage points and an effect of 0.28. However, in the reactions to students' unexpected strategies, we have negative difference of 3.38 percentage points, but it is not statistically significant. Finally, when assessing the whole section of implementation practices, we found a slight increase of 2.8 percentage points and an effect of 0.06.

Assessment practices

In table 5, we present the results related to the assessment curricular practices section.

Table 5
Results in assessment practices

| Variables | Mean | Standard deviation | P-value | Rejection of H_0 * | Effect** |
|-------------------------|-------|--------------------|---------|----------------------|----------|
| Learning assessment | 7.12 | 25.88 | 0.035 | Yes | 0.29 |
| Teaching assessment | 16.64 | 44.57 | 0.014 | Yes | 0.43 |
| <i>Total assessment</i> | 11.88 | 26.2 | 0.002 | Yes | 0.52 |

* $\alpha=0.05$, equivalent to a 95% confidence interval

** Cohen's d

In this section, the differences turn out to be statistically significant in the two variables considered. The assessment of learning has an increase of 7.12 percentage points and an effect of 0.29. Teaching assessment shows an increase of 16.64 percentage points and an effect of 0.4. When we evaluate the whole section of assessment practices, we find that there is a statistically significant positive difference of 11.88 percentage points and an effect of 0.52. Therefore, we can claim that the program shows effects on curricular assessment practices.

Curricular practices

Finally, we present the results of the set of curricular practices in table 6.

Table 6
Results of curricular practices

| Variables | Mean | Standard deviation | P-value | Rejection of H_0 * | Effect** |
|-----------------------------------|-------|--------------------|---------|----------------------|----------|
| Planification | 5.01 | 15.38 | 0.016 | Yes | 0.42 |
| Implementation | 2.8 | 9.6 | 0.027 | Yes | 0.06 |
| Assessment | 11.88 | 26.2 | 0.002 | Yes | 0.52 |
| <i>Total curricular practices</i> | 5.72 | 10,06 | 0.001 | Yes | 0.52 |

* $\alpha=0.05$, equivalent to a 95% confidence interval

** Cohen's d

When we jointly evaluate the curricular practices, we observe that there is a statistically significant difference of 5.72 percentage points and a 0.52 effect. Therefore, we can claim that the professional development program, in a global way, shows an effect considered as optimal in the three curricular practices of the teachers who have participated.

DISCUSSION

In this study, we identified the effects of a professional development program, that is part of the Colombian Ministry's "Teaching Excellence" public policy, in practicing teachers at the

level of their curricular planning, implementation and assessment practices. The didactical analysis model was used as the conceptual framework for the design and implementation of the program. The model allowed us to configure a training process in which groups of teachers in training carry out a cycle of planning, implementation, assessment and improvement of teaching units on specific topics of school mathematics (Authors, 2018). These design features, as described in the methodology section, classify it as an effective professional development program (Darling-Hammond et al., 2017; Desimone & Garet, 2015).

The participating teachers were secondary and high school teachers who participated in a training program. Teachers responded to questions from a questionnaire that inquired about their curricular practices in a particular group of students in a recent class, on a specific math topic. Self-reports are a powerful tool for collecting information from large groups of teachers (Uysal, 2012). These instruments turn out to be as reliable as observations when teachers are asked about specific topics of their classroom practices. In fact, Desimone (2009) has pointed out, on the basis of several studies, that “surveys that ask behavioral and descriptive, not evaluative, questions about the teachers’ professional development experiences and teaching have been shown to have good validity and reliability” (p. 190).

We recognize that teacher learning and changes in curricular practices are dependent on at least three subsystems: the teacher, the school in which she or he works, and the training program (Opfer & Pedder, 2011). In the case of the teachers that participated in this study, they voluntarily participated in the program, and they went through a rigorous admission process, in which it was assured that they had the appropriate attitudes towards learning and teamwork for a suitable performance in the program. All teachers were working in schools that participated in the same public policy of the ministry and had the endorsement of their deans to carry out the implementation of their program’s work. Therefore, we can guarantee that these two subsystems, teachers and schools, are similar among participants, and changes in practices can be associated with participation in the training program. We do not ignore that there might be other factors or circumstances, unknown to us, that might also have influenced the results.

The most relevant effects of the professional development program are evidenced in planning practices (use of curricular documents, phenomena, prediction of errors, and selection and sequencing of tasks), implementation practices (reactions to errors and interactions) and in assessment practices (of student learning and teaching).

Statistically non-significant differences in some practices can have several explanations. We have detailed a program that corresponds to the strategic programs described by Kennedy (2019), in which the focus on teaching does not refer to universal methods, but to teachers’ capacities to interpret and respond to specific situations in the classroom. In that sense, we share with the author the hypothesis that teachers may need time to digest new ideas and fully incorporate them into their practices. If so, the assessment in a year or less may not be enough to fully understand the effects of the program. Likewise, teachers face specific difficulties in their institution such as the need to teach a compulsory curriculum (and, therefore, the lack of time to implement newly acquired knowledge and skills), effective class hours, and lack of resources and materials, among others. These factors can influence their implementation practices (Darling-Hammond et al., 2017). In addition, it is possible not to find evidence of statistically significant changes in the curricular practices because there was not a lack in the knowledge of teachers before entering the program. Therefore, the program did not contribute in these aspects. Teachers gained knowledge and skills in those variables where they presented deficiencies. For example, at the beginning of the program, we identified that teachers did not

systematically demonstrate a coherent global vision of the planning process that addresses the content, learning expectations, teaching and assessment in a coordinated manner (Authors, 2018). And now we have evidence that, at the end of the program, there are gains in these aspects. As Minor, Desimone, Lee and Hochberg (2016) indicate, the high quality professional development programs have the potential to provide teachers with a variety of benefits; however, what teachers learn depends in part on their level of initial knowledge. If a teacher has a high level of content knowledge, it is likely that their earnings are reflected in the pedagogical knowledge of the content, and vice versa.

Although the study was carried out in Colombia, the results may also be applicable for other contexts because, despite its limitations, the method of comparing curricular practices “before and after” through a questionnaire is an economic and practical procedure for evaluating teacher training. The instrument and procedures can be adapted to contexts in which public policies are focused on changes in teachers’ curricular practices and there are limited resources for information collection.

This study allows the Colombian Ministry of Education to have evidence of the effectiveness of their training policy in terms of changes in classroom practices. It is important that, together with the implementation of training programs, follow-up strategies should be designed and implemented for these professional development programs to analyze their quality and impact (Darling-Hammond et al., 2017). Having this information makes it possible to make evidence-based decisions for continuity or possible adjustments.

This study also has implications for future lines of research. We intend to continue with studies that complement the teachers’ self-reports with class observations that address specific issues of implementation practices, such as teacher decision making. Also, we intend to deepen the relationship between the changes in curricular practices and the improvement in student learning evidenced in the results of standardized tests, an issue that will undoubtedly be of great interest for the improvement of the in-service training programs of “Teaching Excellence”.

Finally, as we have already indicated, teachers vary considerably in what they learn and how they transfer that knowledge into practice. There is considerable variation in the extent to which teachers increase their knowledge, implement new practices, understand changes and cause effects on student performance. Therefore, the possibility of complementing this study with others that discriminate which profile of teachers obtained greater effects in their curricular practices due to their participation in the professional development program remains open.

REFERENCES

- Authors (2002). Reference omitted for blind copy
- Authors (2006). Reference omitted for blind copy
- Authors (2007). Reference omitted for blind copy
- Authors (2012). Reference omitted for blind copy
- Authors (2018). Reference omitted for blind copy
- Authors (2008). Reference omitted for blind copy
- Authors (2013). Reference omitted for blind copy
- Authors (2019). Reference omitted for blind copy
- Authors (2020). Reference omitted for blind copy

- Akiba, M., & Liang, G. (2016). Effects of teacher professional learning activities on student achievement growth. *The Journal of Educational Research*, 109(1), 99-110. <https://doi.org/10.1080/00220671.2014.924470>
- Bautista, A., & Ortega-Ruíz, R. (2015). Desarrollo profesional docente: perspectivas y enfoques internacionales [Teaching professional development: international perspectives and approaches]. *Psychology, Society, & Education*, 7(3), 343-355. <http://dx.doi.org/10.25115/psye.v7i3.514>
- Bayar, A. (2014). The Components of Effective Professional Development Activities in Terms of Teachers' Perspective. *Online Submission*, 6(2), 319-327. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.15345/iojes.2014.02.006>
- Borko, H. (2004). Professional development and teacher learning: Mapping the terrain. *Educational Researcher*, 33(8), 3-15. <https://doi.org/10.3102/0013189X033008003>
- Buysse, V., Castro, D. C., & Peisner-Feinberg, E. (2010). Effects of a professional development program on classroom practices and outcomes for Latino dual language learners. *Early Childhood Research Quarterly*, 25(2), 194-206. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2009.10.001>
- Causton-Theoharis, J. N., Theoharis, G. T., & Trezek, B. J. (2008). Teaching pre-service teachers to design inclusive instruction: a lesson planning template. *International Journal of Inclusive Education*, 12(4), 381 - 399. <http://www.informaworld.com/10.1080/13603110601156509>
- Chalmers, D., & Gardiner, D. (2015). An evaluation framework for identifying the effectiveness and impact of academic teacher development programmes. *Studies in Educational Evaluation*, 46, 81-91. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2015.02.002>
- Cho, J. (1998). Rethinking curriculum implementation: Paradigms, models, and teachers' work, *Annual meeting of the American Educational Research Association*. San Diego, CA.
- Coe, R., & Soto, C. M. (2003). Magnitud del efecto: Una guía para investigadores y usuarios [Magnitude of effect: A guide for researchers and users]. *Revista de Psicología*, 21(1), 145-177.
- Darling-Hammond, L., Hyler, M. E., & Gardner, M. (2017). *Effective teacher professional development*. Palo Alto, CA: Learning Policy Institute.
- Desimone, L. M. (2009). Improving impact studies of teachers' professional development: Toward better conceptualizations and measures. *Educational researcher*, 38(3), 181-199. <https://doi.org/10.3102/0013189X08331140>
- Desimone, L. M., & Garet, M. S. (2015). Best practices in teacher's professional development in the United States. *Psychology, Society, & Education*, 7(3), 252-263. <http://dx.doi.org/10.25115/psye.v7i3.515>
- Desimone, L. M., Porter, A. C., Garet, M. S., Yoon, K. S., & Birman, B. F. (2002). Effects of professional development on teachers' instruction: Results from a three-year longitudinal study. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 24(2), 81. <https://doi.org/10.3102/01623737024002081>
- Gertler, P. J., Martínez, S., Premand, P., B., R. L., & Vermeersch, C. M. J. (2017). *La evaluación de impacto en la práctica* [Impact assessment in practice]. Washington: BID - Banco Mundial.

- Guskey, T. (2002). Does It Make a Difference? Evaluating Professional Development. *Educational Leadership*, 59(6), 45-51.
- Guskey, T. R. (2000). *Evaluating professional development*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.
- Ingvarson, L., Meiers, M., & Beavis, A. (2005). Factors affecting the impact of professional development programs on teachers' knowledge, practice, student outcomes & efficacy. *Education Policy Analysis Archives*, 13(10). <https://doi.org/10.14507/epaa.v13n10.2005>
- John, P. D. (2006). Lesson planning and the student teacher: re-thinking the dominant model. *Journal of Curriculum Studies*, 38(4), 483 - 498. <https://doi.org/10.1080/00220270500363620>
- Kennedy, M. M. (2016). How does professional development improve teaching? *Review of educational research*, 86(4), 945-980. <https://doi.org/10.3102/0034654315626800>
- Kennedy, M. M. (2019). How We Learn About Teacher Learning. *Review of Research in Education*, 43(1), 138-162. <https://doi.org/10.3102/0091732x19838970>
- Little, M. E. (2003). Successfully Teaching Mathematics: Planning Is the Key. *The Educational Forum*, 67(3), 276-282. <https://doi.org/10.1080/00131720309335041>
- MEN. (2015). Becas para la excelencia docente. Retrieved 22 de octubre de 2015, 2015
- Milkova, S. (2012). Strategies for effective lesson planning (pp. 1-4): Center for Research on Learning and Teaching. <http://bit.ly/2LFIQnH>
- Ministerio de Educación (MEN). (2018). Becas para la excelencia docente: educación por un nuevo país [Scholarships for teaching excellence: education for a new country]. from <https://bit.ly/33Jflve>
- Minor, E. C., Desimone, L., Lee, J. C., & Hochberg, E. D. (2016). Insights on how to shape teacher learning policy: The role of teacher content knowledge in explaining differential effects of professional development. *Education Policy Analysis Archives/Archivos Analíticos de Políticas Educativas*, 24, 1-34. <https://doi.org/10.14507/epaa.24.2365>
- Opfer, V. D., & Pedder, D. (2011). Conceptualizing Teacher Professional Learning. *Review of Educational Research*, 81(3), 376-407. <https://doi.org/10.3102/0034654311413609>
- Remillard, J., & Heck, D. (2014). Conceptualizing the curriculum enactment process in mathematics education. *ZDM*, 46(5), 705-718. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0600-4>
- Ruiz Bueno, C., & Tejada Fernández, J. (2001). *La evaluación de programas de formación de formadores en el contexto de la formación en y para la empresa* [The evaluation of training of trainers programs in the context of training in and for the company]. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.
- Rusznyak, L., & Walton, E. (2011). Lesson planning guidelines for student teachers: A scaffold for the development of pedagogical content knowledge. *Education as Change*, 15(2), 271-285. <https://doi.org/10.1080/16823206.2011.619141>
- Sardo-Brown, D. (1996). A longitudinal study of novice secondary teachers' planning: Year two. *Teaching and teacher education*, 12(5), 519-530. [https://doi.org/10.1016/0742-051X\(95\)00056-P](https://doi.org/10.1016/0742-051X(95)00056-P)
- Schoenfeld, A. H. (2015). *How we think: A theory of human decision-making, with a focus on teaching*. Paper presented at the Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education.
- Simon, M. (1994). Learning mathematics and learning to teach: Learning cycles in mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 26(1), 71-94. <https://doi.org/10.1007/BF01273301>

6. ARTÍCULO 4: UN MODELO DE TOMA DE DECISIONES DEL
PROFESOR

UN MODELO PARA LA TOMA DE DECISIONES DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Andrés Pinzón y Pedro Gómez

La toma de decisiones del profesor es un elemento central de la enseñanza. En este artículo, revisamos las nociones más relevantes que encontramos en la literatura sobre la toma de decisiones del profesor en la implementación del currículo en el aula. Proponemos un modelo que se enfoca en el proceso cognitivo que realiza el profesor cuando se enfrenta a una situación que interpreta como problemática en relación con el aprendizaje de los estudiantes. El modelo que proponemos puede servir para fundamentar un esquema metodológico para identificar, describir y caracterizar las decisiones espontáneas del profesor en el aula.

Términos clave: Aula; Implementación del currículo; Modelo; Profesor; Toma de decisiones

A Model for Math Teacher Decision-Making

Decision-making is a central element of teaching. In this article, we review the most relevant notions that we have found in the literature about teacher decision-making on curriculum implementation in the classroom. We propose a model centered on the cognitive processes that the teachers put into play when they face a problematic situation in relation to students' learning. The model we propose can serve as a basis for a methodological framework to identify, describe and characterize the spontaneous decisions of the teacher in the classroom.

Keywords: Classroom; Curriculum implementation; Decision-making; Model; Teacher

La toma de decisiones del profesor es considerada uno de los aspectos más relevantes de la enseñanza. Las decisiones que toma el profesor afectan a las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes (Herbst, Chazan, Kosko, Dimmel y Erickson, 2016). Comprender la toma de decisiones del profesor nos puede ayudar a mejorar la calidad de la enseñanza (Bishop, 2008). Además, la toma de

decisiones vincula el conocimiento profesional de los maestros con el comportamiento observable (Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016) y constituye un elemento central de la competencia del profesorado (Santagata y Yeh, 2016).

