Propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la composición de funciones en educación media.

Cesar Camilo Gonzalez Cuchivaguen.

Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas.

Asesora:

Prof. Myriam Sofía Rodríguez Garzón.

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.

Bogotá, D.C.

2020 - I

Índice general

Índice de gráficos.

Índice de tablas.

Dedicatoria

A Dios, el de la Biblia, la Torá o el de Spinoza,

Que siempre me ha acompañado y me ha fortalecido para continuar;

A mi abuela Matilde,

Que siempre creyó en mí aunque nadie más lo hiciera;

A mis padres, Cesar y Diana;

Que mis triunfos sean un reflejo de sus virtudes.

A mis Hermanos, Luisa, Paola y Luis;

Sus vidas me motivan a seguir adelante.

A Adhara;

Estrella en la vida de nuestra familia;

A Martha, me has dado mucho más de lo que merezco,

Y a pesar de todas las adversidades sigue allí;

A mis estudiantes,

Que me motivan a mejorar cada día.

Agradecimientos.

A la Universidad Pedagógica Nacional, mi alma máter.

Gracias por permitirme cumplir un sueño,

Sueño en el que recibí mucha formación para la academia y para la vida.

Al profesor Álvaro Guzmán y a su familia.

Sin su ayuda, motivaciones y ejemplo a seguir, no hubiera dado inicio a esta senda.

A los profesores del departamento de matemáticas.

Todas sus enseñanzas son un faro para mi labor docente.

A mi directora de trabajo de grado, la profesora Myriam Rodríguez,

Gracias por su paciencia, disposición y por todos los consejos que me ha obsequiado.

Al profesor Orlando Aya Corredor.

Gracias por su gran labor docente, es un gran referente para mí.

Al grupo de investigación de geometría,

Especialmente a los profesores Leonor Camargo, Carmen Samper y Óscar Molina.

Gracias por todo lo que me enseñaron en la monitoria.

A Nelson, por su gran amistad, gracias por todo el apoyo,

Y por la fortaleza demostrada en cada lucha, hombro a hombro, biela a biela.

A mis compañeros, que me apoyaron en esos momentos duros de la carrera,

En especial a Jhon, Holman, César, Yesid y Mariana.

La carrera nos hizo hermanos.

A todas las instituciones de prácticas y a los docentes tutores que tuve,

Gracias por los consejos y por brindarme la oportunidad de comenzar a educar.

Introducción.

Se presenta este trabajo en el marco de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, en el que se diseña una propuesta de enseñanza que contribuye a la didáctica de la composición de funciones.

En la primera parte, se muestra un marco referencial histórico en el que se indaga sobre el surgimiento y la evolución del concepto de composición de funciones en el periodo comprendido desde los inicios del cálculo en el siglo XVII hasta la axiomatización del álgebra en la crisis de los fundamentos de las matemáticas en el siglo XX. En seguida se expone un marco pedagógico que muestra la relación existente entre la didáctica de la composición de funciones y la regla de la cadena y, realiza un análisis de lo que indica la normativa curricular en relación a la enseñanza de la composición de funciones.

La revisión de algunos textos de uso común para abordar la enseñanza del concepto de función compuesta en la Educación Media y Superior, sirve de excusa para analizar y comparar la forma en que se aborda el concepto en estos libros. También se incluyen algunas experiencias de aula y propuestas de actividades, en las que se muestran las estrategias que proponen los investigadores consultados para la enseñanza la composición de funciones. El marco didáctico lo complementa una breve exposición acerca de algunas teorías didácticas que han sido utilizadas para enseñar la composición de funciones en el aula de clases.

Se identifica de la revisión teórica, la pertinencia del uso de la teoría APOE y del ciclo de enseñanza ACE, por lo que en la propuesta de enseñanza se plantea una serie de actividades y herramientas didácticas que permiten analizar el tipo de estructura mental que tiene el estudiante en relación a la composición de funciones, al tiempo que potencia tales estructuras y le ayuda desarrollar la abstracción reflexiva al momento de dar cuenta de los procedimientos que realiza cuando resuelve los ejercicios y problemas propuestos relacionados con la composición de funciones.

La propuesta se complementa con cuatro aplicaciones que el autor del presente documento diseñó en GeoGebra y que permiten representar gráficamente las funciones involucradas en la composición y a su vez la función compuesta obtenida, en las representaciones cartesiana y dinagráfica[1]. Estas herramientas están disponibles en el sitio web de GeoGebra y sirven de material didáctico de uso libre por parte de los profesores de matemáticas y del público en general.[2]

Finalmente se hace una reflexión acerca del trabajo desarrollado y se presentan las conclusiones correspondientes, así como algunas recomendaciones dirigidas a aquellos docentes que deseen utilizar esta propuesta didáctica.

[1]Un dinágrafo está conformado por dos ejes paralelos, uno de ellos representa el dominio de la función y el otro al codominio; las parejas ordenadas que hacen parte de la función se representan por segmentos que van desde un eje al otro. Para mayor información ver secciones 2.2.4 y 3.3.1

[2]Disponible en https://www.geogebra.org/u/cesarcamilogonzalez

Capítulo 1

Preliminares.

1.1. Planteamiento del problema.

La composición de funciones es uno de los conceptos abordados en el estudio de las funciones en los últimos cursos de matemáticas escolares y en los primeros cursos de matemáticas universitarias. De manera que se esperaría una buena comprensión de este concepto por parte de los estudiantes; Sin embargo, se identifica a través de la experiencia práctica profesional del autor y de algunos colegas, que el concepto de función en general y, el de composición de funciones en particular, presenta gran dificultad en cuanto a su enseñanza por la manera en que es abordada, haciendo énfasis en la memorización de procedimientos carentes de significado y en cuanto a su aprendizaje y comprensión por parte de los estudiantes.

Teniendo en cuenta lo anterior, se debe analizar con mayor detenimiento la forma en que se enseñan los conceptos y procesos de esta rama de las matemáticas, ya que la forma de enseñar afecta directamente la comprensión de los estudiantes. Bayens (2016), que ha estudiado específicamente este fenómeno en el concepto de función, indica que:

> En el momento en que los estudiantes ingresan a clases de cálculo se asume que comprenden las funciones, que usan la notación de las funciones y que comienzan a aplicar su conocimiento de funciones a problemas más complejos. Un error surge cuando los estudiantes no tienen los fundamentos básicos.

> *Los estudiantes no comprenden las funciones porque no fueron enseñadas de manera que fuera verdaderamente benéfica para el aprendizaje del estudiante*[Énfasis agregado]. El aprendizaje activo puede cambiar esta tendencia y proveer a los estudiantes del fundamento crítico de funciones que necesitan (p.1) [1]."

Un ejemplo claro de la situación que expone Bayens se refleja en la enseñanza de la *regla de derivación de la cadena* y el *método de integración por sustitución*, conceptos y procedimientos que están estrechamente relacionados con la composición de funciones. Autores como Valdivia et al. (2015) y Cottrill (1991) resaltan que la relación entre las funciones, la composición de funciones y la regla de la cadena es intrínseca y, por tanto, las dificultades que se tenga con las funciones compuestas generarán dificultades para comprender la regla de la cadena. Esta situación se puede sintetizar en la siguiente frase: *"las dificultades y errores que se generan en la comprensión de los conceptos y procesos de las funciones acarrearán dificultades y errores en la comprensión de los procesos y conceptos del cálculo."*

Bayens también menciona que si se cambia la forma de enseñar, se tendrán diferentes resultados en el aprendizaje de los estudiantes, pero desafortunadamente la forma en que se abordan los conceptos del cálculo y del precálculo tiene un sesgo marcadamente tradicionalista, tal como lo describen Artigue et al. (1995, p. 97):

> La enseñanza tradicional y en particular la enseñanza universitaria, aun si tiene otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo y a evaluar en esencia las competencias adquiridas en este dominio.

Este sesgo no es mencionado únicamente en Artigue et al. (1995); la investigación de Valdivia et al. (2015, p. 1) describe una situación similar con respecto a este inconveniente:

> En estos cursos [pregrados], generalmente semestrales, se estudian gran cantidad de conceptos cuya comprensión, por parte de los estudiantes, progre-

[1] Traducción realizada por el autor de este documento.

> sivamente se vuelve hacia la operatoria algebraica y la memorización de los procedimientos necesarios para resolver problemas, con el único objetivo de aprobar (. . .). No es de extrañar, entonces, que un estudiante apruebe el curso sin comprender los conceptos matemáticos estudiados, y pierda el potencial que pueden aportar al momento de resolver problemas, por ejemplo, de ingeniería, física, química, entre otros."

Las afirmaciones expuestas anteriormente ponen en evidencia una tendencia enfocada hacia una enseñanza limitada a la ejercitación de algoritmos. Este tipo de enseñanza no permite que el estudiante pueda reflexionar sobre el porqué de los resultados obtenidos ni que se cuestione sobre qué objetos o propiedades subyacen en el algoritmo, lo que tiene como consecuencia que el alumno solo desarrolle ejercicios mecánicamente sin que realmente comprenda qué objetos matemáticos se encuentran involucrados en tales procedimientos.

Con respecto a la composición de funciones, los referentes teóricos arrojan una serie de dificultades y errores que pueden organizase en tres grupos:

- En primer lugar, las dificultades que existen por parte del docente para orientar la enseñanza de este eje temático, como mencionan Valdivia et al. (2015).
- En segundo lugar, los errores y dificultades que tienen los estudiantes para comprender el concepto, como lo indican Steketee y Scher (2012).
- En tercer lugar, la mala ejecución de procedimientos, que es consecuencia directa de los inconvenientes anteriores, tal como lo documentan Ayers et al. (1988) y Echevarría et al. (2010).

A las experiencias de aula expuestas anteriormente se puede añadir la experiencia obtenida durante la Práctica de Integración Profesional a la Escuela realizada durante el año 2019 en el Instituto Pedagógico Nacional. En tal práctica se realizaron actividades correspondientes a la inmersión en el aula con el grado décimo, por lo que se dieron algunas clases en la asignatura de "precálculo", abordando el concepto de la composición de funciones en algunas de estas sesiones.

A medida que se desarrollaron las sesiones de clase de composición de funciones, fueron surgiendo dificultades y errores que pueden caracterizarse en los grupos mencionados anteriormente. Tales inconvenientes sirvieron para reflexionar sobre la complejidad de enseñar y aprender sobre funciones compuestas.

Entre los errores que se evidenciaron en los estudiantes, los más recurrentes fueron:

1. Confundir la composición de funciones con el producto de funciones.

2. No asimilar que el resultado de la composición de funciones genera una nueva función.

3. Equivocarse en procedimientos algebraicos al momento de desarrollar un ejercicio de funciones compuestas, lo que confirma la existencia de errores de tipo conceptual.

Estos errores son mencionados también en las investigaciones de Valdivia et al. (2015), Steketee y Scher (2012) y Cottrill (1991), por lo que se puede evidenciar que estas situaciones pueden ser más comunes de lo que parecen, incluso en distintos contextos sociales, ya que tales investigaciones se realizaron en países como Chile y Estados Unidos en diferentes épocas y arrojan conclusiones similares.

Se evidencia entonces que existe una gran dificultad al momento de abordar la composición de funciones en el aula, dificultad que afecta tanto a docentes como a estudiantes. Esta situación se puede resumir en la siguiente frase: *la enseñanza, el aprendizaje y la comprensión de la composición de funciones no es un asunto sencillo de abordar.*

1.2. Pregunta problema.

¿Cómo se pueden utilizar la teoría APOE y las representaciones gráficas y dinámicas de las funciones en una propuesta de enseñanza y aprendizaje para mejorar la comprensión de los estudiantes con respecto a la composición de funciones?

1.3. Justificación.

La poca documentación hallada y que estuviera relacionada con la didáctica de las funciones compuestas y las dificultades encontradas en las investigaciones sobre didáctica funciones compuestas (que también fueron vivenciadas durante la práctica PIPE) son los motivos que llevan a diseñar una propuesta didáctica que sirva como herramienta de enseñanza y aprendizaje de la composición de funciones.

La propuesta didáctica a desarrollar tiene como enfoque aportar herramientas que le ayuden al estudiante a mejorar su comprensión con respecto a los conceptos y procesos asociados a la composición de funciones, no sólo a nivel algorítmico sino a nivel conceptual. Con esta propuesta se busca que los estudiantes hallen un verdadero sentido a los algoritmos que realizan, esto por medio de la reflexión que tengan sobre las actividades (ejercicios y problemas) que se desarrollen en las aulas y, complementadas por las distintas representaciones que puedan tener las funciones compuestas, en especial las gráficas en el plano cartesiano y los dinagrafos.

La propuesta se fundamentará teóricamente bajo el modelo y teoría APOE desarrollada por Dubinsky y McDonald (2001) y Asiala et al. (1996) debido a que ésta se desarrolló para analizar y potenciar la comprensión del razonamiento abstracto del sujeto. Esta teoría está en constante evolución gracias al grupo RUMEC. Investigadores como Cottrill (1991) y Roa-Fuentes y Oktaç (2009) pertenecen a este grupo y han desarrollado descomposiciones genéticas que se ajustan a lo buscado en la comprensión conceptual de la composición de funciones.

Para complementar la teoría APOE y, teniendo en cuenta la teoría de las representaciones semióticas de Duval y Saenz (2016), así como en la propuesta de Steketee y Scher

(2012), se optará por el uso de representaciones gráficas de las funciones compuestas por medio del software de geometría dinámica Geogebra, ya que tal software permite generar actividades en las que las representaciones (gráficas y analíticas, predominantemente) de las funciones compuestas se visualicen de manera no estática (como en las representaciones de papel o en un tablero) para que el estudiante puede interactuar virtualmente con las representaciones de los objetos matemáticos, lo que permite que el aprendizaje sea más significativo (Bayens, 2016). Otra ventaja que tiene este software es su libre acceso por medio de su portal web, lo que hace que cualquier persona con conexión a internet y con un dispositivo de cómputo o móvil pueda acceder a los recursos en el lugar y momento que los requieran.

Con esta propuesta se contribuye a la comunidad académica con un documento teórico-práctico que sirve como referente para abordar la enseñanza y aprendizaje de la composición de funciones. La realización de este trabajo de grado también beneficia directamente a las instituciones en donde se realizan prácticas de inmersión, ya que se puede utilizar como referente para los maestros en formación que requieran abordar el concepto de función y composición de funciones en sus prácticas. La universidad también podría beneficiarse al aplicar esta propuesta en sus cursos de precálculo de primer semestre, en los que hay estudiantes que pueden tener inconvenientes conceptuales y procedimentales con relación a las funciones compuestas.

1.4. Objetivos.

1.4.1. Objetivo general.

Favorecer la comprensión del concepto de composición de funciones en los estudiantes de la media a partir del diseño de una propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de este concepto, fundamentada en el Modelo APOE y complementada con el diseño de aplicaciones (apps) con las que se puedan representar gráficamente funciones compuestas en el software de matemáticas GeoGebra.

1.4.2. Objetivos específicos.

1. Fortalecer la comprensión de los estudiantes sobre la composición de funciones a través del diseño de una propuesta que se fundamente en aspectos histórico-didácticos y que contenga información relevante sobre los aspectos a priorizar en la enseñanza del concepto.

2. Propiciar la comprensión que tiene los estudiantes sobre la composición de funciones y sobre las funciones compuestas a través de un marco teórico fundamentado en el modelo APOE, fundamentado en la revisión de textos de educación secundaria, superior y de matemáticas para analizar el abordaje que éstos realizan con respecto a la enseñanza de la composición de funciones.

3. Mejorar la comprensión de la composición de funciones en los estudiantes de la media haciendo uso de herramientas tecnológicas que permitan la visualización y manipulación de representaciones gráficas del objeto matemático.

Capítulo 2

Marco referencial.

En el marco referencial se aborda la composición de funciones a partir de la exploración de los marcos histórico, didáctico y pedagógico. En primer lugar se presenta el contenido histórico, que permite reconocer en qué época aparecieron las funciones compuestas en la literatura, su relación histórica con la regla de la cadena y cómo la composición de funciones se axiomatiza bajo el álgebra abstracta durante la crisis de los fundamentos de las matemáticas del siglo XX.

Después de exponer el contexto histórico se presenta un marco didáctico conformado por la revisión de algunos textos utilizados en el ámbito académico para enseñar la composición de funciones. Dicha búsqueda estuvo enfocada en analizar la forma en que algunos autores introducen la composición de funciones y cuáles son los conceptos, propiedades y algoritmos que priorizan. También se investigaron algunas propuestas de actividades en clase, así como experiencias de aula que muestran los trabajos que se han desarrollado, exponiendo tales experiencias y sus respectivas conclusiones.

Finalmente se presentan algunas teorías pedagógicas que se han utilizado para la comprensión de la composición de funciones a nivel escolar y se relata la experiencia propia en cuanto al abordaje de este concepto en el aula.

2.1. Marco histórico.

La historia de las matemáticas parece tener poca documentación explícita sobre la historia y surgimiento de la composición de funciones. Esta situación podría deberse a que en los inicios del manejo de la noción de función -e inclusive desde los inicios del cálculo- los casos en que una función dependía de otra se consideraban ‘usuales’ y se analizaban a partir de sustituciones de variables, por lo que no se ahondaba en el estudio de las funciones que dependían de otras. Un ejemplo de esta situación se puede evidenciar en el método que estableció Leibniz para el cálculo de derivadas por la regla de la cadena, tal como citan (Hernández y López, 2010, p. 325):

> Por lo que podemos decir, la primera mención de la regla de la cadena en la literatura del cálculo parece ser debido a Leibniz (Child, 2007, p. 126), y tal aparece en una memoria de 1676 (que contiene varios errores) en la que calcula $d\sqrt{a+bz+cz^2}$ *por medio de la sustitución* $x = a+bz+cz^2$ [Énfasis agregado].

La búsqueda histórica de la composición de funciones está estrechamente relacionada a la historia de la regla de la cadena. Este fenómeno debe ser tenido en cuenta para obtener una mejor perspectiva sobre el papel que pudo haber jugado la composición de funciones en su descubrimiento (o viceversa). A continuación se presenta una breve reseña de la historia de dicha regla.

Hernández y López (2010, p. 324) mencionan que la regla de la cadena apareció por primera vez en la obra de L’ Hoppital *analyses des infinitement petites* de 1696 (aunque Leibniz ya había utilizado sustituciones para solucionar estas operaciones, como se había mencionado anteriormente). En el libro, L´Hoppital desarrolla su cálculo fundamentado en *incrementos infinitesimales*, ya que en tal época las curvas se consideraban ‘polígonos con un número infinito de lados de tamaño infinitesimamente pequeño’ (p. 324) y, esta concepción conllevó a que no se establecieran primero las funciones compuestas para definir la regla de la cadena.

Hernández y López (2010, p. 324) indican que la concepción de los infinitesimales era muy usual en la época y esto afectó directamente la producción documental de los conceptos del cálculo en ese tiempo. Un ejemplo de este fenómeno se ve en la producción de Euler:

> Puede ser incluso más sorprendente darse cuenta que el enunciado de la regla de la cadena también está ausente en todos los libros de análisis de Euler, *introductio in analysin infinitorum* y *institutiones calculi differentialis.* Además, Euler definió el concepto de una función en 1748 *pero nunca trató el tópico de la composición de funciones en ninguno de sus escritos*[énfasis agregado] (p. 325).

Campistrous et al. (1999) complementan lo que mencionan Hernández y López (2010) al señalar que:

> En los capítulos II y III de (Euler 1748), se tocan los temas sobre “transformación de funciones” y “sobre la transformación de funciones por sustitución” y esto es, hasta donde se sabe, lo más cercano que él llega a la noción de composición de funciones (p. 60).

(Campistrous et al., 1999, p. 60) también resaltan que, según Cajori (1929), Euler empleó la notación funcional $f(\frac{x}{a} + C)$ que evidencia el *uso de variables dependientes en funciones distintas a la original*[énfasis agregado], aunque también se aclara que esta notación era poco usual en la época.

Teniendo en cuenta la situación anterior, se evidencia que la forma en que se abordan las funciones compuestas y la regla de la cadena no se corresponde a la forma en que los conceptos surgieron históricamente. Con respecto a este fenómeno, Hernández y López (2010) mencionan que: “Dado que la idea de composición de funciones parece haber aparecido en la literatura *al menos un siglo después*[Énfasis agregado] de la publicación *analyses des infinitement petites*, es imposible que los símbolos y significados relevantes al surgimiento de la regla de la cadena en el siglo XVII sean los mismos que asociamos a la versión presente de la regla de la cadena” (p. 323). [1], aunque hay que tener en cuenta que

[1]Traducción realizada por el autor de este documento

autores como Campistrous et al. (1999) aumentan este periodo de tiempo: "Es anacrónico imaginar que la regla de la cadena según empleada en los escritos de L´Hoppital y de Euler tiene alguna relación con la composición de funciones. En la historia de la matemática la noción de composición de funciones surge *al menos dos siglos despuésde la publicación del escrito de L'Hoppital* [Énfasis agregado]" (p. 51).

Aunque las funciones compuestas se manipulaban 'naturalmente' a partir de cambios de variables desde los inicios del cálculo en el siglo XVII (como se mencionó en los párrafos anteriores), la composición de funciones aparece explícitamente como objeto matemático junto a otros conceptos del cálculo y los sistemas numéricos en la literatura durante la axiomatización del álgebra abstracta, desarrollada durante los siglos XIX y XX (Guerrero, 2004, p. 86). En 1949 el grupo Bourbaki utiliza la notación "$f \circ g$" para referirse a la función $f(g(x))$ en su libro *Fonctions d'une variable réelle*, por lo que parece ser que fueron ellos quienes introdujeron el símbolo de la composición de funciones que se utiliza actualmente ya que no se ha encontrado un documento anterior a éste en el que se utilice tal notación.

