Universidade de Lisboa

O raciocínio matemático dos alunos do 11.º ano de escolaridade no tópico Assíntotas ao gráfico de uma função

Catarina Parreira Berardo de Ribeiro Dias

Mestrado em Ensino da Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada
orientada por
Professora Doutora Marisa Alexandra Ferreira Quaresma
e coorientada por
Professor Doutor Carlos Manuel Ribeiro Albuquerque

2020

RESUMO

Este Relatório resulta da intervenção realizada no âmbito da prática de ensino supervisionada que decorreu durante no ano letivo 2019/2020, na Escola Básica e Secundária Alfredo da Silva e consistiu na lecionação de um conjunto de aulas relacionadas com o tópico Assíntotas ao gráfico de uma função, da disciplina de Matemática A, do 11.º ano de escolaridade. Neste contexto, desenvolvi este estudo de cariz investigativo com o objetivo de compreender a forma como os alunos do 11.º ano de escolaridade desenvolvem a sua aprendizagem sobre Assíntotas ao gráfico de uma função, com especial atenção aos processos de raciocínio mobilizados num contexto de abordagem exploratória.

O estudo seguiu uma abordagem metodológica de natureza qualitativa e interpretativa. A recolha de dados foi realizada através de observação participante, com o registo vídeo das aulas lecionadas e a elaboração do diário de bordo, e através de recolha documental das produções escritas dos alunos.

A maioria dos alunos apresenta fluência processual e consegue aplicar os processos estudados para determinar assíntotas verticais, horizontais e oblíquas. Quanto à compreensão concetual, nem todos os alunos conseguiram identificar como e quando podem ser utilizados cada um dos processos, nem interpretar criticamente os resultados. Revelaram dificuldade em definir uma estratégia sistemática para determinar as assíntotas. No global das tarefas, os alunos formularam conjeturas com facilidade, mas manifestaram ainda dificuldades na elaboração de justificações formais. A distinção entre justificações informais e justificações formais nem sempre é reconhecida pelos alunos. A generalização foi, essencialmente, concretizada com base naquilo que os alunos verificaram em casos particulares. Para as concretizar foi necessário um questionamento muito estruturado e sistemático da professora. As tarefas de cunho exploratório surgem num contexto que proporciona a utilização de processos de raciocínio matemático, nomeadamente a formulação de conjeturas, generalização e justificação. Os momentos de discussão e síntese final assumiram também um papel determinante no desenvolvimento destes processos e na aprendizagem dos conceitos e dos processos associadas à determinação de cada um dos tipos de assíntotas.

Palavras-chave: Raciocínio matemático; Abordagem exploratória; Assíntotas; Ensino Secundário.

ABSTRACT

This report refers to my intervention at the Alfredo da Silva Secondary School in the school year of 2019/2020 and it consisted in teaching a set of lessons related to the topic ‘Asymptotes of the Graph of a Function’ – 11th grade Mathematics A class. In this context, this study aims to understand how 11th grade students develop their learning about asymptotes of the graph of a function, with special focus on the reasoning processes used in an exploratory type of approach.

The study follows a qualitative and interpretative methodological approach and the data collection was carried out mainly through participant observation – by video recording the classes taught and the researcher logbook, and by analysing the students' written productions.

Most students showed good procedural fluency and were able to apply the processes studied to determine vertical, horizontal and oblique asymptotes. Concerning conceptual understanding, some students were not able to identify how and when certain processes are used or interpret results critically. They also showed difficulty when it came to define a systematic strategy to determine these asymptotes. All in all, the students made conjectures quite easily, but they still struggled in elaborating formal justifications – the distinction between informal and formal justifications is not always easily recognised by students. Thus, generalization was essentially achieved based on what the students verified in particular cases. In order to achieve it, a very structured and systematic questioning by the teacher was necessary.

The tasks created in the exploratory type of approach provide the use and development of mathematical reasoning processes, namely the formulation of conjectures, justification, and generalization. The moments of discussion and the final synthesis were extremely important to the development of these processes and in learning of the concepts and the procedures associated with the determination of each type of asymptotes.

Keywords: Mathematical Reasoning; Exploratory approach; Asymptotes; Secondary school.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor João Pedro da Ponte pela sabedoria com que me mostrou o caminho.

À Professora Doutora Marisa Quaresma pelo que me ensinou, pelo incentivo e disponibilidade que sempre demonstrou na orientação deste relatório.

Ao Professor Doutor Carlos Albuquerque pelas sugestões e comentários.

À Professora Cooperante Teresa Olga Duarte, pela forma como me acolheu, pela confiança, pela disponibilidade e pelos conselhos que muito contribuíram para a minha prática enquanto professora.

Aos alunos participantes pela recetividade que demonstraram e pelo empenho com que participaram.

Aos meus pais e ao meu irmão, pelo carinho, pelo apoio incondicional e por nunca me deixarem desistir.

Ao meu namorado, Carlos, pelo carinho e por compreender todas as ausências.

A todos o meu muito obrigado

ÍNDICE

Índice de figuras

Índice de tabelas

Índice de anexos

Capítulo 1: Introdução

Neste, que é o primeiro capítulo do relatório, apresento as motivações pessoais que me levaram à sua concretização bem como a sua importância para a compreensão do raciocínio matemático dos alunos no tópico Assíntotas ao gráfico de uma função. Apresento ainda o objetivo e as questões a que me proponho responder ao longo deste estudo.

1.1. Motivações pessoais e relevância do estudo

O presente Relatório da Prática de Ensino Supervisionada, realizado no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática, resulta de uma intervenção no segundo período do ano letivo 2019/2020, que consistiu na lecionação de um conjunto de aulas relacionadas com o tópico Assíntotas ao gráfico de uma função, da disciplina de Matemática A, do 11.º ano de escolaridade, da Escola Básica e Secundária Alfredo da Silva.

A componente de cariz investigativo deste relatório foca-se no raciocínio matemático dos alunos do 11.º ano de escolaridade na aprendizagem do tópico Assíntotas ao gráfico de uma função. A escolha do tópico Assíntotas ao gráfico de uma função como tópico de trabalho ao longo da intervenção deve-se, principalmente, à planificação anual de Matemática A, definida pela escola para o 11.º ano de escolaridade. Para além disso, é inegável a importância que o estudo das funções e, em particular, das suas características, assume na compreensão de diversos fenómenos do quotidiano e a sua aplicação em diversas áreas da ciência.

A par do desenvolvimento da aprendizagem dos diferentes tópicos matemáticos, os documentos orientadores de gestão curricular da disciplina sugerem também um conjunto de capacidades que os alunos devem evidenciar e desenvolver, sendo transversais a todos os domínios (MEC, 2014). Essas capacidades contemplam o raciocínio matemático, a resolução de problemas em diversos contextos e a comunicação (oral e escrita) adequada e, decidi analisar, em particular neste tópico, uma dessas capacidades transversais. O raciocínio matemático é indicado como uma capacidade transversal, fundamental a toda a aprendizagem da Matemática (MEC, 2014). No ensino de qualquer tópico matemático deve ser pensado como promover e desenvolver o raciocínio matemático dos alunos. Sendo o desenvolvimento da capacidade de raciocinar um dos grandes objetivos do ensino desta disciplina, questiono-me diversas vezes se serão criadas oportunidades na sala de aula que promovam o seu desenvolvimento. E afinal, que contextos e recursos promovem o seu desenvolvimento? Quando criadas oportunidades que permitem colocar em prática diferentes processos de raciocínio, de que forma os alunos respondem e que dificuldades manifestam?

Uma abordagem de ensino exploratória pode favorecer a aprendizagem dos alunos, bem como o desenvolvimento do raciocínio matemático. Esta abordagem valoriza o trabalho autónomo dos alunos, dando-lhes oportunidade de construir o seu próprio conhecimento ao mesmo tempo que desenvolvem a sua capacidade de raciocinar matematicamente. Neste tipo de abordagem, as tarefas, em particular as tarefas exploratórias, assumem também um papel muito importante. Uma característica que estas tarefas podem ter é iniciar o estudo de um caso específico levando o aluno a formular conjeturas com base nesse caso e depois fazer generalizações. Um modelo de aula que vai ao encontro desta abordagem é a aula em 3 fases (Lançamento da tarefa, trabalho autónomo, discussão coletiva e síntese final) que valoriza o trabalho dos alunos e promove a comunicação matemática e o desenvolvimento do seu raciocínio matemático.

Assim, dentro do tópico de conteúdos selecionado procurei compreender a forma como os alunos do 11.º ano de escolaridade desenvolvem a sua aprendizagem sobre Assíntotas ao gráfico de uma função, com especial atenção aos processos de raciocínio mobilizados num contexto de abordagem exploratória.

1.2. Objetivo e questões de estudo

O objetivo do estudo é compreender a forma como os alunos do 11.º ano de escolaridade desenvolvem a sua aprendizagem sobre Assíntotas ao gráfico de uma função, com especial atenção aos processos de raciocínio mobilizados (formulação de conjeturas, generalização e justificação) num contexto de abordagem exploratória. Procurei, com este estudo, dar resposta às seguintes questões:

- Quais as aprendizagens realizadas pelos alunos no tópico Assíntotas ao gráfico de uma função e em que medida estas correspondem aos objetivos estabelecidos?

- Quais as dificuldades que os alunos apresentam na aprendizagem das Assíntotas ao gráfico de uma função. Em particular, em tarefas que envolvem o raciocínio matemático?
- De que modo os alunos mobilizam os processos de raciocínio matemático na aprendizagem do tópico Assíntotas ao gráfico de uma função, em particular, a formulação de conjeturas, generalização e justificação?

1.3. Organização do estudo

Para compreender a forma como os alunos do 11.º ano de escolaridade desenvolvem a sua aprendizagem sobre Assíntotas ao gráfico de uma função, com especial atenção aos processos de raciocínio mobilizados (formulação de conjeturas, generalização e justificação) num contexto de abordagem exploratória, apresenta-se este trabalho organizado em seis capítulos.

O capítulo 1 apresenta as motivações pessoais e pertinência do estudo bem como o seu objetivo e as questões de investigação a que procura responder. O capítulo 2, discute a literatura de referência e as orientações curriculares referentes ao tópico de ensino e à capacidade transversal envolvida no estudo, e descreve a abordagem de ensino exploratória, adotada ao longo da intervenção. No capítulo 3 apresenta-se uma breve caracterização do contexto escolar, a ancoragem da unidade didática no Programa, os conceitos matemáticos envolvidos, os recursos e estratégias de ensino utilizadas e descrevem-se as tarefas propostas. No capítulo 4 descrevem-se as opões metodológicas, e caracterizam-se os participantes no estudo, a recolha e a análise de dados. O capítulo 5 consiste na análise dos dados recolhidos. No capítulo 6 encontra-se uma síntese do estudo, as suas conclusões e uma reflexão final relativamente à intervenção.

Capítulo 2: Enquadramento teórico

Considerando o objetivo e as questões do estudo, o presente capítulo pretende discutir a literatura de referência e as orientações curriculares tanto sobre a capacidade transversal envolvida neste estudo, o raciocínio matemático, como do tópico Assíntotas ao gráfico de uma função procurando fundamentar o trabalho realizado em sala de aula. De seguida, apresento estudos que considerei pertinentes, realizados no âmbito do desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Por fim, descrevo a estratégia de ensino adotada para a intervenção, caracterizando os diferentes tipos de tarefa, a aula em três fases, e a importância da fluência processual e da compreensão concetual.

2.1. Raciocínio matemático

Cada vez mais se desenvolvem estudos que enfatizam o papel central do raciocínio na aprendizagem da Matemática e a importância de promover o seu desenvolvimento em sala de aula. No entanto, o próprio raciocínio é necessário para a compreensão desta ciência. A definição de raciocínio não é única. É possível encontrar vários significados para o termo "raciocinar". Uma pesquisa sobre o tema revela que são vários os entendimentos do significado de raciocinar, comprovando-se que este é um tema delicado, como referem Yackel e Hanna (2003), "escrever sobre raciocínio em Matemática é complicado pelo facto de o termo raciocínio, e o seu entendimento, serem amplamente utilizados com a suposição implícita de que há um acordo universal sobre o seu significado" (p. 228).

Para Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) raciocinar é um procedimento mais elaborado do que um mero pensamento. Brodie (2010) afirma que raciocinamos para servir determinados propósitos como convencer os outros ou a nós mesmos de uma afirmação específica, resolver um problema ou agregar um conjunto de ideias num todo mais coerente. O raciocínio exige a elaboração de inferências de forma justificada (a partir da informação disponível) muito além de reproduzir conceitos memorizados e efetuar procedimentos rotineiros (Mata-Pereira & Ponte, 2013). Assim, partindo de factos já conhecidos e, de forma justificada, é possível produzir novas informações e conclusões (Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020). Seguindo a mesma linha de pensamento, Oliveira (2008) define raciocínio matemático como “um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)” (p. 3).

A definição de raciocínio matemático difere de autor para autor. Russel (1999) refere que, na área da matemática, o raciocínio é “o que usamos para pensar sobre as propriedades de um determinado objeto matemático e desenvolver generalizações que se apliquem a toda a classe de objetos” (p. 1). Para Lannin, Ellis e Elliott (2011), o raciocínio matemático é “um processo evolutivo de conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos” (p. 12). Compreende-se assim que existe algo comum nas visões de vários autores que permitem identificar o que caracteriza o raciocínio matemático e quais os seus processos. Jeannotte & Kieran (2017) apontam quatro aspetos centrais do raciocínio matemático: “a dicotomia atividade/produto, a natureza inferencial de raciocínio matemático, a meta e as funções do raciocínio matemático e o que referem como aspetos estruturais e de processo” (p. 6).

Também os diversos documentos curriculares enfatizam a necessidade de promover o desenvolvimento do raciocínio matemático em sala de aula. De um modo geral, estes documentos perspetivam que “no seu conjunto, e de modo integrado” o trabalho desenvolvido em sala de aula contribua “para a construção e desenvolvimento do raciocínio matemático” (MEC, 2014, p. 6) dos alunos. O programa e Metas Curriculares de Matemática A refere ainda que “O raciocínio matemático é por excelência o raciocínio hipotético-dedutivo, embora o raciocínio indutivo desempenhe também um papel fundamental na atividade matemática, uma vez que preside à formulação de conjeturas” (MEC, 2014, p. 6).

2.1.1. Raciocínio dedutivo, indutivo e abdutivo

Raciocinar matematicamente é usar a informação existente para chegar a novas conclusões realizando inferências de natureza dedutiva, indutiva ou abdutiva (Mata-Pereira & Ponte, 2013). No âmbito do aspeto estrutural do raciocínio matemático, o modelo definido por Charles Peirce, referido no trabalho de Jeannotte e Kieran (2017), envolve três modos básicos de inferência: o dedutivo, o indutivo e o abdutivo. A conclusão inferida é, em todos eles, diferente.

Raciocínio dedutivo. Também referido como raciocínio lógico ou raciocínio lógico-dedutivo, é considerado por muitos autores sinónimo de raciocínio matemático. Nomeadamente, Davis e Hersh (1995) afirmam ser o "selo da Matemática". Duval (1995) aponta esta forma de raciocínio como a única capaz de "alterar o valor epistémico do conhecimento matemático de provável para verdadeiro". Para Ponte, Branco e Matos (2008), o raciocínio dedutivo consiste em "encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento" (p. 89). A inexistência de erros na cadeia de deduções garante a formulação de conclusões necessariamente válidas (Oliveira, 2008). Esta forma de raciocínio assume um importante papel principalmente na validação de afirmações matemáticas. Ayalon e Even (2006) salientam que o raciocínio dedutivo é o único em que as conclusões resultam de informações já conhecidas, não existindo necessidade de serem provadas através de experiências.

Raciocínio indutivo. O processo de indução consiste na inferência de uma regra a partir da análise do que é constante em diversos casos particulares (Pólya, 1990). Na mesma linha de pensamento, Greenes e Findell (1999) afirmam que esta forma de raciocínio envolve a análise de casos particulares, identificando as relações entre esses casos e a generalização dessas relações. Caso particular do raciocínio plausível, recorre a um pensamento do tipo heurístico e assume um papel chave na criação de novo conhecimento (Oliveira, 2002).

Raciocínio abdutivo. Consiste num processo de inferência que parte de um facto invulgar e procura de uma explicação para esse facto (Silva, 2009). Utilizado para explicar algo intrigante, tem por objetivo construir hipóteses explicativas para um conjunto de dados ou fenómenos desconhecidos. Também responsável pela criação de novo conhecimento, recorre ao pensamento crítico sobre factos para gerar hipóteses explicativas e avaliá-las no sentido de inferir a melhor explicação e uma conclusão plausível (Oliveira, 2002).

Os três tipos de raciocínio são igualmente importantes no desenvolvimento do raciocínio matemático, complementam-se e deve dar-se oportunidade aos alunos para desenvolverem estas três formas de raciocinar.

2.1.2. Processos de raciocínio matemático

> *Quando o matemático trabalha faz conjeturas vagas, visualiza generalizações grosseiras, e salta para conclusões injustificadas*
>
> (Villiers, 1999, p. 21).

Desde o primeiro ciclo do Ensino Básico que os alunos devem ser incentivados e estimulados a elaborar e testar conjeturas relativas a situações matemáticas simples (ME, 2007). Com o evoluir dos níveis de escolaridade, pretende-se que evolua também a capacidade dos alunos para formular e testar conjeturas e, consequentemente, a capacidade de as demonstrar.

Caracterizações de raciocínio matemático revelam uma variedade de processos que lhe estão associados, com a inferência a aparecer no centro desses processos (Jeannotte & Kieran, 2017). Para Russell (1999), o raciocínio matemático é "essencialmente sobre o desenvolvimento, justificação e uso de generalizações matemáticas" (p. 1). Pelo seu lado, Mason, Burton e Stacey (1982) reconhecem quatro processos de raciocínio matemático como fundamentais: especialização, formulação de conjeturas, teste e justificação. Inicia-se com o processo de especialização que consiste na análise de casos particulares e procura de regularidades entre eles, formulam-se conjeturas, procuram-se justificações, validam-se ou refutam-se as conjeturas. Lannin, Ellis e Elliott (2011) desenvolveram um modelo para o raciocínio matemático que combina aspetos dedutivos com aspetos indutivos e abdutivos e destaca três polos: "conjeturar e generalizar", "investigar porquê" e "justificar ou refutar". Já Mata-Pereira e Ponte (2013), no seu modelo de raciocínio matemático, relacionam os processos de raciocínio com os processos de representação e significação. O modelo foi desenvolvido considerando todo o processo decorrente da realização de uma investigação ou resolução de um problema matemático, "(...) formulação de questões, passando para a formulação de conjeturas e estratégias de resolução (que podem envolver generalização), aplicando essas estratégias e testando as conjeturas, até ao processo de validação (através de justificação)" (Mata-Pereira & Ponte, 2017, p. 5). Os dois modelos têm em comum o facto de considerarem a justificação e a generalização como aspetos fundamentais do raciocínio matemático. Como defendem Mata-Pereira e Ponte (2013), o raciocínio matemático envolve desde processos de formulação de questões e conjeturas a processos de realização de testes e justificações. De facto, nos diversos modelos sobre o raciocínio matemático identificam-se processos comuns a todos eles e que se destacam como fundamentais: formular conjeturas, generalizar e justificar.

Formulação de conjeturas. O processo de formulação de conjeturas "envolve raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver enunciados que provisoriamente se pensa serem verdadeiros, embora não se saiba se são" (Lannin, Ellis & Elliott, 2011, p. 12). Consiste em supor que uma afirmação é verdadeira, estimulando assim a investigação da sua veracidade (Mason, Burton & Stacey, 1982). Como referem Mason, Burton e Stacey (1982), a conjetura é um processo cíclico que envolve quatro fases: enunciar claramente uma conjetura, verificar se a conjetura cobre todos os casos e exemplos conhecidos, desconfiar da conjetura tentando refutá-la e descobrir por que é verdade ou modificá-la. A conjetura é sempre associada ao valor epistémico provável pois é "uma afirmação que parece razoável, mas cuja verdade não está demonstrada" (Mason, Burton & Stacey, 1982). A sobrevivência a vários testes é um indicador de credibilidade de uma conjetura. Contudo, para determinar se é verdadeira ou falsa são mobilizados outros processos de raciocínio matemático (Jeannotte & Kieran, 2017). São os argumentos plausíveis e as provas matemáticas formais obtidas que lhes dão validade matemática, podendo originar resultados matemáticos (Ponte, 2007). Uma conjetura é formulada como resultado de raciocínio indutivo, como refere Pólya (1954) ao afirmar que a indução está associada ao método experimental usado pelos cientistas, cujas etapas são a observação, a formulação e o teste de conjeturas, assumindo a possibilidade de a indução conduzir ao erro. Contudo, para ser validado matematicamente o resultado deve ser claramente provado através de raciocínio dedutivo (Davis & Hersh, 1985).

Generalização. Mais do que afirmações sobre objetos particulares, a Matemática procura fazer afirmações gerais sobre grandes classes de objetos, tornando-se a generalização um processo de raciocínio fundamental nesta ciência. Durante o processo de formulação de conjeturas, identificam-se pontos comuns a vários casos e assim se desenvolvem generalizações. A generalização consiste em fazer afirmações gerais sobre propriedades, conceitos ou procedimentos que se consideram válidos para um conjunto alargado de objetos ou condições matemáticas (Mata-Pereira & Ponte, 2013). Para Pólya (1954) formular uma generalização é o ato de partir de um facto, conclusão ou conjetura específica para formular uma conjetura de natureza mais geral. Assim, este processo começa quando se identifica uma regularidade, uma característica comum a vários casos e exemplos (Mason, Burton & Stacey, 1982) inferindo uma relação entre os objetos de um conjunto a partir de um subconjunto deste (Jeannotte & Kieran, 2017). Em matemática, uma generalização (também denominada teorema) só é considerada válida se for possível demonstrá-la. Diversos autores consideram que generalizar é uma tarefa desafiante para os alunos (Zazkis, Liljedahl, & Chernoff, 2008). Para que os alunos desenvolvam cada vez mais esta competência é necessário um trabalho regular com tarefas que a envolvam de modo que, evoluam de generalizações inválidas ou pouco adequadas para generalizações válidas com justificações adequadas ao contexto. Galbraith (1995) no âmbito da formulação de generalizações identifica duas abordagens distintas adotadas pelos alunos: uma abordagem empírica e uma abordagem dedutiva. Dos alunos que seguem abordagens empíricas, uns fazem testes ao acaso enquanto outros escolhem os casos particulares que pretendem testar revelando uma compreensão do domínio da conjetura testada. Por outro lado, os alunos que seguem abordagens dedutivas têm as seguintes etapas pela frente: "reconhecer a relevância de um certo princípio externo", "reconhecer o modo em que o princípio é útil" e "aplicar o princípio apropriadamente" (Galbraith, 1995, p. 415/416). Este processo relaciona-se sobretudo com os raciocínios indutivo e abdutivo sendo considerado por Davis e Hersh (1995) um processo fundamental para consolidar o conhecimento dos alunos.

Justificação. Justificar uma afirmação consiste em apresentar razões, baseadas em conceitos, propriedades, procedimentos e ideias matemáticas, que convençam o próprio e também os outros (Sowder & Harel, 1998). Justificar as conjeturas é, para os alunos, um processo difícil de concretizar, cuja importância nem sempre é reconhecida. Ao fornecer garantias para determinadas ideias e conjeturas, este processo permite modificar o valor epistémico de tais afirmações e até validá-las matematicamente (Jeannotte & Kieran, 2017). O processo de justificar é, nas palavras de Kilpatrick, Swafford e Findell (2001, p. 130), "fornecer motivo suficiente para" as afirmações e conjeturas estabelecidas. Lannin (2005) agrupa as justificações apresentadas pelos alunos em cinco níveis, de acordo com a sua complexidade. No nível 0 (não justificar) situam-se os alunos que não apresentam justificações nas suas respostas. O nível 1 (autoridade externa) corresponde a alunos que mobilizam uma autoridade externa fazendo referência a outro indivíduo ou objeto e o nível 2 (evidência empírica) se a sua justificação se baseia em casos particulares por ele analisados. No nível 3 (exemplo genérico) os alunos apresentam uma justificação dedutiva adequada à situação particular e no nível 4 (justificação dedutiva) quando utilizam um argumento dedutivo e independente dos casos particulares. Sendo a justificação encarada como um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas, este revela-se um processo fundamental do raciocínio dedutivo.

2.1.3. Desenvolvimento do raciocínio matemático na sala de aula

Cada vez mais se reconhece que ser capaz de raciocinar matematicamente é essencial para os alunos aprenderem com compreensão (NCTM, 2007). O desenvolvimento do raciocínio matemático é um aspeto prioritário no ensino da Matemática, salientado nas orientações para os diferentes níveis de ensino (AMATYC, 1995; MAA, 2004; NCTM 2000). O programa preconizado para a disciplina de Matemática A começa por referir o raciocínio abstrato como “uma capacidade indispensável a um bom percurso escolar e profissional, em qualquer área do conhecimento” (MEC, 2014, p. 5). Além disso, estabelece um conjunto de objetivos que são explicitados através de verbos como, identificar, reconhecer, saber, demonstrar, justificar e que traduzem os desempenhos fundamentais que os alunos deverão evidenciar no decorrer do Ensino Secundário. De um modo integrado, tais desempenhos devem contribuir para a:

> (...) aquisição de conhecimentos, factos, conceitos e procedimentos, para a construção e desenvolvimento de raciocínio matemático, para a resolução de problemas em diversos contextos, para uma comunicação (oral e escrita) adequada e para uma visão da Matemática como um todo articulado e coerente. (MEC, 2014, p. 6)

Os autores do documento reconhecem a importância do desenvolvimento das diferentes formas de raciocínio matemático: “o raciocínio matemático é por excelência o raciocínio hipotético-dedutivo, embora o raciocínio indutivo desempenhe um papel fundamental na atividade matemática, uma vez que preside à formulação de conjeturas” (MEC, 2014, p. 6).

Segundo o NCTM (2007) a promoção de um ambiente de sala de aula que exija a reflexão e em que o professor monitorize o modo de raciocínio dos alunos é fulcral para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Krulik e Rudnick (1999) referem duas formas de desenvolver as capacidades de raciocínio dos alunos: separar o raciocínio numa disciplina à parte ou incorporar as atividades de raciocínio no currículo diário. Na opinião destes autores, as capacidades de raciocínio devem ser desenvolvidas no decorrer das aulas de Matemática. Deste modo, destaca-se a importância de proporcionar aos alunos experiências que desenvolvam capacidades de raciocínio matemático, sendo a capacidade de raciocinar "uma forma produtiva de pensar, que se torna comum no processo de investigação matemática e de construção de sentido" (NCTM, 2009, p. 11). Torna-se uma prioridade valorizar o raciocínio matemático na sala de aula para que os alunos possam ver que a Matemática é lógica e pode ser compreendida (Quaresma & Ponte, 2015). Esta valorização permite também que os alunos possam ir além da mera memorização de factos, regras e procedimentos (NCTM, 2007).

Como referem Lannin, Ellis e Elliot (2011) promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos é um aspeto central do trabalho do professor. É uma capacidade transversal que deve ser promovida em sala de aula, criando situações que levem os alunos a formular conjeturas, justificar raciocínios e generalizar ideias. A dificuldade começa em saber como é que o professor pode contribuir para o desenvolvimento de cada um dos processos de raciocínio matemático nos seus alunos. Existem dois aspetos apontados como centrais na promoção do raciocínio matemático em sala de aula: as tarefas propostas e as ações do professor (NCTM, 2009). As tarefas propostas devem ser pensadas com vista ao desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos e as ações levadas a cabo pelo professor em sala de aula também podem ser contributos essenciais.

Tarefas. Desenvolver o raciocínio matemático em sala de aula envolve o trabalho em tarefas que requerem e estimulam o raciocínio (Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012). Uma forma de promover o raciocínio matemático em sala de aula é criar situações que levem os alunos a apresentar generalizações com base em ideias, conceitos e propriedades matemáticas. Devem também ser propostas tarefas em que a justificação é um aspeto central da atividade dos alunos (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008). Diferentes tipos de tarefas matemáticas mobilizam diferentes processos de raciocínio. A resolução de problemas e de exercícios incluem a formulação de uma estratégia geral de resolução do problema ou a identificação das várias etapas necessárias para uma possível resolução e, noutro nível, a realização de um passo, transformação ou cálculo e a sua justificação. Pelo seu lado, a realização de explorações e investigações propiciam a formulação de conjeturas e teste das mesmas. Ponte e Matos (1992) ao analisarem os processos de raciocínio mobilizados na realização de investigações matemáticas, referiram que estes se desenvolvem nas seguintes fases: formulação de questões a estudar, definição de estratégias, reflexão sobre as experiências desenvolvidas, formulação e teste de conjeturas e validação das conjeturas previamente testadas.

Ponte (2005) considera importantes as tarefas de caráter aberto e desafiantes, tarefas de investigação, para que o aluno obtenha uma verdadeira experiência matemática. Segundo o NCTM (2007) é essencial que os alunos compreendam a necessidade de justificar desde cedo no seu percurso escolar, sendo que a justificação é um "elemento central no processo de raciocínio matemático" (Henriques, 2012, p. 141). O facto de se verificar uma afirmação para um determinado número de casos particulares de um conjunto não garante a sua veracidade para todos os casos do mesmo conjunto. Para que os alunos tenham a certeza de que a conjetura que formularam é válida é necessário que encontrem uma justificação para o porquê da sua veracidade (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008). O processo de justificar envolve componentes importantes como "criar argumentos, explicar porque é que são verdadeiros e compreender o papel das definições e contraexemplos" (Henriques, 2012, p. 141). Kilpatrick, Swafford e Findell (2001) referem que os alunos têm de ser trabalhados para a capacidade de explicar e justificar as suas ideias com o objetivo de desenvolver o seu raciocínio matemático, mas também melhorar a sua compreensão concetual. O incentivo à justificação desde os primeiros anos promove a progressão das justificações simples e informais para as justificações formais. Assumindo que a explicação e justificação de conclusões permitem aos alunos evidenciar e esclarecer o seu raciocínio (NCTM, 2007), deve ser objetivo do professor criar situações em que a justificação tenha um papel de destaque.

A compreensão dos diferentes processos de raciocínio matemático culmina com o desenvolvimento de diferentes formas de raciocínio. Por não estarem "habituados a 'explorar' as tarefas tanto quanto possam" (Brodie, 2010, p. 55), são diversas as dificuldades que os alunos evidenciam ao responder a tarefas que envolvem raciocínio matemático. É sempre importante analisar a forma como os alunos trabalham nestas tarefas para que tirem o melhor proveito delas. Neste sentido, a análise das representações elaboradas pelos alunos, permite ao professor compreender os seus modos de interpretação e de raciocínio (NCTM, 2007) e colaborar no desenvolvimento de tal capacidade. De acordo com Ball e Bass (2003) as planificações das aulas devem integrar tarefas que estimulem o raciocínio matemático dos alunos. Diversos estudos identificam, em particular, as tarefas de investigação como contributos essenciais para o desenvolvimento desta capacidade.

Ações do professor. Apenas a proposta de tarefas com o objetivo de promover o raciocínio matemático não é suficiente. A postura do professor em sala de aula, a forma como motiva os alunos para a atividade, como conduz a aula e, em particular, os momentos de discussão coletiva são fatores essenciais para que se possa cumprir efetivamente o objetivo das tarefas. O professor não tem o seu papel facilitado. Essencialmente, nos momentos de trabalho autónomo dos alunos deve aperceber-se das suas dificuldades e contribuir para que as superem. No entanto, o professor deve ser consciente no apoio que dá aos alunos pois, ao contribuir com demasiadas informações, poderá estar a pôr em causa o desenvolvimento da sua capacidade de raciocínio. Por outro lado, se não for dado auxílio para ultrapassarem as dificuldades, os alunos podem ficar desmotivados e desistir da tarefa, acabando da mesma forma por não desenvolver a capacidade desejada.

O professor deve usar o questionamento, como forma de promover o raciocínio. As questões utilizadas devem encaminhar os alunos, fornecer-lhes uma "luz", mas não dar demasiadas informações para que não suceda o que Ponte e Santos (1998) descrevem: "até que ponto esta forma de questionar não reduz uma tarefa com algumas potencialidades a um mero exercício de cálculo" (p. 15). As aulas de cunho exploratório assumem um papel fundamental na criação de oportunidades de desenvolvimento de raciocínio matemático. Os alunos são participantes ativos "na interpretação das questões propostas, na representação da informação apresentada e na conceção e concretização de estratégias de resolução, que apresentam e justificam no final aos seus colegas e ao professor." (Quaresma & Ponte, 2015, p. 123).

O ensino-aprendizagem exploratório incentiva a exploração de forma autónoma, de modo a que sejam os próprios alunos a construir a sua aprendizagem e, ao mesmo tempo, desenvolvam as suas capacidades argumentativas. Os momentos de trabalho autónomo dos alunos promovem a partilha de ideias, de estratégias, de raciocínios entre pares. Além disso, as tarefas propostas podem proporcionar momentos de discussão, entre grupo de trabalho ou com a turma, constituindo uma oportunidade de clarificar e partilhar diferentes modos de raciocínio. Estes momentos destacam-se como excecionais para a promoção desta capacidade. Nos momentos de discussão, o professor tem um papel determinante na condução da discussão não deixando que esta perca de vista os objetivos a atingir. Pode pedir-se ao aluno que explique um problema por palavras suas e utilizar o questionamento de forma a incentivar o seu pensamento, tal como sugere NCTM (2009, p. 11): "pedir aos alunos que reformulem o problema usando as suas próprias palavras" e "colocar questões aos alunos que promovam o aprofundamento do seu pensamento, por exemplo, 'porque é que isso funciona?' ou 'como é que sabes?'".

Existem ainda determinadas características do ambiente de sala de aula que podem contribuir para a promoção do desenvolvimento do raciocínio matemático. Segundo Oliveira (2008),

> (...) um ambiente de sala de aula em que se experimenta e se erra, e se volta a tentar, no fundo, um ambiente em que se replica o trabalho habitual do matemático, sem punições psicológicas, é um grande estímulo para o desenvolvimento do raciocínio matemático. (p. 8)

Sempre que se revelem pertinentes, todos os contributos dos alunos devem ser valorizados. Os contributos incorretos constituem uma oportunidade de questionar o porquê dessa incorreção, ajudando a ultrapassar aquilo que ainda não era claro para alguns alunos. Os contributos corretos podem ser explorados, sendo uma oportunidade de o professor colocar mais questões que permitam compreender e aprofundar conceitos. A existência de trabalho exploratório na aula de Matemática é uma dimensão importante a considerar, sendo que constitui uma oportunidade para o aluno "construir ou aprofundar a sua compreensão de conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas" (Ponte, 2017, p. 15), desenvolvendo o seu raciocínio, a sua compreensão da Matemática e a sua capacidade de a usar nas mais diversas situações (Quaresma & Ponte, 2015).

2.2. Ensino e aprendizagem do tópico assíntotas ao gráfico de uma função

Assíntotas ao gráfico de uma função é um dos tópicos lecionados no domínio Funções Reais de Variável Real (FRVR11), que integra o Programa e Metas curriculares de Matemática A (MEC, 2014) e o documento das Aprendizagens Essenciais previstas para o 11.º ano de escolaridade (DGE, 2018). O conceito de assíntota surge intimamente relacionado com os conceitos de limite e continuidade e é encarado como uma aplicação da noção de limite de uma função. As assíntotas desempenham também um papel fundamental no estudo das funções e das suas propriedades bem como na sua representação gráfica.

O documento Programa e Metas Curriculares de Matemática A (MEC, 2014. p. 73) estabelece as seguintes metas de aprendizagem para este tópico:

3.1. Identificar, dado um referencial cartesiano, uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, a reta de equação $x = a$ «assíntota vertical ao gráfico de f» quando pelo menos um dos limites laterais no ponto a for infinito.

3.2. Designar, dada uma função real de variável real f e um referencial cartesiano, a reta de equação $y = mx + b$ $(m, b \in \mathbb{R})$ por «assíntota ao gráfico de f em $+\infty$» (respetivamente, por «assíntota ao gráfico de f em $-\infty$») se $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (mx + b)\big) = 0$ (respetivamente se $\lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - (mx + b)\big) = 0$) e designá-la, quando $m = 0$, por «assíntota horizontal».

3.3. Provar, dada uma função real de variável real f, que a condição $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ (respetivamente, $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m$) é necessária (mas não suficiente) para que exista uma reta de declive m que seja assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ (respetivamente em $-\infty$). Pelo seu lado, no documento Aprendizagens Essenciais, elaborado no ano de 2018, estabelecem-se os seguintes objetivos para este tópico: "Reconhecer, interpretar e representar graficamente funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, referindo o conceito intuitivo de assíntota e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação" (p. 7).

O estudo de funções constituiu um tópico fundamental da matemática. Utilizadas para representar e interpretar diversas situações do quotidiano e da própria matemática permitem estabelecer relações entre variáveis. Contudo, constituem um dos tópicos em que os alunos revelam mais dificuldades e onde raramente desenvolvem uma compreensão adequada (Dreyfus & Eisenberg, 1983). O NCTM (2000) defende o ensino de tópicos nos quais as ideias matemáticas estão relacionadas entre si, promovendo a compreensão dos alunos e o desenvolvimento da sua capacidade de aplicar a matemática nas situações com as quais são confrontados. Além disso, sugere um ensino bem articulado em que se aprendem conceitos matemáticos cada vez mais elaborados à medida que se avança no nível de escolaridade.

Vários autores construíram teorias que procuram explicar o desenvolvimento de conceitos matemáticos em geral. Sfard (1991) considera duas possíveis formas de entendimento de conceitos matemáticos: um entendimento operacional e um entendimento estrutural. O entendimento operacional consiste na compreensão do conceito como resultado da aplicação de um conjunto de processos e o entendimento estrutural encara o conceito já como objeto matemático. Assim, a autora sugere a teoria da reificação relacionada com o desenvolvimento concetual, afirmando que, em primeiro lugar, ocorre um entendimento operacional e após a interiorização dos processos, ocorre o entendimento estrutural. Esta evolução é lenta e acontece em três fases: interiorização, condensação e reificação. Ao longo da fase de interiorização, os processos vão-se tornando cada vez mais acessíveis para o aluno, à medida que ele vai desenvolvendo as suas capacidades, até ser capaz de pensar sobre o que aconteceria se não os efetuasse. A fase de condensação evolui quando se verifica que o aluno é capaz de combinar facilmente um processo com outros processos já conhecidos, estabelece comparações e generalizações, alternando entre diferentes representações de um conceito. A fase de reificação atinge-se quando o aluno consegue analisar um objeto matemático como tal e não como um processo. Nenhuma fase é alcançada sem que a anterior tenha sido superada.

Pelo seu lado, Gray e Tall (1994) criaram a teoria *Procept* para explicar a dualidade entre um conceito matemático e um processo matemático, que dificulta a construção efetiva de conhecimento matemático. O termo *Procept* resulta dos termos process e concept, referindo-se ao conjunto de processo e conceito representados pelo mesmo símbolo. Os símbolos podem ser descrições verbais, definições formais ou processuais que contenham a dualidade processo-objeto. A utilização de um símbolo como processo e objeto revela uma ambiguidade do simbolismo que, por vezes, cria obstáculos à compreensão de um determinado conceito. Gray e Tall (1994) consideram que os alunos que se focam principalmente nos processos revelam mais dificuldades em aprender novos conceitos, enquanto que os que conseguem ver um símbolo como um processo e um objeto ao mesmo tempo têm um melhor desempenho. A construção e manipulação de ideias matemáticas formais são conduzidas através de uma série de processos internos que podem ser modelados pela discussão de regras e algoritmos.

Em particular, no estudo das funções, NCTM (2014) defende o recurso a uma variedade de representações, ao invés de focar apenas a representação simbólica, como facilitador da compreensão dos conceitos relacionados com o tema. Eisenberg e Dreyfus (1993) defendem que, ser capaz de estruturar o gráfico de uma função através do estudo das suas propriedades, deve ser um dos objetivos do currículo escolar de Matemática. Esta importante capacidade depende da imagem concetual visual do aluno acerca das funções e das noções matemáticas que lhes estão associadas. Um ponto de partida para o desenvolvimento da mesma, mencionado por Eisenberg e Dreyfus (1993), é o esboço do gráfico de funções racionais da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, em que P e Q são polinómios possíveis de fatorizar. Segundo estes autores esta é uma análise que induz nos alunos uma certa intuição relativamente às propriedades globais do gráfico.

O estudo das assíntotas ao gráfico de uma função permite, em particular, um conhecimento do comportamento da função e assume um papel importante no esboço do seu gráfico. Este estudo baseia-se, essencialmente, em manipulações algébricas de expressões e no cálculo de limites. Resume-se, para muitos alunos, à aplicação de um algoritmo em que, concluídas todas as etapas, se obtém a assíntota pretendida. Isto deve-se ao facto de o tópico ser frequentemente ensinado com recurso a um conjunto de "receitas" para o cálculo dos três tipos de assíntotas. Tais "receitas" não são suficientes para entender comportamentos como continuidade e limites nem para estabelecer relações entre os conceitos de assíntotas, limites e continuidade. Da mesma forma, não facilita o raciocínio e a argumentação necessários na análise das funções. O conhecimento inadequado ou incompleto destes conceitos pode contribuir para numerosos problemas na aprendizagem do cálculo (Cornu, 1991). Trabalhar o conceito de uma forma mecânica e desconectada não promove a sua compreensão nem fornece aos alunos a oportunidade de ver como os conceitos de assíntotas e limites estão relacionados (Hornsby & Cole, 1986).

O conceito de assíntota é adquirido inicialmente de forma operacional e, mais tarde, pode assumir a sua forma estrutural. Sfard (1991) considera ser necessário um longo período de experiência para que a conceção operacional se possa transformar em estrutural, sendo difícil atingir o processo de reificação. Para o atingir deve ter-se em conta três fatores essenciais: tempo, discussão e reflexão.

São diversos os fatores que prejudicam a compreensão adequada dos conceitos matemáticos. Um deles é a forma como é ensinado. Alguns professores assumem que um bom momento de exposição é tudo o que é necessário para que os alunos adquiram uma compreensão concetual adequada (Cornu, 1991). Por outro lado, outros limitam-se a ensinar o tipo de problemas que pretendem que os alunos sejam capazes de resolver ou preocupam-se apenas com o desenvolvimento de competências e conceitos específicos que querem que eles tenham (Goldin & Kaput, 1996) ou que são necessários para um determinado momento de avaliação a que serão sujeitos. A linguagem utilizada pode também estar relacionada com algumas dificuldades dos alunos como refere Fischbein (1987) que aponta como responsáveis a interpretação orientada pela intuição das definições formais e o uso da linguagem informal. Segundo Nair (2010), interpretações de assíntotas como "linhas de que a curva se aproxima, mas nunca atinge" (p. 1) são muito comuns entre alunos e professores. A existência de tais ideias erradas pode prejudicar a formação e entendimento de conceitos matemáticos formais. A possibilidade do gráfico de uma função cruzar as retas correspondentes às suas assíntotas horizontais ou oblíquas, não é abordada no manual adotado, não surge nenhum exemplo em que isto se verifique, nem tal discussão é aprofundada.

O recurso à calculadora gráfica pode também ser causador de erros e equívocos e, consequentemente, de dificuldades de aprendizagem. São bem conhecidas as potencialidades, mas também as limitações deste recurso que podem dificultar a compreensão concetual dos alunos. Reconhece-se assim a importância das representações na compreensão dos conceitos matemáticos, mas também os obstáculos cognitivos que algumas constituem. É fundamental o espírito crítico dos alunos, incentivando-os a conjeturar e prever o comportamento dos gráficos, utilizando os seus conhecimentos matemáticos, e depois utilizar a calculadora como forma de confirmar ou reprovar as suas suspeitas. Para NCTM (2014),

> Oportunidades de raciocinar com funções e usá-las para modelar situações do mundo real surgem nas etapas do desenvolvimento matemático de um estudante. Proporcionar aos alunos experiências variadas envolvendo funções pode ajudar a cimentar a linguagem matemática, por vezes confusa, da notação de funções. O desenvolvimento do raciocínio com funções é uma das bases

sobre as quais se constrói uma compreensão bem desenvolvida da matemática. (p. 50)

2.3. Estudos realizados no âmbito do desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos

É inquestionável a importância de promover e desenvolver a capacidade de raciocínio matemático nos alunos. Cada vez mais surgem estudos que procuram analisar esta capacidade transversal e desenvolvê-la tendo em consideração os diferentes níveis de escolaridade e as diferentes áreas de ensino da Matemática. Bell (2011) considera essencial que, desde os primeiros anos, os alunos vivam experiências em que tenham de apresentar justificações alternativas, pensar como validar essa justificação, explicar o "porquê" de algo.

Na aula de Matemática, os alunos recorrem a diferentes tipos de raciocínio. Nas suas investigações sobre os processos de raciocínio mobilizados pelos alunos na resolução de diferentes tarefas, Lithner (2003) verificou que os alunos do Ensino Básico elaboravam as suas resoluções de forma muito ligeira, baseadas em procedimentos que memorizavam de questões anteriores, restando pouca ou nenhuma atenção às propriedades matemáticas dos conceitos envolvidos. Por este motivo, o autor distingue entre raciocínio matemático criativo e imitativo, sendo este último aquele que é baseado na memorização e aplicação de algoritmos rotineiros (Lithner, 2008).

No que diz respeito à aprendizagem da linguagem algébrica, Henriques (2010) testemunhou uma despreocupação com o teste e justificação de conjeturas, que admite resultar de os alunos resumirem a sua resolução à aplicação rotineira de procedimentos algébricos. As causas desta despreocupação podem também ser explicadas pela investigação levada a cabo por Galbraith (1995) com alunos do Ensino Básico, que envolveu diversos países e concluiu que, "apenas num nível avançado os alunos reconhecem a necessidade de um raciocínio convincente com base num conjunto de pressupostos explícitos" (p. 412). Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira & Varandas (1998), no trabalho colaborativo realizado com alunos do 3.º ciclo sobre o desempenho dos alunos nas várias fases de um trabalho de investigação, consideram a formulação de conjeturas a etapa menos problemática desse trabalho: "usar e integrar estratégias geométricas e aritméticas para chegar a conjeturas, usar estratégias de variação e generalização para formular conjeturas, assim como analisar casos extremos na sua argumentação, e alterar e adaptar conjeturas a partir de contraexemplos" (Ponte, 2003, p. 26/27). Os autores consideraram que o pouco cuidado na apresentação de justificações poderá estar relacionado com a inexperiência dos alunos na realização de tarefas que apelam ao raciocínio matemático e com a dificuldade em compreender aspetos fundamentais do processo de investigação. De facto, a aplicação rotineira de procedimentos algébricos, torna mais complicada a compreensão de conceitos pelo aluno e dificulta a apresentação de uma justificação válida: a dita fluência processual e fraca compreensão concetual.

Brocardo (2002) aponta a facilidade com que os alunos formulam conjeturas mesmo apesar de não compreenderem a sua importância, "tomando-as como conclusões". Mata-Pereira e Ponte (2013), da sua intervenção na unidade didática Sequências, concretizada com alunos do 8.º ano, constataram que os intervenientes não consideram as características necessárias que tornam uma justificação matematicamente válida, "apresentando tanto justificações válidas como justificações não válidas" (p. 12). Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira & Varandas (1998) relacionam a facilidade de elaboração de diversas conjeturas, por vezes até de forma desmedida, com a necessidade de "obter crédito junto do professor pelas descobertas realizadas e, também, procurar que este confirme a sua validade" (p. 113). Brocardo (2002) apresenta a perspetiva curiosa de que, numa fase inicial, os alunos encaram a justificação das suas conjeturas como uma imposição desnecessária da professora, não reconhecendo de imediato a sua importância. Efetivamente, vários autores destacam que para os alunos é um processo difícil de executar e difícil de compreender a sua importância. Mas é fundamental e, por isso, tal competência deve ser trabalhada. Acontece que, geralmente os alunos julgam que testar uma conjetura é verificar se esta é válida para um determinado número de casos. No seu entendimento, se a conjetura for válida para vários casos, então é verdadeira. A mesma conclusão retira Junqueira (1996) ao afirmar que os alunos da turma de 9.º ano envolvidos na sua experiência, inicialmente formularam conjeturas com base na análise de casos particulares, "mas a análise de exemplos levou-os ao estabelecimento de conjeturas genéricas" (Ponte, 2003, p. 25). Por esse motivo, Brocardo (2002) considera:

> É muito forte nos alunos a ideia que uma tarefa matemática implica a procura de respostas/conclusões e que a evolução para uma postura realmente investigativa em que formulam conjeturas e desenvolvem vários ciclos de

> confirmação ou refutação destas, é um processo demorado e que tem de ser objeto de um trabalho explícito por parte do professor. (p. 540)

Lannin (2005), no seu estudo com alunos do 6.º ano que envolveu tarefas com sequências, verificou que os alunos deste nível de escolaridade demonstram uma excelente capacidade de pensar diferentes estratégias, formulando generalizações e justificando-as de forma bastante adequada. Já com alunos do 9.º ano de escolaridade, Rivera e Becker (2005) sugeriram tarefas com sequências lineares e nem sempre obtiveram os melhores desempenhos na concretização de generalizações, observando uma dificuldade no uso de conexões entre várias formas de representação e escassez de estratégias de generalização. Irene Segurado (2002), no estudo que realizou com uma turma do 6.º ano de escolaridade, que envolveu a realização de quatro tarefas de investigação, confessou que só na realização da última tarefa se verificou mais cuidado com a organização de dados, com a procura de padrões, formulação de conjeturas e com a sua validação.

Rocha (2002), na sua experiência com uma turma de 7.º ano, sentiu uma evolução significativa ao longo das cinco tarefas que propôs aos alunos. Contudo, remete a sua preocupação para o facto de os alunos não compreenderem "a diferença entre verificar uma conjetura para alguns casos e demonstrá-la para todos" (Ponte, 2003, p. 24). Nas suas investigações com alunos do 7.º e 8.º ano de escolaridade nas unidades didáticas Sequências e Equações lineares, respetivamente, Mata-Pereira (2012) procurou compreender de que forma o professor promove o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos em sala de aula, obtendo algumas conclusões idênticas à de outros autores ao verificar que as justificações apresentadas pelos alunos "decorrem maioritariamente do questionamento da professora ou da investigadora, não surgindo espontaneamente durante a realização das tarefas" (p. 105). Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012), num artigo que compara os processos de raciocínio dos alunos do 9.º ano do Ensino Básico com os dos alunos do 2.º ano do Ensino Superior em diversas tarefas, concluíram que "Inicialmente, os raciocínios dos alunos, tanto do 9.º ano como do Ensino Superior, tendem a desenvolver-se do particular para o geral" (p. 18). Identificam que os alunos privilegiam processos indutivos, como observação de casos particulares, analogia e generalização para formularem as suas primeiras conjeturas. Os autores concluem que os alunos envolvidos, apesar de serem alunos com um desempenho superior ao da restante turma, "nem um nem outro sentem à partida necessidade de justificar as suas conjeturas" (p. 18). Ao estudar os processos de raciocínio mobilizados por alunos do 10.º ano para um conjunto de tarefas de investigação, Fonseca (2000) verificou que formular conjeturas é algo que os alunos fazem com bastante naturalidade. Pelo contrário, a justificação não surgiu de forma espontânea no trabalho dos alunos e a prova de conjeturas foi praticamente inexistente. A investigadora decidiu ir mais além na sua investigação e procurar compreender o que influencia os processos matemáticos dos alunos. Neste sentido, considerou como fatores decisivamente importantes a natureza da tarefa, o material utilizado, a qualidade da interação entre pares e com o professor e o conhecimento e experiência prévia.

Russel (1999) defende que os alunos devem ser estimulados, desde cedo, a expor as suas ideias sem medo e a efetuarem uma análise crítica das ideias dos colegas. Mason e Pimm (1984) referem que, para apresentarem os seus raciocínios, os alunos recorrem frequentemente a casos particulares como uma aproximação à generalização. Como dizem, veem "o geral no particular". No mesmo artigo, Mason e Pimm (1984), questionam-se sobre algumas situações interessantes que ocorrem em sala de aula e fazem-nos refletir um pouco sobre este tema: "Porque é que oferecemos exemplos aos alunos nas aulas, e o que é suposto eles fazerem com eles? Se os exemplos são sempre exemplos de alguma coisa, como podem os alunos ter consciência daquilo que os exemplos devem ser exemplificativos?" (p. 287/288). Fonseca (2000) aponta três aspetos fundamentais que devem ser promovidos nos alunos: encarar as afirmações como conjeturas, sendo necessário testá-las e modificá-las; testar conjeturas e justificá-las; ter uma visão crítica relativamente aos argumentos apresentados pelos colegas.

O estudo de PISA (Ramalho, 2002) conclui que os nossos alunos revelam pouca capacidade de argumentação:

> (...) materializada nas justificações que apresentam: generalizam situações sem proceder à sua verificação; recorrem a informação do quotidiano para fundamentar as suas respostas, sem que esta informação seja pertinente para o problema em causa; fundamentam as suas respostas em situações claramente excluídas pelas condições enunciadas. (p. 52)

Diversos autores sugerem que a elaboração de relatórios escritos pode ser uma forma de melhorar a argumentação dos alunos. Varandas (2001) e Brocardo (2002) afirmam que, nos primeiros relatórios os alunos apresentaram respostas mais resumidas e diretas e, ao ganhar experiência com a sua elaboração, acabaram por elaborar textos mais descritivos e esclarecedores. Outro contributo fortemente mencionado pelas investigações são os momentos de discussão coletiva. Estes constituem momentos de troca de ideais e exposição de estratégias, onde surge a oportunidade de o professor solicitar justificações para as conjeturas elaboradas pelos alunos e que não foram justificadas durante o trabalho autónomo. Mata-Pereira & Ponte (2017) revelam, do seu estudo no tema Sequências com alunos do 8.º ano, que as justificações e generalizações formuladas surgem dos momentos de discussão coletiva, depois dos alunos serem interpelados e desafiados pela professora. De facto, vários estudos referem que, muitas das conjeturas e generalizações que se formulam durante o trabalho autónomo apenas se testam e justificam nestes momentos de discussão, um pouco por insistência do professor. Refere Mata-Pereira e Ponte (2018) que é a "diversidade de ações do professor, possibilitadas pela tarefa proposta, que permite que processos de raciocínio matemático surjam nos momentos de discussão coletiva" (p. 127).

O recurso a instrumentos tecnológicos como a calculadora gráfica é também excelente para estimular o raciocínio matemático dos alunos, nomeadamente Dugdale (1993) refere que ao permitir manipular facilmente representações gráficas, esta ferramenta desempenha um papel importante no raciocínio matemático, na investigação e na argumentação. Bem sabemos que a calculadora gráfica é um instrumento de uso obrigatório de acordo com o atual Programa do Ensino Secundário. Tem sido bastante estudado e analisado o seu papel no ensino e aprendizagem da Matemática. Além de permitir ter uma noção visual do conceito matemático envolvido, proporciona momentos de discussão, de partilha de ideias, testes, conjeturas, justificações e generalizações que se podem revelar interessantes (Gracias & Borba, 2000) e contributos essenciais para a compreensão de conceitos. Também Ministério da Educação (1997) referem que a calculadora gráfica estimula os alunos a formular conjeturas nas suas tarefas de investigação, promovendo o desenvolvimento de raciocínios e argumentos. Na sua experiência com alunos do 11.º ano de escolaridade, que envolveu o trabalho numa tarefa de investigação com possibilidade de utilização da calculadora gráfica, Magalhães e Martinho (2011) comprovaram os benefícios da utilização deste instrumento:

> A calculadora gráfica revelou-se uma ferramenta fulcral, na medida em que ajudou os alunos na compreensão da tarefa, assim como na validação ou

> rejeição das conjeturas que previamente foram formuladas, desenvolvendo a capacidade de argumentar em matemática. (p. 12)

Agora, será que são suficientes as informações fornecidas pela calculadora gráfica para justificar conclusões, ou é necessária sempre a prova analítica? Arcavi (2003) apresenta algum receio quanto ao uso de representações gráficas. Mesmo quando os alunos dominam as capacidades gráficas da calculadora podem nem sempre saber interpretar a informação que por ela é fornecida. Estes resultados confirmam outros similares que salientam que muitos alunos acabam por ignorar o esboço do gráfico, procurando, quase sempre, a solução algébrica das questões. Magalhães e Martinho (2011) esclarecem que os alunos devem adaptar-se a cada situação, identificando a necessidade de justificação analítica ou apenas gráfica para conseguir validar a conjetura. Em particular, no estudo das Funções a calculadora pode ter uma importância ainda mais evidente. Segundo Siqueira e Beust (2008) os alunos conseguem compreender mais facilmente o comportamento de uma função analisando a sua representação gráfica ao invés da sua expressão algébrica. É uma ferramenta que permite estabelecer comparações e formular conjeturas com maior segurança (Mason, Burton & Stacey, 1982) mas a sua utilização requer algum controlo do professor pois só é vantajosa se os alunos souberem interpretar e analisar os seus resultados de forma crítica.