En este artículo, retomamos algunas de las nociones consideradas por los diversos enfoques y modelos sobre la toma de decisiones presentes en la literatura y formulamos un modelo que conceptualiza el proceso cognitivo que realiza el profesor cuando se enfrenta a una situación que interpreta como problemática en relación con el aprendizaje de los estudiantes en el aula. Para este propósito, organizamos este artículo en cuatro partes. En la primera parte, revisamos las nociones más relevantes que encontramos en la literatura sobre la toma de decisiones del profesor. En segunda instancia, identificamos los recursos que pueden explicar las decisiones del profesor y los ámbitos de la práctica en los que el profesor toma decisiones. En la tercera parte, nos enfocamos en la noción de decisión del profesor y proponemos un modelo para conceptualizar la toma de decisiones del profesor. Finalmente, presentamos algunas reflexiones sobre posibles implicaciones metodológicas del modelo para la investigación sobre la toma de decisiones del profesor.

LA TOMA DE DECISIONES DEL PROFESOR EN LA LITERATURA

La toma de decisiones del profesor ha tenido diferentes aproximaciones y se han resaltado diferentes aspectos de este proceso en cada momento. Por ejemplo, autores como Bishop (2008), Shavelson y Stern (1981) y Schoenfeld (2000; 2015) han propuesto modelos en los que destacan el papel de las creencias, los valores, los conocimientos y los propósitos en la toma de decisiones del profesor. Bishop (2008) señala que, junto con las nociones anteriores, la experiencia juega un papel importante ya que permite al profesor desarrollar un repertorio de respuestas e incluirlas en sus rutinas. Los profesores experimentados desarrollan sus propias maneras de clasificar las situaciones en tipos de situaciones. En este sentido, la toma de decisiones del profesor está mediada por sus recursos personales (creencias, valores, conocimientos y experiencia), una situación particular de enseñanza y unos propósitos que emergen de la situación, que conllevan a una decisión y unas acciones.

Por su parte, Shavelson y Stern (1981) sugieren que el proceso cognitivo del profesor pasa por una selección de la información relevante de la situación, una heurística de juicio y una inferencia que termina en la decisión. Es así que el guion de la clase configura la pauta del comportamiento del profesor durante la instrucción hasta que algo surge inesperadamente. En ese momento, el proceso cognitivo de la toma de decisiones entra en juego. El profesor juzga si la situación es problemática y considera alternativas de acción. El profesor integra la información sobre los estudiantes, el tema y el ambiente de la escuela y el

aula, y la filtra por medio de sus creencias y concepciones (Borko, Roberts y Shavelson, 2008). Luego, a través de la heurística de juicio, él realiza las consideraciones de las posibles implicaciones de las opciones, tanto para los estudiantes como para el profesor, y finalmente, establece cuál debe ser la decisión para esa situación particular.

Para Schoenfeld (2015), la toma de decisiones va un poco más allá de la integración del conocimiento, las creencias y los objetivos de los profesores: la toma de decisiones involucra un monitoreo de las implicaciones de la decisión que entraña un proceso iterativo. Además, incluye tres nociones en este proceso: (a) la imagen de la sesión de clase, (b) el plan de acción y (c) la secuencia de acciones. La imagen de la sesión de clase es lo que el profesor espera que ocurra en la sesión de clase. El plan de acción son las previsiones del profesor sobre cómo participará en una secuencia particular de acciones para alcanzar una o más metas particulares. La secuencia de acciones son las acciones que el profesor realmente ejecuta de su plan de acción en el desarrollo de la clase (Schoenfeld, 2000).

Hasta este punto, las nociones de recursos personales (creencias, valores, conocimientos y experiencia), las rutinas, propósitos y el guion (o imagen de la sesión de clase) se identifican como factores que tienen incidencia en el proceso de toma de decisiones del profesor. Por otra parte, la noción de heurística de juicio e inferencia se aproximan al proceso cognitivo que realiza el profesor cuando toma decisiones. Sin embargo, los modelos hasta aquí descritos no abordan cuestiones como el conjunto de opciones que puede formular el profesor y el proceso de valoración de las implicaciones que tienen esas opciones. A continuación, describimos algunos modelos cuyo foco de estudio es el conocimiento o las competencias del profesor y mostramos cómo la toma de decisiones tiene un lugar importante allí.

La teoría del *professional noticing* indica que hay un conjunto de tres habilidades interrelacionadas que debe desarrollar el profesor de matemáticas: atender a las estrategias de los niños, interpretar las comprensiones de los niños y decidir cómo responder sobre la base de la comprensión de los niños (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010). En el mismo sentido, con base en las ideas de habilidades específicas de contexto de Blömeke, Gustafsson y Shavelson (2015), se ha configurado un modelo de habilidades específicas de contexto del profesor de matemáticas. Este modelo, denominado PID (*Perception, Interpretation and Decision-making*), identifica el rol que juegan la percepción, la interpretación y la toma de decisiones en la competencia del profesor. En particular, el PID tiene en consideración: (a) la percepción de eventos particulares en el entorno, (b) la interpretación de las actividades percibidas en el aula y (c) la toma de decisiones, ya sea al anticipar una respuesta a las actuaciones de los estudiantes o al proponer estrategias de instrucción alternativas. Finalmente, desde la perspectiva de la competencia del profesor, Santagata y Yeh (2016) proponen que la interpretación, la percepción y la toma de decisiones se hallan en la intersección

entre el conjunto de conocimientos y creencias, y las prácticas de aula. Estas tres habilidades están en una interacción constante con los estudiantes, los recursos y la comunidad de profesores a las que pertenecen.

De manera complementaria, Herbst et al. (2016) señalan que, además de los recursos personales, los recursos del contexto pueden dar cuenta de las decisiones del profesor. Es el caso de las normas de instrucción y las obligaciones profesionales. Las normas de instrucción son las expectativas que los participantes de una situación tienen del comportamiento del profesor en ese momento. Es decir, las normas de instrucción son las actuaciones que se esperan del profesor porque así se ha instituido para ciertas situaciones y en ciertos contextos. Las obligaciones profesionales del profesor se refieren a los compromisos con los agentes a los que él tiene que dar cuenta con motivo de sus actuaciones. Estos agentes son las matemáticas como disciplina, los estudiantes, la comunidad de pares y la escuela.

De los modelos que acabamos de mencionar, las nociones de recursos del contexto (como complemento a los recursos personales), la percepción de las situaciones y la interpretación de las mismas complementan las nociones que juegan un papel en proceso de toma de decisiones del profesor.

Más recientemente, encontramos que González, Gómez y Restrepo (2015) proponen que el proceso de toma de decisiones comienza con un propósito por parte del profesor. Para alcanzar este propósito, el profesor genera una serie de opciones disponibles. Él toma una decisión cuando, al poner en práctica determinadas técnicas, elige una de esas opciones. Esta decisión puede ser de dos tipos: (a) una acción, que implica que el profesor lleva a cabo una técnica para ejecutarla y obtiene un resultado; y (b) la formulación de nuevo propósito, más concreto que el primero, en cuyo caso el proceso comienza de nuevo.

En resumen, los diferentes modelos y enfoques sobre la toma de decisiones del profesor, han consolidado una serie de nociones que nos permiten conceptualizar este proceso. Algunos de estos modelos identifican factores que pueden afectar dicho proceso (Bishop, 2008; Herbst et al., 2016); otros han identificado la toma de decisiones dentro de un conjunto de habilidades situadas del profesor (Blömeke et al., 2015; Jacobs et al., 2010; Santagata y Yeh, 2016); y otros modelos han sugerido algunos procesos cognitivos que se ponen en juego durante la toma de decisiones (González, et al., 2015; Martínez y Gómez, 2015; Schoenfeld, 2015; Shavelson y Stern, 1981). Nosotros hemos identificado algunas de esas ideas clave y nos proponemos formular un modelo que las integre y relacione, y nos permita describir el proceso de toma de decisiones del profesor durante la implementación del currículo en clase. Las ideas que hemos seleccionado son: la percepción y la interpretación de las situaciones de aula, los recursos personales (creencias, valores, conocimientos y experiencia), los recursos del contexto, los propósitos, las rutinas, el guion, las opciones, la implicación y valoración de las opciones, y la secuencia de acciones.

RECURSOS Y ÁMBITOS EN LA TOMA DE DECISIONES DEL PROFESOR

Como indicamos anteriormente, los recursos juegan un papel importante dentro del proceso de toma de decisiones y, por eso, vale la pena profundizar en ellos. Los recursos hacen referencia a los medios de los que dispone el profesor en el momento de abordar la situación y tomar la decisión. En consecuencia, los recursos delimitan todo el proceso de toma de decisiones y pueden explicar por qué y cómo el profesor toma decisiones.

El profesor cuenta con al menos dos tipos de recursos: personales y del contexto. Por recursos personales, entendemos los recursos que son intrínsecos al profesor: creencias, valores, conocimientos y experiencia. Autores como Klein (2008) y Bishop (2008) resaltan el papel de la experiencia en relación con la identificación de patrones, la clasificación rápida de las situaciones y el repertorio de respuestas que pueden incluir en sus rutinas. Por su parte, los recursos del contexto hacen referencia a los elementos externos con que cuenta el profesor para desarrollar su labor y que, en consecuencia, no son particulares del profesor. Ejemplos de estos recursos son los materiales, libros de texto, los procedimientos institucionales y los conocimientos previos de los estudiantes. Las normas de instrucción y las obligaciones profesionales propuestas por Herbst et al. (2016) son otro ejemplo de los recursos del contexto.

Complementario a los recursos personales y del contexto con que cuenta el profesor, tenemos los ámbitos en los que se toman las decisiones. Dentro de las múltiples decisiones que puede tomar el profesor con motivo de su labor, nos interesa estudiar aquellas decisiones del profesor cuyo propósito consiste en contribuir al aprendizaje de sus estudiantes. En particular, constatamos que el profesor toma decisiones relacionadas con el aprendizaje cuando diseña, implementa y evalúa una propuesta curricular. Distinguimos procesos cognitivos de toma de decisiones diferentes en cada uno de estos momentos (Martínez y Gómez, 2015). A continuación, describimos, para cada caso, lo que suponemos piensa o hace un profesor.

La planificación que realiza el profesor puede consignarse en un documento escrito o simplemente puede que él la haga mentalmente. Llamaremos guion a ese registro, escrito o mental, que el profesor realiza de su plan. En términos de Schoenfeld (2000), el guion es la imagen de la sesión de clase. En la planificación, se destaca el tiempo con el que cuenta el profesor. En este caso, el profesor puede reflexionar sobre sus decisiones y valorar los recursos con que cuenta. En consecuencia, denominaremos decisiones reflexivas a las decisiones en las que el tiempo disponible permite al profesor reflexionar antes de seleccionar una opción, como es el caso de aquellas decisiones que toma durante la fase de planificación del currículo.

La implementación del currículo hace referencia al momento en el que el profesor pone en juego su planificación en el aula. Remillard y Heck (2014) definen la implementación como las interacciones entre profesor y estudiantes en torno a las tareas de cada lección: es un currículo emergente que el profesor construye con los estudiantes. Por tanto, las decisiones que el profesor puede llegar a tomar en este ámbito corresponden a decisiones motivadas por situaciones no previstas debido a la interacción que surge con los estudiantes.

En cuanto al momento de la evaluación, el profesor puede hacer un balance entre lo planificado y lo implementado, de modo que puede reflexionar y tomar decisiones sobre lo que sucedió como él esperaba y sobre aquello en lo que es necesario hacer modificaciones para futuras implementaciones. En este tercer momento, podemos nuevamente hablar de que el profesor toma decisiones reflexivas.

En conclusión, el profesor toma decisiones en los tres ámbitos de su práctica docente (planificación, implementación y evaluación) y, en cada uno de ellos, cuenta con unos recursos específicos. Durante la planificación y la evaluación, el profesor puede tomar decisiones sobre las que le es posible reflexionar. Empero, en el ámbito de la implementación, él puede tomar decisiones sobre situaciones inesperadas y actuar de forma espontánea. De estos tres ámbitos, nuestro interés se centrará en las decisiones que el profesor toma durante la implementación del currículo y, particularmente, ante situaciones inesperadas y que toma de forma espontánea.

NOCIÓN DE DECISIÓN DEL PROFESOR

Con nuestro modelo, queremos contribuir al campo de la Educación Matemática al integrar las nociones descritas en la revisión de la literatura. Proponemos que el proceso de decisión del profesor implica, al menos, cinco nociones: la situación (su percepción e interpretación), el propósito, las opciones, las implicaciones, la secuencia de acciones de cada opción, y la valoración y selección de una opción. A continuación, describimos cada una de estas ideas.

Situación

Definiremos una situación como un conjunto de circunstancias que el profesor percibe como problemático en relación con el aprendizaje de sus estudiantes. Es el caso, por ejemplo, de situaciones que surgen de la interacción en el aula entre el profesor y los estudiantes (o entre los estudiantes), del comportamiento de los estudiantes ante las tareas, de sus preguntas o de sus errores.

Esta noción de situación implica que el profesor puede poner en juego tres procesos cognitivos: percepción, interpretación y toma de decisiones (Blömeke et al., 2015). Dadas unas circunstancias particulares durante una clase, el profesor puede percibir una situación como problemática. Una vez la percibe de esta manera, él puede interpretarla como establecida en el guion, como enmarcada en

sus rutinas o como una situación inesperada. Finalmente, él toma una decisión y actúa acorde con ella. En la mayoría de las ocasiones, suponemos que el profesor realiza estos procesos cognitivos de manera inconsciente.

A continuación, describimos los tres tipos de situaciones que consideramos que el profesor puede interpretar a partir de una situación percibida como problemática.

Situaciones establecidas en el guion

En la implementación, el profesor puede identificar situaciones que él ya previó en la planificación, y que, por tanto, sobre las que él ya ha reflexionado, ha valorado las opciones con base en sus propósitos, ha tomado una decisión y ha planificado una forma de actuar. Es una situación que se encuentra en su imagen de la sesión de clase. Dada esta condición, el proceso cognitivo que lleva a cabo el profesor durante la implementación consiste en percibir la situación, interpretarla e identificarla como ya planificada (Martínez y Gómez, 2015). Un ejemplo de estas situaciones son las ayudas que el profesor puede prever para los estudiantes que incurran en ciertos errores. Esto implica que el profesor ha identificado unas posibles actuaciones de los estudiantes, unos posibles errores en los que normalmente incurren, ha revisado y valorado algunas ayudas para superar esos errores, y las incluye en su planificación.

Situaciones enmarcadas dentro de la rutina

Las rutinas del profesor hacen referencia a formas de actuación del profesor ante situaciones que ya se ha enfrentado y para las que él ha formulado e implementado soluciones que, en su apreciación, han tenido éxito (Schoenfeld, 2010). En este caso, el profesor no toma ninguna decisión: el proceso cognitivo del profesor se reduce a recordar las situaciones asociadas a rutinas e identificar los patrones de la situación para establecer que corresponde a una rutina (Martínez y Gómez, 2015).

Un caso típico de estas situaciones es la forma como el profesor regula las interacciones en el aula; desde la forma en que organiza el salón de clases hasta la forma que los estudiantes se pueden agrupar. En muchas ocasiones, las situaciones enmarcadas dentro de una rutina están reguladas por las normas de instrucción o por obligaciones profesionales a las que responde el profesor.

Situaciones inesperadas

Si el profesor no interpreta la situación como prevista en el guion o asociada a una rutina, entonces consideramos que es una situación inesperada. Estas situaciones son el foco de nuestra atención dado que, a diferencia de las dos situaciones descritas anteriormente, el proceso cognitivo no se reduce a recordar un plan o una actuación previa, sino que requiere de los procesos cognitivos que enumeramos anteriormente (formulación de un propósito, las opciones, las implicaciones, la secuencia de acciones de cada opción, y la valoración y

selección de una opción). Estas situaciones tienen lugar durante la implementación, cuando el profesor toma decisiones sobre situaciones que, sin estar en el guion o corresponder a una rutina, emergen de la interacción con sus estudiantes o de situaciones que condicionan dicha interacción (Bishop, 2008).

Para ilustrar el proceso que suponemos lleva a cabo un profesor, en este tipo de situaciones, presentamos a continuación un ejemplo. Se trata de un profesor de matemáticas, en una clase con estudiantes entre los 14 y 16 años, que ha formulado el siguiente objetivo para el tema de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas: “modelar situaciones mediante sistemas de ecuaciones lineales, al establecer la relación funcional entre variables”. El profesor propone la siguiente tarea a sus estudiantes.