Cuando se hace referencia sobre la aparición del concepto en la literatura, se hace mención a la definición formal de composición de funciones que se conoce hoy en día, que también es la definición más difundida en las aulas de clase (véase p.e. Stewart (2008), p. 40):

Definición 1 *Dadas las dos funciones f y g, la función compuesta $f \circ g$, también llamada composición de f y g está definida por:*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

El siguiente mentefacto ilustra la relación que hay entre el álgebra de funciones, la composición de funciones y la función compuesta.

La composición es una operación que se hace entre dos o más funciones, cuyo resultado (en caso de poder realizarse) se denomina *función compuesta*. La operación de composición no es conmutativa y difiere de la suma y el producto de funciones. Para poder realizar la composición $(f \circ g)(x)$ se deben satisfacer las siguiente condiciones: $x \in Dom(g)$ y que $g(x) \in Dom(f)$

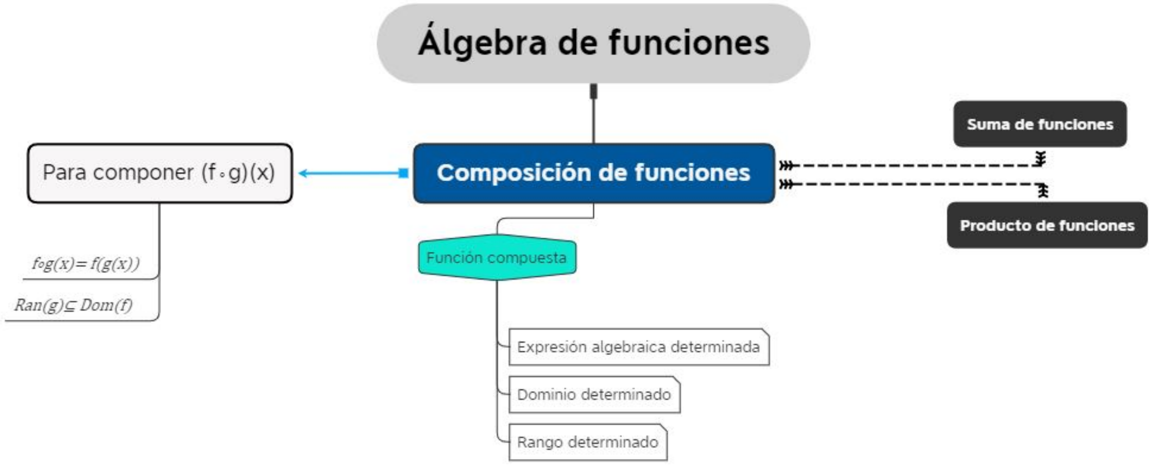

Figura 2.1: Mentefacto de la composición de funciones.

Lo que la historia de las matemáticas establece es que primero se estableció la regla de la cadena en el siglo XVII y luego se documentó sobre la composición de funciones durante los siglos XIX y XX, aunque se hubiesen utilizado funciones compuestas implícitamente a partir de cambios de variable desde los propios inicios del cálculo.

2.2. Marco didáctico.

A continuación se realiza un análisis sobre referentes didácticos en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la composición de funciones. En primer lugar se analizan documentos didácticos de las funciones compuestas, y se revisa la relación didáctica que tiene la regla de la cadena y la composición de funciones. En segundo lugar se expone lo que indica la normativa curricular con respecto a la composición de funciones. Después se analiza el abordaje que algunos textos le dan a este concepto, luego se mencionan algunas experiencias de aula y se finaliza la sección con la exposición de algunas teorías didácticas usadas para enseñar y comprender las funciones compuestas.

2.2.1. La composición de funciones y la regla de la cadena desde lo didáctico.

Hay muy poca documentación con respecto a la didáctica de la composición de funciones, autores como Cottrill (1991) mencionan que se han encontraron con este inconveniente en sus investigaciones:

> Estos estudios [que fueron consultados por Cottrill] y aquellos sobre los cuales [los autores] reportaron fueron buscados para evidenciar exploraciones sobre composición de funciones y para dar una discusión sobre la regla de la cadena. Mientras muchos de los estudios de la comprensión de funciones en los estudiantes estaban relacionados con este estudio, *muy poco fue encontrado con respecto a la comprensión de la composición de funciones explícitamente* [Énfasis agregado.] y, no hubo estudios encontrados sobre la comprensión de la regla de la cadena.(p. 13).[2]

La investigación de Cottrill fue realizada hace 21 años, pero parece que el panorama actual con respecto a la documentación que hay sobre la composición de funciones no ha cambiado significativamente, ya que Valdivia et al. (2015) reportan que ‘en la literatura existen pocas investigaciones -documentadas- que abordan específicamente la problemática en cuanto al proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de composición de funciones’, lo que da indicios sobre la dificultad existente para conseguir documentación que hable sobre este concepto.

Para contrarrestar el inconveniente relatado en los párrafos anteriores, se opta por indagar sobre el concepto de la regla de la cadena, ya que este concepto está muy enlazado a la composición de funciones. Campistrous et al. (1999) han escudriñado sobre la didáctica de la regla de la cadena y realizan la siguiente afirmación en su investigación:

> Se pensaría que alguien con buena imaginación (y se presume, con cienta afición al pensamiento metafórico) dió el nombre de “regla de la cadena” a la

[2]Traducción realizada por el autor de este documento

regla de diferenciación de funciones compuestas[Énfasis agregado]. Supongamos que $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones que se pueden componer, es decir, que la función $y = f(u) \equiv f(g(x))$ existe (digamos) en algún intervalo abierto que contiene al punto $x = c$. Entonces el enunciado moderno más general de la regla de la cadena para funciones de una variable real es el siguiente:

Teorema 1 *(regla de la cadena): si $u = g(x)$ es diferenciable en un punto x y $y = f(u)$ es diferenciable en u, la siguiente relación se cumple:*

$$(f \circ g)'(x) = f'(u) \cdot g'(x).$$

En lo indicado anteriormente, se evidencia la relación intrínseca que hay entre los dos conceptos, pero, a pesar de tal relación, los autores indican que puede haber una asincronía entre la forma en que surgieron históricamente y la forma como se abordan en la clase. Partiendo desde esta premisa, los autores estudiaron este fenómeno en la enseñanza de la regla de la cadena, donde se percibe que hay una deformación semiótica presentada (el objeto matemático tiene para quien lo aprende un significado distinto al que pudo haber tenido para sus precursores), ya que primero se redactó el concepto de la regla de la cadena por medio de los diferenciales y, después se dejó explícito el concepto de la composición de funciones en la literatura, aunque hay que tener presente que las funciones compuestas se han manejado tácitamente desde los inicios de la teoría de funciones, tal como se indicó en el marco histórico.

La relación didáctica entre la composición de funciones y la regla de la cadena ha interesado a investigadores como Cottrill (1991), quien indaga en su tesis doctoral sobre la repercusión que tiene el concepto de la composición de funciones en la comprensión de la regla de la cadena de estudiantes de pregrado.

Hay dos cuestiones claves que arroja esta tesis, que se ven reflejadas en las siguientes declaraciones. En primer lugar, el autor manifiesta que no pudo encontrar una correlación significativa entre las repercusiones didácticas de los dos conceptos:

¿Podemos concluir que el entendimiento de la composición de funciones es

> clave para entender la regla de la cadena? Los resultados de la primera parte de este estudio fueron en gran parte poco concluyentes. Los estudiantes se desempeñaron bien en los problemas de diferenciación y en los problemas de la regla de la cadena. No hubo el mismo grado de variación como en las secciones de función y composición, y esto no permitió que correlaciones significativas fuesen encontradas. (p.58).[3]

A pesar de la conclusión de Cottrill, también hay que tener en cuenta que Valdivia et al. (2015, p. 2) mencionan lo siguiente en su investigación:

> Por su parte, Horvath (2008) concluyó que la notación (expresión algebraica) que aparece en el teorema de la regla de la cadena, crea dificultad y malentendidos a la hora de aplicar la fórmula para derivar diferentes tipos de funciones compuestas. Por su parte, Clark y su grupo (Clark et al. 1997) mencionan que la composición y la descomposición de funciones son un pilar fundamental para construir dicha regla.
>
> En este mismo sentido, pese a la importancia del concepto que nos convoca, varios investigadores concuerdan en que *algunas de las dificultades que tienen los estudiantes con la regla de la cadena (en una o varias variables), podrían atribuirse a las dificultades del conocimiento de la composición de funciones*[Énfasis agregado] (Capistran, 2005; Uygur y Özdas, 2007; Kabael, 2010; Valdivia y Parraguez, 2013).

En segundo lugar, la investigación de Cottril permite entender una posible manera en que se realiza la comprensión de la regla de la cadena y el porqué de su dificultad en los alumnos. Un ejemplo de esta situación se presenta a continuación, donde el autor establece que probablemente la carencia de interpretaciones geométricas de la regla de la cadena (y de las funciones compuestas, implícitamente) se debe a la omisión del trato histórico de éstas, que se trataban inicialmente por medio de diferenciales:

[3] traducción realizada por el autor de este documento

> A menudo en matemáticas, la prueba de un teorema ayuda a trasmitir los conceptos fundamentales para construirlo. Desafortunadamente, el método de prueba de la regla de la cadena es generalmente interpretado como un truco algebraico- multiplicar por $1(\frac{\Delta y}{\Delta y})$-. Incluso mediante
>
> $$\frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x},$$
>
> que es sencillamente la notación $\frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ de Leibniz escrita en términos de cocientes de diferencia, *la interpretación geométrica es carente*[Énfasis agregado]. Esto puede estar relacionado a nuestra inhabilidad para demostrar gráficamente la composición de dos funciones dadas sus gráficas. Las dificultades que los estudiantes tienen con la regla de la cadena pueden ser explicados por su historia, esto es, *las ideas de función y composición de función llegaron después y nublaron la idea intuitiva de Newton y Leibniz*[Énfasis agregado].[4](Cottrill, 1991, pp. 5-6)

La afirmación anterior es el reflejo de la dificultad que se presenta en las aulas de clases cuando se intenta representar gráficamente la composición de funciones en un plano cartesiano.

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, toma gran relevancia la apreciación que realizan Hernández y López (2010): '*la misma historia de las matemáticas muestra que la noción de composición de funciones* requiere de alguna manera un nivel superior de abstracción para su comprensión'[énfasis agregado](p. 326).

2.2.2. La composición de funciones en la normativa curricular.

El apartado 2.4.3.5 de los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998) establece que la *elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos* (que es uno de los cinco *procesos generales* que instituyen los *Estándares Básicos de Competencias*

[4]traducción realizada por el autor de este documento

Matemáticas (MEN, 2006)) se puede organizar (sin ánimo de dividirlo) de acuerdo a la afinidad de los procedimientos con cada tipo de pensamiento matemático.

En el pensamiento variacional hay una serie de procedimientos denominados 'analíticos´ que tienen que ver con el álgebra, las funciones y el cálculo. Estos procedimientos se encuentran descritos en (MEN, 1998, p.82) y tienen similitudes con los 'procedimientos de rutina´ que se encuentran en la propuesta curricular del Tercer Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias (o TIMSS, por sus siglas en inglés) y que también se encuentran descritos en los Lineamientos justamente después de mencionar los 'procedimientos analíticos'.

Entre los 'procedimientos de rutina´ del TIMSS se encuentran explícitamente las "transformaciones de funciones por medio de la composición"(p. 82). Aunque en los 'procedimientos analíticos´ *nunca se explicita que el trabajo con composición de funciones deba realizarse en las clases,* los *procesos generales* tranversales a todos los pensamientos (sobre todo el variacional) *describen el trabajo que se realiza con la composición de funciones en el aula.*

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente se revisaron otros referentes curriculares (nacionales e internacionales), pero cuando se realizó la búsqueda específica de la composición de funciones y de las funciones compuestas, se evidenció que *la composición de funciones no es un saber fundamental explícito* en los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016) ni en los EBCM (MEN, 2006).

Esta situación contrasta con la normativa de otros países, en especial con la normativa Estadounidense de los principios y estándares para matemáticas escolares del NCTM (2000), cuya propuesta para la etapa de 9-12 o High School establece que los estudiantes deberían comprender y comparar transformaciones con funciones como combinarlas aritméticamente, *componer las más comunes*[Énfasis agregado] y obtener sus inversas, *utilizando tecnología*[Énfasis agregado] en caso de expresiones complicadas (p. 300), por lo que queda confirmado que en tal normativa, al igual que en la propuesta del TIMSS, sí se explicita que se debe trabajar con funciones compuestas en las aulas.

En el apartado de álgebra de los NCTM (2000) se establece lo siguiente con respecto a la composición de funciones:

> Con base en experiencias anteriores, los alumnos de secundaria deberían tener oportunidad de profundizar en su comprensión de las relaciones y funciones, y de ampliar su repertorio de funciones familiares. *Deberían utilizar herramientas tecnológicas para representar y estudiar el comportamiento de funciones polinómicas, exponenciales, racionales y periódicas, entre otras.* [Énfasis agregado]. Y, además, aprender a combinar funciones, a expresarlas en formas equivalentes, a componerlas y, cuando sea posible, a hallar las recíprocas. Procediendo así, llegarán a comprender el concepto de función, y a aprender las características de diversos tipos de funciones (p. 301).

Por lo que, desde tal normativa se considera que operar las funciones a partir de la composición puede ayudar a comprender el concepto de función, que es fundamental para el estudio del cálculo, que es imprescindible en es estudio de las ingenierías y las ciencias.

2.2.3. La composición de funciones en algunos textos.

Con el fin de analizar la literatura actual sobre funciones compuestas y los recursos bibliográficos de los que dispone un docente para abordar la composición de funciones en educación media y superior, se revisaron algunos textos utilizados en la enseñanza de matemáticas, educación media y educación superior.

Esta revisión es sugerida por Godino (2002) como estrategia didáctica para planear y diseñar sesiones de clases de matemáticas y sirve para ampliar el panorama que se tiene en cuanto a la forma de abordar (en este caso) la composición de funciones, lo se convierte en un insumo indispensable para generar una futura descomposición genética sobre las funciones compuestas (ver sección 2.3.6).

Los libros seleccionados fueron los siguientes:

- Los libros de Apóstol (1999) y Spivack (1996), que son de contenido predominantemente matemático (hacia el cálculo) y por tanto se enfocan más en los conceptos y demostraciones de los teoremas y propiedades de los objetos matemáticos relacionados con el cálculo (y también en el álgebra lineal, como es el caso de Apóstol).

- Los libros de Larson (1998), Leithold (1998), Purcell et al. (2007), Stewart (2008) y Thomas (2010) que son de una perspectiva más enfocada a las ingenierías, los cuales se enfatizan más los procesos relativos al cálculo.

- El libro de texto SM (2019) fue diseñado para trabajar en educación media y -junto al libro de precálculo de Stewart- sirve como referente para analizar similitudes y diferencias del trabajo de las funciones compuestas en aulas de educación media y superior.

- El libro de Muñoz (2002), que presenta en su libro de introducción a la teoría de conjuntos la composición de funciones como parte de un sistema axiomático.

  Cabe aclarar que sólo hay un texto escolar de educación media en esta revisión porque en los libros que se consultaron (p.e. alfa 10 (2005), tercera edición) no se abordaba este concepto. También cabe destacar que el libro de Cálculo de Stewart (que se utiliza en educación superior) y el libro de precálculo del mismo autor (que se utiliza en educación media) tienen muchas similitudes , tanto así que se podrían usar indistintamente en cualquiera de estos cursos ya que las explicaciones, ejemplos y ejercicios propuestos de ambos con (en su gran mayoría) exactamente iguales. Por tal motivo, sólo se expone lo hallado en el libro de precálculo.

A continuación se presenta información sobre la información encontrada en cada uno de los textos consultados:

- Apóstol (1999, pp. 68-69) establece en el capítulo I (que es el quinto del libro) los conceptos del cálculo integral. En tal capítulo aborda las operaciones de suma, resta, producto y cociente entre las funciones y, aunque no explicita el manejo de funciones compuestas, pero parece que se utilizan en los ejercicios propuestos en el final de la sección.

En la sección 3 'Funciones continuas' se explica la composición de funciones a partir de un ejemplo. El autor indica que "para calcular el valor de f en x primero se calcula $v(x)$ y luego se calcula el punto u en el punto $v(x)$".

También se introduce la siguiente definición (p.172):

Definición 2 *Sean u y v dos funciones dadas cualesquiera. La compuesta o la composición de u y v (en ese orden) se define como la función f para la cual*

$$f(x) = u[v(x)] \quad \text{(se lee, } u \text{ de } v \text{ de } x).$$

El autor habla también sobre el dominio de la nueva función y posteriormente introduce la notación $f = u \circ v$, que se lee (u *círculo* v) y pone en manifiesto que la notación anterior se asemeja a la de multiplicación, por lo que cumple algunas propiedades de ella, pero no la conmutatividad. Luego define la composición entre tres funciones y finalmente expone el teorema de continuidad de la composición de funciones que son continuas.

- Spivack (1996, pp. 54-57) en el tercer capítulo llamado *funciones*, (ubicado en la Parte II del libro, denominada *fundamentos*) establece el álgebra de funciones como método para generar funciones nuevas. El autor empieza con las operaciones de suma, resta, producto y cociente, para luego indicar que "Nos hace falta todavía otra manera de combinar funciones. Esta combinación, la composición de funciones, es con mucho la más importante". Introduce luego la siguiente definición:

  Definición 3 *Si f y g son dos funciones cualesquiera, definimos una nueva función $f \circ g$, la* ***composición*** *de f y g por:*

  $$(f \circ g)(x) = f(g(x));$$

  El dominio de $f \circ g$ es $\{x : x$ está en el dominio de g y $g(x)$ en el dominio de $f\}$.

El autor indica también que la notación $f \circ g$ se lee a menudo «f circulo g» y que la frase «la composición de f y g» también se utiliza, pero la primera forma de leerla evita la ambigüedad de $f \circ g$ y $g \circ f$, ya que ésta operación no es conmutativa y también explicita la propiedad asociativa de la operación. En la sección de ejercicios se solicita que el lector demuestre algunas propiedades de las funciones compuestas y que proponga contraejemplos a situaciones como $f(g+h)(x) = f(g(x)) + f(h(x))$.

- Thomas (2010, pp. 15-16) indica en el capítulo 1 que la composición de funciones es otro método para combinar funciones. El autor establece la siguiente definición:

  Definición 4 *Si f y g son funciones, la función* ***composición*** *$f \circ g$ ("f compuesta con g") se define por:*

  $$(f \circ g)(x) = f(g(x));$$

  El dominio de $f \circ g$ consiste de todos los números x en el dominio de g para los cuales $g(x)$ está en el dominio de f. La definición implica que $f \circ g$ puede formarse cuando el rango de g está en el dominio de f.

  El autor utiliza la analogía con la máquina y también establece que esta operación no es conmutativa.

  Para que sea evidente lo mencionado anteriormente, soluciona un ejemplo donde se halla $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$, pero no realiza procedimientos exhaustivos. Junto con las funciones escribe los dominios de las funciones resultantes, los cuales varían de acuerdo a la composición que se determine.

  La explicación va acompañada de las siguientes gráficas:

- Leithold (1998, pp. 13-15) establece en el capítulo 1 que la composición de funciones es otra operación entre dos funciones, esto lo ilustra a partir de la siguiente representación:

  El autor también menciona que çuando se calcula $(f \circ g)(x)$, primero se aplica g a x y después se aplica f a $g(x)$", luego establece la siguiente definición:

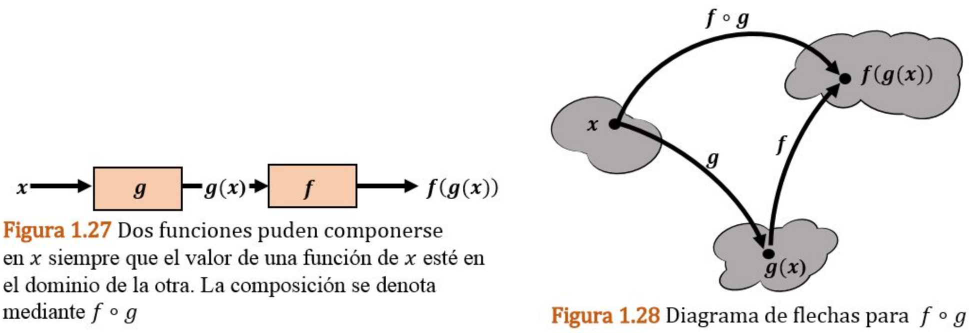

Figura 2.2: Esquema gráfico en el libro de Thomas (p. 15).

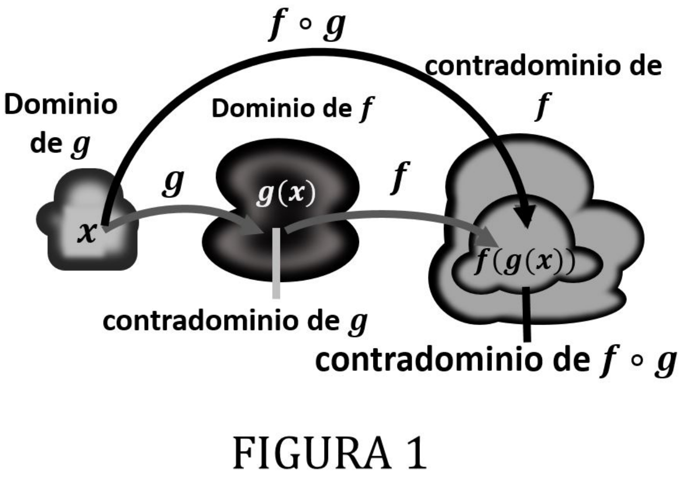

Figura 2.3: Esquema gráfico en el libro de Leithold (p. 13).

Definición 5 *Dadas las dos funciones f y g, la función **compuesta,** denotada por $f \circ g$ está definida por*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x));$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los números x del dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

El autor propone varios ejemplos en los que halla las composiciones $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$ y sus respectivos dominios. También realiza el proceso inverso, es decir, a partir de una función, hallar las funciones que la componen.