O trabalho frequente em tarefas que envolvem a formulação de conjeturas, concretização de generalizações e elaboração de justificações, dos momentos de discussão para limar aspetos que não foram conseguidos com o trabalho autónomo dos alunos e o recurso a ferramentas como a calculadora gráfica são importantes quando o objetivo é apoiar o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

2.4. Abordagem exploratória

A planificação de uma aula, de uma unidade didática ou até de um período letivo depende de diversos fatores. É essencial combinar os documentos orientadores preconizados para a disciplina com os alunos com os quais se trabalha, entre outros aspetos relacionados com as condições e recursos da escola e da comunidade.

Primeiramente, a elaboração da planificação pressupõe a definição de uma estratégia de ensino que se define tendo em conta dois elementos: a atividade do professor e a atividade do aluno (Ponte, 2005). Das duas estratégias básicas para o ensino da Matemática, definidas por Ponte (2005), adotei para a intervenção, essencialmente, a estratégia de "ensino-aprendizagem exploratória" ao invés de "ensino direto". O que distingue as duas abordagens são o tipo de tarefas selecionadas e o papel que aluno e professor assumem na aula.

No ensino direto o professor é responsável pela transmissão do conhecimento ao aluno: expõe a matéria e espera que este consiga realizar exercícios "cujo objetivo é mobilizar os conceitos e técnicas anteriormente explicados e exemplificados" (Ponte, 2005, p. 12). Neste tipo de ensino o papel do aluno é essencialmente a realização de exercícios em que deve aplicar o mesmo procedimento, que constituem "tipos de exercícios suscetíveis de saírem em testes ou exames" (Ponte, 2005, p. 13).

No ensino-aprendizagem exploratório, o aluno é detentor de um papel ativo na aula. Como refere Ponte (2005), "o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem" (p. 13). Esta é uma estratégia cada vez mais adotada por muitos professores para o ensino-aprendizagem da Matemática e revela-se crucial para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, dos seus conhecimentos e capacidades. Na opinião de Ponte, Quaresma & Mata-Pereira (2020),

> A aula exploratória permite aos alunos grande protagonismo na realização das tarefas e na expressão dos seus raciocínios. A valorização do raciocínio matemático na sala de aula pode ser feita naturalmente a partir do trabalho dos alunos. (p. 11)

Importante frisar que a definição da modalidade de ensino depende do modo como frequentemente a informação é introduzida, do tipo de tarefas que são frequentemente propostas e da comunicação estabelecida entre alunos e entre alunos e professores. Aliás, Ponte (2005) esclarece "ensino-aprendizagem exploratório não significa que tudo resulta da exploração dos alunos, mas sim que esta é uma forma de trabalho marcante na sala de aula." (p. 14). As aulas podem não se caracterizar por um ensino exclusivamente direto ou exclusivamente exploratório. Pode ocorrer também um ensino que recorra às duas estratégias. Defende Ponte (2005) que "existem versões extremas de ensino direto e de ensino-aprendizagem exploratório, tal como existem muitas versões intermédias" (p. 13). Contudo, "não é uma ou outra tarefa pontual mais interessante que marca o estilo de ensino, mas sim o tipo de trabalho usual na sala de aula" (Ponte, 2005, p. 14).

2.4.1. Diferentes tipos de tarefa

A planificação de uma aula, para além de outros fatores fulcrais, envolve a seleção e sequenciação das tarefas a realizar que devem servir o objetivo de cativar os alunos e focar determinados conceitos. Importa clarificar, seguindo a conceção de Ponte (2005), que a tarefa é o que é proposto que os alunos realizem enquanto a atividade é o resultado do que foi realizado. Assim, "quando se está envolvido numa atividade, realiza-se uma certa tarefa. Uma tarefa é, assim, o objetivo da atividade" (Ponte, 2005, p. 1). Distinguem-se diferentes tipos de tarefa matemática: problemas, exercícios, investigações e tarefas de exploração.

NCTM (2007) nomeia alguns aspetos a ter em conta na elaboração e proposta de uma determinada tarefa. São eles o nível de dificuldade, a existência ou não de procedimentos rotineiros, o grau de desafio e o grau de abertura. Neste sentido, Ponte (2005) considera que duas dimensões fundamentais das tarefas matemáticas são o grau de desafio e o grau de estrutura. O grau de desafio, que pode ser reduzido ou elevado, relaciona-se com "a perceção de dificuldade de uma questão" (Ponte, 2005, p. 7). O grau de estrutura, aberta ou fechada, mede o nível de indeterminação do que é dado e do que é pedido na tarefa. Conjugando estas duas dimensões, obtêm-se quatro tipos de tarefas (Figura 1).

Figura 1 - Diferentes tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005)

As tarefas de estrutura fechada são os exercícios e os problemas. Contudo, ao contrário dos problemas, os exercícios detêm um grau de desafio reduzido pois o seu único objetivo é a consolidação de conhecimentos já adquiridos. Os problemas são considerados por Pólya (1981) elementos desafiadores das capacidades matemáticas dos alunos, estimulando o seu gosto pela descoberta. NCTM (2007) reafirma a importância dos problemas no percurso matemático e no quotidiano dos alunos que os concretizam:

> Ao aprender a resolver problemas em Matemática, os alunos irão adquirir modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança, perante situações desconhecidas, que lhes serão muito úteis fora da aula de Matemática. Na vida quotidiana e no trabalho, ser hábil na resolução de problemas poderá acarretar muitas vantagens. (p. 57)

A resolução de problemas que se podem estender noutros problemas e levantar outras questões, e que podem ter entendimentos diferentes à medida que os alunos evoluem na sua aprendizagem ajuda os alunos a estabelecer relações entre conhecimentos existentes e novas aprendizagens (NCTM, 2014). O professor deve, no entanto, ponderar a dificuldade do problema pois se "for demasiado difícil, ele pode levar o aluno a desistir rapidamente" (Ponte, 2005, p. 3). Em suma, o que distingue um exercício de um problema é o conhecimento, por parte do aluno, de um processo imediato para o resolver: "Caso conheça esse processo e seja capaz de o usar, a questão será um exercício. Caso contrário, a questão será antes um problema" (Ponte, 2005, p. 4). Em comum, as duas tarefas têm o facto de serem bem explícitos os dados fornecidos e o que é pedido.

As investigações, tarefas de estrutura aberta e grau de dificuldade elevado, assumem um papel cada vez mais importante no ensino-aprendizagem da Matemática. Estas tarefas esperam dos alunos a formulação de conjeturas e justificação das mesmas, admitindo o recurso a diversas estratégias de resolução. A diferença entre as tarefas de exploração e de investigação é o grau de desafio: "Se o aluno puder começar a trabalhar desde logo, sem muito planeamento, estaremos perante uma tarefa de exploração. Caso contrário, será talvez melhor falar em tarefa de investigação" (Ponte, 2005, p. 8). Lithner (2000) refere que uma tarefa não rotineira tem várias etapas envolvidas, que designa por subtarefas. O aluno identifica a situação problemática, escolhe uma estratégia para resolvê-la, implementa a estratégia e obtém, por fim, um resultado.

Precisamente, Brodie (2010) aponta as tarefas que permitam diversos resultados e representações, como excelentes “oportunidades de investigar, analisar, explicar, conjeturar e justificar” (p. 47). O NCTM (1994) recomenda a utilização de diferentes tipos de tarefas ao invés de tarefas que apenas envolvem a aplicação de procedimentos rotineiros, sendo este um aspeto chave para a compreensão concetual do aluno. Os alunos devem ser motivados para a atividade de realização da tarefa, mas também é fundamental que as tarefas sejam pensadas pelo professor com o objetivo de motivar o aluno para a atividade. Estas tarefas geram, normalmente, discussões interessantes e benéficas entre alunos.

Ponte, Nunes e Quaresma (2012) referem que uma tarefa carece de uma apresentação, requer o trabalho autónomo dos alunos, merece uma discussão coletiva e, por fim, é crucial uma síntese e sistematização. Para Ponte (2005) numa abordagem de ensino-aprendizagem exploratório o foco são tarefas de exploração “incluindo possivelmente também algumas investigações, projetos, problemas e exercícios” (p. 15).

2.4.2. A aula em três fases e a importância das discussões coletivas

É sabido que planificar uma aula é um processo exigente. Do mesmo modo que, gerir uma turma e promover um bom ambiente na sala de aula pode ser também, por vezes, complexo. Pode acontecer o professor planear minuciosamente uma aula e tudo correr ao contrário do planeado. Contudo, isto não é razão para em algum momento desvalorizar a importância de uma boa planificação. O professor e o seu desempenho são fatores que contribuem para uma melhor aprendizagem dos alunos. Mas a verdade é que as lutas que um professor enfrenta são diversas: “monitorizar o raciocínio matemático dos alunos, discernir o valor matemático das abordagens alternativas, selecionar resoluções para a discussão em toda a turma e organizar essa discussão para que os alunos construam significados” (Swan, 2018, p. 5).

Na planificação de uma aula que segue uma abordagem de ensino exploratória, o professor deve propor tarefas “suscetíveis de promover a construção de conceitos, a formulação de estratégias de resolução de problemas, conjeturas e justificações” (Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020, p. 10) bem como promover um ambiente de sala de aula em que os alunos participam abertamente dando a conhecer as suas estratégias e raciocínios, nomeadamente nos momentos de discussão coletiva (Ponte, Quaresma, & Mata-Pereira, 2020). Os autores defendem a aula em três fases como ideal quando se adota a estratégia de ensino-aprendizagem exploratória. Este é um modelo de aula que contribui fortemente para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Uma aula deste tipo divide-se em três momentos: lançamento da tarefa, trabalho autónomo dos alunos e discussão coletiva e síntese. Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) esclarecem que "numa só aula, qualquer que seja a sua duração, podem existir um ou mais ciclos com este tipo de sequência de trabalho" (p. 9).

Na fase de lançamento da tarefa, o professor propõe a tarefa à turma e faz uma breve introdução oral. Nesta fase pode também acontecer a leitura do enunciado da tarefa para esclarecer eventuais dúvidas de compreensão. Esta é uma oportunidade para o professor motivar os alunos para a realização da tarefa. Contudo, o momento não deve ser muito extenso para não retirar tempo à investigação ou exploração propriamente dita. Na fase de trabalho autónomo dos alunos, em que estes desenvolvem o trabalho individualmente ou em grupo, o professor deve circular pela sala a fim de conhecer as dificuldades e estratégias que apresentam. É também neste momento que surgem as primeiras conjeturas e generalizações e, eventualmente, as respetivas justificações.

Por último, mas não menos importante, o momento em que a tarefa é discutida coletivamente. A importância destes momentos no ensino-aprendizagem da Matemática é enfatizada por diversos autores. Para Ponte (2005) "os momentos de reflexão, discussão e análise crítica posteriores à realização de uma atividade prática assumem um papel fundamental" (p. 15). Esta fase constitui uma oportunidade de os alunos apresentarem à turma e ao professor as suas resoluções, perspetivas, dificuldades e estratégias. Um momento de confronto que deve ser gerido convenientemente pelo professor, condutor da discussão:

> (...) os alunos apresentam o seu trabalho, relatam as suas conjeturas e conclusões, apresentam as suas justificações e questionam-se uns aos outros e o professor aproveita para procurar que se clarifiquem os conceitos e procedimentos, se avalie o valor dos argumentos e se estabeleçam conexões dentro e fora da Matemática. (Ponte, 2005, p. 16)

Estes momentos de discussão com toda a turma permitem aos alunos construir um conhecimento efetivo dos conceitos trabalhados e ao professor apelar e incitar a justificação das conjeturas formuladas. Para o concretizar o professor terá de encaminhar os alunos neste sentido, colocando questões como "Como fizeste? Porque consideras que o que fizeste está certo? O que acontecerá se...? Isto verificar-se-á sempre?" (Ponte & Sousa, 2010, p. 32). Ao proporcionar este momento, o professor contribui para a promoção e desenvolvimento do raciocínio matemático dos seus alunos, não descurando a criação de "um ambiente em que os alunos se sintam confortáveis a partilhar os seus argumentos matemáticos e a criticar, de forma produtiva, os argumentos dos outros (NCTM, 2009, p. 11).

A discussão coletiva é também uma oportunidade de desenvolver outra capacidade transversal ao ensino da Matemática, a comunicação. Os alunos podem exprimir oralmente as suas ideias matemáticas e opinar sobre as ideias dos outros. Por vezes, pode não ser fácil que os alunos o façam sendo necessária a intervenção do professor para garantir que as ideias são respeitas e não julgadas. O professor é um moderador da discussão pois orienta a sequência de participações com base na análise prévia que fez no momento de trabalho autónomo dos alunos e tem liberdade para prolongar a segunda fase da aula ou iniciar a discussão sempre que considerar necessário. Isto porque, a certa altura da segunda fase, o trabalho autónomo pode já não estar a ser produtivo ou, pelo contrário, os alunos revelam bastante entusiasmo na tarefa e pedem mais tempo para a terminar. Apesar de planificado antecipadamente o tempo dedicado a cada momento da aula, o professor deve ser flexível à sua alteração caso o considere pertinente (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2006). No artigo *Práticas Profissionais dos professores de Matemática*, Ponte e Serrazina (2000) pouco concluem relativamente ao padrão da comunicação nas salas de aula de Matemática do nosso país:

> Aparentemente, existe já um número razoável de professores cujos alunos participam de modo expressivo no discurso da aula, intervindo, explicando e argumentando as suas ideias. Ao lado destes, parecem haver muitos outros casos em que prevalece o discurso do professor e onde o aluno tem uma margem reduzida para expor as suas ideias. (p. 14)

Além do importante papel do professor, é fundamental que a turma consiga participar adequadamente pois deles também depende a produtividade deste momento:

"aprender a conduzir discussões é não só uma tarefa do professor, mas também uma aprendizagem coletiva a realizar por cada turma" (Ponte, 2005, p. 16).

A discussão coletiva numa aula em três fases é bastante valorizada por Ponte (2005):

> Uma estratégia de ensino-aprendizagem exploratória valorizará mais os momentos de reflexão e discussão com toda a turma, tendo por base o trabalho prático já previamente desenvolvido, como momentos por excelência para a sistematização de conceitos, a formalização e o estabelecimento de conexões matemáticas. (p. 15)

2.4.3. Fluência processual e compreensão concetual

A fluência processual e a compreensão concetual constituem duas finalidades do ensino da matemática a par com a competência estratégia e a consciência crítica da qualidade do raciocínio matemático (Swan, 2017).

Swan (2017) define fluência processual como a "capacidade de executar rapidamente, eficazmente e com confiança procedimentos matemáticos, sem esforço de raciocínio" (p. 2). Apesar de ser encarada muitas vezes como algo negativo e prejudicial para a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos na tarefa, Cockroft (1982) considera que "o bom domínio das rotinas liberta uma atenção consciente para focar os aspetos da tarefa que são novidades ou que são problemáticos" (p. 239). Na figura que se segue (Figura 2) apresenta-se a sugestão de Swan (2017) para a prática de procedimentos e notação.

Tipos de tarefa	**Exemplos de atividades de aula**
Prática de procedimentos e notação	• Praticar através de exercícios e estudos que proporcionem repetição do uso de procedimentos bem definidos. • Usar e memorizar de modo sistemático termos e notações.

Figura 2 - "Organização da conceção de tarefas para o conhecimento factual e a fluência processual" (Swan, 2017, p. 2)

O aluno compreende um conceito quando elabora "descrições, classificações, representações, justificações e análises estruturais" (Swan, 2017, p. 2) que o envolvam. Várias investigações revelam que as discussões coletivas que envolvem a análise de diferentes perspetivas e estratégias promovem muito mais a compreensão concetual do que métodos de descoberta individual.

A compreensão de um conceito pelo aluno e o desenvolvimento do seu raciocínio são aspetos que estão relacionados. Um não se verifica sem que o outro ocorra. De acordo com o NCTM (2009) a compreensão concetual exige, inicialmente, uma fluência processual que evolui quando os alunos entendem a validade dos procedimentos, como e quando podem ser utilizados e conseguem interpretar criticamente os resultados. Para atingir esta finalidade, Swan (2017) sugere tarefas que levem os alunos a "observar, classificar e definir estruturas e objetos matemáticos", utilizar e interpretar diversos tipos representações, "justificar e/ou demonstrar conjeturas, conexões e procedimentos" e, "identificar e analisar" estruturas (Figura 3).

Tipos de tarefas	Exemplos de atividades de sala de aula
Observar, classificar e definir estruturas e objetos matemáticos.	• Observar e manipular objetos mentais. • Identificar, descrever atributos e ordenar objetos de acordo com esses atributos. • Criar e identificar exemplos e contraexemplos. • Criar e testar definições.
Representar e traduzir entre conceitos matemáticos e as suas representações.	• Interpretar várias representações, incluindo diagramas, gráficos e fórmulas. • Traduzir entre representações e estudar o que varia ente elas.
Justificar e/ ou demonstrar conjeturas, conexões e procedimentos matemáticos.	• Elaborar e testar conjeturas e procedimentos matemáticos. • Identificar exemplos que apoiem ou refutem uma conjetura. • Criar argumentos que expliquem por que razões as conjeturas e os procedimentos são ou não válidos.
Identificar e analisar a estrutura dentro de situações.	• Estudar e modificar situações matemáticas. • Explorar relações entre variáveis. • Comparar e relacionar estruturas matemáticas.

Figura 3 - "Organização da conceção de tarefas para a compreensão conceptual" (Swan, 2017, p. 3)

Swan (2018) refere como um dos princípios da conceção das tarefas e realização das aulas, o seguinte: "Focar diretamente quaisquer obstáculos concetuais específicos ou processos (Bell, 1993) e criar surpresa, tensão e conflito cognitivo que possam ser abordados através de discussão" (p. 1).

Capítulo 3: A unidade didática

Inicio este terceiro capítulo com uma breve análise do contexto escolar em que se realizou a intervenção, em particular analiso a escola e a turma envolvidas. De seguida, apresento a ancoragem do tópico em estudo, tendo por base os documentos Programa e Metas Curriculares e Aprendizagens Essenciais para a Matemática A do 11.º Ano. Faço menção à planificação prevista para a lecionação das aulas, aos conceitos matemáticos relacionados com o tópico, aos recursos e estratégias de ensino mobilizados, integrando uma breve descrição das tarefas propostas.

3.1. Contexto escolar

3.1.1. A Escola

A Escola Básica e Secundária Alfredo da Silva, onde realizei a minha intervenção, foi o primeiro estabelecimento de Ensino Secundário do Concelho do Barreiro. Inaugurada a 12 de janeiro de 1947, com a designação de Escola Industrial e Comercial Alfredo da Silva, o seu propósito era formar trabalhadores qualificados que pudessem ser integrados nas novas indústrias que se estavam a instalar e a desenvolver na cidade, terminada a Segunda Guerra Mundial. Anos mais tarde, a oferta da escola alterou-se substituindo os cursos existentes pelos atuais Cursos Tecnológicos, Cursos Gerais e Ensino Recorrente. Atualmente, leciona 2.º e 3.º ciclos do Ensino Básico e Ensino Secundário, cursos de diferente índole, desde os Cientifico-Humanísticos, Ciências e Tecnologias, Ciências Socioeconómicas e Línguas e Humanidades, a cursos Profissionais e cursos de Educação e Formação.

O nome atribuído à escola, Alfredo da Silva, é o nome do homem que foi considerado um dos maiores industriais e financeiros portugueses. Pelo seu grande contributo para o progresso da cidade, a população da altura manifestou desejo de que a escola tivesse o seu nome.

O edifício foi restaurado pela última vez nos anos de 1995 e 1996. Carece atualmente de um novo restauro, de modo a proporcionar melhores condições aos estudantes que a frequentam, bem como aos professores e demais funcionários da escola. O edifício é grande, mas encontra-se envelhecido e danificado. As salas de aula estão equipadas com um quadro de giz, um projetor e um computador com ligação à Internet.

3.1.2. A Turma

A turma na qual realizarei a intervenção é uma das duas turmas existentes na escola, de 11.º ano, do curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias. É constituída por 22 alunos, 12 raparigas e 10 rapazes. Os alunos da turma têm 16 e 17 anos de idade. Uma das alunas é angolana e, devido a dificuldades na obtenção de visto para viajar para Portugal, começou a assistir às aulas apenas durante o mês de janeiro. Um outro aluno, vindo do Brasil, iniciou as aulas apenas no mês de março. A turma tem um aluno de 12.º ano que está a repetir a disciplina de Matemática A de 11.º ano.

A carga horária semanal da disciplina de Matemática A é de 150 minutos, sendo as aulas lecionadas em blocos de 50 minutos. A turma é constituída por alunos que são bastante participativos e interventivos enquanto outros manifestam-se um menor número de vezes e mais timidamente. O número de alunos mais participativos é significativamente reduzido em comparação com o número de alunos mais fechados e menos participativos. Como é comum a tantas outras turmas e alunos, existem dias em que se encontram mais agitados cuja intervenção da professora tem de ser mais assertiva e outros em que se revelam mais desmotivados. Em termos de aproveitamento, a turma é homogénea no sentido em que não se verificam níveis excelentes nem extremamente baixos. Desde o início que consegui estabelecer um bom relacionamento com os alunos, para que não se sentissem inibidos com a minha presença em todas as suas aulas e para que pudessem ser o mais naturais possível durante a realização da minha intervenção. As classificações são atribuídas numa escola de 0 a 20 valores. No primeiro período do ano letivo, em que a turma era ainda constituída apenas por vinte alunos, a média na disciplina foi de 10,45 valores. Sendo que seis alunos obtiveram uma classificação negativas. No segundo período, com mais dois elementos na turma, registou-se uma média de 11,55 na disciplina, verificando-se um aumento face ao período anterior. Também o número de alunos com classificação negativa reduziu de seis para apenas dois. De seguida, apresento um gráfico (Figura 1) com as classificações finais obtidas pela turma na disciplina de Matemática A, no final do primeiro e segundo períodos do corrente ano letivo.

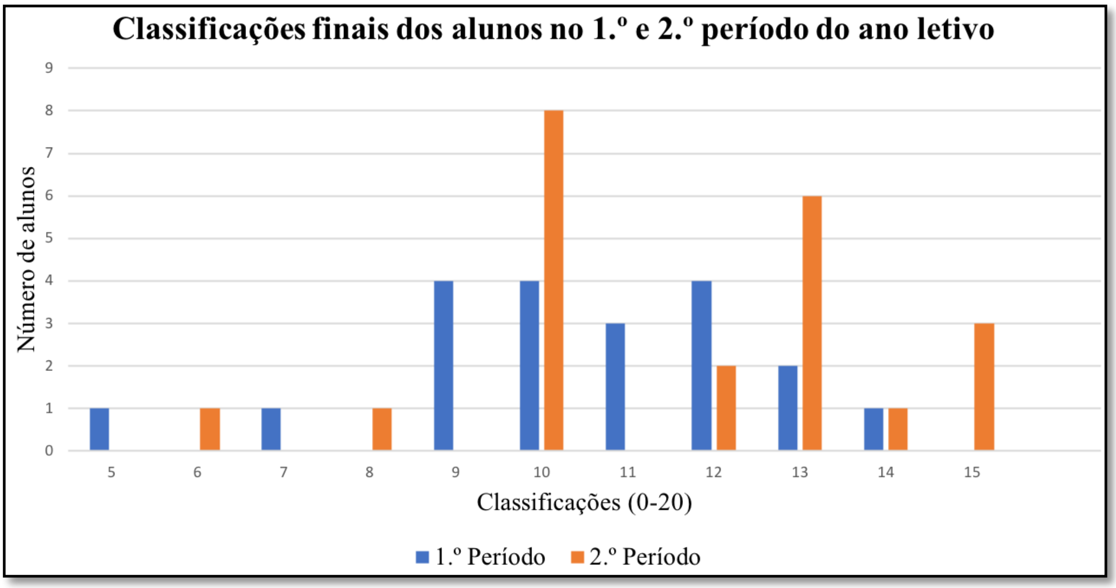


Figura 4 - Classificação final dos alunos no 1.º e 2.º período do ano letivo

Durante o ano letivo, a turma participou no projeto definido na escola, intitulado "Alfredo vai ao mercado". Os alunos organizaram-se em grupos para, todos os sábados, no período da manhã, se deslocarem ao Mercado Municipal da cidade do Barreiro, a fim de expor os seus trabalhos e realizar apresentações relacionadas com cada uma das disciplinas ou efetuar vendas cujo valor contribuiria para a viagem a realizar no final do ano letivo. Infelizmente, o projeto não se realizou até ao final do ano letivo, tendo sido suspenso assim que foi decretado o fecho das escolas em consequência do estado de emergência vivido no país.

3.2. Ancoragem da unidade didática no Programa

A prática letiva sobre a qual se debruçará o estudo será desenvolvida no tópico Assíntotas ao gráfico de uma função. Segundo o Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário (MEC, 2014), este tópico deve ser abordado no 11.º ano de escolaridade. Integra o domínio Funções Reais de Variável Real (FRVR11) dando seguimento aos tópicos Limites segundo Heine de Funções Reais de Variável real e Continuidade de Funções.

Até ao início do estudo das assíntotas, para além de estudados os domínios de Trigonometria e Geometria Analítica, os alunos terão, no domínio Sucessões, efetivado o primeiro contacto com a noção de limite: "é exigida em situações muito simples, a justificação da convergência de certas sucessões recorrendo diretamente à definição. (...) É também desenvolvida, de forma bastante completa, a álgebra dos limites, incluindo uma análise das situações ditas indeterminadas” (Ministério da Educação e Ciência, 2014, p. 15). De seguida, no domínio Funções Reais de Variável Real os alunos estudaram a noção de limite segundo Heine, tendo por base o que antes fora trabalhado em Sucessões. Surge ainda neste domínio a noção de continuidade de uma função e, como aplicação da noção de limite, o estudo das assíntotas ao gráfico de uma função, tópico em análise no estudo.

Para a aprendizagem deste tópico de ensino, é necessária a mobilização de conhecimentos do domínio de generalidades sobre funções bem como dos tópicos Limites segundo Heine de funções reais de variável real e continuidade de funções. Assim, para a aprendizagem do conceito de assíntota ao gráfico de uma função é essencial:

- Saber determinar o domínio de funções reais de variável real e identificar os pontos aderentes a esse domínio;
- Saber estudar a continuidade de funções reais de variável real;
- Conhecer o conceito de limite segundo Heine e saber determinar o limite de uma função num ponto aderente ao respetivo domínio, limites laterais e limites no infinito.

A planificação anual para o 11.º ano na escola, prevê 10 aulas de 50 minutos para a lecionação do tópico Assíntotas ao gráfico de uma função. Nesta planificação e, por sugestão da orientadora cooperante, uma vez que se prevê o estudo das assíntotas ao gráfico de funções racionais, dedicaram-se duas aulas ao estudo destas funções, nomeadamente ao estudo do domínio, zeros, sinal. A minha proposta de estrutura da intervenção encontra-se sintetizada na Tabela 1.

Tabela 1 - Estrutura da intervenção e natureza das tarefas

DATA	AULA	CONTEÚDO	NATUREZA DAS TAREFAS
10 de março	1	Determinação de assíntotas verticais ao gráfico de uma função.	Realização da Tarefa 1: tarefa de natureza exploratória

11 de março	2	Determinação de assíntotas não verticais ao gráfico de uma função.	Realização da Tarefa 2: tarefa de natureza exploratória
11 de março	3	Questões de consolidação.	Realização das tarefas 94.3. e 94.4. da página 69 do manual e tarefa 95 da página 70: exercícios e problemas.
13 de março	4	Estudo do domínio, zeros e sinal de funções racionais.	Realização das tarefas 18.2. e 19.2. da página 31 do manual: exercícios e problemas.
13 de março	5	Resoluções de inequações que envolvem frações algébricas.	Realização das tarefas 19.5. e 20. da página 31 do manual: exercícios e problemas.
17 de março	6	Estudo das assíntotas ao gráfico de funções racionais.	Realização da Tarefa 3: tarefa de natureza exploratória.
18 de março	7	Questões de consolidação envolvendo determinação das assíntotas e da representação gráfica de funções racionais definidas em $\mathbb{R}\backslash\{c\}$ por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$.	Realização da Tarefa 4: tarefa de natureza exploratória.
18 de março	8	Questões de consolidação envolvendo determinação das assíntotas e da representação gráfica de funções racionais definidas em $\mathbb{R}\backslash\{c\}$ por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$.	Realização das tarefas 129 e 132 da página 87 do manual: exercícios e problemas.

20 de março	9	Esclarecimento de dúvidas.	
20 de março	10	Teste escrito individual.	

3.3. Conceitos matemáticos envolvidos

Ao longo da lecionação do tópico de ensino foram utilizadas várias definições e proposições relacionadas com Assíntotas ao gráfico de uma função. Nesta secção começo por apresentar os conhecimentos prévios que são essenciais para uma melhor compreensão e aprendizagem do tópico. Em seguida, os novos conceitos matemáticos que serão abordados na intervenção. Realço o facto de, também se ter recordado o domínio, zeros e sinal de funções racionais bem como a resolução de equações e inequações racionais. Este é um conhecimento que acompanha os alunos desde o 10.º ano de escolaridade e que a professora cooperante considerou importante relembrar uma vez que se vai estudar uma nova propriedade destas funções: as assíntotas ao seu gráfico. As definições e proposições relevantes neste tópico estão de acordo com Ferreira (1995) e também com Andrade, Pereira e Pimenta (2016), manual adotado pela Escola para a disciplina de Matemática A do 11.º ano de escolaridade.

3.3.1. Conhecimentos prévios

De acordo com o Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico, "dados conjuntos A e B, fica definida uma «função (ou aplicação) de A em B», quando a cada elemento x de A se associa um elemento único de B representado por $f(x)$" (MEC, 2013, p. 54). O conjunto A é chamado domínio de f.

<u>Definição de ponto aderente a um conjunto de números reais:</u>

"Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e um ponto $a \in \mathbb{R}$, a diz-se um ponto aderente a A quando existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim x_n = a$" (Andrade, Pereira & Pimenta, 2016, p. 88).

"Pode também definir-se ponto aderente a um conjunto recorrendo à noção de vizinhança de um ponto:

a é ponto aderente a um conjunto A se qualquer vizinhança de a intersetar A $(V_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0)$" (Andrade, Pereira & Pimenta, 2016, p. 8).

Definição de limite de uma função num ponto (segundo Heine):

"Sejam f uma função real de variável real de domínio D_f, $a \in \mathbb{R}$ um ponto aderente a D_f e $b \in \mathbb{R}$. Diz-se que b é o limite de $f(x)$ quando x tende para a quando, para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a, se tem $\lim f(x_n) = b$. Nas mesmas condições diz-se também que $f(x)$ tende para b quando x tende para a e utiliza-se a notação de $\lim_{x \to a} f(x) = b$" (Andrade, Pereira & Pimenta, 2016, p. 88).

.

Definição de limite infinito:

"Sejam f uma função real de variável real de domínio D_f, $a \in \mathbb{R}$ um ponto aderente a D_f. Diz-se que $+\infty$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a quando para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a, se tem $\lim f(x_n) = +\infty$. Neste caso, escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$" (Andrade, Pereira & Pimenta, 2016, p. 89).

"Sejam f uma função real de variável real de domínio D_f, $a \in \mathbb{R}$ um ponto aderente a D_f. Diz-se que $-\infty$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a quando para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a, se tem $\lim f(x_n) = -\infty$. Neste caso, escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$" (Andrade, Pereira & Pimenta, 2016, p. 89).

Definição de limite lateral:

"Dada uma função real de variável real f e um ponto, $a \in \mathbb{R}$ um ponto aderente a D_f, o valor $b \in \mathbb{R}$ tal que $b = \lim_{x \to a} f|_{]-\infty,a[}(x)$ diz-se o limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores inferiores a a. Representa-se por $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e também pode ser designado por limite de $f(x)$ à esquerda de a. Diz-se que $f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores inferiores a a" (Andrade, Pereira & Pimenta, 2016, p. 88).

"Dada uma função real de variável real f e um ponto, $a \in \mathbb{R}$ um ponto aderente a D_f, o valor $b \in \mathbb{R}$ tal que $b = \lim_{x \to a} f|_{]a,+\infty[}(x)$ diz-se o limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores superiores a a. Representa-se por $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e também pode ser designado por limite de $f(x)$ à direita de a. Diz-se que $f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores superiores a a" (Andrade, Pereira & Pimenta, 2016, p. 88).

Função contínua num ponto:

"Dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio:

- Se $\lim_{x \to a} f(x)$ existir então é igual a $f(a)$
- A função f é contínua em a quando $\lim_{x \to a} f(x)$ existe" (Andrade, Pereira & Pimenta, 2016, p. 91).

Função contínua num subconjunto do respetivo domínio:

"Dada uma função real de variável real f de domínio D_f, a função f é contínua no conjunto $A \subset D_f$, quando f é contínua em todos os pontos de A. Quando a função f é contínua em todos os pontos de D_f diz-se, simplesmente, contínua" (Andrade, Pereira & Pimenta, 2016, p. 91).

3.3.2. Conhecimentos introduzidos no tópico

Definição de assíntota vertical:

"No caso de se verificar pelo menos uma das hipóteses,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

diz-se que a reta de equação $x = a$ é uma assíntota (vertical) do gráfico de f" (Ferreira, 1995, p. 444)

Definição de assíntota à direita (ou quando $x \to +\infty$):

"Seja f uma função cujo domínio D contenha um intervalo não majorado (um intervalo da forma $I =]a, +\infty[$, com $a < +\infty$) e r uma reta, de equação $y = mx + p$. Diz-se que r é assíntota do gráfico de f, à direita ou quando $x \to +\infty$, se tende para zero quando $x \to +\infty$ a distância do ponto $P(x, f(x))$ à reta" (Ferreira, 1995, p. 442). Prova-se que "para que r seja assíntota do gráfico da função f (à direita), é necessário e suficiente que $\lim_{x \to +\infty,} [f(x) - mx - p] = 0$" (Ferreira, 1995, p. 442).

Definição de assíntota à esquerda (ou quando $x \to -\infty$):

"A definição de assíntota à esquerda, ou quando $x \to -\infty$, em referência ao gráfico de uma função f (cujo domínio contenha um intervalo não minorado) pode ser dada em termos inteiramente análogos: a reta de equação $y = mx + p$ é assíntota de f à esquerda, sse $\lim_{x \to -\infty,} [f(x) - mx - p] = 0$" (Ferreira, 1995, p. 444).

Teorema:

"Para que o gráfico da função f (cujo domínio contém um intervalo não majorado) tenha uma assíntota à direita é necessário e suficiente que existam e sejam finitos os limites:

a) $\lim_{x \to +\infty,} \frac{f(x)}{x}$ (que designamos por m)

b) $\lim_{x \to +\infty,} [f(x) - mx]$

Verificadas estas condições, e designando por p o limite considerado em b), a assíntota (à direita) é única e tem a equação $y = mx + p$" (Ferreira, 1995, p. 443).

Uma assíntota horizontal ou oblíqua diz-se assíntota à direita ou à esquerda consoante o limite é calculado quando $x \to +\infty$ ou quando $x \to -\infty$, respetivamente.

A ideia de assíntota oblíqua é que a distância entre um ponto que percorre o gráfico da função e uma reta que corresponde à sua assíntota é um infinitésimo quando $x \to \pm\infty$. Qualitativamente, para x muito grande (assíntota à direita), o gráfico da função e da reta "praticamente não se distinguem".

Uma questão que surge com frequência é se o gráfico de uma função e uma sua assíntota se intersetam. Pode considerar-se a função $f(x) = \frac{cosx}{x}$.

Tem-se que $\lim_{x \to +\infty,} f(x) = 0$ e, por isso, $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função em $+\infty$. Contudo, o gráfico de f interseta a reta $y = 0$ uma infinidade de vezes.

Apesar disto, estes casos são pouco considerados no 11.º ano de escolaridade. De facto, os alunos identificam apenas que uma assíntota ao gráfico de uma função é uma reta cada vez mais próxima do gráfico da função, mas que, aparentemente, nunca se intersetam.

Os três tipos de assíntotas são apresentados em separado no manual, sendo cada um deles apoiado com exemplos e tarefas. As definições e proposições que constituem o manual vão ao encontro ao apresentado anteriormente como surge em Ferreira (1995). Andrade, Pereira e Pimenta (2016) completaram o estudo das assíntotas ao gráfico de uma função com mais algumas definições e "regras" que consideram ser úteis neste tópico e que apresento de seguida.

Processo para determinar assíntotas verticais ao gráfico de uma função:

"A determinação de assíntotas verticais ao gráfico de uma função definida analiticamente por ser feita seguindo os seguintes passos:

1. Determinar o domínio da função;
2. Determinar os pontos de descontinuidade;
3. Determinar os limites laterais da função em todos os pontos de aderentes ao domínio da função que não lhe pertençam, e em todos os pontos de descontinuidade;
4. Se algum dos limites laterais calculado, num ponto a, for infinito, então a reta de equação $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função"

(Andrade, Pereira & Pimenta, 2016, p. 65)

Definição de função racional:

"Função racional é uma função real de variável real dada por uma expressão da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios ($Q(x)$ não nulo)" (Andrade, Pereira & Pimenta, 2016, p. 90).

Domínio de uma função racional

O domínio de uma função racional é o conjunto "$D = \{x \in \mathbb{R}: Q(x) \neq 0\}$" (Andrade, Pereira & Pimenta, 2016, p. 90).

Zeros de uma função racional:

Os zeros de uma função racional definida por $\frac{P(x)}{Q(x)}$ determinam-se da seguinte forma: "$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0 \wedge Q(x) \neq 0$" (Andrade, Pereira & Pimenta, 2016, p. 80).

Sinal de uma função racional:

"O estudo do sinal de uma função racional definida por $\frac{P(x)}{Q(x)}$ pode ser feito recorrendo a um quadro de sinal. Na primeira linha do quadro, dispomos os zeros de cada um dos polinómios $P(x)$ e $Q(x)$. Numa das linhas indicamos o sinal de $P(x)$ e, noutra, o sinal de $Q(x)$. Na última linha do quadro, indicamos o sinal de $\frac{P(x)}{Q(x)}$, recorrendo à regra dos sinais da divisão de números" (Andrade, Pereira & Pimenta, 2016, p. 29)

Continuidade de uma função racional:

"Qualquer função racional é contínua pois é o quociente de duas funções polinomiais" (Andrade, Pereira & Pimenta, 2016, p. 56).

"Uma função polinomial tem limite em todos os pontos do seu domínio, pelo que é contínua" (Andrade, Pereira & Pimenta, 2016, p. 56).

Determinação de assíntotas de funções racionais definidas em $\mathbb{R}\backslash\{c\}$ por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$:

"O gráfico de uma função definida por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ $(b \neq 0)$ tem como assíntotas as retas de equações:

- $x = c$ (assíntota vertical)
- $y = a$ (assíntota horizontal)"

(Andrade, Pereira & Pimenta, 2016, p. 77)

3.4. Recursos e estratégias de ensino

Para a lecionação do tópico de ensino segui as orientações dos documentos Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário (MEC, 2014) e Aprendizagens Essenciais (DGE, 2018). O documento Aprendizagens Essenciais refere o seguinte objetivo para este tópico: "Reconhecer, interpretar e representar graficamente funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, referindo o conceito intuitivo de assíntota e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação" (DGE, 2018, p. 7). Em conjunto com orientadora cooperante decidi combinar os dois documentos e fazer um estudo das assíntotas ao gráfico de qualquer função real de variável real e não apenas de funções racionais, tendo em conta as metas de aprendizagem definidas pelo documento Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário (MEC, 2014):

"3.1. Identificar, dado um referencial cartesiano, uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, a reta de equação $x = a$ «assíntota vertical ao gráfico de f» quando pelo menos um dos limites laterais no ponto a for infinito.

3.2. Designar, dada uma função real de variável real f e um referencial cartesiano, a reta de equação $y = mx + b$ $(m, b \in \mathbb{R})$ por «assíntota ao gráfico de f em $+\infty$» (respetivamente, por «assíntota ao gráfico de f em $-\infty$») se $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) -$

$(mx+b)\big) = 0$ (respetivamente se $\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(mx+b)\big) = 0$) e designá-la, quando $m = 0$, por «assíntota horizontal».

3.3. Provar, dada uma função real de variável real f, que a condição $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = m$ (respetivamente, $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = m$) é necessária (mas não suficiente) para que exista uma reta de declive m que seja assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ (respetivamente em $-\infty$).” (p. 38)

Por sugestão da professora cooperante, dedicaram-se duas aulas à revisão de conteúdos relacionados com funções racionais. Este conteúdo é importante na compreensão dos novos conceitos e, por esse motivo, nessas duas aulas fez-se o estudo do domínio, zeros e sinal de funções racionais e, também, a resolução de equações e inequações envolvendo funções deste tipo.

Sendo também um dos objetivos do relatório considerar uma capacidade transversal a toda a Matemática, indicada no Programa e Metas curriculares da disciplina, toda a abordagem e estratégias desenvolvidas foram pensadas tendo em conta também as indicações deste documento: “O raciocínio matemático é por excelência o raciocínio hipotético-dedutivo, embora o raciocínio indutivo desempenha também um papel fundamental na atividade matemática, uma vez que reside à formulação de conjeturas” (MEC, 2014, p. 6).

A abordagem informal vai também ao encontro da abordagem curricular adotada, maioritariamente, a abordagem exploratória. O que se pretende ao longo da intervenção é uma abordagem intermédia (Ponte, 2005) com momentos de exposição e sistematização conduzidos por mim e momentos de trabalho mais focados na atividade dos alunos.

Dentro da abordagem exploratória, que valoriza o trabalho autónomo dos alunos e eles têm oportunidade para construir o seu próprio conhecimento, as tarefas têm um papel muito importante e seguem também esta perspetiva de construção e desenvolvimento do conhecimento e do raciocínio matemático dos alunos. Incentivam a exploração de forma autónoma, de modo a que sejam os próprios alunos a construir a sua aprendizagem e, ao mesmo tempo, desenvolvam as suas capacidades argumentativas. Para além disso, é sempre importante analisar a forma como os alunos trabalham nestas tarefas para que tirem o melhor proveito delas. Nesta intervenção foram usadas tarefas de natureza diferente, onde se destacam as tarefas exploratórias, através das quais os alunos tiveram oportunidade para descobrir os conceitos de assíntotas vertical, horizontal e oblíqua.

Uma característica particular destas tarefas é proporcionar oportunidade para os alunos explorarem casos específicos dos diferentes tipos de assíntotas. O que lhes permitia, formular conjeturas com base em exemplos concretos e depois fazer generalizações. Como refere o Programa e Metas curriculares da disciplina, “Os alunos devem ser capazes de estabelecer conjeturas, em alguns casos, após a análise de um conjunto de situações particulares nomeadamente pela exploração das potencialidades dos recursos tecnológicos” (MEC, 2014, p. 7).

Da abordagem exploratória faz ainda parte a dinâmica da aula onde se valoriza a voz dos alunos e que se reflete na aula em 3 fases que é, frequentemente, apontada como um modelo de aula propício ao desenvolvimento do raciocínio matemático (Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020). Aulas deste tipo, pensadas para momentos desta intervenção, dividem-se em três momentos:

1. Lançamento da tarefa, momento em que é apresentada a tarefa e dinamizada uma pequena discussão para promover o envolvimento dos alunos;

2. Trabalho autónomo dos alunos realizado em pares;

3. Discussão coletiva, com apresentação e confronto de resoluções e síntese final.

Desta dinâmica da aula destaca-se a discussão coletiva das tarefas onde os alunos têm oportunidade para aperfeiçoar a sua comunicação matemática, mas também argumentar, elaborar conjeturas, fazer generalizações e justificações, sendo particularmente importante para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Os momentos de trabalho autónomo dos alunos incentivam a partilha de ideias, de estratégias, de raciocínios entre pares. Os momentos de discussão conduzidos pelo professor em que se pode pedir ao aluno que explique um problema por palavras suas e questionar de forma a incentivar o seu pensamento.

Nas aulas presencialmente lecionadas, os alunos realizaram todo o trabalho a pares. Os pares são formados de acordo com a forma como se distribuem na planta de sala de aula, ou seja, trabalham com o colega que está sentado ao seu lado. É também desta forma que os alunos estão habituados a trabalhar nas tarefas, mesmo com a professora cooperante. Optei pelo trabalho a pares pois é sabido que é um contributo fundamental no desenvolvimento de diversas capacidades em termos de aprendizagem, mas também capacidades pessoais e de relacionamento entre pares. A aprendizagem cooperativa permite que os alunos sejam confrontados com diferentes estratégias de resolução de uma mesma tarefa, que desenvolvam a forma como se expressam, como justificam as suas ideais e argumentam as suas opções, podendo até contribuir para a compreensão de conceitos ainda não suficientemente clarificados. Fernandes (1997) afirma:

> Quando se promove trabalho cooperativo os alunos trabalham sempre em conjunto num mesmo problema, em vez de separadamente em componentes da tarefa. Desta maneira cria-se um ambiente rico em descobertas mútuas, feedback recíproco e um partilhar de ideias frequente. (p. 564)

Nas aulas realizadas à distância, o trabalho autónomo foi individual. Contudo, não posso garantir que não tenha existido algum contributo ou auxílio de terceiros nas tarefas propostas. Em particular, para a realização do teste individual foi combinado com os alunos que o enunciado seria enviado no dia 24 de março pelas 10:58, e teriam uma hora e trinta minutos para resolver e enviar a resolução para o e-mail da professora. Estas orientações específicas quanto à realização do teste escrito aconteceram para tentar minimizar a possível influência de terceiros.

Um recurso tecnológico que assumiu um importante papel no decorrer das aulas foi a calculadora gráfica. Uma vez que permite obter facilmente representações gráficas, os alunos usufruíram das suas vantagens podendo dedicar mais tempo à formulação de conjeturas, procura de justificações e elaboração de generalizações. A calculadora gráfica "é útil para uma abordagem experimental ao estudo das funções, desde que devidamente controlada e acompanhada com uma análise crítica da validade de conjeturas que essas experiências possam induzir" (MEC, 2014, p. 29). Também Arcavi (2003) aponta contributos da visualização para o processo de aprendizagem. Em particular, a visualização de uma função recorrendo à calculadora gráfica permite ilustrar resultados essencialmente simbólicos (e, em alguns casos, provar esses resultados), esclarecer ideias erradas ou detetar erros do cálculo algébrico, constituindo também uma forma de ajudar a recuperar fundamentos concetuais que podem ser facilmente contornados por soluções mais formais para os problemas

(Henriques & Ponte, 2014). A calculadora gráfica assume-se como uma ferramenta que potencia o ensino-aprendizagem da Matemática, que permite construção e análise de conjeturas, investigação e exploração de diferentes representações, tendo sempre em conta as suas limitações.

Para atingir o objetivo do estudo e dar respostas às questões de investigação foram propostas tarefas de natureza diversificada, onde se destacam as tarefas exploratórias que incluem oportunidades para os alunos desenvolverem o raciocínio matemático. As aulas incluem momentos que favorecem a comunicação entre os alunos e entre alunos e professor permitindo analisar se aproveitam essas oportunidades e que processos de raciocínio efetuam, bem como as aprendizagens e dificuldades manifestadas na sua realização.

3.5. Descrição das tarefas propostas

3.5.1. Tarefa 1

A primeira tarefa proposta aos alunos é constituída por duas questões (questão 1 e questão 2). Esta tarefa é utilizada para descobrir um novo conceito relacionada com funções reais de variável real. O objetivo da primeira tarefa é introduzir a noção de assíntota ao gráfico de uma função. Para isso, apresenta-se uma função que relaciona o coeficiente de ampliação de uma certa lupa com a distância (em decímetros) a que a lupa se encontra do objeto. Espera-se, no final da tarefa e, após discussão das questões, que os alunos sejam capazes de generalizar o processo para determinar as assíntotas verticais ao gráfico de qualquer função e consigam interpretar o significado de uma assíntota graficamente.

A questão 1.1. trata-se apenas de um exercício de cálculo. Ao longo das alíneas, é pedido o cálculo do coeficiente de ampliação para valores de distância cada vez maiores. Pretende-se que os alunos se comecem a aperceber que, à medida que aumenta a distância da lupa ao objeto, também aumenta o coeficiente de ampliação. Na questão 1.2. é pedida a representação gráfica da função para que os alunos comecem também a ter uma perceção da representação gráfica de uma função que admite assíntotas ao seu gráfico. A questão 1.3. pede o cálculo do valor de $\lim_{d \to 5^-} A(d)$. A distância a tender para 5, por valores inferiores a 5, é propositada para que identifiquem o 5 como um valor que não pertence ao domínio da função, mas com um significado importante. Esta última questão permite várias estratégias de resolução, dando oportunidade aos alunos de utilizar a representação gráfica da função ou de recorrer ao cálculo analítico do limite, como tantas vezes fizeram em aulas anteriores. A resolução desta tarefa pretendia levar os alunos, no momento de discussão coletiva, a formular a seguinte conjetura: "O gráfico da função aproxima-se cada vez mais da reta de equação, mas aparentemente nunca se vão intersetar". Após esta compreensão, é possível introduzir o conceito de assíntota ao gráfico da função com a afirmação: "A reta de equação diz-se uma assíntota ao gráfico de A". A discussão de quando é que uma determinada reta é assíntota fica para mais tarde, mas a questão 1 permite levantar algumas suspeitas sobre o processo.

A questão 2 apresenta uma função real de variável real muito utilizada para introduzir o conceito pretendido. Esta função, em particular, admite assíntotas verticais e horizontais. Contudo, nesta tarefa pretende-se apenas o estudo da sua assíntota vertical. Novamente, pede-se a representação gráfica da função (questão 2.1.) para que os alunos consigam perceber que o gráfico de uma função permite levantar suspeitas relativamente à existência de assíntotas. A questão 2.2. pede para indicar o domínio da função porque o domínio é também um aspeto chave na determinação de assíntotas verticais. Em seguida, questão 2.3., é feita a análise do comportamento da função à direita e à esquerda de um valor importante, o zero. À semelhança do que acontece na questão 1.3., alguns alunos podem limitar-se à análise do gráfico da função para responder à questão enquanto outros podem decidir-se pelo cálculo analítico dos limites. Posteriormente, no momento de discussão da questão 2, é possível que os alunos formulem as seguintes conjeturas: "O gráfico da função aproxima-se cada vez mais da reta de equação $x = 0$ mas aparentemente nunca se intersetam" e "$x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função". Além disso, pode ocorrer também uma justificação para o facto de $x = 0$ ser assíntota ao gráfico da função: "pois $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$".

3.5.2. Tarefa 2

Com a segunda tarefa pretende-se dar continuidade ao estudo das assíntotas ao gráfico de uma função. É constituída por duas questões que têm como objetivo o estudo das assíntotas não verticais (a primeira questão trata assíntotas horizontais e a segunda questão trata assíntotas oblíquas).

A primeira questão retoma a função $f(x) = \frac{1}{\mathrm{x}}$ já estudada na primeira tarefa. Desta vez, pretende-se o estudo do comportamento dessa função no infinito. Os alunos já fizeram a sua representação gráfica na segunda questão da tarefa 1. Podem retomá-la para responder a esta questão ou reconhecer que se pretende o cálculo dos limites quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ e optar por fazê-lo analiticamente. Desta questão espera-se que os alunos formulem conjeturas, apresentem justificações e efetuem generalizações, considerando a análise deste caso particular. Os alunos poderão formular a conjetura "$x = 0$ é assíntota (horizontal) ao gráfico da função" e justificando que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Além disso, espera-se que consigam generalizar o processo para determinar assíntotas horizontais ao gráfico de uma função, em particular no final da discussão coletiva desta tarefa. A generalização do processo prevê-se neste momento pois a questão seguinte já prevê a exploração de um caso particular de assíntotas oblíquas.

A segunda questão da tarefa fornece a expressão algébrica de uma função e a equação reduzida de uma reta r. Inicialmente pede-se para estudar o comportamento da função quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$. Nesta questão não é pedida representação gráfica, ao contrário do que aconteceu nas questões anteriores. Isto permite observar se os alunos reconhecem a análise da representação gráfica como uma estratégia de resolução ou como uma forma de conhecer melhor a função com a qual estão a trabalhar. Nesta questão os alunos têm também oportunidade para formular a conjetura: "A função f não tem assíntotas horizontais". Espera-se que a questão 2.2. levante algumas dificuldades aos alunos. Alguns alunos irão recorrer à calculadora gráfica e introduzir as expressões da função e da reta ou a expressão do enunciado $f(x) - (x - 1)$. Contudo, poderão não conseguir compreender e interpretar o resultado. O cálculo analítico de $f(x) - (x - 1)$ poderá também ser uma opção, mas inconclusiva. Com esta questão pretende-se que os alunos reconheçam graficamente que, quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$, a distância entre o ponto $(x, f(x))$ e a reta é cada vez menor. Caso contrário, podem recorrer também ao cálculo analítico dos limites para obter a mesma conclusão. Esta questão tem como objetivo a formulação de conjeturas como "$y = x - 1$ é uma assíntota (oblíqua) ao gráfico da função" bem como uma justificação para tal afirmação: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-1)] = 0$. A partir da função analisada na questão, o objetivo é que os alunos consigam generalizar o processo para verificar se uma determinada reta é ou não assíntota oblíqua ao gráfico de uma função: "$y = mx + b$ $(m, b \in \mathbb{R})$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ (respetivamente, assíntota ao gráfico de f em $-\infty$) se $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(mx+b)\big) = 0$ (respetivamente, se $\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(mx+b)\big) = 0$). Além disso, a tarefa permite levantar questões como: "E como se determina a assíntota oblíqua conhecendo apenas a função?".

3.5.3. Tarefas do manual

Para a terceira aula da intervenção foram planeadas as tarefas 94.3 e 94.4 da página 69 do manual para proporcionar oportunidade para a consolidação dos conhecimentos adquiridos sobre assíntotas ao gráfico de uma função. As tarefas 94.3. e 94.4. envolvem a determinação de assíntotas verticais e horizontais ao gráfico de uma função. Na 94.3 trata-se de uma função racional, em que os alunos podem optar por efetuar a divisão de polinómios para a escrever na forma $a + \frac{b}{x-c}$ $(a,\ b$ e $c \in \mathbb{R})$ e determinar a equação das assíntotas pedidas ou podem optar pelo cálculo dos limites que permitem a determinação destas retas. Na tarefa 94.4. a função encontra-se definida por ramos. Os alunos terão de estudar a continuidade da função para identificar uma possível assíntota vertical e, para descobrir as assíntotas horizontais, terão de identificar qual dos ramos utilizam para calcular os limites para $+\infty$ e $-\infty$. Selecionei estas tarefas para trabalhar a fluência processual dos alunos (que também é um aspeto importante a desenvolver) e persistir na compreensão do conceito de assíntota ao gráfico de uma função. A tarefa 95 é um pouco diferente de todas as trabalhadas até ao momento pelos alunos. Esta envolve o estudo das assíntotas ao gráfico de uma função sem que se saiba a sua expressão algébrica. É fornecida informação relativamente a dois limites no infinito e os alunos terão de as analisar cuidadosamente de forma a determinar as equações das assíntotas. A cada uma destas tarefas segue-se uma discussão coletiva para que se possam conhecer resoluções e justificações para o que foi realizado durante o trabalho autónomo. Em particular, esperam-se justificações para as retas que foram determinadas como assíntotas verticais e horizontais.

As tarefas pensadas para a quarta aula da intervenção, foram as tarefas 18.2 e 19.2 da página 31 do manual. Estas tarefas foram selecionadas com o objetivo de rever o estudo do domínio, dos zeros e sinal de funções racionais. Estes conteúdos já tinham sido estudados no 10.º ano, mas a pedido da orientadora cooperante uma vez que se iam estudar as assíntotas ao gráfico de funções racionais foi feita uma revisão destes conteúdos. A tarefa 18.2 pretende exatamente a determinação do domínio, zeros e sinal de uma função racional (através do quadro de sinais) enquanto a tarefa 19.2. corresponde à resolução de equações envolvendo este tipo de funções.

Para a aula cinco foram planeadas as tarefas 19.4 e 20 da página 31 do manual do aluno. Esta aula é dedicada à resolução de inequações que envolvem funções racionais. Na tarefa 19.4, depois de manipular a expressão até obter a inequação $\frac{x^2-2x-8}{x^2+3x} \geq 0$, os alunos devem determinar os zeros do numerador e denominador e construir o quadro de sinais para identificar em que intervalos ou conjunto de intervalos a função é menor ou igual a zero. A tarefa 20 é um problema que envolve o estudo de uma função racional. O aluno deve conseguir identificar a sequência de passos que deve efetuar para a concretização do problema. Estes passos envolvem a determinação das coordenadas de pontos (alguns deles que pertencem a um dos eixos coordenados), a determinação do ponto onde duas funções se intersetam (resolução de uma equação envolvendo funções racionais) e cálculo da área de um trapézio.

Apesar de se pretender a utilização de processos analíticos para responder às tarefas, a utilização da calculadora gráfica também foi incentivada por constituir um recurso que pode ser utilizado sempre que se pretende visualizar o gráfico da função e confirmar os resultados obtidos analiticamente.