Un autobús sale de un estacionamiento a una velocidad de 30 km/h. Cuando este ha recorrido 20 km, un auto sale del mismo estacionamiento y en la misma dirección a una velocidad 40 km/h. ¿Cuánto tiempo tarda el auto en alcanzar al autobús?, ¿qué distancia recorre el autobús hasta ser alcanzado por el auto?

Como parte de la planificación, el profesor prevé dos posibles errores en los que sus estudiantes pueden incurrir. El primero de ellos es que afirmen que tarda 30 minutos en alcanzarlo, porque es lo que tarda el auto en recorrer los 20 km que lleva de ventaja el autobús. El segundo error previsto es que algunos estudiantes afirmen que tarda 75 minutos, pues aplican una regla de tres de la forma “si tarda 60 minutos en recorrer 40 km, ¿cuánto tardará en recorrer 50 km (la velocidad del autobús más los 20 km)?”

Sin embargo, durante la clase, un estudiante afirma que el auto alcanza al autobús en 3,5 horas, pues son las 3 horas que el auto tarda en recorrer los 120 km —que corresponde al mínimo común múltiplo entre 30 y 40 (las velocidades del autobús y el auto, respectivamente)— más 0,5 horas de los 20 km de ventaja del autobús. Esta respuesta configura una situación que el profesor percibe como problemática y que, según la interpretación del profesor, no corresponde a una situación ni prevista en su guion o a una situación de rutina. Es, por consiguiente, una situación inesperada.

Propósito

En el contexto de la toma de decisiones, utilizamos el término propósito para referirnos a la meta que el profesor establece, en relación con el aprendizaje de los estudiantes, con motivo de una situación que él ha identificado como problemática. A diferencia del objetivo del tema, que es una expectativa que abarca toda la sesión o sesiones de clase, el propósito se vincula a esa situación particular dentro de la clase. Para nuestro ejemplo, el profesor identifica que el estudiante está omitiendo información relevante del problema (la ventaja que lleva el autobús antes de que parta el auto) y, por tanto, puede formularse el siguiente propósito para esta situación específica: lograr que el estudiante

constate que el uso del mínimo común múltiplo es inapropiado para la situación, pues no da cuenta de las condiciones iniciales del problema.

Opciones

Una vez que el profesor ha establecido un propósito, él puede generar una gama de opciones que él considera que pueden contribuir a su logro. Las opciones que el profesor genera pueden ser de al menos dos tipos: genéricas y específicas. Las primeras se refieren a opciones que se pueden adaptar a diversas situaciones problemáticas, independientemente del contenido. Estas opciones vienen dadas por su experiencia y pueden amoldarse a nuevas situaciones que tienen patrones similares. En cambio, las opciones específicas se enmarcan en las condiciones particulares de la situación y, por tanto, no forman parte de repertorios anteriores de opciones. La literatura nos indica que usualmente un individuo puede considerar de dos a cinco opciones ante una situación (Elstein y Bordage, 1979).

Para nuestro ejemplo, frente a la respuesta dada por el estudiante, nuestro profesor se plantea las siguientes opciones: (a) pedirle al estudiante que revise su respuesta, (b) pedirle al estudiante que pase al tablero y exponga su solución al problema, (c) pedirle al estudiante que compare su respuesta con otro compañero, y (d) pedirle al estudiante que corrija su respuesta al darle la solución correcta. Valga resaltar que la cantidad y las características de las opciones que el profesor puede generar y el proceso de valoración de esas opciones con respecto al propósito están condicionadas por los recursos que él tiene disponibles.

Secuencia de acciones e implicaciones

La noción de secuencia de acciones que adaptamos en nuestro modelo tiene otro significado al propuesto por Schoenfeld (2000). En su propuesta, la secuencia de acciones son las acciones que el profesor realmente ejecuta de su plan de acción.

En nuestro modelo, la secuencia de acciones se refiere a lo que el profesor considera debería realizar. Toda opción que el profesor considere implica unas actuaciones en la búsqueda del logro de su propósito. Este conjunto de acciones, que se desarrollan en un cierto orden para la situación específica, y que pueden referirse tanto al estudiante como al profesor, es lo que denominaremos una secuencia de acciones. Las secuencias de acciones tienen unas implicaciones en relación con el propósito que ha formulado el profesor. Por ejemplo, si nuestro profesor considera como una de las opciones pedirle al estudiante que pase al tablero y presente la solución dada a la tarea, entonces esto implicará una secuencia de acciones: (a) pedirle al estudiante que pase al tablero y presente la solución, (b) motivar a los otros compañeros a que verifiquen si la solución propuesta es correcta y (c) si el estudiante que está al frente o los otros estudiantes no logran identificar el error, el profesor deberá proponer, que, por ejemplo, se realice una tabla para que se compare tiempo y distancia de los móviles para tratar de que el estudiante identifique el error de usar el mínimo común múltiplo en esta situación particular.

Asociadas a esta opción, tenemos las implicaciones en términos del propósito de aprendizaje: se le da importancia a la actividad del estudiante (aunque presenten errores) y se genera interacción entre los estudiantes, de modo que entre todos se identifique el error en que se incurre o la solución de la tarea. En la figura 1 presentamos cómo a partir del propósito que se plantea el profesor, se consideran unas ciertas opciones y, ligadas a estas, hay unas secuencias de acciones y sus respectivas implicaciones en el aprendizaje de los estudiantes.

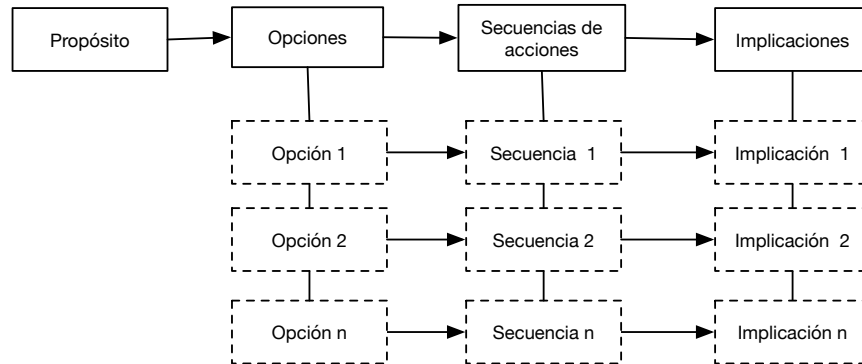


Figura 1. Opciones, secuencias de acciones e implicaciones en la toma de decisiones

Valoración y selección de una opción

La valoración y selección de una opción tienen una especial relevancia dentro de nuestro modelo. Al establecer las implicaciones de cada opción, el profesor puede compararlas y establecer aquella que más contribuye a su propósito. Es decir, estas implicaciones hacen referencia a las consecuencias en el aprendizaje de los estudiantes teniendo como baremo dicho propósito. En la figura 2, presentamos cómo la selección de una opción por parte del profesor está antecedida por una comparación y valoración de las implicaciones.

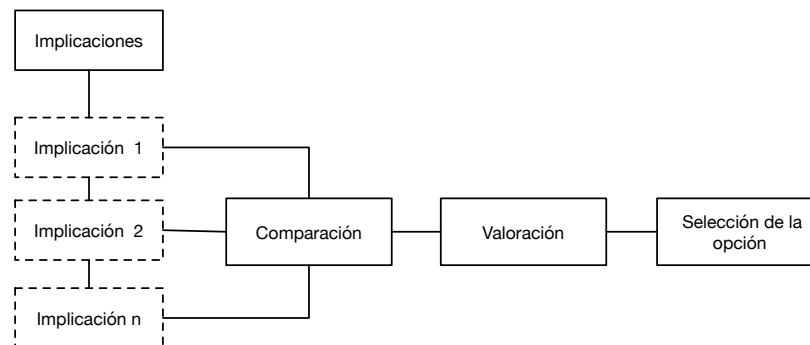


Figura 2. Comparación de las implicaciones y selección de la opción

Para continuar con nuestro ejemplo, en la figura 3, ejemplificamos el abanico de opciones, secuencia de acciones e implicaciones.

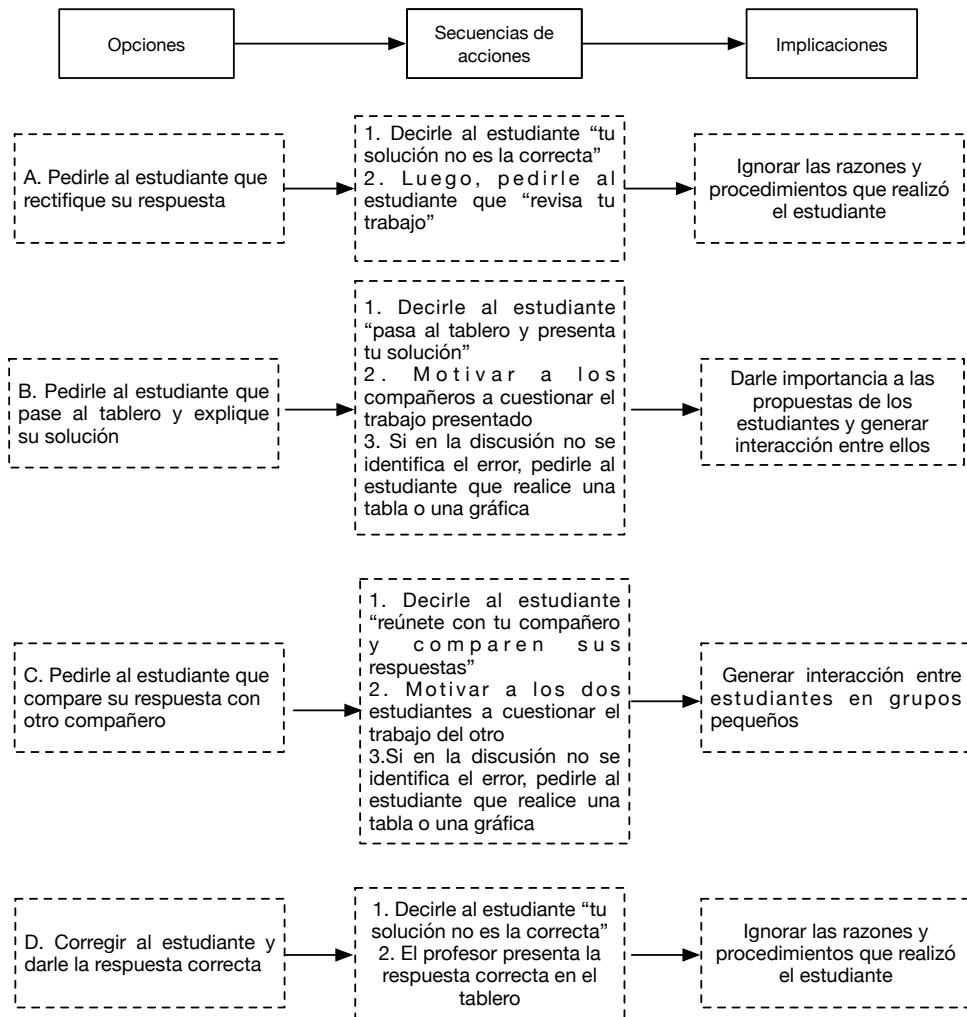


Figura 3. Ejemplo de opciones, secuencia de acciones e implicaciones

Para cada una de las opciones, nuestro profesor prevé una secuencia de acciones que tienen unas implicaciones en términos del propósito formulado. Dos de estas opciones, B y C, tienen en común que abordan cuestiones específicas del contenido de la tarea. Por el contrario, las opciones A y D son opciones genéricas que aplican para cualquier tarea independientemente del contenido o propósito específico. Con esta información, el profesor compara las implicaciones, valora y selecciona la opción que más se ajusta a su propósito, como se observa en la figura 4.

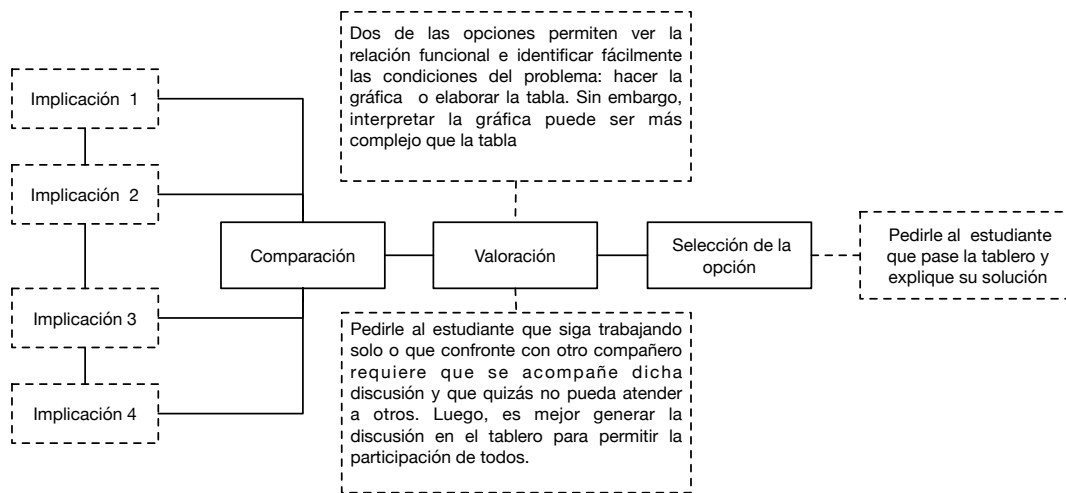


Figura 4. Ejemplo de comparación de las implicaciones, valoración y selección de una opción

Para cerrar con nuestro ejemplo, en la figura 4 mostramos que, al elegir la opción “pedirle al estudiante que pase al tablero y explique su solución”, el profesor ha valorado tanto el contenido matemático (en este caso, el sistema de representación tabular versus el sistema gráfico para sistemas de ecuaciones lineales), como las posibles formas de interacción (individual o pequeño grupo versus todo el grupo). Al hacer estas consideraciones frente al propósito de que “el estudiante constate que el uso del mínimo común múltiplo es inapropiado para la situación”, opta por seleccionar la opción B.

MODELO DE TOMA DE DECISIONES DEL PROFESOR

En el apartado anterior, presentamos cada una de las nociones que integran nuestro modelo. A continuación, nos proponemos presentar cómo se integran estas nociones en el proceso de toma de decisiones del profesor. En un primer momento, dentro de las múltiples situaciones que se pueden dar en un aula de clases, nuestro profesor percibe una situación que juzga como problemática. En segunda instancia, con base en la información y los recursos que tiene disponibles, él interpreta a qué tipo de situación corresponde: establecida en el guion, de rutina o inesperada. Si corresponde a una de las situaciones establecidas en el guion, él puede decidir si sigue con el plan o se aparta de él. En el primer caso, basta con recordar qué tiene planificado y decidido. En el segundo caso, se formula un propósito para la situación particular. Si corresponde a una situación de rutina, él puede decidir nuevamente si sigue con los procedimientos habituales o se aparta de ellos. En los casos anteriores, en los que decide mantenerse en lo planeado o mantener sus rutinas, las secuencias de acciones ya están preestablecidas y el profesor no tiene necesidad de considerar opciones y tomar decisiones espontáneas.

Por el contrario, si es una situación que se interpreta como inesperada, o decide apartarse del guion o de las rutinas, el profesor establece un propósito para esa situación. Con base en ese propósito, él genera una gama de opciones y sus respectivas secuencias de acciones, las valora al comparar sus implicaciones en relación con el propósito y elige la que considera más apropiada a su propósito. Por último, ejecuta las acciones necesarias para poner en marcha su decisión. En la figura 5, presentamos el modelo de toma de decisiones que proponemos con base en los elementos que hemos descrito.