Algo interesante de este autor es que enuncia lo siguiente:

> un teorema importante en Cálculo, llamado la *regla de la cadena,* que se estudiará en la sección 2.8 trata sobre funciones compuestas. *Cuando se aplica la regla de la cadena, es necesario considerar una función como la composición de otras dos funciones*[Énfasis agregado] (...) (p. 15).

- Larson (1998, pp. 31-33) introduce la composición de funciones en el capítulo preliminar como 'otra manera de combinar funciones'. El autor menciona lo siguiente:

> Es posible combinar dos funciones de varias formas para crear nuevas funciones. Por ejemplo, dadas $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = x^2$ se puden construir las siguientes funciones [a lo que aplica las operaciones de suma, resta, producto y cociente de las funciones]. (...) Aún hay otra manera de combinar dos funciones, llamada **composición.** La función resultante recibe el nombre de **función compuesta**.

El autor acompaña la explicación con la siguiente representación y seguidamente propone la definición:

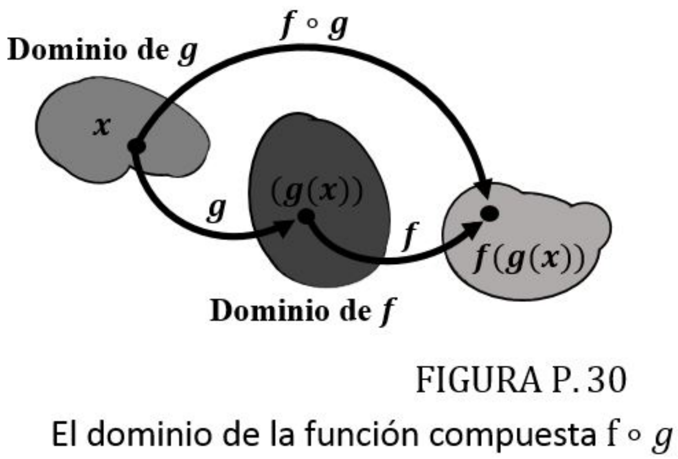

Figura 2.4: Esquema gráfico en el libro de Larson. (p. 31)

Definición 6 *Sean f y g dos funciones.La función dada por* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

se llama ***función compuesta*** *de f con g. El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los números x del dominio de g tales que $g(x)$ pertenece al dominio de f.*

También se establece que 'en general, la función composición de f con g no suele ser igual, en general, a la de g con f' y realiza un ejemplo para hallar composiciones de dos funciones y finaliza la sección.

- Purcell et al. (2007, pp. 36-37) introduce el tema de la composición de funciones en el capítulo cero en un apartado llamado 'operaciones con funciones'. El autor aborda el concepto mediante la similitud entre la función y una 'máquina que recibe como entrada x y produce una salida $f(x)$, que se convierte en una entrada para la máquina g, que también genera una salida $f(g(x))$.'

  Para ilustrar este proceso, el autor representa las dos funciones como máquinas (f y g) que se ponen una tras otra que primero produce una salida $f(x)$ y luego produce una salida $g(f(x))$ respectivamente. A este resultado lo denomina *composición de funciones.* Cabe resaltar que el autor "invierten el orden de las máquinas" para ilustrar el procedimiento para componer las funciones y mostrar las 'salidas' $g(f(x))$ y $f(g(x))$, tal como se indica en la siguiente gráfica:

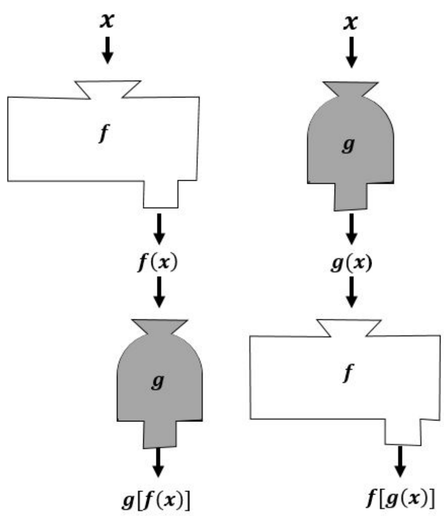

Figura 2

Figura 2.5: Esquema gráfico en el libro de Purcell (p. 36).

Aunque los autores nunca definen de forma explícita la composición de funciones, sí definen la notación $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ y presentan la figura 2.5 y seguidamente hacen énfasis en dos propiedades que se deben satisfacer para poder componer $g(f(x))$:

1) x está en el dominio de f.

2) $f(x)$ está en el dominio de g.

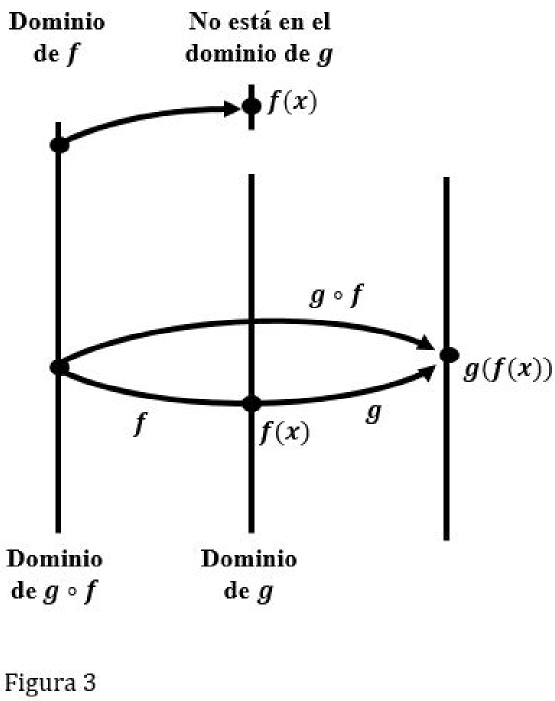

Figura 2.6: Esquema del dominio de una composición en el libro de Purcell (p. 36).

El autor indican que "En otras palabras, x debe ser una entrada válida para f y $f(x)$ debe ser una entrada válida para g " y realizan un ejemplo con dos funciones para hallar $f \circ g$ y $g \circ f$, con lo cual se enfatiza que la operación no es conmutativa. También hacen referencia al dominio de la función resultante $f \circ g$, el cual está restringido a los valores del rango de g que se encuentren también en el dominio de f.

El autor propone un segundo ejemplo, donde se solicita realizar la composición $g \circ f$ en el punto $x = 12$ y luego enunciar el dominio de la función $f \circ g$, donde se restringe el dominio para los valores positivos de $g(x)$. Finalmente manifiesta que con frecuencia en el cálculo se necesita tomar una función dada y escribirla como una composición de dos funciones mas pequeñas, lo cual se puede escribir en múltiples maneras en la mayoría de los casos. Realiza dos ejemplos de este proceso y finaliza el apartado.

- Stewart (2008, pp. 40-42) presenta la combinación de funciones en su primer capítulo, introduciendo el concepto a partir de un cambio de variable con dos funciones como ejemplo, también hace énfasis en hallar la función a partir de los dominios y rangos interceptados.

  El autor afirma lo siguiente: "en general, dadas dos funciones cualesquiera f y g, empezamos con un número x en el dominio de g y encontramos su imagen $g(x)$. Si este número $g(x)$ está en el dominio de f, entonces podremos calcular el valor de $f(g(x))$". Luego da la siguiente definición:

  Definición 7 *Dadas las dos funciones f y g, la función compuesta $f \circ g$ (también llamada la* ***composición*** *de fy g) denotada por $f \circ g$ se define como:*

  $$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

  El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

  El autor también indica la forma de leer la notación respectiva, haciendo el símil de las dos máquinas unidas que se entrelazan para dar una nueva salida ilustrándolo en la figura 2.6.

  El autor realiza un ejemplo y luego coloca como nota que la operación no es conmutativa, después da otro ejemplo donde se solicita hallar $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$. explica el procedimiento para hallar la composición de tres funciones con su respectivo ejemplo y finaliza con la explicación sobre *descomponer* una función y genera un ejemplo, con lo que finaliza la sección.

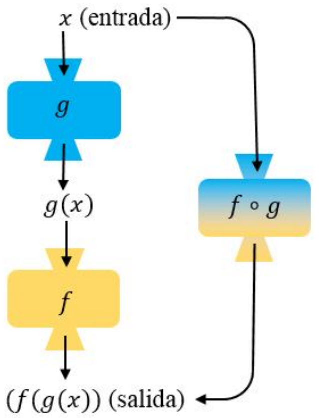

FIGURA 11
La máquina $f \circ g$ se compone de la máquina g(primero) y la máquina f (después)

Figura 2.7: Esquema gráfico en el libro de Stewart (p. 40).

- El grupo SM (2019, pp. 26-27) introduce la composición de funciones inmediatamente después de abordar la combinación de funciones. Lo primero que hacen los autores es exponer una situación problema para que el estudiante analice que se pueden tener dos funciones $f(n)$ y $n(x)$ “interconectadas” por medio de una variable, es decir, hallando primero $n(x)$ y luego hallando $f(n(x))$.

  La situación problema es la siguiente:

  > En un lago, el pez lubina se alimenta del pez arcoíris; que a su vez, se alimenta de plancton. Si la población de lubinas se puede expresar mediante la función $f(n) = 50 + \sqrt{\dfrac{n}{150}}$, donde n es el número de peces arcoíris presentes en el lago, y este número se modela mediante la función $n(x) = 4x + 3$, siendo x la cantidad de plancton en el lago. ¿cómo se expresa el tamaño de la población de lubinas en función de la cantidad de plancton?

  Y se indica la siguiente solución:

Para contestar la pregunta, se debe calcular la función f en $n(x)$, esto es

$$f(n(x)) = f(4x+3) = 50 + \sqrt{\frac{4x+3}{150}}$$

Luego se explica que 'cuando se aplica de manera sucesiva las funciones f y g sobre un elemento$x$ del dominio de f' y le da el nombre de f *compuesta con* g a la función resultante. El libro acompaña esta explicación con un gráfico similar al visto en Thomas (2010). Luego da la siguiente definición:

Definición 8 *Dadas las dos funciones f y g, se define la función f compuesta con g como*

$$g \circ f(x) = g[f(x)].$$

Los autores muestran un ejemplo de la composición de una función cuadrática y una lineal, donde se evidencia que $f \circ g \neq g \circ f$.

El texto enfatiza que la expresión $g \circ f$ se lee *"f compuesta con g"* y que la expresión $f \circ g$ se lee *"g compuesta con f"* y, como $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$*la composición e funciones no es conmutativa.*

Finalmente, los autores ilustran dos diagramas sagitales similares a los expuestos por Larson (1998) para abordar que el dominio de la función resultante de la composición $f \circ g$ (o h) de las funciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$ es $E \subseteq A$ tal que para todo $x \in E, f(x) \in B \cap C$, y el rango de h es el conjunto $K \subseteq D$, donde para todo $f(x) \in B \cap C, g(f(x)) \in K$. Explica dos ejemplos para hallar dominios de funciones compuestas y concluyen la sección.

- Muñoz (2002, pp. 91-94) introduce el concepto de funciones compuestas en el capítulo 3 de su libro, en donde se abordan las funciones a partir del siguiente esquema y de la siguiente definición:

Definición 9 *Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ tales que $f(A) \subseteq C$. Es posible en este caso, a partir de las dos funciones anteriores, construir una tercera $h : A \to D$ (...).*

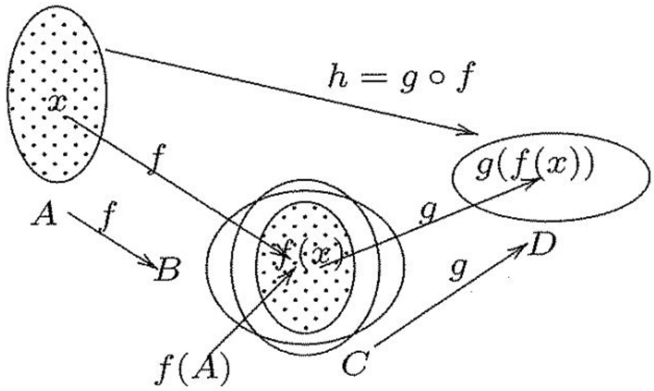

Figura 2.8: Esquema gráfico inicial en el libro de Muñoz (p. 91).

Como para todo x de A su imagen $f(x)$ pertenece al dominio de g, es posible calcular la imagen por g de $f(x)$. Definimos entonces la función h mediante:

$$h(x) = g(f(x)).$$

Es costumbre usar la notación $h = g \circ f$(léase "efe compuesto ge") y decir que h es la función compuesta de f y g. Así,

$$(\forall x \in A)[(g \circ f) = g(f(x))].$$

El autor presenta el siguiente ejemplo: si $f = tg : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \to \mathbb{R})$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es tal que $g(x) = x^2$, entonces $g \circ tg : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ claramente está dada por $(g \circ tg)(x) = (g(tg(x))) = (tg(x))^2 = tg^2(x)$.

El autor también menciona que no existe $tg \circ g$ porque por ejemplo $tg(g(\sqrt{\frac{\pi}{2}}))$ no se encuentra definida ya que $\frac{\pi}{2}$ no se encuentra en el dominio de tg.

Después del ejemplo el autor realiza la representación sagital de funciones compuestas para evidenciar que la operación no es conmutativa:

Seguidamente el autor explica la asociatividad de la operación entre $f \circ g \circ h$ y lo ilustra a través del siguiente diagrama, donde se explica la generación de la nueva función, ya sea mediante $(f \circ g) \circ h$ o de $f \circ (g \circ h)$:

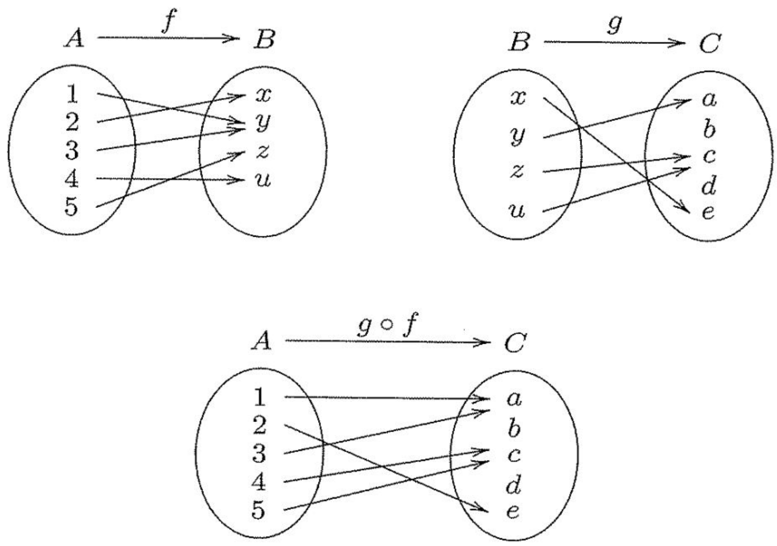

Figura 2.9: Representación sagital en el libro de Muñoz (p. 92).

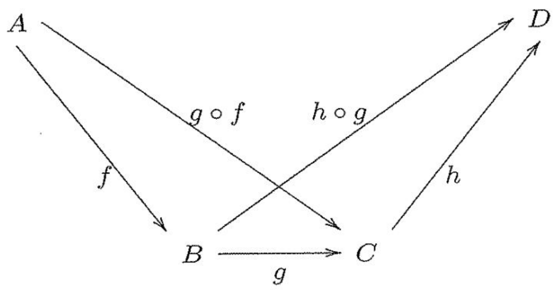

Figura 2.10: Diagrama de asociatividad en el libro de Muñoz (p. 93).

> Este autor es el único que presenta de forma directa la función identidad como módulo de la operación composición de funciones. Para exponer esta propiedad, el autor se apoya en los diagramas de la figura 2.10 para introducir la función identidad como elemento neutro de la operación:
>
> La sección finaliza dando un espacio para abordar teoremas sobre las funciones compuestas, con lo que se da paso a las funciones inversas por medio de la función identidad.

Se puede evidenciar que el abordaje de los textos consultados tienen varias similitudes (p.e. la definición de función compuesta que utilizan y los diagramas con los que ilustran las explicaciones), llegando a tal punto que las explicaciones de los textos de educación

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "I_A"'] & B \\ A \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "I_B"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Figura 2.11: Diagramas de composición con la función identidad en el libro de Muñoz (p.94).

media y de educación superior no se diferencian sustancialmente. *Grosso modo* los textos realizan una explicación del tema muy parecida, exceptuando algunos enfoques que tienen los autores con respecto a procesos, propiedades, notaciones, demostraciones o relaciones que tiene el concepto y otros objetos matemáticos. Las diferencias marcadas se encuentran entre los libros de matemáticas (Apóstol, Spivack y Muñoz) y los de ingenierías y educación media.

A continuación se presenta un cuadro donde se expone a modo de resumen las características principales que aborda cada texto:

Libro	Asociatividad	Esquema gráfico	c. de tres funciones	descomponer funciones	particularidad
Apóstol	X		X		T. de continuidad
Spivack	X		X		“operación más importante”
Thomas		X			Analogía con dos máquinas
Leithold		X		X	Regla de la cadena
Larson		X			Método para obtener otras funciones
Purcell		X		X	Utilidad de descomponer funciones
Stewart		X		X	Introducción por cambo de variables
SM		X			Introducción con un problema
Muñoz	X	X	X		f. identidad como módulo

Cuadro 2.1: *Características principales de los textos consultados.*

2.2.4. Experiencias de aula.

Ayers et al. (1988) documentan su experiencia en la enseñanza de composición de funciones a partir del uso de herramientas computacionales. En este trabajo se contrastaron dos grupos de estudiantes, en uno de estos grupos las sesiones fueron impartidas bajo un modelo de enseñanza tradicional. mientras que en el otro las clases se impartieron mediante el uso de las herramientas computacionales mencionadas a continuación:

En esta experiencia de aula se utilizó el sistema operativo UNIX bajo el editor de comandos por consola (o shell), en donde se encuentran disponibles varias librerías de tales comandos, los cuales funcionan de acuerdo a su orden sintáctico y, dependiendo de que dicha sintaxis sea correcta, ejecutará o no la instrucción que se desea. El sistema cuenta con una serie de librerías relacionadas con funciones matemáticas que son las que se utilizan en el taller que proponen los autores. Al principio se realizaron sesiones para que los estudiantes del primer grupo conocieran y asimilaran la sintaxis y comandos del sistema, mientras que los estudiantes del segundo grupo realizaron ejercitación de procedimientos, luego continuaron las sesiones de trabajo en clase por medio de guías.

El trabajo de estos autores se fundamenta teóricamente en la abstracción reflexiva, que explica cómo el conocimiento es construido, lo que permite comprender que el uso de estas herramientas es más efectivo que cuando los estudiantes “imitan el comportamiento del profesor o escuchan una lectura” (p. 256).

Al final, los estudiantes del grupo 1 tuvieron calificaciones más altas que los del grupo 2. Tal como se indica en las conclusiones de la investigación (p. 258) :

> Sin embargo, los resultados de este estudio [nos] parecen proporcionar alguna evidencia en apoyo de la efectividad de las experiencias informáticas para ayudar a los estudiantes a construir los conceptos de función y composición. Creemos que este es el caso porque tales experiencias ayudan a introducir las abstracciones reflexivas necesarias para adquirir los conceptos .[5]

Steketee y Scher (2012) han realizado experiencias en aula que trabajan desde las

[5]traducción realizada por el autor de este documento

múltiples representaciones que tienen las funciones por medio de tecnologías computacionales, especialmente del programa sketch. Este trabajo comienza con la representación geométrica de transformaciones isométricas a un punto que genera una traza a partir de su movimiento, el punto que representa la transformación obtenida también se mueve y genera una traza, pendiente y con lo que se puede evidenciar cuál variable sería dependiente y cuál independiente.

Los autores también generan transformaciones isométricas de una imagen, específicamente las operaciones de rotación, traslación y homotecia, lo cual resulta ser una composición de funciones que se refleja en la espiral obtenida a partir de una imagen inicial.

Después de explorar estas funciones, se introduce la notación de función. Los autores también utilizan la representación de dinágrafo (que es muy parecida al sistema PAR) para ver de mejor forma cómo actúan las funciones compuestas mediante la interacción de sus dominios y rangos. Cabe resaltar que primero muestran la representación dinagráfica sin valores numéricos y luego con estos mismos para generar una tabla de valores. Luego se especifica la notación simbólica y finalmente se da la representación cartesiana.

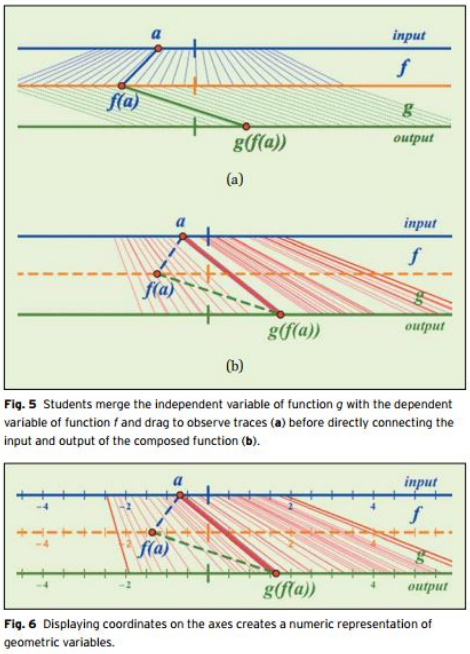

Figura 2.12: Dinágrafo de una función compuesta en Steketee y Scher.

Como conclusión, los autores manifiestan que la conexión entre las distintas representaciones junto a la oportunidad que se dé a los estudiantes para crearlas, manipularlas, observarlas, discutirlas, reflexionar en ellas y generar conexiones entre varias de ellas permite que puedan desarrollar y fortalecer su concepción sobre la composición de funciones.

Estas experiencias, aunque distintas en sus enfoques, muestran en sus conclusiones que al implementar diversas estrategias se puede fomentar el aprendizaje de los estudiantes, quienes a partir del trabajo interactivo con el objeto matemático pueden hallar un mayor significado a lo que se les enseña, lo que contribuye a mejorar su comprensión.