3.5.4. Tarefa 3

A tarefa 3, planeada para a sexta aula, tem como objetivo o estudo das assíntotas ao gráfico de funções racionas da forma $a + \frac{b}{x-c}$, $a,\ b$ e $c\ \in \mathbb{R}$. Ao longo das três questões da tarefa constrói-se progressivamente uma função deste tipo. Começa-se por determinar as assíntotas de duas funções da forma $\frac{b}{x}$: as funções $f_1(x) = \frac{2}{x}$ e $f_2(x) = -\frac{3}{x}$. Na questão 2 estudam-se as assíntotas de duas funções da forma $\frac{b}{x-c}$: as funções $f_3(x) = \frac{2}{x+1}$ e $f_4(x) = -\frac{3}{x-1}$. Por fim, na questão 3 estudam-se duas funções escritas na forma $a + \frac{b}{x-c}$: $f_5(x) = 1 + \frac{1}{x}$ e $f_6(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x+3}$. No final do trabalho autónomo dedicado a cada uma das questões é realizado um momento de discussão onde se pretende que os alunos expliquem como procederam para estudar as assíntotas ao gráfico da função (com recurso à calculadora gráfica ou calculando limites) e identifiquem as semelhanças e diferenças existentes entre as duas funções estudadas. No final da resolução da tarefa, espera-se que os alunos consigam elaborar a seguinte generalização: "Dada uma função racional da forma $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, $x = c$ é uma assíntota vertical e $y = a$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função".

3.5.5. Tarefa 4

A quarta tarefa, planeada para a sétima aula, é constituída por duas questões de escolha múltipla e três questões de resposta aberta e tem como principal objetivo a consolidação de conteúdos relacionados com o tópico Assíntotas ao gráfico de uma função. Envolve o estudo das assíntotas ao gráfico de funções e, em particular, de funções racionais, bem como a resolução de inequações racionais.

Na primeira questão o objetivo é relacionar uma função racional do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ com o seu gráfico e respetivas assíntotas. A segunda questão, apresenta uma função racional cuja expressão não é da forma $a + \frac{b}{x-c}$. Os alunos devem encontrar uma estratégia de resolução que pode passar por recorrer à calculadora gráfica para representar a função ou escrever a função racional na forma $a + \frac{b}{x-c}$ para que lhe seja mais simples a identificação das assíntotas. Na terceira tarefa deve utilizar-se apenas a representação gráfica apresentada para responder às questões. A questão 3.1.2. trata-se de uma inequação racional cujo conjunto-solução deve ser encontrado apenas recorrendo ao gráfico apresentado. Neste caso, não é apresentada a expressão algébrica da função. Devem ser os alunos a defini-la tendo em conta as informações que têm sobre contradomínio e assíntotas. Na quarta questão pretende-se que o aluno seja capaz de escrever a expressão algébrica de uma função racional tendo em conta a sua representação gráfica e as informações que tem sobre as suas assintotas verticais e não verticais. A quinta e última questão da tarefa, começa com a resolução de uma inequação racional. Desta vez, os alunos podem recorrer ao gráfico apenas com o intuito de verificar o conjunto-solução obtido depois de aplicado o processo analítico. Pretende-se assim que conheça o processo de resolução de inequações racionais e reconheça a importância da calculadora gráfica no auxílio da representação e para confirmar o resultado obtido. A questão 5.2. é possivelmente a mais elaborada de toda a tarefa. O aluno terá de mobilizar conhecimentos anteriores relacionados com funções e áreas de figuras planas. Além disso, terá de ser capaz de conceber uma estratégia de resolução que passará, certamente, pela execução de várias etapas até conseguir obter a área pretendida.

3.5.6. Teste escrito individual

A primeira questão pretendia avaliar conhecimentos ainda relativos ao tópico Continuidade de uma função, apesar de relacionar-se também com o tópico em estudo. A segunda questão indica uma reta oblíqua como sendo assíntota ao gráfico da função. Os alunos devem selecionar, das quatro opções dadas, a opção correta e apresentar uma justificação para a sua escolha. A resposta a esta questão exige a escrita da equação da reta com as coordenadas dos dois pontos fornecidos e os alunos têm de relembrar como se verifica, recorrendo ao cálculo do limite, que uma determinada reta é assíntota ao gráfico da função. A terceira questão dava aos alunos informações sobre o domínio e continuidade da função, e apresentava o resultado de alguns limites. Estas informações permitiam escrever as equações das retas que são assíntotas ao gráfico da função. Na quarta questão pede-se que os alunos façam o estudo das assíntotas ao gráfico de uma função racional. Por fim, a quinta e última questão do teste escrito requer não só a determinação das assíntotas ao gráfico da função, mas também dos pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados e o cálculo da área de um polígono. Nesta questão é necessário delinear uma estratégia de resolução constituída por várias etapas de resolução que culminaram na obtenção da área da figura pedida.

3.6. Avaliação das aprendizagens

Como forma de avaliar as aprendizagens realizadas pelos alunos, utilizei a avaliação formativa e sumativa. No que concerne à avaliação formativa, esta "incide preferencialmente sobre os processos desenvolvidos pelos alunos face às tarefas propostas" (DGE, 1994). Procurei em cada uma das tarefas propostas, analisar diferentes estratégias de resolução concebidas pelos alunos, bem como verificar se conseguiam concretizar com sucesso a tarefa independentemente da estratégia utilizada. Além disso, no espaço de tempo dedicado ao trabalho autónomo, procurei apoiá-los nas suas dificuldades dando *feedback oral* relativamente ao trabalho realizado. Também os momentos dedicados à discussão coletiva das tarefas, permitiram avaliar os conhecimentos desenvolvidos pelos alunos, as estratégias que conseguiram desenvolver, as conclusões que alcançaram e as dificuldades com que se depararam. Sendo o principal objetivo da avaliação apoiar a aprendizagem dos alunos (Black & Wiliam, 2006), procurei encaminhá-los na formulação de conjeturas e elaboração de justificações e generalizações que lhes dá oportunidade de pensar sobre os assuntos, de organizar ideias, de construir conhecimento. Recorri ao questionamento oral nos momentos de discussão e também nos momentos em que os alunos elaboravam as suas resoluções. O questionamento oral permite-me avaliar aquilo que os alunos aprenderam e as, eventuais conceções erradas ou dificuldades com que ainda se deparam. A utilização frequente desta forma de avaliação deve-se também ao tipo de ensino-aprendizagem que adotei na maioria das aulas do tópico: ensino-aprendizagem exploratório. Relativamente à avaliação sumativa, foi aplicado um teste escrito no fim de trabalhados todos os conteúdos previstos para o tópico. O teste era constituído por cinco questões, uma especificamente relacionada com continuidade de funções e as restantes relacionadas com assíntotas ao gráfico de uma função. Este teste veio no seguimento da estratégia adotada pela professora cooperante de, no final de cada tópico, realizar um teste escrito com um número reduzido de questões para que os alunos possam ter consciência das suas aprendizagens e tomar consciência do quão mais se devem empenhar para uma aprendizagem significativa.

3.7. Descrição das aulas lecionadas

Para a intervenção no âmbito da prática de ensino supervisionada foram planeadas dez aulas com cerca de 50 minutos cada uma. O fecho das escolas, em consequência do estado de emergência vivido no país, afetou a planificação elaborada para a intervenção a decorrer entre os dias 10 e 20 de março. Estando a escola encerrada a partir de dia 16 de março, apenas foi possível efetuar cinco aulas presenciais. Acontece que, nas aulas quatro e cinco (dia 13 de março) os alunos já tinham conhecimento desta decisão e o momento foi de grande agitação o que tornou impossível do cumprimento da planificação prevista. O período que se seguiu à decisão de fecho das escolas, levantou muitas dificuldades e desafios a todos. A

Direção da escola demorou muito tempo a dar indicações sobre o futuro, o que afetou bastante a concretização do planeamento feito para a intervenção. Contudo, realizaram-se ainda mais duas aulas nos moldes de ensino à distância. Houve ainda oportunidade para recolha de resoluções individuais da tarefa quatro e para a realização de um teste escrito à distância. Mais adiante, descrevo mais pormenorizadamente de que forma foi feita esta recolha de dados.

A aula um (Anexo 07), realizada no dia dez de março, tinha como objetivo o estudo das assíntotas verticais ao gráfico de uma função. Para isso, foi proposta a tarefa 1, constituída por duas questões. Iniciei a aula com uma breve indicação aos alunos do que se iria fazer: estudar novos conceitos relacionados com funções reais de variável real e utilizar conceitos que têm vindo a trabalhar em aulas anteriores. Distribui a tarefa e pedi que resolvessem primeiro a questão 1 para depois ser discutida em grupo-turma. A tarefa foi realizada pelos alunos a pares, conforme estão dispostos na planta de sala de aula. Deu-se início à resolução da tarefa e, no decorrer do trabalho autónomo, circulei pela sala para analisar as estratégias de resolução utilizadas e auxiliar na superação de eventuais dificuldades. Realizou-se nesta aula a tarefa 1 e a discussão coletiva da mesma, uma aula em que os alunos iniciaram o estudo do conceito de assíntota ao gráfico de uma função e tiveram oportunidade de formular conjeturas, generalizações e justificações nas várias situações com que se depararam. Os alunos iniciaram a resolução da questão 1, à qual se seguiu um momento de discussão coletiva. Durante o trabalho autónomo na questão circulei pela sala o que me permitiu analisar cuidadosamente cada uma das estratégias que estavam a ser desenvolvidas pelos alunos e selecionar aquelas que pudessem constituir uma discussão coletiva interessante e promotora de aprendizagem. Os alunos realizaram o trabalho de forma empenhada, participando bastante na elaboração de conjeturas. Na questão seguinte, a questão 2, os alunos também se revelaram bastante empenhados, participativos, transmitindo sempre as suas dificuldades. A discussão da questão 2 permitiu tirar conclusões semelhantes às que resultaram da questão 1 e, no momento de síntese final da aula, houve oportunidade de generalizar o processo utilizado para determinar assíntotas verticais. Este foi talvez o momento mais complicado da aula. Foi necessário fazer bastantes questões relativamente aos processos efetuados em cada uma das questões, rever as questões e os resultados obtidos, para que se conseguisse definir o processo que permite determinar as assíntotas verticais ao gráfico de uma função. Os momentos de discussão foram sempre momentos mais demorados do que o previsto e este não foi exceção. Contudo, parece-me que foi produtivo pois conseguiram-se até generalizações totalmente imprevistas. Durante toda a aula, recorreu-se muito à calculadora gráfica como uma ferramenta facilitadora da compreensão do conceito, ao permitir visualizar funções e levantar suspeitas sobre as assíntotas ao seu gráfico.

A aula dois (Anexo 08), realizada no dia onze de março, teve como objetivo o estudo das assíntotas horizontais e oblíquas ao gráfico de uma função. Para isso, foi proposta a tarefa 2 constituída por duas questões. Iniciei a aula pedindo aos alunos que relembrassem o que se trabalhou na aula anterior, e que indicassem o processo para determinar assíntotas verticais ao gráfico de uma função. Também esta aula foi estruturada em ciclos de três fases cada um. Isto é, distribuí a tarefa 2 aos alunos fazendo uma breve introdução dos objetivos pretendidos para a aula e pedi que resolvessem a questão um para depois ser discutida. Os alunos realizaram todas as questões a pares. Durante este momento analisei o trabalho realizado por cada um dos pares. Os alunos realizaram a questão 1 sem dificuldades significativas até porque o estudo desta função já tinha sido feito na tarefa 1, mas quanto às assíntotas verticais ao seu gráfico. Os alunos conseguiram generalizar aquilo que já conheciam sobre assíntotas verticais, ao caso das assíntotas horizontais. No momento de discussão da questão 1 previa-se ir mais longe e procurar determinar um processo que permitisse determinar as assíntotas horizontais ao gráfico de qualquer função. Para concretizar esta generalização foi também necessário encaminhar os alunos numa análise muito cuidadosa do caso estudado na questão 1.

Iniciado o trabalho autónomo na questão 2, verifiquei a existência de mais dificuldades do que na questão 1. Em particular, os alunos revelaram alguma dificuldade na interpretação da questão 2.2. e na apresentação de uma resposta. Esta questão acabou por ser mais demorada, mas não afetou o cumprimento da planificação elaborada para a aula. Estava previsto os alunos trabalharem autonomamente na questão 2.1. e efetuar uma discussão a seguir, aplicando o mesmo processo para as questões 2.2. e 2.3. Como os alunos se revelaram empenhados e foram colocando bastantes questões no trabalho autónomo, optei por alterar o previsto no plano de aula e realizar a discussão apenas depois de realizada toda a questão 2. Esta foi uma boa opção, pois os alunos tiveram oportunidade de desenvolver o seu trabalho de forma contínua e sem interrupções que, em demasia, também poderiam ser pouco produtivas. A discussão coletiva da questão 2 promoveu uma análise das questões 2.1, 2.2. e 2.3, conhecendo as várias estratégias utilizadas pelos alunos. Surgiram estratégias que recorriam à calculadora gráfica, mas também a métodos analíticos. Sendo o objetivo da tarefa, a generalização do processo de determinação de assíntotas oblíquas ao gráfico de uma função questionei os alunos neste sentido. Como já tinham estudado dois casos particulares de assíntotas (verticais e horizontais) foi até mais fácil compreender que nesta questão surge uma reta com propriedades semelhantes às já estudadas. Conseguiu-se, no final deste momento, a generalização deste processo, tendo os alunos reconhecido que o limite da diferença entre a função e a reta que se diz assíntota deve ser zero, quando x tende para mais infinito e/ou para menos infinito.

A aula três (Anexo 09), também realizada no dia onze de março, iniciou com a seguinte questão: "Se conhecer a expressão algébrica de uma função e souber que existe uma assíntota não vertical, como posso determinar a sua equação?". Esta questão surge porque, na realização da questão 2 da tarefa 2, os alunos verificaram que a equação de uma determinada reta é assíntota oblíqua a uma função. Mas, se não conhecerem a equação da assíntota como a podem determinar? Fiz uma breve exposição sobre este conteúdo sempre com a participação ativa dos alunos. Propus o estudo da função $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x}$ (função da questão 2) quanto à existência de assíntotas oblíquas. Os alunos já sabem que esta função admite uma assíntota oblíqua ao seu gráfico ($y = x - 1$) em mais infinito e em menos infinito, mas o objetivo era agir como se não o soubessem e desenvolver um processo para determinar esta equação. Os alunos reconheceram que, se a assíntota existe e sendo uma reta, terá uma equação do tipo $y = mx + b$ que fica definida se determinar o seu declive (m) e a ordenada na origem (b). Depois de identificarem este aspeto, informei os alunos de que $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ e, se este limite der um número real, avançamos para o cálculo da ordenada na origem $b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx)$. Os alunos efetuaram autonomamente o cálculo de cada um dos limites, tendo obtido precisamente a reta que já sabiam ser a assíntota, $y = x - 1$.

Depois deste momento, foram propostas duas tarefas do manual, 94.3 e 94.4 da página 69, para trabalhar a fluência processual na determinação de assíntotas, mas também continuar a desenvolver a compreensão do conceito. Apesar de estarem previstas três tarefas no plano de aula, comecei por propor aos alunos a resolução de duas com um momento de discussão. Estava também prevista a realização da tarefa 95 da página 71, mas o tempo que se dedicou às tarefas anteriores não o permitiu.

As aulas quatro e cinco (Anexos 10 e 11), realizadas no dia 13 de março, foram pautadas pela ansiedade dos alunos com a notícia de encerramento das escolas. Assim, houve necessidade de tranquilizar os alunos e antecipar algumas formas de funcionamento à distância, pelo que, não foi possível realizar o trabalho que estava planeado para esta aula. Por sugestão da professora cooperante, foi pedido aos estudantes que realizassem em casa as tarefas 18.2, 19.2, 19.4 e 20 da página 31 do manual, previstas para esta aula.

Realizadas estas aulas, seguiram-se duas sessões de ensino a distância. Importa mais uma vez frisar que a situação anómala vivida não foi favorável ao ensino-aprendizagem dos alunos. A sensação de incerteza e instabilidade face aos acontecimentos prejudicou o empenho e motivação da turma. Por ser também um período que antecedeu a interrupção letiva da Páscoa, os alunos pareciam sentir-se já de férias o que revelou algum desinteresse também pelas aulas ainda lecionadas.

Para a primeira sessão de ensino à distância foi proposta, com antecedência, a realização das tarefas 18.2, 19.2, 19.4 e 20 da página 31 do manual. Estas tarefas estavam previstas para a quarta e quinta aulas da intervenção cujo objetivo era o estudo do domínio, zeros e sinal de funções racionais, e a resolução de equações e inequações racionais. Na aula síncrona realizei uma breve explicação dessas tarefas e esclareci as dúvidas que surgiram. Os alunos revelaram-se muito à vontade na realização das tarefas e manifestaram dúvidas apenas em cálculos pontuais.

A tarefa 3 estava prevista para sexta aula (Anexo 12) da intervenção. Esta tarefa, que previa o estudo das assíntotas ao gráfico de uma função racional foi, por sugestão da professora cooperante, enviada por e-mail aos alunos, juntamente com a sua correção.

Para a segunda aula síncrona os alunos resolveram previamente a tarefa 4. Esta tarefa estava prevista para a aula número sete (Anexo 13) da intervenção. Uma vez que esta acabou por não se realizar, a tarefa foi enviada aos alunos para que a resolvessem e enviassem a resolução via e-mail. Desta forma, pude proceder à sua análise, identificando aprendizagens demonstradas e as dificuldades apresentadas, bem como os processos de raciocínio utilizados pelos alunos. Na aula síncrona foi apenas efetuada a correção das questões oralmente e esclarecidas as dificuldades.

Realizaram-se apenas duas sessões síncronas, na semana de 16 a 20 de março. Na semana seguinte, dia 24 de março, realizou-se o teste escrito individual previsto para as aulas nove e dez (Anexo 15). Na impossibilidade de realizar o teste presencialmente, foi combinado com os alunos que o teste seria enviado para a sua conta de e-mail às 10:58 do dia vinte e quatro de março e teriam uma hora e trinta minutos para o resolver e enviar para o e-mail da professora cooperante a respetiva resolução. Não seriam aceites resoluções enviadas fora do horário indicado. Todos os alunos resolveram o teste escrito.

Capítulo 4: Métodos e procedimentos de recolha de dados

Neste capítulo apresento as opções metodológicas do estudo, justificando o facto de a considerar uma investigação de natureza qualitativa e interpretativa. Depois de identificar os seus participantes, explico os métodos e instrumentos utilizados para a recolha de dados e, posteriormente, os métodos adotados para a análise dos mesmos. Por fim, faço uma breve referência a algumas questões de natureza ética.

4.1. Opções Metodológicas

O presente estudo "O raciocínio matemático dos alunos do 11.º ano de escolaridade no tópico Assíntotas ao gráfico de uma função" tem como objetivo compreender a forma como os alunos do 11.º ano desenvolvem a sua aprendizagem sobre Assíntotas ao gráfico de uma função, com especial atenção aos processos de raciocínio mobilizados num contexto de abordagem exploratória. Para tal, segui uma abordagem de investigação qualitativa e interpretativa. Do ponto de vista de Aires (2015), é uma investigação qualitativa porque considera perspetivas teóricas distintas e recorre a várias técnicas que permitem a recolha de dados no campo. Segue o paradigma interpretativo pois são avaliadas as aprendizagens e dificuldades manifestadas pelos alunos nas diversas tarefas realizadas e também os processos de raciocínio matemático por estes utilizados. Pretende-se aprofundar o estudo dos processos de raciocínio dos alunos, em particular neste tópico, e poder até contribuir com informações e dados pertinentes que se revelem fundamentais no seu ensino-aprendizagem.

Uma investigação qualitativa e interpretativa deve contemplar as cinco características definidas por Bogdan e Biklen (1994): 1) "Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal" (p. 47). Durante o período de aulas presenciais acompanhei os alunos nas atividades desenvolvidas em sala de aula, recolhendo informações importantes resultantes destas atividades. Deste modo, a investigação realizou-se em ambiente de sala de aula sendo eu a principal responsável pela recolha dos dados que suportam a investigação; 2) "A investigação qualitativa é descritiva" (p. 48). Os dados recolhidos são descritivos e incluem notas de campo efetuadas todas as aulas, reflexões das aulas por mim lecionadas, resoluções dos alunos, gravação vídeo das aulas lecionadas; 3) "Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos" (p. 49). A investigação integra elementos que pretendem compreender, promover e estimular o desenvolvimento dos processos de raciocínio matemático dos alunos e não, apenas os bons resultados escolares. De facto, o objetivo é que os alunos desenvolvam as suas capacidades de conjeturar, generalizar e justificar através de tarefas e discussões coletivas realizadas com esse propósito. A conclusão do meu estudo não se baseará somente nas classificações obtidas no teste escrito individual. É muito mais fundamental compreender a forma como os alunos desenvolvem a sua aprendizagem no tópico com especial atenção aos processos de raciocínio mobilizados no contexto de abordagem exploratória; 4) "Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva" (p. 50). O estudo pretende criar novo conhecimento e novas conclusões acerca dos processos de raciocínio dos alunos do 11.º ano de escolaridade na aprendizagem do tópico Assíntotas ao gráfico de uma função. São poucas as perspetivas teóricas e estudos existentes sobre o desenvolvimento do raciocínio matemático neste tópico e, por esse motivo, espero contribuir para a criação de dados relevantes provenientes do terreno e que relacionem uma capacidade que é transversal ao ensino da Matemática com um conteúdo particular da Matemática; 5) "O significado é de importância vital na abordagem qualitativa" (p. 51). Todos os alunos foram contributos essenciais da investigação. A sua presença e participação nas interações realizadas, as suas resoluções, as suas perspetivas foram sempre tidas como importantes no sentido de compreender a forma como raciocinavam e construíam o seu conhecimento.

Como mencionado em Aires (2015, p. 16) o processo de investigação qualitativa é "uma trajetória que vai do campo ao texto e do texto ao leitor", constituindo um processo de investigação que evolui ao longo de seis níveis: investigador, paradigmas de investigação, estratégias e métodos de investigação nos paradigmas qualitativos, técnicas de recolha de materiais empíricos, métodos de análise de informação e avaliação e conclusão do projeto de pesquisa (Aires, 2015, p. 17). Durante este período desenvolvi o papel de professora, mas também de investigadora. Lecionei o tópico de ensino Assíntotas ao gráfico de uma função tendo sido responsável pela planificação das aulas, pela escolha das tarefas propostas e pela avaliação dos alunos, de modo a concretizar os objetivos do estudo. No papel de investigadora, fui responsável pela recolha dos dados que me permitiram dar resposta às questões de investigação a que inicialmente me propus.

4.2. Participantes no estudo

Sendo este um estudo de natureza qualitativa, os seus participantes devem permitir "obter a máxima informação possível para a fundamentação do projeto de pesquisa" (Aires, 2015, p. 22). A diversidade de dados permite "contribuir para o processo de compreensão dos fenómenos analisados" (Aires, 2015, p. 58). Decidi, portanto, considerar como participantes no estudo os vinte e dois alunos que constituem a turma do 11.ºB do curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias, da Escola Básica e Secundária Alfredo da Silva, no Barreiro.

4.3. Métodos e instrumentos de recolha de dados

O presente estudo segue uma abordagem metodológica de natureza qualitativa e interpretativa. Neste sentido, a recolha de dados recorre a vários processos característicos de um estudo desta natureza. Segunda Aires (2015) "a seleção das técnicas a utilizar durante o processo de pesquisa constitui uma etapa que o investigador não pode minimizar, pois destas depende a concretização dos objetivos do trabalho de campo" (p. 24). As técnicas de recolha de dados utilizadas foram a observação participante, com registo vídeo das aulas lecionadas e a elaboração do diário de bordo, e a recolha documental com os documentos que constituem as resoluções dos alunos de algumas das tarefas propostas. A observação é, na opinião de Aires (2015), uma técnica direta de recolha de dados que permite a "recolha de informação, de modo sistemático, através do contacto direto com situações específicas" (p. 24/25). A observação é, neste caso, científica pois pretende "obter uma visão mais completa da realidade" (Aires, 2015, p. 25) e participante pois, enquanto investigadora, introduzi-me no ambiente da sala de aula para um melhor conhecimento das circunstâncias e uma recolha de dados de acordo com os objetivos pretendidos. Os registos elaborados por mim durante e no final de cada uma das intervenções, constituíram uma forma de apontar aspetos importantes a ter em conta em momentos de discussão coletiva, situações em que os alunos evidenciaram processos de raciocínio, aspetos positivos e aspetos menos conseguidos da intervenção.

Colás (1992) identificou três etapas características da observação: seleção de cenários, recolha de informação e tratamento de protocolos recolhidos. No cenário escolhido, a sala de aula, foram ainda efetuados registos vídeo que, posteriormente, foram alvo de uma análise detalhada. As técnicas indiretas de recolha de dados constituem um complemento aos métodos diretos, essenciais para "“validar” e contrastar a informação obtida, reconstituir acontecimentos importantes para as pessoas ou grupos sociais em análise, gerar hipóteses, etc" (Aires, 2015, p. 42). As produções escritas elaboradas pelos alunos em cada uma das tarefas, concretizadas individualmente ou em grupo, constituíram fontes de investigação e a sua análise permitiu completar as informações recolhidas em sala de aula. As resoluções dos alunos assumiram uma maior importância no período de aulas que se realizou à distância, permitindo ter noção das aprendizagens realizadas e dificuldades apresentadas e da forma como os processos de raciocínio são utilizados nas tarefas.

Para responder às questões de investigação, foram planificadas aulas que envolviam tarefas com questões específicas que levam os alunos a utilizar os diferentes processos de raciocínio e com momentos de discussão coletiva que permitiam também identificar a utilização de diversos processos. As produções escritas dos alunos nestas tarefas foram essenciais para responder a todas as questões, ainda mais numa situação de ensino à distância.

Tabela 2 - Questões do estudo e fontes de dados

Fonte de dados	Questão 1	Questão 2	Questão 3
Observação direta – notas e reflexão aula a aula	X	X	X
Recolha documental - Produções escritas dos alunos nas tarefas, em aulas selecionadas	X	X	X
Registo vídeo de momentos selecionados	X	X	X

4.4. Métodos de análise de dados

Depois de efetuada a recolha de dados, "a análise da informação constitui um aspeto-chave e também problemático do processo de investigação" (Aires, 2015, p. 43). Esta análise consiste, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), no "trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta de aspetos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros" (p. 205). Seguindo as orientações do autor, comecei por efetuar uma transcrição das gravações das aulas lecionadas presencialmente, o que me permitiu uma análise mais clara dos acontecimentos e dos dados que poderiam ser interessantes para o trabalho em causa. Realizada uma análise preliminar dos diálogos resultantes das aulas, analisei cada uma das tarefas realizadas. Em cada uma delas, considerei as aprendizagens conseguidas e as dificuldades que foram sendo evidenciadas por cada grupo ou aluno. Procurei ainda identificar processos de raciocínio utilizados pelos alunos nas diversas questões propostas.

Organizados os dados resultantes de cada tarefa, e para dar respostas às questões de investigação estruturei a análise de dados da seguinte forma: aprendizagens realizadas e dificuldades manifestadas pelos alunos (em cada uma das tarefas realizadas) e, raciocínio na aprendizagem das assíntotas (formulação de conjeturas, generalização e justificação). No final, procurei analisar em que medida as aprendizagens desenvolvidas pelos alunos correspondem aos objetivos de aprendizagem previamente estabelecidos, quais as dificuldades manifestadas na aprendizagem do tópico e quais os processos de raciocínio mobilizados num contexto de abordagem exploratória.

4.5. Questões éticas

Sendo esta uma investigação que envolve sujeitos, menores, não se podem descurar determinados aspetos de natureza ética. Bogdan & Biklen (1994) consideram duas questões éticas essenciais na realização de investigações que envolvem pessoas: "o consentimento informado e a proteção dos sujeitos contra qualquer espécie de danos" (p. 75). No início do ano letivo foi pedido a cada Encarregado de Educação consentimento para a participação no estudo e para o registo de imagens. Assim sendo, as gravações vídeo efetuadas foram apenas vistas e analisadas por mim para a concretização da análise de dados no âmbito da realização da prática de ensino supervisionada. Durante todo o processo são protegidas as identidades e os dados pessoais dos participantes no estudo. Deste modo, os nomes dos alunos referidos ao longo do relatório são fictícios de modo a salvaguardar o anonimato.

Capítulo 5: Análise dos dados

No presente capítulo descrevo e analiso os dados recolhidos durante a lecionação da unidade didática. Serão analisadas as aprendizagens realizadas e as dificuldades observadas na realização das tarefas bem como os processos de raciocínio matemático mobilizados pelos alunos no estudo das assíntotas verticais, horizontais e oblíquas em particular nas suas resoluções e nos momentos de discussão coletiva.

5.1. Aprendizagens realizadas e dificuldades apresentadas pelos alunos

a) Tarefa 1

A Tarefa 1 (Anexo 01) foi proposta na primeira aula da intervenção cujo objetivo era a aprendizagem do conceito de assíntotas verticais ao gráfico de uma função. É constituída por duas questões que pretendem fazer a introdução do conceito de assíntota ao gráfico de uma função e, em particular, de assíntota vertical. Os alunos realizaram-na a pares, tendo existido um momento de discussão coletiva para cada uma das questões e uma síntese no final desta aula.

Questão 1 (Figura 5).

1. O coeficiente de ampliação $\boldsymbol{A}$ de uma certa lupa é dado, em função da distância $\boldsymbol{d}$ (em decímetros) da lupa ao objeto por:

$$A(d) = \frac{5}{5-d}, d \in [0,5[$$

1.1. Determina o coeficiente de ampliação quando a lâmpada se encontra a uma distância do objeto de:

a) $\mathbf{0}\ \boldsymbol{dm}$

b) $\mathbf{4,5}\ \boldsymbol{dm}$

c) $\mathbf{4,9}\ \boldsymbol{dm}$

d) $\mathbf{4,9999}\ \boldsymbol{dm}$

1.2. Com o auxílio da calculadora, representa o gráfico da função A.

1.3. Determina o valor de $\lim\limits_{d \to 5^-} A(d)$ e interpreta o resultado obtido.

Figura 5 - Enunciado da questão 1 da Tarefa 1

A questão 1.1. envolvia apenas o cálculo de $A(0)$, $A(4{,}5)$, $A(4{,}9)$ e $A(4{,}9999)$. Como esperado, os alunos não apresentaram dificuldades e conseguiram obter os resultados corretos. As primeiras inseguranças verificaram-se na questão 1.2. em que é pedida a representação gráfica da função $A(d) = \frac{5}{5-d}, d \in [0{,}5[$. Surgiram representações diferentes. Umas que tinham em conta o domínio da função apresentado no enunciado, $d \in [0{,}5[$, e outras que não tinham em conta o domínio. Discutiram-se duas representações correspondentes a diferentes grupos de trabalho, a de Júlia e Leonor (Figura 6) e a de Mateus e Madalena (Figura 7).

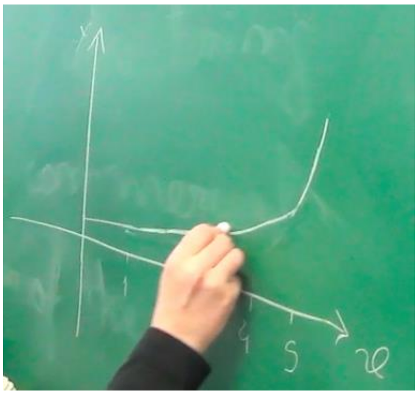


Figura 6 - Resolução de Júlia e Leonor (Tarefa 1, questão 1.2.)

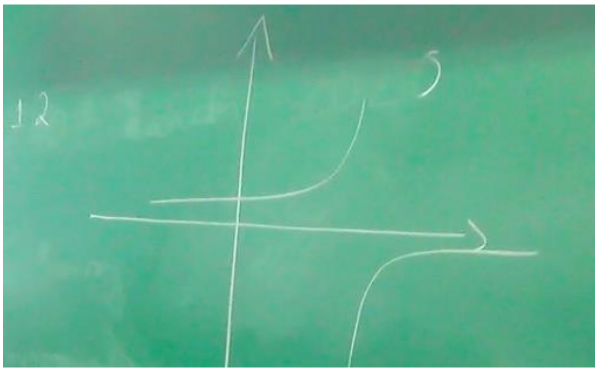


Figura 7 - Resolução de Mateus e Madalena (Tarefa 1, questão 1.2.)

O par Júlia e Leonor teve em conta o domínio da função apresentado no enunciado ($d \in [0{,}5[$) e, no momento de trabalho autónomo colocaram-me precisamente essa questão:

> *Júlia*: Para metermos o gráfico temos de meter isto assim não é?
> (Júlia mostra-me o que escreveu no menu Gráfico da calculadora: $Y1{:}\frac{5}{5-x}, [0{,}5]$)

Professora: Mas o que pretendes com esse intervalo?
Júlia: Porque o d só pertence a esse intervalo.

Apesar de poderem alterar a janela de visualização do gráfico para definir o domínio, as alunas definem o intervalo de visualização no local onde introduzem a expressão algébrica, o que também permite uma visualização adequada. O importante é terem em conta este aspeto ao contrário do que fizeram Mateus e Madalena.

Ao considerar as duas representações, Tiago descarta imediatamente o gráfico de Mateus e Madalena (Figura 7) e faz a seguinte observação ao gráfico de Júlia e Leonor (Figura 6):

Tiago: O 5 é aberto!
Professora: Tiago queres vir aqui corrigir o gráfico?

De facto, a representação elaborada por Júlia e Leonor tem em conta o domínio da função, mas a forma como é apresentada no quadro parece que a função interseta a reta de equação $d = 5$, situação que mereceu a atenção de Tiago. No quadro, pronto a melhorar o gráfico apresentado pelas colegas, Tiago revela alguma insegurança na correção da representação gráfica e expõe a sua dificuldade:

Tiago: Mas calma tenho de fazer a reta, não é? Ou não é preciso? Desde que não toque...

Na mesma intervenção Tiago expõe uma dificuldade e atribui-lhe uma resposta. Está confuso pois não sabe se deve representar a reta de equação $d = 5$, pois 5 não pertence ao domínio da função. Ao mesmo tempo que coloca a questão, responde imediatamente que não é necessário pois o importante é que se saiba que a função não interseta essa reta e que se tenha esse cuidado na representação. Desta forma, Tiago mostra compreender a relação existente entre o gráfico da função e a reta $d = 5$.

Na discussão da questão 1.3, onde era pedido para determinar o $\lim_{d \to 5^-} A(d)$, surgem diferentes estratégias de resolução. Alguns alunos respondem à questão a partir da análise do seu gráfico enquanto outros efetuam analiticamente o cálculo do limite quando d tende para 5^-. Os alunos já têm uma vasta experiência no cálculo de limites e, portanto, sentem-se à vontade neste cálculo. Temos o exemplo de Inês e Joel que efetuaram o cálculo do $\lim_{d \to 5^-} A(d)$. Inês, apresenta a resolução no quadro (Figura 8), com alguns erros de escrita.

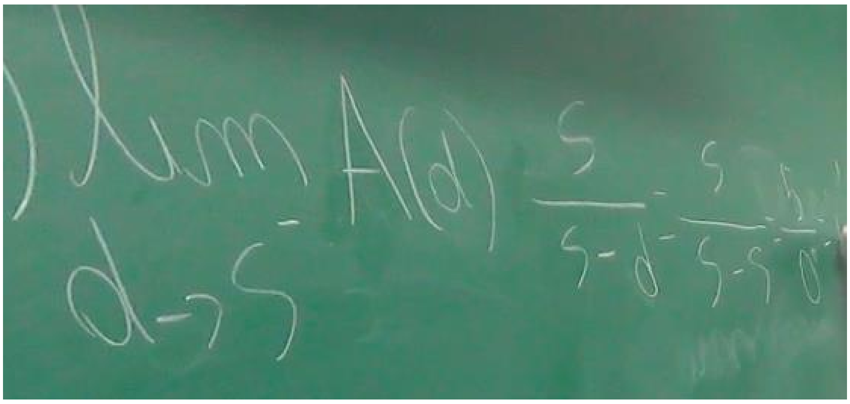


Figura 8 - Resolução de Inês (Tarefa 1, questão 1.3.)

Quando observo que Inês se esqueceu de escrever $\lim_{d \to 5^-}$ em alguns locais, a aluna reconhece imediatamente o erro. Não se verificaram dificuldades neste cálculo, mas houve quem o fizesse de forma diferente. É o caso de Tiago que reage à resolução da colega Inês:

Tiago: Eu vi apenas no gráfico!

A afirmação de Tiago constituiu uma evidência da existência de outras estratégias de resolução adotadas pelos alunos. Muitos alunos aproveitam a intervenção de Tiago para afirmar que também recorreram apenas ao gráfico da função para responder à questão. E, de facto, considerando que os alunos representaram o gráfico na questão anterior, esta estratégia é uma possibilidade que, inclusivamente, pode simplificar a resolução da tarefa. Cátia, umas das alunas que afirma ter recorrido ao gráfico, vai ao quadro explicar como tirou as suas conclusões. Já no quadro e, antes de iniciar a sua explicação, decide representar no gráfico a reta de equação $d = 5$, a tracejado. Neste momento do trabalho, em que ainda não se fez menção ao conceito de assíntota, nem do que ela representa graficamente, é interessante a preocupação de Cátia em representar a reta de equação $d = 5$, antes de explicar o que quer seja. A aluna teve a preocupação de o fazer, como que para indicar que o gráfico da função não passa daquela reta para o lado direito, como se ali existisse uma "barreira". Mas porquê uma linha a tracejado e não uma linha contínua? Cátia reconhece que o valor

5 não pertence ao domínio da função e, por esse motivo, quer distinguir de alguma forma o gráfico da função da reta $d = 5$.

Após discussão da questão 1.3., os alunos começam a revelar a compreensão do significado do conceito de assíntota graficamente. No final da questão 1, sabem que 5 é um ponto onde a função não está definida pois o seu domínio (indicado no enunciado) é o intervalo $[0,5[$ e que $d = 5$ é uma reta com uma característica especial relativamente ao gráfico da função. No momento de discussão coletiva desta questão, os alunos ficam a saber que a reta de equação $d = 5$ é denominada assíntota ao gráfico da função, devido à intervenção de Júlia:

> *Professora*: Alguém sabe que nome se dá a essa reta?
> *Júlia*: Assíntota?!

Júlia, já conhece a palavra assíntota, apesar de mostrar alguma hesitação quando responde à minha pergunta. Afirma corretamente o nome da reta pois talvez já tivesse ouvido falar neste conceito, apesar de não ter conseguido acrescentar mais informações ou uma justificação para a sua resposta. Ou por outro lado, poderá ter tido a preocupação de procurar o conteúdo que se segue à Continuidade de funções na planificação da disciplina, fazendo uma preparação prévia das aulas. O conceito de assíntota é um conceito completamente novo para a maioria dos alunos e inicia-se aqui o seu estudo.

Questão 2 (Figura 9).

2. Considera a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

2.1. Com o auxílio da calculadora, representa o gráfico da função f.

2.2. Indica o domínio da função f.

2.3. O que observas no comportamento de f quando x tende para zero por valores superiores a zero $(x \to 0^+)$? E quando x tende para zero por valores inferiores a zero $(x \to 0^-)$?

Figura 9 - Enunciado da questão 2 da Tarefa 1

Na questão 2.1. é pedida a representação do gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$ e, na questão 2.2., é pedido o respetivo domínio. Nas duas questões, testemunho uma maior preocupação e cuidado com a representação gráfica e, uma atenção especial, ao domínio da função. Os alunos reconhecem estes dois aspetos como importantes para a determinação de assíntotas verticais, começando assim a compreender o processo para as obter.

Na discussão da questão 2.3 surgem novamente duas diferentes estratégias de resolução: o cálculo analítico dos limites quando x tende para 0^+ e para 0^- e a utilização da calculadora gráfica para os determinar. Tiago diz que obteve $+\infty$ e $-\infty$ no resultado dos limites e peço que vá ao quadro apresentar a resolução que fez para chegar a essa conclusão (Figura 10):

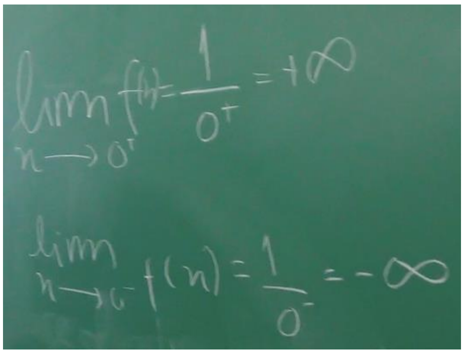


Figura 10 - Resolução de Tiago (Tarefa 1, questão 1.3.)

O aluno, desta vez, opta pelo cálculo analítico dos limites. Apesar de ter trabalhado com Camila é muito mais interventivo do que a colega, manifestando-se sempre que a sua resolução não corresponde ao apresentado no quadro ou caso não concorde com alguma afirmação.

Para compreender se os alunos entendem o papel que a calculadora gráfica pode assumir e de que forma a podem utilizar para calcular estes limites, faço a seguinte questão:

> *Professora*: Outra forma de encontrar o valor destes limites sem recorrer ao cálculo do limite?

Júlia responde:

Júlia: Ir ao gráfico.

Mais uma vez, os alunos recorrem a diferentes estratégias para examinar o comportamento da função consoante x se aproxima de zero por valor inferiores ou superiores a zero. Projeto o gráfico da função (Figura 11) e peço a Júlia que o utilize para explicar aos colegas como procedeu e como conseguiu através da representação gráfica as mesmas conclusões de Tiago.

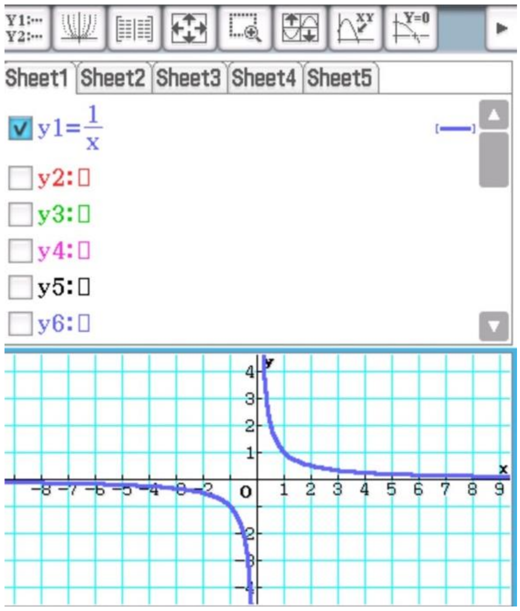


Figura 11 - Gráfico da função (Tarefa 1, questão 2.3.)

Professora: Vai lá ao gráfico do quadro e explica isso aos teus colegas.
Júlia: Se os valores vêm por 0^+, vai bater aqui.... vai para $+\infty$ mas nunca chega ao zero.
Professora: A que zero?
Júlia: Aqui (e aponta para a reta $x = 0$).
Professora: E o que é isso?
Júlia: É uma reta.
Professora: De equação...
Júlia: $x = 0$
Professora: E quando x tende para zero por valores inferiores a zero?
Júlia: É a mesma coisa só que vai para $-\infty$ e nunca chega a bater na reta $x = 0$.

Quando refere que a função "nunca chega ao zero", Júlia refere-se à reta de equação $x = 0$. Contudo, apresenta alguma dificuldade em identificar que, o valor zero do qual diz que a função se aproxima, na verdade corresponde a uma reta. Com alguma insistência da minha parte indica que, de facto, a equação da reta. A resposta de Júlia revela que compreendeu que, o gráfico da função é um apoio excecional para a determinação de um limite, bem como o procedimento para determinar a assíntota usando apenas esta representação. Este era também um dos objetivos da tarefa. Pretendia-se que os alunos alternassem entre representações gráficas e algébricas para uma melhor compreensão e domínio dos conceitos trabalhados. Independentemente da estratégia utilizada, os alunos conseguem determinar os limites afirmando que, quando x tende para 0^+ a função tende para $+\infty$ e quando x tende para 0^- a função tende para $-\infty$. Os alunos conseguem relacionar as conclusões resultantes da discussão coletiva efetuada no final da questão um com a questão agora a ser analisada, identificando facilmente que a reta $x = 0$ é a assíntota vertical ao gráfico desta função:

> *Professora*: O que conseguimos concluir desta reta?
> *João*: Que ela é assíntota...

No momento de discussão coletiva, procuro levar os alunos a construir o processo de determinação de assíntotas verticais ao gráfico de uma função com base naquilo que fizeram nas duas questões desta tarefa. À questão "Dada qualquer função, o que tenho de fazer para determinar uma assíntota vertical ao gráfico dessa função?", Cátia responde que deve começar-se por "Calcular o valor do limite de um ponto que não pertence ao domínio". Cátia faz esta afirmação com base naquilo que se efetuou na tarefa 1, para as duas funções estudadas. Contudo, não afirma o ponto ou os pontos para os quais se devem calcular os limites laterias. Para ajudar a ultrapassar esta dificuldade, procuro que analisem melhor o que fizeram nas questões 1 e 2 da tarefa:

> *Professora*: No primeiro caso, qual era este ponto?
> *Vários alunos*: 5.
> *Professora*: E no segundo?
> *Vários alunos*: 0.
> *Professora*: E nós calculámos os limites...
> *Cátia*: Para 5^+ e 5^-. E para 0^+ e 0^-.
> *Joel*: Não só para 5^-.
> *Professora*: E porque é que não calculámos o limite quando x tende para 5^+?
> *Júlia*: Porque o d está entre 0 e 5, então não há 5^+.

Os alunos revelam dificuldade a identificar quais os pontos para os quais se deve calcular os limites laterais, sempre que se pretender averiguar a existência de assíntotas verticais ao gráfico da função. Através dos casos particulares das funções da tarefa 1, os alunos conseguem identificar em cada uma dessas funções quais os pontos para os quais se devem calcular os limites laterais. De seguida, é necessário saber o que se pretende desses limites.

> *Professora*: (...) Então, limites laterais e depois?
> *Júlia*: Não podem ter o mesmo limite, acho eu.

À semelhança do que fez Cátia no diálogo anterior, Júlia também responde com base nos casos particulares que analisou na tarefa. Na questão 2.3. os limites laterais quando x tende para 0^+ e 0^- deram resultados diferentes e conclui-se que $y = 0$ é assíntota. O erro na afirmação de Júlia resulta, certamente, deste caso particular. Para que a aluna compreenda que, as questões 1 e 2 da tarefa 1 são diferentes na medida em que, na questão 1 só foi calculado o limite à esquerda do ponto considerado, contraponho:

> *Professora*: Mas não calculámos o limite quando d tende para 5^+e concluímos à mesma que é assíntota.
> *Júlia:* Mas era porque não estava definido.
> *Joel:* O domínio é de 0 a 5.
> *Professora*: O que deram os limites calculados?
> *Vários:* $+\infty$ e $-\infty$.
> *Júlia:* Tem de ser divergente.

Júlia refere que a função não está definida para valores superiores a 5 e, por esse motivo, não se calculou o $\lim_{d \to 5^+} A(d)$. Para reforçar esta conclusão, Joel volta a mencionar o domínio da função mostrando o reconhecimento da sua importância na determinação de assíntotas verticais. Deste modo, Júlia compreende o porquê de não ter calculado o limite quando d tende para 5^+, como diz "porque não estava definido". Como este limite não foi calculado na questão 1, nada pode concluir relativamente a ele. Assim, para que uma reta seja assíntota vertical ao gráfico da função basta que um dos limites laterais calculados para o ponto em que se suspeita a sua existência seja $+\infty$ ou $-\infty$.

No final desta tarefa, apesar de apenas resolvidas duas questões que envolvem assíntotas verticais ao gráfico da função, os alunos apresentaram aprendizagens sobre o conceito e conseguiram ultrapassar entendimentos errados. O estudo de outros tipos de assíntotas, nas tarefas seguintes, impulsiona uma compreensão mais estável do conceito.

b) Tarefa 2

A tarefa 2 (Anexo 02), realizada na segunda aula, é formada por duas questões. A primeira (Figura 12) tem como objetivo iniciar o estudo das assíntotas horizontais ao gráfico de uma função. Os alunos já efetuaram a representação gráfica da função $f(x) = \frac{1}{x}$ na questão 2 da tarefa 1. A segunda questão (Figura 13) pretende iniciar o estudo das assíntotas oblíquas ao gráfico de uma função, através da função $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x}$. A tarefa foi resolvida pelos alunos a pares. A cada questão da tarefa seguiu-se um momento de discussão coletiva e, no final da aula, um espaço para uma síntese final.

Questão 1 (Figura 12).

1. Retoma a função da questão 2 da tarefa anterior: $f(x) = \frac{1}{x}$.

O que observas no comportamento de f quando x tende para $+\infty$? E para $-\infty$?

Figura 12 - Enunciado da questão 1 da Tarefa 2

Durante o seu trabalho autónomo, Pedro questionou-me no sentido de saber se poderia responder à questão baseando-se apenas na análise da representação gráfica. No momento de discussão coletiva, quando o interpelo para apresentar a sua resolução à turma, Pedro apresenta o cálculo dos limites quando x tende para $+\infty$ e $-\infty$. Quando o questiono, percebo que não ficou suficientemente confiante com a resposta obtida através do gráfico da função e, por isso, terá decidido verificá-la recorrendo ao cálculo dos limites:

> *Pedro*: Supostamente, fiz o limite.
> *Professora*: Fizeste o limite? Então, mas perguntaste-me...
> *Pedro:* Sim! Porque quando faço o gráfico dá para perceber que o resultado dos limites é zero.

Considerando a resposta de Pedro que relaciona o gráfico com os limites da função, peço-lhe para ir ao quadro apresentar o cálculo dos limites e explicar como os pode relacionar com a representação gráfica. Neste momento, o aluno revela algumas dificuldades na comunicação da sua interpretação tanto gráfica como algébrica e, por esse motivo, Maria intervém na discussão:

Professora: Então, vem lá fazer os limites.
(Pedro apresenta o cálculo dos limites no quadro enquanto trato de projetar o gráfico da função (Figura 5))
Professora: Fizeste os limites e depois...
Pedro: Fui ver ao gráfico se aquilo que eu tinha feito se confirmou. Quando x tende para $+\infty$, a função está a ir sobre o eixo, mais próximo do eixo... (Pedro refere-se ao eixo das abcissas).
Professora: O que é que queres dizer com isso?
Maria: Aproxima-se do zero mas nunca lá chega.
Professora: E quando x tende para $-\infty$?
Maria: A mesma coisa.

Esta é uma situação comum a vários alunos. Não parecem sentir-se suficientemente confiantes ao apresentar a resposta apenas com base na análise do gráfico da função. Assim, acabam sempre por recorrer ao método analítico, que lhes transmite maior certeza ou segurança. Ainda que, durante a discussão coletiva consigam relacionar corretamente as duas estratégias.

Maria e Pedro referem que a função se "aproxima de zero" quando x tende para $-\infty$ e quando x tende para $+\infty$. Contudo, à semelhança do que aconteceu anteriormente com outros alunos, Maria não se refere especificamente à reta. Refere sim que a função "aproxima-se de zero". Neste momento do trabalho, aponto-o como sendo uma dificuldade uma vez que, na tarefa 1, os alunos já verificaram que a função se aproxima de uma reta e não de um ponto. Só depois de alguma insistência da minha parte é que os alunos referem que a função se está a aproximar da reta de equação $y = 0$.

Professora: Vocês referem que se aproxima de zero, mas que zero é este?
Vários alunos: $y = 0$.

Em conclusão, os alunos identificam que a função se aproxima da reta $y = 0$ quando x tende para $+\infty$ e $-\infty$. No momento de discussão, os alunos comprovam que, independentemente da estratégia utilizada, se obtém o mesmo resultado. Conseguem fazer a conexão entre o cálculo dos limites e a representação gráfica, obtendo através de duas representações distintas uma mesma conclusão. Também no momento de discussão conseguem descrever o processo utilizado até concluir que $y = 0$ é assíntota horizontal mediante aquilo que fizeram para o caso particular da função $f(x) = \frac{1}{x}$:

Professora: Se vos desse uma função qualquer e pedisse para calcular as assíntotas horizontais ao gráfico dessa função, o que é que vocês faziam?

Cátia: Os limites para $+\infty$ e para $-\infty$.
Professora: Na questão que resolveram, o que deram esses limites?
Vários alunos: 0.
Professora: E o que concluímos?
Vários alunos: $y = 0$ é assíntota.
Professora: E se os limites tivessem dado 5?
Júlia: Ia ser 5.
Professora: Ia ser?
Mateus: $y = 5$.

Conseguem, de facto, relatar o processo para determinar assíntotas horizontais ao gráfico de uma função. Tanta certeza não tenho relativamente ao facto de conseguirem interpretar o resultado obtido dos limites calculados se a situação for diferente deste caso em estudo. Nesta situação, os limites quando x tende para $-\infty$ e para $+\infty$, dão o mesmo valor e conclui-se que $y = 0$ é assíntota. Para verificar se os alunos conseguem interpretar o resultado dos limites, numa situação diferente, pergunto:

Professora: Então e se este aqui ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$) tivesse dado 0 e este ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$) tivesse dado $-\infty$?

Vários alunos referem que nesse caso não existem assíntotas ao gráfico da função, tal como suspeitava. Mas Mateus não concorda com a afirmação de alguns colegas e diz:

Mateus: Não! Mas quando um é ∞, não precisam de ser os dois.

O aluno revela alguma confusão com o processo definido, na tarefa 1, para determinar assíntotas verticais ao gráfico de uma função. Esta confusão pode resultar da pouca experiência ainda na resolução de tarefas que envolvem assíntotas dos dois tipos, resultando assim numa falta de fluência processual e fraca compreensão concetual.

Questão 2 (Figura 13).

2. Considera a função f definida por $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x}$ e a reta r de equação $y = x - 1$.

2.1. Como é o comportamento da função f quando x tende para $+\infty$? E quando x tende para $-\infty$?

2.2. Identifica o que representa, para cada valor de x $(x \neq 0)$, a expressão $f(x) - (x-1)$.

2.3. Determina $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x-1)]$ e $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (x-1)]$.

Figura 13 - Enunciado da questão 2 da Tarefa 2

A questão 2 (Figura 13) tem como objetivo iniciar o estudo do conceito de assíntota oblíqua ao gráfico de uma função. Contudo, nesta questão é dada, não só a função $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x}$, mas também a equação da sua assíntota. Pretende-se que os alunos analisem graficamente a relação entre a função e a sua assíntota para facilitar, posteriormente, a descrição do processo que permite verificar se uma reta é assíntota ao gráfico da função. A questão 2.1. pede a análise do comportamento da função $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x}$ quando x tende para $+\infty$ e para $-\infty$. Ao contrário das questões anteriores, aqui nunca é pedido o gráfico da função deixando ao critério dos alunos essa necessidade ou não. Os alunos reconhecem que têm de calcular os limites quando x tende para $+\infty$ e para $-\infty$ ou utilizar o gráfico da função para responder à pergunta.

Esta questão não suscita dúvidas e revela ser um bom contributo para um dos objetivos transversal a todas as aulas - reforçar a complementaridade e as conexões entre o cálculo dos limites e a análise do gráfico da função para fazer o estudo das assíntotas. O gráfico da função é um excelente apoio na determinação de assíntotas ao gráfico de uma função. Madalena e Mateus optam pelo cálculo analítico dos limites (Figura 14) e Madalena interpreta corretamente o seu significado.

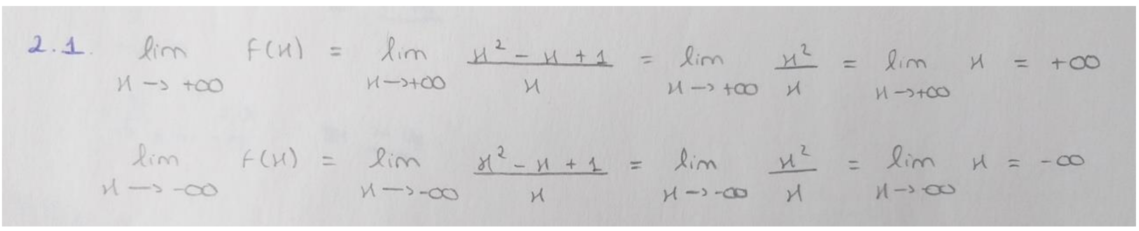


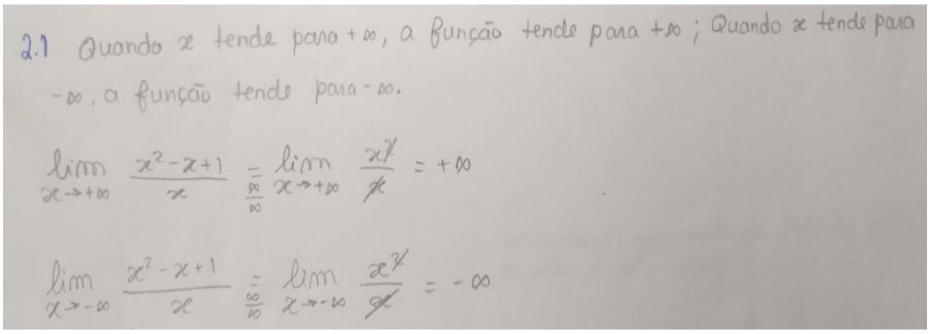
Figura 14 - Resolução de Madalena e Mateus (Tarefa 2, questão 2.1.)

Professora: O que concluis daí Madalena?
Madalena: Que quando x tende para $+\infty$, a função tende para $+\infty$. E quando x tende para $-\infty$, a função tende para $-\infty$.