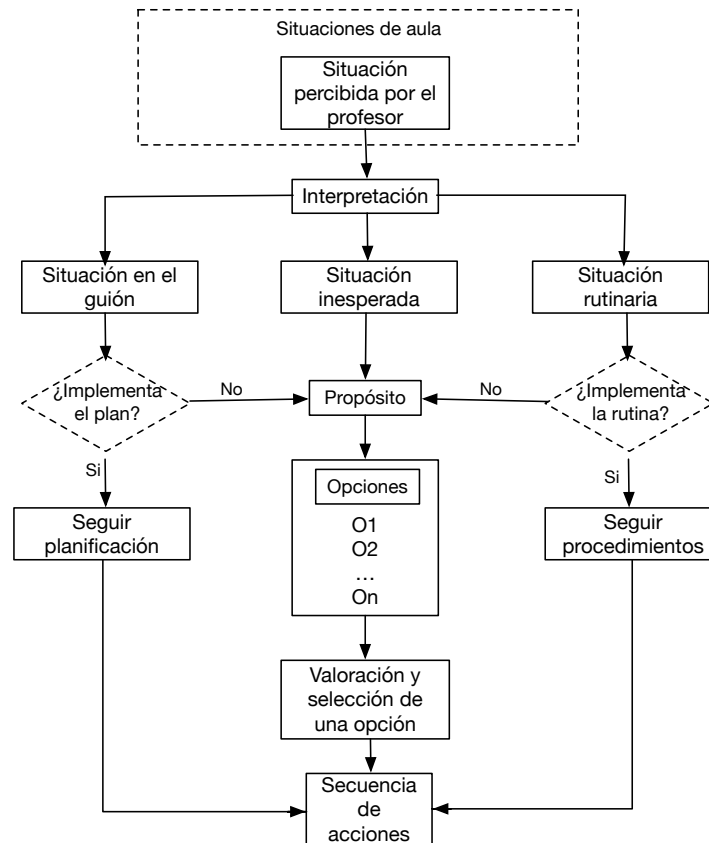


Figura 5. Modelo de toma de decisiones del profesor

DISCUSIÓN

En este artículo, hemos abordado la toma de decisiones del profesor desde una perspectiva descriptiva y centrada en el individuo, al iniciar todo el proceso desde la percepción e interpretación de la situación, para posteriormente continuar con la formulación de un propósito, la generación de opciones y su valoración, y la selección de una opción. Sin embargo, no hemos omitido los aportes de la perspectiva que considera también lo contextual al reconocer que la situación problemática está configurada tanto por los recursos personales como

los recursos del contexto. Además, identificamos que gran parte de las situaciones enmarcadas en la rutina del profesor se justifican por las normas de instrucción o las obligaciones profesionales (Herbst et al., 2016).

El modelo que hemos propuesto aporta a la literatura sobre toma de decisiones del profesor al considerar las diferentes situaciones de aula que pueden ser interpretadas por el profesor (guion, rutina o inesperada) y el proceso cognitivo a partir de cinco elementos que han sido comunes en la literatura sobre este proceso: situación, propósito, opciones, la valoración de las opciones y la selección de una opción, y la secuencia de acciones que está implicada en esa opción seleccionada (Bishop, 2008; Borko et al., 2008; Schoenfeld, 2010). Hemos considerado la influencia tanto de los recursos personales del profesor (Bishop, 2008), como los recursos del contexto (Herbst et al., 2016). También hemos señalado que la valoración y selección de una opción tiene un papel central dentro de nuestro modelo dado el rol que juega el propósito que formula el profesor como baremo en la valoración de las implicaciones de cada opción.

De otra parte, el modelo que proponemos puede servir para elaborar un protocolo de observación de clases para un profesor que se desea observar en su desempeño docente y de quien interesa indagar qué tipo de decisiones toma. Por ejemplo, nuestro modelo puede servir como marco conceptual para fundamentar un esquema metodológico para identificar, describir y caracterizar las decisiones espontáneas del profesor en el aula. Es el caso de la noción de situación que planteamos: puede fundamentar una parte del proceso metodológico para caracterizar el proceso de toma de decisiones de un profesor con base en el análisis de videos de clase. Hemos identificado tres tipos de situaciones: previstas en el guion, de rutina e inesperadas. Para distinguir las dos primeras de la tercera, es necesario conocer el guion que el profesor tiene previsto para su clase y sus rutinas de actuación en el aula. Esta información se puede obtener con base, por ejemplo, en entrevistas y observaciones previas a la implementación de la clase que se va a analizar. El primer análisis del video debería permitir identificar las situaciones problemáticas que el profesor percibió y abordó en el aula. La información previa debería dar luces para formular conjeturas sobre cuáles de esas situaciones surgen del guion, son de rutina o fueron inesperadas. En una entrevista posterior, en la que el profesor y el investigador analizan el video conjuntamente, es posible contrastar estas conjeturas. El resultado de este proceso sería la identificación de las situaciones inesperadas que dieron lugar a decisiones espontáneas. Con procedimientos similares que pueden incluir entrevistas en las que se reconstruyen los eventos (Lyle, 2003; Schepens, Aelterman y Van Keer, 2007) y con base en el significado de las nociones que hemos presentado en el modelo propuesto, es posible reconstruir y describir el proceso de toma de decisiones del profesor para situaciones inesperadas. Este es nuestro propósito para estudios empíricos que estamos desarrollando actualmente.

Por último, reconocemos que una de las limitaciones de nuestro modelo consiste en no abordar los sesgos que se pueden producir durante la de toma de decisiones (Kahneman, 2011). Por ejemplo, uno de esos riesgos consiste en no tener la certeza de contar siempre con toda la información al momento de tomar la decisión (p. ej., qué saben o no los estudiantes al enfrentar una determinada tarea). En este mismo sentido, no hemos considerado algunas de las limitaciones psicológicas indicadas por Perales (2016), como las limitaciones temporales (el tiempo es limitado y el profesor no siempre cuenta con mucho tiempo para tomar decisiones espontaneas) y las limitaciones emocionales (las decisiones no siempre son puramente racionales o no obedecen al mayor beneficio en términos del propósito). Estas limitaciones no invalidan nuestro modelo, pero somos conscientes que pueden afectar su uso en la práctica. Es por eso que consideremos valioso el apoyo en entrevistas previas y posteriores a la sesión de clase que se quiere observar para tener información del conocimiento del profesor en función de la planificación que realiza. Al planificar e implementar el currículo, el profesor toma unas decisiones que dependen del conocimiento que tenga sobre la materia, el aprendizaje de esa materia, y la enseñanza de la misma.

REFERENCIAS

- Bishop, A. J. (2008). Decision-making, the intervening variable. En P. Clarkson y N. Presmeg (Eds.), *Critical issues in mathematics education* (pp. 29-35). Boston, MA: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-09673-5>
- Blömeke, S., Gustafsson, J. E. y Shavelson, R. J. (2015). Beyond dichotomies. *Zeitschrift für Psychologie*, 223(1), 3-13.
- Borko, H., Roberts, S. A. y Shavelson, R. (2008). Teachers' decision making: From Alan J. Bishop to today. En P. Clarkson y N. Presmeg (Eds.), *Critical issues in mathematics education* (pp. 37-67). Boston, MA: Springer. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0727-y>
- Elstein, A. S. y Bordage, G. (1979). Psychology of clinical reasoning. En G. S. Stone, F. Cohen y N. E. Adler (Eds.), *Health psychology: A handbook*, (pp. 333-367). San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- González, M. J., Gómez, P. y Restrepo, A. (2015). Usos del error en la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Educación*, 370, 71-95.
- Herbst, P., Chazan, D., Kosko, K. W., Dimmel, J. y Erickson, A. (2016). Using multimedia questionnaires to study influences on the decisions mathematics teachers make in instructional situations. *ZDM*, 48(1), 167-183. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0727-y>
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C. y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.

- Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow*. New York, NY: Farrar, Straus and Giroux.
- Klein, G. (2008). Naturalistic decision making. *Human factors*, 50(3), 456-460. <https://doi.org/10.1518/001872008X288385>
- Lyle, J. (2003). Stimulated recall: a report on its use in naturalistic research. *British Educational Research Journal*, 29(6), 861-878. <https://doi.org/10.1080/0141192032000137349>
- Martínez, N. y Gómez, P. (2015). *Caracterización de la noción de decisión del profesor*. Documento no publicado. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- Perales, I. M. (2016). El mercado con ataduras. En E. Gil Calvo (Coord.), *Sociólogos contra el economicismo* (pp. 93-109). Madrid, España: Los Libros de la Catarata.
- Remillard, J. y Heck, D. (2014). Conceptualizing the curriculum enactment process in mathematics education. *ZDM*, 46(5), 705-718. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0600-4>
- Santagata, R. y Yeh, C. (2016). The role of perception, interpretation, and decision making in the development of beginning teachers' competence. *ZDM*, 48(1-2), 153-165. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0737-9>
- Schepens, A., Aelterman, A. y Van Keer, H. (2007). Studying learning processes of student teachers with stimulated recall interviews through changes in interactive cognitions. *Teaching and teacher education*, 23(4), 457-472.
- Schoenfeld, A. H. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), 243-261.
- Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. New York, NY: Routledge.
- Schoenfeld, A. H. (2015). How we think: A theory of human decision-making, with a focus on teaching. En Cho, Sung Je (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 229-243). Nueva York, NY: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3>
- Shavelson, R. J. y Stern, P. (1981). Research on teachers' pedagogical thoughts, judgments, decisions, and behavior. *Review of educational research*, 51(4), 455-498. <https://doi.org/10.3102/00346543051004455>
- Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: A systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM*, 48(1-2), 1-27. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0775-y>

Andrés Pinzón
Universidad de los Andes
aa.pinzon364@uniandes.edu.co

Pedro Gómez
Universidad de los Andes
argeifontes@gmail.com

Recibido: 13/09/2018. Aceptado: 06/02/2019
doi: 10.30827/pna.v13i3.7908



ISSN: 1887-3987

7. ARTÍCULO 5: TOMA DE DECISIONES EN EL AULA: ESTUDIOS DE
CASO DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

TOMA DE DECISIONES EN EL AULA: ESTUDIOS DE CASO DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

MAKING DECISIONS IN THE CLASSROOM: CASE STUDIES OF MATHEMATICS TEACHERS

Andrés Pinzón y Pedro Gómez aa.pinzon364@uniandes.edu.co,
argeifontes@gmail.com

Resumen

La toma de decisiones del profesor es un foco importante de investigación de la cognición del profesor. En este artículo, presentamos evidencia, a través de un estudio de casos de tres profesores de matemáticas, de cómo un modelo de toma de decisiones del profesor permite describir este proceso a partir de cinco elementos: situación inesperada, el propósito que formula el profesor, las opciones consideradas, la valoración y la selección de una opción y la secuencia de acciones. Encontramos que pudimos interpretar todas las situaciones analizadas con base en el modelo.

Palabras clave: estudio de caso, modelo, toma de decisiones, profesor de matemáticas.

Abstract

Teacher decision making is an important research focus of teacher cognition. In this article, we present evidence, through a case study of three mathematics teachers, of how a teacher decision-making model allows us to describe this process based on five elements: unexpected situation, the purpose that the teacher formulates, the options considered, the valuation and selection of an option and the sequence of actions. We found that we were able to interpret all the situations analyzed based on the model.

Keywords: case study, decision-making, mathematics teacher, model.

Introducción

La toma de decisiones del profesor es considerada uno de los aspectos centrales de la enseñanza y un foco importante de investigación de la cognición del profesor (Hora, 2012; Schoenfeld, 2015). Identificamos dos fuentes importantes para aproximarse a este proceso: desde la educación, en la que se tienen en cuenta los recursos personales del profesor (Bishop, 2008; Schoenfeld, 2015; Shavelson y Stern, 1981) y los recursos del contexto (Herbst, Chazan, Kosko, Dimmel y Erickson, 2016), y desde la psicología que se preocupa por los procesos cognitivos del decisor (Klein, 2008). En este artículo, consideramos el modelo propuesto por Pinzón y Gómez (2019). Este modelo describe el proceso de toma de decisiones del profesor a partir de cinco elementos: situación inesperada, el propósito que el profesor formula, las opciones que él considera, la valoración de las opciones, la selección de una de ellas y la secuencia de acciones. Este modelo es una contribución a la literatura sobre el tema porque integra y relaciona, de una nueva manera, las ideas clave de los modelos existentes. Nuestro propósito consiste en presentar evidencia de cómo ese modelo permite captar el proceso de toma de decisiones del profesor.

Organizamos este documento en cinco apartados. En la primera parte, describimos el contexto y presentamos el modelo de toma de decisiones objeto de este trabajo. En el segundo apartado, presentamos el objetivo y la metodología del estudio. En el tercer apartado,

presentamos los resultados de estudiar tres casos de profesores de matemáticas de secundaria y media. Finalmente, presentamos las conclusiones y un apartado de discusión.

TOMA DE DECISIONES DEL PROFESOR

La toma de decisiones del profesor tiene dos aproximaciones en la literatura: desde la educación y desde la psicología. Desde la educación, la toma de decisiones del profesor se asocia con su competencia profesional (Blömeke, Gustafsson y Shavelson, 2015; Santagata y Yeh, 2016) y está en estrecha relación con la enseñanza. Se reconoce que la enseñanza es una tarea de alta interacción social (Schoenfeld, 2015), que las condiciones del aula cambian de manera impredecible y, como reflejo de estas complejidades, que los maestros toman cientos de decisiones no triviales cada día (Clough, Berg y Olson, 2009). Por tanto, las decisiones que toma el profesor afectan las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes (Herbst et al., 2016) y comprender la toma de decisiones del profesor nos puede ayudar a mejorar la calidad de la enseñanza (Bishop, 2008).

El profesor toma decisiones en los tres ámbitos de su práctica docente —planificación, implementación y evaluación— y, en cada uno de ellos, cuenta con unos recursos específicos. Durante la planificación y la evaluación, el profesor puede reflexionar sobre las decisiones que toma. En el ámbito de la implementación, además de llevar a la práctica lo previsto, él debe tomar decisiones sobre situaciones inesperadas y actuar de forma espontánea (Pinzón y Gómez, 2019).

Bishop (2008), Shavelson y Stern (1981), y Schoenfeld (2015) han propuesto modelos en los que destacan el papel de las creencias, los valores y los conocimientos en la toma de decisiones del profesor. Por ejemplo, Schoenfeld (2015) sugiere que la estructura básica de la toma de decisiones es recursiva: las personas se orientan a las situaciones y deciden (sobre la base de las creencias y los recursos disponibles) cómo alcanzar sus objetivos. Si la situación es familiar, implementan rutinas familiares. Pero, si la situación no es familiar, lo reconsideran.

Herbst et al. (2016) señalan que, además de los recursos personales, los recursos del contexto pueden explicar las decisiones del profesor. En particular, aspectos como las “normas de instrucción” y las “obligaciones profesionales” pueden dar cuenta de estas decisiones.

Dentro del proceso de toma de decisiones del profesor, el guion y las rutinas juegan un papel importante. De un lado, el guion de clase configura la pauta del comportamiento del profesor durante la instrucción hasta que algo surge inesperadamente (Shavelson y Stern, 1981). Por tanto, los profesores confían en el guion para estructurar sus interacciones en el aula (Schoenfeld, 2000). De otro lado, las rutinas se nutren de la experiencia del profesor, ya que le permiten desarrollar un repertorio de respuestas efectivas para diversas situaciones en el aula (Bishop, 2008).

Por otra parte, desde la psicología, en el marco del enfoque naturalista, se resalta el papel de la experiencia en relación con la identificación de patrones, la clasificación rápida de las situaciones y el repertorio de respuestas que las personas pueden incluir en sus rutinas. La toma de decisiones es una mezcla de intuición y análisis: la correspondencia de patrones es la parte intuitiva y la simulación mental —de las implicaciones de una opción— es la parte consciente, deliberada y analítica. El enfoque naturalista de la toma de decisiones amplía la visión de este proceso al incluir una etapa previa de percepción y reconocimiento de situaciones, así como la generación de opciones de forma secuencial y no en paralelo (Klein, 2008; Klein, Calderwood y

Clinton-Cirocco, 2010). Además, cuando las personas comparan opciones, estas no se evalúan siempre bajo un mismo criterio (Klein, 2008).