Se pueden añadir como experiencias de aula algunas herramientas tecnológicas que se encontraron en GeoGebra.org y que se enfocan en las representaciones de las funciones compuestas:

La propuesta de Luis Miguel López Herranz, [6] consiste en una animación donde se muestra el cambio de rango de g a dominio de f que se realiza en la composición. Estaa app cuenta con una opción para mostrar la función inversa, así como una segunda pantalla donde se muestra también la composición inversa, también permite validar marcadamente la no conmutatividad de la operación de composición por medio de las dos animaciones que trabajan independientemente, aunque dicho trabajo tiene la misma idea subyacente.

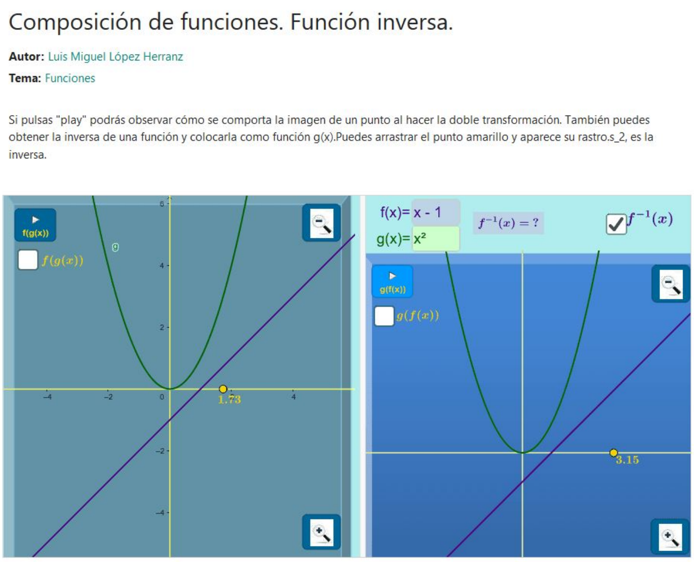

Figura 2.13: Propuesta applet de López.

[6]Enlace disponible en https://www.geogebra.org/m/w7GvNtGV

En el applet[7] creado por Javier Cayetano Rodríguez, se puede encontrar la representación cartesiana y algebraica de dos funciones, así como de sus respectivas composiciones. El applet cuenta además con la opción "ver punto", que permite desplazar un punto que representa los posibles valores del dominio, junto a segmentos paralelos a los ejes, que se diseñaron para poder visualizar de mejor forma cómo se representa la función en el plano cartesiano. La app también cuenta con la opción "cálculos", que muestra la representación algebraica de las dos composiciones resultantes, incluyendo la opción "simplifica", que permite ver la representación algebraica final de las composiciones resultantes.

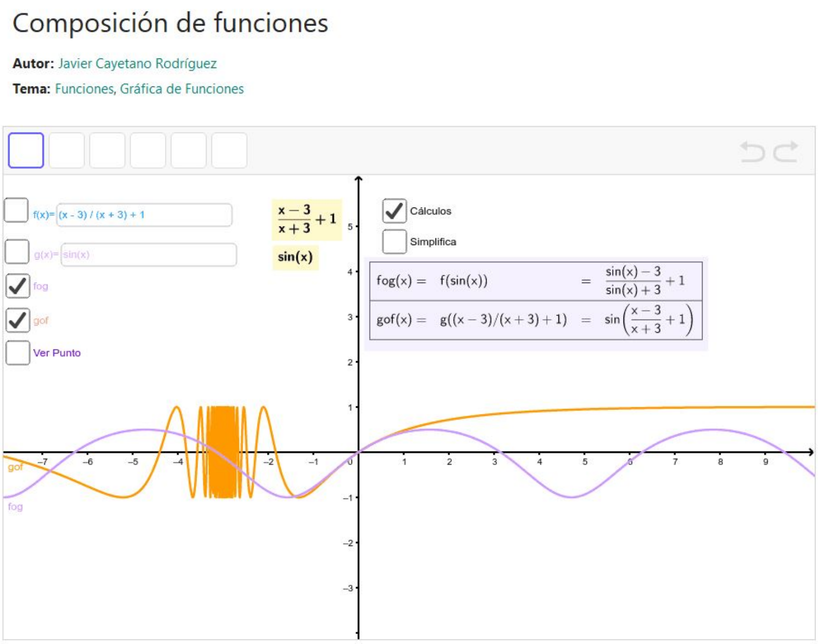

Figura 2.14: Propuesta applet de Cayetano.

La propuesta de Saray Ramos Castro y Alfonso Meléndez [8] muestra una sección de un libro en GeoGebra que muestra algunas propiedades de la función compuesta. Por la forma en que esta constituida la página, parece que es un trabajo de estudiantes, ya que el enunciado "Básicamente, para componer una función con otra (...) Es sustituir g(x) por las x de f(x)" pone de manifiesto que los autores tienen una concepción operatoria de las funciones compuestas. Finalmente, el programa realiza la gráfica de dos funciones y su respectiva composición a través de trazas de un punto por medio de la generación de un

[7]Enlace disponible en https://www.geogebra.org/m/psfacaWd
[8]Enlace disponible en https://www.GeoGebra.org/m/A6wuh8zv

rectángulo, cuya diagonal es por dos puntos que pertenecen a las funciones a componer. La obtención de esta función es meramente geométrica

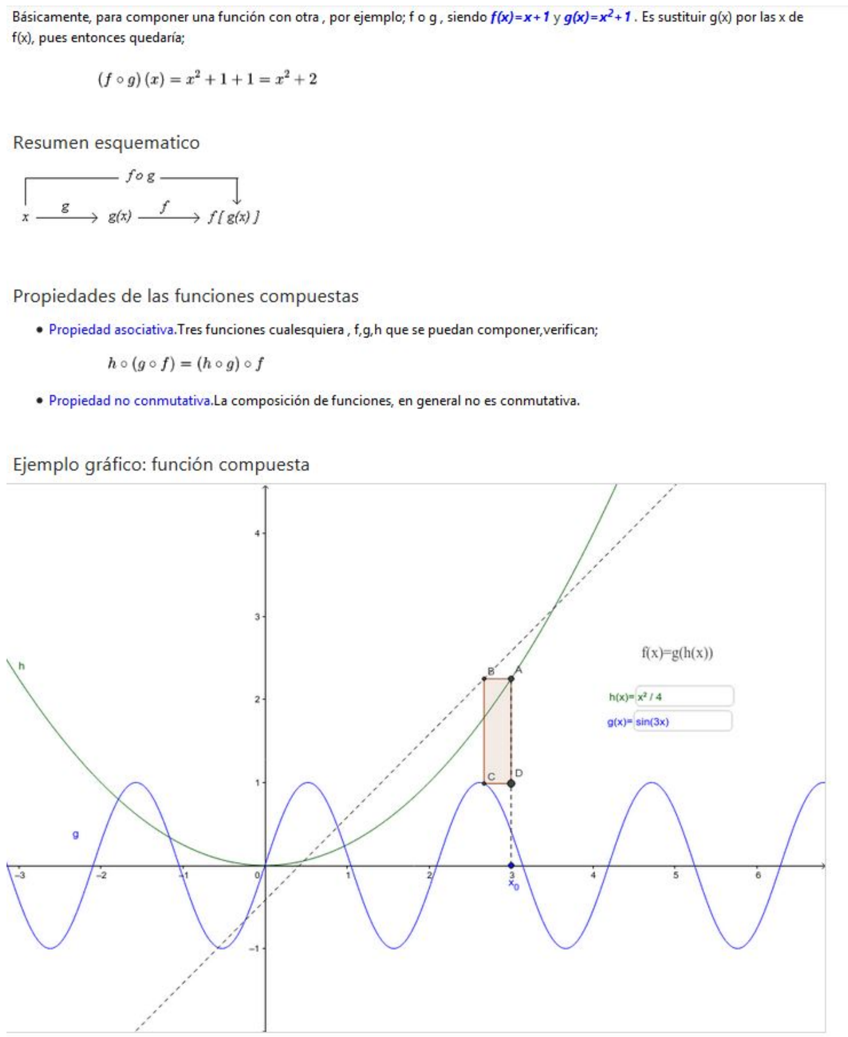

Figura 2.15: Propuesta applet de Ramos y Meléndez.

Estas construcciones en GeoGebra fueron realizadas en países latinoamericanos y se enfocan en el uso y análisis de la representación cartesiana de las funciones compuestas, donde optan por corroborar la forma en que se puede obtener la gráfica de la composición de dos funciones a partir de las gráficas de éstas, proponiendo así alternativas que puedan menguar el inconveniente de las representaciones descrito por Cottril.

2.2.5. Experiencia en la práctica de Integración Profesional en la Escuela.

Durante la práctica de integración profesional a la escuela PIPE, la cual se realizó en el Instituto Pedagógico Nacional, se tuvo la oportunidad de dar sesiones de clase a los estudiantes de décimo grado. En tres de estas sesiones se abordó la composición de funciones, donde se evidenciaron tres formas en las que los estudiantes solucionaban los ejercicios relacionados con la composición de funciones, los cuales se presentan a continuación:

- **Método 1: “hallar los puntos de la función interior y luego el de la exterior”**

  Éste método sólo sirve para hallar un determinado punto de la función compuesta. Sirve para empezar a trabajar con las funciones compuestas, pero hay que procurar avanzar hacia otros métodos, ya que el método sólo permite generar procesos algorítmicos sin involucrar necesariamente algún proceso reflexivo que permita una mejor comprensión de las funciones compuestas. Un porcentaje significativo de estudiantes lo utilizaron para solucionar ejercicios.

  Los pasos a seguir para usar el método son los siguientes:

  - Distinguir las dos funciones que se van a componer, teniendo en claro la fórmula de cada una de ellas .
  - Hallar determinado punto en la función ‘interna’.
  - Este valor hallado (imagen), es el valor de la variable independiente para la función ‘externa’ .
  - Se halla la segunda imagen en la función externa.
  - Dicha operación es el resultado de la composición de funciones (en ese determinado punto de la función).

  EJEMPLO:

  Sea $f(x) = 3x + 5$ y $g(x) = \frac{x}{3}$, hallar $f \circ g$ y evaluar en el punto $x = 6$.

- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
- Como $g(x) = \frac{x}{3}$, entonces se evalúa $g(6) = \frac{6}{3}$.
- $g(6) = 2$.
- Este valor se usa para hallar $f(x)$.
- $f(2) = 3(2) + 5$.
- $f(2) = 6 + 5$.
- $f(2) = 11$.
- Entonces $(f \circ g)(6) = 11$.
- Sólo se halla el valor de la función compuesta en ese punto.

▪ **Método 2: "dejar explícita una función dentro de otra"**:

Éste método resultó mas natural para los estudiantes, ya que reemplazaban la variable independiente de la primera función por la fórmula de la segunda y luego hallaban el punto de la función que requerían. Este método permite analizar mejor el dominio de la nueva función, pero no permite que se vea tan explícito que se genera una nueva función. Fue el método preferido por los estudiantes.

Los pasos a seguir para usar el método son los siguientes:

- Distinguir las dos funciones que se van a componer, teniendo en claro la fórmula de cada una de ellas.
- Reemplazar los valores de la función 'interna' en vez de la variable independiente en la función 'externa'.
- NO realizar el desarrollo algebraico en la fórmula resultante.
- Dicha fórmula (sin desarrollar algebraicamente) es el resultado de la composición de funciones.

EJEMPLO:

Sea $f(x) = 3x + 5$ y $g(x) = \frac{x}{3}$, hallar $f \circ g$.

- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
- En este caso se debe ‘reemplazar’ a $\frac{x}{3}$ en $3x + 5$.
- Pero $g(x) = \frac{x}{3}$, entonces se puede reescribir.
- $(f \circ g)(x) = f(\frac{x}{3})$.
- Pero $f(x) = 3x + 5$, entonces se reemplaza este valor por la variable independiente de f, para obtener.
- $(f \circ g)(x) = 3(\frac{x}{3}) + 5$.
- No se realizan las operaciones algebraicas. Luego se examinan los puntos a hallar.

- **Método 3: “generar una nueva función”**

  Éste método permite obtener la fórmula de la función compuesta obtenida. Cuando se tiene esta fórmula, se puede validar que efectivamente, se genera una nueva función a partir de dos ya conocidas, también se puede analizar el recorrido de esta función de forma analítica.

  Los pasos a seguir para usar el método son los siguientes:

  - Distinguir las dos funciones que se van a componer, teniendo en claro la fórmula de cada una de ellas.
  - Reemplazar los valores de la función ‘interna’ en vez de la variable independiente en la función ‘externa’.
  - Realizar el desarrollo algebraico en la fórmula resultante.
  - Dicha fórmula es el resultado de la composición de funciones.

  EJEMPLO:

  Sea $f(x) = 3x + 5$ y $g(x) = \frac{x}{3}$, hallar $f \circ g$.

  - $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
  - En este caso se debe ‘reemplazar’ a $\frac{x}{3}$ en $3x + 5$.

- Pero $g(x) = \frac{x}{3}$, entonces se puede reescribir.
- $(f \circ g)(x) = f(\frac{x}{3})$.
- Pero $f(x) = 3x + 5$, entonces se reemplaza este valor por la variable independiente de f, para obtener:
- $(f \circ g)(x) = 3(\frac{x}{3}) + 5$-
- $(f \circ g)(x) = x + 5$.

Éste método fue el explicado en las sesiones de clase pero no fue usado por la mayoría de los estudiantes. La experiencia vivida parece indicar que hubo inconvenientes para que los estudiantes asimilaran el desarrollo de este método. Un ejemplo de esta situación se refleja en la no comprensión de los pasos para obtener la composición de una función con sí misma, es decir, cuando había que hallar la composición de $f \circ f$,

Cada uno de estos métodos de solución podrían estar asociados a un tipo de abstracción propio de la estructura mental de cada estudiante.

Pareciera que los estudiantes que desarrollaron los ejercicios de composición por el **método 1** tienen una concepción de las funciones compuestas como un algoritmo **(Cambio de concepción de Acciones a procesos)**, los que prefieren el **método 2**, podrían estar comprendiendo la composición como un cambio de variable de una función **(Cambio de concepción de Procesos a objetos)** y, los estudiantes que utilizan el **método 3**, podrían comprender la composición de funciones como una operación que genera una función nueva y, a partir de su notación algebraica se podría validar el dominio y rango de la nueva función **(Cambio de concepción de Objeto a Esquema).**

Es interesante que dos de los tres métodos explicados anteriormente parecen estar inmersos tácitamente en las actividades de Spivack (1996), ya que en los ejercicios de la sección de operaciones con funciones (p. 62) se indica lo siguiente:

4 Sean $S(x) = x^2, P(x) = 2^x$ y $s(x) = sen(x)$. Determinar los siguientes valores. **En cada caso la solución debe ser un número**.

5 Expresar cada una de las siguientes funciones en términos de S, P, s usando solamente $+$, $\cdot$ y $\circ$. **En cada caso la solución debe ser una función**.

En los enunciados anteriores se pueden identificar los métodos 1 y 3, lo que puede ayudar a corroborar que el uso de los métodos identificados en la experiencia de práctica es más habitual de lo que parece.

2.2.6. Teorías didácticas utilizadas para la comprensión de la composición de funciones.

En este apartado se introducen algunas teorías usadas para la enseñanza y el aprendizaje de la composición de funciones, tales como la Abstracción Reflexiva, la teoría APOE, la ingeniería didáctica y el modelo de Pirie y Kieren, así como la relación que hay entre algunas de ellas.

La Abstracción reflexiva.

Piaget (1977) y Beth y Piaget (1966) proponen la abstracción reflexiva (o AR por sus siglas) como la clave para la construcción cognitiva de conceptos lógico-matemáticos, contrastándola con la *abstracción empírica* y describiéndola de la siguiente manera:

> Es necesario suponer que la abstracción que inicia desde acciones y operaciones -a lo que deberíamos llamar *“abstracción reflexiva”*- difiere de [la obtenida por] los objetos percibidos- que deberíamos llamar *“abstracción empírica”* (asumiendo la hipótesis de que los objetos no perceptibles son el producto de operaciones)- en el sentido que la abstracción reflexiva *es necesariamente constructiva* (. . .). La abstracción reflexiva *consiste en derivar de un sistema de acciones y operaciones de un nivel inferior*, ciertas características *cuya reflexión* (en el sentido cuasi físico del término) *es garantizada sobre acciones u operaciones de un nivel superior*; esto sólo es posible si se es *consciente de los procesos*[Énfasis agregado] de una construcción temprana mediante una

reconstrucción en un nuevo plano. (p. 187) [9]

Dubinsky (1991) (que también colaboró en trabajos con Piaget) indica que la Abstracción reflexiva “es un concepto introducido por Piaget para describir la construcción de estructuras lógico-matemáticas por un individuo durante el transcurso de su desarrollo cognitivo” (p. 95). También menciona que la AR es *un mecanismo para pasar de una estructura mental a otra*, lo que la convierte en una herramienta fundamental para la construcción de conocimiento matemático, ya que corresponde al proceso mediante el cual un individuo realiza acciones sobre los objetos que está estudiando y, a partir de tales acciones puede establecer relaciones o propiedades de éstos.

Como la Abstracción reflexiva surge de las experiencias que se generan a partir de *las acciones* que el sujeto realiza con el objeto (físico o mental), un ejemplo de AR se genera al hallar áreas y perímetros de todos los posibles rectángulos que se puedan realizar con una soga de tamaño fijo, por ejemplo, $20cm$. Un sujeto con abstracción empírica relacionará las parejas de valores para ‘ancho’ y ‘largo’ en determinados ejemplos (rectángulos, en este caso) que él mismo genere, como $(10, 10); (8, 12), (5, 15)$. Un sujeto con abstracción empírica analizará que para hallar el área del rectángulo sólo basta con conocer la medida de uno de sus lados y la longitud de la cuerda, de la siguiente forma:

Teniendo en cuenta que el perímetro no varía, y si P= perímetro del rectángulo; a=ancho; l=largo; A=área del rectángulo, entonces:

$$P = 2a + 2l$$

$$P = 20cm$$

$$20cm = 2a + 2l$$

$$10cm = a + l$$

$$a = 10cm - l$$

$$A = a * l$$

$$A = (10cm - l) * l$$

[9] traducción realizada por el autor de este documento

Esta última fórmula es un ejemplo de aplicación de una función compuesta (Área en función de largo y ancho compuesta con el largo en función de ancho) que el sujeto realiza a través de la reflexión sobre las acciones sobre un objeto.

Dubinsky y Piaget mencionan que existen *procesos mentales* que intervienen en la AR. Tales procesos son:

Generalización: Dubinsky (1991) indica que la forma más sencilla y familiar de abstracción reflexiva es la generalización, que se caracteriza por determinar los alcances del objeto matemático a tratar, es decir, enmarcar y diferenciar el objeto matemático con respecto a otros.

Un ejemplo de generalización se evidencia cuando se abordan las expresiones algebraicas, ya que este concepto se puede diferenciar claramente de otros (como las igualdades o las operaciones matemáticas con números constantes) gracias a su característica principal: el involucramiento de incógnitas en operaciones matemáticas.

Interiorización: Se puede considerar como la transferencia de una actividad específica del mundo externo al mundo interno del individuo, en otras palabras, el individuo pasa de solucionar problemas y ejercicios con ayuda externa a tener un control interno sobre los procedimientos o algoritmos a los que se enfrenta, también posee la capacidad de imaginar la realización de tales algoritmos o procedimientos sin hacerlos de manera explícita, pues salta los pasos que conforman el procedimiento e incluso los puede revertir.

Cuando un sujeto ha reflexionado sobre la importancia de hallar dominios y rangos de una función, puede analizar la función $g(x) = \sqrt{x-16}$ y determinar que tal función sólo es válida para los números mayores o iguales que 16 sin necesidad de que otra persona le dé los pasos para realizar tal comprobación. Otra reflexión que puede hacer un sujeto que ha interiorizado cómo hallar dominios y rangos de una función es decir si un número pertenece o no al dominio de un función o si un valor para el rango es posible o no: si se le indica que determine si el número -16 pertenece al dominio de la función g, dirá que no porque el número es menor que 16 y esto contradice lo mencionado anteriormente en cuanto al dominio. También se puede establecer un ejemplo de la reversión cuando un sujeto establece -sin necesidad de hacer todos los procedimientos algorítmicos- que es imposible que se obtengan resultados negativos al aplicar la función g, por lo que números como -4 no pueden pertenecer al rango de la función g.

Encapsulación: Consiste en la conversión mental de uno o varios procesos (que son estructuras mentales dinámicas) en un objeto (que es una estructura mental estática). Los objetos están conformado por uno o varios procesos interiorizados por el sujeto, que son precisamente los que permiten manipularlo mediante el proceso mental denominado *desencapsulación*, que es la conversión del objeto (estructura estática) a uno o varios procesos (estructuras dinámicas). Estas conversiones mentales las puede realizar el individuo las veces que sean necesarias.

Para asimilar de mejor forma el concepto de función (un *objeto*) se deben comprender los procesos (Estructuras dinámicas) que lo conforman. Por ejemplo, algunos procesos y acciones que hacen parte del concepto de función (p.e. $f(x) = 5x^2$) permiten hallar y manipular su dominio ($D_f = \{x : x \in \mathbb{R}\}$), rango ($R_f = \{x : x \geq 0\}$) y representaciones (como la parábola abierta hacia arriba con vértice en el origen y elongación vertical de 5 unidades). Cada acción y proceso por separado permiten tener determinada información de la función a tratar, pero cuando se unifican estas acciones y procesos, se obtiene de nuevo el objeto matemático que se desea analizar, es decir, la función f.

Coordinación: Este mecanismo se refiere a las maneras de emplear una o más acciones para formar nuevas acciones u objetos. Dos o mas procesos pueden coordinarse para construir nuevos procesos u objetos matemáticos.