Madalena consegue interpretar corretamente os resultados obtidos com o cálculo dos limites. Aliás, todos os alunos o conseguem fazer sem dificuldade, mesmo os que recorrem à representação gráfica. Alguns grupos de trabalho recorreram à calculadora para estudar o comportamento da função, algo que verifico no momento de trabalho autónomo, enquanto circulo pela sala e porque o indicam também no momento de discussão coletiva. Apesar disto, nas resoluções que me entregam nenhum grupo representa o gráfico da função nem uma conclusão decorrente do gráfico. É o caso de Carolina e João:

Professora: Quem é que não fez assim o cálculo dos limites nesta questão?
Carolina: Eu fui ver ao gráfico e vi que quando x tende para $+\infty$, a função tende para $+\infty$. E quando x tende para $-\infty$, a função tende para $-\infty$.

Apesar da justificação apresentada oralmente pela aluna, na resolução entregue pelo seu grupo (Figura 15) consta:


2.1 Quando x tende para $+\infty$, a função tende para $+\infty$; Quando x tende para $-\infty$, a função tende para $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+1}{x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+1}{x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = -\infty$$

Figura 15 - Resolução de Carolina e João (Tarefa 2, questão 2.1.)

Mais uma vez, verifica-se que os alunos não aceitam, exclusivamente, a análise do gráfico da função para responder à questão, recorrendo à resolução analítica para se sentirem mais confortáveis e confiantes com a resposta que apresentam.

A questão 2.2. onde se pretendia identificar o significado da expressão $f(x) - (x-1)$ foi, de todas, a que suscitou mais dificuldades. Alguns alunos, como é o caso de Carolina e João (Figura 16), começam por determinar a expressão algébrica correspondente a $f(x) - (x-1)$.

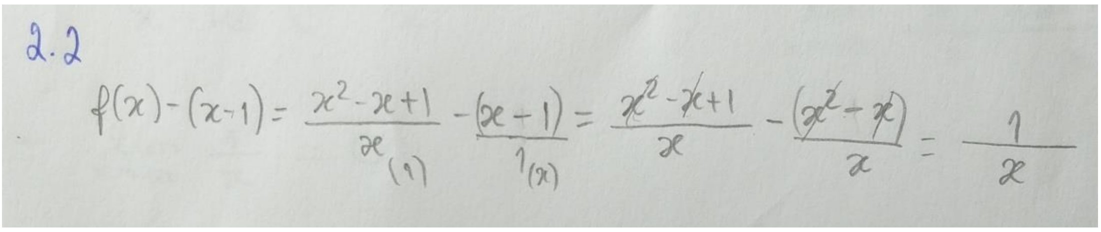


Figura 16 - Resolução de Carolina e João (Tarefa 2, questão 2.2.)

Depois de obtida a expressão simplificada ($\frac{1}{x}$) correspondente a $f(x) - (x - 1)$, os alunos não conseguem obter nenhuma conclusão. E ficam por esta resolução.

Já os alunos Cátia e Afonso (Figura 17) não conseguem identificar precisamente o que representa $f(x) - (x - 1)$ para qualquer valor de x. No entanto, vão mais longe ao indicar que a função $f(x) - (x - 1)$ tende para zero, escrevendo: "as abcissas vão se juntando cada vez mais quando a função tende para $+\infty$, ou seja, tende para 0".

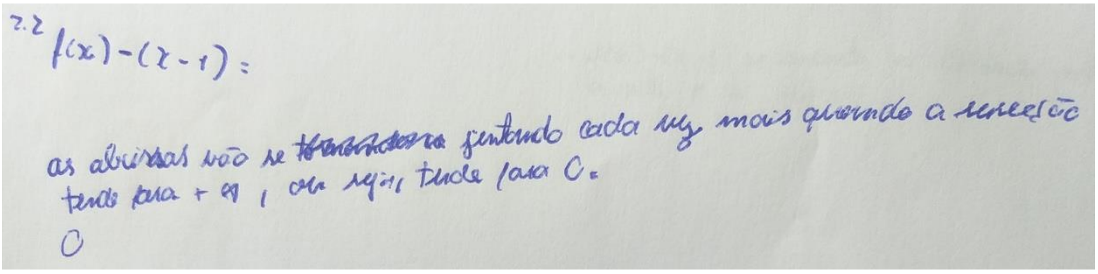


Figura 17 - Resolução de Cátia e Afonso (Tarefa 2, questão 2.2.)

É possível compreender a frase escrita pelos alunos e a ideia que pretendem transmitir. Provavelmente, os alunos concluíram-na recorrendo à calculadora gráfica (não é claro na resolução), verificando que as funções estão cada vez mais próximas à medida que x tende para $+\infty$.

Ainda para a resolução desta questão, alguns alunos decidiram representar na calculadora gráfica, o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x}$, o gráfico da reta $y = x - 1$ e o gráfico da função $\frac{1}{x}$ (correspondente a $f(x) - (x - 1)$). No entanto, não conseguem interpretar o significado dos gráficos obtidos e desistem da estratégia. Nenhum dos grupos apresentou esta estratégia na folha de respostas, mas fui-me apercebendo dela ao longo do trabalho autónomo. Para a explorar e esclarecer as dificuldades que os alunos demonstraram na interpretação do gráfico obtido, recorro à calculadora gráfica no computador para analisar esta situação com a turma (Figura 18). Apesar disto, não conseguem identificar precisamente o que representa $f(x) - (x - 1)$ para qualquer valor de x, apenas concluem que tende para zero.

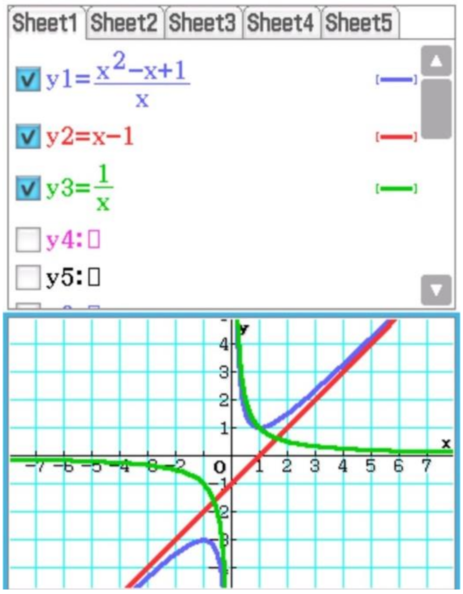


Figura 18 - Gráfico obtido na Tarefa 2, questão 2.2.

Professora: Nesta representação, a azul é o gráfico da função, a vermelho é o gráfico da reta e a verde é o gráfico do quê?
João: Da diferença.
Professora: Da diferença entre $f(x)$ e $x-1$ que é $\frac{1}{x}$. E com este gráfico como é que conseguiam obter a mesma conclusão?
(Ninguém responde)
Professora: Qual é o limite quando x tende para $+\infty$ e quando x tende para $-\infty$ da diferença?
Júlia: É zero.

Os alunos conseguem identificar a função a verde como a diferença $f(x)-(x-1)$. Da mesma forma, conseguem analisar, através do gráfico, os limites dessa função. Verificam também que, à medida que o valor de x aumenta ou diminui, a função tende para zero.

Francisco e Marta são quem se aproxima mais da resposta esperada. Apresentaram na sua resolução (Figura 19) um referencial com a função f e a reta r representadas. Peço a Francisco que vá ao quadro mostrar a sua resolução e explicar como procedeu.

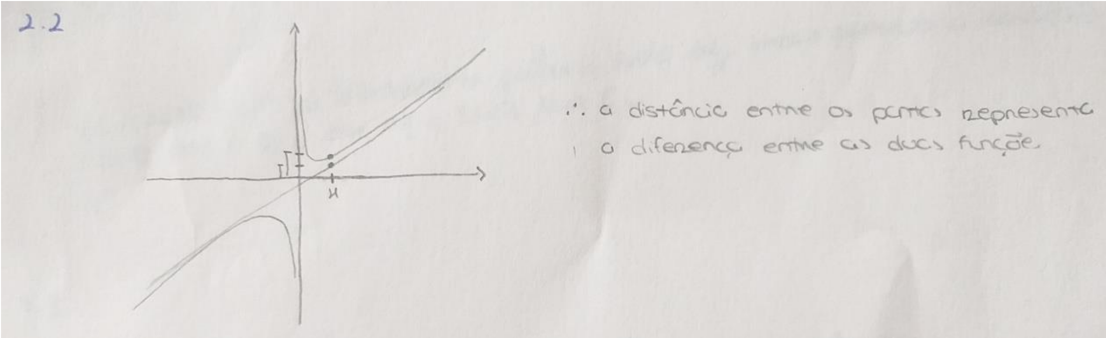


Figura 19 - Resolução de Francisco e Marta (Tarefa 2, questão 2.2)

No momento, foi necessária alguma ajuda da minha parte para que conseguisse identificar efetivamente o significado de $f(x) - (x - 1)$.

> *Francisco*: Vamos marcar dois pontos.
> *Professora*: Primeiro marcar uma abcissa x. E a seguir?
> *Francisco*: Marcar $f(x)$ e $x - 1$.
> *Professora:* E o que é $f(x) - (x - 1)$?
> *Francisco*: É a distância entre a função f e o $x - 1$ (e assinala o segmento do gráfico).
> .

Na resolução realizada durante o trabalho autónomo, Francisco e Marta escrevem: "a distância entre os pontos representa a diferença entre as duas funções". Referem-se aos pontos que assinalaram no referencial. Para completar a questão corretamente falta apenas identificar que, para cada valor de x, $f(x) - (x - 1)$ representa a diferença entre a função e a reta. Esta questão pretende, essencialmente, que os alunos visualizem a proximidade cada vez maior entre a função e a reta que é sua assíntota. Deste modo, os alunos podem compreender o que significa, na representação gráfica, a assíntota oblíqua ao gráfico de uma função, para que mais tarde possam compreender que uma reta é assíntota ao gráfico de uma função se o limite da diferença entre a função e a reta for zero, quando x tende para $+\infty$ ou $-\infty$.

Na resolução da questão 2.3. todos os alunos conseguem calcular corretamente os limites pedidos. Todas as resoluções entregues apresentam o cálculo analítico destes limites, obtendo o resultado zero. Na sua resolução (Figura 20), Francisco e Marta simplificam a expressão correspondente a $f(x) - (x - 1)$, obtendo que esta é igual a $\frac{1}{x}$, tornando-se mais simples o cálculo dos limites.

$$2.3.\quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x} - (x-1) \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x} + 1 - \cancel{x^2} + \cancel{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Figura 20 - Resolução de Francisco e Marta (Tarefa 2, questão 2.3.)

Carolina e João, já haviam simplificado a expressão $f(x) - (x - 1)$ na questão 2.2. pelo que, nesta questão, é apenas necessário recuperar esse resultado para calcular o limite de forma mais imediata, como se vê na Figura 21:

$$2.3\quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

Figura 21 - Resolução de Carolina e João (Tarefa 2, questão 2.3)

Nas duas resoluções apresentadas acima, nenhum grupo apresenta qualquer conclusão relativamente aos resultados obtidos. Calculam os limites, como pedido no enunciado e terminam a resolução. Nesta questão, apenas dois pares, Mateus e Madalena (Figura 22) e Camila e Tiago (Figura 23), decidiram apresentar uma conclusão.

$$2.3\quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x} - \frac{(x-1)}{1} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1 - x^2 + x}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$\therefore$ $y = x - 1$ é uma assíntota ao gráfico f

Figura 22 - Resolução de Mateus e Madalena (Tarefa 2, questão 2.3.)

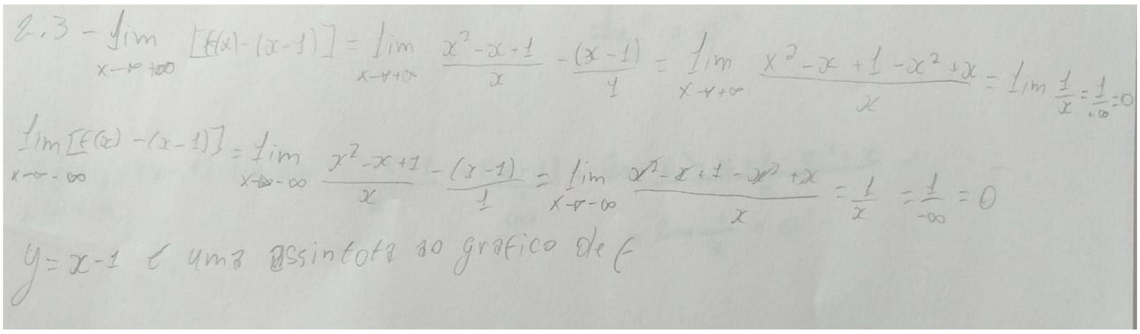


Figura 23 - Resolução de Camila e Tiago (Tarefa 2, questão 2.3.)

Os dois pares, depois do cálculo dos limites, escrevem a mesma frase: "$y = x - 1$ é uma assíntota ao gráfico de f". Os pares efetuam cálculos para simplificar a expressão $f(x) - (x - 1)$. Camila e Tiago cometem alguns erros de escrita durante este processo, nomeadamente a falta de parênteses quando escrevem $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+1}{x} - (x - 1)$, sendo a forma correta $\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2-x+1}{x} - (x-1)\right]$. Repito a mesma observação na escrita de $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+1}{x} - (x - 1)$. De assinalar ainda que, apesar de terem concluído que $y = x - 1$ é uma assíntota ao gráfico da função, nenhum par refere que se trata de uma assíntota oblíqua, em particular. Na discussão coletiva desta questão, analisam-se os resultados obtidos com o cálculo dos limites. É importante que os alunos compreendam o significado do limite da diferença entre a função e reta tender para zero:

> *Professora*: O facto de a distância tender para zero, o que é que significa relativamente ao gráfico da função e da reta?
> *Francisco*: Que se estão a aproximar.
> *Professora:* Que a função e a reta estão cada vez mais próximas, exato. E mais?
> *Francisco*: Que é uma reta assíntota, a reta $y = x - 1$ é uma assíntota da função f.

Depois da conclusão correta de Francisco procurei compreender se consegue ir mais longe na designação que atribui à assíntota.

> *Professora*: $y = x - 1$ é uma assíntota ao gráfico da função f. Vertical, horizontal, ...?
> *Francisco*: Diagonal.
> *Cátia*: Oblíqua.

Francisco refere ser uma assíntota diagonal e esta designação faz todo o sentido pois, de facto, a reta é diagonal. No entanto, Cátia ajuda o colega com a designação correta que eu corroboro, a designação correta é a de assíntota oblíqua. Na síntese final, que se segue à discussão da questão dois, espera-se que os alunos consigam reconhecer de que forma se verifica se uma determinada reta é ou não assíntota oblíqua ao gráfico da função. Contudo, é importante considerar que os alunos apenas realizaram uma tarefa envolvendo o conceito de assíntota oblíqua:

> *Professora*: Então, o que é que nós fizemos para ver que esta (reta) é uma assíntota?
> *Cátia*: Calculámos os limites quando x tende para infinito.
> *Professora*: Do quê?
> *Joel*: De $f(x) - (x - 1)$.
> *(...)*
> *Professora*: E o que é que eu espero obter do resultado desse limite para concluir que é uma assíntota oblíqua?
> *Cátia*: Que um deles seja zero.

Reconhecem que se calculam os limites quando x tende para $-\infty$ e para $+\infty$ da diferença entre a função e a reta que se suspeita ser assíntota. Cátia refere que, basta que um destes limites seja zero, para se concluir que a reta é assíntota. No entanto, não referiram que, se zero for o resultado do limite apenas quando x tende para $-\infty$, a reta é apenas assíntota em $-\infty$, e a mesma conclusão no caso de zero ser o limite quando x tende para $+\infty$. Os alunos conseguem identificar todo o processo desenvolvido até concluir que a reta é assíntota oblíqua ao gráfico da função.

c) Tarefas do manual

Na terceira aula da intervenção sugiro aos alunos a realização das tarefas 94.3. e 94.4. (Anexo 03) da página 69 do manual que permitem consolidar o que foi trabalhado em aulas anteriores: assíntotas verticais e horizontais. Os alunos desenvolvem durante alguns minutos trabalho autónomo, o que me permite apoiar cada par de forma mais particular e compreender melhor as suas dificuldades. Desta forma, restou muito pouco tempo para o momento de discussão coletiva das tarefas, tendo-se discutido apenas a tarefa 94.3.

94 Determina, caso existam, as assíntotas verticais e horizontais ao gráfico das funções reais de variável real definidas por cada uma das expressões seguintes:

94.3 $h(x)=\dfrac{1-x}{2x+5}$

94.4 $i(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x} & \text{se } x<0\\ -\dfrac{2x^2+1}{x+1} & \text{se } x\geqslant 0\end{cases}$

Figura 24 - Enunciado da tarefa 94.3.do manual

Na tarefa 94.3. (Figura 24) é pedido para determinar as assíntotas verticais e horizontais ao gráfico da função racional $f(x)=\frac{1-x}{2x+5}$. Peço a Carolina que vá ao quadro mostrar a sua resolução da tarefa 94.3. Enquanto isso, peço ao seu par, João, que explique o que Carolina vai apresentar.

> *João*: Fez primeiro o limite de f quando x tende para $+\infty$ e $-\infty$ e deu $-\frac{1}{2}$.
> *Professora*: Portanto, calculou primeiro as assíntotas horizontais...
> *João*: Sim, e como deu $-\frac{1}{2}$ é a assíntota horizontal.

Ainda que, com alguma dificuldade na linguagem e na completude da resposta, João explica que, como o resultado dos limites da função quando x tende para $+\infty$ e $-\infty$ deu um número real, conclui-se a existência de uma assíntota horizontal. Assim, mostram que conseguem calcular, sem dificuldade, assíntotas horizontais ao gráfico de uma função. Por outro lado, e à semelhança do que verifico noutros alunos, apresentam uma dificuldade na forma como se referem às assíntotas. Referem-se às assíntotas como valores e não como retas. João refere que a assíntota horizontal é $-\frac{1}{2}$ ao invés de referir $y=-\frac{1}{2}$. Além disso, sendo $-\frac{1}{2}$ o resultado dos dois limites esta é uma assíntota em $+\infty$ e em $-\infty$. Por isso, decido intervir:

Professora: O resultado é um número real e, portanto, conclui-se que $y = -\frac{1}{2}$ é assíntota horizontal. Falta dizer uma coisa! Assíntota horizontal em ...
Júlia: $+\infty$ e $-\infty$.

Carolina altera a conclusão escrita no quadro "$y = -\frac{1}{2}$ é assíntota horizontal ao gráfico da função" para "$y = -\frac{1}{2}$ é assíntota horizontal ao gráfico da função em $+\infty$ e $-\infty$". Uma vez calculada a assíntota horizontal ao gráfico da função, prossigo procurando que seja Carolina a explicar como determinou a assíntota vertical ao gráfico da função.

Professora: A seguir Carolina, calculaste...
Carolina: O limite para $-\frac{5}{2}$.
Professora: Mas porquê para $-\frac{5}{2}$ e não para $-1, -2, 3, 4$ ...?
Carolina: Porque não pertence ao domínio.
Professora: Então vamos apresentar o domínio da função.
Tiago: O denominador tem de ser diferente de zero!
Professora: Exato! E para isso x tem de ser diferente de $-\frac{5}{2}$. E depois?
Carolina: Calculei o limite quando x tende para $-\frac{5}{2}$ por valores superiores e inferiores.
Professora: Atenção! Utilizamos $-\frac{5}{2}$ porque é um ponto aderente ao domínio que não pertence ao domínio.
Carolina: E como o limite dá $+\infty$ é assíntota vertical ao gráfico da função.

Os alunos não demonstram dificuldades na determinação das assíntotas tanto verticais como horizontais. Contudo, não é claro se os alunos compreendem que, para determinar os limites laterais se devem calcular os limites laterais em todos os pontos aderentes ao domínio que não pertencem ao domínio e, em pontos de descontinuidade.

d) Tarefa 4

Prevista para a sétima aula, a Tarefa 4 (Anexo 05) tem como objetivo a consolidação de conhecimentos relacionados com assíntotas verticais e não verticais ao gráfico de uma função e, em particular, de uma função racional. Esta tarefa foi proposta no período em que já não decorriam aulas presenciais, devido à situação de Pandemia vivida no país. Foi enviada aos alunos via e-mail e foi pedido que a realizassem individualmente, como forma de consolidação de conteúdos. Os alunos entregaram as suas resoluções e, depois disso, realizou-se uma aula com vista ao esclarecimento de dúvidas e dificuldades que possam ter surgido. Importa reforçar que, quando foi proposta esta tarefa, os alunos já tinham realizado a tarefa 3 (Anexo 04) e as tarefas do manual envolvendo funções racionais. Em particular, no momento de realização da tarefa 4 já conheciam o seguinte resultado:

O gráfico de uma função definida por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ $(b \neq 0)$ tem como assíntotas as retas de equações:

- $x = c$ (assíntota vertical)
- $y = a$ (assíntota horizontal)

Questão um (Figura 15).

1. Para um certo valor de a e para um certo valor de b, a expressão $f(x) = a + \frac{1}{x-b}$, define a função cujo gráfico está parcialmente representado na figura ao lado.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $a > 0 \wedge b > 0$

(B) $a > 0 \wedge b < 0$

(C) $a < 0 \wedge b > 0$

(D) $a < 0 \wedge b < 0$

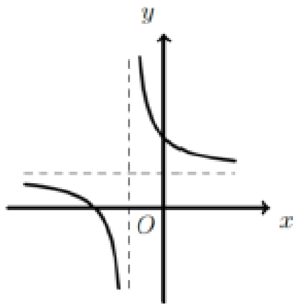


Figura 25 - Enunciado da questão 1 da Tarefa 4

Nesta questão, o objetivo é que os alunos consigam relacionar a representação gráfica de uma função racional com a respetiva expressão algébrica escrita na forma $f(x) = a + \frac{1}{x-b}$. Os alunos conseguem facilmente obter os valores de a e b se reconhecerem as assíntotas horizontal e vertical, respetivamente, ao gráfico da função. Por se tratar de uma questão de seleção, alguns alunos apresentam apenas a letra que corresponde à opção correta. Mas Marta e Maria mostraram como pensaram nesta questão:

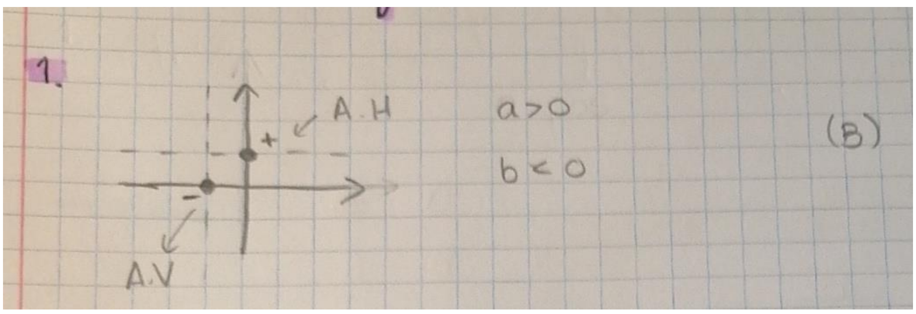
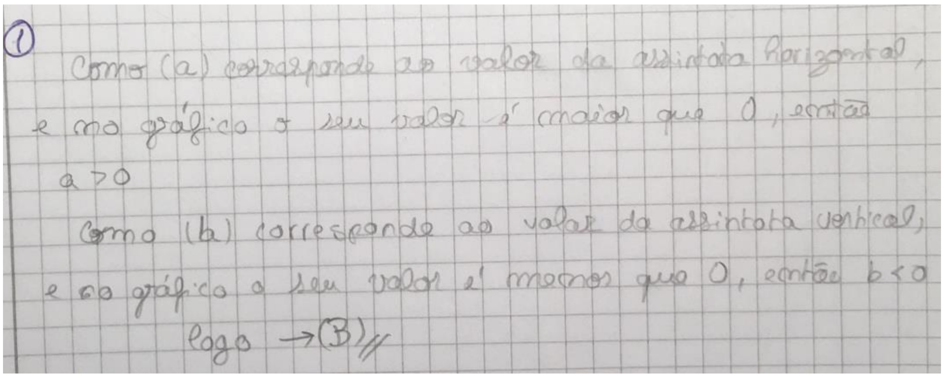


Figura 26 - Resolução de Marta (Tarefa 4, questão 1)

Marta (Figura 26) utiliza o desenho do referencial que é apresentado no enunciado para explicar como identificou as retas correspondentes às assíntotas vertical e horizontal. Na sua resolução, quando escreve $b < 0$, reconhece que a assíntota vertical se representa por b na expressão algébrica da função e b é um valor negativo. Da mesma forma, quando escreve $a > 0$ reconhece que a assíntota horizontal corresponde ao valor de a na função e a é um valor positivo. Maria, na resposta que apresenta (Figura 27), revela compreender o significado das letras a e b na expressão apresentada, conseguindo associá-las corretamente às assíntotas horizontais e verticais:


1

Como (a) corresponde ao valor da assíntota horizontal, e no gráfico o seu valor é maior que 0, então $a > 0$

Como (b) corresponde ao valor da assíntota vertical, e no gráfico o seu valor é menos que 0, então $b < 0$

logo → (B)//

Figura 27 - Resolução de Maria (Tarefa 4, questão 1)

A aluna refere que a corresponde ao valor da assíntota horizontal e b ao valor da assíntota vertical. Dá ainda a entender que utilizou o gráfico da função para decidir se a e b são inferiores ou superiores a zero. Aliás, só mesmo pela análise do gráfico era possível tirar esta conclusão.

Questão dois (Figura 28).

2. Considera a função g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, definida por $g(x) = \frac{x-2}{x-3}$.

Em cada uma das opções seguintes estão escritas duas equações.

Em qual das opções as duas equações definem as assíntotas ao gráfico de g?

(A) $x = 2$ e $y = 1$

(B) $x = 2$ e $y = 2$

(C) $x = 3$ e $y = 1$

(D) $x = 3$ e $y = 2$

Figura 28 - Enunciado da questão 2 da Tarefa 4

Nesta questão espera-se que os alunos pensem numa estratégia de resolução que passe pela divisão inteira de polinómios, de modo a conseguir escrever a função racional na forma $a + \frac{b}{x-c}$ e identificar facilmente as suas assíntotas. Alternativamente, o aluno pode aplicar os processos já estudados para determinar assíntotas verticais e horizontais ao gráfico de uma função. É o caso de Maria que recorre aos processos de determinação de assíntotas verticais e horizontais utilizados nas tarefas 1 e 2 para determinar as assíntotas (Figura 29):

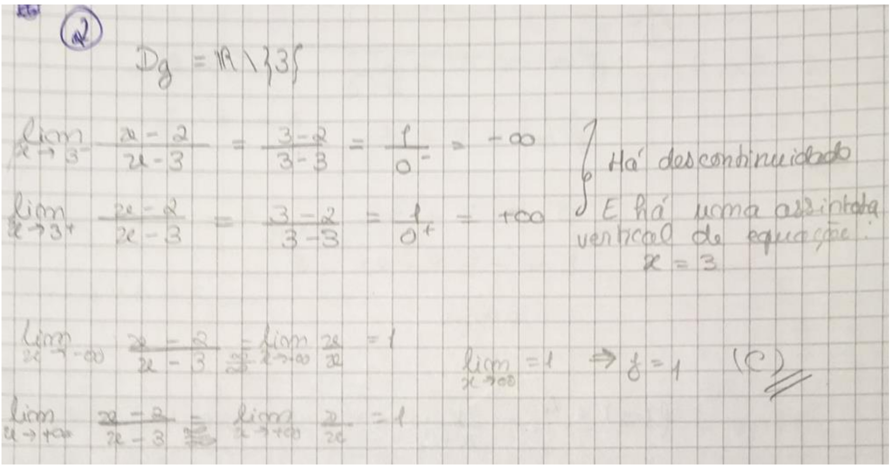


Figura 29 - Resolução de Maria (Tarefa 4, questão 2)

Com o domínio da função, determinou os limites quando x tende para 3 por valores inferiores e superiores a 3, sendo que 3 é um ponto de descontinuidade, como indica a aluna ao escrever “Há descontinuidade”. Como o resultado, de ambos os limites, é infinito, conclui que $x = 3$ é assíntota vertical. Em seguida, utiliza o processo estudado para determinar as assíntotas horizontais. Calcula os limites quando x tende para $-\infty$ e $+\infty$ e obtém 1 como resultado de ambos. Conclui, desta forma, que $y = 1$ é assíntota horizontal.

Camila recorre também ao cálculo dos limites para determinar a equação das assíntotas verticais e horizontais (Figura 30). Mas, enquanto Maria calculou o limite da função quando x tende para 3^- e 3^+ para determinar assíntotas verticais e quando x tende para $+\infty$ e para $-\infty$ para determinar assíntotas horizontais, Camila calculou apenas o limite quando x tende para $+\infty$ e concluiu uma assíntota horizontal e calculou apenas o limite quando x tende para 3^- e concluiu uma assíntota vertical.

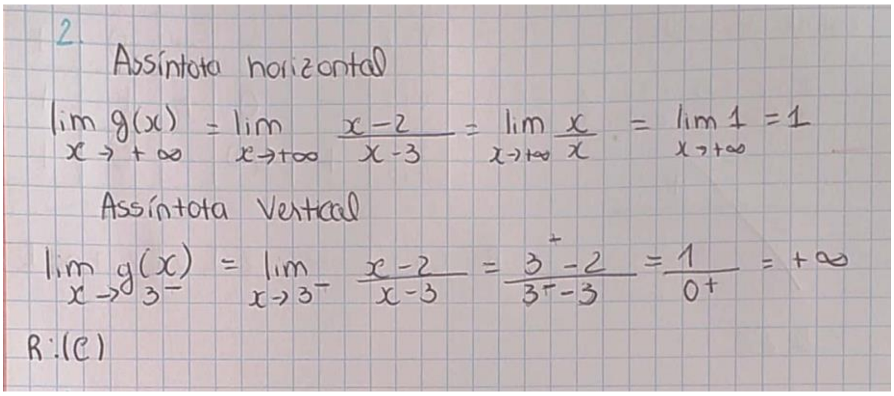


Figura 30 - Resolução de Camila (Tarefa 4, questão 2)

De facto, no caso das assíntotas verticais basta que um dos limites laterais dê infinito para concluir a existência de uma assíntota vertical. Por outro lado, ao calcular o limite quando x tende para $+\infty$ e obter 1, conclui que $y = 1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função apenas em $+\infty$. Tendo em conta que esta é uma questão de escolha múltipla, a resolução da aluna é suficiente para determinar a opção correta. Caso não o fosse, teria de apresentar uma resolução mais completa e mais cuidado no que afirma relativamente às assíntotas horizontais.

Marta pensa nesta questão de forma diferente (Figura 31). A aluna reconhece que g é uma função racional. Assim, consegue escrever a expressão $\frac{x-2}{x-3}$ na forma $a + \frac{b}{x-c}$, recorrendo à divisão inteira de polinómios e obtendo $g(x) = \frac{x-2}{x-3} = 1 + \frac{1}{x-3}$.

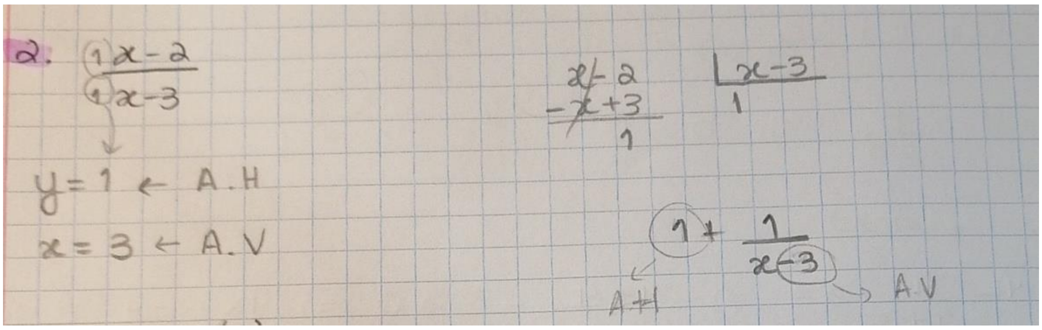


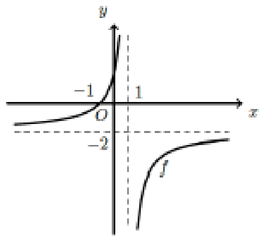
Figura 31 - Resolução de Marta (Tarefa 4, questão 2)

Desta forma, consegue identificar facilmente as assíntotas pedidas pois já sabe que a corresponde ao valor da assíntota horizontal e c ao valor da assíntota vertical.

Questão três (Figura 32).

3. Na figura seguinte, está representada, num referencial o.n. xOy, parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f.

O gráfico da função f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -1.
As retas de equações $x = 1$ e $y = -2$ são as assíntotas do gráfico da função f.



3.1. Responde às seguintes questões sem efetuar cálculos, ou seja, recorrendo apenas à leitura do gráfico.

3.1.1. Indica o contradomínio da função f.

3.1.2. Apresenta, usando a notação de intervalos de números reais, o conjunto solução da condição $f(x) \leq 0$.

3.2. Define, por uma expressão analítica, a função f.

Figura 32 - Enunciado da questão 3 da tarefa 4

Na questão 3.1. é pedido o contradomínio da função f e o conjunto-solução da inequação $f(x) \leq 0$. A resposta a esta questão deveria ser dada apenas recorrendo à representação gráfica da função, apresentada no enunciado, e os alunos não revelaram dificuldades na sua resolução.

Na questão 3.2. os alunos têm de definir a expressão analítica da função f dada a sua representação gráfica e conhecidas as suas assíntotas vertical e horizontal.

Camila (Figura 33) decidiu escrever a função f utilizando uma expressão da forma $a + \frac{b}{x-c}$. Sabendo que a corresponde ao valor da assíntota horizontal e c ao valor da assíntota vertical, identificando-os como sendo -2 e -1, respetivamente. Para encontrar o valor de b utilizou a informação do enunciado "O gráfico da função f interseta o eixo Ox no ponto de abcissa -1" justificando assim a utilização do ponto $P(-1,0)$. Camila não apresenta a expressão algébrica final escrita na forma $a + \frac{b}{x-c}$ a que inicialmente recorreu. Decidiu efetuar ainda alguns cálculos até obter a expressão $y = \frac{-2x-2}{x-1}$, que apresenta como resposta final apesar de não designar corretamente a função:

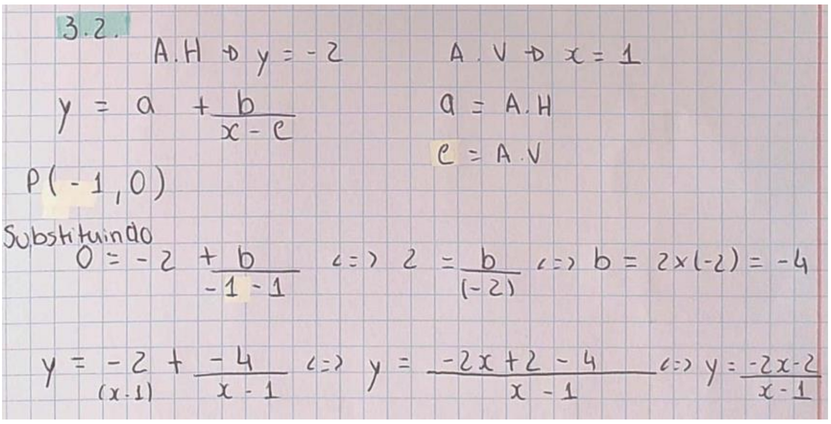


Figura 33 - Resolução de Camila (Tarefa 4, questão 3.2)

Já Afonso apresenta uma resolução desorganizada e bastante curta (Figura 34):

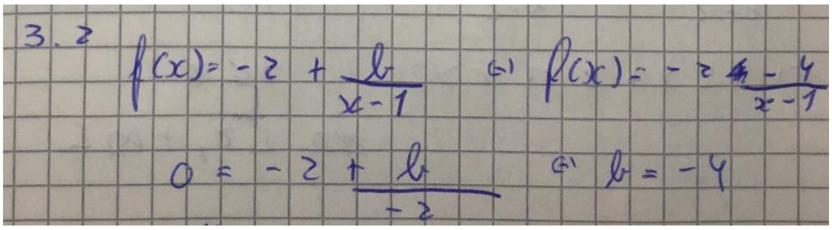


Figura 34 - Resolução de Afonso (Tarefa 4, questão 3.2)

Escreve $f(x) = -2 + \frac{b}{x-1}$, tendo em conta já as assíntotas vertical e horizontal. Faltando apenas determinar o valor de b, escreve $0 = -2 + \frac{b}{-2} \Leftrightarrow b = -4$. Compreende-se assim que utilizou o ponto $(-1,0)$ para determinar o valor de b. Posto isto, determina analiticamente a expressão da função f e ao contrário do que fez Camila, Afonso apresenta-a escrita na forma $a + \frac{b}{x-c}$.

Ainda nesta questão, Daniela é a aluna que apresenta a resolução mais clara pois explica todos os passos que efetua na sua resolução (Figura 35):

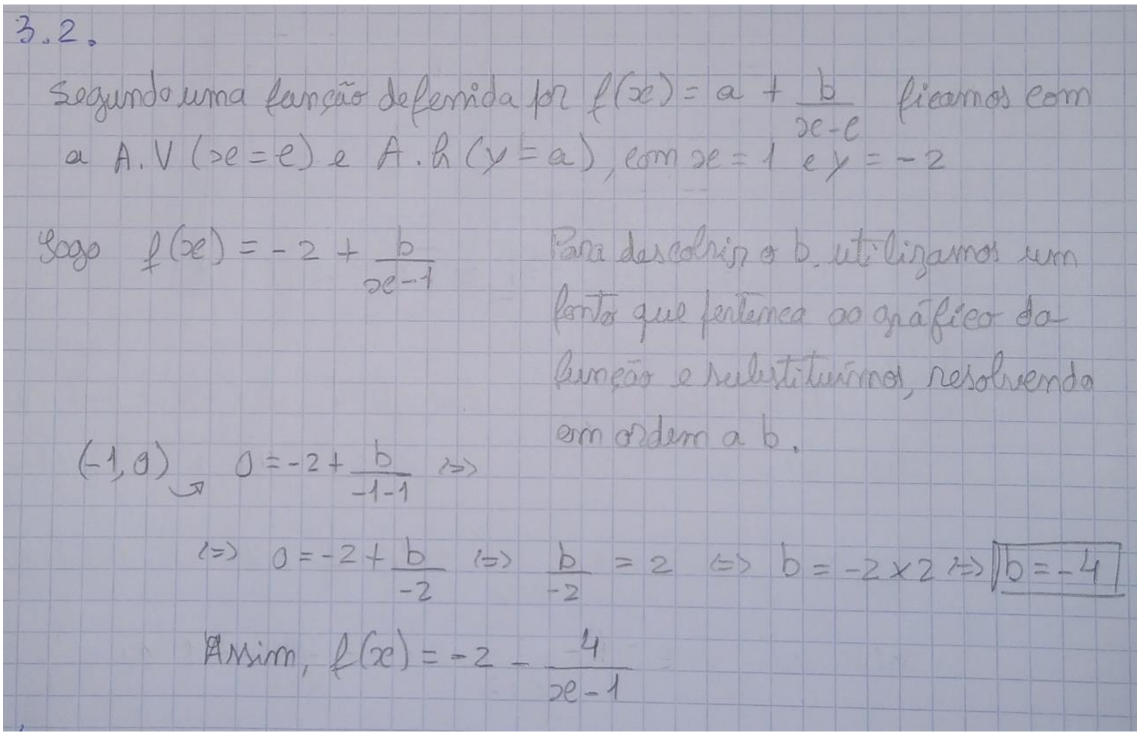


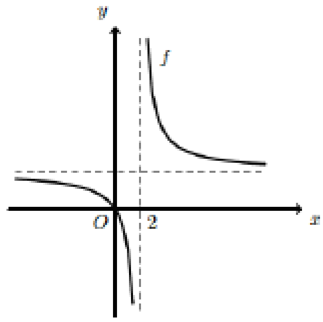
Figura 35 - Resolução de Daniela (Tarefa 4, questão 3.2)

Começa por recuperar um resultado já conhecido: "função definida por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ ficamos com a A.V.($x = c$) e a A.h. ($y = a$)". Desta forma, a aluna identifica de imediato que a assíntota vertical é $x = 1$ e a assíntota horizontal é $y = -2$. Determinados os valores de a e c da expressão algébrica da função, explica "utilizamos um ponto que pertence ao gráfico da função e substituímos, resolvendo em ordem a b". Concretizando o processo que indicou, Daniela conseguiu obter a expressão algébrica da função f.

Questão quatro (Figura 36).

Nesta questão é pedido aos alunos para indicarem os valores de a e c e determinar o valor de b na expressão da função f dada por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$. Pretendia-se que os alunos fossem capazes de escrever a expressão algébrica de uma função racional tendo em conta a sua representação gráfica e as informações que têm sobre as suas assintotas verticais e não verticais.

4. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, bem como as duas assíntotas deste gráfico.



Tal como a figura sugere,

- A origem do referencial pertence ao gráfico de $\boldsymbol{f}$;
- Uma das assíntotas é paralela ao eixo $\boldsymbol{Ox}$;
- A outra assíntota é paralela ao eixo $\boldsymbol{Oy}$ e interseta o eixo $\boldsymbol{Ox}$ no ponto de abcissa 2.

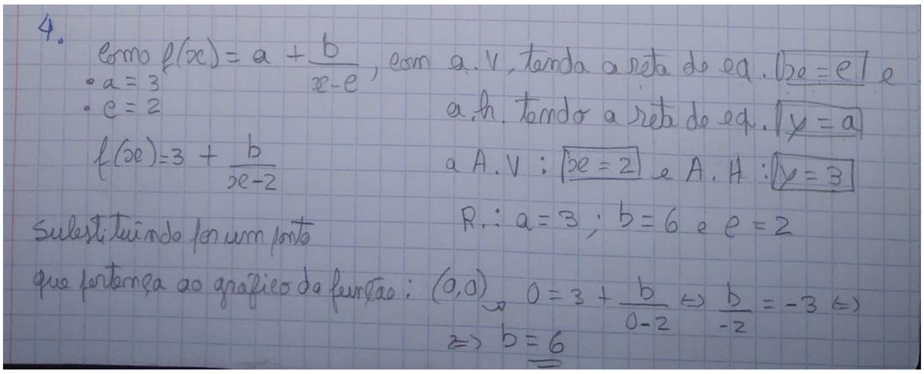
Admite ainda que:

- A assíntota ao gráfico de $\boldsymbol{f}$ é paralela ao eixo das abcissas e tem equação $\boldsymbol{y = 3}$;
- $\boldsymbol{f}$ é definida por uma expressão do tipo $\boldsymbol{f(x) = a + \frac{b}{x-c}}$ onde $\boldsymbol{a, b}$ e $\boldsymbol{c}$ $\in \mathbb{R}$.

Indica os valores de a e de c e determina o valor de b.

Figura 36 - Enunciado da questão 4 da tarefa 4

Nesta questão, idêntica à questão 3.2., os alunos utilizaram processos iguais. A resolução apresentada por Daniela (Figura 37) é muito cuidada e compreende-se bastante bem como procedeu a aluna para responder à questão.



4.

Como $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, com a.V. tendo a reta de eq. $\boxed{x=c}$ e a.h. tendo a reta de eq. $\boxed{y=a}$

• $a=3$

• $c=2$

$f(x)=3+\frac{b}{x-2}$

a A.V: $\boxed{x=2}$ e A.H: $\boxed{y=3}$

R.: $a=3$; $b=6$ e $c=2$

Substituindo por um ponto que pertença ao gráfico da função: $(0,0)$ → $0=3+\frac{b}{0-2} \Leftrightarrow \frac{b}{-2}=-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b=6$

Figura 37 - Resolução de Daniela (Tarefa 4, questão 4)

A aluna indica que $a = 3$ e $c = 2$ uma vez que, $x = 2$ e $y = 3$ são as assíntotas horizontal e vertical, respetivamente. Para determinar o valor de b, utiliza um ponto que pertence ao gráfico da função, como indicado no enunciado "A origem do referencial pertence ao gráfico de f", obtendo $b = 6$. A resolução de Mateus é semelhante à resolução apresentada por Daniela, mas menos pormenorizada (Figura 38).

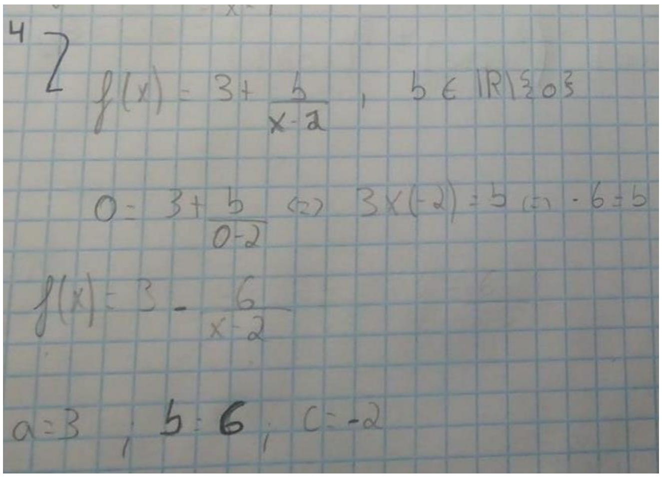


Figura 38 - Resolução de Mateus (Tarefa 4, questão 4)

O aluno começa logo por escrever que $f(x) = 3 + \frac{b}{x-2}$ (identifica $a = 3$ e $b = 2$), com o cuidado de referir que $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. De facto, b não pode assumir o valor zero, caso contrário, o gráfico da função seria uma reta horizontal o que não é verdade dada a representação gráfica apresentada no enunciado.

Questão cinco (Figura 39).

5. Considera a função f definida por $f(x) = 4 - \frac{4}{x+2}$.

Sem recorrer à calculadora, resolve as questões seguintes:

5.1. Determina o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $f(x) \geq 3$.

5.2. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. xOy:

- parte do gráfico da função $\boldsymbol{f}$;
- as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ que são assíntotas ao gráfico da função $\boldsymbol{f}$;
- o quadrilátero $[\boldsymbol{ABCD}]$.

A e B são pontos de interseção do gráfico da função f com os eixos coordenados.

C é o ponto de interseção das retas r e s.

D é o ponto de interseção da reta r com o eixo Oy.

Determina a área do quadrilátero $[ABCD]$.

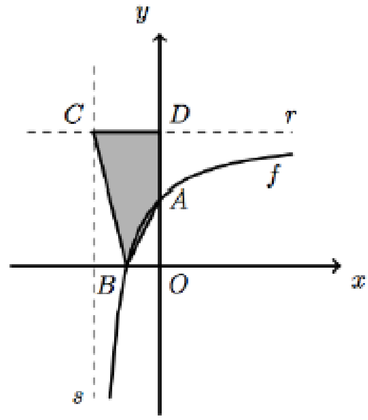


Figura 39 - Enunciado da questão 5 da tarefa 4

A quinta questão é talvez a questão mais exigente da tarefa. É necessário elaborar um plano de resolução que passa pela determinação das assíntotas verticais e horizontais, pela determinação dos pontos de interseção da função com os eixos coordenados e das coordenadas de outros pontos até, por fim, definir a área da figura. Para calcular a área do quadrilátero pedido, Mateus efetua a diferença entre a área de um retângulo e a soma da área dos triângulos $[CBE]$ e $[EOA]$ (Figura 40). O aluno designa esse retângulo por $[OBCD]$ o que não é correto pela observação da figura.

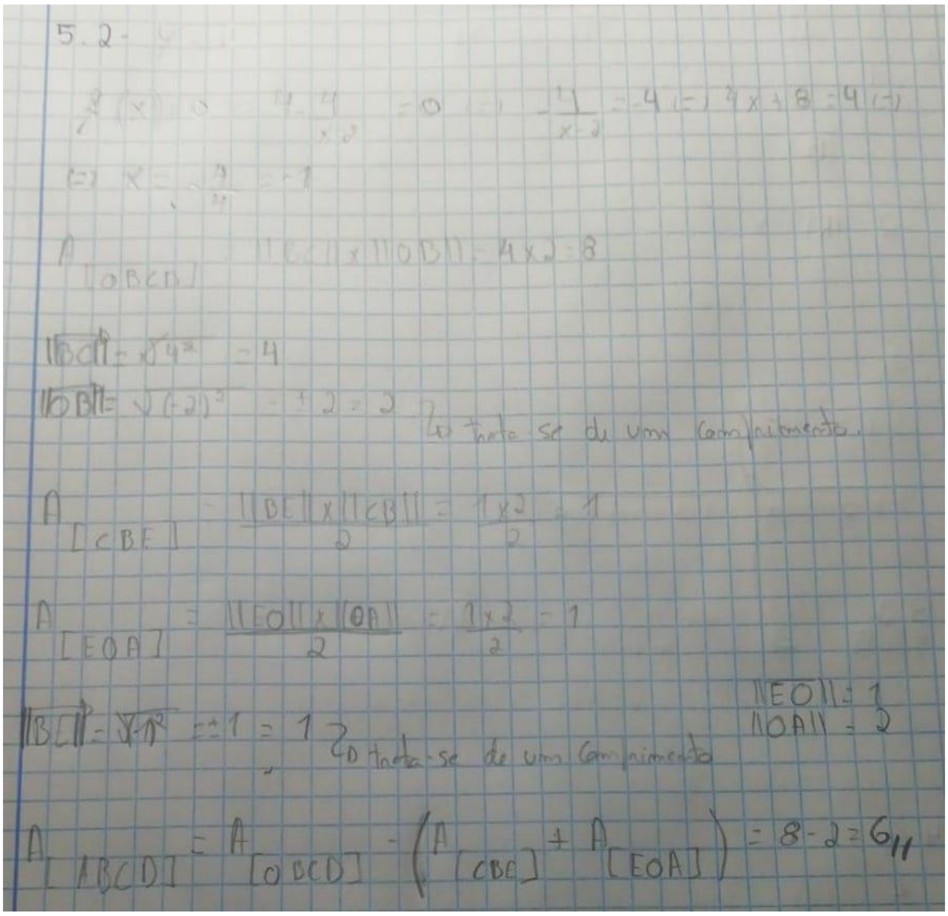


Figura 40 - Resolução de Mateus (Tarefa 4, questão 5)

Começa por determinar o ponto B, reconhecendo que corresponde à interseção da função com o eixo Ox e, por isso, efetua $f(x) = 0$. De seguida, recorre à norma de vetores para calcular as distâncias entre os pontos B e C e entre os pontos O e B. As coordenadas do ponto C resultam da interseção das assíntotas vertical e horizontal, mas Mateus não justifica como as determinou. Utiliza novamente o cálculo da norma de vetores para determinar a distância entre os pontos B e E. Os cálculos efetuados pelo aluno indicam que os dois triângulos têm a mesma área. De facto, identifica $[CE]$ como base do triângulo e $[CB]$ como altura. Mas os dois segmentos não são perpendiculares. O resultado final de Mateus para área do quadrilátero encontra-se errado devido a este erro na identificação da altura do triângulo. Um erro que já não era esperado, tendo em conta o ano de escolaridade.

Tal como Mateus, Maria também não justifica as equações que definiu como sendo assíntotas ao gráfico da função (Figura 41). Mostra os cálculos realizados para obter as coordenadas dos pontos A e B. Por fim, determina a área do quadrilátero fazendo a diferença entre a área do trapézio $[OBCD]$ e a área do triângulo $[AOB]$.

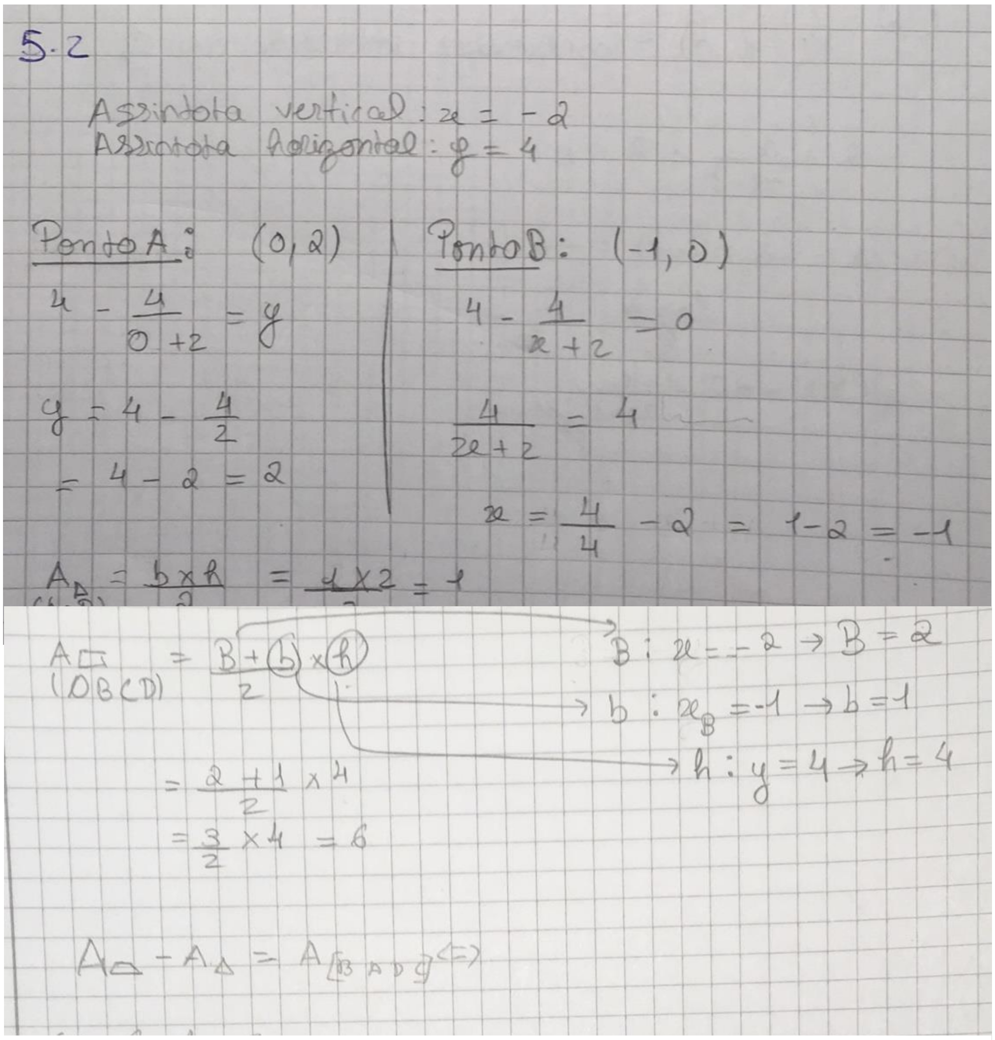


Figura 41 - Resolução de Maria (Tarefa 4, questão 5)

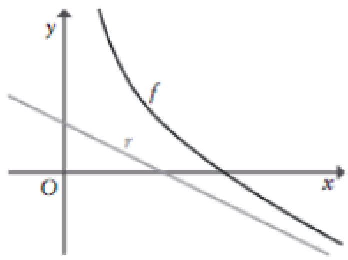
Repare-se que as resoluções de Mateus e Maria concluem valores diferentes para a área do quadrilátero. A resolução de Maria como vimos, não apresenta erros, e por isso, é correta. Ainda que nenhuma resolução apresente a determinação ou uma justificação das assíntotas consideradas, ambos consideraram as assíntotas corretas.

d) Teste escrito individual

O teste escrito individual (Anexo 06), constituído por cinco questões, pretende avaliar as aprendizagens dos alunos essencialmente no tópico Assíntotas ao gráfico de uma função. Previa-se a realização do teste escrito individual nas aulas nove e dez. Como tal não pode acontecer, foi combinada a data e a hora da sua realização. O teste foi enviado para o e-mail dos alunos à hora combinada previamente, devendo ser resolvido e reenviado no espaço de uma hora e trinta minutos. A primeira questão é ainda relacionada com o tópico Continuidade de uma função que, apesar de também se relacionar com o tópico em estudo, pretendia apenas verificar se os alunos sabem estudar a continuidade de uma função definida por ramos. Desta forma, não integrei a questão um do teste escrito na minha análise.

Questão dois (Figura 42).

2. No referencial da figura estão representadas uma função f e uma reta r, que é assíntota ao seu gráfico. A reta r interseta os eixos nos pontos de coordenadas $(0,1)$ e $(2,0)$.



Indica a afirmação verdadeira e justifica a tua resposta, apresentando todos os cálculos necessários.

(A) $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{1}{2}x-1\right)=0$ (B) $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x+1\right)=0$

(C) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+2x-1)=0$ (D) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x+1)=0$

Figura 42 - Enunciado da questão 2 do teste escrito

A segunda questão do teste escrito exigia aos alunos o conhecimento do processo para determinar uma assíntota não vertical ao gráfico de uma função e mobilização de conhecimentos anteriores, em particular, a escrita da equação cartesiana de uma reta. Camila começa por determinar a equação da reta que é assíntota oblíqua (Figura 43). Utiliza as coordenadas dos dois pontos que pertencem à reta, determina o declive e depois a ordenada na origem.