En resumen, las aproximaciones desde la educación nos ofrecen una perspectiva sobre qué factores pueden explicar las decisiones del profesor: recursos personales —creencias, valores, conocimientos— y recursos del contexto —normas de instrucción, obligaciones profesionales—. El modelo propuesto por Schoenfeld (2015) es el más representativo en la educación matemática. Sin embargo, este modelo no permite aproximarse al abanico de opciones que puede generar el profesor y el proceso de valoración que realiza el profesor de estas opciones.

Por otra parte, la aproximación desde la psicología al proceso de toma de decisiones del profesor nos ofrece elementos sobre cómo se lleva a cabo el proceso cognitivo en situaciones inesperadas: interpretación de las situaciones, generación de opciones y evaluación de las opciones. El modelo naturalista de Klein (2008) es quizás el más relevante. Sin embargo, este modelo no atiende a las particularidades del contexto del profesor y al papel del guion en la toma de decisiones.

Consideramos que el modelo propuesto por Pinzón y Gómez (2019) es una contribución a la literatura porque integra y relaciona, de una nueva manera, las ideas clave descritas desde la educación y desde la psicología, y subsana las deficiencias identificadas en los modelos existentes. A continuación, describimos brevemente este modelo.

Modelo de toma de decisiones del profesor de matemáticas

El modelo de Pinzón y Gómez (2019) configura el proceso de toma de decisiones con base en cinco elementos: la situación inesperada, el propósito que el profesor formula, las opciones que él considera, la valoración de esas opciones, la selección de una de ellas y la secuencia de acciones.

Situación inesperada

Un conjunto de circunstancias que el profesor percibe como problemático en relación con el aprendizaje de sus estudiantes puede ser interpretado a partir del guion y sus rutinas de clase. Si el profesor no interpreta una situación como prevista en el guion o asociada a una rutina, entonces consideramos que es una situación inesperada. En estas situaciones inesperadas, el proceso cognitivo no se reduce a recordar un plan o una actuación previa, sino que requiere de los procesos cognitivos que enumeraremos a continuación.

Propósito

En este modelo, el término *propósito* se refiere a la meta que el profesor establece, en relación con el aprendizaje de los estudiantes, con motivo de una situación que él ha interpretado como inesperada. A diferencia del objetivo del tema, que es una expectativa que abarca toda la sesión o sesiones de clase, el propósito se vincula directamente a esa situación particular.

Opciones

Una vez que el profesor ha establecido un propósito, él puede generar una gama de opciones que considera que pueden contribuir a su logro. Las opciones son las posibilidades que formula el profesor para lograr su propósito con los recursos disponibles. Las opciones que el profesor puede considerar vienen dadas, en parte, por su experiencia y pueden amoldarse a nuevas situaciones que tienen patrones similares a la situación inesperada.

Valoración y selección de una opción

Cada opción que el profesor genera trae consigo unas implicaciones en el aprendizaje de los estudiantes. Al establecer las implicaciones de cada opción y compararlas, el profesor puede seleccionar aquella que más contribuye a su propósito.

Secuencia de acciones

La opción que el profesor elija implica una actuación del profesor en la búsqueda del logro de su propósito. Denominamos secuencia de acciones a ese conjunto de acciones visibles que el profesor desarrolla en un cierto orden.

Proceso de toma de decisiones

¿Cómo se integran estas nociones en el proceso de toma de decisiones del profesor? Si una situación en el aula se interpreta como inesperada, o el profesor decide apartarse del guion o de las rutinas, entonces él establece un propósito para esa situación. Con base en ese propósito, él genera una serie de opciones, las valora al comparar sus implicaciones en relación con el propósito y elige la que considera más apropiada. Por último, ejecuta las acciones necesarias para poner en marcha su decisión. En la figura 1, presentamos el modelo de toma de decisiones.

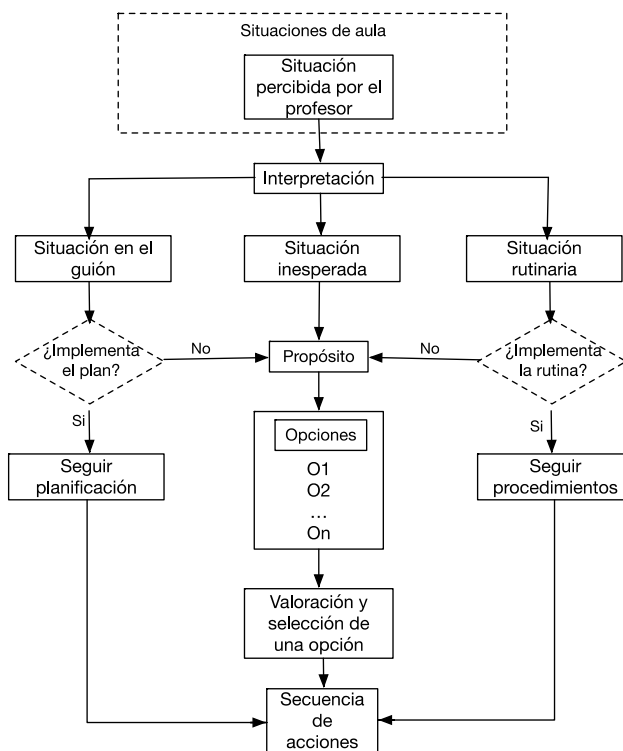


Figura 1. Modelo de toma de decisiones del profesor de Pinzón y Gómez (2019)

En este modelo, se integran las contribuciones de la educación (situaciones, guion, rutinas, experiencia, recursos del profesor en las opciones consideradas y, la secuencia de acciones) y las contribuciones de la psicología (interpretación de las situaciones, generación de opciones y evaluación de las opciones) en un esquema del proceso mental que el profesor puede realizar cuando toma de decisiones.

OBJETIVO DEL ESTUDIO

Dado que el modelo de Pinzón y Gómez (2019) es una contribución a la literatura de toma de decisiones del profesor, al articular las ideas clave de los modelos existentes, es importante comprobar que este modelo permite describir los procesos de toma de decisiones de los profesores en el aula. El objetivo de este estudio es presentar evidencia de que el modelo efectivamente permite describir el proceso de toma de decisiones del profesor.

MÉTODO

Hemos seleccionado una metodología de estudio de casos para lograr el objetivo propuesto. El estudio de casos nos permite un análisis en profundidad del fenómeno objeto de estudio: el proceso cognitivo de toma de decisiones del profesor. Este método es particularmente útil para la investigación sobre la toma de decisiones, ya que ilumina las experiencias e interpretaciones de los individuos en sus propios términos (Hora, 2012). A continuación, describimos las características de los profesores participantes y los procedimientos de recopilación y análisis de la información.

Profesores participantes

Los participantes fueron tres profesores de matemáticas en ejercicio. Los profesores laboraban en diferentes colegios oficiales de la ciudad de Bogotá (Colombia) y se autoseleccionaron para este estudio. Estos profesores participaron de un programa de desarrollo profesional que cubre las prácticas curriculares de planificación, implementación y evaluación de diseños curriculares de matemáticas. Los profesores, que serán identificados como Carla, Belén y Fabio, tenían 5, 9 y 12 años de experiencia, respectivamente.

Recopilación de la información

Para cada profesor, recogimos información de al menos tres sesiones de clase, con un mismo grupo de estudiantes, de modo que tuviéramos información confiable de lo que es una clase típica (Desimone, 2009). Las sesiones de clase que fueron objeto de estudio fueron acordadas previamente con el profesor. Solamente consideramos sesiones a las que asistieron al menos el 80% de los estudiantes.

Para cada sesión de clase, recogimos información en tres momentos: una entrevista previa a la clase, la grabación en video de la sesión de clase y una entrevista posterior a la clase. Realizamos la entrevista previa a la clase unos minutos antes de la sesión de clase que se iba a observar. La entrevista previa nos permitió recoger información sobre lo que el profesor tenía preparado para desarrollar en su clase (en ocasiones estaba en algún documento escrito) e información de algunas de sus rutinas. La entrevista era semi-estructurada y tenía dos focos: el guion de clase y las rutinas de clase. La primera parte, enfocada en el guion, estaba organizada en cuatro apartados: estructura y temática de la sesión, contenido, expectativas de aprendizaje, tareas, y limitaciones y previsiones. La segunda parte de la entrevista estaba enfocada en las rutinas que el profesor pone en juego usualmente en clase. La entrevista fue grabada en audio.

Por otra parte, acompañamos la grabación de la sesión de clase con un formato de observación con el propósito de identificar y verificar episodios relacionados con la toma de decisiones del profesor. En este formato, registramos los datos de identificación de la sesión y del profesor, los tiempos en los que se identifican episodios relacionados con la toma de decisiones (minuto

de inicio y final de un episodio) y la descripción breve de los episodios. Seguimos protocolos estándar de grabaciones de clase con foco en la actuación del profesor (Stigler, Gallimore y Hiebert, 2000; Stigler, Gonzales, Kawanaka, Knoll y Serrano, 1999; Stockero y Van Zoest, 2013): el profesor contaba con un micrófono inalámbrico de solapa; grabamos de forma continua desde que el profesor inició su clase hasta que la concluyó; uno de nosotros se ubicó con la cámara al costado opuesto del tablero y detrás del último estudiante; y enfocamos la cámara en toda la clase o, en su defecto, en el área del salón en la que el profesor estaba interactuando.

Por último, la entrevista posterior a la observación de clase nos permitió obtener una descripción del proceso de la toma de decisiones del profesor para las situaciones inesperadas. Para ello, fue necesario confirmar las situaciones inesperadas identificadas en las grabaciones y estimular el recuerdo del proceso de toma de decisiones del profesor para esas situaciones particulares. Este último paso lo logramos a través de la técnica de recuerdo estimulado (Lyle, 2003). Para la entrevista posterior, dimos la siguiente instrucción al profesor.

A continuación, te presentaré un episodio de la clase. Indícame por favor, si la situación se desarrolló como estaba previsto en tu planeación, corresponde a una situación que ya es rutinaria en tus clases o, por el contrario, es una situación inesperada. Si corresponde a una situación inesperada, por favor describe en voz alta qué se te vino a la mente en ese momento. Trata de describir todo lo que pensaste y decidiste tal como lo recuerdas.

Dado que el profesor no necesariamente recordaba todo en el mismo orden de los hechos, permitimos la descripción no estructurada de la situación. Grabamos estas entrevistas en video. En la figura 2, resumimos los tres momentos de la recolección de la información y sus respectivos propósitos.

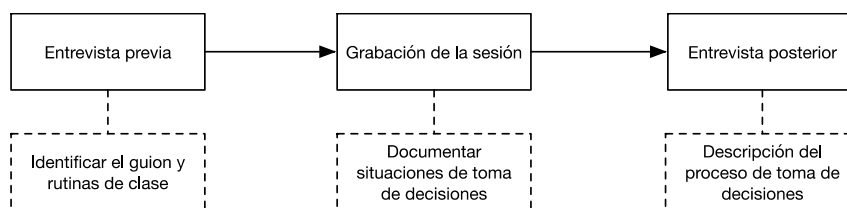


Figura 2. Recolección de información: instrumentos y propósitos

Las sesiones de clase tenían una duración de 50 a 90 minutos. Para cada profesor, recolectamos cerca de una hora de audios de entrevistas previas, 3 horas de video de clases y 80 minutos de video de entrevistas posteriores.

Análisis de la información

Realizamos el análisis de la información en diferentes fases: la identificación del guion y rutinas de clase, la identificación de situaciones inesperadas y la modelación del proceso de toma de decisiones. A continuación, describimos cada una de estas fases.

Fase 1: Identificación del guion y rutinas de clase

A partir de la entrevista previa y la revisión de la planeación escrita (si existía), pudimos establecer el guion de la clase: la estructura de la sesión de clase, los tiempos asignados a cada momento, los contenidos abordados, las expectativas de aprendizaje de la clase, las tareas

formuladas, los posibles errores en los que los estudiantes podían incurrir, las interacciones previstas, las posibles estrategias de solución a las tareas, las agrupaciones y las actividades propuestas para los estudiantes. Igualmente, identificamos algunas de las rutinas habituales del profesor: cómo organiza las clases, cómo reacciona a errores y cómo interactúa con los estudiantes, entre otros.

Con este panorama general, transcribimos las entrevistas e identificamos las situaciones que estaban previstas en la planificación de las que no, de cara a distinguir, las situaciones inesperadas en la siguiente fase.

Fase 2: Identificación de situaciones inesperadas

Descompusimos las sesiones de clase en situaciones. Cada situación comprende un segmento en el que se identifica un propósito por parte del profesor y su correspondiente consecución en una secuencia de acciones. Durante la sesión de clase, pudimos registrar por escrito algunos episodios como posibles situaciones inesperadas. Estas situaciones fueron aquellas que, con base en la entrevista previa, no se registraron como parte del guion o de las rutinas de clase.

Posteriormente, revisamos la grabación de video para identificar nuevos episodios de situaciones inesperadas y/o confirmar los episodios registrados durante la clase. Una vez seleccionamos las situaciones, procedimos, dentro de las 48 horas siguientes, a la segunda entrevista con el profesor, en la que le presentamos estas situaciones.

Fase 3: Modelación del proceso de toma de decisiones

El proceso de toma de decisiones se reconstruye a partir de la estimulación del recuerdo del proceso de toma de decisiones del profesor para esas situaciones particulares y la descripción que el profesor hace del proceso realizado. Con esta información y las acciones registradas en el video, realizamos transcripciones de las situaciones, contrastamos con la descripción del profesor y modelamos el proceso de toma de decisiones a partir de los cinco elementos del modelo de Pinzón y Gómez (2019): la situación inesperada, el propósito que el profesor formula con motivo de la situación inesperada, las opciones consideradas, la valoración de esas opciones, la selección de una de ellas y la secuencia de acciones.

En el siguiente apartado, describimos el proceso de toma de decisiones de los profesores estudiados. Para cada uno de ellos, describimos una situación en detalle y, en dos casos, presentamos un resumen de otra situación. En primer lugar, presentamos el contexto de la situación a partir de una breve descripción del tema, el objetivo del tema, el objetivo de la sesión de clase, algunas tareas que han desarrollado previamente los estudiantes y la meta de la tarea en la que surge la situación inesperada. Luego, presentamos la transcripción tanto de la situación inesperada como del proceso descrito por el profesor. Finalmente, presentamos la descripción del proceso de toma de decisiones.

PRIMER CASO: PROFESORA CARLA

La profesora Carla tenía asignado el grado décimo (14 a 16 años). En el curso en el que se desarrolló la sesión, asistían 30 estudiantes. Presentaremos las dos situaciones inesperadas que identificamos en las clases estudiadas. Las sesiones correspondían al tema de sucesiones. El objetivo que la profesora formuló para el tema fue “identificar el término general de una sucesión aritmética y geométrica”.

Situación 1

La meta para la sesión de clase era “identificar términos generales de la forma $a(n-1) + b$ ”. La profesora organizó el grupo en parejas de estudiantes. Una de las situaciones identificadas como inesperada dentro de esta sesión se refiere a una tarea propuesta por la profesora, cuya meta era “hallar la expresión $5+3(n-1)$ como modelo del problema”. A continuación, transcribimos esta situación.

Profesora: Para participar en una carrera, Juan inicia un entrenamiento en donde el primer día corre 5 km y cada día siguiente aumenta en 3 km la distancia recorrida en día anterior. ¿Qué distancia recorre el día quince de entrenamiento?

[10 minutos después...]

Estudiantes A y B: ¡Ya!

Profesora Carla: Díganme.

Estudiante A: Listo, tenemos la fórmula.

Profesora Carla: Pero es que tienes que tener en cuenta lo siguiente... [se queda unos segundos mirando la respuesta de los estudiantes: $3n + 2$]. ¿Ya lo probaste?

Estudiantes A y B: Sí señora. Tres por doce es treinta y seis, más dos, treinta y ocho.

Profesora Carla: ¿Por qué más dos?

Estudiante A: No lo sé. ¡Así nos dio!

Profesora Carla: ¿Y funciona para todos [los días]?

Estudiante B: ¡Sí, para todos!

[La profesora se dirige a la mesa de otro grupo que la ha llamado previamente.]

Estudiantes M y N: Profe, esta es la fórmula [le presentan la solución $5 + 3(x-1)$].

Profesora Carla: Explícamela.