Cuando se toman dos funciones(p.e. las funciones f y g mencionadas anteriormente) para sumarlas se deben coordinar los procesos y acciones de ambas funciones para determinar la representación algebraica de la función resultante (o sea, $h(x) = 5x^2 + \sqrt{x - 16}$), el nuevo dominio ($D_x = \{x : x \geq 16\}$), el nuevo rango $R_f = \{x : x \geq 1280\}$ y la nueva gráfica (que resulta ser muy similar a la de f desde el punto $x = 16$). La desencapsulación, coordinación y encapsulación de estos procesos y acciones por separado permiten generar la nueva función (objeto) $h = f + g$.

La teoría APOE.

La teoría APOE, que es la sigla de las palabras Acciones, Objetos, Procesos y Esquemas, se basa en el siguiente enunciado:

> El conocimiento matemático de un individuo es la tendencia que éste tiene para responder a situaciones problema, reflejándolas (y también a sus soluciones) en otros problemas bajo un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones matemáticas, procesos y objetos que organizará en esquemas para usarlos al momento de lidiar con otras situaciones. (Asiala et al., 1996, p. 7)[10]

Esta teoría está basada en el proceso de la abstracción reflexiva de Piaget, que se convierte en clave para la construcción de conceptos lógico-matemáticos.

La teoría APOE (o APOS en idioma inglés) fue propuesta por Dubinsky (1991) con el fin de identificar la manera en que se construyen o aprenden los conceptos matemáticos. Esto ocurre mediante un modelo, denominado Descomposición Genética (DG), que está constituido por estructuras (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas, de ahí su nombre) y mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación, tematización y asimilación), que constituye un camino viable para la construcción de conceptos matemáticos (Valdivia et al., 2015, p. 3).

La teoría está constituida por tres tipos básicos de conocimiento (*acciones, procesos y objetos*) que se organizan en estructuras mentales (*esquemas*). El autor denomina a estas cuatro estructuras mentales *concepciones* de un sujeto sobre un concepto

A continuación se explica brevemente en que consiste cada una de estas concepciones, de acuerdo a De acuerdo a lo enunciado por Asiala et al. (1996, p.7) , Dubinsky (1991, p. 101) y Cottrill (1991, p. 9):

Acciones: Una *acción* es cualquier manipulación física o mental de objetos para obtener objetos mentales. Es una transformación, producto de reacciones a estímulos que el individuo percibe como *externos*, es decir, que pasan fuera de su mente. El estudiante que se encuentre en un nivel de acción necesitará el estímulo de terceros, ya que percibe

[10] traducción realizada por el autor de este documento

los procedimientos y algoritmos "como ajenos a su estructura mental", es por este motivo que un estudiante que tenga la concepción de acción *debe obtener una indicación directa sobre lo que se debe hacer para realizar algún procedimiento,* que puede provenir de una instrucción del docente (ya sea verbal, escrita o de otra naturaleza), de un texto escolar que explícita lo que hay que realizar en algún ejercicio.

Un ejemplo de acción se evidencia cuando el estudiante necesita las fórmulas de las funciones a componer y la notación explícita de composición de funciones para realizar el ejercicio: " halle la función compuesta para $x = 3$", lo que generará una dificultad en el aprendizaje de la composición de funciones, ya que no interpretará el resultado como una función nueva generada a partir de las anteriores, sino como una "serie de pasos" sin sentido en su estructura mental.

Un estudiante que se encuentre en este tipo de comprensión evaluará la función compuesta tan solo en un punto dado: "Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x + 5$, halle $f(g(4))$", En otras palabras, sólo realizará un algoritmo sin darle sentido alguno. Parece que esto tiene que ver con que los estudiantes se sientan más cómodos utilizando el método 1 expuesto al final de la sección 2.2.5 para realizar una composición de funciones.

Los estudiantes con concepción acción deben realizar el procedimiento algorítmico "a lápiz y papel", ya que aún no han reflexionado sobre las condiciones para que se pueda realizar una composición de funciones.

Otra característica asociada a esta concepción es que el estudiante no analizará los dominios y recorridos correspondientes de la función obtenida a menos que se lo soliciten. Un ejemplo de esto lo cita Valdivia et al. (2015) con el siguiente ejercicio: "sean $f(x) = cos(x)$ y $g(x) = \sqrt{x - 16}$. Hallar la composición $(g \circ f)(x)$". Un estudiante con concepción acción podría establecer la fórmula $\sqrt{cos(x) - 16}$, sin caer en cuenta que tal fórmula no está definida para los números reales.

Procesos: Los *procesos mentales* (o simplemente *procesos*) son términos que utiliza Dubinsky a menudo para referirse a acciones mentales, las cuales enfatiza como *de naturaleza interna* para el sujeto, es decir que estas acciones sí hacen parte de la estructura mental del sujeto. Esta concepción surge cuando el estudiante reflexiona sobre alguna acción que ha repetido lo suficiente, entonces se dice que *la interioriza*. Cuando se logra esta interiorización,el sujeto adquiere un nuevo proceso en su estructura mental, donde puede percibir la acción “como de él” y tiene control sobre ésta.

Los procesos se logran a partir de la repetición y la reflexión del sujeto sobre las acciones que realiza, lo cual permite también que *intuya resultados antes de realizar los procedimientos, cálculos o algoritmos necesarios para obtener la solución del ejercicio o problema*. También existe la posibilidad de que invierta los pasos que fueron necesarios para llegar a la respuesta que se obtuvo, lo que resulta muy útil al momento de descomponer una función compuesta.

Con la concepción de proceso, el estudiante puede pensar en una función como un receptor de datos de entrada, que realiza alguna operación y regresa un dato de salida. Este proceso lo puede hacer mentalmente, de hecho, sin realizar las operaciones en la entrada, tal como lo indica Breidenbach et al. (1992).

Un ejemplo de proceso aparece cuando el estudiante puede estimar el dominio y/o rango de una función compuesta, con lo cual puede inferir (p.e.) que el valor $x = 1$ no se puede evaluar en la función compuesta $\sqrt{cos(x) - 16}$, y esto sin necesidad de realizar la evaluación “a lápiz y papel.”. Otro ejemplo se evidencia cuando el estudiante es capaz de comprender que para la función trigonométrica $f(x) = cos(x)$, el rango comprende los valores del intervalo $[-1, 1]$. En otras palabras, con la concepción de tipo proceso el estudiante sí analiza los dominios y rango de las funciones a componer y de la función resultante.

La concepción proceso le permite al estudiante invertir las composiciones, es decir, a partir de la formula de una función compuesta puede proponer dos o más funciones que, componiéndolas, dé la fórmula resultante. Por ejemplo, $y = (2x - 6)^3$ puede ser la composición $f \circ g$ de $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x - 6$, o si se prefiere, puede ser la composición $f \circ g \circ h$ de las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = x - 6$ y $h(x) = 2x$.

Con una estructura mental de proceso, el estudiante *ya estaría en la capacidad de realizar ejercicios sobre composición de funciones*, utilizando los métodos 2 y 3(en composiciones no tan complejas) expuesto al final de la sección 2.2.5

Objetos: Dubinsky (1991) se refiere como *objetos* a los procesos mentales que surgen cuando el estudiante puede *identificar por qué suceden las transformaciones en los procedimientos*, o como lo indican (Asiala et al., 1996, p. 8): "cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso particular, toma conciencia del proceso como una totalidad y comprende que las transformaciones (sean acciones o procesos) pueden actuar en él, y es capaz de construir tales transformaciones, entonces está pensando este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido *encapsulado en un objeto* .

A diferencia del proceso (que tiene naturaleza dinámica), el objeto es estático, es decir, es un concepto matemático que tiene determinadas propiedades y características que se ven reflejadas en *acciones y procesos*. Es por este motivo que la encapsulación y desencapsulación es tan importante en esta concepción, ya que permiten pasar del objeto estático a sus procesos dinámicos, o tal como indican (Asiala et al., 1996, p. 8): " En el transcurso de realizar una acción o un proceso sobre un objeto, a menudo es necesario desencapsular el objeto de vuelta al proceso del cual vino para usar sus propiedades y así manipularlo". [11]

Para ayudar a fomentar una concepción de tipo objeto es muy importante tener en cuenta *los procesos sobre los cuales se va a trabajar con prioridad,* ya que éstos condicionan a los objetos en la estructura mental del estudiante. Esta identificación permite que el estudiante evidencie qué procesos son necesarios para la generación de la respuesta.

Un ejemplo de pensamiento como objeto se refleja cuando el estudiante encapsula acciones y procesos al momento de realizar operaciones entre funciones, ya que para este fin se debe concebir la función como un objeto constituido por las *acciones de la operación* y por el *proceso de cada función a operar*, lo que a su vez genera *nuevos objetos* que son las *funciones resultantes*, las cuales gozan de las *propiedades heredadas* a partir de los objetos iniciales. En el caso concreto de la composición de funciones, el estudiante debe comprender que la composición de funciones genera una función nueva, con dominio y rango establecido y con una fórmula asociada, por este motivo los estudiantes con

[11] traducción realizada por el autor de este documento

concepción objeto comprenden mejor el método 3 expuesto al final de la sección 2.3.4.

Esquemas (Dubinsky, 1991, p. 101) menciona lo siguiente con respecto a los esquemas mentales:

> Un esquema es una colección más o menos coherente de objetos y procesos [en la estructura mental de un individuo.] Entonces el conocimiento matemático de un sujeto es su recopilación interrelacionada de esquemas. La tendencia de un sujeto s invocar un esquema para comprender, enfrentar, organizar, o darle sentido a una situación problema percibida es su conocimiento con respecto a un concepto individual en matemáticas.(...) De esta forma, un individuo tendrá una vasta colección de esquemas [en su pensamiento]. [12]

Asiala et al. (1996) indican que a menudo los objetos y procesos construidos pueden estar interconectados de varias formas, por lo que una colección de procesos y objetos puede ser organizado de manera estructural para formar el denominado *esquema*.

Cuando el estudiante logra coordinar dichas estructuras mentales, genera un nuevo esquema mental, que consiste en una colección coherente de acciones, procesos objetos (e incluso otros esquemas). Los esquemas también tienen la propiedad de convertirse en objetos para hacer parte de otros esquemas mayores, si así se requiere.

Por ejemplo, las funciones pueden ser agrupadas en conjuntos en los que operaciones entre funciones pueden ser introducidas y las propiedades de tales operaciones pueden ser validadas. El esquema resultante a su vez puede ser organizado para construir otro esquema para un espacio funcional, al cual pueden ser aplicados conceptos tales como espacio dual, espacios de funciones lineales y álgebra de funciones.

Específicamente en la concepción de la composición de funciones como esquema, el estudiante puede estar en la posibilidad de solucionar problemas relacionados a funciones compuestas, ya que podrá invocar mentalmente los objetos procesos y acciones que se han establecido anteriormente, además podrá generar nuevos esquemas mentales, entre los que sobresalen el álgebra de funciones, las funciones inversas, la generación de estructuras

[12] traducción realizada por el autor de este documento

algebraicas (monoide y grupo), la derivación por regla de la cadena y el método de integración por sustitución.

La descomposición genética: La teoría APOE incluye la descomposición genética, que es un intento del investigador para describir los objetos y procesos en algún conjunto de esquemas del estudiante. Dubinsky (1991) indica que una *descomposición genética de un concepto* es una descripción (en términos de su teoría) y basada en datos empíricos, sobre las matemáticas involucradas y en cómo el sujeto puede crear las construcciones que puedan permitir una comprensión del mismo (p. 96).

Se realiza una descomposición genética cuando un concepto particular se aísla en pequeñas porciones de su estructura compleja y, se dan descripciones explícitas de posibles relaciones entre sus esquemas. El autor deja en claro que aunque se dé una descomposición genética sencilla para algún concepto, no se puede afirmar que dicha descomposición genética sea válida para todos los estudiantes; mas bien, representa una forma razonable que los estudiantes podrían utilizar para construir un concepto (p. 102).

El ciclo Investigativo APOE: El desarrollo del modelo APOE sirve como ciclo de investigación, el cual se compone de tres fases relacionadas a continuación conforme al trabajo de Asiala et al. (1996):

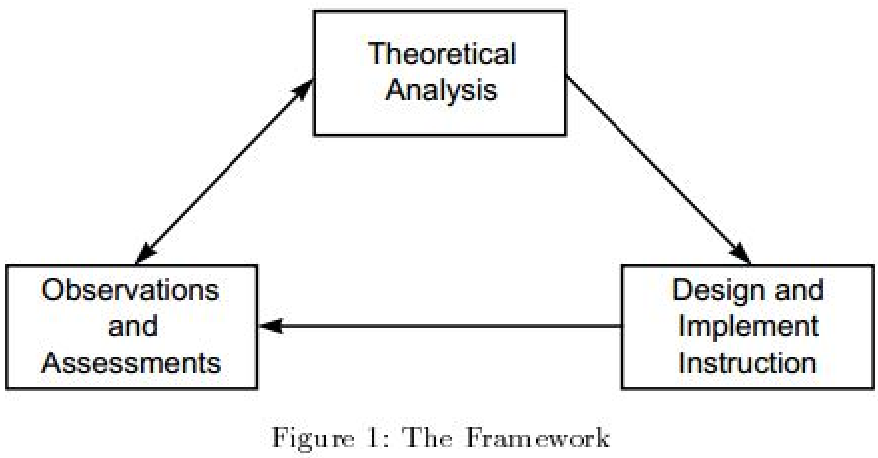

Figura 2.16: Ciclo investigativo APOE según Asiala et al.

- Un *análisis teórico*, donde se fundamentan los resultados de la aplicación total del ciclo. En este análisis se toman en cuenta los libros de texto, la experiencia de los investigadores y los resultados de estudios previos entre otros aspectos que pueden contribuir al diseño de un camino viable en la construcción de un concepto determinado (Roa-Fuentes y Oktaç, 2009, p. 96).

  Dubinsky y McDonald (2001) indican que este análisis propone en forma de una descomposición genética un conjunto de construcciones mentales que un estudiante puede crear para entender el concepto matemático que está siendo estudiado (p. 5).

- Luego de realizar la descomposición genética se realiza el *desarrollo e implementación de instrucciones*, que se encuentra fundamentado en el análisis teórico realizado previamente, tal como mencionan Asiala et al. (1996): ‘como hemos indicado anteriormente, el análisis teorético postula ciertas construcciones mentales específicas que las instrucciones deberían fomentar (p. 9).[13]

  Los autores también mencionan el *ciclo de enseñanza ACE* (Abreviación de *Activities, Class discussions & Exercises*), señalando que mediante la realización de actividades como la exploraciones en un computador ((Vizcaino, 2015)), los estudiantes obtienen experiencia con el trato de las ‘cuestiones matemáticas’ que después serán desarrolladas en la clase. En las discusiones de clase el instructor permite *discusiones entre grupos* que les dan la oportunidad a los estudiantes de reflexionar sobre sus trabajos. En las discusiones el instructor puede proveer definiciones, explicaciones y puntos de vista para entrelazar conjuntamente las cuestiones sobre las que los estudiantes han estado pensando. Finalmente, se presentan algunos *ejercicios* para que los estudiantes los trabajen por equipos, con el fin de que los realicen como trabajos en clase o laboratorios y de esta manera refuercen las nociones que han construido (p. 10).

- *Recolección y análisis de datos:* en esta etapa, se analizan los resultados obtenidos. Dubinsky y McDonald (2001) resaltan que:

[13] Traducción realizada por el autor de este documento.

> La teoría nos ayuda a analizar los datos y nuestro intento de usar la teoría para explicar los datos nos pueden guiar a cambios. . . . Usualmente, la descomposición genética en el análisis teorético inicial es revisado y refinado por los resultados de los datos obtenidos. (p. 7).

El modelo APOE ha sido utilizado como base teórica en la enseñanza y aprendizaje de varias ramas de las matemáticas como la geometría, el álgebra, la estadística y el cálculo. Este modelo ha sido utilizado como fundamento teórico en trabajos como los de Breidenbach et al. (1992), Cottrill (1991) y Valdivia et al. (2015), que proponen descomposiciones genéticas con respecto al aprendizaje de la composición de funciones en cursos de educación superior.

La conexión entre la abstracción reflexiva y APOE.

Como se ha podido observar anteriormete, existe una estrecha relación entre AR y APOE. Dubinsky (1991, p. 101) fundamenta su teoría APOE en AR: "Para nosotros, la abstracción reflexiva será la construcción de objetos mentales y de acciones mentales en esos objetos. *Para elaborar nuestra teoría y para relacionarla con contenidos específicos en matemáticas*[Énfasis agregado](. . .)"

En investigaciones posteriores, (Dubinsky y McDonald, 2001, p. 2) indican lo siguiente:

> Las ideas [de la teoría APOE] surgen desde nuestros intentos de extender al nivel del aprendizaje de las matemáticas universitarias el trabajo de J. Piaget sobre abstracción reflexiva en el aprendizaje de los niños, (. . .) Argumentaremos que esta perspectiva teorética [es decir, APOE] posee, al menos en alguna extensión, las características listadas mas arriba y mas allá, ha sido muy usada en tratar la comprensión del aprendizaje de los estudiantes en un rango amplio de tópicos de cálculo, álgebra abstracta, estadística, matemáticas discretas y otras áreas de matemáticas de pregrado.

Se puede evidenciar que APOE es una teoría que extiende los trabajos de Piaget enfocados en niveles básicos de escolaridad a Conceptos más complejos de las matemáticas escolares de la educación media y superior. Incluso Dubinsky afirma que los procesos mentales que permiten que el estudiante evolucione sus concepciones sobre el concepto matemático son precisamente los que caracterizó Piaget en su teoría de AR, tal como lo indican Breidenbach et al. (1992):

> Una *acción* es cualquier manipulación física o mental repetible que transforma objetos (p.e. números, figuras geométricas, conjuntos) para obtener [otros] objetos. Cuando la acción total puede tomar lugar plenamente en la mente del sujeto, o simplemente siendo imaginada como 'tomando un lugar', sin ejecutar necesariamente a través de sus pasos específicos, decimos que la acción ha sido *interiorizada* para llegar a ser un *proceso.* Entonces es posible para el sujeto usar el proceso para obtener nuevos procesos, por ejemplo reversándolo o coordinándolo con otros procesos (p.249).[14]

El autor también proporcionan la siguiente figura para ilustrar tal relación:

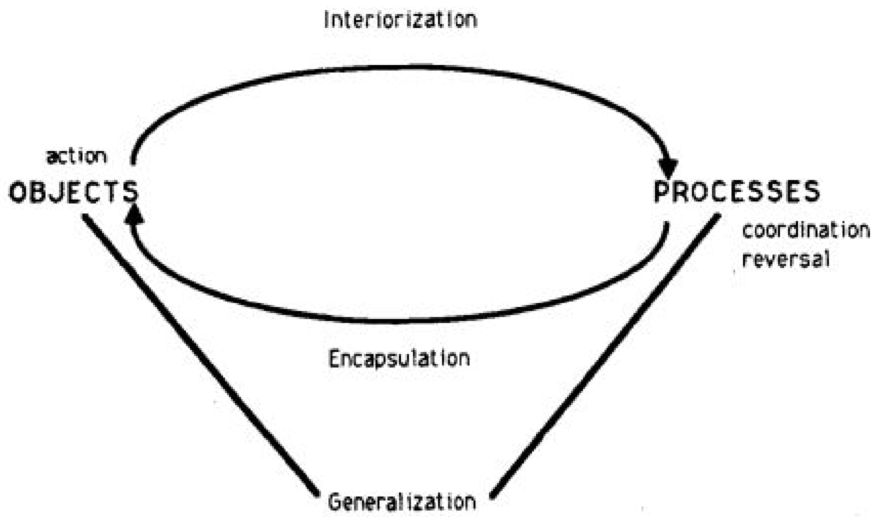

Fig. 1. Construction of objects and processes.

Figura 2.17: Esquema sobre AR y APOE según Breidenbach.

La ingeniería didáctica.

Artigue et al. (1995) mencionan lo siguiente en cuanto a la ingeniería didáctica:

[14]Traducción realizada por el autor de este documento

> [La ingeniería didáctica] surgió en la didáctica de las matemáticas en los años 80. Se hace una similitud con el trabajo del ingeniero, quien se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo (p. 33).

Como metodología de investigación, la ingeniería didáctica se caracteriza por un esquema que se basa en las “realizaciones didácticas en clase”, que involucra la concepción, realización, observación y análisis de las secuencias de enseñanza. Se pueden distinguir dos niveles de ingeniería didáctica: la *micro-ingeniería* y la *macro-ingeniería*, los cuales dependen de la importancia de la realización didáctica en la investigación. Las investigaciones de micro-ingeniería son mas fáciles de llevar a la práctica, aunque los de macroingeniería se tornan indispensables para comprender las relaciones complejas que surgen entre la enseñanza y el aprendizaje y los fenómenos asociados a esta relación.

La ingeniería didáctica también se caracteriza por ubicarse en el registro de los estudios de casos, cuya validación es interna y se basa en la reflexión de los análisis a priori y a posteriori.

Douady, en Artigue et al. (1995, p. 62) menciona que:

> el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos. En el transcurso de las interacciones entre el profesor y los estudiantes, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los estudiantes y en función de las selecciones y decisiones del profesor. De esta forma, la ingeniería didáctica es a la vez un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo, si se presenta el caso, a la dinámica de la clase.

Modelo de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática.

Meel (2003, p. 13) realiza una comparación entre este modelo y la teoría APOE, donde manifiesta lo siguiente:

> Pirie y Kieren conceptualizan su modelo sobre el crecimiento de la comprensión matemática como poseedor de 7 niveles potenciales (...). El proceso de llegar a comprender inicia en el centro del modelo llamado el estrato del *entendimiento primitivo.* Primitivo se refiere al punto inicial; no a un bajo nivel de matemáticas. El contenido central es toda la información que el estudiante atrae a la situación de aprendizaje. Estos contenidos se han analizado con distintos nombres: “conocimiento intuiutivo”(Leinhardt, 1988), “conocimiento situado”(Brown, Collins y Duguid, 1989), y “conocimiento previo o informal”(Saxe, 1988).