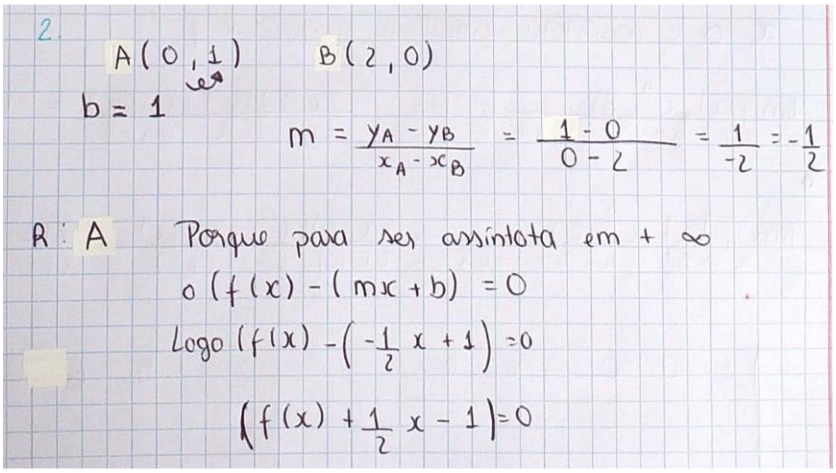


Figura 43 - Resolução de Camila (Teste escrito, questão 2)

Camila consegue estabelecer uma estratégia constituída por vários passos até obter a assíntota ao gráfico da função. Consegue desenvolver esta estratégia corretamente, mas na sua resolução, nunca apresenta explicitamente qual é essa reta. A aluna diz que, para a reta ser oblíqua, temos de verificar "$f(x) - (mx + b) = 0$" e, como isso acontece, a reta é assíntota. No entanto, devia sim referir que, $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$ para a reta ser assíntota. Daniela (Figura 44) apresenta uma resolução semelhante à de Camila:

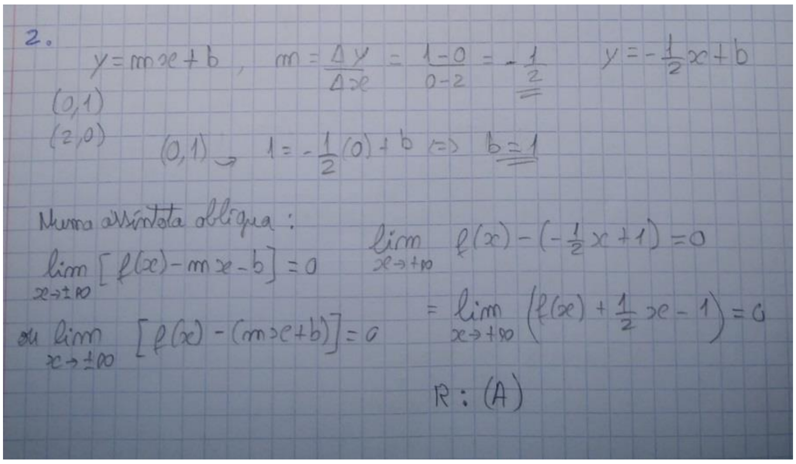


Figura 44 - Resolução de Daniela (Teste escrito, questão 2)

A aluna começa por escrever a equação da reta assíntota depois de determinar o declive (m) e a ordenada na origem (b) dessa reta. Relativamente ao limite, Daniela refere que se $y = mx + b$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico da função e, portanto, as duas conclusões são válidas: $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - b] = 0$.

Camila e Daniela utilizam estratégias idênticas. Mas Daniela é quem indica de forma correta que, o limite da diferença entre a função e a reta tem de ser zero.

Questão três (Figura 45).

3. Acerca da função f, sabe-se que:

- $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$
- É continua no seu domínio
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -3$ e $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) + x] = -3$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - 2x + 1] = 0$

Identifica as assíntotas ao gráfico da função f.

Figura 45 - Enunciado da questão 3 do teste escrito

Na questão 3 pretende-se que os alunos indiquem as equações das assíntotas ao gráfico da função, tendo em conta as afirmações dadas. Joel (Figura 46) revela, nesta questão, um conhecimento dos conteúdos envolvidos e da relação existente entre os limites e a determinação das assíntotas ao gráfico de uma função.

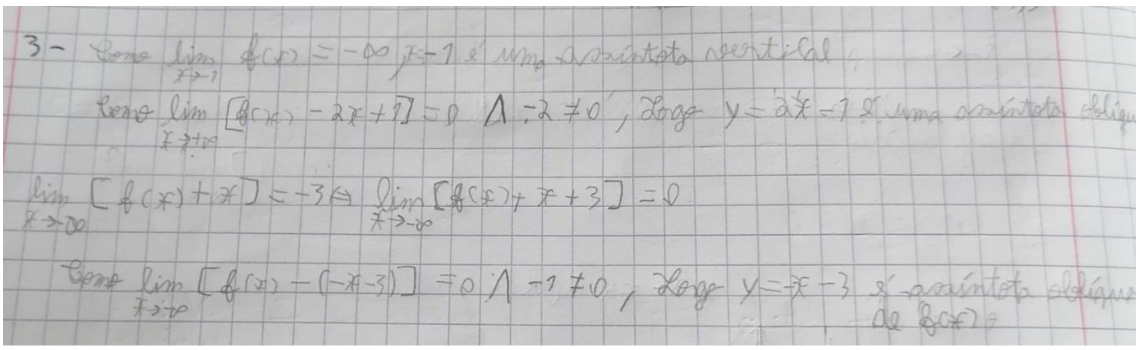


Figura 46 - Resolução de Joel (Teste escrito, questão 3)

O aluno aponta $x = 1$ como assíntota vertical ao gráfico da função pois $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$. Indica também que $y = 2x - 1$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico da função pois $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - 2x + 1)] = 0$. Por fim, da informação $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) +$

$x] = -3$ dada no enunciado, Joel conclui que também $y = -x - 3$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função. Sempre que é apresentado um limite referente a uma assíntota não vertical, o aluno refere que, como o coeficiente de x é diferente de zero, essa assíntota é oblíqua. Entende-se que, caso contrário, seria uma assíntota horizontal.

Também Carolina (Figura 47) e Júlia (Figura 48) conseguem reconhecer a que assíntota correspondem cada um dos limites. Aliás, na sua resolução as alunas reescrevem os limites e, perto de cada um deles, identificam a assíntota correspondente. Importante referir que todos estes alunos têm atenção ao facto de $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - 2x + 1)] = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - (2x - 1)]$ e, por isso, a assíntota é $y = 2x - 1$.

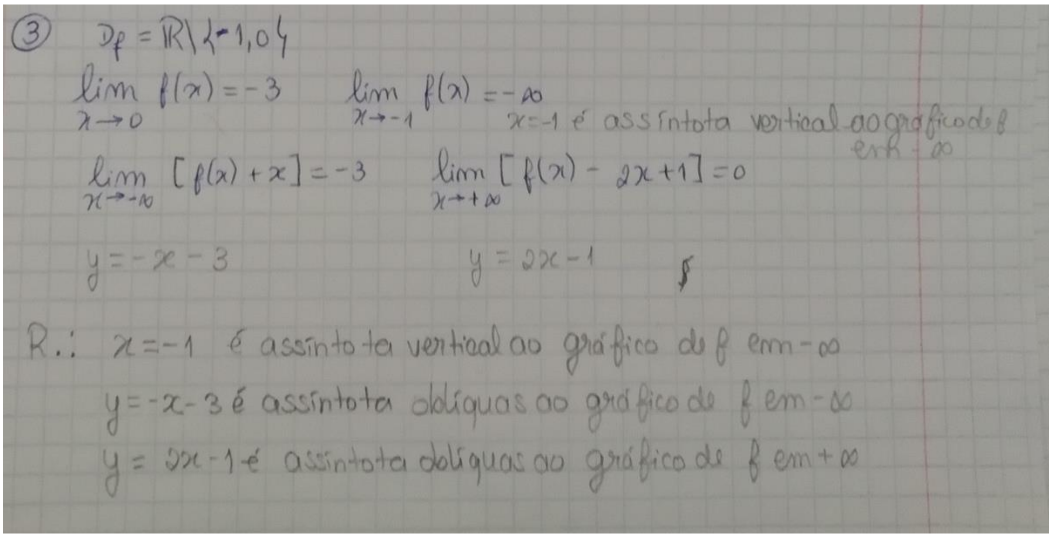


Figura 47 - Resolução de Carolina (Teste escrito, questão 3)

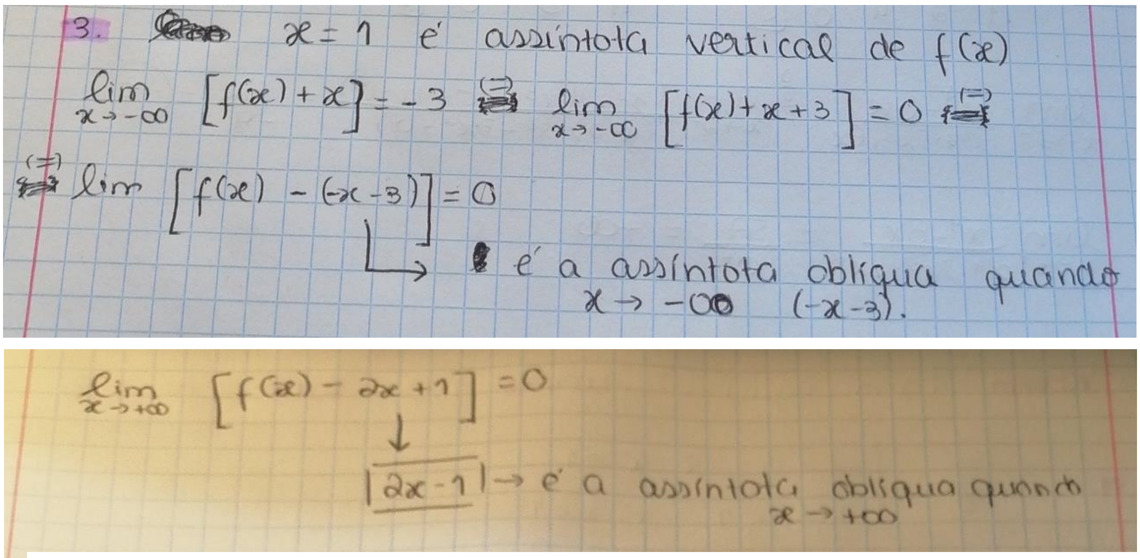


Figura 48 - Resolução de Júlia (Teste escrito, questão 3)

Joel, Carolina e Júlia sabem ainda que $\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = -3 \Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} [f(x) + x + 3] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-x - 3)] = 0$. Um pormenor importante relativamente à resolução de Júlia (Figura 30), é que a aluna , tal como já tínhamos visto na resolução das tarefas em aula, não diz que as assíntotas são $y = -x - 3$ e $y = 2x - 1$ mas escreve: "$-x - 3$ é a assíntota oblíqua quando $x \to -\infty$" e "$2x - 1$ é assíntota oblíqua quando $x \to +\infty$". Ainda nesta questão, Pedro apresenta uma conclusão errada: "y =3 é assíntota horizontal ao gráfico da função" (Figura 49).

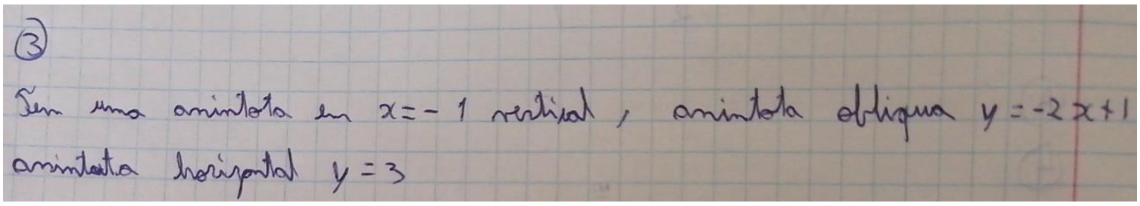


Figura 49 - Resolução de Pedro (Teste escrito, questão 3)

Pedro não considera o limite que é apresentado no enunciado: $\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = -3$. Talvez não tenha lido o enunciado com o cuidado necessário, ou, por outro lado, os conteúdos podem ainda não estar suficientemente claros para o aluno sendo necessário mais trabalho para que os desenvolva com compreensão e consiga ultrapassar as dificuldades que ainda parecem existir.

Questão quatro (Figura 50).

4. Estuda a existência de assíntotas ao gráfico da função f definida por

$$f(x) = \frac{x^4 - 8x}{x^4 - 5x^3 + 6x^2}$$

Figura 50 - Enunciado da questão 4 do teste escrito

A questão 4 pressupõe a identificação das assíntotas ao gráfico de uma função racional. Carolina apresenta uma resolução com bastante detalhe (Figura 51). Começa por determinar o domínio da função para encontrar os pontos aderentes ao domínio, que não pertencem ao domínio e calcular os limites laterais da função em cada um deles. Justifica o facto de $x = 0$ e $x = 3$ serem assíntotas verticais ao gráfico da função ao apresentar $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$. Por outro lado, ao calcular $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = -6$, conclui que $x = 2$ não é assíntota vertical ao gráfico da função. Revela assim o conhecimento de que, para que uma reta seja assíntota vertical ao gráfico da função, pelo menos um dos limites laterais nesse ponto tem de ser igual a $+\infty$ ou $-\infty$. Compreende-se também pela resolução apresentada que Carolina domina o cálculo de limites de funções, conseguindo através de manipulações algébricas determiná-los sem dificuldades. Para determinar as assíntotas não verticais, Carolina calcula $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ com o objetivo de obter o valor do declive de uma assíntota oblíqua. Ao obter zero como resultado do limite, prossegue para o cálculo dos limites da função em $+\infty$ e $-\infty$. Deste modo, entende-se que a aluna compreendeu que, sendo o declive zero, não existem assíntotas oblíquas, mas, eventualmente, assíntotas horizontais. Calcula ainda os limites quando x tende para $+\infty$ e para $-\infty$, obtendo o valor 1 no resultado de ambos. Conclui que $y = 1$ é assíntota horizontal em $+\infty$ e $-\infty$.

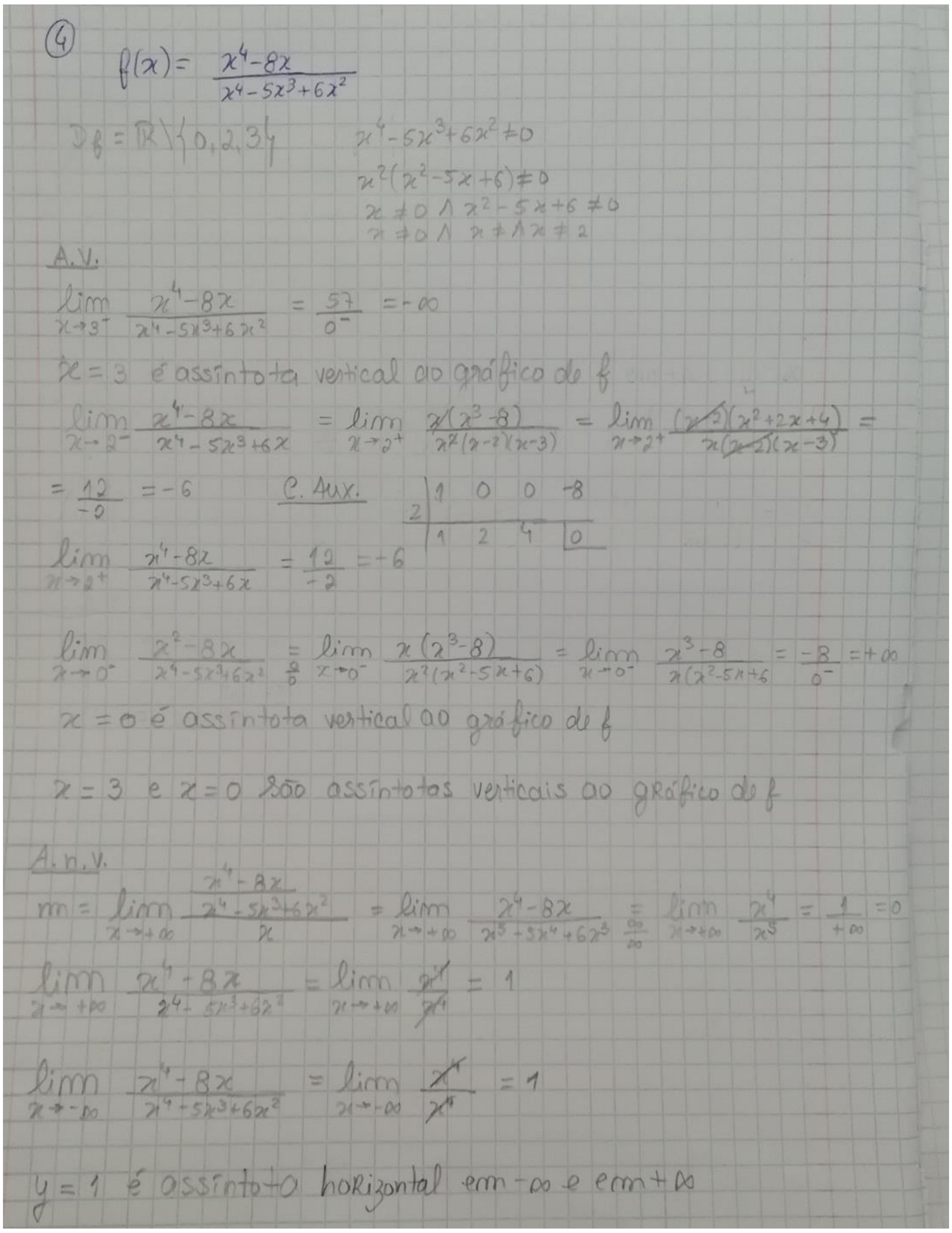


Figura 51 - Resolução de Carolina (Teste escrito, questão 4)

Tiago (Figura 52) procede exatamente como Carolina, exceto no momento de calcular as assíntotas não verticais ao gráfico da função.

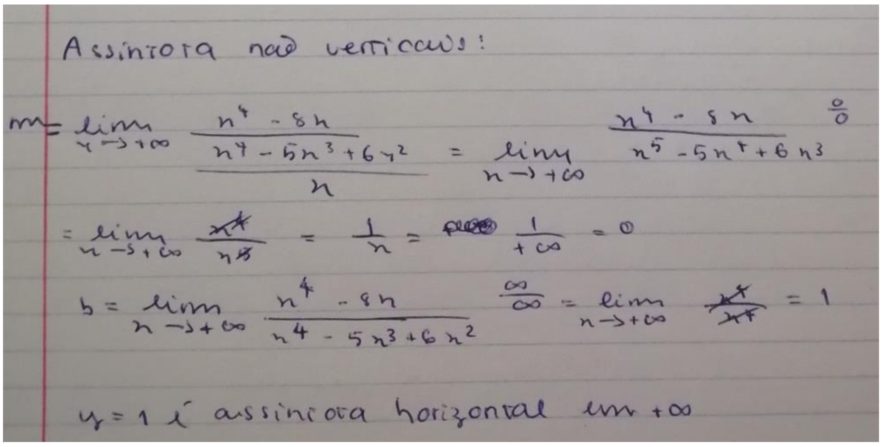


Figura 52- Resolução de Tiago (Teste escrito, questão 4)

Tiago calcula o $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ para obter o valor do declive de uma assíntota oblíqua. Obtém declive zero e calcula o valor de b que sabe resultar de $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 0x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$. O aluno recorre a outro processo válido para a determinação de assíntotas não verticais ao gráfico de uma função. No entanto, indica que $y = 1$ é assíntota horizontal apenas em $+\infty$. O que não corresponde à verdade. O aluno deveria ter aplicado o mesmo processo, mas para quando $x \to -\infty$, de modo a concluir que $y = 1$ também é assíntota horizontal em $-\infty$.

Outro aluno, David, começa por calcular os limites quando x tende para $+\infty$ e $-\infty$ (Figura 53). Em ambos obtém como resultado 1 e não tem dúvidas em conjeturar que $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico da função.

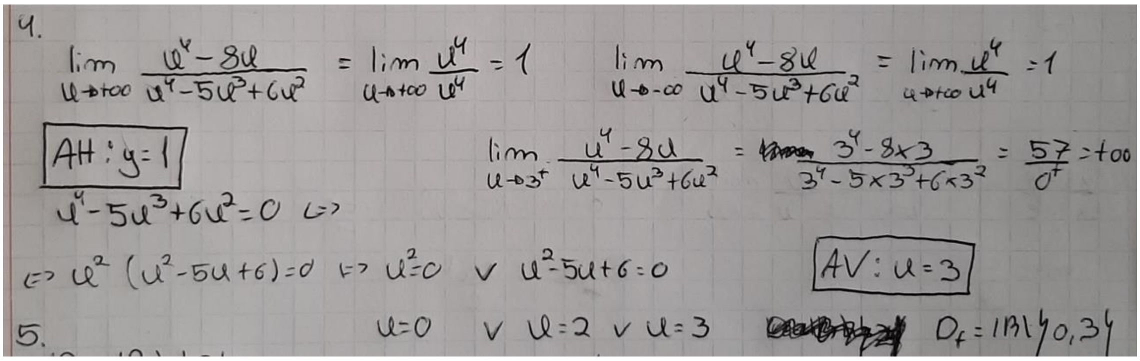


Figura 53- Resolução de David (Teste escrito, questão 4)

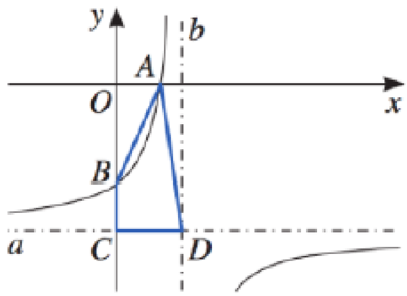
As principais dificuldades de David surgem no cálculo das assíntotas verticais. David determina os zeros do denominador da função fazendo $x^4 - 5x^3 + 6x^2 = 0$. Obtém corretamente os três zeros do denominador (0, 2 e 3) para os quais a função não está definida. Contudo, apresenta incorretamente o domínio como sendo $\mathbb{R}\backslash\{0, 3\}$.

Determina o limite quando x tende para três por valores superiores a três e concluiu que $x = 3$ é assíntota vertical. No entanto, não aplica o mesmo processo para verificar se $x = 0$ é assíntota vertical. Não se compreende porque David procura justificar que $x = 3$ é assíntota pelo cálculo do limite e não o faz também para $x = 0$, já que conclui ser um ponto que não pertence ao domínio.

Questão cinco (Figura 54).

5. Seja f uma função real de variável real definida por:

$$f(x) = \frac{20 - 10x}{x - 3}$$



Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy:

- As retas a e b, assíntotas ao gráfico de f;
- Os pontos A e B, que resultam da interseção do gráfico da função f com os eixos coordenados;
- O ponto D, interseção das assíntotas a e b;
- O ponto C, interseção da reta a com o eixo Oy;
- O quadrilátero $[ABCD]$.

Determina a área do quadrilátero $[ABCD]$.

Figura 54 - Enunciado da questão 5 do teste escrito

Na resolução da última questão, os alunos tinham de estabelecer uma estratégia de resolução constituída por várias etapas que passam pela determinação das assíntotas verticais e horizontais, os pontos de interseção da função com os eixos coordenados e na decomposição do quadrilátero [ABCD] em figuras geométricas de forma a conseguirem obter a sua área. Analisei as resoluções de todos os alunos e verifiquei que poucas apresentam a justificação de que $x = 3$ e $y = -10$ são assíntotas ao gráfico da função. A maioria dos alunos formula as conjeturas, mas não as justifica. Pelo contrário, David apresenta a justificação com o domínio da função e o cálculo dos limites (Figura 55). Consegue calcular sem dificuldade os pontos de interseção da função com os eixos coordenados justificando também a sua resposta com o cálculo de ambos. Para determinar a área do quadrilátero, David efetuou a diferença entre a área do trapézio [AOCD] e a área do triângulo [AOB], obtendo corretamente o resultado pretendido.

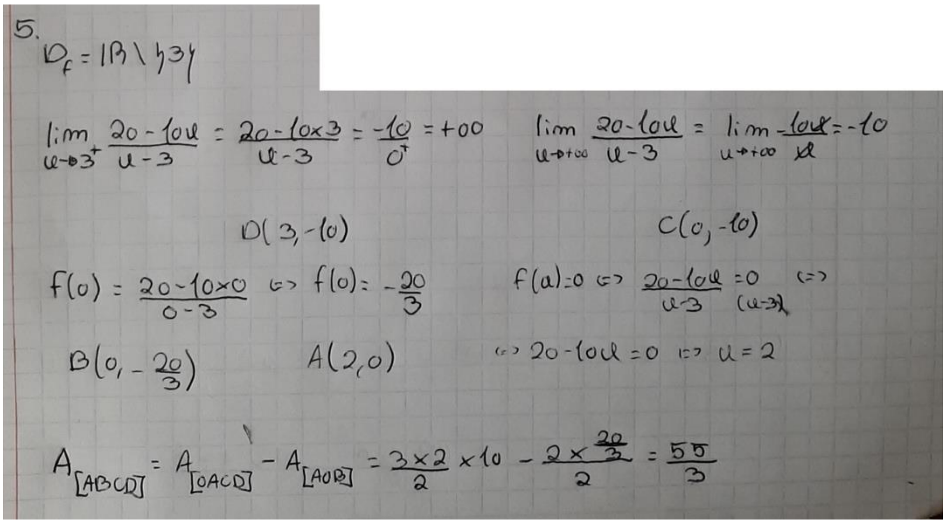


Figura 55 - Resolução de David (Teste escrito, questão 5)

Ainda na última questão, verificamos pela resolução que se segue (Figura 56), de Tiago, que este não justifica porque define assim as coordenadas dos pontos necessários para determinar a área, contrariamente a David. Para determinar a área, este aluno efetua a diferença entre a área de um retângulo e a soma da área do triângulo [OAB] e, como refere o aluno, do triângulo "[AEb]". Apesar de se compreender, Analisando a figura, de que triângulo se trata, o aluno não identifica qual é o ponto E a que se refere e não escreve uma designação apenas com letra maiúsculas.

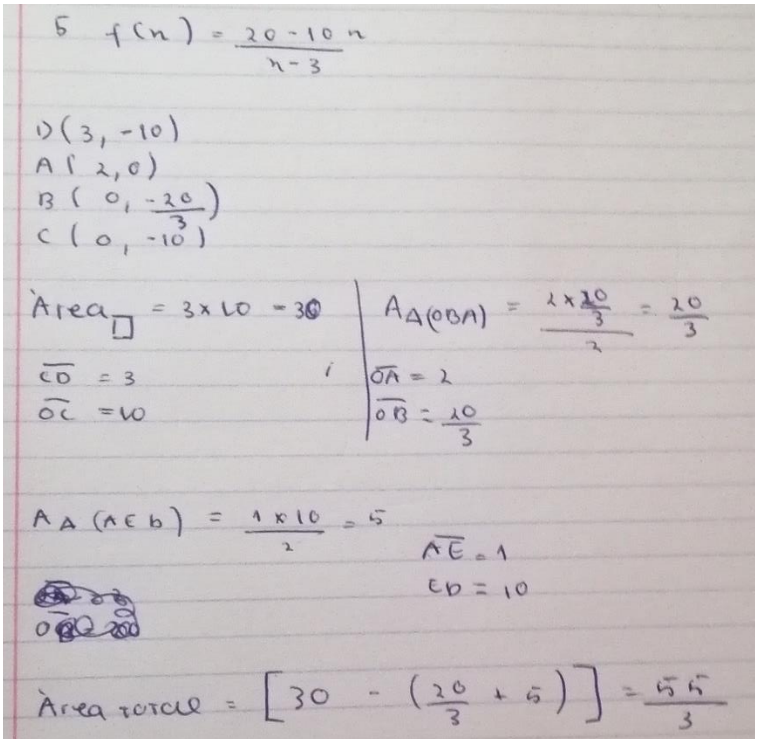


Figura 56 - Resolução de Tiago (Teste escrito, questão 5)

Esta é a questão onde foram verificadas mais dificuldades. Os alunos interpretaram corretamente o que era pedido na tarefa e conseguiram estabelecer uma estratégia com vista à determinação da área pedida. Para a presente investigação importa analisar o desempenho dos alunos na determinação das assíntotas ao gráfico da função. Nesta questão, que é semelhante à questão 5 da tarefa 4, os alunos têm de determinar as assíntotas vertical e horizontal. David efetua o cálculo dos limites para as determinar, mas Tiago apenas escreve as coordenadas dos pontos necessários para calcular a área do quadrilátero. Apesar destes pontos terem por detrás a determinação das assíntotas, o aluno nunca faz qualquer referência às retas nem à forma com as determinou. Apesar de nem todos os alunos terem apresentado o processo utilizado para determinar as assíntotas ao gráfico da função, todos as conseguem indicar corretamente, aliás como é visível na escrita das coordenadas dos pontos A, B, C e D.

Segue-se uma análise quantitativa dos resultados obtidos em cada uma das questões relacionadas com o tópico Assíntotas ao gráfico de uma função, que constituem o teste escrito individual. Para efeitos de contagem, as respostas foram classificadas em: resposta correta, resposta parcialmente correta e resposta incorreta/sem resposta.

A tabela 3, relativa à segunda questão do teste escrito, revela que 86% dos alunos conseguiu dar uma resposta totalmente correta. Apesar de esta ser uma questão de escolha múltipla, muitas resoluções apresentam uma justificação para a opção selecionada, o que permite comprovar a compreensão dos conceitos envolvidos e não apenas a escolha de uma opção ao acaso. Apenas um aluno na turma apresentou uma resposta totalmente incorreta. Precisamente, foi o aluno que apenas iniciou as aulas em março, por ter vindo de outro país. Isto poderá explicar a apresentação de uma resposta incorreta. No entanto, não é possível compreender qual o erro cometido pois o aluno indicou apenas a opção que considera correta.

Tabela 3 - Classificação das respostas dos alunos na questão 2 do teste escrito

Questão 2	Frequência absoluta (número de alunos)	Frequência relativa (em %)
Resposta correta	19	86
Resposta parcialmente correta	2	9
Resposta incorreta/sem resposta	1	5
Total	22	100%

A tabela 4 distribui as respostas dos alunos na questão 3 pelas três categorias consideradas. A percentagem de respostas corretas (41%) foi inferior à percentagem de respostas parcialmente corretas (50%), o que pode ser justificado pelo facto de ser uma questão onde é pedido que se identifiquem as retas correspondentes às assíntotas e, se apresente uma justificação para a indicação de cada uma delas. É necessário que os alunos analisem cuidadosamente cada um dos quatro limites apresentados, para averiguar se algum deles permite inferir a equação de uma assíntota.

Tabela 4 - Classificação das respostas dos alunos na questão 3 do teste escrito

Questão 3	Frequência absoluta (número de alunos)	Frequência relativa (em %)
Resposta correta	9	41

Resposta parcialmente correta	11	50
Resposta incorreta/sem resposta	2	9
Total	22	100%

Na tabela 5 apresenta-se o cenário de respostas associado à questão 4 do teste escrito. O desempenho dos alunos foi mais baixo, relativamente às outras questões do teste. Uma explicação para esta situação poderá ser o facto de ser uma questão de resposta aberta, em que apenas é dada a expressão algébrica de uma função e os alunos têm de determinar todas as assíntotas ao gráfico dessa função. Isto implica, aplicar um processo para determinar assíntotas verticais, outro para determinar assíntotas horizontais e outro para determinar assíntotas oblíquas. Alguns alunos revelam pouca experiência na concretização dos processos que permitem determinar as assíntotas ao gráfico de uma função. Por outro lado, alguns alunos que conhecem esses processos, não conseguem interpretar corretamente o que deles. Estas duas situações correspondem certamente às respostas parcialmente corretas. É ainda necessária uma certa organização na resposta para que o aluno saiba em cada momento o que já fez, o que falta fazer e que conclusões já obteve. Para além disso, também a apresentação de justificações formais é necessária numa questão como esta.

Tabela 5 - Classificação das respostas dos alunos na questão 3 do teste escrito

Questão 4	Frequência absoluta (número de alunos)	Frequência relativa (em %)
Resposta correta	5	23
Resposta parcialmente correta	16	72
Resposta incorreta/sem resposta	1	5
Total	22	100%

A tabela 6 considera as percentagens dos alunos em cada uma das categorias definidas para avaliar o desempenho dos alunos nas questões do teste individual. Como referi anteriormente na questão 5 da tarefa 4, nesta questão, importa essencialmente analisar o desempenho dos alunos na determinação das assíntotas vertical e horizontal ao gráfico da função. A questão envolve outros processos, como a determinação das coordenadas dos pontos de interseção de uma função com os eixos coordenados ou a determinação da área de um polígono, que não são o foco desta investigação. Os três alunos que surgem na linha referente a Resposta incorreta/sem reposta são alunos que não apresentaram mesmo nenhuma resposta a esta questão. Encontro dois motivos para isto: má gestão do tempo de realização do teste e, sendo a última questão, não a conseguiram realizar; ou dificuldade na elaboração de uma estratégia de resolução que envolve várias etapas até determinar a área. A percentagem de respostas parcialmente corretas ser superior à de respostas corretas verifica-se porque, estes alunos, apesar de terem efetuado corretamente os processos para determinar as coordenadas dos pontos necessários para o cálculo da área do polígono, a área do polígono não foi efetuada corretamente devido a erros na decomposição do polígono em figuras e no cálculo da área dessas figuras.

Tabela 6 - Classificação das respostas dos alunos na questão 5 do teste escrito

Questão 5	Frequência absoluta (número de alunos)	Frequência relativa (em %)
Resposta correta	9	41
Resposta parcialmente correta	10	45
Resposta incorreta/sem resposta	3	14
Total	22	100%

A sequência de tarefas propostas ao longo da intervenção pretendia que os alunos explorassem, primeiramente, um caso específico relacionado com assíntotas verticais (tarefa 1), horizontais (questão 1 da tarefa 2) e oblíquas (questão 2 da tarefa 2). As tarefas foram construídas com este objetivo: os alunos exploram um exemplo concreto em cada tarefa com vista a formular conjeturas e generalizações no momento de discussão coletiva ou síntese final. As tarefas 1 e 2 pretendiam a compreensão do processo de determinação de assíntotas verticais e não verticais, respetivamente. As tarefas foram propostas com os seguintes objetivos de aprendizagem: 1) Compreender o conceito de assíntota ao gráfico de uma função; 2) Conhecer e compreender os processos que permitem determinar assíntotas verticais, horizontais e oblíquas ao gráfico de uma função; 3) Reconhecer que, dada uma função escrita na forma $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $x = c$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função e $y = a$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função.

Além de concretizar estas aprendizagens, pretendia-se que os alunos utilizassem a análise do gráfico da função como um apoio à resolução analítica e como meio de apoio à compreensão do conceito de assíntota. Devem compreender que, somente a análise do gráfico não constitui uma justificação formal suficiente no 11.º ano de escolaridade.

As aprendizagens realizadas pelos alunos verificam-se nas resoluções apresentadas. A maioria dos alunos apresenta fluência processual e consegue aplicar os processos estudados para determinadas assíntotas verticais, horizontais e oblíquas. Os alunos são capazes de identificar as assíntotas verticais com resultado obtido no cálculo dos limites laterais num determinado ponto. Da mesma forma, conseguem verificar que uma reta não é assíntota vertical se o limite à direita e à esquerda de um determinado ponto não der infinito. Para determinar as assíntotas horizontais, os alunos calculam os limites quando x tende para $+\infty$ e para $-\infty$. Para verificar se uma reta é assíntota oblíqua ao gráfico de uma função, calculam o limite da diferença entre a função e a reta suspeita quando x tende para $+\infty$ e para $-\infty$. Sabem que, basta obter o resultado zero num desses limites para confirmar que essa reta é uma assíntota oblíqua em $+\infty$ e/ou em $-\infty$.

As dificuldades manifestadas pelos alunos começam por se verificar na determinação de assíntotas verticais. Depois de identificado o ponto aderente ao domínio que não pertence ao domínio, no primeiro caso que estudado (questão 1, tarefa 1), os alunos calcularam apenas o limite à esquerda desse ponto, enquanto que no segundo caso (questão 2, tarefa 2) já calcularam os limites à direita e à esquerda do ponto. Isto gerou alguma confusão e indecisão relativamente ao cálculo dos limites para determinar assíntotas verticais.

Quanto ao cálculo de assíntotas verticais, horizontais e oblíquas, os alunos revelaram dificuldade em definir uma estratégia sistemática para determinar estas assíntotas. Nos momentos de discussão coletiva e síntese final um dos objetivos era os alunos formularem um processo de determinação de qualquer tipo de assíntota. Apesar de os alunos terem demorado a conseguir formulá-lo, através da análise e discussão dos casos particulares estudados nas tarefas 1 e 2, conseguiram fazê-lo. Ainda relativamente às estratégias utlizadas para determinar assíntotas ao gráfico de uma função, por vezes, os alunos argumentam a sua existência apenas porque "viram" no gráfico. O considerar que se podem identificar e determinar assíntotas apenas pela análise do gráfico da função tornou-se uma dificuldade verificada nas resoluções de vários alunos. Por exemplo, Mateus no seu teste escrito responde à questão dizendo que analisou o gráfico e identificou aquelas assíntotas. Este tipo de considerações provoca erros que poderão facilmente ser ultrapassados se os alunos fizeram todo o processo de determinação de assíntotas pelo método analítico e recorreram apenas ao gráfico para confirmar resultados obtidos ou para identificar potenciais retas assíntotas.

O modo como os alunos se referiram às assíntotas nem sempre foi correto. Nos diálogos que foram sendo apresentados é possível identificar diversas situações em que os alunos se referem à assíntotas como pontos e não como retas. Nomeadamente, na análise de representações gráficas referiram diversas vezes que o gráfico se aproxima de um determinado ponto ou valor, ao invés de uma reta. Sempre identifiquei situações como esta tentei corrigir e insistir na questão "Aproxima-se de...?".

A realização de discussões coletivas no final de cada tarefa e de sínteses finais no final de cada aula, permitiu esclarecer este e outros aspetos essenciais para a compreensão dos conceitos trabalhados, para a revisão dos conteúdos e, para ultrapassar dificuldades através do confronto de resoluções e análise de estratégias distintas.

5.2. Raciocínio na aprendizagem das assintotas

5.2.1. Formulação de conjeturas

Questão 1.2. da tarefa 1 (Anexo 01). Nesta questão é pedida a representação gráfica da função $A(d) = \frac{5}{5-d}$, para que o aluno comece a conhecer a relação existente entre uma função e a respetiva assíntota vertical. Na discussão coletiva, são apresentadas no quadro duas representações gráficas distintas. A representação de Júlia e Leonor (Figura 57) procura ter em conta o domínio da função, indicado no enunciado. A representação dos alunos Mateus e Madalena (Figura 58) que não tem o domínio em atenção. Tiago não está satisfeito com a representação de Júlia e Leonor pois considera que ainda assim o domínio não está a ser corretamente representado.

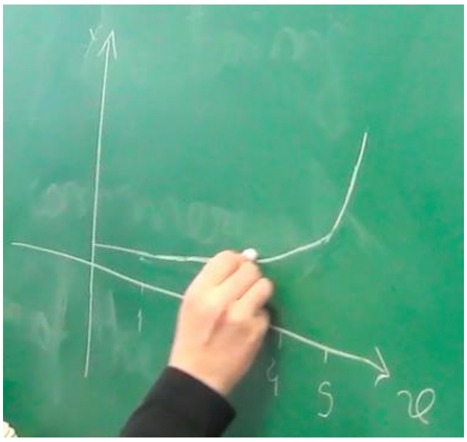


Figura 57 - Resolução de Júlia e Leonor (Tarefa 1, questão 1.2)

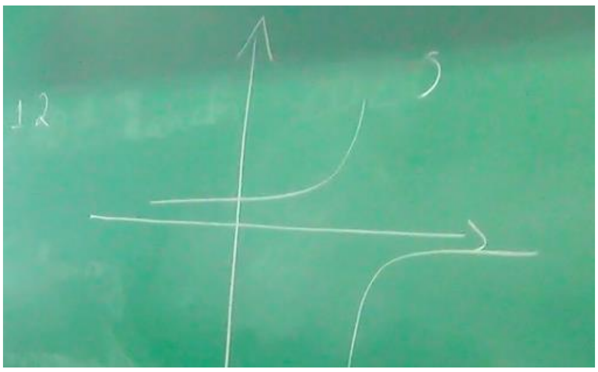


Figura 58 - Resolução de Mateus e Madalena (Tarefa 1, questão 1.2)

O aluno relembra que 5 não pertence ao domínio da função e, quando lhe peço para ir ao quadro corrigir o gráfico, hesita um pouco pois não sabe se deve ou não representar a reta de equação $d = 5$.

> *Tiago:* Mas calma tenho de fazer a reta, não é? Ou não é preciso? Desde que não toque...

A conclusão do aluno é que o gráfico da função e a reta de equação $d = 5$ não se tocam. Por isso, considera indiferente a representação da reta no gráfico. O aluno estabelece uma relação entre a reta e o gráfico baseada no domínio da função e na representação que obteve na calculadora gráfica e formula a conjetura: "O gráfico da função aparentemente não toca a reta de equação $d = 5$".

Questão 1.3. da tarefa 1 (Anexo 01). Nesta questão era pedido aos alunos o cálculo do valor de $\lim\limits_{d \to 5^-} A(d)$. Na discussão coletiva da tarefa 1, durante a explicação de Cátia sobre o que verifica no gráfico da função A, vários alunos têm a mesma perceção de Tiago no que diz respeito à relação entre a função A e a reta $d = 5$.

> *Vários*: Vai sempre aproximar-se, mas nunca vai tocar no 5.
> *Professora*: Que 5 é esse?
> *Joel*: Abcissa 5. $d = 5$.

Os alunos obtêm assim a mesma conclusão, acabando também eles por formular a conjetura: "A função A aproxima-se da reta $d = 5$ mas aparentemente nunca lá vai tocar".

Questão 2 da tarefa 1 (Anexo 01). Na questão 2.1. era pedida a representação gráfica da função $f(x) = \frac{1}{x}$, a questão 2.2. pedia o domínio desta função e, por fim, a questão 2.3. pedia a análise do comportamento da função f quando x tende para zero por valores superiores e inferiores a zero. Na discussão coletiva desta questão, enquanto justifica porque afirma que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$, Júlia acaba por formular uma nova conjetura.

> *Professora:* Vai lá ao gráfico do quadro e explica isso aos teus colegas.
> *Júlia*: Se os valores vêm por 0^+, vai bater aqui.... vai para $+\infty$ mas nunca chega ao zero.

> *Professora*: E quando x tende para zero por valores inferiores a zero?
> *Júlia*: É a mesma coisa só que vai para $-\infty$ e nunca chega a bater na reta $x = 0$.

Júlia formula uma conjetura que relaciona o gráfico da função com a reta de equação $x = 0$: "A função aparentemente nunca interseta a reta de equação $x = 0$ quer x tenda para zero por valores superiores ou inferiores a zero". Esta conclusão resulta da análise que a aluna faz do gráfico da função.

Questão 2.1. da tarefa 2 (Anexo 02). Nesta tarefa é pedido aos alunos que estudem o comportamento da função quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$. Quando justificam que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, Maria e Pedro analisam a relação entre a função f e a reta $x = 0$.

> *Maria:* Aproxima-se de zero, mas nunca lá chega.
> *Professora:* E quando x tende para $-\infty$?
> *Maria:* A mesma coisa.
> *Professora:* Vocês referem que se aproxima de zero, mas que zero é este?
> *Vários alunos:* $y = 0$.

Analisando o gráfico da função e considerando que ambos os limites têm resultado zero e, com o que observam do gráfico da função, os alunos formulam a conjetura: "A função aproxima-se cada vez mais da reta $y = 0$ mas "nunca lá chega"".

Depois da generalização do processo de determinação de assíntotas horizontais ao gráfico de uma função, recorro a um caso particular para perceber o que concluiriam os alunos, relativamente à existência de assíntotas horizontais, se o resultado de um dos limites no infinito for um número real e outro não.

> *Professora*: Então e se este aqui ($\lim_{x\to+\infty} f(x)$) tivesse dado 0 e este ($\lim_{x\to-\infty} f(x)$) tivesse dado $-\infty$?

Vários alunos respondem que, neste caso, não existem assíntotas ao gráfico da função. Formulam assim uma conjetura errada que surge do caso particular analisado na questão 1 da tarefa 2. Nessa questão, os alunos verificaram que $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ e, portanto, $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função. A questão que coloco, tem como objetivo fazer emergir estas possíveis conjeturas e generalizações erradas e proporcionar uma oportunidade para os alunos compreenderem que não é necessário que o resultado de ambos os limites seja zero para se concluir a existência de uma assíntota horizontal.

Questão 1 da tarefa 4 (Anexo 05). Nesta questão os alunos devem identificar se a e b são valores negativos ou positivos. Os alunos conseguem formular as conjeturas $a < 0$ pois $y =$ a é assíntota horizontal e b < 0 pois $x = b$ é assíntota vertical. Estas conjeturas formulam-se tendo em conta a expressão algébrica apresentada para a função f e o respetivo gráfico, como podemos ver na resolução de Daniela (Figura 59):

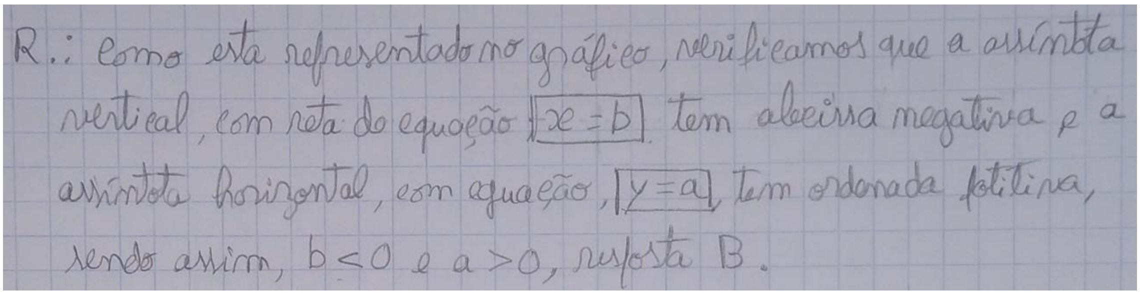

R.: como esta representado no gráfico, verificamos que a assíntota vertical, com reta de equação $\boxed{x=b}$ tem abcissa negativa e a assíntota horizontal, com equação, $\boxed{y=a}$, tem ordenada positiva, sendo assim, $b<0$ e $a>0$, resposta B.

Figura 59 - Resolução de Daniela (Tarefa quatro, questão 1)

Observe-se que, a aluna faz referência ao gráfico da função pois, só com a sua análise é possível formular tais conjeturas.

Questão 3 do teste escrito (Anexo 06). Nesta questão teria de ser feita a análise de cada um dos limites apresentados no enunciado de modo a concluir as equações das retas que são assíntotas ao gráfico de uma função. Surge oportunidade de formulação de uma nova conjetura. Joel, foi um dos alunos que a formulou (Figura 60):

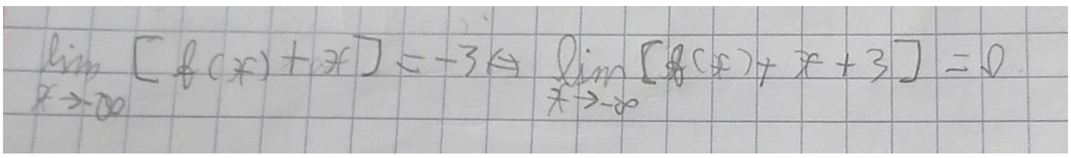

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]=-3 \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)+x+3]=0$

Figura 60 - Resolução de Joel (Teste escrito, questão 3)

O aluno conjetura que: $\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = -3 \Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} [f(x) + x + 3] = 0$. De facto, um número considerável de alunos conseguiu elaborar esta conjetura. Devo referir que tal situação nunca foi explorada em nenhuma tarefa ou discussão coletiva de uma tarefa. Passando -3 no primeiro membro da equação e aplicando o princípio de equivalência da adição, os alunos conseguiram conjeturar que $\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = -3$ é equivalente $\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x + 3] = 0$ e, desta forma, concluir a existência de uma assíntota oblíqua ao gráfico da função.

No global das tarefas, os alunos revelaram alguma facilidade na formulação de conjeturas. As conjeturas formuladas foram previstas durante a planificação das aulas e constituíam também um dos objetivos das tarefas. Por exemplo, a conjetura formulada por Tiago na questão 1 da tarefa 1: "O gráfico da função aparentemente não toca a reta de equação $d = 5$". Estas conjeturas foram essenciais na compreensão das propriedades das retas que constituem assíntotas e, posteriormente, na generalização a outras funções. A formulação de conjeturas é um indício de que os alunos estão a pensar sobre a questão, a formular ideias, a procurar relações entre situações, independentemente de, mais tarde, as conjeturas se provarem ser verdadeiras ou falsas.

5.2.2. Generalizações

Durante os momentos de discussão das tarefas propostas os alunos tiveram oportunidade de formular diversas generalizações, que são apresentadas a seguir.

Na **discussão coletiva da questão 1 da tarefa 1** (Anexo 01), depois de Júlia conjeturar que "$d = 5$ é uma assíntota", Tiago surpreende ao afirmar o seguinte:

Tiago: 5 é um ponto aderente.

Tiago procura, neste caso em particular, uma relação entre o valor 5 e o facto de a assíntota ser $d = 5$ revelando assim o seu interesse em procurar possíveis relações entre pontos relevantes da função e a equação da reta assíntota. Efetivamente, é uma relação muito bem estabelecida por Tiago pois 5 é um ponto aderente ao domínio, mas que não pertence ao domínio e, por isso, $d = 5$ é assíntota. Apesar de a afirmação ser feita para o caso específico da função A, esta afirmação não surgiu na sequência de nenhuma questão da tarefa ou pergunta intencional da minha parte, nem em resposta a nenhum colega. Evidencia a procura de uma relação de natureza mais geral entre a função e a respetiva assíntota. Tiago parece procurar uma generalização relativamente aos pontos para os quais pode existir uma assíntota sem ainda saber que esta é, em particular, uma assíntota vertical. De notar ainda que, só no momento de síntese final havia a intenção de generalização do processo para determinar assíntotas verticais.

Efetivado o primeiro contacto com o conceito de assíntota na questão 1 da tarefa 1, **na discussão coletiva da questão 2 da tarefa 1** (Anexo 01), questiono os alunos para averiguar se conseguem inferir uma conclusão semelhante para a questão 2 da mesma tarefa.

> *Investigadora*: O que conseguimos concluir desta reta [refiro-me à reta de equação $x = 0$]?
> *Afonso*: Que ela é assíntota...

Afonso mobiliza conhecimento da generalização feita na questão 1 da tarefa 1, reconhece que a reta de equação $x = 0$ tem propriedades idênticas à da reta $d = 5$,e formula a generalização: "$x = 0$ é uma assíntota ao gráfico da função".

No **final da discussão coletiva da questão 2 da tarefa 1** (Anexo 01), através da análise do gráfico, Francisco identifica a existência de uma reta horizontal com as mesmas características de $x = 0$ e faz a seguinte afirmação:

> *Francisco*: $y = 0$ é uma assíntota.
> *Tiago*: Não, $x = 0$!
> *Francisco*: Sim, mas $y = 0$ também.
> *Professora*: E é uma assíntota quê?
> *Francisco:* Horizontal.

Francisco utiliza o conhecimento que já tem sobre assíntotas verticais para explorar a existência de outros tipos de assíntotas. Generalizando que, a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal porque, aparentemente, esta reta nunca vai intersetar o gráfico da função. Francisco consegue assim reconhecer a existência de outras assíntotas, além da assíntota vertical encontrada. Indica que se trata de uma assíntota horizontal por ser uma reta horizontal.

Na **questão 2.3. da tarefa 2** (Anexo 02), após verificarem que $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$, dois grupos preocupam-se em apresentar uma conclusão (Figuras 61 e 62):

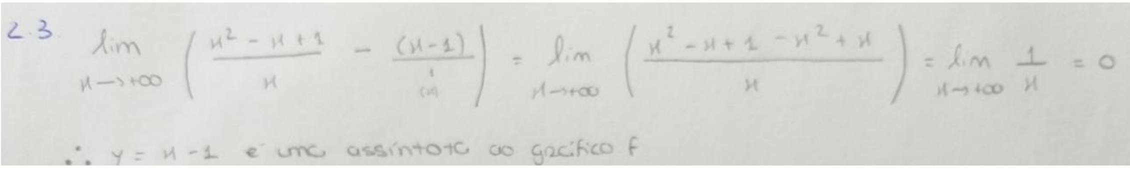


Figura 61 - Resolução de Camila e Tiago (Tarefa 2, questão 2.3)

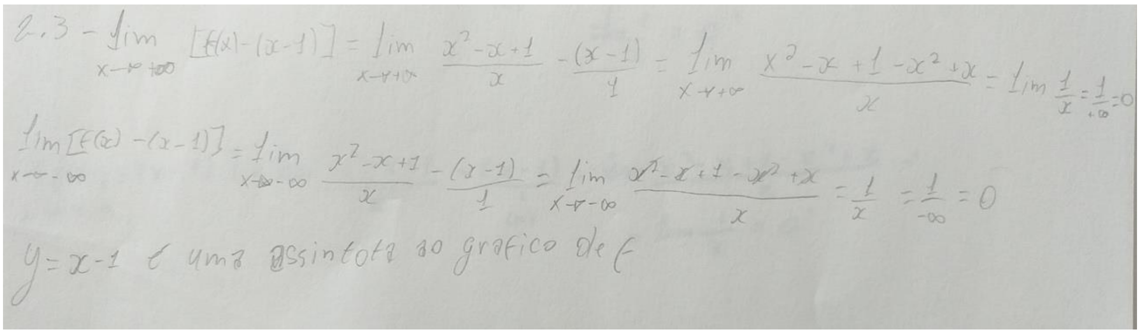


Figura 62 - Resolução de Mateus e Madalena (Tarefa 2, questão 2.3)

De facto, apenas estes dois pares de alunos escrevem, na resolução entregue: "$y = x - 1$ é assíntota ao gráfico da função". Esta afirmação é considerada uma generalização. Os alunos mobilizaram as propriedades já conhecidas sobre assíntotas verticais e horizontais, para aqui afirmar a existência de um outro tipo de assíntota. Na discussão oral e coletiva da questão, também Francisco formula a generalização "$y = x - 1$ é assíntota ao gráfico da função":

> *Professora:* O facto de a distância tender para zero, o que é que significa relativamente ao gráfico da função e da reta?
> *Francisco*: Que se estão a aproximar.
> *Professora:* Que a função e a reta estão cada vez mais próximas, exato. E mais?
> *Francisco*: Que é uma reta assíntota, a reta $y = x - 1$ é uma assíntota da função f.
> *Professora*: $y = x - 1$ é uma assíntota ao gráfico da função f. Vertical, horizontal, ...?
> *Francisco*: Diagonal.
> *Cátia*: Oblíqua.

Como ainda não conhece a designação correta para esta nova assíntota, analisando os casos das assíntotas verticais e horizontais, Francisco conjetura que a denominação das assíntotas está associada à posição da reta e designa-a por assíntota diagonal, o que faz sentido pois, de facto, a reta é diagonal.

Na tarefa 94.3.do manual (Anexo 03) na determinação das assíntotas verticais e horizontais ao gráfico da função $f(x) = \frac{1-x}{2x-5}$, vários alunos formulam as generalizações: "$x = \frac{5}{2}$ é assíntota vertical ao gráfico da função" e "$y = -\frac{1}{2}$ é assíntota horizontal ao gráfico da função em $+\infty$ e $-\infty$". A primeira generalização resultou do cálculo de $\lim_{(\frac{5}{2})^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{(\frac{5}{2})^+} f(x) = -\infty$ e a segunda do cálculo de $\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{-\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$.

Na **questão 2 da tarefa 4** (Anexo 05), é pedido aos alunos que identifiquem as equações correspondentes às assíntotas vertical e horizontal da função $g(x) = \frac{x-2}{x-3}$. Marta escreve $g(x) = \frac{x-2}{x-3} = 1 + \frac{1}{x-3}$ e formular as generalizações: "$y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico da função" e "$x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico da função", como se pode ver na sua resolução (Figura 63).