Estudiantes M y N: [Silencio]

Profesora Carla: ¿Qué diferencia hay entre esta y la anterior [unos minutos antes los estudiantes presentaron $5+3x$]?

Estudiante M: Es la misma, solo que tiene en cuenta el día anterior.

Profesora Carla: Muy bien.

[La profesora se dirige a la mesa de otro grupo que la ha llamado.]

Estudiantes P y Q: La cambiamos a esta [pasaron de $5+3n$ a $5+3n-3$].

Profesora Carla: Espérate [se queda unos segundos mirando la respuesta de los estudiantes].

Estudiante P: Lo que hicimos fue restarle los tres kilómetros que no hizo el primer día. La probamos con los quince días y nos dio cuarenta y siete kilómetros.

Profesora Carla: ¿Menos 3?, ¿y seguro que te da para todos [los días]?

Estudiantes P y Q: Sí profesora.

Profesora Carla: Pasen al tablero A, M y P, y presenten su solución.

Al preguntarle a la profesora por el proceso de toma de decisiones que llevó a cabo durante esta situación, manifestó lo siguiente.

En ese momento [cuando revisó el trabajo de los tres grupos], yo ya había visto que los tres grupos que estaban más cerca de la solución eran ellos tres. Entonces, en el caso del primer grupo, cuando ellos me muestran la fórmula, yo les hago una pregunta; la intención es mirar de qué manera él [estudiante A] puede pasar a explicar a sus compañeros lo que hicieron. Y cuando verifico lo que hicieron los estudiantes M y N, y veo el procedimiento, veo que ellos sí tienen una explicación. No como el grupo anterior. Luego, cuando veo el otro grupo [estudiantes P y Q], entendí la respuesta del primer grupo.

Tenía la intención de pasarlos al tablero —estaba en el guion—. Pero en esta ocasión fue interesante porque eran tres soluciones diferentes. Tenía planeado dos formas de solucionar la tarea. La primera era que usaran una tabla para encontrar un patrón y la otra, era la fórmula general usando el día anterior [la solución $5+3(n-1)$]. Yo sabía que no todos lo iban a lograr. A los chicos no se les da tan fácil hacer esa traducción. Pero, en ese momento, surgió más de lo que yo esperaba, que era solucionar la tarea de tres formas diferentes, y que además lo lograran explicar, porque dos de ellos lo hicieron al tanteo. Consideré por un momento que pasara solo el estudiante M, pero a los otros dos grupos de estudiantes también les funcionaban sus fórmulas.

En caso de que no lograran solucionarlo, sí tenía previsto que pasara el estudiante que tenía algo y, a partir de ahí, yo empezar con ayuda de ellos a hacer las modificaciones y lograr llegar a la respuesta, pero siempre con la participación de ellos. Porque la idea es que ellos identificaran el término general de esta tarea.

Al contrastar este proceso con el modelo de toma de decisiones que usamos de referencia, identificamos los siguientes elementos.

Situación inesperada

La situación inesperada surge cuando la profesora encuentra que hay estudiantes que pudieron llegar a la fórmula y que, además, eran formas de la solución que ella no había previsto.

Propósito

El propósito que formula la profesora para la situación es que los estudiantes corroboren que las soluciones dadas son equivalentes a $5+3(n-1)$ (“la fórmula general usando el día anterior [la solución $5+3(n-1)$]...lograr llegar a la respuesta, pero siempre con la participación de ellos”).

Opciones

La profesora formula Las siguientes opciones.

1. Pasar al tablero solo al estudiante que más se aproximó a la solución prevista (consideré por un momento que pasara solo el estudiante M”).

2. Que los tres grupos presentaran la solución (“Tenía la intención de pasarlos al tablero — estaba en el guion—. Pero en esta ocasión fue interesante porque eran tres soluciones diferentes. Tenía planeado dos formas de solucionar la tarea”).

Valoración y selección

La profesora consideró las siguientes implicaciones. La primera opción le permite mantenerse fiel a su guion. Sin embargo, la profesora no lo consideró conveniente porque era perder la oportunidad de que los otros estudiantes explicaran cómo llegaron a resultados diferentes (“en ese momento surgió más de lo que yo esperaba, que era solucionar la tarea de tres formas diferentes, y que además lo lograran explicar, porque dos de ellos lo hicieron al tanteo”). La segunda opción, de pasar los tres grupos al tablero, permite que todos los estudiantes conozcan cómo llegaron a esas respuestas no previstas y validar con sus compañeros la solución propuesta. Luego, al valorar las implicaciones de cada opción, selecciona la segunda opción.

Secuencia de acciones

Una vez hizo su elección, la secuencia de acciones que la profesora puso en juego fue pedir a los estudiantes que pasaran al tablero, en el orden en que ella identificó las respuestas, y que presentaran su solución (“Pasen al tablero A, M y P, y presenten su solución”).

Situación 2

Al continuar con el tema de sucesiones, en la siguiente sesión de clase, la profesora Carla estableció como objetivo “Identificar el término general de sucesiones de la forma ax^n ”. Una de las situaciones identificadas como inesperada dentro de esta sesión surgió con la otra tarea cuya meta era “identificar el término $(1,25)^n$ como factor constante que modela el problema”. La profesora propuso la siguiente tarea por parejas de estudiantes: Un cultivo de 20.000 bacterias aumenta su población 25% por hora ¿Cuántas bacterias hay en la sexta hora? Uno de los estudiantes le respondió “Obtengo el 50%, luego la mitad de eso y se lo aumento cada hora”. La profesora meditó unos segundos y luego le preguntó a otro estudiante cómo lo hizo.

Al preguntarle a la profesora por el proceso de toma de decisiones que llevó a cabo durante esta situación y contrastar este proceso con el modelo de toma de decisiones, identificamos que la situación inesperada surgió cuando la profesora preguntó a un estudiante por la solución de la tarea y este respondió con una solución no prevista que era errónea. El propósito que la profesora formuló para la situación fue que los estudiantes no se confundieran al identificar la razón de cambio (“que identificaran una razón por la que se multiplicaba una y otra vez $(1,25)^n$ ”). La profesora formuló dos opciones: permitir al estudiante desarrollar su idea y ayudarlo a presentar su solución, y seguir preguntado a otros estudiantes si tenían la respuesta prevista (“preferí buscar más respuestas”).

La profesora consideró las siguientes implicaciones. La primera opción le iba tomar más tiempo del previsto y, al parecer, la solución no iba a ser clara para el estudiante. La segunda opción (preguntar a otros estudiantes si tenían otra respuesta) le permitiría buscar si alguno de los estudiantes tenía la solución prevista por ella y mantener, de cierta manera, el control del tiempo. Entonces, al valorar las implicaciones de cada opción, optó por la segunda. La secuencia de acciones fue no continuar preguntando al estudiante y preguntar a otro estudiante sobre su solución.

SEGUNDO CASO: PROFESORA BELÉN

La profesora Belén tenía asignado el grado décimo en su institución. En el curso en el que se desarrolla la sesión asistían 26 estudiantes. La sesión de clase observada correspondió al tema de medición de ángulos. El objetivo que la profesora formuló para este tema fue “Conocer y relacionar las medidas de ángulos y de tiempo”. El objetivo de la clase fue “realizar mediciones de ángulos en grados, minutos y segundos”.

Situación 3

Una de las situaciones identificadas como inesperada dentro de esta sesión y cuya meta era “identificar que los ángulos no contiguos de un paralelogramo tienen la misma medida” es la siguiente.

La profesora Belén propone calcular los ángulos de 4 paralelogramos.

Profesora Belén: [Reúne a dos parejas de estudiantes que tienen la misma inquietud] En un cuadrado todos los lados son iguales y todos los ángulos miden 90° .

Estudiantes: [En silencio, mueven la cabeza en señal de estar de acuerdo con la profesora]

Profesora Belén: [Señalando la guía de trabajo] Esto es un rombo. Entonces, ¿un rombo qué tiene?, ¿tiene los cuatro lados iguales?

Estudiantes A y B: No.

Estudiantes C y D: Sí.

Profesora Belén: ¿No o sí? trae una regla y miramos. Tú dices que no. Vamos a ver. Tomemos las medidas.

Estudiantes: [un estudiante toma las medidas de dos lados] Sí, miden los mismo.

Profesora Belén: Ahora, en el cuadrado todos los ángulos miden los mismo. En el rombo, ¿todos serán iguales? [señala dos ángulos contiguos en el rombo] Este y este, ¿son iguales?

Estudiantes: No.

Profesora Belén: Y este y este ángulo, ¿son iguales? [señala dos ángulos no contiguos en el rombo].

Estudiantes: Sí.

Profesora Belén: Entonces, tenemos dos parejas de ángulos iguales. Y ese ángulo que usted halló ¿cuál es?, el de 52° , ¿cuál es?

Estudiante A: Es este [señala uno de los ángulos obtusos. Los otros compañeros permanecen en silencio].

Profesora Belén: ¿Eso mide 52° ? Pásame el transportador. Mira acá [señala el transportador]. Si tu mides 52° , ¿a cuál ángulo se parece?

Estudiante A: [Toma el transportador y mide dos de los ángulos] A este [señala uno de los ángulos agudos].

Profesora Belén: Así es.

Al indagar con la profesora por el proceso de toma de decisiones que llevó a cabo durante esta situación, ella manifestó lo siguiente.

Con la regla no fue difícil darse cuenta de que los lados son iguales. Y con los grados, a pesar de que ellos la clase pasada hicieron medición de ángulos, y que miramos qué era [un ángulo] obtuso, qué era agudo, qué era uno llano, aún hay dificultades en entender que un ángulo agudo va a ser de esa manera (menor de 90°). Por eso, decidí mostrarles [aunque el estudiante fue quien midió] con el transportador cuál era la medida. Como eso solo ocurrió en ese momento con ellos, no vi oportuno hacerlo en el tablero, que también pudo suceder. Y ya la otra opción, era decirle lo que habíamos visto la clase pasada, pero seguirían igual [con la misma dificultad]. Opté por el transportador porque lo tenían ahí cerca y era mejor que lo vieran con sus propios ojos, como con la regla.

...Quería que él mismo comprobara las unidades [grados], ahí en la hoja pueden tomar bien la medida. Y el ponerlo a medir era más fácil en la hoja, sin tener yo que decirle cuál era la respuesta. Igual, si yo le digo eso [la respuesta], él no me va a entender, va a decir que sí, pero solo por responder. Yo le puedo decir, pero, si el estudiante no lo verifica, no va a entender que eso es cierto. Si él confronta lo que dice con lo que ve, ya él va a entender. (...) En el tablero no iba a quedar la figura bien construida y no iba a poder comprobar lo que decía.

Al contrastar este proceso con el modelo de toma de decisiones, identificamos los siguientes elementos.

Situación inesperada

La situación inesperada surge cuando la profesora, al pedir a un estudiante que indique qué ángulo se corresponde con el resultado numérico obtenido, constata que ese estudiante y sus compañeros tampoco logran hacer bien la correspondencia (“¿Eso mide 52°?”).

Propósito

El propósito que establece la profesora es que los estudiantes identifiquen el ángulo que corresponde a 52° (“aún hay dificultades en entender que un ángulo agudo va a ser de esa manera”).

Opciones

La profesora formula las siguientes opciones.

1. Continuar con la explicación en el tablero y apoyarse en los compañeros: “Como eso solo ocurrió en ese momento con ellos, no vi oportuno hacerlo en el tablero, que también pudo suceder”.
2. Dar la respuesta correcta, al recordar lo que habían visto la clase anterior: “decirle lo que habíamos visto la clase pasada”.
3. Pedir al estudiante en cuestión que él mismo tomara un transportador e identificara la medida que le correspondía al ángulo en cuestión: “decidí mostrarles con el transportador cuál era la medida”.

Valoración y selección

La profesora consideró que la primera opción le permite apoyarse en algunos estudiantes que pueden ayudar a su compañero a resolver la dificultad. Sin embargo, la profesora no lo vio conveniente porque no era práctico para verificar las medidas: “En el tablero no iba a quedar la figura bien construida y no iba a poder comprobar lo que decía”. La segunda opción, darles la respuesta correcta a los estudiantes, le permite solucionar rápidamente la situación, pero ellos persistirían en su dificultad: “si yo le digo eso [la respuesta] él no me va a entender, va a decir que sí, pero solo por responder. Yo le puedo decir, pero si el estudiante no lo verifica, no va a entender que eso es cierto”. La tercera opción, que sean los mismos estudiantes quienes midan con el transportador, le permite a la profesora que los estudiantes manipulen los recursos y verifiquen los valores numéricos obtenidos con su representación gráfica: “Quería que él mismo comprobara las unidades [grados], ahí en la hoja pueden tomar bien la medida... Si él confronta lo que dice con lo que ve, ya él va a entender”. En consecuencia, la profesora selecciona la tercera opción.

Secuencia de acciones

La profesora Belén procedió a pedir al estudiante que midiera con el transportador y la profesora validara la correspondencia que él estableció (Estudiante A: “[Toma el transportador y mide dos de los ángulos]. A este [señala uno de los ángulos agudos]”. Profesora Belén: “Así es”).

TERCER CASO: PROFESOR FABIO

El profesor Fabio tiene asignado grado sexto (11 a 13 años). El grupo era de 32 estudiantes, de los cuales nueve estudiantes eran sordos. El profesor contaba con un interprete para comunicarse con los niños sordos. A continuación, presentamos una situación inesperada en detalle.

Situación 4

La sesión correspondió al tema de múltiplos y divisores, cuyo objetivo era identificar los múltiplos y divisores de números hasta dos cifras. La sesión de clase tenía como meta identificar los divisores de números hasta 100. El profesor inició la clase escribiendo en el tablero ejemplos de divisores con los números 20 y 30. Luego, propuso hallar los divisores de 40 y 54 y, lo resolvió con la participación de toda la clase en el tablero. Los estudiantes estaban organizados en filas y trabajaban de manera individual. Una de las situaciones identificadas como inesperada dentro de esta sesión, y cuya meta de la tarea era “identificar si 15 es divisor de 100”, es la siguiente.

El profesor propone la siguiente tarea: ¿100 minutos hacen un número exacto de cuartos de hora?

[5 minutos después...]

Profesor Fabio: Un cuarto de hora ¿cuántos minutos son?

Estudiante A: 15.

Profesor Fabio: ¿Es cierto o es falso?, ¿Qué dicen los demás?

Algunos estudiantes oyentes: Cierto.

Profesor Fabio: ¿Qué dicen los niños sordos?, ¿un cuarto de hora cuantos minutos son?

Estudiante B: 4 minutos.

Profesor Fabio: [el profesor se dirigió solo a los estudiantes sordos, que estaban ubicados en dos filas consecutivas en el lado izquierdo del salón, mientras los estudiantes oyentes terminaban de resolver la tarea] ¡Atención! un cuarto de hora, ¿cuántos minutos son?

Estudiante C: 24 horas.

Profesor Fabio: ¿Cuántos minutos son una hora?

Estudiante D: 100 minutos.

Profesor Fabio: ¡Atención! una hora, ¿cuántos minutos tiene?

Estudiante E: 87 segundos.

Profesor Fabio: [Dirigiéndose al interprete de sordos que lo acompaña] ¿ningún estudiante sabe cuántos minutos son una hora?

[El interprete mueve la cabeza en señal de negación]

Profesor Fabio: [Dibuja un reloj análogo en el tablero]. ¡Empecemos de nuevo!

Al indagar con el profesor por el proceso de toma de decisiones llevado a cabo durante esta última situación, manifestó lo siguiente.

Supuse que todos sabían, al menos, cuántos minutos hay en una hora, para que pudiéramos resolver una de las situaciones en la que se mencionaba el cuarto de hora. Especialmente, porque, en otras clases, ellos ya habían hecho mención del reloj de varias maneras. Me sorprendió que los niños sordos no supieran cuántos minutos tiene una hora. Por eso me devolví y me tomé un tiempo de la clase para explicarles a ellos esa equivalencia, 60 minutos igual a una hora, mientras los estudiantes oyentes terminaban de resolver parte de las situaciones que yo había dejado en el tablero. En ese momento pensé: o les doy la respuesta del cuarto de hora [igual a 15 minutos] o toca darles una clase de lectura del reloj análogo, porque no lo saben leer. Pero eso no hacía parte de la planeación de la clase. [...] Siento la obligación y el compromiso de hacerlo, porque sé que en ninguna otra clase lo van a hacer.