Los estratos del modelo son los siguientes:

- *Entendimiento primitivo:* Un estudiante puede llegar a una situación de aprendizaje con una gran cantidad de información que puede o no dar forma al crecimiento de la comprensión. Dependiendo del concepto, dicha información podrá o no contribuir. El autor toma como ejemplos la sustracción y los decimales, donde en la primera, los estudiantes realizaron una instrucción de trazo con mapas a partir de las representaciones mentales de la sustracción con bloques anexas a una rica base de conocimiento asociada a la sustracción, mientras que en el segundo caso los estudiantes percibían estos símbolos como parte de un nuevo sistema simbólico acompañado por nuevas reglas que hacía que los vínculos del conocimiento anterior disminuyeran.

- *Creación de imagen:* En este estrato, el estudiante es capaz de realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores. Las *imágenes* no son necesariamente representaciones pictóricas”, sino que transmiten el significado de cualquier tipo de imagen mental.Las acciones relacionadas en este estrato se relacionan con que el estudiante realice algo mental o físico, para obtener una idea sobre ese concepto. Por ejemplo, cuando el estudiante realiza acciones de doblado o cortado, puede tener una idea mejor de fracciones como cosas que que obtuvo a partir de cortar piezas iguales y más pequeñas.

- *Comprensión de la imagen:* En este estrato las imágenes asociadas con una sola actividad son reemplazadas por una imagen mental. Estas imágenes son orientadas por un proceso mental y liberan las matemáticas del estudiante a partir de la necesidad de de realizar acciones físicas particulares. a partir de la libertad que se tiene para comprender esa imagen, el estudiante puede reconocer propiedades globales obvias de las imágenes matemáticas inspeccionadas.

- *Observación de la propiedad:* El estudiante puede examinar una imagen mental y determinar los determinados atributos asociados con dicha imagen. Además el estudiante puede observar distinciones, combinaciones o conexiones entre distintas imágenes mentales. Dichas propiedades se pueden unir para crear definiciones que evolucionan y que pueden definir características particulares.

- *Formalización:* En este estrato el estudiante es capaz de conocer las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes. En este estrato el estudiante tiene objetos mentales de clases similares construidos a partir de propiedades observadas, extracción de cualidades comunes y abandono de los orígenes de la acción mental de la persona. Tal característica tiene como consecuencia la producción de definiciones matemáticas completas. El lenguaje que se usa para describir un concepto no tiene que ser formal, sin embargo, las descripciones generadas deben ser equivalentes a una definición matemática adecuada.

- *Observación:* Este estrato permite la capacidad de considerar y utilizar como referencia el pensamiento formal de la persona. El estudiante puede producir verbalizaciones relacionadas con la cognición sobre el concepto formalizado. El estudiante es capaz de combinar definiciones, ejemplos, teoremas y demostraciones para identificar los componentes esenciales, las ideas de conexión y los medios para cruzar entre dichas ideas.

- *Estructuración:* El estudiante que se encuentre en este estrato puede generar conciencia sobre la veracidad o no de la observación formal, explicando la interrelación de dichas observaciones mediante un sistema axiomático, de esta forma puede observar la relación entre distintos sujetos, realiza preguntas sobre ideas subyacentes, axiomas y ejemplos, también puede relacionar dichas ideas a través de varios dominios y percibe la interconexión de diversas teorías.

Capítulo 3

Propuesta Didáctica.

Teniendo en cuenta el marco teórico expuesto en el capítulo anterior, se opta por fundamentar la propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la composición de funciones bajo el modelo APOE y el ciclo de enseñanza ACE, complementándolo con el diseño de actividades y herramientas digitales en GeoGebra que permitan la interacción con las representaciones gráficas de la función y de las funciones compuestas. Esta decisión obedece a múltiples factores, entre los que se encuentran los siguientes:

1) La teoría es robusta y establece una evolución del conocimiento no lineal en la que el estudiante tiene la capacidad de estructurar la concepción que tenga sobre la composición de funciones y le permite relacionar tal concepción con otros objetos y procesos matemáticos que hubiera asimilado anteriormente o, que asimile en un futuro (ver Asiala et al. (1996), Breidenbach et al. (1992) y Dubinsky y McDonald (2001)).

2) Varios autores han fundamentado sus propuestas en el modelo APOE y han tenido resultados satisfactorios (ver Cottrill (1991), Roa-Fuentes y Oktaç (2009) y Valdivia et al. (2015)).

3) Al estar basado en la abstracción reflexiva de Piaget, el modelo APOE es de carácter constructivista, que es lo que se desea para la propuesta (Ver Bayens (2016)).

4) El modelo APOE está diseñado para analizar la comprensión de las matemáticas

a nivel universitario (como una extensión de la abstracción reflexiva), lo cual se ajusta muy bien a la propuesta porque la composición de funciones es un concepto ascociado a las asignaturas de precálculo, que se aborda en educación media y/ o superior (ver Dubinsky y McDonald (2001)).

5) Los trabajos fundamentados en el ciclo de enseñanza ACE pueden complementarse con la realización de trabajo con herramientas computacionales, lo que puede potenciar la asimilación de acciones y procesos por parte del estudiante para que se conviertan en procesos y objetos mentales del mismo (ver Vizcaino (2015)).

A continuación se explicará la descomposición genética adaptada para esta propuesta, así como las actividades diseñadas para evaluar cada concepción de la teoría (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) en la estructura mental del estudiante.

3.1. Descomposición genética de la propuesta.

De acuerdo al ciclo de investigación APOE, se debe establecer una descomposición genética para la propuesta didáctica. En esta descomposición deben aparecer las acciones, procesos, objetos y/o esquemas que podrían lograr los estudiantes, así como los algoritmos y actividades necesarios para que el estudiante pueda comprender los conceptos y procedimientos que se enseñarán.

Teniendo en cuenta la revisión de textos en el segundo capítulo, las experiencias de aula de otros autores como Cottrill (1991), Boognl (2006), Cottrill (1991), Roa-Fuentes y Oktaç (2009) y la experiencia en la Práctica de integración profesional a la escuela PIPE, se plantea la hipótesis de que el estudiante necesita los siguientes conceptos para tener una mejor concepción de la composición de funciones:

- **Función:** Teniendo en cuenta lo que indican Bayens (2016) y Steketee y Scher (2012), es esencial que el estudiante tenga una buena comprensión de este concepto matemático fundamental , ya que si presentan dificultades en su comprensión, lo más probable es que alcancen una concepción de tipo *acción* sobre la función compuesta, por lo que no podrán hacer más que *evaluar la función compuesta en un punto de ésta* y manipular la fórmula *sin alguna comprensión* mayor sobre el procedimiento realizado. Sólo realizará algoritmos sin sentido (Asiala et al., 1996, p. 7).

- **Dominio y rango de una función:** Para poder comprender en qué casos una función compuesta $f \circ g$ está bien definida, es necesario tener claridad sobre las condiciones *i)*$x \in Dom(g)$ y *ii)* $g(x) \in Dom(f)$ (o lo que Valdivia et al. (2015) indican de la siguiente forma : $Ran(g) \subseteq Dom(f)$). Si se logra tener claridad en cuanto a estas condiciones, el estudiante podrá interiorizar el procedimiento, logrando así una concepción de tipo *proceso* (y posteriormente de tipo *objeto*) sobre la función compuesta. En caso contrario, realizará procesos algorítmicos sin hallarle sentido, como lo ejemplifican las autoras al mencionar que un estudiante realiza la composición de $(g \circ f)(x)$ con $f(x) = cos(x)$ y $g(x) = \sqrt{x - 16}$ y da la respuesta $(g \circ f)(x) = \sqrt{cos(x) - 16}$, aún cuando el dominio para esta función en los números reales no está definido.

Estos conceptos también los tiene en cuenta la propuesta de Valdivia et al. (2015), que también establece los siguientes procesos como claves para su descomposición genética:

- *Para $g \circ f$, validar que $R(f) \subseteq D(g)$.* Esta condición es equivalente a las dos condiciones que mencionaron los textos consultados, es decir: *i)* $x \in Dom(f)$ y *ii)*$f(x) \in Dom(g)$.
- *Comprender que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

La descomposición genética y el análisis teórico del capítulo anterior ponen en evidencia que si estudiante desea mejorar la comprensión de la composición de funciones (que no solo realice un proceso algebraico sin sentido, sino que le dé sentido en su estructura mental a cada propiedad y característica del objeto) necesita tener comprensión sobre las siguientes propiedades y antipropiedades que puede interiorizar a partir de una reflexión sobre las acciones, procesos, objetos y/o esquemas que utilice (dependiendo de la concepción del individuo) de la 'función compuesta':

- **Notaciones de la operación:** De acuerdo a la propuesta de Valdivia et al. (2015, p. 2), una de las dificultades que tienen los estudiantes para afrontar la composición de funciones es que la confunden con la multiplicación de funciones. Si el estudiante comprende que la composición es una operación diferente al producto, podrá abordarla de mejor forma, ya que no necesitará una instrucción externa explícita para aplicar procedimientos algorítmicos en ejercicios que involucren composición de funciones. Un estudiante que comprenda esta característica puede tener más facilidad para concebir la composición de funciones como un *proceso*.

- **La no conmutatividad de la operación:** Esta es una consecuencia de la propiedad anterior, ya que, de acuerdo con las definiciones expuestas en la sección 1.3.2, se hace énfasis en que a modo general, $f \circ g \neq g \circ f$. Esta propiedad permite que el estudiante reflexione sobre los distintos objetos que producen las dos operaciones mencionadas anteriormente, lo cual fortalecería el encapsulamiento de los procesos "analizar recorridos y dominios de las funciones a componer" y "aplicar la definición de composición", que permite tener una concepción *proceso* de la función compuesta.

Cabe mencionar que un estudiante que comprenda las características mencionadas anteriormente puede tener más facilidad para encapsular estos procesos y concebir la composición de funciones como un *objeto*.

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, se ha decidido optar por el uso de la descomposición genética propuesta por Valdivia et al. (2015), ya que estas autoras han trabajado desde su propia investigación sobre la composición de funciones. La investigación de estas autoras tiene muchos puntos similares en cuanto a la hipótesis que se ha construido en este documento y ya ha sido probada en instituciones de educación superior en Chile (p. 4).

Las autoras manifiestan que los estudiantes primero deben contar con ejemplos de funciones reales para que sepan de qué forma se realiza la composición de funciones. Con esto se daría paso a una *concepción de tipo acción*. En esta etapa es bueno variar los tipos de funciones elegidos (las autoras mencionan las funciones polinómicas, logarítmicas, exponenciales, lineales, cuadráticas, constantes, entre otras) con el fin de que el estudiante pueda reflexionar sobre cuáles funciones pueden componerse entre ellas y cuáles no, especificando que estas composiciones se pueden realizar tanto algebraicamente como por sus representaciones gráficas.

Al reflexionar sobre las restricciones que pueden haber en la composición de dos o mas funciones y, al haber generado varias funciones compuestas, el estudiante puede alcanzar una *concepción de tipo proceso*, ya que puede determinar cuáles son las condiciones asociadas a dichas funciones, en específico las relacionadas con corroborar la contenencia de rangos y dominios mencionada al inicio de la descomposición genética.

Cuando el estudiante logra encapsular los procesos para validar el dominio y rango de las funciones y el proceso algebraico para componer funciones (es decir, la manipulación de las representaciones algebraicas de las funciones a componer), logra una *concepción de tipo objeto* que le permite encapsular y desencapsular los procesos y acciones que se requieren para generar la composición requerida.(p. 5)

Aunque las autoras no mencionan el esquema como una de las concepciones de la composición de funciones. En la búsqueda que se generó en este documento da indicios de al menos dos esquemas que se pueden conformar, los cuales son la regla de la cadena y, la conformación de una estructura algebraica de monoide y de grupo a partir del álgebra de funciones. Como estos dos posibles esquemas requieren un nivel mayor de abstracción y se abordan en cursos de educación superior, la concepción de la composición de funciones como esquema no se tendrá en cuenta para esta propuesta didáctica.

La descomposición genética que proponen las autoras se genera a partir del análisis de las dos funciones a componer (llámense f y g con sus respectivos dominios A y B , con rangos y dominios contenidos en $\mathbb{R}$.), las cuales son concebidas como *objetos.*

Despues de que el sujeto desencapsule el proceso de validar los dominios de las funciones (que hace parte del *objeto función*), procede a realizar los dos procesos esenciales del *objeto función compuesta* para realizar la composición $g \circ f$, es decir, validar que $R_f \subseteq D_g$ y comprender que $g \circ f = g(f(x))$.

Cuando el sujeto coordina los procesos mencionados anteriormente, puede hallar la fórmula algebraica a partir de las fórmulas de las funciones f y g. Si tales funciones cumplen la condición i, es decir, si se cumple el *proceso 1*, entonces la expresión algebraica será la fórmula de la función generada $h = g \circ f$ con dominio y rango determinados.

La figura 3.1 ilustra el diagrama de la descomposición genética de la investigación:

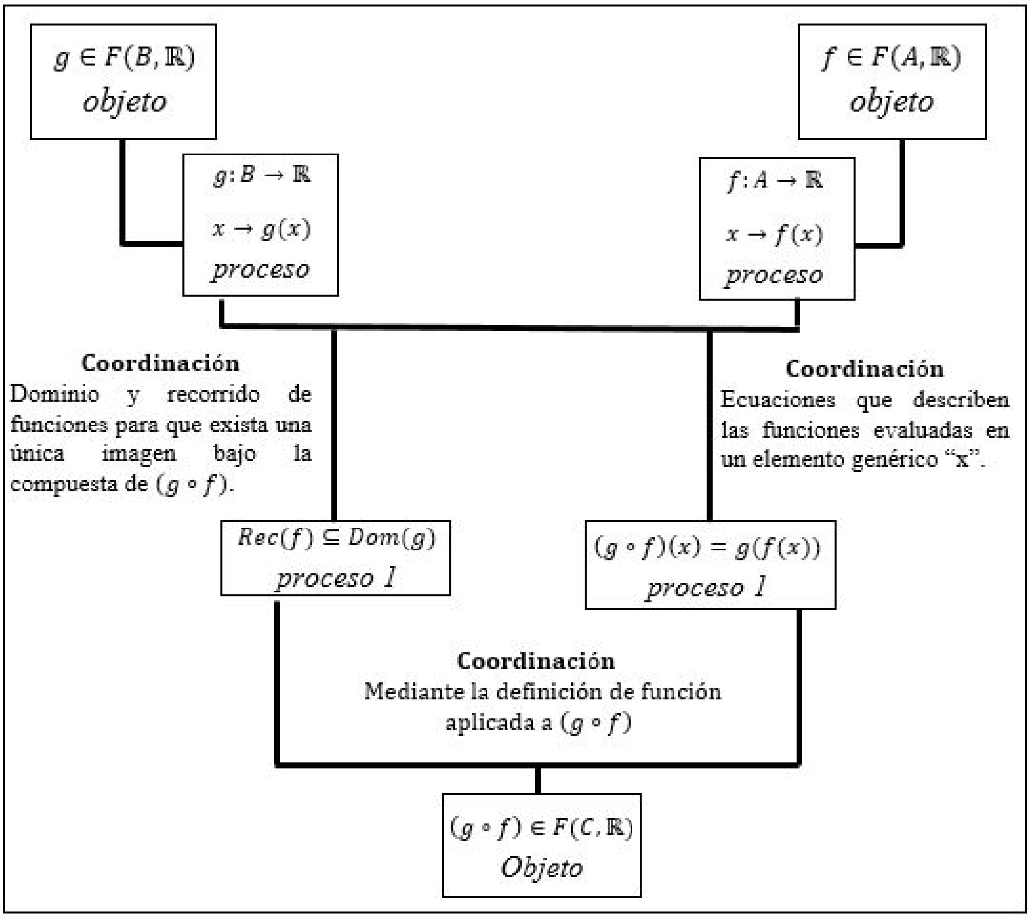

Figura 3.1: Descomposición genética propuesta por Valdivia et al.

3.2. Metodología.

Teniendo como fundamento teórico el modelo APOE y el ciclo de enseñanza ACE (Ver sección 2.2.6), se desarrollan cinco materiales didácticos que sirven como herramienta para evidenciar la concepción que tiene un estudiante sobre las funciones y la composición de funciones. Evidenciar tales concepciones es posible gracias a los indicadores de concepción que proporciona la teoría APOE (Ver sección 2.2.6) y que se ven reflejadas al examinar las respuestas, conjeturas e hipótesis que los estudiantes expresan cuando se enfrentan a situaciones matemáticas.

La interpretación constructivista de la teoría APOE se fundamenta en las construcciones mentales que un individuo realiza sobre un concepto determinado y establece que el sujeto logrará comprender algún objeto matemático, concepto o procedimiento cuando lo manipule (física o mentalmente) y reflexione sobre tales manipulaciones, con lo que mejorará así su comprensión. El ciclo de enseñanza ACE es un complemento del modelo APOE y está diseñado para fomentar tales reflexiones, por lo que se adopta el ciclo ACE en la metodología de la siguiente manera:

En primer lugar, se diseñaron materiales didácticos que (usados en un contexto exploratorio) permiten evaluar la concepción que tienen los estudiantes sobre las funciones y las funciones compuestas por medio de las respuestas que generan. Tales actividades están diseñadas para que el estudiante las explore y para que pueda comparar sus conjeturas con los resultados obtenidos y, de esa forma reflexione sobre el por qué de los resultados y respuestas de las actividades. Para más información sobre estas actividades y materiales ver la sección 3.3

En segundo lugar (y teniendo en cuenta las concepciones que se perciben de cada estudiante), se promueven discusiones entre el docente y los estudiantes (y también entre los estudiantes) para que se socialicen propiedades, procedimientos y conjeturas surgidas de las actividades. En esta etapa, el docente puede introducir e institucionalizar definiciones, conceptos y procedimientos en la clase. Con estas discusiones se socializa el conocimiento adquirido y se fomenta la capacidad de argumentación y razonamiento de los estudiantes, lo que también les permite reflexionar sobre las acciones y procesos que realizan. Para más información sobre los conceptos, definiciones, propiedades y preguntas orientadoras aplicadas, ver la sección 3.3.2.

Finalmente, las herramientas computacionales creadas en GeoGebra sirven para que los estudiantes puedan corroborar si el trabajo que el docente asigne para ejercitar procedimientos algorítmicos les quedó bien o mal solucionado. Si este trabajo se hace a conciencia, también generará que el estudiante reflexione sobre su trabajo y así mejore su comprensión sobre la composición de funciones. Los materiales didácticos que se mencionan en los párrafos anteriores son programas diseñados en GeoGebra y tienen como finalidad el propiciar la interacción del estudiante con las representaciones de la función, lo que se convierte en un complemento del ciclo de enseñanza ACE que permite a los estudiantes y docentes realizar representaciones gráfica de las funciones compuestas de una gran variedad de ejercicios y problemas que estén solucionando. Estas aplicaciones se explican detalladamente en la sección 3.4.1.

Las actividades propuestas se diseñaron para que fueran desarrolladas en cinco fases,organizadas de la siguiente manera:

- En la primera fase se realiza un diagnóstico general del curso para determinar su comprensión en cuanto al concepto de función. Es esencial que los estudiantes posean una buena comprensión sobre la función y cómo representarla, también qué es y cómo hallar el dominio y el rango de una función; por otra parte, también es necesario que sepan diferenciar las variables dependientes e independientes de una función y que sepan manipular correctamente las operaciones algebraicas.

  Este diagnóstico se puede realizar a través de un quiz de conceptos que esté enfocado a responder las siguientes preguntas:

  - ¿Qué es una función?
  - ¿Que es el dominio de una función?
  - ¿Que es el rango de una función?
  - ¿Que es una variable independiente?
  - ¿Que es una variable dependiente?
  - Escriba ejemplos de algunos tipos de funciones que conozca.
  - ¿En qué consiste la propiedad asociativa de una operación?
  - ¿En qué consiste la propiedad conmutativa de una operación?

  El docente puede optar por realizar directamente estas preguntas en el quiz o en realizar ejercicios que involucren tales conceptos.

- En la segunda fase se realiza una introducción a las funciones compuestas por medio de una actividad en contextos no netamente matemáticos con la que se puede explicar de forma intuitiva la noción de composición de funciones, y las propiedades y antipropiedades que cumple (explicadas detalladamente en la sección 3.2). Esta actividad se encuentra fundamentada en el material "árbol genealógico" explicado en la sección 3.3.1.

  Después de la actividad introductoria, se define la composición de funciones matemáticamente:

  Definición: Existe una operación de funciones llamada composición de funciones y denotada como$f \circ g$ (léase g compuesta f, f composición de g o f cero g) definida de la siguiente forma:

  $$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

  Esta operación cumple con las siguientes propiedades:

  - $Ran(g) \subseteq Dom(f)$
  - $f \circ g \neq f \cdot g$
  - $f \circ g \neq g \circ f$

  Luego de institucionalizar la definición y propiedades (y antipropiedades) de la composición de funciones, se explican los tres procedimientos algorítmicos (o "métodos") para componer funciones de la sección 2.2.5.

  Se puede generar una discusión con los estudiantes enfocada en exponer cuál método les parece mas "más sencillo de realizar" y "cuál es más efectivo para obtener la fórmula de la función compuesta". Se pronostica que los estudiantes opten por decir que el primer método es más sencillo, lo que podría dar indicios de una concepción de la composición de funciones como una acción. Después que los estudiantes compartan sus perspectivas con respecto a tales preguntas, se pueden sintetizar los beneficios e inconvenientes de los tres métodos:

1. El método 1 es mas rápido y eficaz para hallar la composición de funciones en un punto. El inconveniente es que no genera una fórmula final para la función
2. El método 2 es el "método intermedio", por lo que es medianamente rápido y permite tener una idea de la fórmula de la función resultante.
3. El método 3 arroja la fórmula de la función compuesta, aunque es mas demorado

Estos argumentos pueden enriquecerse con las propuestas de los estudiantes, lo que le dará indicios al docente sobre la concepción que puedan tener los estudiantes que participen en la discusión.