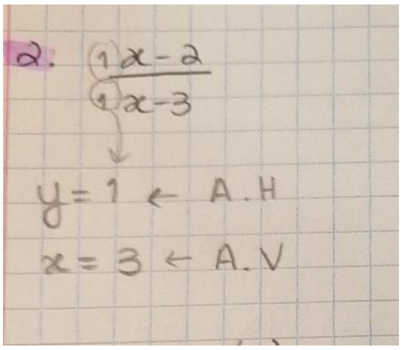
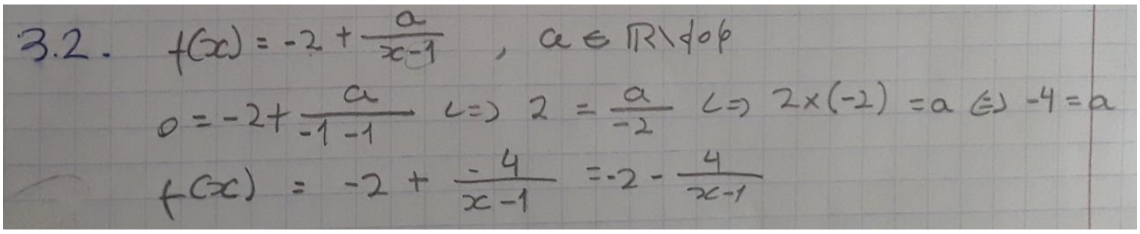


Figura 63 - Resolução de Marta (Tarefa 4, questão 2)

Na questão 3.2. da tarefa 4 (Anexo 05), os alunos têm de definir a expressão algébrica da função f. Decidem escrevê-la na forma $a + \frac{b}{x-c}$, estando os valores de a e c relacionados com as assíntotas horizontal e vertical, respetivamente. Através da análise do gráfico da função os alunos conhecem as equações dessas assíntotas e utilizando um ponto que pertence ao gráfico da função, conseguem generalizar $f(x) = -2 - \frac{4}{x-1}$. Foi o que fez Cátia (Figura 64):



3.2. $f(x) = -2 + \frac{a}{x-1}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

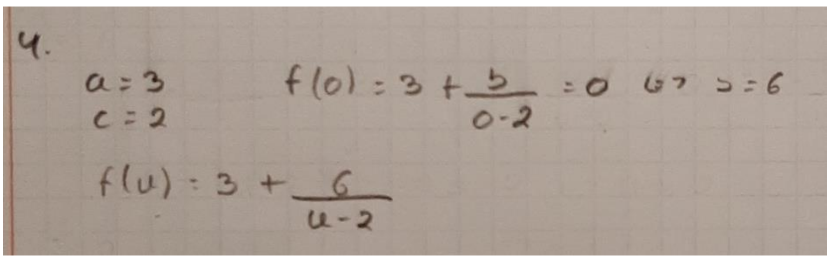
$0 = -2 + \frac{a}{-1-1} \Leftrightarrow 2 = \frac{a}{-2} \Leftrightarrow 2 \times (-2) = a \Leftrightarrow -4 = a$

$f(x) = -2 + \frac{-4}{x-1} = -2 - \frac{4}{x-1}$

Figura 64 - Resolução de Cátia (Tarefa 4, questão 3.2)

Sabendo que $x = 1$ é assíntota vertical e $y = -2$ é assíntota horizontal, consegue escrever $f(x) = -2 - \frac{\mathrm{b}}{x-1}$. Para determinar o valor de b recorre ao ponto de coordenadas $(-1{,}0)$ que saber pertencer ao gráfico da função, pelo que é dito no enunciado: "O gráfico da função f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -1”.

Na **questão 4 da tarefa 4** (Anexo 05), os alunos desenvolvem um raciocínio idêntico ao anterior. David (Figura 65) sabe que $y = 3$ é assíntota horizontal e, portanto, $a = 3$. Sabe ainda que $c = 2$ pois é referido no enunciado “A outra assíntota é paralela ao eixo Oy e interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 2”. Para determinar o valor de b, David utiliza o ponto de coordenadas $(0{,}0)$ que sabe pertencer ao gráfico. Desta forma, David efetua uma generalização do que conhece relativamente à expressão algébrica de funções racionais escritas na forma $a + \frac{b}{x-c}$, ao afirmar que $f(x) = 3 + \frac{6}{x-2}$ é expressão algébrica da função.



4.

$a = 3$ $\quad f(0) = 3 + \frac{b}{0-2} = 0 \Leftrightarrow b = 6$

$c = 2$

$f(x) = 3 + \frac{6}{x-2}$

Figura 65 - Resolução de David (Tarefa 4, questão 4)

Na **questão 2 do teste individual** (Anexo 06), muitos alunos elaboram a generalização: Se $y = -\frac{1}{2}x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) + \frac{1}{2}x - 1 \right] = 0$. Esta afirmação resulta do estudo concreto efetuado na questão 2 da tarefa 2, em que se conclui que o limite da diferença entre a função e a sua assíntota oblíqua tende para zero, uma vez que graficamente as funções se aproximam cada vez mais. A resposta apresentada por Francisco (Figura 66) mostra que o aluno mobilizou esse conhecimento para responder a esta questão:

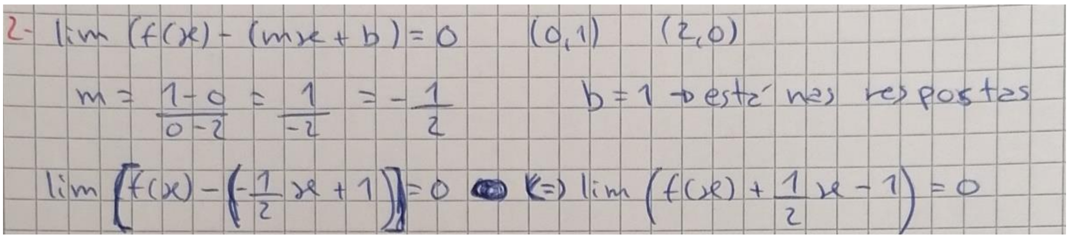


Figura 66 - Resolução de Francisco (Teste escrito, questão 2)

Francisco começa até por escrever "$lim\ [f(x) - (mx + b)] = 0$" dando a entender que se a assíntota for $y = mx + b$ esta condição terá de se verificar.

Ainda no teste escrito individual, Joel (e outros alunos) (Figura 67) elabora as generalizações: $x = -1$ é assíntota vertical, $y = 2x - 1$ e $y = x - 3$ são assíntotas oblíquas ao gráfico da função na questão 3.

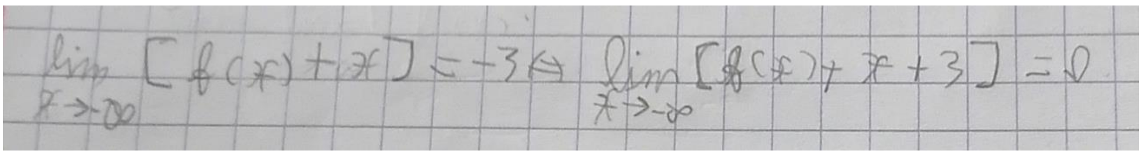


Figura 67 - Resolução de Joel (Teste escrito, questão 3)

Generalizar sobre assíntotas verticais ao gráfico de uma função. No momento de **síntese final que se seguiu à realização e discussão da tarefa 1**, com o objetivo de ajudar os alunos a generalizarem o processo para determinar assíntotas verticais ao gráfico de uma função, coloco a seguinte questão:

> *Professora:* Dada qualquer função, o que tenho de fazer para determinar uma assíntota vertical ao gráfico dessa função?
> *Cátia*: Calcular o valor do limite de um ponto que não pertence ao domínio....

Cátia reconhece que as assíntotas verticais se calculam através de limites para os pontos onde a função não está definida. Apesar de verdadeira, esta generalização é ainda insuficiente para indicar os pontos onde existem possíveis assíntotas. Apenas Tiago, na conjetura que formula ("5 é um ponto aderente") para a questão 1, em particular, consegue sugerir o valor para o qual se calcula o limite como um ponto aderente que não pertence ao domínio da função. Contudo, Tiago não consegue generalizar aquilo que verificou naquele caso em particular e, por isso, não interveio na discussão.

É necessário recorrer a um questionamento intensivo para conseguir obter afirmações suscetíveis de análise com a turma:

> *Professora*: No primeiro caso, qual era este ponto?
> *Vários alunos*: 5.
> *Professora* e no segundo?
> *Vários alunos:* 0.
> *Professora* E nós calculámos os limites...
> *Cátia:* Para 5^+ e 5^-. E para 0^+ e 0^-.

Cátia refere o cálculo dos limites laterais de pontos aderentes ao domínio que não pertencem ao domínio. A afirmação de Cátia pode decorrer do facto de, na questão 2.3. se ter calculado os limites à direita e à esquerda de zero. Mas, na verdade, na questão 1.2. apenas se calculou o limite quando d tende para 5 por valor à esquerda de 5. Por isso, Joel corrige imediatamente:

> *Joel:* Não só para 5^-.
> *Investigadora*: E porque é que não calculámos o limite quando x tende para 5^+?
> *Júlia*: Porque o d está entre 0 e 5, então não há 5^+.
> *Investigadora*: Exato, a função não está definida para valores superiores ou iguais a 5. Então limites laterais e depois?
> *Júlia*: Não podem ter o mesmo limite, acho eu.

Júlia formula uma conjetura apesar de errada. Este erro pode ser resultado do facto de, na questão 2.3., se ter obtido $+\infty$ e $-\infty$ como resultado dos limites laterais e concluir-se que $y = 0$ é assíntota. Assim, decidi observar que, pelo contrário, na questão 1.3. só se calculou um limite lateral e encontrou-se na mesma a equação de uma assíntota:

> *Investigadora*: Mas não calculámos o limite quando x tende para 5^+e concluímos à mesma que é assíntota.
> *Júlia:* Mas era porque não estava definido.
> *Joel:* O domínio é de 0 a 5.
> *Investigadora*: O que deram os limites calculados?
> *Vários:* $+\infty$ e $-\infty$.
> *Júlia:* Tem de ser divergente.
> *Investigadora*: Tem de ser $+\infty$ ou $-\infty$. E se for, o que concluo?
> *Júlia:* Que é uma assíntota.

Joel, ao referir o domínio da função mostra conhecimento da importância que este tem na determinação das assíntotas verticais ao gráfico de uma função.

Apesar de ter sido necessário algum questionamento da minha parte para encaminhar os alunos na generalização do processo de determinação de assíntotas verticais, concluo que compreenderam a relação entre assíntotas verticais, cálculo de limites no infinito e a representação gráfica da função. No geral, os alunos generalizam o processo de determinação de assíntotas verticais como um processo que envolve a determinação dos limites laterais para pontos aderentes ao domínio da função, que não pertencem ao domínio e generalizam também que, se algum destes limites for infinito, conseguimos determinar uma assíntota vertical. Francisco, Júlia, Afonso e Tiago foram alunos que revelaram mais facilidade na generalização do processo do que outros.

Generalizar sobre assíntotas horizontais ao gráfico de uma função. No **momento de discussão da questão 1 da tarefa 2**, o objetivo era generalizar o processo para determinar as assíntotas horizontais ao gráfico de uma função. Assim, para começar de discussão coloco a seguinte questão:

> *Investigadora*: Se vos desse uma função qualquer e pedisse para calcular as assíntotas horizontais ao gráfico dessa função, o que é que vocês faziam?
> *Cátia*: Os limites para $+\infty$ e para $-\infty$.

Cátia formula a generalização com base no procedimento que efetuou nas questões da tarefa 2. Contudo, não sabe se este será válido para todas as funções, nem sequer testou este procedimento para mais funções. Mas era expectável que os alunos se basearíam apenas neste caso particular, até porque foi o único estudado até agora.

Os restantes alunos também participaram na generalização ao afirmar que, se o resultado desse limite é um determinado número real b, então $y = b$ é assíntota horizontal.

> *Investigadora*: Na questão que resolveram, o que deram esses limites?
> *Vários alunos*: 0.
> *Investigadora*: E o que concluímos?
> *Vários alunos*: $y = 0$ é assíntota.
> *Investigadora*: E se os limites tivessem dado 5?
> *Júlia*: Ia ser 5.
> *Investigadora*: Ia ser?
> *Mateus*: $y = 5$.

Os alunos contribuem para a generalização do processo de determinação de assíntotas horizontais. Os contributos que dão resultam daquilo que aprenderam na questão 1 da tarefa 2.

Cátia sugere que, para determinar as assíntotas horizontais ao gráfico de qualquer função, temos de realizar o cálculo dos limites da função em $+\infty$ e em $-\infty$ para determinar as assíntotas horizontais. Os restantes alunos tentam participar na generalização, mas apenas conseguem fazer afirmações para casos particulares. Júlia continua a generalização afirmando que o resultado do limite não pode ser $-\infty$ nem $+\infty$.

> *Investigadora*: Para concluir que é uma assíntota o limite tem de dar...
> *Júlia:* Não pode ser nem $-\infty$ nem $+\infty$.
> *Professora:* Exatamente! Tem de dar um número real.

Generalizar sobre assíntotas oblíquas ao gráfico de uma função. Com o objetivo de generalizar o processo para verificar se uma determinada reta é ou não assíntota oblíqua ao gráfico de uma função, no **momento de discussão coletiva que se seguiu à questão 2 da tarefa 2**, coloquei algumas questões aos alunos:

> *Investigadora*: Então, o que é que nós fizemos para ver que esta é uma assíntota?
> *Cátia*: Calculámos os limites quando x tende para infinito.
> *Investigadora*: Do que?
> *Joel*: De $f(x) - (x - 1)$.
> *Investigadora*: Portanto, se quiserem ver se uma determinada reta é ou não assíntota ao gráfico de uma função, como fazem?

Inês: Calculamos o limite quando x tende para $+\infty$ e para $-\infty$.
Investigadora: Exatamente, da...
Mateus: Da função $f(x)$ menos a expressão da reta.
Investigadora: E o que é que eu espero obter do resultado desse limite para concluir que é uma assíntota oblíqua?
Cátia: Que um deles seja zero.

Os alunos conseguem contribuir com resultados importantes para efetuar a generalização dos processos para determinar as assíntotas ao gráfico de uma função. Esta generalização é, essencialmente, concretizada com base naquilo que os alunos verificaram nos casos particulares estudados nas tarefas. Os momentos planeados de generalização não foram fáceis de concretizar. A inexperiência dos alunos na elaboração de generalizações levou a que houvesse dificuldade em conseguir generalizar os processos de determinação de assíntotas verticais, horizontais e oblíquas. Para as concretizar foi necessário um questionamento muito estruturado e sistemático da minha parte. Os alunos basearam-se nos casos particulares estudados nas tarefas, mas sendo muito poucos, o processo tornou-se mais difícil. De facto, um dos objetivos das tarefas propostas era iniciar o estudo de um caso concreto, afirmar características e propriedades, e generalizá-las a um conjunto mais alargado. Nas tarefas 1 e 2, os alunos identificaram um conjunto de características comuns à reta que corresponde à assíntota ao gráfico de uma função. Nomeadamente, o facto de uma função e a sua assíntota estarem cada vez mais próximas, mas aparentemente nunca se intersetarem. Sempre que identificam retas com essa característica relativamente ao gráfico da função, independentemente da sua posição relativa, os alunos afirmam que essa reta é uma assíntota.

5.2.3. Justificações

Questão 1.3. da tarefa 1 (Anexo 01). Nesta questão solicita-se a determinação de $\lim_{d \to 5^-} A(d)$. Os alunos apontam $+\infty$ como resposta, mas surgem estratégias diferentes de determinação. Inês justifica que recorreu ao cálculo analítico do limite (Figura 68), apresentando:

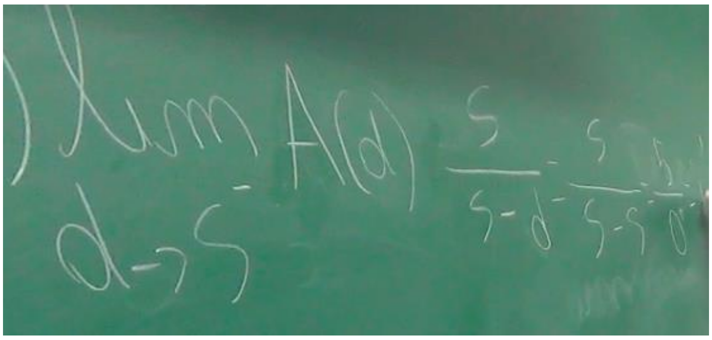


Figura 68 - Resolução de Inês (Tarefa 1, questão 1.3)

Com este cálculo, Inês acaba também por justificar a conjetura formulada por Tiago na questão 1.2: "O gráfico da função aparentemente não toca a reta de equação $d = 5$". Como $\lim_{d \to 5^-} A(d) = +\infty$, d aproxima-se de 5 por valores inferiores a 5, enquanto $A(d)$ tende para $+\infty$, validando a conjetura já formulada por Tiago. Contudo, Tiago justifica que conseguiu obter a mesma conclusão através do gráfico da função:

> *Tiago:* Eu vi apenas no gráfico!

Surgem duas justificações diferentes para o facto de $\lim_{d \to 5^-} A(d) = +\infty$. Inês apresenta uma justificação formal que recorre ao cálculo analítico do limite. Por outro lado, Tiago apresenta uma justificação informal resultante da representação gráfica da função. A calculadora gráfica é uma ferramenta muito importante na formulação de conjeturas e na validação de algumas delas. Mas também deve ter-se noção que a representação obtida é limitada e podem existir aspetos que ficam omitidos. Neste caso, atendendo ao nível de ensino, a justificação dada por Tiago não é suficiente.

Quando Tiago refere que $\lim_{d \to 5^-} A(d) = +\infty$ porque "vi apenas no gráfico", Cátia concorda com a afirmação do colega revelando que utilizou a mesma estratégia. Assim, peço à aluna que justifique como tirou a conclusão de $\lim_{d \to 5^-} A(d) = +\infty$ efetuando a análise da representação gráfica:

> *Cátia*: Quando o d vai tender para 5, se formos a ver nunca vai chegar. E a função está a tender para $+\infty$ ao mesmo tempo.
> *Professora:* O que é que a Cátia disse relativamente ao gráfico e à função? Não vai chegar onde?
> *Cátia*: A 5.

Cátia faz uma correta interpretação do gráfico da função ao referir que, quando d tende para 5, "está a tender para $+\infty$ ao mesmo tempo". Apesar desta estratégia ter permitido concluir o resultado correto, os alunos devem apenas utilizá-la como um apoio á resolução analítica.

Questão 2 da tarefa 1 (Anexo 01). Nesta questão, Júlia recorre ao gráfico da função para determinar que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$. Projeto o gráfico e peço que justifique aos colegas como o procedeu:

> *Professora*: Vai lá ao gráfico do quadro e explica isso aos teus colegas.
> *Júlia*: Se os valores vêm por 0^+, vai bater aqui.... vai para $+\infty$ mas nunca chega ao zero.
> *Professora*: E quando x tende para zero por valores inferiores a zero?
> *Júlia*: É a mesma coisa só que vai para $-\infty$ e nunca chega a bater na reta $x = 0$.

Tal como Cátia na questão 1.3. da tarefa 1, nesta tarefa Júlia faz uma interpretação correta do gráfico da função. A aluna afirma que "se os valores vêm por 0^+", a função "vai para $+\infty$", e o mesmo acontece quando $x \to 0^-$. Mais um caso de uma aluna que apresenta a análise feita ao gráfico da função como uma justificação para o resultado que indica para os limites pedidos.

Questão 1 da tarefa 2 (Anexo 02). É pedido aos alunos que determinem os limites quando x tende para $+\infty$ e para $-\infty$ da função $f(x) = 1/x$. Para calcular os limites pedidos na questão 1 da tarefa 2, os alunos recorrem mais uma vez a duas estratégias diferentes para justificar os resultados obtidos. Uns justificam o resultado recorrendo ao cálculo analítico, outros com aquilo que observam na calculadora gráfica. Pedro apresenta o cálculo dos limites (Figura 69):

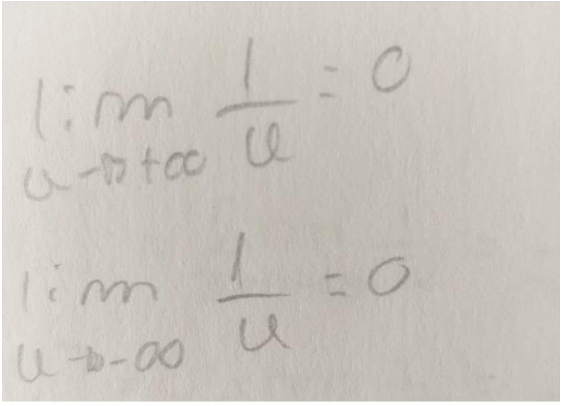


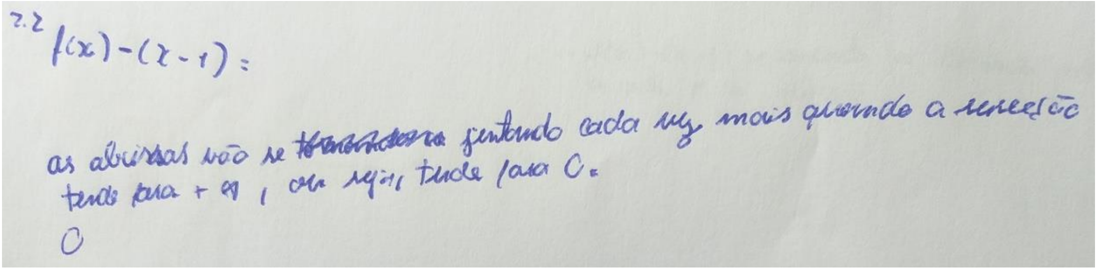
Figura 69 - Resolução de Pedro (Tarefa 2, questão 1)

Mas justifica também que foi confirmar ao gráfico da função se realmente o que concluiu se verifica.

> *Pedro:* Fui ver ao gráfico se aquilo que eu tinha feito se confirmou. Quando x tende para $+\infty$, a função está a ir sobre o eixo, mais próximo do eixo... (Pedro refere-se ao eixo das abcissas).
> *Investigadora*: O que é que queres dizer com isso?
> *Maria:* Aproxima-se de zero, mas nunca lá chega.
> *Investigadora*: E quando x tende para $-\infty$?
> *Maria:* A mesma coisa.

Pedro apresenta uma justificação formal para a questão e, confirma o resultado obtido, na calculadora gráfica. Maria decide ajudar o colega a justificar a sua conclusão porque o vê um pouco inseguro. Os alunos justificam que, ao analisar a representação gráfica da função verificam que esta se "aproxima de zero" quando x tende para $-\infty$ e quando x tende para $+\infty$. Pedro afirma que recorreu ao gráfico para confirmar o resultado obtido no cálculo dos limites. A calculadora gráfica tem a vantagem de permitir, em algumas situações, conferir se a resposta que se dá a uma tarefa corresponde à resposta certa. Se não for a resposta certa, poderá ser um indício de algum erro ocorrido na resolução analítica.

Questão 2.2. da tarefa 2 (Anexo 02). Nesta questão pede-se aos alunos que identifiquem o que representa a expressão $f(x) - (x - 1)$, para cada valor de x. Cátia e Afonso (Figura 70) justificam que $f(x) - (x - 1)$ tende para zero com a seguinte frase "as abcissas vão se juntando cada vez mais quando a função tende para $+\infty$, ou seja, tende para zero".



2.2 $f(x)-(x-1)=$

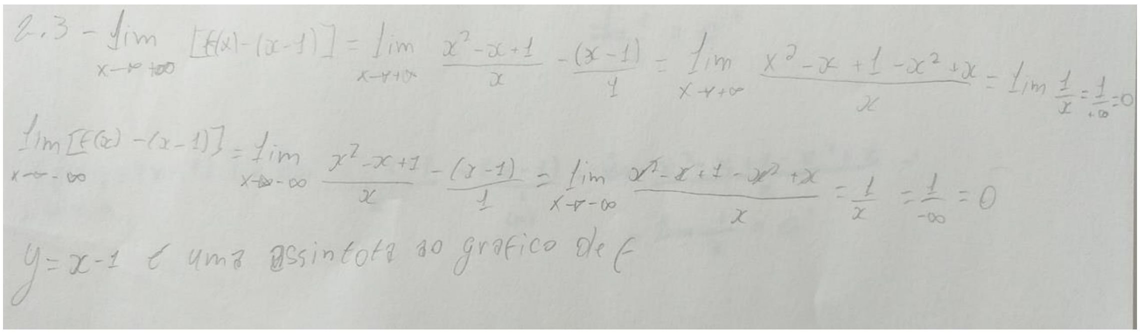
as abcissas não se ~~[illegible]~~ juntando cada vez mais quando a sucessão tende para $+\infty$, ou seja, tende para 0.

0

Figura 70 - Resolução de Cátia e Afonso (Tarefa 2, questão 2.2)

Os alunos não justificam de que forma conseguem ver que $f(x)-(x-1)$ tende para zero, no entanto, pela justificação apresentada parece que recorrem à representação gráfica. De facto, ao introduzir na calculadora gráfica a expressão da função f e da reta $y=x-1$ e fazendo uma análise cuidada desta representação, os alunos conseguem concluir que as duas estão cada vez mais próximas, à medida que x tende para $+\infty$. Esta é uma representação verbal escrita que não revela em que evidência se apoiaram para a obter.

Questão 2.3. da tarefa 2 (Anexo 02). Nesta questão é pedido aos alunos que determinem os limites quando x tende para $-\infty$ e quando x tende para $+\infty$ de $f(x)-(x-1)$. Os alunos que, nesta questão, escrevem que $y=x-1$ é assíntota ao gráfico da função, utilizam o cálculo dos limites da diferença entre a função e a reta quando x tende para $-\infty$ e quando x tende para $+\infty$, como justificação para a generalização formulada. Retomemos a resolução de Mateus e Madalena (Figura 71) que é uma evidência disso:



2.3 - $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x}-\frac{(x-1)}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-x^2+x}{x}=\lim\frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=0$

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+1}{x}-\frac{(x-1)}{1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+1-x^2+x}{x}=\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0$

$y=x-1$ é uma assintota ao grafico de f

Figura 71 - Resolução de Mateus e Madalena (Tarefa 2, questão 2.3)

No momento de discussão coletiva, Francisco também refere que as retas se estão a aproximar pois os limites tendem para zero e, esse facto, pode ser justificação para a reta $y = x - 1$ ser assíntota. Os dois grupos chegam a esta conclusão e justificam-na ao apresentar o cálculo dos limites com o resultado zero.

> *Professora:* O facto de a distância tender para zero, o que é que significa relativamente ao gráfico da função e da reta?
> *Francisco*: Que se estão a aproximar.
> *Professora:* Que a função e a reta estão cada vez mais próximas, exato. E mais?
> *Francisco*: Que é uma reta assíntota, a reta $y = x - 1$ é uma assíntota da função f.

Nesta fase já se analisou a relação entre o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x}$ e o gráfico da reta $y = x - 1$ quando as representamos no mesmo referencial cartesiano. Francisco, um dos alunos que também apresenta na sua resolução a generalização $y = x - 1$ é uma assíntota da função f justificada com o cálculo dos limites, apresenta oralmente uma justificação com base na interpretação que faz do gráfico.

Tarefa 94.3. do manual (Anexo 03). Nesta tarefa pede-se que se determinem as assíntotas verticais e horizontais da função $f(x) = \frac{1-x}{2x+5}$. Carolina justifica oralmente que, a assíntota vertical ao gráfico da função é $x = \frac{5}{2}$ porque calculou os limites quando $x \to -\frac{5}{2}^-$ e quando $x \to -\frac{5}{2}^+$. Não há dúvidas de que Carolina conhece o processo que permite determinar as assíntotas verticais ao gráfico de uma função. Procuro assim perceber se consegue apresentar uma justificação para o cálculo dos limites laterais relativamente a $-\frac{5}{2}$.

> *Professora*: Mas porquê para $-\frac{5}{2}$ e não para $-1, -2, 3, 4$ ...?
> *Carolina*: Porque não pertence ao domínio.

A aluna refere que $-\frac{5}{2}$ não pertence ao domínio da função. De facto, não pertence. Mas esta é uma justificação insuficiente pois este valor é mais do que um valor que não pertence ao domínio. É um ponto aderente ao domínio que não pertence ao domínio.

Questão 1 da tarefa 4 (Anexo 05). Marta, Maria e Daniela apresentam formas diferentes de justificar o modo como selecionaram a opção correta. Enquanto Marta aponta na representação gráfica as assíntotas vertical e horizontal ao gráfico da função (Figura 72):

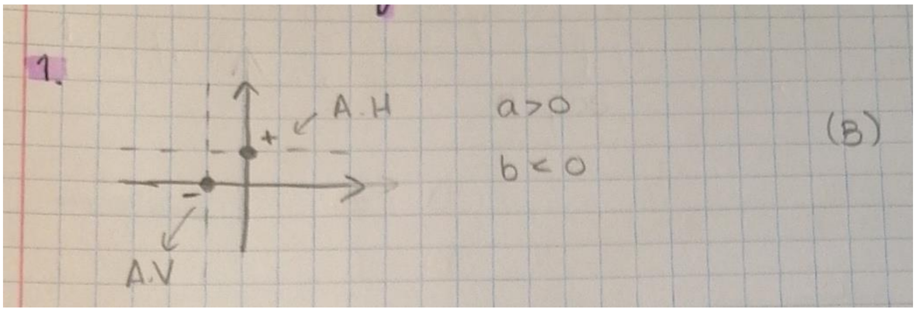
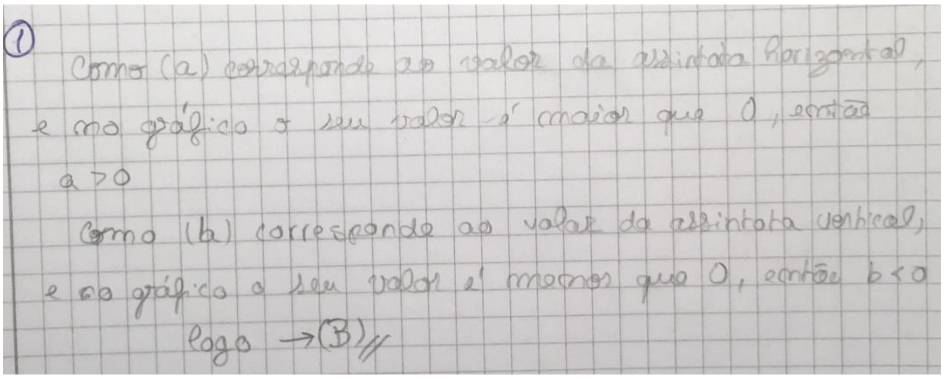


Figura 72 - Resolução de Marta (Tarefa 4, questão 1)

Maria e Daniela optam por justificar usando a representação verbal escrita (Figuras 73 e 74):

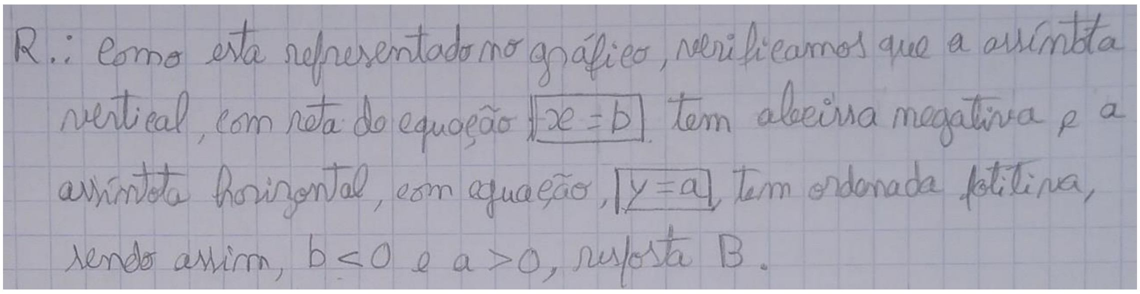


① Como (a) corresponde ao valor da assíntota horizontal, e no gráfico o seu valor é maior que 0, então $a>0$

Como (b) corresponde ao valor da assíntota vertical, e no gráfico o seu valor é menor que 0, então $b<0$

logo $\rightarrow$(B)//

Figura 73 - Resolução de Maria (Tarefa 4, questão 1)



R.: Como está representado no gráfico, verificamos que a assíntota vertical, com reta de equação $\boxed{x=b}$ tem abcissa negativa e a assíntota horizontal, com equação, $\boxed{y=a}$, tem ordenada positiva, sendo assim, $b<0$ e $a>0$, resposta B.

Figura 74 - Resolução de Daniela (Tarefa 4, questão 1)

Ainda que as três alunas recorram à representação gráfica, usam duas representações diferentes, o esboço do gráfico e a representação verbal escrita, que lhes permitem justificar as conjeturas formuladas: $a > 0$ pois $y = a$ é assíntota horizontal ao gráfico da função" e "$b < 0$ pois $x = b$ é assíntota vertical ao gráfico da função". Esta é uma questão de escolha múltipla não sendo necessária a apresentação de justificações. Contudo, devo destacar a preocupação destas alunas com a apresentação de uma justificação para a firmação escolhida.

Questão 2 do teste escrito (Anexo 06). Enquanto a questão 1 do teste escrito, de escolha múltipla, não pedia a apresentação de nenhuma justificação para a opção selecionada, a presente questão já pede que os alunos o façam. Camila apresenta uma justificação para a opção que seleciona (Figura 75):

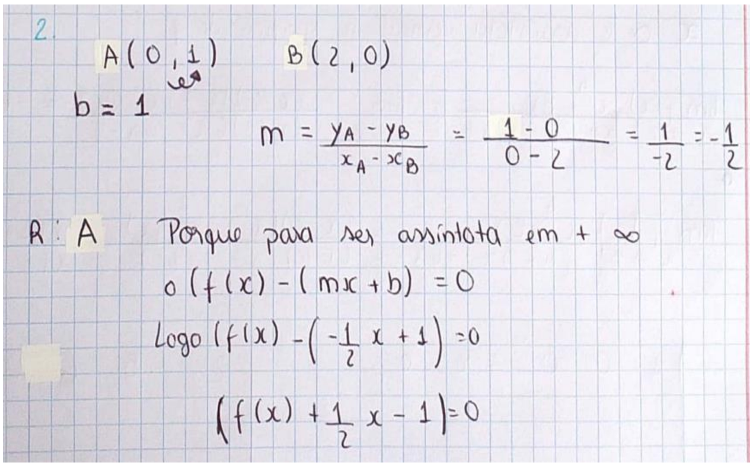


Figura 75 - Resolução de Camila (Teste escrito, questão 2)

A aluna justifica que, para uma reta ser assíntota oblíqua ao gráfico da função em $+\infty$, terá de se verificar $f(x) - (mx + b) = 0$. É o que verifica para a reta que determinou, $y = -\frac{1}{2}x + 1$, jusitifcando que é assíntota pois $f(x) + \frac{1}{2}x - 1 = 0$. Apesar de alguns erros cometidos nesta justificação (referidos na secção 5.1.) é clara a justificação apresentada pela aluna. Já Cátia apresenta outra justificação para ter selecionado a opção A (Figura 76):

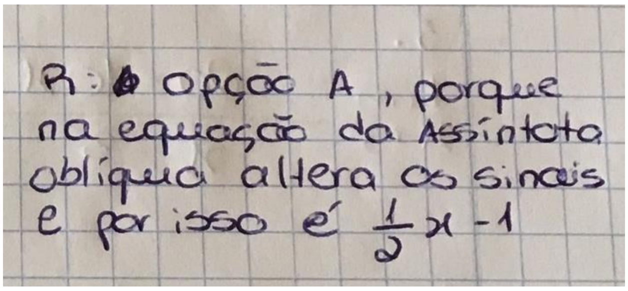


Figura 76 - Parte da resolução de Cátia (Teste escrito, questão 2)

Esta é uma justificação informal e simplificada que parece quase uma forma que a aluna utilizou para memorizar que, se $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) + \frac{1}{2}x - 1\right] = 0$ então a reta assíntota é $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Questão 3 do teste escrito (Anexo 06). Joel formula três generalizações e, para cada uma delas apresenta uma justificação, com base nas informações do enunciado (Figura 77):

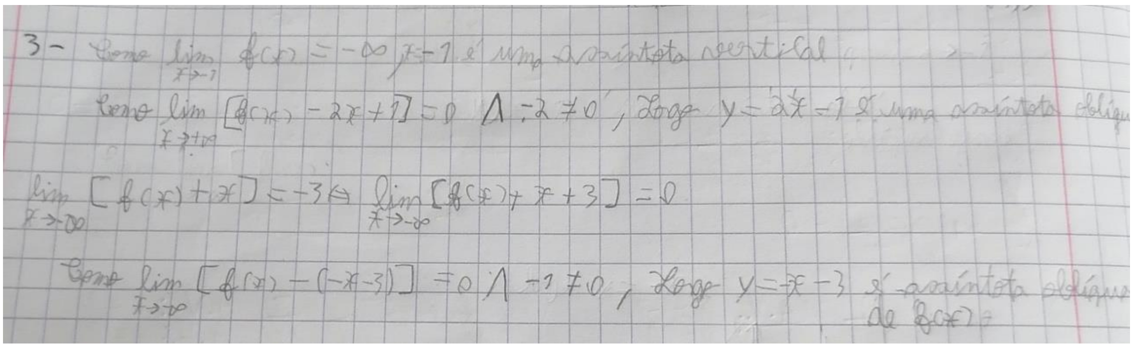


Figura 77 - Resolução de Joel (Teste escrito, questão 3)

Reconhece que $x = -1$ é uma assíntota vertical pois $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$. Identifica ainda duas assíntotas oblíquas: $y = -x - 3$ em $-\infty$ justificando que $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) + x] = -3$ e $y = 2x - 1$ em $+\infty$ pois $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - 2x + 1] = 0$. Repare-se que o aluno nada refere quando ao $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -3$. Desta forma, entende-se que deste limite não resultou nenhuma assíntota ao gráfico da função, mas Joel não justifica como tira esta conclusão. O aluno tem ainda o cuidado de justificar que a assíntota é oblíqua dado que os coeficientes dos termos com x nos dois limites são ambos diferentes de zero. Caso fossem zero, o aluno já consideraria que a assíntota seria horizontal.

Contrariamente a Joel, Daniela, na sua resolução desta questão (Figura 78), tem o cuidado de justificar o porquê de $x = 0$ não ser assíntota ao gráfico da função:

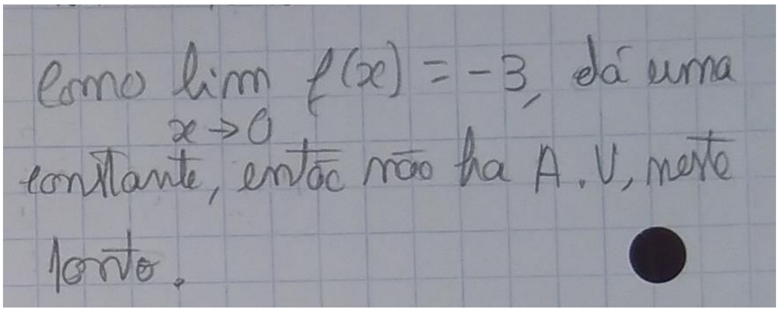


Figura 78 - Parte da resolução de Daniela (Teste escrito, questão 3)

A justificação da aluna retrata que, só consideraria $x = 0$ assíntota vertical se $\lim_{x \to 0} f(x)$ fosse igual a $+\infty$ ou $-\infty$.

Questão 4 do teste escrito (Anexo 06). Para determinar a existência de assíntotas ao gráfico da função $f(x) = \frac{x^4 - 8x}{x^4 - 5x^3 + 6x^2}$, Mateus (Figura 79) recorre à representação gráfica "tendo em conta a análise do gráfico na calculadora" para justificar a existência das assíntotas, indicando a existências das seguintes assíntotas $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$ e $y = 1$. Apesar de justificar com base na representação gráfica, o aluno não apresenta um esboço dessa representação na sua resposta. Esta resposta sem se basear nos cálculos dos limites, levou Mateus a identificar como assíntotas retas que não o são, nomeadamente $x = 2$ e $y = 0$. Aqui está uma prova de que, a calculadora gráfica permite levantar a suspeita da existência de assíntotas em determinados locais. Mas não diz, de todo, que locais são esses nem quais as equações das retas assíntotas. Sem a verificação analítica é muito difícil tirar conclusões corretas relativamente às assíntotas ao gráfico de uma função.

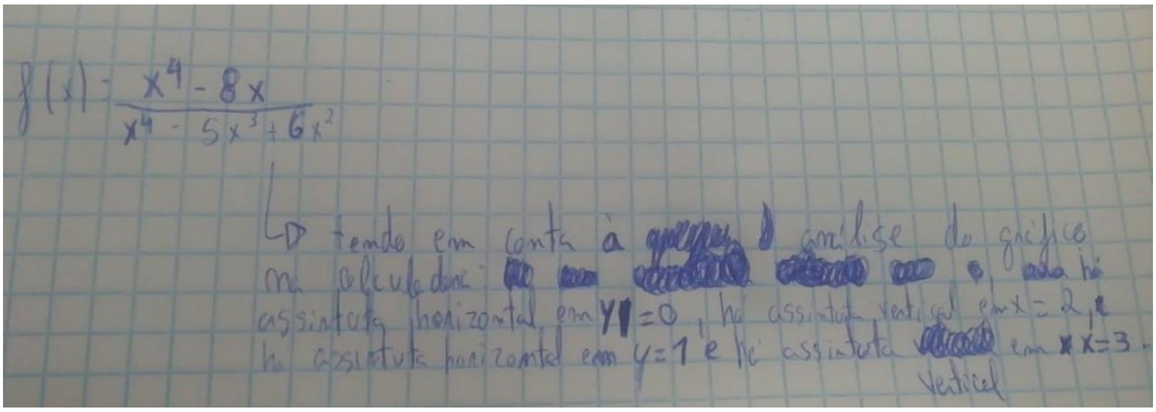


Figura 79 - Resolução de Mateus (Teste escrito, questão 4)

Para estes alunos, a elaboração de conjeturas parece mais fácil do que a elaboração de justificações. Foi curioso testemunhar a iniciativa tomada por alguns dos alunos de apresentar uma justificação sem que isso fosse pedido no enunciado da tarefa, como aconteceu na questão 1 da tarefa 4. É notável a preocupação e cuidado que alguns alunos demonstraram na elaboração de justificações. Destaco Daniela e Maria que procuram apresentar em todas as questões uma justificação através de uma representação verbal escrita ou de métodos analíticos. A representação gráfica foi frequentemente utilizada como justificação de afirmações. Procurei, durante os momentos de discussão coletiva, que os alunos compreendessem que podem utilizar o gráfico da função para confirmar resultados obtidos dos métodos analíticos, como o cálculo de limites. Mas tirar conclusões apenas pela análise do gráfico não é uma estratégia muito fiável e que justifique formalmente as afirmações acerca de assíntotas ou outras propriedades.

As tarefas exploratórias propostas tinham a intenção de promover processos de raciocínio como a justificação e, averiguar, como é que os alunos desenvolvem este processo. Existem ainda bastantes aspetos a melhorar na elaboração de justificações. A distinção entre justificações informais, como a análise do gráfico, e justificações formais, como o cálculo dos limites, foi algo que tentei explorar ao longo da intervenção. Há alunos que apresentam uma justificação formal com clareza e correção e optam pela utilização do gráfico para apoiar a resolução. Enquanto outros, como Mateus, na questão 4 do teste escrito, continuam a justificar as suas conclusões apenas pelo gráfico. Claramente, isto leva a conclusões corretas, mas também erradas.

As opções foram tomadas tendo em vista uma abordagem de ensino exploratória, em que se pretende que os alunos analisem casos concretos para, mais tarde, conseguirem formular generalizações. As tarefas de cunho exploratório surgem num contexto que proporciona a utilização de processos de raciocínio matemático, nomeadamente a formulação de conjeturas, generalização e justificação. Os momentos de discussão e síntese final assumiram um papel determinante na aprendizagem destes conceitos e dos processos associadas à determinação de cada um dos tipos de assíntotas. Foi nos momentos de discussão coletiva que se explorou cada um destes processos, com os contributos dados pelos alunos resultantes daquilo que concluíram de cada uma das tarefas.

Capítulo 6: Conclusões

Neste último capítulo apresento uma síntese do estudo desenvolvido e as conclusões dele obtidas, procurando responder às questões de investigação a que inicialmente me propus. Por fim, faço uma reflexão pessoal sobre a importância deste estudo e dos contributos do trabalho desenvolvido para a minha futura prática enquanto professora.

6.1. Síntese do estudo

O raciocínio matemático, apontado como uma capacidade transversal no ensino e aprendizagem da matemática e cujo desenvolvimento deve ser estimulado em sala de aula, é um campo cada vez mais estudado por diversos investigadores. Ora, para melhor compreender como é que os alunos desenvolvem esta capacidade e que estratégias cumprem este propósito realizei este estudo com a pretensão de dar alguns contributos neste campo. Assim, a investigação "O raciocínio matemático dos alunos do 11.º ano de escolaridade no tópico Assíntotas ao gráfico de uma função" procura compreender a forma como os alunos do 11.º ano de escolaridade desenvolvem a sua aprendizagem sobre Assíntotas ao gráfico de uma função, com especial atenção aos processos de raciocínio mobilizados num contexto de abordagem exploratória. Para atingir este objetivo estabeleci três questões de investigação:

- Quais as aprendizagens realizadas pelos alunos no tópico Assíntotas ao gráfico de uma função e em que medida estas correspondem aos objetivos estabelecidos?
- Quais as dificuldades que os alunos apresentam na aprendizagem das assíntotas ao gráfico de uma função. Em particular, em tarefas que envolvem o raciocínio matemático?
- De que modo os alunos mobilizam os processos de raciocínio matemático na aprendizagem do tópico Assíntotas ao gráfico de uma função, em particular, a formulação de conjeturas, generalização e justificação?

No quadro teórico deste estudo abordo quatro aspetos que considero essenciais para o seu desenvolvimento: raciocínio matemático e tipos de raciocínio matemático, processos de raciocínio matemático, ensino-aprendizagem no tópico Assíntotas ao gráfico de uma função e a abordagem de ensino exploratória. O primeiro ponto explora diferentes definições de raciocínio e, em particular, de raciocínio matemático dando a conhecer alguns tipos de raciocínio. Relativamente aos diferentes processos de raciocínio matemático, desenvolvo os três que constituem a base desta investigação: formulação de conjeturas, justificação e generalização. Sobre o ensino-aprendizagem no tópico Assíntotas ao gráfico de uma função considero as orientações dos documentos curriculares e as perspetivas de alguns autores sobre o tema. A abordagem de ensino exploratório é finalmente considerada por ser um ambiente favorável quando se pretende promover o desenvolvimento do raciocínio matemático no contexto sala de aula.

Como já referido, a investigação desenvolve-se no tópico Assíntotas ao gráfico de uma função ao longo de um conjunto de aulas que envolvem tarefas que favorecem a utilização de diversos processos de raciocínio. Para melhor responder às questões de investigação apresentadas, foram planificadas aulas que seguem, essencialmente, uma abordagem de ensino-aprendizagem exploratória. As tarefas propostas proporcionaram aos alunos a oportunidade de explorarem casos específicos dos diferentes tipos de assíntotas, o que lhes permitiu formular conjeturas com base em exemplos concretos, fazer generalizações e justificações. Por outro lado, foi também importante analisar as aprendizagens realizadas pelos alunos e as dificuldades apresentadas que podem informar a reflexão sobre as tarefas e as aulas planificadas, bem como, sobre a minha própria prática. A situação imprevista que ocorreu ao longo da intervenção, causada pela Pandemia Covid-19, fez com que se fizessem alterações à planificação já elaborada, para que fossem lecionadas à distância as aulas restantes.

A investigação segue uma abordagem de natureza qualitativa e interpretativa, onde se procura identificar as aprendizagens realizadas e as dificuldades apresentadas pelos alunos bem como os processos de raciocínio mobilizados por estes na realização das tarefas propostas. Para cumprir este objetivo e dar resposta às questões de investigação, analisei os dados recolhidos em ambiente de sala de aula, registados em vídeo, ou presentes nas produções escritas dos alunos. Para além disso, a observação participante foi também um contributo essencial para alcançar os objetivos de investigação. A análise de dados foi bastante detalhada para que, de facto, esta investigação possa ser um contributo para se desenvolver uma melhor compreensão sobre o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos no tópico.

6.2. Conclusões do estudo

Nesta secção apresento as principais conclusões do estudo, procurando responder às três questões que guiaram esta investigação. Assim, apresento conclusões referentes às aprendizagens realizadas e dificuldades apresentadas pelos alunos e aos processos de raciocínio matemático utilizados na aprendizagem do tópico.

6.2.1 Quais as aprendizagens realizadas pelos alunos no tópico Assíntotas ao gráfico de uma função e em que medida estas correspondem aos objetivos estabelecidos?

O conceito de assíntota vertical foi o primeiro a ser estudado pelos alunos, na tarefa 1. Os alunos estabeleceram o primeiro contacto com o conceito de assíntota através da representação gráfica da função $A(d) = \frac{5}{5-d}$, $d \in [0,5[$. Nesta representação aperceberam-se da existência de pontos da forma $(x, f(x))$ que pertencem ao gráfico da função, que se aproximam da reta, quando x varia. Como refere Nair (2010) uma assíntota começa a ser perspetivada como um objeto geométrico do qual a função se aproxima. Foi, de facto, o que vários alunos conjeturaram a partir da análise do gráfico da função. Depois desta noção informal de assíntota, a forma como está estruturada a tarefa 1 levou a que os alunos fossem capazes de identificar as assíntotas verticais através do resultado obtido no cálculo dos limites laterais num determinado ponto. Da mesma forma, conseguem verificar que uma reta não é assíntota vertical sempre que nenhuma das seguintes condições se verifica: $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

Estabelecido o primeiro contacto com o conceito de assíntota, foi fácil relacioná-lo depois com assíntotas horizontais e oblíquas. Os alunos conseguiram transpor as ideias já estabelecidas sobre uma assíntota vertical para outros tipos de assíntotas. Ao identificarem, a partir do gráfico de uma função, uma reta da qual a função se aproxima, mas aparentemente nunca interseta, indicam ser uma assíntota ao gráfico daquela função. Apesar de serem os pontos da forma (x,f(x)), que pertencem ao gráfico da função, que se aproximam da reta, quando x varia, esta é a noção informal de assíntota que os alunos desenvolvem num estudo inicial do conceito.

As tarefas permitiram que os alunos conseguissem visualizar as assíntotas através da representação gráfica, mas também que reconhecessem as assíntotas a partir do cálculo de limites. Desta forma, os alunos demonstraram saber que, para determinar as assíntotas horizontais ao gráfico de uma função f, se calculam os limites de f quando x tende para $+\infty$ e para $-\infty$. Sabem que, basta obter como resultado um número real num desses limites para confirmar que uma determinada reta é uma assíntota horizontal em $+\infty$ e/ou em $-\infty$. Para determinar uma assíntota oblíqua ao gráfico de uma função em $\pm\infty$, alguns alunos calculam um limite para determinar o declive m $\left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\right)$ e outro para determinar a ordenada na origem b $\left(\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-\mathrm{m}x)\right)$. Por outro lado, também reconhecem que uma reta $y=mx+b$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico da função em $\pm\infty$ e/ou $-\infty$ se se verificar $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(mx+b)]=0$. A maioria dos alunos apresenta fluência processual, conseguindo aplicar e compreender os processos estudados para determinar as assíntotas verticais, horizontais e oblíquas ao gráfico de uma função. A compreensão concetual não foi atingida por todos os alunos uma vez que, de acordo com NCTM (2009), isso só acontece quando estes entendem a validade dos procedimentos, como e quando podem ser utilizados e conseguem interpretar criticamente os resultados.

No que diz respeito às funções racionais escritas na forma $f(x)=a+\frac{b}{x-c}$ $(a,b,c\ \in\mathbb{R})$, os alunos conseguem encontrar assíntotas horizontais e verticais quando a expressão algébrica está escrita desta forma. Reconhecem, sem dificuldade, que $y=a$ é assíntota horizontal ao gráfico da função e $x=c$ é assíntota vertical ao gráfico da função.

A calculadora gráfica é uma ferramenta muito importante no estudo das assíntotas ao gráfico de uma função pois a visualização do gráfico da função ajuda os alunos a fazer uma análise mais completa da função, a presumir a existência de assíntotas em certos locais, proporcionando assim uma oportunidade de explorar esta importante característica das funções.

6.2.2. Quais as dificuldades que os alunos apresentam na aprendizagem das assíntotas ao gráfico de uma função. Em particular, em tarefas que envolvem o raciocínio matemático?

As dificuldades manifestadas pelos alunos começam por se verificar na determinação de assíntotas verticais ao gráfico de uma função. Yerushalmy (1997) afirma que, uma das definições apresentadas para assíntota vertical é que esta é "uma linha vertical que existe apenas em pontos onde a função não está definida e os valores da função se aproximam do infinito negativo ou positivo" (p. 8). De facto, esta conceção foi também desenvolvida pelos alunos que, determinam, os limites laterais para os pontos onde verificam que a função não está definida. Contudo, revelam também considerar possível que, nem todos os pontos em que a função não está definida, correspondam a assíntotas verticais. Aliás, na questão 4 do teste escrito, verificou-se a existência de um ponto para o qual a função não está definida, mas que não corresponde a uma assíntota vertical. Neste conceito os alunos demonstraram alguma dificuldade em compreender quais os limites laterais que se devem determinar para obter assíntotas verticais: limite à direita de um ponto, limite à esquerda de um ponto ou ambos? Este assunto foi explorado na discussão coletiva da questão 2 da tarefa 1, depois de terem sido analisados dois casos distintos, levando os alunos a compreender que tudo depende do domínio da função.

Os alunos revelaram ainda dificuldade em definir uma estratégia sistemática para determinar estas assíntotas. Nos momentos de discussão coletiva e síntese final, um dos objetivos era que os alunos generalizassem um processo para a determinação de qualquer tipo de assíntota, o que nem sempre se revelou fácil. Os alunos conseguiram construir e generalizar esses processos, através da análise e discussão dos casos particulares estudados nas tarefas 1 e 2, apesar de terem demorado bastante.

Relativamente às estratégias utlizadas para determinar assíntotas ao gráfico de uma função, por vezes, os alunos referem apenas a análise do gráfico da função. Considerar que se podem identificar e determinar assíntotas apenas pela análise do gráfico da função tornou-se uma dificuldade verificada nas resoluções de vários alunos. Por exemplo, no teste escrito houve ainda um aluno que referiu que identificou as assíntotas, exclusivamente, através da análise do gráfico da função. Este tipo de considerações provoca erros que poderão facilmente ser ultrapassados se os alunos fizerem todo o processo de determinação de assíntotas pelo método analítico e recorreram apenas ao gráfico para confirmar os resultados obtidos ou para identificar potenciais retas assíntotas. Como referem Magalhães e Martinho (2011) os alunos devem adaptar-se a cada situação, identificando a necessidade de justificação analítica ou apenas gráfica para conseguir validar a conjetura.

6.2.3. De que modo os alunos mobilizam os processos de raciocínio matemático na aprendizagem do tópico Assíntotas ao gráfico de uma função, em particular, a formulação de conjeturas, generalização e justificação?

No global das tarefas, os alunos revelaram alguma facilidade na formulação de conjeturas. Muitas das conjeturas formuladas foram previstas na planificação das aulas e constituíam também um dos objetivos das tarefas. Estas conjeturas revelaram ser essenciais na compreensão das propriedades das retas que são assíntotas ao gráfico de uma função e, posteriormente, na sua generalização a outras funções. Apesar de ainda só terem estudado o conceito de assíntota vertical, os alunos conseguiram, no final da discussão coletiva da tarefa 1, afirmar que $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$.

A elaboração de conjeturas revelou-se mais fácil do que a elaboração de justificações. Apesar disso, devo realçar o esforço que alguns alunos fizeram para apresentar uma justificação sem que isso fosse pedido no enunciado da tarefa, como aconteceu na questão 1 da tarefa 4. Quando efetuadas justificações, estas são apresentadas através de uma representação verbal escrita e recorrem a métodos analíticos ou recorrem à representação gráfica, muitas vezes, através da calculadora. As duas estratégias, gráfica e analítica, foram exploradas nos momentos de discussão coletiva, procurando que os alunos compreendessem que o gráfico da função permite apenas confirmar resultados obtidos através dos métodos analíticos não sendo considerada uma justificação formal suficiente para este ano de escolaridade.

No que diz respeito à generalização dos processos para determinar as assíntotas ao gráfico de uma função, prevista na planificação das aulas e na conceção das tarefas, os alunos conseguem contribuir com ideias importantes para a efetuar. As generalizações surgiram dos casos específicos analisados nas tarefas 1 e 2. O mesmo apresenta Mata-Pereira (2012) no seu estudo ”Em grande parte destas situações os alunos utilizam exclusivamente um caso particular para formularem a generalização. Noutras situações, as generalizações são formuladas com base em mais de um caso particular" (p. 107). Os momentos planeados de generalização não foram fáceis de concretizar. A inexperiência dos alunos na elaboração de generalizações levou a que houvesse a dificuldade em conseguir generalizar os processos de determinação de assíntotas verticais, horizontais e oblíquas. Diversos autores consideram que generalizar é uma tarefa desafiante para os alunos (Zazkis, Liljedahl, & Chernoff, 2008). Para as concretizar foi necessário um questionamento muito estruturado e sistemático da minha parte. Nas tarefas 1 e 2, os alunos identificaram um conjunto de características comuns à reta que corresponde à assíntota ao gráfico de uma função. Nomeadamente, o facto de o gráfico de uma função e a sua assíntota estarem cada vez mais próximas e aparentemente nunca se intersetarem. Sempre que identificam retas com essa característica relativamente ao gráfico da função, independentemente da sua posição relativa, os alunos afirmam que essa reta é uma assíntota.

As opções foram tomadas tendo em vista uma abordagem de ensino exploratória, em que se pretende que os alunos analisem casos concretos para, mais tarde, conseguirem formular generalizações. Também as tarefas de cunho exploratório surgem num contexto que proporciona a utilização de diferentes processos de raciocínio matemático e, de acordo com Ball e Bass (2003), as planificações das aulas devem integrar tarefas que estimulem o raciocínio matemático dos alunos. Os momentos de discussão e síntese final assumiram um papel determinante na aprendizagem destes conceitos e dos processos associados à determinação de cada um dos tipos de assíntotas. Foi nos momentos de discussão coletiva que se explorou cada um destes processos, com os contributos dados pelos alunos resultantes daquilo que concluíram de cada uma das tarefas, o que vai ao encontro com o que referem Ponte, Quaresma & Mata-Pereira (2020) sobre a aula de carácter exploratório.