Al comparar este proceso con el modelo de toma de decisiones que usamos de referencia, identificamos los siguientes elementos.

Situación inesperada

En este episodio, la situación inesperada surge cuando el profesor identifica que los estudiantes sordos no saben cuántos minutos tiene una hora.

Propósito

El propósito que establece el profesor para la situación es lograr que los estudiantes constaten la equivalencia de una hora y 60 minutos.

Opciones

A partir de este propósito, el profesor formula las siguientes opciones.

1. Decirles a cuánto equivale un cuarto de hora.
2. Hacer una explicación más detallada de la lectura del reloj análogo y las diferentes equivalencias de minutos y porciones de horas.

Valoración y selección

Respecto al proceso de valoración y selección de las opciones, el profesor consideró que la primera opción era rápida, implicaba poco tiempo y podría permitir a los estudiantes resolver la tarea en particular. La segunda opción, por el contrario, implicaba más tiempo de la clase, pero le permitía abordar un conocimiento que el grupo de estudiantes no tenía y que les iba a dificultar otras tareas posteriores. Al valorar estas implicaciones, el profesor optó por la segunda opción.

Secuencia de acciones

La secuencia de acciones que puso en juego el profesor fue realizar un dibujo del reloj análogo en el tablero y explicar al grupo de estudiantes sordos las equivalencias entre minutos y porciones de horas.

Situación 5

Otra situación inesperada del profesor Fabio fue la siguiente. Los estudiantes estaban organizados en grupos de 4 estudiantes (con grupos de solo oyentes, solo sordos y grupos combinados). El objetivo de la sesión era “Identificar las equivalencias que se pueden establecer entre las longitudes de las regletas de Cuisenaire”. El profesor Fabio propuso tareas en las que los estudiantes debían identificar equivalencias, de fichas de un mismo color, a partir de un segmento o ficha dada. El profesor solicitó equivalencias menores a diez unidades y la mayoría de los estudiantes optó por poner la ficha indicada sobre la mesa y en una fila paralela, ubicar las fichas que coincidían. Sin embargo, cuando el profesor solicitó hallar la equivalencia de una regleta mayor de diez, con la meta de identificar los divisores de 15, gran parte de los estudiantes no lograron realizarla. Al ver esto, el profesor interpretó que no podían hacer una representación mental de esta longitud y les indicó a los estudiantes que formaran una línea con una ficha de color naranja (10 unidades) y una de color amarilla (5 unidades) y a continuación, formaran una fila paralela a esta con fichas del mismo color.

Al indagar con el profesor por el proceso de toma de decisiones llevado a cabo durante esta situación y contrastar este proceso con el modelo de toma de decisiones que usamos de referencia, identificamos que la situación inesperada surgió cuando el profesor interpretó que un grupo considerable de estudiantes no logró hacer una representación mental de un segmento de 15 unidades (“Se les dificultó ver la línea de 15 unidades sin tenerla físicamente”). El propósito que formuló el profesor fue facilitar a los estudiantes identificar las regletas del mismo color que son equivalentes con la regleta de 15 unidades. Las opciones que consideró fueron presentar un ejemplo con una regleta de un color específico; pedir a un estudiante, que había entendido la primera instrucción, que pasara al tablero; y pedir a todos los estudiantes que formaran una fila de regletas que pudieran tener de referencia físicamente.

El profesor consideró que, tanto presentar un ejemplo con una regleta de un color específico, como pedirle a un estudiante que había entendido la primera instrucción que pasara al tablero, podría ir en contravía con la meta de la tarea. Por consiguiente, el profesor consideró

aquella posibilidad que no afectara el identificar las equivalencias entre las regletas: cambió la instrucción y pidió que formaran una fila que pudieran tener de referencia físicamente. Finalmente, él se dirigió a todo el grupo y les pidió que formaran una figura con una ficha de color naranja y una de color amarillo, que completaran con regletas de un solo color toda esa línea, en una recta paralela, e indicaran qué fichas del mismo color coincidían.

DISCUSIÓN

Hemos mostrado que el modelo permite describir el proceso de toma de decisiones del profesor de matemáticas en su totalidad. En la tabla 1, resumimos el proceso de toma de decisiones desarrollado por los profesores a partir de los elementos del modelo.

Tabla 1

Resumen de los procesos de toma de decisiones de los profesores

| Situación 1 | Situación 2 | Situación 3 | Situación 4 | Situación 5 |
|---|--|--|--|--|
| Situación inesperada | | | | |
| Soluciones no previstas de tres grupos de estudiantes | Solución no prevista de un estudiante | Un grupo de estudiantes no logra hacer bien la correspondencia entre un ángulo y su medida (52°) | Algunos estudiantes no saben cuántos minutos corresponden a una hora | Un grupo de estudiantes no logra hacer una representación mental de un segmento de 15 unidades |
| Propósito | | | | |
| Que los estudiantes confirmen que las soluciones dadas son equivalentes a $5+3(n-1)$ | Que los estudiantes no se confundan al identificar la razón de cambio $(1,25)^n$ | Que los estudiantes identifiquen el ángulo que corresponde a 52° | Que los estudiantes constaten la equivalencia de una hora y 60 minutos | Que los estudiantes identifiquen las equivalencias de regletas del mismo color |
| Opciones | | | | |
| 1. Pasar al tablero solo al estudiante que más se aproximó a la solución prevista 2. Que los tres grupos presenten la solución | 1. Permitirle al estudiante desarrollar su idea y ayudarle a presentar su solución 2. Seguir preguntado a otros estudiantes si tenían la respuesta prevista | 1. Continuar con la explicación en el tablero y apoyarse en los compañeros 2. Dar la respuesta correcta 3. Pedir al estudiante que tome un transportador e identifique la medida que le correspondía al ángulo de 52° | 1. Decirles a los estudiantes a cuánto equivale un cuarto de hora 2. Explicar la lectura del reloj análogo y las diferentes equivalencias de minutos y porciones de horas | 1. Presentar un ejemplo con una regleta de un color específico 2. Pedir a un estudiante que pase al tablero 3. Pedir a todos los estudiantes que formen una fila que puedan tener de referencia física |

Tabla 1

Resumen de los procesos de toma de decisiones de los profesores

| Situación 1 | Situación 2 | Situación 3 | Situación 4 | Situación 5 |
|--|---|--|--|---|
| Valoración y selección de una opción | | | | |
| La profesora escogió la opción 2 porque le permitía que todos los estudiantes conocieran cómo llegaron a las respuestas no previstas y validarlas con sus compañeros | La profesora optó por la opción 2 porque le permitía no confundir a los otros estudiantes | La profesora escogió la opción 3 porque le permitía que los estudiantes manipularan los recursos y verificaran los valores numéricos obtenidos con su representación gráfica | El profesor eligió la opción 2 porque le permitía abordar un conocimiento que el grupo de estudiantes no tenía y que les iba a dificultar otras tareas posteriores | El profesor escogió la opción 3 porque le permitía lograr su propósito sin insinuar la respuesta a la pregunta, situación que podía darse con las primeras dos opciones |
| Secuencia de acciones | | | | |
| Pide a los estudiantes que pasen al tablero, en el orden en que ella identificó las respuestas, y que presenten su solución | No continuar preguntando al estudiante y preguntar a otro estudiante cuál fue su solución | Pide a un estudiante que mida con el transportador y valide la correspondencia con el ángulo dado | Realizar un dibujo del reloj análogo en el tablero y explicar las equivalencias entre minutos y horas | Pide que formen una figura con una ficha de color naranja y una de color amarillo, y que completen con regletas de un solo color toda esa línea |

En las cinco situaciones descritas, los profesores informan que ellos interpretan estas situaciones como no establecidas en sus guiones ni en sus rutinas. Ellos ponen de manifiesto que formularon un propósito con motivo de la situación; que, a partir de ese propósito, generaron al menos dos posibles opciones; que valoraron estas opciones a partir de sus implicaciones; y que pusieron en marcha una secuencia de acciones con motivo de la opción elegida. La información de la tabla 1 evidencia que, para todas las situaciones inesperadas que identificamos con los profesores estudiados, el modelo de Pinzón y Gómez (2019) permite describir detalladamente sus procesos de toma de decisiones.

CONCLUSIONES

En este artículo, presentamos evidencia de un modelo que permite describir la toma de decisiones del profesor de matemáticas a partir de cinco elementos: las situaciones inesperadas, el propósito que el profesor formula con motivo de la situación inesperada, las opciones consideradas por el profesor, la valoración de esas opciones, la selección de una de ellas y la secuencia de acciones como consecuencia de la opción seleccionada (Pinzón y Gómez, 2019). A partir del estudio de caso de tres profesores de secundaria y media, en el que ellos describen

su proceso cognitivo en situaciones inesperadas, hemos mostrado que el modelo capta su proceso de toma de decisiones.

A diferencia del modelo de Schoenfeld (2000, 2015), el modelo no es predictivo; es solo descriptivo. Por tanto, las opciones descritas en este estudio fueron formuladas y valoradas por los mismos profesores y no obedecen a modelos de cálculo subjetivo del valor esperado o de optimización. Además, nuestra metodología atiende a la necesidad que otros estudios han sugerido de recolectar información directamente de la voz del profesor y no solo de fuentes externas o de quien lo observa (Stockero y Van Zoest, 2013).

Aunque no es el propósito de este artículo, los casos de los profesores Carla, Belén y Fabio nos permiten hacer una primera aproximación a la caracterización del proceso de toma de decisiones a partir de los cinco elementos del modelo.

La identificación de las situaciones inesperadas es coherente con lo que se reporta en la literatura. Stockero y Van Zoest (2013) definen este tipo de situaciones como una interrupción en el flujo de la clase que brinda una oportunidad al profesor de modificar la instrucción. Esta interrupción puede ser producto de errores en las afirmaciones de los estudiantes, estrategias de solución no previstas o preguntas de los estudiantes. En los casos estudiados, las dos primeras situaciones surgen de estrategias de solución no previstas y las tres situaciones restantes a partir afirmaciones erradas de los estudiantes.

En las cinco situaciones descritas, identificamos dos tipos de propósitos. De una parte, tenemos aquellos propósitos focalizados en el estudiante o grupo de estudiantes que tiene una dificultad —situaciones 1, 3, 4 y 5—, y constituyen una formulación del propósito en un sentido positivo, en tanto se quiere que logren algo (que los estudiantes confirmen con sus pares las soluciones dadas; identifiquen el ángulo que corresponde a 52° ; realicen una representación equivalente con una regleta de 15 unidades o realicen la equivalencia de una hora y 60 minutos). De otra parte, el propósito puede formularse en función del grupo o estudiante que no tiene la dificultad —situación 2—, y constituyen una formulación en un sentido negativo, en tanto se quiere que no suceda algo (que los estudiantes no se confundan). Y, aunque en una situación particular pueden confluir varias expectativas (objetivos de la sesión, metas de las tareas y propósito), al solicitar a los profesores que describieran su proceso cognitivo, la formulación del propósito nos permite ver la alineación de estos niveles de expectativas.

De las opciones que los profesores consideraron, observamos que es posible, como lo indica Klein (2008), que se consideren opciones cercanas a experiencias previas o familiares (pasar al tablero solo al estudiante que más se aproximó a la solución prevista, seguir preguntando a otros estudiantes para ver si tenían la respuesta prevista, dar la respuesta correcta, dar una explicación), o se generen opciones particulares que emergen de la situación (como pedirle al estudiante que realice ciertos procedimientos —tomar un transportador e identificar la medida que le correspondía al ángulo de 52° o formar una fila de fichas que pudieran tener de referencia físicamente—).

De igual manera, las opciones consideradas por los profesores del estudio pueden clasificarse según el sujeto sobre el cual recaen las acciones. Por una parte, algunas opciones hacen referencia a acciones centradas en el estudiante (p. ej., pasar al tablero o seguir unos procedimientos) y otras acciones hacen referencia a acciones centradas en el profesor (p. ej., dar explicaciones o dar la respuesta correcta). Finalmente, se formularon opciones para abordar un conocimiento de manera particular (presentar un ejemplo con una regleta de un color específico) y, otras, para abordar el conocimiento de manera más general, dentro de una

estructura matemática más amplia (explicación de la lectura del reloj análogo y las diferentes equivalencias de minutos y porciones de horas).

Respecto al proceso de valoración y selección de las opciones, los profesores valoraron cada opción a partir de las implicaciones que tiene cada una de ellas en el alcance del propósito que se formularon con motivo de la situación. Los profesores informaron en todos los casos qué implicaciones conllevaban cada una de sus opciones (p. ej., “Quería que él mismo comprobara las unidades [grados], ahí en la hoja pueden tomar bien la medida... Si él confronta lo que dice con lo que ve, ya él va a entender”). Y, aunque no tenemos evidencia suficiente, este proceso parece corresponder con lo reportado en la literatura: en situaciones espontáneas, la valoración de las opciones se realiza una por una, secuencialmente, y no en un solo proceso paralelo en el que se consideran todas las opciones simultáneamente (Johnson y Raab, 2003). Respecto a las secuencias de acciones, no identificamos elementos suficientes que nos permitan clasificarlas.

Para concluir, consideramos que este estudio tiene implicaciones para futuras líneas de investigación. Por ejemplo, el modelo de toma de decisiones puede usarse en estudios de evaluación en programas de formación de profesores. Nos proponemos continuar con estudios que permitan caracterizar en mayor detalle los procesos de toma de decisiones de los profesores para, posteriormente, determinar si un programa de formación puede tener efectos en la toma de decisiones de los profesores participantes. Como indican Remillard y Heck (2014), al planificar e implementar el currículo, el profesor toma decisiones que dependen del conocimiento que tenga sobre el contenido matemático, el aprendizaje de ese contenido y la enseñanza del mismo. El modelo que proponemos tiene potencial para hacer evidente los conocimientos que los profesores ponen en juego tanto al formular las opciones como al realizar su respectiva valoración. Por tanto, podremos contrastar el conocimiento que ponen en juego con la formación recibida en un programa de desarrollo profesional particular.

REFERENCIAS

- Bishop, A. J. (2008). Decision-making, the intervening variable. En P. Clarkson y N. Presmeg (Eds.), *Critical issues in mathematics education* (pp. 29-35). Dordrecht: Springer.
- Blömeke, S., Gustafsson, J.-E. y Shavelson, R. J. (2015). Beyond Dichotomies. *Zeitschrift für Psychologie*, 223(1), 3-13.
- Clough, M. P., Berg, C. A. y Olson, J. K. (2009). Promoting effective science teacher education and science teaching: A framework for teacher decision-making. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7(4), 821-847.
- Desimone, L. M. (2009). Improving impact studies of teachers' professional development: Toward better conceptualizations and measures. *Educational researcher*, 38(3), 181-199.
- Herbst, P., Chazan, D., Kosko, K. W., Dimmel, J. y Erickson, A. (2016). Using multimedia questionnaires to study influences on the decisions mathematics teachers make in instructional situations. *ZDM*, 48(1), 167-183.
- Hora, M. T. (2012). Organizational factors and instructional decision-making: A cognitive perspective. *The Review of Higher Education*, 35(2), 207-235.
- Johnson, J. G. y Raab, M. (2003). Take the first: Option-generation and resulting choices. *Organizational behavior and human decision processes*, 91(2), 215-229.
- Klein, G. (2008). Naturalistic decision making. *Human factors*, 50(3), 456-460.