- En la tercera fase se introduce la representación dinagráfica de una función. La explicación sobre la forma en que funciona el programa de dinagrafos (ver sección 3.3.1) abre camino para que el estudiante utilice la app, que es una herramienta muy útil para que los estudiantes pueda analizar de mejor forma los dominios y rangos de las funciones a componer y de las funciones compuestas. El docente puede proponer las funciones a componer que desee, o si lo prefiere, puede seleccionar ejercicios de textos guía para solucionar en clase, los cuales se pueden graficar sin ningún inconveniente en la app.

- En la cuarta fase se ejercitarán procesos a través de las representaciones de funciones por medio de aplicaciones en GeoGebra. También se abordará la solución de problemas en donde se involucran funciones compuestas con las modelizaciones de dos problemas específicos. Las apps que se utilizan en esta fase se exponen en las secciones 3.3.1 y 3.3.2.

- Finalmente, en la quinta fase se realizará una revisión de conceptos y procesos a través de una guía-taller, evaluación, quiz u otro mecanismo que el docente desee usar para cuantificar y cualificar la efectividad de la propuesta. Las respuestas, métodos, algoritmos y argumentos de las soluciones de los estudiantes permitirán tener una idea de la concepción alcanzada por el estudiante.

3.3. Actividades y herramientas didácticas.

A continuación se presentan las actividades para abordar la composición de funciones. Se iniciará con actividades introductorias para validar los conocimientos de los estudiantes con respecto a las funciones y sus rangos y dominios.

Para estar en concordancia con lo que propone el modelo ACE, las actividades estarán encaminadas hacia la exploración para luego crear discusiones sobre lo que los estudiantes han encontrado y se aprovechará para dar las definiciones y explicaciones necesarias. Finalmente, se dejarán ejercicios para que los estudiantes fortalezcan sus procesos algorítmicos. Estos ejercicios y las soluciones que propongan los estudiantes también podrían servir para dar paso a nuevas discusiones que contribuyan a la abstracción reflexiva de ellos.

3.3.1. Materiales didácticos.

Se proponen y diseñan los siguientes materiales para su uso en el aula:

Árbol genealógico:

Este material es un esquema gráfico donde se muestran las cinco generaciones anteriores a un sujeto (que está ubicado en la parte inferior del esquema). En tal esquema sólo se tienen en cuenta los padres de los miembros del árbol (es decir, no se tiene en cuenta a los tíos, hermanos, sobrinos, etc.). El árbol genealógico puede ser realizado en una cartelera de papel kraft o impresiones de las parejas del árbol genealógico, también se pueden dibujar tales parejas directamente en el tablero o si se desea, se pueden mostrar por medio de proyectores digitales.

Este material puede servir de complemento para generar actividades que permitan reflexionar sobre la diferencia entre relaciones y funciones, también puede contribuir a que el estudiante comprenda que existen funciones que no son necesariamente numéricas, sino que pueden existir en entornos muy cercanos al individuo y que no son necesariamente matemáticos.

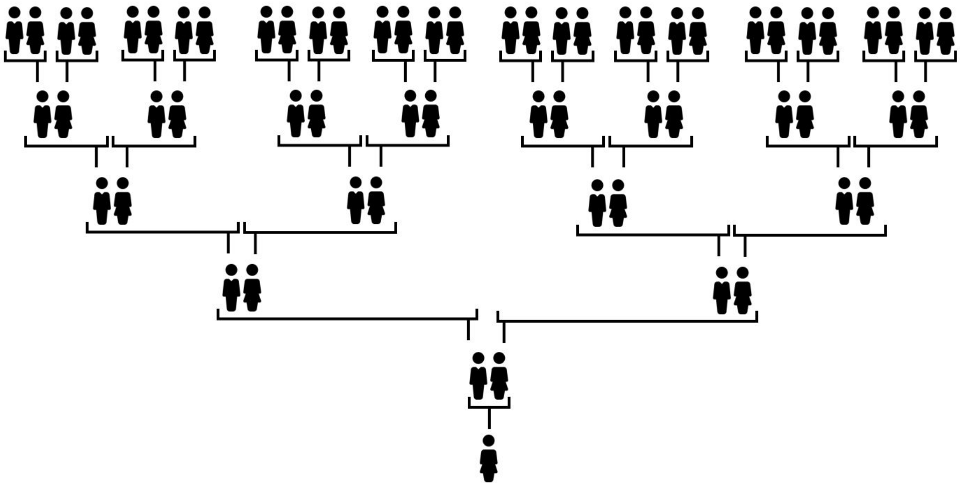

Figura 3.2: Esquema para actividad del árbol genealógico.

Herramientas para representar gráficas de funciones compuestas en GeoGebra.

Teniendo en cuenta lo mencionado por (Cottrill, 1991), Bayens (2016), Steketee y Scher (2012), así como en la importancia de las representaciones de funciones citadas en la tesis doctoral de Bedoya (2002) y lo propuesto también por Duval y Saenz (2016), se han creado cuatro aplicaciones en GeoGebra para ayudar a que el estudiante pueda reflexionar sobre la composición de funciones.

A continuación se presentan dichas aplicaciones con sus respectivos propósitos:

Dinágrafo para funciones compuestas: Tomando como fundamento la propuesta de Steketee y Scher (2012), se diseñó una herramienta visual en GeoGebra que muestra la representación de funciones por medio de dinágrafos, en donde los ejes de abcisas y ordenadas no se trazan de forma perpendicular sino de forma paralela.

La característica mencionada en el párrafo anterior permite ver "en secuencia" las contenencias de dominios y rangos en la composición de funciones, ya que tales funciones se pueden representar por medio de tres rectas paralelas, donde 'la primera' representaría el dominio de la función a componer (o *interna*), 'la última' representaría el rango de la función que compone (o *externa*) y la recta que se encuentra entre las otras dos representaría al mismo tiempo el rango de la función a componer y el dominio de la función que compone a la otra, lo que permite tener una representación gráfica más explícita de la condición de la composición de funciones, es decir: para $g \circ f$, $R(f) \subseteq D(g)$.

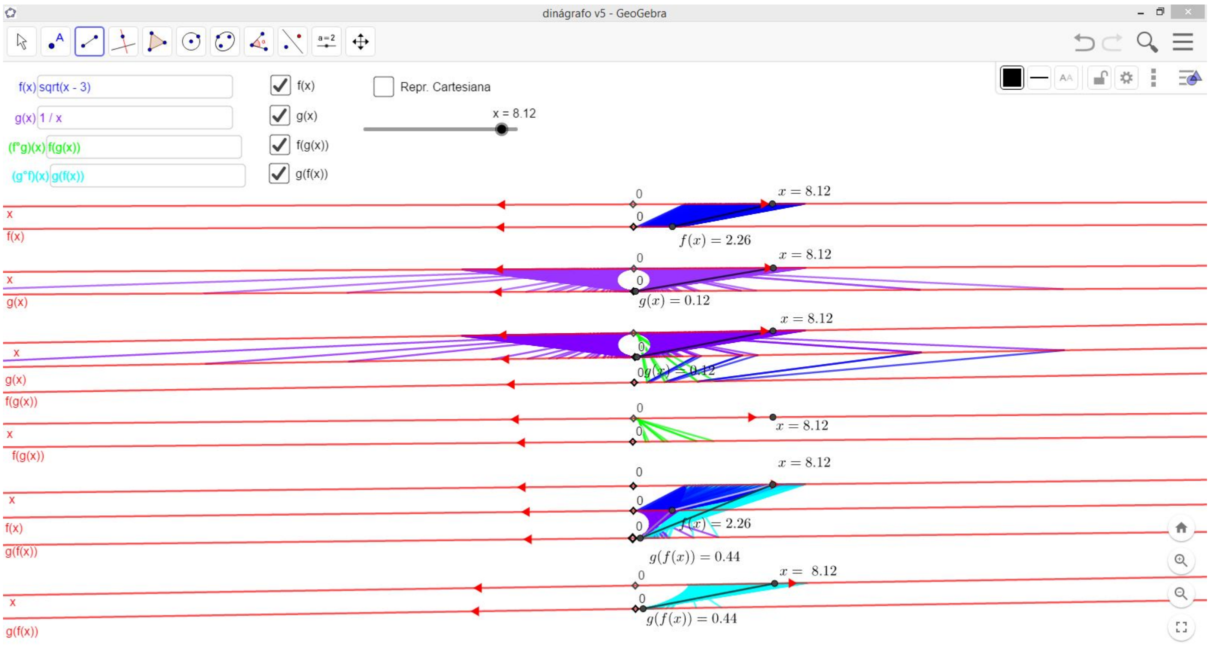

Figura 3.3: Dinágrafo en Geogebra.

La aplicación tiene cuatro cuadros de entrada con las etiquetas $f(x)$, $g(x)$, $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$. En los dos primeros cuadros, el usuario puede ingresar las dos funciones que desea componer. Los dos últimos cuadros muestran la definición de composición de funciones, es decir, $(g \circ f)(x)) = g(f(x))$. Cada rótulo de las funciones tiene un color distintivo, que también comparte su respectiva representación.

En esta aplicación también se encuentran cinco cuadros de verificación para que el usuario determine si desea o no ver los dinágrafos de $f(x)$, $g(x)$, $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$. También existe la opción de ver la representación cartesiana de las funciones. Hay que mencionar que cada cuadro de verificación trabaja de forma independiente,por lo que el usuario puede usarlos sin restricciones para enfocar qué función desea observar.

Finalmente, el usuario también puede encontrar un deslizador que va desde -10 a 10. Este deslizador cumple el rol de variable independiente de las funciones, que se puede operar manualmente o por medio de la opción ‘animación’ de geogebra.

Se realizaron los dinagrafos (sepadaramente) de las funciones a componer y del resultado de la composición para que el estudiante pueda asimilar la forma en que se representan $f(x)$ y $g(x)$ y, de esta forma pueda comprender mejor el dinágrafo de las composiciones $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$.[1]

Para que el estudiante se familiarice con la representación dinagráfica de las funciones, es bueno que se explore cómo se representan las funciones básicas. Por ejemplo, se pueden graficar funciones polinómicas y realizar discusiones en clase sobre cuál forma toma la representación dinagráfica. Si el docente lo requiere, también puede explorar en clase funciones de tipo racional, exponencial, logarítmica, trigonométrica, entre otras.

Las discusiones que se generen en cuanto a la exploración de las representaciones de distintas funciones en los dinágrafos deberían ser dirigidas a la reflexión sobre cómo se ven representados los dominios y rangos de las funciones, qué partes de las rectas pertenecen o no a las representaciones y a qué se debe la forma de determinadas representaciones de funciones (por ejemplo, la función racional $f(x) = \frac{1}{x}$ genera un círculo en los puntos cercanos a su asíntota vertical).

Cuando los estudiantes tangan mayor familiaridad con el uso de los dinafrafos, se pueden empezar a realizar representaciones de composiciones de funciones, es así que se pueden combinar varios tipos de funciones (p.e. una función polinómica y una logarítmica) para validar qué tipo de representación se genera.

En estas exploraciones es provechoso proponer algunas funciones que no se puedan componer, por ejemplo, a partir de $f(x) = \sqrt{x-5}$ y $g(x) = sen(x)$, la función compuesta $h(x) = f(g(x))$ no arroja ninguna representación ya que no está definida para los números reales, aunque la función $j(x) = g(f(x))$ sí está definida y por tanto, arroja su respectiva gráfica.

Las exploraciones que realicen los estudiantes permiten que reflexionen sobre las propiedades subyacentes a cada composición realizada, lo que permite que sus concepciones se modifiquen y afiancen la comprensión que tiene con respecto a las propiedades explicadas en la descomposición genética.

[1]Disponible en https://www.GeoGebra.org/classic/tysmrqjb

Composición de funciones en 3d: Teniendo como base lo enunciado por Cottrill (1991) en cuanto a la dificultad de representar gráficamente las funciones compuestas [2], se procedió a realizar una representación de las funciones a partir de tres planos ortogonales (xy, yz y xz respectivamente) cuya intersección es el punto de origen $(0, 0, 0)$. Cada intersección entre dos planos es uno de los ejes (es decir, x, y o z). En el plano xy se realiza la gráfica de la función f de manera habitual. En el plano yz se realiza la gráfica de la función g, pero en este caso el dominio de la función está determinado por el eje y, que es el mismo determinado para el rango de la función f. Esto hace que la gráfica de la función g quede con dominio restringido y, en ocasiones sólo se muestre una sección de la función habitual. Finalmente, en el plano xz se muestra la traza del lugar geométrico determinado por las coordenadas de los ejes x y z, que resulta ser la gráfica de la función $g(f(x))$.

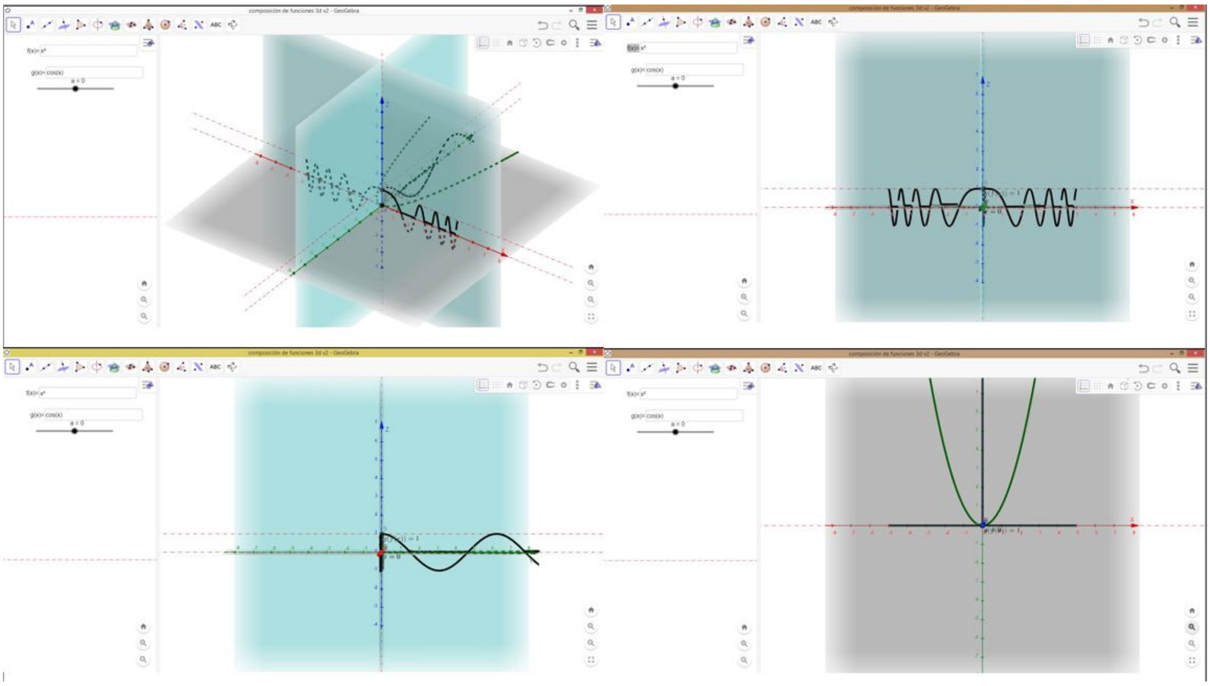

Figura 3.4: Composición de funciones 3d en Geogebra.

La aplicación se encuentra dividida en dos vistas de GeoGebra: la gráfica 2D y la 3D. En la vista gráfica 2D se encuentran dos cuadros de entrada en donde el usuario puede ingresar las funciones f y g que desea componer. El programa también cuenta con un

[2](ver sección 2.3.3).

deslizador muy similar al e la aplicación de dinágrafos.

En la vista 3D el usuario puede rota la vista como lo desee para que pueda evidenciar cómo se relacionan los dominios y rangos de las funciones.[3]

Hay que tener en cuenta dos cosas con respecto a la aplicación:

- En primer lugar, la aplicación sólo representa la composición $g(f(x))$. Si el usuario desea ver la gráfica de $f(g(x))$, debe escribir las respectivas funciones en orden inverso.
- Debido a que la aplicación utiliza la vista en GeoGebra 3D y requiere muchos objetos para que se pueda realizar la representación adecuadamente (generación de tres lugares geométricos que cambian con la variable), los requerimientos mínimos de un equipo de cómputo en el que se desee ejecutar la aplicación deben ser un procesador de 2.4 GHz Dual Core, 6 Gb de memoria Ram y ejecutar el programa descargándolo (no usarlo directamente en la página web sino por medio de la aplicación de escritorio Geogebra 3D).

Representaciones gráficas sobre problemas que involucran funciones compuestas.

Para complementar las herramientas realizadas en GeoGebra se presentan los siguientes problemas para socializarlos en clase: [4]:

Modelización del ejercicio de área con respecto a tiempo: El primer problema relaciona el área de una circunferencia con su radio, el cual crece constantemente respecto al tiempo transcurrido. A continuación se enuncia el problema:

Se infla un balón esférico y el radio del mismo se incrementa en una cantidad de $2\frac{cm}{s}$

1. Exprese el radio r del balón como una función de tiempo (en segundos).
2. Con base en el punto anterior, hallar una función que modele el volumen V del tiempo con respecto al tiempo transcurrido.

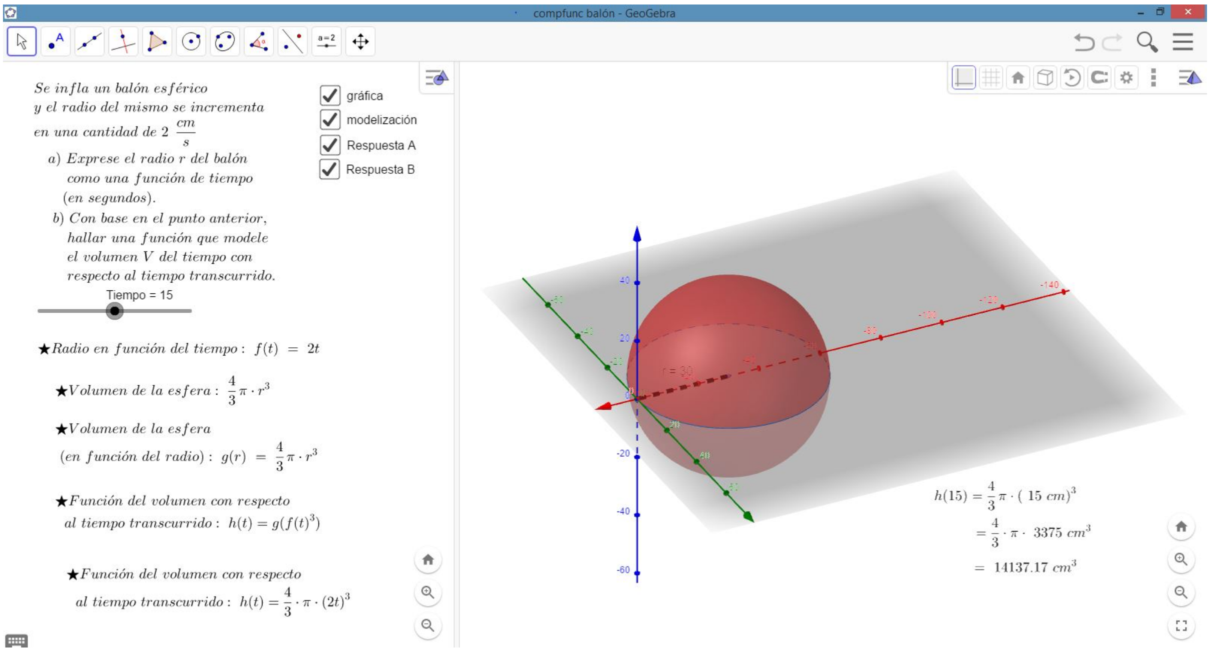

Figura 3.5: Modelización del ejercicio de área con respecto a tiempo.

La aplicación que se creó para ese problema está constituida por el enunciado, un deslizador que simula el paso del tiempo y cuatro casillas de verificación que muestran respectivamente la gráfica, que es una representación geométrica del problema , la modelización (una circunferencia que va aumentando constantemente a medida que pasa el tiempo), la respuesta a y la respuesta b, que son las fórmulas que se obtienen luego de realizar la composición de funciones.

La idea de esta aplicación es que el estudiante pueda tener un ejemplo dinámico sobre un problema de contexto en le que s necesitan utilizar las funciones compuestas. [5]

Modelización del ejercicio de volumen con respecto a tiempo: El segundo problema relaciona el volumen de una esfera con su radio, el cual crece constantemente respecto al tiempo transcurrido. A continuación se enuncia el problema:

Se deja caer una piedra en un lago, que crea una ola circular que viaja hacia afuera con rapidez de $60\frac{cm}{s}$.