As tarefas exploratórias propostas tinham a intenção de promover processos de raciocínio como a justificação e averiguar como é que os alunos desenvolvem este processo. A distinção entre justificações informais, como a análise do gráfico, e justificações formais, como o cálculo dos limites, foi algo que tentei explorar ao longo da intervenção. Há alunos que apresentam uma justificação formal com clareza e correção e optam pela utilização do gráfico para apoiar a resolução. Enquanto outros, no teste escrito, continuam a justificar as suas conclusões apenas pela observação do gráfico.

A opção por uma abordagem de ensino exploratória, com a proposta de tarefas que exploram casos mais específicos e dão oportunidade aos alunos de alargar esse conhecimento a situações mais gerais, os momentos de discussão coletiva em que se analisaram e confrontaram estratégias, a calculadora gráfica como instrumento importante no apoio à resolução analítica são aspetos que destaco das aulas lecionadas como promotores da aprendizagem dos alunos. Os alunos manifestaram-se sempre motivados e até alunos que nem sempre são tão empenhados na realização das tarefas, participaram ativamente na sua realização.

6.3. Reflexão final

Concluo este relatório com um breve balanço sobre o estudo realizado e as suas contribuições para a minha formação e destaco alguns aspetos que terei em conta no meu futuro como professora. A relação professor-aluno é um fator determinante na criação de um ambiente propício ao ensino e à aprendizagem. Nessa relação e ambiente é importante desenvolver uma relação de confiança entre todos e os alunos devem ser constantemente desafiados para aprender e incentivados a expor as suas dificuldades e as suas estratégias, sem receio de errar ou de sofrer alguma repreensão. Para além disso, de acordo com os objetivos definidos para uma aula, é importante que seja definida e implementada uma estratégia de ensino adequada. Esta estratégia envolve a proposta de tarefas propícias ao objetivo da aula, o trabalho autónomo dos alunos nessas tarefas e o estabelecimento de momentos de discussão coletiva em que decorrem apresentações de resoluções, discussões de estratégias e confronto de resultados.

Uma dificuldade com a qual lutei ao longo da intervenção foi a forma como conduzi os momentos de discussão coletiva. Estes são momentos de grande relevância na aprendizagem dos alunos, que devem ser estrategicamente conduzidos pelo professor. A existência de um reduzido número de alunos participativos na turma foi para mim um desafio constante. Recorri a um questionamento frequente como forma de atingir as conclusões pretendidas ao mesmo tempo que me preocupava para não utilizar perguntas retóricas.

Considero que as opções tomadas ao longo da intervenção contribuíram para a concretização de aprendizagens no tópico Assíntotas ao gráfico de uma função e, em particular, contribuíram para o desenvolvimento da sua capacidade de raciocinar matematicamente. Todo o estudo realizado permitiu-me aprofundar, explorar e saber como promover uma capacidade que é apontada como transversal e de especial importância no ensino da Matemática. Reconheço que, esta capacidade acaba por ser pouco incentivada e desenvolvida também porque alguns professores desconhecem estratégias e formas de a promover. Fatores como a abordagem de ensino selecionada, as tarefas propostas, a forma como se desenvolve o trabalho na sala de aula, as ferramentas a que se recorre, podem influenciar fortemente o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos e também a sua aprendizagem.

No entanto, a minha intervenção no âmbito da prática de ensino supervisionada não decorreu nas circunstâncias planeadas. Uma situação inesperada de pandemia que afetou todo o país e, em particular, o funcionamento das escolas levou a que parte da minha intervenção fosse realizada nos moldes de ensino à distância.

Para cada uma das dez aulas previstas para a intervenção, elaborei um plano de aula com tarefas pensadas para atingir os objetivos definidos em cada um deles. A primeira aula do período de intervenção, no âmbito da prática de ensino supervisionada, não foi a primeira aula que lecionei durante o ano letivo. Aliás, no momento de intervenção já havia construído uma relação bastante promissora com os alunos, que sempre me respeitaram e encararam também como professora da turma. As aulas lecionadas presencialmente correram de acordo com o previsto conseguindo, no geral, cumprir o plano de aula. Na fase de ensino a distância, sinto que o trabalho foi muito mais complicado de efetuar, pela desmotivação e desorganização decorrente de toda a situação. Apesar disso, consegui ainda desenvolver algumas tarefas planeadas e também o teste escrito individual. Considero que o ensino à distância tem vantagens e desvantagem como o tem o ensino presencial. Mas é um universo ainda pouco explorado e para o qual não estávamos preparados.

A forma como acabou por decorrer a minha intervenção (alheia à minha vontade) não espelha de todo, a minha dedicação e o meu empenho em todas as aulas e atividades ao longo ano letivo. Desde o início do ano letivo que acompanhei a professora cooperante na maioria das suas aulas. Assisti e participei nas aulas da turma na qual realizei a investigação, mas também assisti, uma vez por semana, durante todo o ano letivo, às aulas de Matemática A de outra turma de 11.º ano de Ciências e Tecnologias e ainda às aulas de Matemática Aplicada às Ciências Sociais de uma turma de 11.º de Línguas e Humanidades a cargo da professora cooperante. Dediquei 400 minutos por semana à observação e participação nas aulas das turmas já mencionadas e, ainda, à lecionação de algumas delas. Em cada uma destas semanas, houve também oportunidade para uma reunião semanal de cerca de 100 minutos onde conversava e discutia, com a professora cooperante, alguns assuntos pessoais relacionados com os alunos, os desempenhos da turma, a planificação das aulas ou os testes escritos.

No que diz respeito a atividades fora do período letivo, participei na cerimónia de boas-vindas e apresentação de novos professores e funcionários no início do ano letivo e também no primeiro conselho de turma que me permitiu um conhecimento prévio dos alunos no que diz respeito ao aproveitamento, ao comportamento e também das relações entre pares. Relativamente aos projetos do plano anual de atividades, a turma envolveu-se no projeto "Alfredo vai ao mercado" que consiste em idas, aos sábados de manhã, ao Mercado Municipal da cidade apresentar algo relacionado com as diversas disciplinas. Os sábados dedicados a cada uma das disciplinas estão definidos desde o início do ano letivo. Participei ativamente com ideias de apresentações e sugestões de atividades a desenvolver nos dias dedicados à Matemática. Apesar de não se ter realizado devido à pandemia, estava já preparada uma visita ao mercado para o dia catorze de março, Dia Internacional do Pi, com um conjunto de atividades sobre o tema deste ano, "A Matemática está em toda a parte".

Apesar dos contratempos, a intervenção contribuiu positivamente para a minha formação enquanto professora. O acompanhamento de uma turma durante todo o ano letivo, a vivência na escola e a participação em atividades não letivas permitiram-me conhecer todo o trabalho que um professor desenvolve. Mantém-se a certeza de que esta é uma profissão exigente, que impõe uma constante adaptação a novas realidades e requer um cuidado planeamento do que se pretende realizar e atenta reflexão sobre o que realmente se realizou.

FIM

Referências

Aires, L. (2015). *Paradigma Qualitativo e Práticas de Investigação Educacional*. Lisboa: Universidade Aberta.

AMATYC. (1995). *Crossroads in mathematics standards for introductory college mathematics before calculus*. Memphis: AMATYC.

Andrade, C., Pereira, P., & Pimenta, P. (2016) *Novo Ípsilon 11 - Volume 3*. Lisboa: Raiz Editora.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215–241.

Ayalon, M., & Even, R. (2006). Deductive reasoning: Different conceptions and approaches. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 89–96). Prague: PME

Ball, D. L.& Bass, H. (2003). *Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching*. In: B. Davis, & E. Simmt, (Eds.). *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.

Becker, J.R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H.L. Chick & J.L. Vincent (Eds.) *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 121-128). Melbourne: PME.

Bell, A. (1993). Some Experiments in Diagnostic Teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 115-137.

Bell, C. (2011). Proofs without words: A visual application of reasoning and proof. *Mathematics Teacher*, *104*(9), 690-695.

Black, P., & Wiliam, D. (2006). Developing a theory of formative assessment. In J. Gardner (Ed.), *Assessment and learning* (pp. 81–100). London: Sage.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: DGIDC-ME.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e métodos.* Porto: Porto Editora.

Brocardo, J. (2002). *As investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8.º ano* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. Boston, MA: Springer.

Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts*. London: HMSO.

Colás, P. (1992) La Metodologia cualitativa. In P. Colás, & L. Buendia (Eds), *Investigación Educativa*. Sevilla: Alphar.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1995). *A Experiência Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (2005). *Handbook of Qualitative Research*. Sage.

Direção-Geral da Educação (DGE) (2018). *Aprendizagens Essenciais de Matemática A*. Lisboa: Direção-Geral da Educação.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1983). The function concept in college students: Linearity, smoothness and periodicity. *Focus on learning problems in mathematics*, *5*(3), 119-132.

Dugdale, S. (1993). Functions and graphs – Perspectives on student thinking. In T. A. Romberg, E. Fennema & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions* (pp.101-130). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Bern: Peter Lang.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1993). The Guide and the Asymptote. *Teaching Mathematics and its Applications*, *12*(1), 40-42.

Fernandes, E. (1997). O trabalho cooperativo num contexto de sala de aula. *Análise Psicológica*, *15*(4), 563-572.

Ferreira, J. C. (1995). *Introdução à análise matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.Fischbein, E. (1987). *Intuitions in science and mathematics: An educational approach.* Dordrecht, Netherlands: D. Reidel.

Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Galbraith, P. (1995). Mathematics as reasoning. *The Mathematics Teacher*, *88*(5), 412- 417.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin & B. Greer (Eds), *Theories of mathematical learning* (pp 397–430). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Gracias, T. S., & Borba, M. C. (2000). Explorando possibilidades e potenciais limitações das calculadoras gráficas. *Educação Matemática*, *56*, 35-39.

Gray, E., & Tall, D. (1994), Duality, ambiguity, and flexibility: A 'proceptual' view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116– 140.

Greenes, C., & Findell, C. (1999). Developing students' algebraic reasoning abilities. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 127–137). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Henriques, A. (2010). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação*. (Tese Doutoramento em Educação, Didáctica da Matemática, Universidade de Lisboa).

Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático na exploração de atividades de investigação: Um estudo com alunos universitários. *Quadrante*, *21*(2), 139-163.

Henriques, A. C., & Ponte, J. P. (2014). As Representações como suporte do raciocínio matemático dos alunos quando exploram atividades de investigação. *Bolema, 28*(48), 276-298.

Hornsby, E.J., & Cole, J.A. (1986). Rational functions: ignored too long in the High School curriculum. *Mathematics Teacher*, *79*(9), 691-698.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1-16.

Junqueira, M. (1996). Exploração de construções geométricas em ambientes computacionais dinâmicos. *Quadrante, 5*(1), 61-108.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (EDS). (2001). *Adding It Up: Helping Children Learning Mathematics.* Washington: National Academy Press.

Krulik, S., & Rudnick, J.A., (1999). *Innovative tasks to improve critical and creative thinking skills*. Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics.

Lannin, J. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical thinking and learning, 7*(3), 231-258.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliott, R. (2011). *Developing Essential Understanding of Mathematical Reasoning for Teaching Mathematics in Prekindergarten* – Grade 8. Reston, VA: NCTM.

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning on task solving. *Educational Studies in Mathematics, 41*(2), 165-190.

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics, 52*(1), 29-55.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276.

MAA (Mathematical Association of America). (2004). *Undergraduate programs and courses in the mathematical sciences: CUPM curriculum guide 2004*. Washington, DC: Mathematical Association of America. www.maa.org/cupm

Magalhães, M. G., & Martinho, M. H. (2011). A calculadora gráfica como instrumento para o desenvolvimento da argumentação matemática. In A. Caseiro, A. Henriques, A. Silvestre, C. Nunes, H. Jacinto, H. Pinto & J. P. Ponte (Org*.), Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 791-806). Lisboa: APM.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Bristol: Addison-Wesley.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*(3), 277-290

Mata-Pereira, J. (2012). *O raciocínio matemático em alunos do 9.º ano no estudo dos números reais e inequações*. Dissertação de Mestrado em Educação, Didática da Matemática, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2013). Desenvolvendo o raciocínio matemático: Generalização e justificação no estudo das inequações. *Boletim GEPEM*, *62*, 17-31.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 169-186.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2018). Promover o raciocínio matemático dos alunos: Uma investigação baseada em design. *Bolema, 32*(62), 781-801.

Matos, A., Silvestre, A. I., Branco, N., & Ponte, J. P. (2008). Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória. In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín & L. B. Nieto (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 505-516). Badajoz: SEIEM.

Ministério da Educação (1997). *Matemática: Programas – 10.º, 11.º e 12.º anos*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Direção Geral da Inovação e do Desenvolvimento Curricular, Ministério da Educação.

Ministério da Educação e Ciência (MEC). (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: MEC.

Ministério da Educação e Ciência (MEC). (2014). *Programa e Metas Curriculares de Matemática A Ensino Secundário*. Lisboa: MEC.

Nair, G. (2010). *College Students' Concept Images of Asymptotes, Limits, and Continuity of Rational Functions.* The Ohio State University.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

NCTM (2009*). Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2014). *Principles to Actions: ensuring Mathematical Success for All*. Reston, VA: NCTM.

Oliveira, P. (2002). *A investigação do professor, do matemático e do aluno: Uma discussão epistemológica*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. *Educação e Matemática*, *100*, 3-9.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics.* Princeton, NJ: Princeton University Press. (Vol. 1)

Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery* (edição original de 1962/1965). New York: Wiley.

Pólya, G. (1990). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2003). *Gestão curricular em matemática*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI – Grupo de Trabalho e Investigação (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM, 39*(5- 6), 419-430.

Ponte, J.P. (2017). Discussões coletivas no ensino-aprendizagem da Matemática. In GTI (Ed.), *A prática dos professores: Planificação e discussão coletiva na sala de aula* (pp. 33-56). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da matemática. Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento do Ensino Secundário.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Educação e Matemática, 100*, 89-96.

Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2006). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H., & Varandas, J. M. (1998). Investigating mathematical investigations. In P. Abrantes, J. Porfirio, & M. Baía (Eds.), Les interactions dans la classe de mathématiques: Proceedings of the CIEAEM 49 (pp. 3-14). Setúbal: ESE de Setúbal.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa*, *7*(2), 355-377.

Ponte, J. P., & Matos, J. F. (1992). *Cognitive processes and social interaction in mathematical investigations.* Berlin: Springer.

Ponte, J. P., Nunes, C. C., & Quaresma, M. (2012). Explorar, investigar, interagir na aula de Matemática: Elementos fundamentais para a aprendizagem. In A. C. Silva, M. Carvalho & R. G. Rêgo (Eds.), *Ensinar Matemática: Formação, investigação e práticas docentes* (pp. 49-74). Cuiabá: UFMT.

Ponte, J. P., Oliveira, H., & Segurado, I. (2003). A collaborative project using narratives: What happens when pupils work on mathematical investigations. In A. Peter-Koop et al. (Eds.), *Collaboration in teacher education* (pp. 85-97). Dordrecht: Kluwer.

Ponte, J.P., & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics, 93*(1), 51-66.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. M. (2015). É mesmo necessário fazer planos de aula?. *Educação e Matemática, 133*, 26-35.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J.. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula. *Educação e Matemática*, *156*, 7-11.

Ponte, J. P., & Santos, L. (1998). Práticas letivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante, 7*(1), 3-32.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática para o 1.o ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In GTI (Org.), *O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.

Quaresma, M., & Ponte, J. P. (2015). Comunicação, tarefas e processos de raciocínio: Aprendizagens profissionais proporcionadas por um estudo de aula. *Zetetiké, 23*(44), 297-310.

Ramalho, G. (2002). *PISA 2000: Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia matemática e competências dos alunos portugueses*. Lisboa: Ministério da Educação, Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE).

Riviera, F., & Becker, J. (2009). Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics Teacher in the Middle School, 15*(4), 213-221.

Rocha, A. (2002). *Os alunos de matemática e o trabalho investigativo*. Lisboa: APM.

Russel, S. (1999). *Mathematical reasoning in the elementary grades*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Segurado, I. (2002). O que acontece quando os alunos realizam investigações matemáticas? In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 57-74). Lisboa: APM.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics 22*, 1-36

Silva, A. P. (2009). A problemática da descoberta e da prova. *Educação e Matemática, 101,* 37- 41.

Siqueira, D. A., & Beust, A. C. (2008). O ensino de funções através da interpretação gráfica. *Disciplinarum Scientia, 9*(1), 5-66.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *Mathematics Teacher, 91*(8), 670-675.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2016). *Precalculus*. Toronto: Nelson Education.

Swan, M. (2017). Conceber tarefas e aulas que desenvolvam a compreensão concetual, a competência estratégica e a consciência crítica. *Educação e Matemática, 144*, 67-72.

Swan, M. (2018). Conceber tarefas e aulas que desenvolvam a compreensão concetual, a competência estratégica e a consciência crítica. *Educação e Matemática, 146*, 8-14.

Varandas, J. M. (2001). *Avaliação de investigações matemáticas: Uma experiência* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Villiers, M. D. (1999). *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad*. Berkeley, California: Key Curriculum Press.

Yakel, E., & Hanna, G. (2003). *Reasoning and Proof.* In J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter, (Eds.). *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics*, (pp. 227-236). Reston: NCTM.

Yerushalmy, M. (1997). Reaching the unreachable: Technology and the semantics of asymptotes. *International Journal of Computers for Mathematical Teaching, 2*, 1-25.

Zazkis, R., Liljedahl, P., & Chernoff, E. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 131-141.

Anexos

Anexo 01: Tarefa 1

Ano Letivo 2019/2020
Matemática A – 11.º Ano

Escola Básica e Secundária Alfredo da Silva

Professora: Catarina Dias

Tarefa 1

1. O coeficiente de ampliação $\boldsymbol{A}$ de uma certa lupa é dado, em função da distância $\boldsymbol{d}$ (em decímetros) da lupa ao objeto por:

$$A(d) = \frac{5}{5-d}\ , d \in [0,5[$$

1.1. Determina o coeficiente de ampliação quando a lâmpada se encontra a uma distância do objeto de:

a) $\mathbf{0}\ \boldsymbol{dm}$
b) $\mathbf{4,5}\ \boldsymbol{dm}$
c) $\mathbf{4,9}\ \boldsymbol{dm}$
d) $\mathbf{4,9999}\ \boldsymbol{dm}$

1.2. Com o auxílio da calculadora, representa o gráfico da função A.

1.3. Determina o valor de $\lim\limits_{d \to 5^-} A(d)$ e interpreta o resultado obtido.

2. Considera a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

2.1. Com o auxílio da calculadora, representa o gráfico da função f.

2.2. Indica o domínio da função f.

2.3. O que observas no comportamento de f quando x tende para zero por valores superiores a zero $(x \to 0^+)$? E quando x tende para zero por valores inferiores a zero $(x \to 0^-)$?

Anexo 02: Tarefa 2

Ano Letivo 2019/2020
Matemática A – 11.º Ano

Escola Básica e Secundária Alfredo da Silva

Professora: Catarina Dias

Tarefa 2

1. Retoma a função da questão 2 da tarefa anterior: $f(x) = \frac{1}{x}$.

O que observas no comportamento de f quando x tende para $+\infty$? E para $-\infty$?

2. Considera a função f definida por $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x}$ e a reta r de equação $y = x - 1$.

2.1. Como é o comportamento da função f quando x tende para $+\infty$? E quando x tende para $-\infty$?

2.2. Identifica o que representa, para cada valor de x ($x \neq 0$), a expressão $f(x) - (x - 1)$.

2.3. Determina $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (x - 1)]$ e $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (x - 1)]$.

Anexo 03: Tarefas do manual

Tarefa 94 da página 69 do manual Novo Ípsilon 11- Volume 3.

94 Determina, caso existam, as assíntotas verticais e horizontais ao gráfico das funções reais de variável real definidas por cada uma das expressões seguintes:

94.3 $h(x) = \dfrac{1-x}{2x+5}$

94.4 $i(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{se } x < 0 \\ -\dfrac{2x^2+1}{x+1} & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$

Tarefa 95 da página 69 do manual Novo Ípsilon 11- Volume 3.

95 Considera uma função f, de domínio $\mathbb{R}$ e contínua, tal que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - 2x - 3\right) = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) + 2x - 3\right) = 0$

95.1 O gráfico de f tem assíntotas verticais? E horizontais? Justifica as tuas respostas.

95.2 Escreve as equações das assíntotas ao gráfico de f.

95.3 Representa num referencial cartesiano as assíntotas ao gráfico de f e faz, nesse referencial, a representação gráfica de uma função com as características enunciadas da função f.

Anexo 04: Tarefa 3

Ano Letivo 2019/2020
Matemática A – 11.º Ano

Escola Básica e Secundária Alfredo da Silva

Professora: Catarina Dias

Tarefa 3

1. Considera o seguinte par de funções.

$$f_1(x) = \frac{2}{x} \quad \text{e} \quad f_2(x) = -\frac{3}{x}$$

Estuda as assíntotas ao gráfico de cada uma das funções.

2. Considera o seguinte par de funções.

$$f_3(x) = \frac{2}{x+1} \quad \text{e} \quad f_4(x) = -\frac{3}{x-1}$$

Estuda as assíntotas ao gráfico de cada uma das funções

3. Considera o seguinte par de funções.

$$f_5(x) = 1 + \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad f_6(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x+3}$$

Estuda as assíntotas ao gráfico de cada uma das funções.

Anexo 05: Tarefa 4

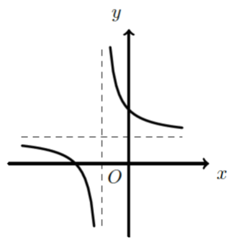
Ano Letivo 2019/2020
Matemática A – 11.º Ano

Escola Básica e Secundária Alfredo da Silva

Professora: Catarina Dias

Tarefa 4

1. Para um certo valor de a e para um certo valor de b, a expressão $f(x) = a + \frac{1}{x-b}$, define a função cujo gráfico está parcialmente representado na figura ao lado.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $a > 0 \ \wedge b > 0$

(B) $a > 0 \ \wedge b < 0$

(C) $a < 0 \ \wedge b > 0$

(D) $a < 0 \ \wedge b < 0$

2. Considera a função g, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, definida por $g(x) = \frac{x-2}{x-3}$.

Em cada uma das opções seguintes estão escritas duas equações.

Em qual das opções as duas equações definem as assíntotas ao gráfico de g?

(A) $x = 2$ e $y = 1$

(B) $x = 2$ e $y = 2$

(C) $x = 3$ e $y = 1$

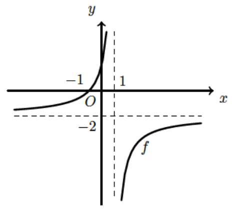
(D) $x = 3$ e $y = 2$

1

Tarefa 4 (continuação)

Ano Letivo 2019/2020
Matemática A – 11.º Ano

3. Na figura seguinte, está representada, num referencial o.n. xOy, parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f.



O gráfico da função f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -1.
As retas de equações $x = 1$ e $y = -2$ são as assíntotas do gráfico da função f.

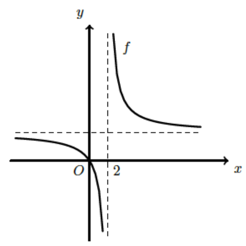
3.1. Responde às seguintes questões sem efetuar cálculos, ou seja, recorrendo apenas à leitura do gráfico.

3.1.1. Indica o contradomínio da função f.

3.1.2. Apresenta, usando a notação de intervalos de números reais, o conjunto solução da condição $f(x) \leq 0$.

3.2. Define, por uma expressão analítica, a função f.

4. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, bem como as duas assíntotas deste gráfico.



Tal como a figura sugere,

- A origem do referencial pertence ao gráfico de $\boldsymbol{f}$;
- Uma das assíntotas é paralela ao eixo $\boldsymbol{Ox}$;
- A outra assíntota é paralela ao eixo $\boldsymbol{Oy}$ e interseta o eixo $\boldsymbol{Ox}$ no ponto de abcissa 2.

Admite ainda que:

- A assíntota ao gráfico de $\boldsymbol{f}$ é paralela ao eixo das abcissas e tem equação $\boldsymbol{y = 3}$;
- $\boldsymbol{f}$ é definida por uma expressão do tipo $\boldsymbol{f(x) = a + \frac{b}{x-c}}$ onde $\boldsymbol{a, b}$ e $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$.

Indica os valores de a e de c e determina o valor de b.

Tarefa 4 (continuação)

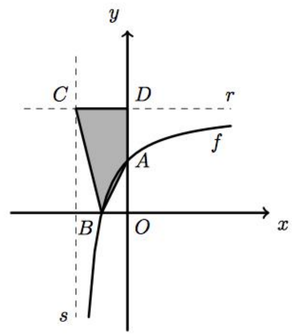
Ano Letivo 2019/2020
Matemática A – 11.º Ano

5. Considera a função f definida por $f(x) = 4 - \frac{4}{x+2}$.
Sem recorrer à calculadora, resolve as questões seguintes:

5.1. Determina o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $f(x) \geq 3$.

5.2. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. xOy:

- parte do gráfico da função $\boldsymbol{f}$;
- as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ que são assíntotas ao gráfico da função $\boldsymbol{f}$;
- o quadrilátero $[\boldsymbol{ABCD}]$.



A e B são pontos de interseção do gráfico da função f com os eixos coordenados.
C é o ponto de interseção das retas r e s.
D é o ponto de interseção da reta r com o eixo Oy.

Determina a área do quadrilátero $[ABCD]$.

3

Anexo 06: Teste escrito

ESCOLA BÁSICA E SECUNDÁRIA ALFREDO DA SILVA

Ano letivo 2019/2020

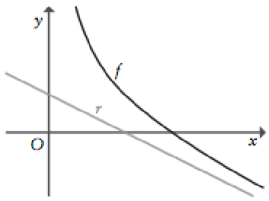
Matemática A – 11.ºano **24 de março de 2020**

1. Para um certo número real a, considera a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 5x + a & \text{se } x \geq 1 \\ 2ax^2 + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Determina o valor de a para que g seja contínua em $x = 1$.

2. No referencial da figura estão representadas uma função f e uma reta r, que é assíntota ao seu gráfico. A reta r interseta os eixos nos pontos de coordenadas $(0,1)$ e $(2,0)$.



Indica a afirmação verdadeira e justifica a tua resposta, apresentando todos os cálculos necessários.

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) + \frac{1}{2}x - 1\right) = 0$

(B) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2}x + 1\right) = 0$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) + 2x - 1) = 0$

(D) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - 2x + 1) = 0$

1

Teste escrito (continuação)

ESCOLA BÁSICA E SECUNDÁRIA ALFREDO DA SILVA

Ano letivo 2019/2020

Matemática A – 11.ºano **24 de março de 2020**

3. Acerca da função f, sabe-se que:

- $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$
- É continua no seu domínio
- $\lim_{x\to 0} f(x) = -3$ e $\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to -\infty} [f(x) + x] = -3$ e $\lim_{x\to +\infty} [f(x) - 2x + 1] = 0$

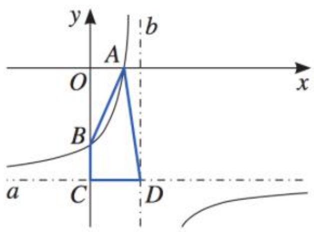
Identifica as assíntotas ao gráfico da função f.

4. Estuda a existência de assíntotas ao gráfico da função f definida por

$$f(x) = \frac{x^4 - 8x}{x^4 - 5x^3 + 6x^2}$$

5. Seja f uma função real de variável real definida por:

$$f(x) = \frac{20 - 10x}{x - 3}$$



Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy:

- As retas a e b, assíntotas ao gráfico de f;
- Os pontos A e B, que resultam da interseção do gráfico da função f com os eixos coordenados;
- O ponto D, interseção das assíntotas a e b;
- O ponto C, interseção da reta a com o eixo Oy;
- O quadrilátero $[ABCD]$.

Determina a área do quadrilátero $[ABCD]$.

Anexo 07: Plano de aula 1 (10 de março)

IPP III
Mestrado em Ensino da Matemática

Plano de aula

Escola Básica e Secundária Alfredo da Silva

Data: 10/03/2020	Ano: 11.º Turma: B	Duração: 50 minutos

DOMÍNIO: Funções Reais de Variável Real (FRVR11)

SUBDOMÍNIO: Assíntotas ao gráfico de uma função

TÓPICOS MATEMÁTICOS: Assíntotas verticais ao gráfico de uma função

OBJETIVO(S) DE APRENDIZAGEM:

- Identificar, dado um referencial cartesiano, uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, a reta de equação $x = a$ como "assíntota vertical ao gráfico de f" quando pelo menos um dos limites laterais de f no ponto a for infinito.

ESTRATÉGIA GERAL:

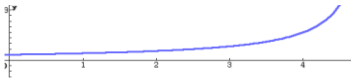
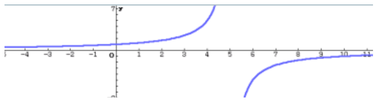
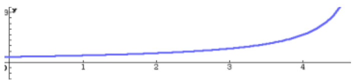
- Proposta de uma tarefa com duas questões;
- Trabalho a pares;
- Discussão e análise coletiva da tarefa.

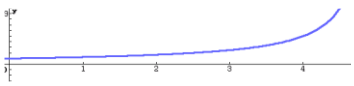
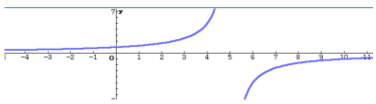
ESTRUTURA DA AULA	TEMPO (EM MINUTOS)
1. Introdução.	5
2. Resolução da questão 1 da tarefa.	7
3. Discussão coletiva da questão 1.	5
4. Resolução da questão 2 da tarefa.	6
5. Discussão coletiva da questão 2.	12
6. Síntese final.	15

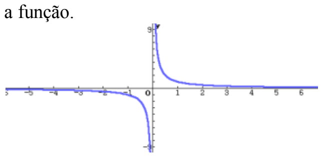
RECURSOS	
Do aluno	**Do professor**
Tarefa 1 Calculadora gráfica	Tarefa 1 Computador e projetor

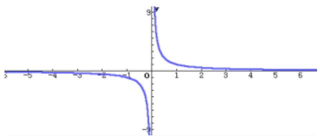
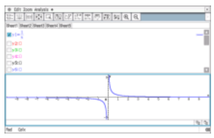
DESENVOLVIMENTO DA AULA				
Tarefas e atividades de aprendizagem	**Duração Esperada**	**Atividades dos alunos e possíveis dificuldades**	**Respostas do professor e aspetos a ter em atenção**	**Objetivos e avaliação**
Introdução	5		• "Na aula de hoje vamos descobrir novos conceitos relacionados com funções reais de variável real e utilizar também alguns dos conceitos que têm vindo a trabalhar. Vou distribuir uma tarefa constituída por 2 questões. Peço que resolvam a questão 1. para depois fazermos uma breve discussão sobre a mesma. Depois disso, resolvem a questão 2. e discutimos novamente." • Distribuir um exemplar da tarefa a cada par de alunos.	
Resolução da questão 1 (trabalho a pares)	7	• (1.1.) Calcular $A(0)=\frac{5}{5-0}=1$ $A(4{,}5)=\frac{5}{5-4{,}5}=10$ $A(4{,}9)=\frac{5}{5-4{,}9}=50$ $A(4{,}9999)=\frac{5}{5-4{,}9999}=50000$ <u>ou</u> Podem introduzir a função no Menu Gráfico da calculadora e usar a ferramenta $Y.Calc$ quando $x=0,\ x=4{,}5,\ x=4{,}9,\ x=4{,}9999$. Este é apenas um exercício de cálculo. Os alunos podem recorrer à calculadora gráfica. Não prevejo dificuldades a não ser possíveis erros de cálculo.	(O professor circula pela sala para apoiar eventuais dificuldade e identificar diferentes estratégias de resolução que podem ser utilizadas no momento de discussão coletiva).	• Os alunos devem conceber diferentes estratégias de resolução da mesma tarefa. • Os alunos devem realizar a tarefa com sucesso independentemente da estratégia utilizada.

3

		□(1.2.) Recorrer à calculadora para representar a função.  A janela deve ser ajustada para $Xmin$: 0 e $Xmax$: 5 Dificuldade: A representação deve ter em conta o enunciado do problema ($d \in [0,5[$). Se isso não acontecer os alunos vão obter um gráfico como o seguinte:  Neste caso, as variáveis são d e A por isso devem colocar corretamente a legenda na representação gráfica. □ (1.3.) Pelos resultados obtidos em 1.1. os alunos verificam que à medida que o valor de d se torna cada vez mais próximo de 5 (por valores inferiores 5), o valor de $A(d)$ aumenta. Assim, $\lim_{d \to 5^-} A(d) = +\infty$. <u>ou</u> Concluir $\lim_{d \to 5^-} A(d) = +\infty$ recorrendo à representação gráfica de 1.2. e verificando que à medida que d se torna cada vez mais próximo de 5 (por valor inferiores a 5), o valor de $A(d)$ aumenta  <u>ou</u> Calcular analiticamente: $$\lim_{d \to 5^-} A(d) = \frac{5}{5 - 5^-} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$ Dificuldade: interpretar o resultado obtido com $\lim_{d \to 5^-} A(d)$. Os alunos devem compreender que à medida que d se torna cada vez mais próximo de 5 por valores inferiores a 5 (ou quando d tende para 5 por valores à esquerda, $d \to 5^-$), o gráfico da função aproxima-se cada vez mais de uma reta vertical de equação $x = 5$.	□(1.2.) "Qual é o valor de A quando $d = 5$?" "Qual é domínio da função?" □(1.3.) Dificuldade na determinação de $\lim_{d \to 5^-} A(d)$: "Há várias formas de determinar este limite. Como é que será que o consegues determinar?" "Será que a representação gráfica é uma delas?" □ Dificuldade na interpretação do resultado obtido: "O que acontece ao gráfico da função quando $d \to 5^-$?"	

Discussão coletiva das questões 1	10	□ **(1.1.)** Pedir a um aluno que apresente os cálculos e os resultados de $A(0), A(4{,}5), A(4{,}9)$ e $A(4{,}9999)$. $A(0)=\frac{5}{5-0}=1$ $A(4{,}5)=\frac{5}{5-4{,}5}=10$ $A(4{,}9)=\frac{5}{5-4{,}9}=50$ $A(4{,}9999)=\frac{5}{5-4{,}9999}=50000$ No caso de algum aluno ter recorrido ao Menu Gráfico na calculadora para calcular os valores pedidos deve explicar como procedeu. Caso ninguém o tenha feito, ficamos apenas pelo cálculo analítico dos valores e avança-se para a questão 1.2. □**(1.2.)** No caso de se detetarem representações que não tiveram em conta o domínio indicado no enunciado, pedir a dois alunos com representações diferentes que vão ao quadro apresentá-las. Em seguida, pedir comentários acerca das duas representações.  e  Se todos os alunos representarem corretamente a função tendo em conta o domínio apresentado no enunciado, pedir a um aluno que represente no quadro e explique os cuidados que teve nesta representação. □ **(1.3.)** Um aluno que tenha recorrido à representação gráfica de 1.2. explica como procedeu. Pode utilizar a representação gráfica que se mantém no quadro e indicar que à medida que o valor de x se aproxima de 5, o valor de $A(d)$ aumenta. Assim, $\lim_{d\to 5^-} A(d)=+\infty$. Em seguida, um aluno que tenha recorrido ao cálculo analítico explica como procedeu: $\lim_{d\to 5^-} A(d)=\frac{5}{5-5^-}=\frac{5}{0^+}=+\infty$ Se algum aluno pensou na estratégia que recorre aos valores obtidos em 1.1. para	□ **(1.1.)** Sendo esta uma tarefa simples, basta que um aluno apresente os cálculos efetuados no quadro. Eventualmente, podem surgir erros de cálculo, sem grande interesse para a discussão. □ **(1.2.)** Pedir comentários acerca das duas representações apresentadas no quadro. □ **(1.3.)** Se algumas das estratégias pensadas não surgir: "Será esta (ou estas) as únicas formas de resolver isto?..." □ Caso ninguém tenho utilizado esta estratégia, a professora diz: "Reparem	□ Explorar com os alunos diferentes estratégias para resolução de a mesma questão. Explorar tanto estratégias que recorram à representação gráfica como ao cálculo analítico e, de que forma estas podem ser úteis para responder às questões.

		determinar o limite pedir a esse aluno que explique como procedeu. Explorar as várias interpretações do resultado obtido com $\lim_{d \to 5^-} A(d) = +\infty$. O objetivo é concluir que à medida que o valor de d se aproxima cada vez mais de 5, por valores inferiores a 5, o coeficiente de ampliação A é cada vez maior. Contudo, o valor de d nunca é 5, uma vez que 5 não pertence ao domínio da função. Como $\lim_{d \to 5^-} A(d) = +\infty$, diz-se que $d = 5$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função.	nos resultados obtidos em 1.1.? O que verificam?" □"O que está a acontecer ao gráfico da função quando $d \to 5^-$?" □ Se algum aluno afirmar que $d = 5$ é assíntota ao gráfico da função, validar a sua afirmação e dizer que no final da aula vou pedir que me justifiquem tal afirmação. Caso nenhum o afirme, dizer que $d = 5$ diz-se uma assíntota vertical ao gráfico da função. □ Uma assíntota ao gráfico de uma função representa-se usualmente por uma linha a traço interrompido.	□ Os alunos devem formular a conjetura: "O gráfico da função aproxima-se cada vez mais da reta de equação $d = 5$, mas nunca se vão intersetar." □Eventualmente, alguns alunos podem formular a conjetura: "$d = 5$ diz-se uma assíntota vertical ao gráfico da função."
Resolução da questão 2 (trabalho a pares)	10	□**(2.1.)** Recorrer à calculadora para representar a função.  □ **(2.2.)** Calcular o domínio da função. Relembrar, do 10.º ano, que $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. □**(2.3.)** Calcular analiticamente: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ <u>ou</u> Recorrer à representação gráfica em 2.1. para concluir f tende para $+\infty$ quando x tende para zero por valores superiores a zero e f tende para $-\infty$ quando x tende para zero por valores inferiores a zero.	(O professor circula pela sala para apoiar eventuais dificuldade e identificar diferentes estratégias de resolução que podem ser utilizadas no momento de discussão coletiva). □ **(2.3.)** "Tal como na questão anterior a representação gráfica pode ser uma ajuda..."	□ Os alunos devem conceber diferentes estratégias de resolução da mesma tarefa. □ Os alunos devem realizar a tarefa com sucesso independentemente da estratégia utilizada.

		ou Recorrer a valores cada vez mais próximos de zero (valores à esquerda e à direita de zero) para determinar os limites à semelhança do que foi feito na questão 1.1. Por exemplo: $f(-1) = -1$ $f(-0{,}5) = -2$ $f(-0{,}1) = -10$ $f(-0{,}00001) = -100000$ Portanto, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ $f(1) = 1$ $f(0{,}5) = 2$ $f(0{,}1) = 10$ $f(0{,}00001) = 100000$ Portanto, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$. Alguns alunos podem reconhecer que $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função, da mesma forma que $d = 5$ era assíntota na questão 1.		
Discussão coletiva das questão 2	10	□**(2.1.)** Visualizar o gráfico da função.  □**(2.2.)** Indicar que $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. □ **(2.3.)** Explicar as várias estratégias para responder à questão. Apresentar uma estratégia que recorre à representação gráfica: Como se pode ver no gráfico da função, a função tem um comportamento diferente consoante o valor de x se aproxima de zero por valores superiores a zero ou por valores inferiores a zero. f tende para $+\infty$ quando x tende para zero por valores superiores a zero e f tende para $-\infty$ quando x tende para zero por valores inferiores a zero. Contudo, em qualquer dos casos o gráfico da função aproxima-se da reta vertical $x = 0$. Apresentar uma estratégia que recorre ao cálculo dos limites: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$	□**(2.1.)** Projetar o gráfico da função. 	□ Explorar com os alunos várias estratégias de resolução nomeadamente as que recorrem representação gráfica e ao cálculo analítico. □ Os alunos devem formular a conjetura: "O gráfico da função aproxima-se cada vez mais da reta de equação $x = 0$, mas nunca se vão intersetar." □ Os alunos devem formular a conjetura: $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função

		$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$. Concluir que f tende para $+\infty$ quando x tende para zero por valores superiores a zero e f tende para $-\infty$ quando x tende para zero por valores inferiores a zero. Contudo, em qualquer dos casos o gráfico da função aproxima-se da reta vertical $x = 0$.	• O que permite, de facto, concluir que $x = 0$ é assíntota vertical ? • Que limites foram calculados? Qual o resultado de $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$?	• Justificar que $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico da função f pois $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$.
Síntese final	5	• Generalizar o processo para determinar assíntotas verticais ao gráfico de uma função.	Vimos dois casos de funções com assíntotas verticais ao seu gráfico. "Conseguem definir um processo para determinar as assíntotas verticais ao gráfico de qualquer função? Em caso de dificuldade a responder na generalização: Como procedemos na questão 1 e como procedemos na questão 2? Na 1. calculámos o limite quando $x \longrightarrow 5^-$... Na 2. calculámos o limite quando $x \longrightarrow 0^-$ e $x \longrightarrow 0^+$..."Que pontos serão estes?", "O que é igual nestes limites?" • "E como posso verificar que uma reta é assíntota vertical ao gráfico?"	• Os alunos devem generalizar o processo para determinar uma assíntota vertical de qualquer função: 1. Determinar o domínio da função. 2. Determinar os pontos de descontinuidade. 3. Determinar os limites em todos os pontos aderentes e em pontos de descontinuidade. 4. se algum dos limites for infinito, a reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função. • Generalizar: $x = a$ é assíntota vertical ao gráfico de f se $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$

		• A representação gráfica permite levantar uma suspeita relativamente à existência de assíntotas verticais e pode ajudar no cálculo dos limites.	• “Quais os contributos da representação gráfica na determinação das assíntotas?"	ou $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$

TAREFAS COMPLEMENTARES
Página 67 do manual.

Anexo 08: Plano da aula 2 (11 de março)

IPP III
Mestrado em Ensino da Matemática

Plano de aula

Escola Básica e Secundária Alfredo da Silva

Data: 11/03/2020	Ano: 11.º Turma: B	Duração: 50 minutos

DOMÍNIO: Funções Reais de Variável Real (FRVR11)

SUBDOMÍNIO: Assíntotas ao gráfico de uma função

TÓPICOS MATEMÁTICOS: Assíntotas não verticais ao gráfico de uma função

OBJETIVO(S) DE APRENDIZAGEM:

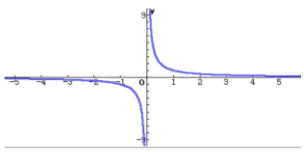
- Designar, dados uma função real de variável real f e um referencial cartesiano, a reta de equação $y = mx + b$ $(m, b \in \mathbb{R})$ por "assíntota ao gráfico de f em $+\infty$" (respetivamente, por "assíntota ao gráfico de f em $-\infty$") se $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$ (respetivamente, se $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$) e designá-la, quando $m = 0$, por assíntota horizontal e, quando $m \neq 0$, por assíntota oblíqua.

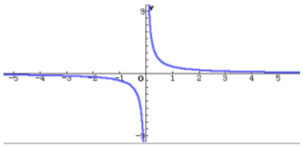
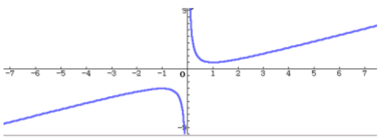
ESTRATÉGIA GERAL:

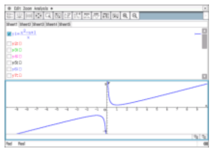
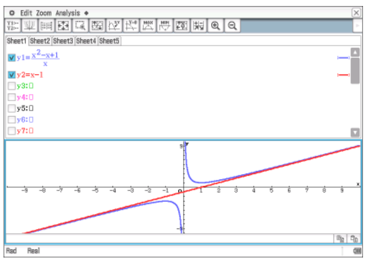
- Proposta de uma tarefa;
- Trabalho a pares;
- Discussão e análise coletiva da tarefa.

ESTRUTURA DA AULA	TEMPO (EM MINUTOS)
1. Introdução.	5
2. Resolução das questões 1.	3
3. Discussão da questão 1.	5
4. Resolução da questão 2.1.	3
5. Discussão coletiva da questão 2.1.	5
6. Resolução da questão 2.2.	4
7. Discussão coletiva da questão 2.2.	3
8. Resolução da questão 2.3.	5
9. Discussão coletiva da questão 2.3.	5
10. Síntese final	12

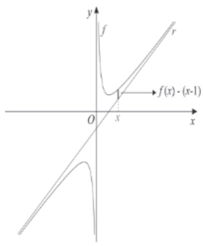
RECURSOS	
Do aluno	**Do professor**
Tarefa 2 Calculadora gráfica	Tarefa 2 Computador e projetor

DESENVOLVIMENTO DA AULA				
Tarefas e atividades de aprendizagem	**Duração Esperada**	**Atividades dos alunos e possíveis dificuldades**	**Respostas do professor e aspetos a ter em atenção**	**Objetivos e avaliação**
Introdução	5		"Vamos dar continuidade ao estudo iniciado na aula anterior. Para isso, vou distribuir uma tarefa com duas questões que devem resolver a pares. Começam por resolver a questão 1. e depois fazemos uma breve discussão. Da questão 2 vamos resolver o 2.1. , discutir, resolver o 2.2. discutir, e assim sucessivamente."	
Resolução da questão 1. (trabalho a pares)	5	Os alunos podem rever a representação gráfica elaborada na tarefa 1 para $f(x) = \frac{1}{x}$.  Pela representação gráfica podem verificar que quanto maior o valor de x mais próximo está o gráfico da função do eixo das abcissas. Da mesma forma, quanto menor for o valor de x mais próximo está o gráfico da função do eixo das abcissas. Contudo, em nenhum dos casos o gráfico "toca" no eixo das abcissas que tem equação $y = 0$. Provavelmente alguns alunos irão afirmar que $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico da função. <u>ou</u> Calcular analiticamente $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$	(O professor circula pela sala para apoiar eventuais dificuldade e identificar diferentes estratégias de resolução que podem ser utilizadas no momento de discussão coletiva). Se os alunos manifestarem dificuldade, relembrar que têm a representação gráfica desta função na tarefa anterior o que pode ser uma ajuda. Por outro lado, podem optar por calcular analiticamente os limites pedidos.	Os alunos devem conceber diferentes estratégias de resolução da mesma tarefa. Os alunos devem realizar a tarefa com sucesso independentemente da estratégia utilizada. Avaliação: Conseguem ou não encontrar uma estratégia para responder corretamente à questão e que dificuldades manifestam.

Discussão coletiva da questão 1.	10	• Apresentar as estratégia que utilizaram para responder à questão. Começar por apresentar a estratégia que recorre à representação gráfica.  À medida que x toma valores positivos cada vez maiores, verifica-se que as respetivas imagens se aproximam cada vez mais de zero. Também se verifica que à medida que x toma valores negativos cada vez maiores, as respetivas imagens aproximam-se cada vez mais de zero. Assim, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ Em seguida, apresentar de que forma se poderia obter o mesmo resultado analiticamente: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$	• Projetar o gráfico da função. • "Concluímos o mesmo com a representação gráfica e com o cálculo analítico do limite?" • (Se nenhum aluno se antecipar a afirmar que y= 0 é assíntota) "E o que será que me podem dizer com os resultados que acabámos de ver?" • A "suspeita" de existência de uma assíntota horizontal pode surgir da observação da representação gráfica. Ao calcular $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ podemos confirmar a nossa suspeita se esse limite existir e for um número real. • Dizemos que $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função em $+\infty$ e em $-\infty$.	• Os alunos devem conhecer e compreender outras estratégias de resolução. • Formular uma conjetura: $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico a função. • Justificar o porquê $y = 0$ ser assíntota ao gráfico da função. • Generalizar o processo para determinar uma assíntota horizontal ao gráfico de uma função: Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, $y = b$ diz-se uma assíntota horizontal do gráfico de f em $+\infty$; Se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, $y = b$ diz-se uma assíntota horizontal do gráfico de f em $-\infty$.
Resolução da questão 2.1. (trabalho a pares)	3	• Dificuldade: "Por onde começar?" • Os alunos podem optar por recorrer à calculadora gráfica para representar a função f e verificar que quando x tende para $+\infty$, $f(x)$ também tende para $+\infty$ e quando x tende para $-\infty$, $f(x)$ também tende para $-\infty$. 	• Em caso de dificuldade, sugerir a representação do gráfico da função f. • Circular pela sala e identificar diversas estratégias de resolução.	• Os alunos devem conceber diferentes estratégias de resolução da mesma tarefa. • Os alunos devem realizar a tarefa com sucesso independentemente da estratégia utilizada.

		<u>ou</u> Os alunos podem optar por determinar analiticamente $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} =$ $= \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} =$ $= \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$		□ Avaliação: Conseguem ou não encontrar uma estratégia para responder corretamente à questão e que dificuldades manifestam.
Discussão coletiva da questão 2.1.	7	□ Apresentar as conclusões obtidas com a representação gráfica da função e como procedeu para responder à questão. □ (outro aluno) Explicar como calcular analiticamente os limites para estudar o comportamento da função. Apresentar o cálculo dos limites: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$	□ Projetar o gráfico da função.  □ "As duas representações permitem tirar a mesma conclusão?" □ "Qual a vantagem de uma e de outra?"	□ Os alunos devem conhecer e compreender outras estratégias de resolução.
Resolução da questão 2.2. (trabalho a pares)	5	□ Caso não tenham recorrido à representação gráfica da função para resolver a questão 1.1. podem fazê-lo agora. Devem ainda representar, no mesmo gráfico a reta $y = x - 1$.  Podem concluir que $f(x) - (x-1)$ representa a distância entre a função e a reta. Ou seja, corresponde ao comprimento do segmento que representa a diferença $f(x) - (x-1)$.	□ Sugerir que representem a função e a reta no mesmo referencial. □ Sugerir aos alunos que, para qualquer x, assinalem no gráfico o correspondente valor de $f(x)$ (no gráfico de f) e de $x - 1$ (na reta r).	□ Os alunos devem conceber diferentes estratégias de resolução da mesma tarefa. □ Os alunos devem realizar a tarefa com sucesso independentemente da estratégia utilizada. □ Avaliação: Conseguem ou não encontrar uma estratégia para responder corretamente à questão e que dificuldades manifestam.

		Dificuldade: compreender o que representa $f(x)-(x-1)$ mesmo com a representação gráfica. Ou O aluno pode resolver $f(x)-(x-1)=$ $\frac{x^2-x+1}{x}-(x-1)=\frac{x^2}{x}-\frac{x}{x}+\frac{1}{x}-x+1=$ $x-1+\frac{1}{x}-x+1=\frac{1}{x}$ Dificuldade: Os alunos mesmo com este resultado podem não conseguir tirar nenhum conclusão. • Os alunos podem dar valores a x. $f(2)-(2-1)=\frac{4-2+1}{2}-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$ $f(3)-(3-1)=\frac{1}{3}$ $f(4)-(4-1)=\frac{1}{4}$ **...** Verificam que à medida que o valor de x aumenta, $f(x)-(x-1)$ diminui. Podem concluir que representa a distância entre a função e a reta.		
Discussão coletiva da questão 2.2.	10	• Explicar como procedeu recorrendo à representação gráfica. Para cada valor de x, assinalar no gráfico o correspondente valor de $f(x)$ e $(x-1)$. Destacar o segmento que corresponde a $f(x)-(x-1)$.	• Nesta questão será abordada apenas a resolução que utiliza um gráfico com as duas funções. Uma resolução que prevê o cálculo de $f(x)-(x-1)=\frac{1}{x}$ não traz grande vantagem uma vez que o objetivo é identificar que esta diferença corresponde ao comprimento de um segmento de reta. • Sugerir aos alunos que, para qualquer x, assinalem no gráfico o correspondente valor de	• Os alunos devem conhecer e compreender outras estratégias de resolução.

			$f(x)$ (no gráfico de f) e de $x-1$ (na reta r).  □ $f(x)-(x-1)$ corresponde ao comprimento do segmento representado no gráfico.	
Resolução da questão 2.3.	5	□Calcular $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$ e calcular $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$ Para quem já tiver resolvido $f(x)-(x-1)=\frac{1}{x}$, torna-se mais fácil o cálculo do limite. Ou Podem verificar pela análise do gráfico que contém a função e a reta que quando x tende para $+\infty$ e para $-\infty$, o comprimento do segmento que representa a diferença $f(x)-(x-1)$ é cada vez menor, ou seja, tende para zero. Verificar que esse comprimento do segmento de reta assinalado vai diminuindo à medida que o valor de x tende para $+\infty$ ou $-\infty$.	□ "O que acontece ao segmento que representa $f(x)-(x-1)$ à medida que x tende para $+\infty$? E quando x tende para $-\infty$?" (Remeter para a representação gráfica efetuada em 2.2.) □"Como é que se calcula analiticamente $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$?" (Substituímos f pela sua expressão e ...)	□ Os alunos devem realizar a tarefa com sucesso independentemente da estratégia utilizada. □Avaliação: Conseguem ou não encontrar uma estratégia para responder corretamente à questão e que dificuldades manifestam.
Discussão coletiva da questão 2.3.	10	□Apresentar o cálculo analíticos dos limites: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$ $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$	□ (Caso todos os alunos tenham utilizado a mesma estratégia, o professor pode sugerir outras...) Professor: Como poderia calcular este limite recorrendo à representação gráfica? E recorrendo apenas à resolução analítica?	□ Os alunos devem conceber diferentes estratégias de resolução da mesma tarefa.

		• Concluir que o gráfico da função f se aproxima cada vez mais do gráfico da reta r. • $y = x - 1$ é uma assíntota ao gráfico da função f em $+\infty$ e em $-\infty$ pois $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (x - 1)] = 0$ e $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (x - 1)] = 0$. • $y = x - 1$ diz-se uma assíntota oblíqua ao gráfico da função.	• O que representa a reta $y = x - 1$ relativamente ao gráfico da função? • O que podemos concluir de $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (x - 1)] = 0$? E de $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (x - 1)] = 0$?	• Os alunos devem formular a conjetura: $y = x - 1$ é uma assíntota ao gráfico da função f • Os alunos devem justificar que: $y = x - 1$ ser assíntota ao gráfico da função f pois $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (x - 1)] = 0$ e $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (x - 1)] = 0$.
Síntese final		• Indicar o processo para verificar se uma reta é assíntota não vertical ao gráfico de uma função.	• "Como verificar se uma reta é assintota não vertical ao gráfico de uma função?" • (Após a generalização) "E se $m = 0$? Qual é a equação da assintota?" (...) Se $m = 0$, a assintota é definida pela expressão $y = b$. "Que tipo de assíntota é essa?" • Uma assíntota não vertical pode ser horizontal ou oblíqua.	• Os alunos devem generalizar: $y = mx + b$ é assíntota não vertical ao gráfico da função f em $+\infty$ se $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (mx + b)] = 0$ e em $-\infty$ se $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (mx + b)] = 0$

			“Já sabemos como verificar se determinada reta é ou não assíntota não vertical ao gráfico de uma função. E se conhecer a expressão algébrica de uma função e souber que existe uma assíntota não vertical, como posso determinar a sua equação?”	

TAREFAS COMPLEMENTARES
Página 71 do manual.

Anexo 09: Plano da aula 3 (11 de março)

IPP III
Mestrado em Ensino da Matemática

Plano de aula

Escola Básica e Secundária Alfredo da Silva

Data: 11/03/2020	Ano: 11.º Turma: B	Duração: 50 minutos

DOMÍNIO: Funções Reais de Variável Real (FRVR11)

SUBDOMÍNIO: Assíntotas ao gráfico de uma função

TÓPICOS MATEMÁTICOS: Assíntotas verticais e não verticais ao gráfico de uma função

OBJETIVO(S) DE APRENDIZAGEM:

- Determinação de assíntotas não verticais ao gráfico de uma função

ESTRATÉGIA GERAL:

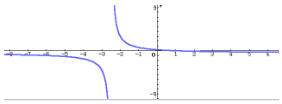
- Proposta de tarefas do manual;
- Trabalho a pares;
- Discussão e análise coletiva das questões da tarefa.