- Klein, G., Calderwood, R. y Clinton-Cirocco, A. (2010). Rapid decision making on the fire ground: The original study plus a postscript. *Journal of Cognitive Engineering and Decision Making*, 4(3), 186-209.
- Lyle, J. (2003). Stimulated recall: a report on its use in naturalistic research. *British Educational Research Journal*, 29(6), 861-878.
- Pinzón, A. y Gómez, P. (2019). Un modelo para la toma de decisiones del profesor de matemáticas. *PNA*, 13(3), 130-146.
- Remillard, J. y Heck, D. (2014). Conceptualizing the curriculum enactment process in mathematics education. *ZDM*, 46(5), 705-718.
- Santagata, R. y Yeh, C. (2016). The role of perception, interpretation, and decision making in the development of beginning teachers' competence. *ZDM*, 48(1-2), 153-165.
- Schoenfeld, A. H. (2000). Models of the Teaching Process. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), 243-261.
- Schoenfeld, A. H. (2015). How we think: A theory of human decision-making, with a focus on teaching. En *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 229-243): Springer.
- Shavelson, R. J. y Stern, P. (1981). Research on teachers' pedagogical thoughts, judgments, decisions, and behavior. *Review of educational research*, 51(4), 455-498.
- Stigler, J. W., Gallimore, R. y Hiebert, J. (2000). Using video surveys to compare classrooms and teaching across cultures: Examples and lessons from the TIMSS video studies. *Educational Psychologist*, 35(2), 87-100.
- Stigler, J. W., Gonzales, P., Kawanaka, T., Knoll, S. y Serrano, A. (1999). The TIMSS videotape classroom study: Methods and findings from an exploratory research project on eighth-grade mathematics instruction in Germany, Japan, and the United States. *Education Statistics Quarterly*, 1(2), 109-112.
- Stockero, S. L. y Van Zoest, L. R. (2013). Characterizing pivotal teaching moments in beginning mathematics teachers' practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(2), 125-147.

8. CONCLUSIONES

El conocimiento del profesor y los programas en los que se forma o se desarrolla profesionalmente han sido dos de los focos de atención dentro de la literatura de investigación (Ball, 2004; Even y Ball, 2009; Krainer y Wood, 2007; Llinares y Krainer, 2006; Sullivan, 2008). La literatura sobre formación de profesores se pregunta por cómo debe ser esta formación y cómo puede tener efecto en las prácticas de aula del profesor de modo que, luego, estas prácticas tengan un impacto en el aprendizaje de los estudiantes. Me propuse evaluar un programa de formación de profesores de matemáticas de secundaria y media que participa en la política pública de formación de profesores “Excelencia docente” del Ministerio de Educación (MEN), la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes, en el nivel de las prácticas de planificación e implementación y en la descripción del proceso de toma de decisiones que desarrollan sus egresados, en dos estudios. Para el primer estudio me propuse caracterizar la actuación de los profesores que han participado en el programa de formación, desde las perspectivas de la planificación y la implementación, y comparar estas caracterizaciones antes y después de su participación.

Respecto al primer objetivo, en el capítulo tres, caractericé a un grupo de profesores desde las prácticas de planificación en el que se resalta que los procedimientos y criterios de planificación tienden a ser genéricos en lugar de específicos para la clase en cuestión y que la visión de la planificación de estos profesores no necesariamente garantiza un enfoque coordinado de todas las dimensiones curriculares. En el capítulo cuatro, caractericé a otro grupo de profesores desde las prácticas de implementación, en particular desde las reacciones de los profesores a errores y estrategias no previstas de los estudiantes. Allí, encontré que, en sus reacciones a los errores de los estudiantes, la mayoría de los profesores tienen una reacción centrada en el profesor y, para aquellas respuestas centradas en el estudiante, los profesores prefieren proponer nuevas actividades más que hacer preguntas a los estudiantes sobre lo realizado. Adicionalmente, encontré que las reacciones a las estrategias no previstas se diferencian de las reacciones a los errores porque los profesores evalúan, corrigen y aceptan esas estrategias.

Respecto al segundo objetivo, en el capítulo cinco presenté los efectos del programa de formación al comparar las prácticas de los profesores antes y después de su participación (además, de las prácticas de planificación e implementación, incluí la práctica de evaluación). Encontré que los efectos más relevantes del programa de formación se evidencian en las prácticas de planificación (mayor uso de documentos curriculares, mayor previsión de errores, y una mejor selección y secuenciación de tareas), en las prácticas de implementación (mejores reacciones a errores e interacciones centradas en los estudiantes) y en las prácticas de evaluación (mejor uso de la evaluación para el aprendizaje de los estudiantes y para la mejora de la enseñanza). Estos progresos son estadísticamente significativos y se concretan en un efecto global de 0,52 desviaciones estándar. Este es un efecto deseable en intervenciones educativas (Gertler, Martínez, Premand, B. y Vermeersch, 2017). Por tanto, puedo afirmar que el programa cumple con su finalidad de contribuir a la capacidad del profesor para diseñar e implementar oportunidades de aprendizaje que contribuyan a la mejora del rendimiento de los escolares en matemáticas (Gómez, 2015).

Realicé la evaluación del programa de maestría al nivel de las prácticas curriculares (Guskey, 2000). Como señalé en el capítulo seis, aunque el estudio es en Colombia, los resultados también pueden ser relevantes para otros contextos en el mundo porque, a pesar de sus limitaciones, el

método de comparar prácticas curriculares “antes y después” por medio de un cuestionario es un enfoque económico y práctico en la evaluación de la formación docente. No obstante, es posible complementar esta evaluación con información de otros niveles. Por ejemplo, se podría realizar una evaluación de impacto sobre los aprendizajes de los estudiantes de los profesores participantes.

Para el segundo estudio, me propuse contribuir con un modelo de toma de decisiones del profesor y comprobar que el modelo permite describir el proceso de toma de decisiones de los profesores. Al respecto, en el capítulo seis, presenté un modelo que es una contribución a la literatura porque integra y relaciona, de una nueva manera, las ideas clave descritas desde la educación (Bishop, 2008; Schoenfeld, 2015b; Shavelson y Stern, 1981) y desde la psicología (Klein, 2008). En este sentido, el modelo complementa los modelos existentes.

En cuanto al último objetivo, en el capítulo siete, presenté evidencia de que el modelo permite describir la toma de decisiones del profesor de matemáticas a partir de cinco elementos: las situaciones inesperadas, el propósito que el profesor formula con motivo de la situación inesperada, las opciones consideradas por el profesor, la valoración de esas opciones, la selección de una de ellas y la secuencia de acciones como consecuencia de la opción seleccionada. En la literatura, podemos encontrar otros estudios que coinciden en la importancia de la interpretación de las situaciones inesperadas como determinante de las decisiones del profesor (Stockero y Van Zoest, 2013) y del potencial del modelo naturalista para comprender la toma de decisiones del profesor (Hora, 2012).

Para este último objetivo es importante aclarar que, al inicio de la investigación, me propuse comparar las prácticas curriculares de los profesores que hubiesen participado en el programa de formación y de otro grupo de profesores que no hubiesen participado en el programa, en relación con el proceso de toma de decisiones, para posteriormente establecer efectos del programa en las decisiones del profesor egresado del programa. Empero, debido al confinamiento que tuvo el país a partir del segundo trimestre del año 2020, no fue posible recolectar toda la evidencia, en observaciones de clase, que permitiera realizar esta comparación.

En resumen, la participación de los profesores en el programa de maestría muestra un avance significativo en las prácticas de planificación e implementación y, con base en la evidencia, sugiero continuar con esta formación. En el caso particular de los profesores de matemáticas, los profesores realizan mejor su planificación al alinearse con los documentos curriculares y tienen una mayor previsión de errores, y una mejor selección y secuenciación de tareas (Pinzón y Gómez, 2020). En las prácticas de implementación, sus reacciones a errores e interacciones están más centradas en los estudiantes y menos en el profesor.

Igualmente, la evaluación realizada me ofrece información sobre las oportunidades de mejora del programa y sobre las necesidades de los profesores de matemáticas para futuras oportunidades de desarrollo profesional. Algunas de estas necesidades están relacionadas con las prácticas planificación: mayor uso de la estructura conceptual, una mejor previsión de expectativas de aprendizaje, inclusión de materiales y recursos en las tareas, previsión de las actuaciones y estrategias de solución de las tareas por parte de los estudiantes y planificar la evaluación. En cuanto a las necesidades de las prácticas de implementación se requiere de los profesores que, frente a estrategias no previstas de solución de tareas, sus reacciones se centren más en los estudiantes y menos en la actuación del profesor.

Para concluir, y en relación con el segundo estudio, considero que la línea de investigación sobre toma de decisiones se puede continuar con estudios que permitan caracterizar en mayor

detalle los procesos de toma de decisiones de los profesores para, posteriormente, determinar si el programa de formación puede tener efectos en la toma de decisiones de los profesores participantes. Como señala Kennedy (2016), los programas de formación que reflexionan sobre la propia práctica reconocen la importancia de las decisiones espontáneas de los profesores y esperan alterar esas decisiones al cambiar la manera en que los profesores interpretan las situaciones del aula inesperadas y, por tanto, cómo responden a ellas.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a todas la personas e instituciones que de una u otra forma contribuyeron a este logro. Son tantas personas a las que debo a agradecer, que me excuso de antemano por no nombrarlas a todas.

En primera medida, a mi esposa Mónica y mis hijos Sebastián, Sergio y Santiago. Por el tiempo que no pude compartir con ellos y que pacientemente esperaron.

A mis padres, Teo y Alvaro. A mis segundos padres, Blanca y Edgar. Sus consejos siempre están llenos de sabiduría.

A mi director, Pedro Gómez, por su guía, dedicación, comentarios y experiencia. Cada línea escrita y cada idea propuesta contó siempre con su acompañamiento. Realmente, un privilegio.

A mi María José González. Sus comentarios y sugerencias hicieron posible que cada manuscrito llegara a buen puerto. Su guía durante la pasantía fue fundamental.

A mis colegas y amigos, Paola Castro, Carlos Velasco y Oscar Duitama. Sus críticas siempre fueron bienvenidas. Son mi gran compañía.

A mis maestros, desde la primaria hasta el doctorado, dejaron huella en mi formación como profesor de matemáticas.

A mis estudiantes. Inspiración para ser mejor profesor cada día.

A los otros amigos, familiares y colegas que estuvieron presentes en todo el proceso.

Finalmente, a la Fundación Compartir y Minciencias por su apoyo financiero en mis estudios de posgrado.

9. REFERENCIAS

- Ball, D. L. (2004). What are teachers learning? En *National Council of Supervisors of Mathematics*. Philadelphia, PA.
- Bautista, A. y Ortega-Ruíz, R. (2015). Desarrollo profesional docente: perspectivas y enfoques internacionales. *Psychology, Society, & Education*, 7(3), 343-355.
- Bayar, A. (2014). The components of effective professional development activities in terms of teachers' perspective. *International Online Journal of Educational Sciences*, 6(2), 319-327.
- Bishop, A. J. (2008). Decision-making, the intervening variable. En P. Clarkson y N. Presmeg (Eds.), *Critical issues in mathematics education* (pp. 29-35). Dordrecht: Springer.
- Cho, J. (1998). *Rethinking curriculum implementation: Paradigms, models, and teachers' work*. Trabajo presentado en Annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA.
- Cohen, D. K. y Ball, D. L. (1999). Instruction, capacity, and improvement. *CPRE Research Report, RR-43*, 47.
- Courey, S. J., Tappe, P., Siker, J. y LePage, P. (2013). Improved Lesson Planning With Universal Design for Learning (UDL). *Teacher Education and Special Education: The Journal of the Teacher Education Division of the Council for Exceptional Children*, 36(1), 7-27. Disponible en <http://tes.sagepub.com/content/36/1/7.abstract>
- Darling-Hammond, L., Hyler, M. E. y Gardner, M. (2017). *Effective teacher professional development*. Palo Alto, CA: Learning Policy Institute.
- Even, R. y Ball, D. (Eds.). (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study*. Dordrecht: Springer.
- Fullan, M. y Pomfret, A. (1977). Research on Curriculum and Instruction Implementation. *Review of Educational Research*, 47(2), 335-397. Disponible en <http://www.jstor.org/stable/1170134>
- Gertler, P. J., Martínez, S., Premand, P., B., R. L. y Vermeersch, C. M. J. (2017). *La evaluación de impacto en la práctica*. Washington: BID - Banco Mundial.
- Gómez, P. (Ed.). (2018). *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Guskey, T. R. (2000). *Evaluating professional development*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.
- Herbst, P., Chazan, D., Kosko, K. W., Dimmel, J. y Erickson, A. (2016). Using multimedia questionnaires to study influences on the decisions mathematics teachers make in instructional situations. *ZDM*, 48(1), 167-183. Disponible en <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-015-0727-y>
- Hora, M. T. (2012). Organizational factors and instructional decision-making: A cognitive perspective. *The Review of Higher Education*, 35(2), 207-235.
- Kennedy, M. M. (2016). How does professional development improve teaching? *Review of educational research*, 86(4), 945-980.
- Klein, G. (2008). Naturalistic decision making. *Human factors*, 50(3), 456-460.
- Krainer, K. y Wood, T. (Eds.). (2007). *The international handbook of mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers.

- Lai, E. y Lam, C. C. (2011). Learning to teach in a context of education reform: liberal studies student teachers' decision-making in lesson planning. *Journal of Education for Teaching*, 37(2), 219-236. Disponible en <http://bit.ly/2N1BUSe>
- Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 429-459). Rotterdam: Sense Publishers.
- MEN. (2015). Becas para la excelencia docente. Descargado el 22 de octubre de 2015, 2015
- Ministerio de Educación (MEN). (2018). Becas para la excelencia docente: educación por un nuevo país. Descargado, de <https://bit.ly/33Jflve>
- Mowbray, C. T., Holter, M. C., Teague, G. B. y Bybee, D. (2003). Fidelity criteria: Development, measurement, and validation. *American journal of evaluation*, 24(3), 315-340.
- Pinzón, A. y Gómez, P. (2020). *A collaboration model for the training of in-service secondary mathematics teachers*. Trabajo presentado en ICMI Study 25. Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups, Lisboa, Portugal.
- Remillard, J. y Heck, D. (2014). Conceptualizing the curriculum enactment process in mathematics education. *ZDM*, 46(5), 705-718. Disponible en <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-014-0600-4>
- Rezat, S. (2012). Interactions of Teachers' and Students' Use of Mathematics Textbooks. En G. Guedet, B. Pepin y L. Trouche (Eds.), *From Text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development* (pp. 231-245). Dordrecht: Springer Netherlands. Disponible en http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-1966-8_12
- Rico, L. (1997). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 377-414). Madrid: Síntesis. Disponible en <https://webcat.uniandes.edu.co/uhtbin/cgiisirs/GENERAL/1/0/20/0/1/X57004250212567>
- Ruiz Bueno, C. y Tejada Fernández, J. (2001). *La evaluación de programas de formación de formadores en el contexto de la formación en y para la empresa*. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.
- Sardo-Brown, D. (1996). A longitudinal study of novice secondary teachers' planning: Year two. *Teaching and teacher education*, 12(5), 519-530. Disponible en <http://bit.ly/2ztSAQq>
- Schoenfeld, A. H. (2000). Models of the Teaching Process. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), 243-261.
- Schoenfeld, A. H. (2015a). How we think: A theory of human decision-making, with a focus on teaching. En *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 229-243): Springer.
- Schoenfeld, A. H. (2015b). How we think: A theory of human decision-making, with a focus on teaching. En *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 229-243): Springer.
- Shavelson, R. J. y Stern, P. (1981). Research on teachers' pedagogical thoughts, judgments, decisions, and behavior. *Review of educational research*, 51(4), 455-498.

- Stockero, S. L. y Van Zoest, L. R. (2013). Characterizing pivotal teaching moments in beginning mathematics teachers' practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(2), 125-147. Disponible en <https://doi.org/10.1007/s10857-012-9222-3>
- Sullivan, P. (2008). Knowledge for teaching mathematics: an introduction. En P. Sullivan y T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education* (pp. 11-12). Rotterdam: Sense Publishers.
- Worrell, F., Brabeck, M., Dwyer, C., Geisinger, K., Marx, R. W., Noell, G., et al. (2014). Assessing and evaluating teacher preparation programs. *American Psychological Association*.
- Yoon, K. S., Duncan, T., Lee, S. W. Y., Scarloss, B. y Shapley, K. (2007). *Reviewing the evidence on how teacher professional development affects student achievement* (Vol. null).
- Zazkis, R., Liljedahl, P. y Sinclair, N. (2009). Lesson plays: Planning teaching versus teaching planning. *For the Learning of Mathematics*, 29(1), 40-47.