[3]Disponible en https://www.GeoGebra.org/classic/xubahcpg
[4]Actividades reformuladas tomadas de Stewart (2008)
[5]Disponible en https://www.GeoGebra.org/classic/w8swhrjz

1. Exprese el radio r de este círculo como función del tiempo t (en segundos).

2. Encuentre una función que modele el perímetro P del círculo con respecto al tiempo transcurrido.

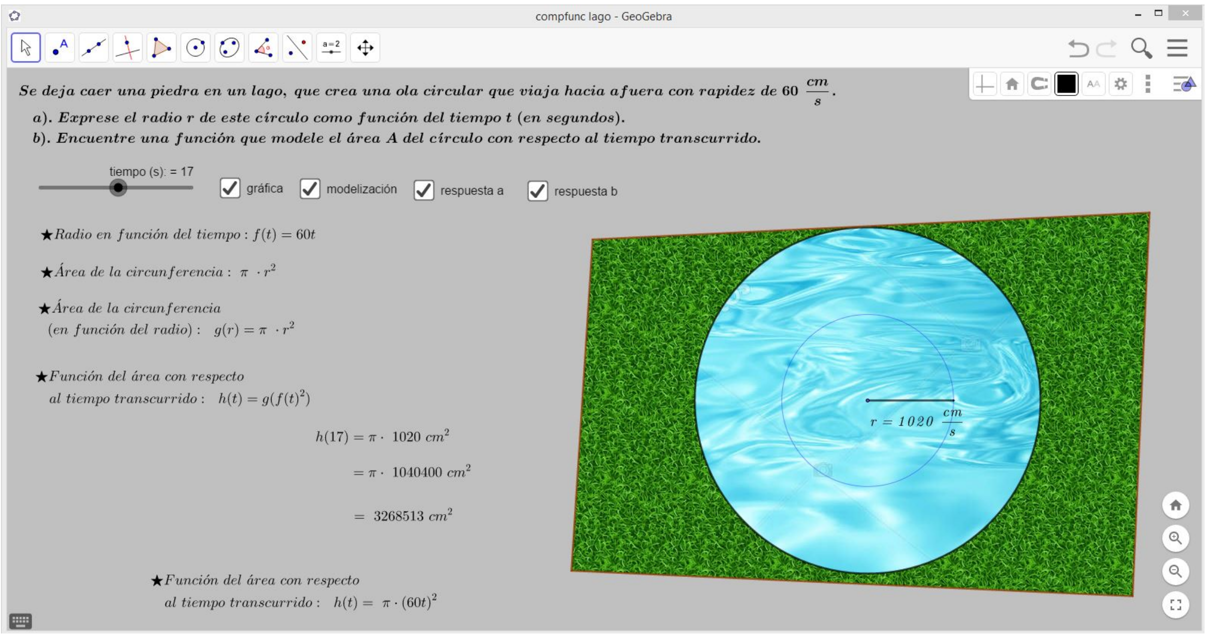

Figura 3.6: Modelización del ejercicio de volumen con respecto a tiempo.

Al igual que en la aplicación anterior, este programa se creó en GeoGebra y ejemplifica otro contexto en el que se encuentran involucradas las funciones compuestas.[6]

Las herramientas de representación de funciones por dinágrafo y composición 3D pueden complementar el trabajo que se realice en clase por medio de los problemas de contexto, de esta forma, los estudiantes pueden comparar los resultados obtenidos con distintos tipos de representación gráfica de las funciones.

3.3.2. Actividades.

Función de parentescos.

Se propone la actividad "función de parentescos" como una actividad que permita tomar conciencia de que las funciones no son necesariamente numéricas, sino que existen

[6]Disponible en https://www.GeoGebra.org/classic/mwwyzwmr

en entornos muy cercanos al individuo y que no son necesariamente matemáticos. Al presentar esta propuesta se espera que los estudiantes consoliden la noción de función, dominio y rango y también que construyan nociones intuitivas sobre la composición de funciones en un entorno "sin números".

La actividad se basa en el diagrama del árbol genealógico de una persona y sus cinco generaciones predecesoras. En dicho árbol se parte de la premisa que cada pareja tuvo un sólo hijo, esto con el fin de simplificar las posible funciones que existan en el diagrama (si un padre tiene un sólo hijo, se puede generar una función allí, pero si tiene más de un hijo no se puede generar dicha función). Con esta actividad se espera que se analicen que relaciones son funciones y cuáles no.

Algunas posibles relaciones que pueden generarse en el árbol genealógico son:

- El hijo de x es y.
- El padre de x es y.
- La madre de x es y.
- El abuelo de x es y.
- La abuela de x es y.
- El abuelo paterno de x es y.
- La abuela paterna de$x$ es y.
- El abuelo materno de x es y.
- La abuela materna de$x$ es y.
- El bisabuelo de x es y.
- La bisabuela de x es y.
- El bisabuelo paterno de x es y.
- La bisabuela paterna de x es y.
- El bisabuelo materno de x es y.
- La bisabuela materna de x es y.
- El tatarabuelo de x es y.
- La tatarabuela de x es y.
- El tataratatarabuelo de x es y.
- La tataratatarabuela de x es y.
- El nieto de x es y.
- La nieta de x es y.
- El bisnieto de x es$y$.
- La bisnieta de x es y.
- El tataranieto de x es$y$.
- La tataranieta de x es y.
- El tataratataranieto de x es y.

- El suegro de x es y.
- La suegra de x es y.
- El yerno de x es y.
- La nuera de x es y.

Una actividad que se puede realizar con este material es la siguiente: Los estudiantes proponen varias relaciones que se pueden generar en el diagrama para luego validar cuáles son funciones y cuales no. Por ejemplo, a las relaciones que existen entre "ser madre" y "ser nieta", es decir "La madre de x es y" y "La abuela de x es y". El lector se puede preguntar qué personas en el árbol cumplen con la relación propuesta. Por otro lado, la relación "La madre de x es y" sí es función, pero la relación "La abuela de x es y" no lo es, ya que toda persona sólo tiene una madre, pero también tiene dos abuelas, por lo que no cumple la definición de función.

Esta validación (que permite retomar el concepto de función, dominio y rango) pude dar comienzo para hacer actividades de tipo "buscar el pariente de", en donde se empiezan a involucrar composiciones de funciones al aplicar primero una función y después aplicar otra.

La idea de la actividad es que los estudiantes propongan varias relaciones que se pueden generar en el diagrama para luego validar cuáles son funciones y cuales no. Por ejemplo, a las relaciones que existen entre "ser madre" y "ser nieta", es decir "La madre de x es y" y "La abuela de x es y". Se puede dirigir la actividad a que los estudiantes identifiquen qué personas en el árbol cumplen con las relaciones propuestas, también se puede fomentar la discusión sobre por qué la relación "La madre de x es y" sí es función, pero la relación "La abuela de x es y" no lo es, esperando a que los estudiantes mencionen que toda persona sólo tiene una madre, pero también tiene dos abuelas. esto último no permite que se cumpla la definición de función.

Hallar la "función de la función" de parentesco.

Después de esta validación (que permite retomar el concepto de función, dominio y rango) se procede a hacer el ejercicio de "buscar el pariente del pariente de", que se logra combinando funciones al aplicar primero una función y después aplicar otra. Por ejemplo, supóngase que las funciones que se seleccionan son las siguientes: “La madre de x es yz “El abuelo materno de x es y.”. Llámese a la primera función f y a la segunda g, esto con con fines de evitar confusiones.

Si se aplica primero f y a ese resultado se le aplica g, se tiene que:

- Para poder aplicar la función, se debe enfocar en algún sujeto del árbol genealógico.
- A dicho sujeto se le aplica la función f, es decir, se busca quien es su mamá (Rango restringido). Dicha mujer será el resultado de la función f
- **Nota:** Podría suceder que algunos sujetos “no tengan mamá”, esto sucede si se escoge alguno de los 32 sujetos de la parte superior del diagrama. En dado caso, se debe seleccionar otro sujeto, ya que éstos no harían parte del dominio.
- A la mujer seleccionada (resultado obtenido de la función f) se le aplica la función g, es decir, se buscará quien es su abuelo materno.
- **Nota:** Al igual que en la función f, podría suceder que algunos sujetos “no tengan abuelo materno”, esto sucede si se escoge alguno de los 48 sujetos de la parte superior del diagrama. En dado caso, se debe seleccionar otro sujeto, ya que éstos no harían parte del dominio.
- El resultado (pariente) obtenido es el bisabuelo materno del sujeto seleccionado al principio.

Ahora, aplicando primero g y luego f, se obtiene lo siguiente:

Si se aplica primero f y a ese resultado se le aplica g, se obtiene lo siguiente:

- Para poder aplicar la función, se debe enfocar en algún sujeto del árbol genealógico.
- A dicho sujeto se le aplica la función g, es decir, se busca quien es su abuelo materno (Rango restringido). Dicho hombre será el resultado de la función g.
- **Nota:** Podría suceder que algunos sujetos “no tengan abuelo materno”, esto sucede si se escoge alguno de los 48 sujetos de la parte superior del diagrama. En dado caso, se debe seleccionar otro sujeto, ya que éstos no harían parte del dominio.

- Al hombre seleccionada (resultado obtenido de la función g) se le aplica la función f, es decir, se buscará quien es su mamá.

- **Nota:** Al igual que en la función f, podría suceder que algunos sujetos “no tengan mamá”, esto sucede si se escoge alguno de los 32 sujetos de la parte superior del diagrama. En dado caso, se debe seleccionar otro sujeto, ya que éstos no harían parte del dominio.

- El resultado (pariente) obtenido es la bisabuela materna del sujeto seleccionado al principio.

Con esta actividad se desea poner en evidencia el hecho que el orden en que se aplican las funciones puede influir en el resultado obtenido, lo que a fin de cuentas indica que la composición de funciones es una operación no conmutativa.

Capítulo 4

Conclusiones.

El marco referencial recopilado en este documento permite tener una mayor comprensión acerca de aspectos relevantes al momento de abordar la enseñanza de la composición de funciones en un aula de clases, entre los que se destacan:

- La falta de comprensión en el concepto de función obstaculiza a su vez una buena comprensión en la composición entre funciones. Un ejemplo de ello se presenta cuando los estudiantes son incapaces de determinar de manera correcta el dominio y el rango de una función, pues al momento de determinar si es posible realizar la composición de dos funciones, estos conceptos son clave.

- Pueden presentarse inconvenientes en el momento de enseñar el concepto la composición de funciones si su dificultad es subestimada al orientar la enseñanza como una simple sustitución de una función dentro de otra. Por otro lado, es probable que algunos estudiantes no tengan el nivel de abstracción necesario para comprender el concepto, pues el manejo de la composición de funciones como objeto explícito requiere un nivel mayor de abstracción, que no se consigue de forma inmediata.

El marco histórico generado en este trabajo permite tener una mejor idea sobre la dificultad al momento de enseñar y aprender funciones, ya que desde los inicios del cálculo se trabajó con "funciones dentro de otras funciones", realizando sustituciones de variables, pero la humanidad tuvo que esperar al menos dos siglos para poder teorizar sobre la composición de funciones. Esta situación se evidencia en las experiencias de clase relatadas en el marco referencial y también puede reflejarse en los tres métodos descritos en la sección 2.2.5 (Primero cambiando valores entre dos funciones, para luego sustituir variables y finalmente hallar la composición de dos funciones). La historia de las matemáticas también señala que la composición de funciones no es un concepto que sea sencillo de asimilar y por tanto, no debe tomarse a la ligera en el aula de clases.

En la revisión de algunos textos escolares y universitarios en donde se aborda el concepto de composición de funciones se encontró que en todos ellos introducen el concepto de manera similar en cuanto a la presentación de la definición, el dominio de la función compuesta, la notación y hasta en los esquemas gráficos que se utilizan para ilustrar la composición de funciones. En los textos escolares editados para la educación media en Colombia, esto puede ser causado por el hecho de que en la normativa curricular no se presenta de manera explícita este objeto matemático.

Se considera importante que en el currículo nacional se haga una mención explícita a la composición de funciones, ya que el manejo de este objeto matemático potencia el pensamiento variacional y ejercita los procesos de resolución de problemas y modelización, a la vez que su tratamiento en la educación media puede favorecer la comprensión de la composición de funciones en la educación superior.

Si bien, en muchos textos los ejercicios de composición de funciones propuestos se pueden resolver en su mayoría de forma mecánica por parte del estudiante sin una reflexión de lo que está realizando que aporte a la comprensión del objeto matemático, se sugiere que en la enseñanza se haga énfasis no solamente en la mecanización de algoritmos, que aunque necesarios, requieren de esta reflexión con la ayuda de preguntas orientadoras por parte del docente y que contribuyan a una mejor comprensión por parte de los estudiantes y a una mayor conciencia en el momento de realizar los procedimientos.

Muchos textos generan ejercicios que se realizan de forma mecánica por parte del estudiante, pero si éste no reflexiona sobre lo que está haciendo, no puede hacer evolucionar su concepción sobre el objeto matemático, lo que acarreará inconvenientes para que el estudiante comprenda el objeto a un nivel mayor, ya que sólo se enfocará a realizar algoritmos sin sentido para él. Este error se acrecienta cuando la enseñanza y el aprendizaje se enfoca en la mera mecanización de algoritmos que, aunque necesarios, por sí solos no contribuyen a la mejora de la comprensión del estudiante, sino que requieren que éste reflexione sobre los procedimientos que está realizando.

Los textos escolares que revisó el autor presentan pocas situaciones problema con respecto a la composición de funciones. Es probable que esta situación esté relacionada con la dificultad que presentan los estudiantes al resolver problemas de optimización en sus cursos de cálculo, en donde algunos de ellos involucran la regla de la cadena. Si se involucra la resolución de problemas desde cursos de educación media, los estudiantes podrán tener una mayor oportunidad de reflexionar sobre las propiedades subyacentes a la forma en que se involucran las funciones compuestas en tales ejercicios.

La propuesta pedagógica diseñada tiene la siguiente metodología: teniendo en cuenta lo establecido por el modelo APOE, el docente abordará en la clase el concepto de composición de función a través de situaciones problema, actividades, discusiones y ejercicios que permitan que los estudiantes reflexionen sobre las propiedades esenciales de la composición de funciones. Las discusiones que se generen en clase se deben dirigir hacia las condiciones necesarias para poder realizar la composición de dos funciones, es decir, para realizar la composición $f \circ g$ validar que: *i)* $x \in Dom(g)$ y *ii)* $g(x) \in Dom(f)$. A medida que evolucionen las discusiones y actividades, el docente irá apoyando su discurso en las representaciones gráficas que se generan en las aplicaciones diseñadas en GeoGebra.

De acuerdo a la descomposición genética aplicada en la propuesta didáctica, las actividades y materiales didácticos diseñados sirven para que el estudiante reflexione sobre el por qué se puede o no realizar la composición de dos o más funciones. La descomposición genética establece que hay que propiciar actividades en clase que permitan ejercitar *acciones* para hallar dominios de funciones (f y g), lo que permitirá que el estudiante interiorice el *proceso* de analizar las condiciones necesarias. El modelo ACE permite generar actividades, discusiones y ejercicios en clase, con los que el estudiante puede reflexionar sobre el porqué de los resultados obtenidos.

Las herramientas digitales, en especial los applets de dinágrafo y de composición de funciones en 3d sirven para que estudiantes y docentes puedan analizar, comparar y verificar si los procedimientos que realizaron en la solución de algún ejercicio o problema son coherentes o no. Al utilizar el dinágrafo o la calculadora de composiciones en 3d para validar si la composición se puede realizar, el estudiante podrá reflexionar sobre la respuesta que generó, analizando así las acciones que realiza, lo que está en sincronía con lo estipulado en el modelo APOE. El complemento de las representaciones gráficas a la teoría APOE y al ciclo ACE ayuda a que el estudiante pueda reflexionar sobre los resultados de la composición de funciones y que pueda corroborar la posibilidad o no de generar una función compuesta a partir de las condiciones de contenencia de rangos y dominios.

La metodología propuesta puede promover la comprensión de la composición de funciones porque se basa en una teoría constructiva del pensamiento que ha estudiado la forma en que un sujeto construye su conocimiento matemático y ha servido de fundamento para propuestas didácticas de diversos conceptos matemáticos. Adicionalmente, el apoyo de software de matemáticas que permite manipular de forma virtual los objetos matemáticos potencia la reflexión que hace el sujeto sobre los objetos matemáticos; esta reflexión también mejora la concepción que se tiene sobre la composición de funciones. Al utilizar la teoría APOE y las representaciones gráficas puede potenciar la comprensión de los estudiantes.

El apoyo de la representación gráfica es un recurso didáctico que ha brillado por su ausencia en la historia de la composición de funciones. Proponer sistemas en los que los estudiantes puedan ver de mejor forma lo que sucede en la composición de funciones puede ayudar a mejorar la enseñanza de este concepto. La exploración en los dinagrafos y en las gráficas 3d de las funciones compuestas sirve como herramienta para dinamizar la enseñanza y también como recurso para que el estudiante explore la representación gráfica del objeto matemático.

Cabe mencionar que no se pudo realizar la implementación de la propuesta porque este trabajo de grado se realizó durante el marco de la emergencia sanitaria mundial producida por el coronavirus. Esta situación afectó el desarrollo de la propuesta didáctica, por lo que desafortunadamente no se pudo evaluar de forma más precisa la eficacia y eficiencia de la propuesta didáctica.

La creación de este trabajo de grado permite ser más consciente sobre los aspectos histórico, didáctico y curricular necesarios para abordar un concepto en el aula. No basta con solamente conocer el objeto matemático y los procesos que se realizan con él para abordar una clase, es necesario comprender la didáctica detrás del concepto. Al comprender alguna teoría didáctica (como APOE, en este caso) se puede tener una mayor claridad sobre cómo es la forma en que los estudiantes comprenden un concepto y, a partir de tal forma, buscar alternativas para que sea el mismo estudiante quien potencie su conocimiento.

El uso de materiales didácticos, sobre todo los generados con TIC son de gran utilidad y valor en épocas como la que está viviendo el mundo actualmente, en la que la virtualidad se impuso de forma imprevista. El uso de TIC en las aulas puede dar resultados efectivos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, sobre todo en las referentes a la función, que son de naturaleza dinámica y muchas veces pierden su esencia en representaciones estáticas (como el dibujo en un tablero o en una hoja de papel).

Referencias.

Apóstol, T. (1999). *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Segunda edición.* Reverté ediciones, S.A. de C.V.: México D.F., México.

Artigue, M., Douady, M., Moreno, L., y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Grupo Editorial Iberoamérica: Bogotá, Colombia.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K. (1996). A framework for research and development in ungraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education. CBMS issues in mathematics*, 6:1–32.

Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E., y Lewin, P. (1988). Computer experiences in learning composition of functions. *Journal for Research in Mathematics Education.*, 19(3):246–259.

Bayens, M. (2016). Teaching functions: The good, the bad, and the many ways to do better. Master's thesis, Murray State University. Honors College Theses 3.

Bedoya, E. (2002). *FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MAEMÁTICAS: ENSEÑANZA DE FUNCIONES, SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y CALCULADORAS GRÁFICAS.* PhD thesis, Universidad de Granada.

Beth, E. y Piaget, J. (1966). *Mathematical epistemology and psychology.* Gordon y Breach: New York.

Boognl, M. (2006). A hands-on approach to teaching composition of functions to a diverse population. *The Mathematics Teacher*, 99(7):516–520.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., y Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational studies in mathematics.*

Campistrous, L., Lopez, J., y Rizo, C. (1999). Reflexiones sobre la didáctica del cálculo a propósito de una lectura del primer texto publicado sobre esta materia por el marqués guillaume françois antoine l'hospital: Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes. *Submitted for publication.*

Cottrill, J. (1991). *Students' Understanding of the Concept of Chain Rule in first year Calculus and the Relation to their Understanding of Composition of Functions.* PhD thesis, Purdue University, West Lafayette, Indiana.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. *En D. Tall (Ed), Advanced Mathematical Thinking*, pages 95–123.

Dubinsky, E. y McDonald, M. (2001). Apos: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. *D. Holton et al. (Eds). The Teaching and learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, pages 273–280.

Duval, R. y Saenz, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas.* Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas: Bogotá. Colombia.

Echevarría, G., Olguín, K., Renaudo, J., Cosci, C., y May, G. (2010). InterpretaciÓn de dominio y recorrido de una funciÓn utilizando distintos registros de representaciÓn. *Universidad Nacional de san Luis.*

Godino, J. (2002). *Didáctica de las matemáticas para maestros.* Proyecto EDUMAT.

Guerrero, B. (2004). Sobre la axiomatización en matemáticas. *Boletín de Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia. Nueva Serie*, XI(1).

Hernández, O. y López, J. (2010). A semiotic reflection on the didactics of the chain rule. *The Mathematics Enthusiast*, 7(2):10.

Larson, R. (1998). *Cálculo y geometría analítica. Sexta edición.* Mc Graw Hill: Madrid. España.

Leithold, L. (1998). *El cálculo.* Harla méxico S.A. de C.V.: México D.F., México.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de pirie y kirien sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoria apoe. *Relime. Bowling Green State University*, 6(3).

MEN (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Ministerio de Educación Nacional: Bogotá, Colombia.

MEN (2006). *Estándares Básicos Competencias en Matemáticas.* Ministerio de Educación Nacional: Bogotá, Colombia.

MEN (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje Versión 2.* Ministerio de Educación Nacional: Bogotá, Colombia.

Muñoz, J. (2002). *Introducción a la teoría de conjuntos. Cuarta edición.* UN editores: Bogotá, Colombia.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics. Washington D.C.

Piaget, J. (1977). *Investigaciones sobre la abstracción reflexionante.* Editorial HUEMUL S.A.: Buenos Aires, Argentina.

Purcell, E., Varberg, D., y Rigdon, S. (2007). *Cálculo. Novena edición.* Pearson educación de México S.A. de C.V.: México D.F., México.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2009). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Relime*, 13(1):89–112.

SM, E. (2019). *Savia Matemáticas 10°.* Ediciones SM: Bogotá, Colombia.

Spivack, M. (1996). *Cálculo infinitesimal.* Reverté ediciones, S.A. de C.V.: México, D.F., México.

Steketee, S. y Scher, D. (2012). Using multiple representations to teach composition of functions. *The Mathematics Teacher*, 106(4):260–268.

Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variabe. Trascendentes tempranas. Sexta Edición.* Cengage learning editores S.A.

Thomas, G. (2010). *Cálculo una variable. Decimosegunda edición.* Pearson educación de México S.A. de C.V.: México, D.F., México.

Valdivia, C., Domínguez, C., y Parraguez, M. (2015). Un modelo cognitivo para mejorar el aprendizaje de la composiciÓn de funciones. *Universidad Austral de Chile. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.*

Vizcaino, O. (2015). EvaluaciÓn de un curso de cÁlculo cuando se usa el ciclo ace fundamentado en la teorÍa apoe. *Instituto Tecnológico y de Estudios Euperiores de Monterrey, Ciudad de México.*