ESTRUTURA DA AULA	TEMPO (EM MINUTOS)
1. Introdução.	2
2. Assíntotas não verticais ao gráfico de uma função	12
3. Resolução da tarefa 94.3 e 94.4.	10
4. Discussão coletiva da tarefa 94.3 e 94.4.	8
5. Resolução da tarefa 95.	5
6. Discussão coletiva da tarefa 95.	8
7. Síntese final.	5

RECURSOS	
Do aluno	**Do professor**
Calculadora gráfica Manual	Manual

DESENVOLVIMENTO DA AULA				
Tarefas e atividades de aprendizagem	**Duração Esperada**	**Atividades dos alunos e possíveis dificuldades**	**Respostas do professor e aspetos a ter em atenção**	**Objetivos e avaliação**
Introdução	2		• Já estudamos assíntotas verticais e não verticais ao gráfico de uma função e sabemos como determiná-las. Assim, vamos trabalhar algumas tarefas que envolvem estes processos.	
Assíntotas não verticais ao gráfico de uma função	12	• Reconhecer que a equação de uma assíntota vertical é a equação de uma reta. Portanto, será da forma $y = mx + b$. Para escrever esta equação preciso de declive (*m*) e da ordenada na origem (*b*). • Calcular *m:* $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-x+1}{x}}{x} =$$ $= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1$ (é finito, é um número real) • Calcular *b:* $$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - 1x) =$$ $$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x} - x\right) =$$ $$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{x} =$$ $$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x} = -1$$ • A reta é $y = x - 1$. Corresponde à assíntota oblíqua encontrada na tarefa!	• Retomar a questão lançada na aula anterior: "E se conhecer a expressão algébrica de uma função e souber que existe uma assíntota não vertical, como posso determinar a sua equação? Posso até perguntar como é que verifico se há ou não há alguma assíntota não vertical?" Como vimos as assíntotas não verticais podem ser horizontais ou oblíquas. Quanto às assíntotas horizontais ficou determinado que: Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, $y = b$ diz-se uma assíntota horizontal do gráfico de f em $+\infty$; Se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, $y = b$ diz-se uma assíntota horizontal do gráfico de f em $-\infty$. Retomando a função $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x}$ vimos que $y = x - 1$ é assíntota oblíqua ao	

			gráfico da função. Mas e se não soubesse da existência desta assíntota? Claro que o gráfico da função pode ser levantar uma suspeita... Analiticamente, eu consigo verificar se existe ou não assíntota não vertical. Como é a equação de uma assíntota não vertical? O declive calcula-se fazendo: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ Se o limite der um número real, avançamos para o cálculo da ordenada na origem: $b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$ O resultado também é um número real. Como fica a equação da reta? • Quantas assíntotas não verticais pode ter o gráfico de uma função?	• Os alunos aprendem que a equação de uma assíntota não vertical ao gráfico de uma função é dado por $y = mx + b$ com $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$ e (m e b finitos). • Os alunos devem formular a conjetura: Uma f.r.v.r. tem, no máximo, duas assíntotas não verticais ao seu gráfico. • Os alunos devem justificar: Uma f.r.v.r. tem, no máximo, duas assíntotas não verticais ao seu gráfico.

			□ Propor as seguintes tarefas do manual: 94.3. e 94.4. da página 69 95 da página 71	
Resolução da tarefa 94.3 e 94.4. (trabalho a pares)	10	□**(94.3.)** Os alunos podem utilizar a calculadora para obter a representação gráfica da função.  Com a representação gráfica os alunos podem suspeitar da existência de algumas assíntotas. Com o cálculo do domínio da função, $D_h = \{x \in \mathbb{R}: 2x + 5 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{5}{2}\right\}$ Além disso, h é continua no seu domínio por ser uma função racional. Dificuldade: Estudar os pontos de descontinuidade. Verificam assim a existência de uma assíntota vertical de equação $x = -\frac{5}{2}$. Também pela análise da representação gráfica suspeita-se da existência de uma assíntota horizontal abaixo do eixo das abcissas. Para a determinar os alunos calculam $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{2x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$ $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{2x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$ (Ou h é continua no seu domínio pois é uma função racional). $y = -\frac{1}{2}$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de h em $-\infty$ e em $+\infty$. <u>ou</u> Não representam a função graficamente e optam logo por calcular os limites necessários para determinar as assíntotas pretendidas. Assíntotas verticais: $D_h = \{x \in \mathbb{R}: 2x + 5 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{5}{2}\right\}$	□ "Qual o processo que viram para determinar assíntotas verticais?" "Começávamos por determinar domínio e os pontos de descontinuidade... " "E que tal representar o gráfico da função? Pode ser uma ajuda..."	□ Os alunos devem mobilizar os processos para estudados para determinar assíntotas ao gráfico de uma função. □ Os alunos devem realizar a tarefa com sucesso independentemente da estratégia utilizada. □Avaliação: Conseguem ou não encontrar uma estratégia para responder corretamente à questão e que dificuldades manifestam.

$$\lim_{x\to -\frac{5}{2}^-} h(x) = \frac{1-\left(-\frac{5}{2}\right)^-}{2\left(-\frac{5}{2}\right)^- + 5} = \frac{\frac{7}{2}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -\frac{5}{2}^+} h(x) = \frac{1-\left(-\frac{5}{2}\right)^+}{2\left(-\frac{5}{2}\right)^+ + 5} = \frac{\frac{7}{2}}{0^+} = +\infty$$

Como $\lim_{x\to -\frac{5}{2}^-} f(x) \neq \lim_{x\to -\frac{5}{2}^+} f(x)$ não existe $\lim_{x\to -\frac{5}{2}} f(x)$. Logo a função é contínua em $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{5}{2}\right\}$.

$x = -\frac{5}{2}$ é uma assíntota vertical ao gráfico de h.

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to -\infty} h(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{1-x}{2x-5} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1-x}{2x-5} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

$y = -\frac{1}{2}$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de h em $-\infty$ e em $+\infty$.

- **(94.4.)**

Os alunos podem representar a função graficamente. Contudo, neste caso torna-se mais complexo fazê-lo uma vez que a expressão algébrica da função é $\frac{2}{x}$ (se $x < 0$) e $-\frac{2x^2+1}{x+1}$ (se $x \geq 0$). Terão de ser os alunos a contruir esta representação podendo sempre recorrer à calculadora para determinar o gráfico de cada uma das expressões.

<u>ou</u>

Calcular analiticamente as assíntotas.

Assíntotas verticais:

Dificuldade: "Quais as possíveis assíntotas verticais?"

A função i é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ (Dificuldade: porquê?).

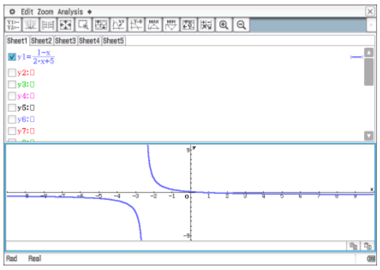
$$\lim_{x\to -0^-} i(x) = \frac{2}{x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

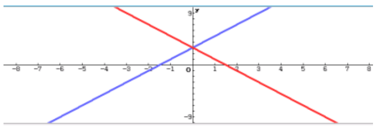
$$\lim_{x\to -0^+} i(x) = -\frac{2x^2+1}{x+1} = -\frac{1}{1} = -1$$

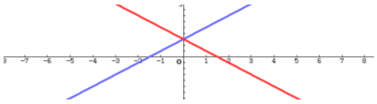
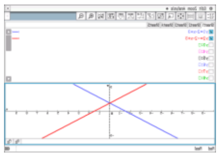
Dificuldade: $x = 0$ é assíntota vertical apesar de $\lim_{x\to -0^+} i(x) = -1$?

- Relembrar a definição de função contínua num ponto:

Dada uma f.r.v.r. f e um ponto a do respetivo domínio, a função f é contínua em a quando $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

		$x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico i. Assíntotas horizontais: $\lim_{x\to-\infty} i(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{-\infty} = 0$ $\lim_{x\to+\infty} i(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x^2+1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x^2}{x}$ $= \lim_{x\to+\infty} -2x = -\infty$ $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de i em $-\infty$.		
Discussão coletiva da tarefa 94.3. e 94.4.	12	□ Responder à questão e explicar como procedeu. □ Representar cada uma das funções graficamente. 	□ "É suficiente a representação gráfica para determinar as assíntotas?" □ Questionar o processo para determinar assíntotas verticais e horizontais.	□ Os alunos devem conhecer e compreender outras estratégias de resolução.
Resolução da tarefa 95 (trabalho a pares)	5	□**(95.1.)** Dificuldade: Como verificar a existência de assíntotas verticais sem a representação gráfica e sem a expressão algébrica da função? Dificuldade: Como saber se existem assíntotas horizontais sem a representação gráfica e sem a expressão algébrica da função? Verificar que a função tem domínio $\mathbb{R}$ e é continua em $\mathbb{R}$ logo não existem assíntotas verticais ao gráfico da função. Quanto às assintotas horizontais, se já identificamos duas oblíquas no enunciado da questão, então não podem existir mais assíntotas não verticais. Como existem duas assíntotas obliquas ao gráfico da função pois $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - 2x - 3) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} (f(x) + 2x - 3) = 0$ não existem assíntotas horizontais. □**(95.2.)** $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - 2x - 3) = 0$	□ "Lê atentamente as informações dadas no enunciado relativas à função". □ "O que faço para determinar assíntotas verticais?" □ "Qual e o domínio da função?" □ Dada uma f.r.v.r. existem no máximo duas assíntotas não verticais ao seu gráfico. □Relembrar que uma reta $y = mx + b$ é assíntota ao gráfico de f em $-\infty$ se $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$ Analogamente, em $+\infty$.	□ Os alunos devem mobilizar os processos para estudados para determinar assíntotas ao gráfico de uma função. □ Os alunos devem realizar a tarefa com sucesso independentemente da estratégia utilizada. □Avaliação: Conseguem ou não encontrar uma estratégia para responder corretamente à questão e que dificuldades manifestam.

		Portanto, $y = 2x + 3$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função. $$\lim_{x \to -\infty} (f(x) + 2x - 3) = 0$$ Portanto, $y = -2x + 3$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função. Dificuldade: Os alunos podem responder erradamente $y = -2x - 3$ e $y = 2x - 3$. □ **(95.3.)** Recorrer à calculadora para representar as retas que são assíntotas.  Dificuldade: Representar uma função com estas assíntotas.		
Discussão coletiva da tarefa 95	8	□**(95.1.)** Apresentar o domínio da função $D_f = \mathbb{R}$. Justificar que se a função é continua em $\mathbb{R}$ não existem assíntotas verticais ao gráfico da função. Quanto às assintotas horizontais, se já existem duas oblíquas no enunciado da questão, então não podem existir mais assíntotas não verticais. □ **(95.2.)** Apresentar uma resolução errada como: $y = -2x - 3$ e $y = 2x - 3$ Os alunos analisam a resolução e espera-se que detetem o erro, apresentando uma justificação para o mesmo Caso ninguém apresente uma resolução errada, questionar o porquê das assíntotas não serem $y = -2x - 3$ e $y = 2x - 3$.	□ **(95.1.)** “Como verificar a existência de assíntotas sem a representação gráfica e sem a expressão algébrica da função? Apenas com a informação dada no enunciado...” □ Dada uma f.r.v.r. existem no máximo duas assíntotas não verticais ao seu gráfico. “O enunciado já nos dá informação de alguma?” □ **(95.2.)** Pedir para justificar o porquê de $y = -2x - 3$ e $y = 2x - 3$ **não serem** assíntotas oblíquas ao gráfico da função. Pedir para justificar o porquê de $y = 2x + 3$ e $y = 2x - 3$ serem assíntotas oblíquas ao gráfico da função.	□ Os alunos devem conhecer e compreender outras estratégias de resolução. □ Os alunos devem justificar que: se a função é contínua em $\mathbb{R}$ não existem assíntotas verticais ao gráfico da função. □ Formular conjeturas: As assíntotas ao gráfico da função são $y = 2x + 3$ e $y = 2x - 3$ As assíntotas ao gráfico da função são $y = -2x - 3$ e $y = 2x - 3$. □ Justificar que $y = 2x + 3$ e $y = 2x - 3$ são assíntotas oblíquas ao gráfico da função.

		□ **(95.3.)** Representar as assíntotas graficamente.  Apresentar sugestões de gráficos de funções com estas assíntotas.	□ **(95.3.)** Projetar a representação gráfica das assíntotas.  Reforçar que existem várias possibilidades de resposta.	□ Os alunos devem compreender que funções distintas podem apresentar as mesmas assíntotas.
Síntese final	5	□Indicar o processo para determinar assíntotas verticais. □Indicar o processo para determinar assíntotas não verticais.	□ "Relembrem-me como posso determinar uma assíntota vertical?" □ "Relembrem-me como posso determinar uma assíntota não vertical?"	□ Os alunos devem recordar os processos estudados nas aulas 1, 2 e 3.

TAREFAS COMPLEMENTARES
Página 67 do manual. Questão 96 da página 71 do manual. Página 75 do manual.

94 Determina, caso existam, as assíntotas verticais e horizontais ao gráfico das funções reais de variável real definidas por cada uma das expressões seguintes:

94.3 $h(x) = \dfrac{1 - x}{2x + 5}$

94.4 $i(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ -\dfrac{2x^2 + 1}{x + 1} & \text{se} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$

95 Considera uma função f, de domínio $\mathbb{R}$ e contínua, tal que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - 2x - 3\right) = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) + 2x - 3\right) = 0$

95.1 O gráfico de f tem assíntotas verticais? E horizontais? Justifica as tuas respostas.

95.2 Escreve as equações das assíntotas ao gráfico de f.

95.3 Representa num referencial cartesiano as assíntotas ao gráfico de f e faz, nesse referencial, a representação gráfica de uma função com as características enunciadas da função f.

Anexo 10: Plano da aula 4 (13 de março)

IPP III
Mestrado em Ensino da Matemática

Plano de aula

Escola Básica e Secundária Alfredo da Silva

Data: 13/03/2020 | Ano: 11.º Turma: B | Duração: 50 minutos

DOMÍNIO: Funções Reais de Variável Real (FRVR11)

SUBDOMÍNIO: Limites segundo Heine de funções reais de variável real.

TÓPICOS MATEMÁTICOS: Funções racionais.

OBJETIVO(S) DE APRENDIZAGEM:

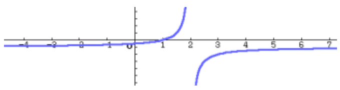
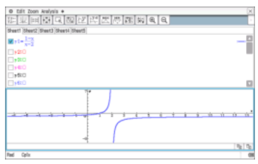
- Estudo do domínio, zeros e sinal de funções racionais.

ESTRATÉGIA GERAL:

- Proposta de tarefas do manual;
- Trabalho a pares;
- Discussão e análise coletiva das questões da tarefa.

ESTRUTURA DA AULA	TEMPO (EM MINUTOS)
1. Introdução.	5
2. Estudo do domínio, zeros e sinal de funções racionais.	14
3. Resolução da tarefa 18.2. da página 31.	5
4. Discussão coletiva da tarefa 18.2 da página 31.	5
5. Resolução da tarefa 19.2. da página 31.	8
6. Discussão coletiva da tarefa 19.2. da página 31.	8
7. Síntese final.	5

RECURSOS	
Do aluno	**Do professor**
Manual Calculadora gráfica	Manual Computador e projetor

DESENVOLVIMENTO DA AULA				
Tarefas e atividades de aprendizagem	**Duração Esperada**	**Atividades dos alunos e possíveis dificuldades**	**Respostas do professor e aspetos a ter em atenção**	**Objetivos e avaliação**
Introdução	5		A aula tem como objetivo o estudo do domínio, zeros e sinal de funções racionais. Para isso podem começar por dizer-me o que entendem por função racional...	
Estudo do domínio, zeros e sinal de funções racionais	14	Dificuldade: "O que é uma função racional?" <u>Exemplo:</u> $$f(x) = \frac{1-x}{x-2}$$ Representação gráfica:  Indicar $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$. Para calcular os zeros da função temos de igualar a função a zero: $$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x-2} = 0$$ Dificuldade: Alguns alunos podem afirmar: $$\frac{1-x}{x-2} = 0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$$	"O que é uma função racional?" "Será que me conseguem dar um exemplo de uma função racional?" Uma função racional é uma função real de variável real dada por uma expressão da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinómios. "Vamos agora estudar o domínio, os zeros e o sinal de uma função racional." "Considera a função racional $f(x) = \frac{1-x}{x-2}$. Utilizem a calculadora gráfica para representar a função." (A professora representa também a função e projeta).  Qual o domínio desta função?" "Como calculamos os zeros de uma função racional?"	Os alunos d devem determinar o domínio e os zeros e estudar sinal de funções racionais.

A função não está definida em $x = 2$ até porque $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \wedge x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \wedge x \neq 2$$

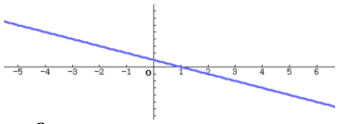
Estudar os zeros do numerador e os zeros do denominador:

$$1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$
$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

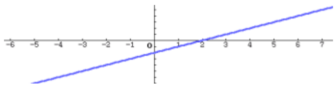
□Os alunos podem afirmar que estudar o sinal de uma função é "ver onde é negativa e onde é positiva".

Para estudar o sinal da função, construir um quadro de sinais.
Dificuldade: construir o quadro de sinais e completá-lo.

$1 - x$



$x - 2$



x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$1 - x$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{1-x}{x-2}$	$-$	0	$+$	n.d.	$-$

f positiva em $]\,1,2[$
f negativa em $]-\infty,1[\,\cup\,]2,+\infty[$

Dificuldade: interpretar os resultados obtidos no quadro de sinais.

□O que acontece se $x = 2$?

□ "Assim, como determino os zeros de uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$?"

□ "Em que consiste estudar o sinal de uma função?"

□ Na primeira linha do quadro de sinais colocam-se por ordem crescente os zeros do denominador e os zeros do numerador. Na segunda e na terceira linha regista-se a variação do sinal da função denominador e da função numerador.

□ "Se representarem a função numerador e denominador é muito mais fácil estudarem o sinal."

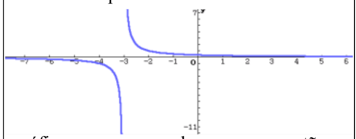
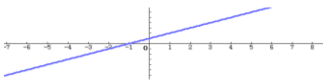
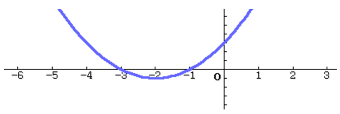
□" Pretendemos ver onde a função é positiva (representada pelo sinal +) e negativa (representada pelo sinal -).

□Propor as tarefas 18.2. e 19.2. da página 31 do manual.

Objetivo:

□Os alunos devem generalizar:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow$$
$$P(x) = 0 \wedge Q(x) \neq 0$$

Resolução das tarefas 18.2 da página 31 (trabalho a pares)	5	Os alunos podem recorrer à calculadora  gráfica para resolver a questão, principalmente para o estudo do sinal. Contudo, a representação pode induzir os alunos no erro: f positiva em $]-3,+\infty[$ f negativa em $]-\infty,-3[$ Apenas com a representação gráfica os alunos não percebem que a função não está definida para $x=-1$. Para determinar o domínio da função: $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x^2+4x+3\neq 0\}$ Cálculo auxiliar: $x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=-1$ Assim, $D_f=\mathbb{R}\backslash\{-3,-1\}$ Para determinar os zeros da função: $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x^2+4x+3}=0$ $\Leftrightarrow x+1=0 \wedge x^2+4x+3\neq 0$ $\Leftrightarrow x=-1 \wedge x\neq -3 \wedge x\neq -1$ Portanto, a função não tem zeros. Estudar o sinal da função f: $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$  $x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=-1$ 	O objetivo destas questões é determinar analiticamente o domínio e os zeros bem como recorrer ao quadro de sinais para estudar o sinal da função. Contudo, a calculadora gráfica é uma excelente ferramenta para confirmar os resultados obtidos ou identificar eventuais lacunas na resolução analítica. A questão é semelhante ao exemplo dado no inicio da aula. Relembrar que $\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \Leftrightarrow P(x)=0 \wedge Q(x)\neq 0$	Os alunos relevar conhecimento do processo para estudar o domínio, zeros e sinal de funções racionais. Avaliação: Conseguem ou não aplicar esse processo e que dificuldades manifestam.

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>Construção do quadro de sinais:
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-3</td><td></td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$x+1$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>x^2+4x+3</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>f</td><td>$-$</td><td>$n.d$</td><td>$+$</td><td>$n.d.$</td><td>$+$</td></tr>
</table>
Dificuldade: poderá ser construir o quadro de sinais e preenche-lo; interpreta os resultados obtidos no quadro de sinais.</td>
<td>• Sugerir que representem o gráfico de cada uma das funções envolvidas no quadro de sinais: $x+1$ e x^2+4x+3 para facilitar o preenchimento do quadro de sinais.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Discussão coletiva das tarefas 18.2 da página 31</td>
<td>5</td>
<td>• Pedir a um aluno que tenha cometido algum erro (que tenha interesse para a discussão) para ir ao quadro apresentar a sua resolução.
Caso isso não tenha acontecido, pedir que apresentem a resolução da questão e explique como procederam.

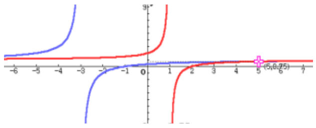
Domínio:
$D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2+4x+3 \neq 0\}$
$= \mathbb{R}\backslash\{-3,-1\}$

Zeros:
$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2+4x+3}=0$
$\Leftrightarrow x+1=0 \wedge x^2+4x+3 \neq 0$
$\Leftrightarrow x=-1 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq -1$

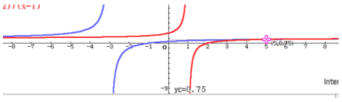
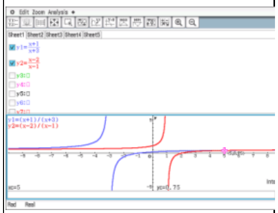
Estudo do sinal:
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-3</td><td></td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$x+1$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>x^2+4x+3</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>f</td><td>$-$</td><td>$n.d$</td><td>$+$</td><td>$n.d.$</td><td>$+$</td></tr>
</table>
f positiva em]-3, $+\infty[\backslash\{-1\}$
f negativa em $]-\infty,-3[$</td>
<td>• Sugerir a representação gráfica para confirmar o conjunto-solução obtido.</td>
<td>• Os alunos conseguem desenvolver um processo para determinar o domínios e os zeros, e estudar o sinal.</td>
</tr>
<tr>
<td>Resolução da tarefa 19.2. da página 31 (trabalho a pares)</td>
<td>8</td>
<td>• Alguns alunos podem recorrer à calculadora gráfica para determinar a solução da equação.

No Menu Gráfico introduzem:

$Y_1: \frac{x+1}{x+3}$</td>
<td>• Estas questões pressupõe a determinação analítica do conjunto-solução das condições. Contudo, a calculadora gráfica é uma excelente ferramenta para confirmar o resultado obtido analiticamente ou até detetar</td>
<td>• Os alunos devem revelar conhecimento do processo para determinar o conjunto-solução de condições que envolvem a determinação dos</td>
</tr>
</table>

		Y_2: $\frac{x-2}{x-1}$ E calculam a interseção das duas funções. Obtêm apenas o ponto de interseção $(5; 0{,}75)$. Assim, a solução da equação é $x = 5$.  Passar todos os termos para o primeiro membro da equação: $\frac{x+1}{x+3} = \frac{x-2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+3} - \frac{x-2}{x-1} = 0$ Reduzir as frações ao mesmo denominador, de modo a obter uma função racional: $\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)-(x-2)(x+3)}{(x+3)(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1-(x^2+3x-2x-6)}{(x+3)(x-1)} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{x^2-1-x^2-3x+2x+6}{(x+3)(x-1)} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{-x+5}{(x+3)(x-1)} = 0$ $\Leftrightarrow -x+5 = 0 \wedge (x+3)(x-1) \neq 0$ Dificuldade: determinar $x^2+2x-3 \neq 0$ ou, equivalentemente, $(x+3)(x-1) \neq 0$ Cálculo auxiliar: $-x+5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ $(x+3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x+3 = 0 \vee x-1 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$ Portanto, $x = 5 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 1$ Assim, $C.S. = \{5\}$ Poderá obter-se também $\frac{-x+5}{x^2+2x-3} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -x+5 = 0 \wedge x^2+2x-3 \neq 0$ Cálculo auxiliar:	erros na determinação analítica. “Se calcular $(x+3)(x-1) = 0$ já sei que x não pode assumir esses valores”.	zeros de uma função racional. Avaliação: Conseguem ou não aplicar esse processo e que dificuldades manifestam.

		$-x+5=0 \Leftrightarrow x=5$ $x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=1$ Portanto, $-x+5=0 \wedge x^2+2x-3 \neq 0$ $\Leftrightarrow x=5 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 1$ Assim, $C.S.=\{5\}$		
Discussão coletiva da tarefa 19.2. da página 31	8	• Um aluno apresentar uma resolução errada. (Caso não surja nenhuma resolução errada, pedir a um aluno ao acaso que apresente a sua resolução no quadro). Reduzir as duas frações ao mesmo denominador uma vez que as duas já estão no primeiro membro. $\frac{x+1}{x+3}-\frac{x-2}{x-1}=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)-(x-2)(x+3)}{(x+3)(x-1)}$ $=0$ Simplificar a expressão obtida. $\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)-(x-2)(x+3)}{(x+3)(x-1)}=0$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{-x+5}{(x+3)(x-1)}=0$ Determinar os zeros da função $-x+5=0 \wedge (x+3)(x-1) \neq 0$ Analogamente para , $\Leftrightarrow -x+5=0 \wedge x^2+2x-3 \neq 0$ $-x+5=0 \Leftrightarrow x=5$ $(x+3)(x-1)=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x+3=0 \vee x-1=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=-3 \vee x=1$ Concluir que os zeros são $-3, 1$ e 5. Concluir então que: $\frac{x+1}{x+3}-\frac{x-2}{x-1}=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=5 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 1$ $C.S.=\{5\}$ • Visualizar o gráfico da função e concluir que o ponto de interseção é, de facto, 5.	• Pedir comentários de outros alunos relativamente à resolução errada. Pedir que identifiquem erros. • Sugerir a representação gráfica para confirmar o conjunto-solução obtido. Projetar o gráfico da função.	• Um aluno apresenta a resolução com todo o processo para determinar os zeros de uma função racional.

				
Síntese final	5	Relembrar o processo para estudar o sinal de uma função.	“O que devo fazer para estudar o sinal de uma função racional?”	Os alunos devem generalizar o processo para estudar o sinal de uma função racional: - Determinar os zeros do numerador; - Determinar os zeros do denominar; - Construir o quadro de sinais.

TAREFAS COMPLEMENTARES
Tarefas 18 e 19 da página 31 do manual.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

18 Determina o domínio e os zeros e estuda o sinal de cada uma das funções definidas pelas seguintes expressões analíticas:

18.1 $f(x) = \dfrac{x}{x-5}$

18.2 $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+4x+3}$

18.3 $h(x) = \dfrac{x-1}{2x+1} + \dfrac{1}{x+1}$

18.4 $i(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x-2} \times \dfrac{x-3}{x^2-3x+2}$

18.5 $j(x) = \dfrac{-x^3+x^2+2x-2}{x^2-3}$

18.6 $k(x) = \dfrac{x^2-7}{x-2} - \dfrac{6}{x}$

19 Determina o conjunto-solução das seguintes condições:

19.1 $\dfrac{2x}{x+3} = x$

19.2 $\dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{x-2}{x-1}$

19.3 $\dfrac{x-5}{x^2-x-2} + \dfrac{2x}{x-2} = 0$

19.4 $\dfrac{x^2-2}{x^2+3x} \geqslant \dfrac{2}{x}$

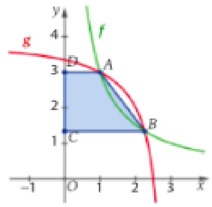
19.5 $\dfrac{x-5}{x^2-x-2} \leqslant \dfrac{2}{x+1}$

19.6 $\dfrac{x^3-x^2}{x^2-1} > \dfrac{5}{x+1}$

20 Na figura estão representadas partes dos gráficos das funções f e g definidas por:

$f(x) = \dfrac{3}{x}$ e

$g(x) = \dfrac{4x-10}{x-3}$.



Do trapézio $[ABCD]$, sabe-se que:

- A e B são os pontos de interseção dos gráficos das funções f e g;
- C e D pertencem ao eixo Oy;
- A e D têm a mesma ordenada;
- B e C têm a mesma ordenada.

Determina a área e o perímetro de $[ABCD]$.

21 Um sumo obtém-se misturando 1 L de sumo de laranja com m cL de sumo de manga.

21.1 Mostra que a percentagem de sumo de manga, p, existente no sumo de frutas, é dado, em função de m, por:

$$p(m) = \frac{100m}{m+100}.$$

21.2 Determina a percentagem de sumo de manga existente na mistura se se usarem 60 centilitros de sumo de manga.

21.3 Determina a quantidade de sumo de manga, em centilitros, arredondada às unidades, a partir da qual a percentagem deste sumo na mistura é superior a 40% .

Anexo 11: Plano da aula 5 (13 de março)

IPP III
Mestrado em Ensino da Matemática

Plano de aula

Escola Básica e Secundária Alfredo da Silva

Data: 13/03/2020	Ano:11.º Turma: B	Duração: 50 minutos

DOMÍNIO: Funções Reais de Variável Real (FRVR11)

SUBDOMÍNIO: Limites segundo Heine de funções reais de variável real.

TÓPICOS MATEMÁTICOS: Funções racionais.

OBJETIVO(S) DE APRENDIZAGEM:

- Resolução de inequações que envolvem frações algébricas.

ESTRATÉGIA GERAL:

- Proposta de tarefas do manual;
- Trabalho a pares;
- Discussão e análise coletiva das questões da tarefa.

ESTRUTURA DA AULA	TEMPO (EM MINUTOS)
1. Introdução.	5
2. Resolução de inequações que envolvem frações algébricas.	10
3. Resolução da tarefa 19.4. da página 31.	6
4. Discussão coletiva da tarefa 19.4. da página 31.	4
5. Resolução da tarefa 20 da página 31.	10
6. Discussão coletiva da tarefa 20 da página 31.	10
7. Síntese final.	5

RECURSOS	
Do aluno	**Do professor**
Manual Calculadora gráfica	Manual Computador e projetor

<table>
<tr><th colspan="5">DESENVOLVIMENTO DA AULA</th></tr>
<tr><th>Tarefas e atividades de aprendizagem</th><th>Duração Esperada (em minutos)</th><th>Atividades dos alunos e possíveis dificuldades</th><th>Respostas do professor e aspetos a ter em atenção</th><th>Objetivos e avaliação</th></tr>
<tr><td>Introdução</td><td>5</td><td></td><td>• "Na última aula vimos como determinar o domínio, os zeros e estudar o sinal de uma função racional. Para além disso, vimos também como resolver equações que envolvem funções racionais.
Vamos agora ver como resolver inequações que envolvem funções racionais."</td><td></td></tr>
<tr><td>Inequações que envolvem frações algébricas</td><td>10</td><td><u>Exemplo:</u>
$$\frac{3x-2}{3-x} \leq \frac{x}{2}$$
Os alunos vão dando sugestões de resolução.

• Passar todos os termos para o primeiro membro:
$$\frac{3x-2}{3-x} \leq \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{3x-2}{3-x} - \frac{x}{2} \leq 0$$
• Simplificar a expressão:
$$\Leftrightarrow \frac{2(3x-2)-x(3-x)}{2(3-x)} \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2+3x-4}{6-2x} \leq 0$$
• Calcular os zeros do numerador:
$x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-4$

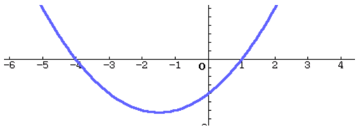
• Calcular os zeros do denominador:
$6-2x=0 \Leftrightarrow x=3$</td><td>• Apresentar a condição que se pretende resolver $\frac{3x-2}{3-x} \leq \frac{x}{2}$ (o conjunto-solução deve ser apresentado usando a notação de intervalos de números reais).

"O que sugerem que que faça em primeiro lugar?"</td><td>• Objetivo:
os alunos compreendem o processo para determinar o conjunto-solução de inequações que envolvem funções racionais.</td></tr>
</table>

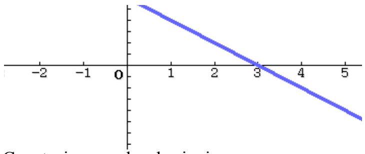
3

□Estudar o sinal da função $\frac{x^2+3x-4}{6-2x}$

x^2+3x-4



$6-2x$



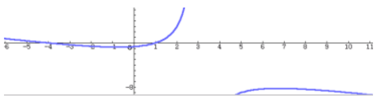
Construir o quadro de sinais:

x	$-\infty$	-4		1		3	$+\infty$
x^2+3x-4	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$6-2x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{x^2+3x-4}{6-2x}$	$+$	0	$-$	0	$+$	n.d	$-$

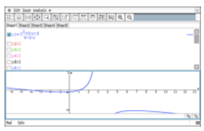
□Basta agora ver onde $\frac{x^2+3x-4}{6-2x} \leq 0$

$C.S. = [-4,1] \cup]3,+\infty[$

Representação gráfica:



□ Sugerir aos alunos que introduzam a função $\frac{x^2+3x-4}{6-2x}$ na calculadora gráfica e confirmem o conjunto-solução obtido. A professora projeta a representação gráfica.



□Propor as tarefas 19.4. e 20. da página 31 do manual. Na tarefa 20. calcular apenas a área e não o perímetro.

Resolução da questão 19.4. (trabalho a pares)

6

Os alunos devem recorrer ao exemplo anterior para resolver esta questão.

Passar todos os termos para o primeiro membro:

$$\frac{x^2-2}{x^2+3x} \geq \frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2-2}{x^2+3x} - \frac{2}{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-2)x - 2(x^2+3x)}{(x^2+3x)x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3-2x-2x^2-6x}{(x^2+3x)x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3-2x^2-8x}{(x^2+3x)x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x^2-2x-8)}{x(x^2+3x)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-8}{x^2+3x} \geq 0$$

Zeros do numerador:

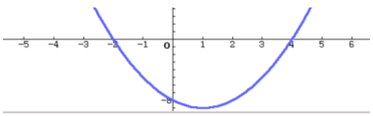
$$x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=4 \vee x=-2$$

Zeros do denominador:

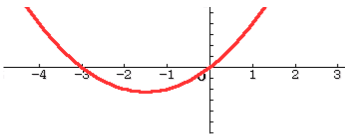
$$x^2+3x = x(x+3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee (x+3)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-3$$

x^2-2x-8



x^2+3x



Quadro de sinais:

x	$-\infty$	-3		-2		0		4	$+\infty$
x^2-2x-8	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
x^2+3x	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2-2x-8}{x^2+3x}$	$+$	$n.d.$	$-$	0	$+$	$n.d.$	$-$	0	$+$

Representar o gráfico de cada uma das funções facilita o estudo do sinal.

Objetivo:
os alunos aplicam o processo para resolver inequações que envolvem funções racionais.

Avaliação:
os alunos resolvem inequações que envolvem funções racionais.

Avaliação:
os alunos manifestam dificuldade na resolução de inequações que envolvem funções racionais.

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>$C.S. = \left]-\infty,-3\right[\cup [-2,0] \cup [4,+\infty[$</td>
<td>• Sugerir que utilizem a calculadora gráfica para confirmar o conjunto-solução obtido.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Discussão da questão 19.4.</td>
<td>4</td>
<td>

• Caso seja detetado algum erro numa resolução durante o trabalho a pares pedir a esse aluno para apresentar a sua resolução. Nestas questões não se verifica tanto a possibilidade de existência de várias estratégias de resolução. Contudo, poderá ser importante alertar os alunos para erros durante a resolução que não devem ser cometidos. Assim, apresentar uma resolução errada e pedir aos alunos comentários sobre aquela resolução. Assim, os alunos terão oportunidade de apontar erros nessa resolução ou apresentar uma estratégia diferente.

Caso não ocorram resoluções erradas, pedir a um aluno para apresentar a sua resolução e explicar como procedeu.

$$\frac{x^2-2}{x^2+3x} \geq \frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2-2}{x^2+3x} - \frac{2}{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-2)x - 2(x^2+3x)}{(x^2+3x)x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-8}{x^2+3x} \geq 0$$

Zeros do numerador:

$$x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=4 \vee x=-2$$

Zeros do denominador:

$$x^2+3x = x(x+3) = 0 \Leftrightarrow$$

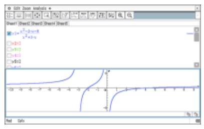
$$\Leftrightarrow x=0 \vee (x+3)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-3$$

Quadro de sinais:

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-3</td><td></td><td>-2</td><td></td><td>0</td><td></td><td>4</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>x^2-2x-8</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>+</td></tr>
<tr><td>x^2+3x</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$\frac{x^2-2x-8}{x^2+3x}$</td><td>+</td><td>$n.d.$</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td>$n.d.$</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td></tr>
</table>

$C.S. = \left]-\infty,-3\right[\cup [-2,0] \cup [4,+\infty[$

</td>
<td>• Vamos ao menu gráfico da calculadora, introduzir esta função e verificar se realmente é superior a zero nos intervalos obtidos.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

				
Resolução da questão 20. (trabalho a pares)	10	Uma primeira dificuldade poderá ser identificar a sequência de passos a executar para responder à questão. Os alunos devem relembrar a fórmula da área do trapézio. Dificuldade: “Como se calcula a área do trapézio?” Neste caso, $A_{[ABCD]} = \frac{\overline{CB} + \overline{DA}}{2} \times \overline{DC}$ Para determinar as medidas necessárias precisa-se das coordenadas dos pontos A, B, C e D. Como é dito no enunciado, as coordenadas dos pontos A e B resultam da interseção das funções f e g. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{4x-10}{x-3}$ $\Leftrightarrow \frac{3}{x} - \frac{4x-10}{x-3} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{3(x-3) - x(4x-10)}{x(x-3)} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{-4x^2 - 13x - 9}{x(x-3)} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -4x^2 - 13x - 9 = 0 \wedge x(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = \frac{9}{4} \wedge x = 1 \wedge x \neq 0 \wedge x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = \frac{9}{4} \wedge x = 1 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 3$ Dificuldade: Identificar que os valores obtidos correspondem às abcissas dos pontos A e B. Assim, o ponto A tem abcissa 1 e o ponto B tem abcissa $\frac{9}{4}$. Para determinar as ordenadas destes pontos: $f(1) = 3, \quad f\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{3}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{3}$ Ou, usando a função g, $g(1) = 3, \ g\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{4}{3}$ Portanto, $A(1,3)$ e $B(\frac{9}{4}, \frac{4}{3})$.	“O que pretendes determinar?” “O que precisas para determinar essa área?” Circular pela sala para apoiar eventuais dificuldades e analisar estratégias de resolução. Relembrar fórmula da área do trapézio: $A_{trapézio} = \frac{B+b}{2} \times h$ Atenção que a abcissa do ponto B é superior à abcissa do ponto A.	Objetivo: os alunos determinam uma estratégia para resolver um problema envolvendo o estudo de funções racionais. Avaliação: os alunos conseguem encontrar e pôr em prática uma estratégia para resolver a tarefa. Avaliação: os alunos manifestam dificuldades na resolução do problema.

		Como C pertence ao eixo Oy e tem a mesma ordenada de B, $C(0,\frac{4}{3})$. Como D pertence ao eixo Oy e tem a mesma ordenada de A, $D(0,3)$. Temos então: $\overline{CB} = \frac{9}{4}$ $\quad\overline{DA} = 1$ $\quad\overline{DC} = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$ Dificuldade: Calcular a altura $\overline{DC}$. $A_{[ABCD]} = \frac{\frac{9}{4}+1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{65}{24}$ unidades quadradas. Responder: A área da figura é $\frac{65}{24}$ unidades quadradas.	• “Como se calculam a distância entre os pontos?”	
Discussão da questão 20.	10	• Caso surja uma estratégia de resolução alternativa, pedir ao aluno responsável para a apresentar aos colegas. Caso as resoluções vão de encontro ao que foi previsto, pedir a um aluno que explique o procedimento que aplicou para determinar a área. $A_{[ABCD]} = \frac{\overline{CB} + \overline{DA}}{2} \times \overline{DC}$ Determinar as coordenadas dos pontos *A* e *B*. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{4x-10}{x-3}$ $\Leftrightarrow \frac{3}{x} - \frac{4x-10}{x-3} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{3(x-3) - x(4x-10)}{x(x-3)} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{-4x^2 - 13x - 9}{x(x-3)} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -4x^2 - 13x - 9 = 0 \wedge x(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = \frac{9}{4} \wedge x = 1 \wedge x \neq 0 \wedge x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = \frac{9}{4} \wedge x = 1 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 3$ O ponto A tem abcissa 1 e o ponto B tem abcissa $\frac{9}{4}$. Para determinar as ordenadas destes pontos: $f(1) = 3, \quad f\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{3}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{3}$ $A(1,3)$ e $B(\frac{9}{4}, \frac{4}{3})$ $C(0,\frac{4}{3})$ e $D(0,3)$. $\overline{CB} = \frac{9}{4}$ $\quad\overline{DA} = 1$ $\quad\overline{DC} = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$	• Para determinar as ordenados dos pontos A e B pode ser utlizadas a função f ou a função g umas vez que os pontos pertencem às duas funções.	• objetivo: os alunos compreendem a estratégia apresentada para resolver o problema.

		$A_{[ABCD]} = \frac{\frac{9}{4}+1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{65}{24}$ unidades quadradas.		
Síntese final	5	• Nas últimas duas aulas aprendemos a determinar o domínio, os zeros e estudar o sinal de uma função racional. Para além disso, vimos também como resolver equações e inequações que envolvem funções racionais.	• Relembre-me trabalho temos desenvolvido nas últimas duas aulas... • Na próxima aula continuaremos a trabalhar com funções racionais.	

ATIVIDADES COMPLEMENTARES
Questões 18, 19 e 21 da página 31.

Anexo 12: Plano de aula 6 (17 de março)

IPP III
Mestrado em Ensino da Matemática

Plano de aula

Escola Básica e Secundária Alfredo da Silva

Data: 17/03/2020

Ano:11.º Turma: B

Duração: 50 minutos

DOMÍNIO: Funções Reais de Variável Real (FRVR11)

SUBDOMÍNIO: Assíntotas ao gráfico de uma função

TÓPICOS MATEMÁTICOS: Assíntotas ao gráfico de funções racionais definidas analiticamente por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$.

OBJETIVO(S) DE APRENDIZAGEM:

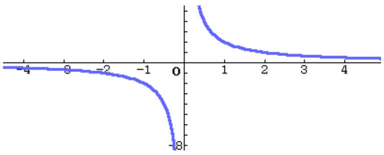
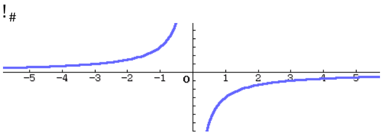
- Determinação das assíntotas e da representação gráfica de funções racionais definidas analiticamente por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$.

ESTRATÉGIA GERAL:

- Proposta de uma tarefa;
- Trabalho a pares;
- Discussão e análise coletiva das questões da tarefa.

ESTRUTURA DA AULA	TEMPO (EM MINUTOS)
1. Introdução.	5
2. Resolução da questão 1.	5
3. Discussão coletiva da questão 1.	5
4. Resolução da questão 2.	5
5. Discussão coletiva da questão 2.	5
6. Resolução da questão 3.	5
7. Discussão coletiva da questão 3.	5
8. Síntese final.	15

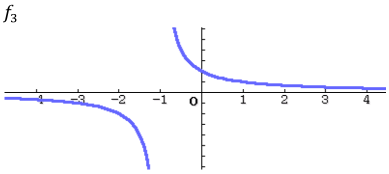
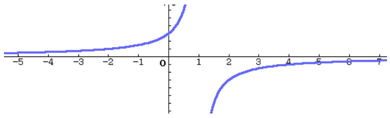
RECURSOS	
Do aluno	**Do professor**
Tarefa 3 Calculadora gráfica	Tarefa 3 Computador e projetor

DESENVOLVIMENTO DA AULA				
Tarefas e atividades de aprendizagem	**Duração Esperada**	**Atividades dos alunos e possíveis dificuldades**	**Respostas do professor e aspetos a ter em atenção**	**Objetivos e avaliação**
Introdução	5		□ "Nas últimas aulas trabalhámos o conceito de assíntota ao gráfico de uma função. Para além disso, resolvemos equações e inequações que envolvem funções racionais. Na aula de hoje vamos mobilizar o que sabemos sobre estes dois conteúdos para resolver a tarefa 3."	
Resolução da questão 1 (trabalho a pares)	5	□ Para estudar as assíntotas os alunos podem optar pela representação gráfica de ambas as funções. !"  !#  Dificuldade: Os alunos devem entender que têm de calcular **todas** as assíntotas (verticais e não verticais). Dificuldade: Será a representação gráfica suficiente para identificar todas as assíntotas existentes? Com as representações gráficas das funções, conseguem identificar uma assíntota vertical (%= 0) e uma assíntota horizontal (= 0) ao gráfico das funções em $+\infty$ e em $-\infty$. □ Os alunos podem utilizar os processos analíticos estudados para determinar assíntotas verticais e não verticais.	□ A representação gráfica pode levantar uma suspeita sobre a existência de algumas assíntotas. Mas principalmente, as assíntotas obliquas não conseguimos determinar a sua equação apenas com a representação gráfica. □ Como se calculam as assíntotas verticais a uma função?	□Objetivo: Os alunos vão determinar as assíntotas ao gráfico de uma função do tipo – □ Os alunos devem conceber diferentes estratégias de resolução da mesma tarefa. □ Os alunos devem realizar a tarefa com sucesso independentemente da estratégia utilizada. □Avaliação: Conseguem ou não encontrar uma estratégia para responder corretamente à questão e que dificuldades manifestam.

3

		Assíntotas verticais: $$D_{f_1} = D_{f_2} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$ $$\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$ Ou $$\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$ $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função f_1. Dificuldade: É necessário calcular os dois limites laterais? Assíntotas não verticais: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}}{x} =$ $= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ $b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) =$ $= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ $m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{x}}{x}$ $= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ $b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) =$ $= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0$ $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função f_1 em $+\infty$ e em $-\infty$. Proceder analogamente para f_2: Assíntotas verticais: $\lim_{x\to 0^+} -\frac{3}{x} = -\frac{3}{0^+} = +\infty$ ou $\lim_{x\to 0^-} -\frac{3}{x} = -\frac{3}{0^-} = -\infty$ $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função f_2. Assíntotas não verticais: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{3}{x}}{x}$ $= \lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{x^2} = 0$	• Como se calculam as assíntotas não verticais? • Se um dos limites laterais já deu $+\infty$ ou $-\infty$, não é necessário o cálculo do outro para concluir que é assíntota vertical.	

		$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{x}$ $= -\frac{3}{+\infty} = 0$ $m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{3}{x}}{x}$ $= \lim_{x\to-\infty} -\frac{3}{x^2} = -\frac{3}{(-\infty)^2}0$ $b = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{3}{x}$ $= -\frac{3}{-\infty} = 0$ $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função f_2 em $+\infty$ e em $-\infty$. Ou Pela representação gráfica os alunos podem reconhecer que não existe nenhuma assíntota oblíqua. Portanto, podem utilizar o cálculo de $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = \frac{2}{+\infty} = 0$ $\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x} = \frac{2}{-\infty} = 0$ $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{x} = -\frac{3}{+\infty} = 0$ $\lim_{x\to-\infty} f_2(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{3}{x} = -\frac{3}{-\infty} = 0$ $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função f_2 em $+\infty$ e em $-\infty$.		
Discussão coletiva da questão 1	5	• Indicar o que fizeram para responder à questão (estudo das assíntotas verticais e não verticais). • Explicar que contributos teve a representação para a resolução. Em seguida, solicitar ao mesmo ou a outro aluno a resolução analítica. Deve apresentar como determinou a assíntota vertical e a assíntota horizontal:	• "O que foram determinar para estudar as assíntotas?" • Inserir a função na calculadora e projetar o gráfico da função. • "Que informação nos dá o gráfico da função?" • "Será que a representação gráfica permite determinar as equações das assíntotas?" • "Que semelhanças e diferenças existem entre as duas funções?"	• Os alunos devem conhecer e compreender estratégias de resolução.

Resolução da questão 2 (trabalho a pares)	5	□ Os alunos podem optar pela representação gráfica de ambas as funções para conhecer melhor o seu comportamento. Isto pode ser uma ajuda para determinar as assíntotas ao gráfico da função. f_3  f_4  □ Os alunos podem utilizar os processos estudados para determinar assíntotas verticais e não verticais. <u>Assíntotas verticais:</u> $D_{f_3} = D_{f_4} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ $\lim_{x\to-1^+}\frac{2}{x+1} = +\infty$ ou $\lim_{x\to-1^-}\frac{2}{x+1} = -\infty$ $x = -1$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função f_3. <u>Assíntotas horizontais:</u> $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x+1} = \frac{2}{+\infty} = 0$$ $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função f_3 em $+\infty$. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x+1} = \frac{2}{-\infty} = 0$$ $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função f_3 em $-\infty$. ou $m = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x+1}$ $= \frac{2}{+\infty} = 0$ $b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx) = \underset{x\to-\infty}{\text{li}+}\frac{2}{x+1}$	□Proceder como na questão 1. □ “Como posso determinar as assíntotas verticais ao gráfico de uma função?” □ “Como posso determinar as assíntotas não verticais ao gráfico de uma função?”	□Objetivo: Os alunos vão determinar as assíntotas ao gráfico de uma função do tipo $\frac{b}{x-c}$ □ Os alunos devem conceber diferentes estratégias de resolução da mesma tarefa. □ Os alunos devem realizar a tarefa com sucesso independentemente da estratégia utilizada. □Avaliação: Conseguem ou não encontrar uma estratégia para responder corretamente à questão e que dificuldades manifestam.

$$= \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$m = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x+1}$$
$$= \frac{2}{-\infty} = 0$$
$$b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x+1}$$
$$= \frac{2}{-\infty} = 0$$

$y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função f_3 em $+\infty$ e em $-\infty$.

Proceder analogamente para f_4.

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \to -1^+} -\frac{3}{x+1} = -\infty$$
ou
$$\lim_{x \to -1^-} -\frac{3}{x+1} = +\infty$$

$x = -1$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função f_4.

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{3}{x+1} = -\frac{3}{+\infty} = 0$$

$y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função f_4 em $+\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} -\frac{3}{x-1} = -\frac{3}{-\infty} = 0$$

$y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função f_4 em $-\infty$.

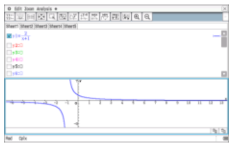
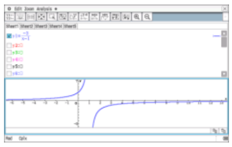
ou

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{3}{x-1}}{x} =$$

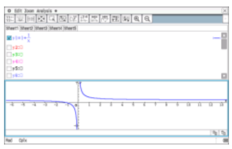
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-3}{x(x-1)} = 0$$

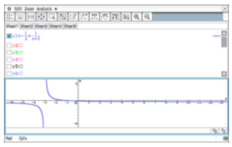
$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to -\infty} -\frac{3}{x-1}$$
$$= -\frac{3}{+\infty} = 0$$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\frac{3}{x-1}}{x} =$$

		$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{x(x-1)} = 0$ $b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{3}{x-1}$ $= -\frac{3}{-\infty} = 0$ $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função f_4 em $+\infty$ e em $-\infty$.		
Discussão coletiva da questão 2	5	□ Pedir que indiquem o que fizeram para responder à questão (estudo das assíntotas verticais e não verticais). □ Solicitar a um aluno elaborado a representação gráfica para explicar que contributos teve a representação para a sua resolução. Em seguida, solicitar ao mesmo ou a outro aluno a resolução analítica. Deve apresentar como determinou a assíntota vertical e a assíntota horizontal:	f_3:  f_4:  □ Que semelhanças e diferenças existem entre as duas funções? □ Comparar as funções f_1 e f_3 □ Comparar as funções f_2 e f_4.	□ Os alunos devem conhecer e compreender estratégias de resolução.
Resolução da questão 3 (trabalho a pares)	5	□ Os alunos podem optar pela representação gráfica de ambas as funções para conhecer melhor o seu comportamento. Isto pode ser uma ajuda para determinar as assíntotas ao gráfico da função. □ Os alunos podem utilizar os processos estudados para determinar assíntotas verticais e não verticais. <u>Assíntotas verticais:</u> $D_{f_5} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $D_{f_6} = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$ $\lim_{x\to0^+} f_5(x) = \lim_{x\to0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{0^+} = +\infty$ ou		□ Objetivo: Os alunos vão determinar as assíntotas ao gráfico de uma função do tipo $a + \frac{b}{x-c}$ □ Os alunos devem conceber diferentes estratégias de resolução da mesma tarefa. □ Os alunos devem realizar a tarefa com sucesso

		$\lim_{x\to 0^-} f_5(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1+\frac{1}{0^-} = -\infty$ $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função f_5 Assíntotas horizontais: $\lim_{x\to +\infty} f_5(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1+\frac{1}{+\infty} = 1$ $y = 1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função f_5 em $+\infty$. $\lim_{x\to -\infty} f_5(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1+\frac{1}{-\infty} = 1$ $y = 1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função f_5 em $-\infty$. ou $m = \lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{x}\right) = 0$ $b = \lim_{x\to +\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ $m = \lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{x}\right) = 0$ $b = \lim_{x\to -\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ $y = 1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função f_5 em $+\infty$ e em $-\infty$. Proceder analogamente para f_6. Assíntotas verticais: $\lim_{x\to -3^+}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{x+3}\right) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{-3^+ + 3} = -\frac{1}{2}$ ou $\lim_{x\to -3^-}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{x+3}\right) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{-3^- + 3} = -\frac{1}{2}$ $x = -\frac{1}{2}$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função f_6. Assíntotas horizontais:		independentemente da estratégia utilizada. • Avaliação: Conseguem ou não encontrar uma estratégia para responder corretamente à questão e que dificuldades manifestam.

		$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{x+3}\right)=-\frac{1}{2}$ $y=-\frac{1}{2}$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função f_6 em $+\infty$. $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{x+3}\right)=-\frac{1}{2}$ $y=-\frac{1}{2}$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função f_6 em $-\infty$. ou $m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{x+3}}{x}\right)=$ $=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x(x+3)}\right)=0$ $b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{x+3}\right)$ $=-\frac{1}{2}$ $=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{x+3}}{x}\right)=$ $=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x(x+3)}\right)=0$ $b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{x+3}\right)$ $=-\frac{1}{2}$ $y=-\frac{1}{2}$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função f_6 em $+\infty$ e em $+\infty$.		
Discussão coletiva da questão 3	5	□Indicar o que fizeram para responder à questão (estudo das assíntotas verticais e não verticais). □Explicar que contributos teve a representação gráfica para a sua resolução. Em seguida, outro aluno apresenta a resolução analítica. Deve apresentar como determinou a assíntota vertical e a assíntota horizontal:	□ Representar graficamente a função f_5: 	□ Os alunos devem conhecer e compreender estratégias de resolução.

			□ Representar graficamente a função f_6:  □ Que semelhanças e diferenças existem entre as duas funções?	
Síntese final	15	Dada uma função racional escrita na forma $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$, $x = c$ é assíntota vertical ao gráfico de f e $y = a$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f. (Registar no caderno diário).	□Comparar as funções f_1 e f_2 □Comparar as funções f_3 e f_4 □Comparar as funções f_5 e f_6. □Dada uma função racional da forma $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, quais as assíntotas verticais e não verticais? □E se a função racional não estiver escrita desta forma?	□ Os alunos devem generalizar: Dada uma função racional da forma $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, $x = c$ é uma assíntota vertical e $y = a$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função.

TAREFAS COMPLEMENTARES
Questão 102 da página 77.

Anexo 13: Plano de aula 7 (18 de março)

IPP III
Mestrado em Ensino da Matemática

Plano de aula

Escola Básica e Secundária Alfredo da Silva

Data: 18/03/2020	Ano:11.º Turma: B	Duração: 50 minutos

DOMÍNIO: Funções Reais de Variável Real (FRVR11)

SUBDOMÍNIO: Assíntotas ao gráfico de uma função.

TÓPICOS MATEMÁTICOS:

OBJETIVO(S) DE APRENDIZAGEM:

- Determinar assíntotas verticais, horizontais e oblíquas ao gráfico de uma função.
- Resolução de inequações racionais.

ESTRATÉGIA GERAL:

- Proposta de uma tarefa;
- Trabalho a pares;
- Discussão e análise coletiva das questões da tarefa.

ESTRUTURA DA AULA	TEMPO (EM MINUTOS)
1. Introdução.	5
2. Resolução das questões 1 e 2.	2
3. Discussão das questões 1 e 2.	3
4. Resolução da questão 3.	7
5. Discussão da questão 3.	5
6. Resolução da questão 4.	5
7. Discussão da questão 4.	5
8. Resolução da questão 5.	8
9. Discussão da questão 5.	10

RECURSOS	
Do aluno	**Do professor**
Tarefa 4 Calculadora gráfica	Tarefa 4 Computador e projetor

DESENVOLVIMENTO DA AULA				
Tarefas e atividades de aprendizagem	**Duração Esperada**	**Atividades dos alunos e possíveis dificuldades**	**Respostas do professor e aspetos a ter em atenção**	**Objetivos e avaliação**
Introdução	5		• "Vou distribuir uma tarefa a cada par de alunos com algumas questões que envolvem os conceitos que temos trabalhado ao longo destas aulas."	
Resolução da questão 1 (trabalho a pares)	2	• $x = b$ é uma assíntota vertical e $y = a$ é uma assíntota horizontal. Tendo em conta a representação gráfica, $b < 0$ e $a > 0$. • Testar cada uma das opções: atribuir valores positivos ou negativos a a e b (conforme o que é dito na opção) e verificar na calculadora gráfica se se obtém um gráfico semelhante ao da figura. Opção correta: (B).		• Os alunos devem encontrar estratégias para resolver a tarefa com sucesso independentemente da estratégia utilizada. • Avaliação: Conseguem ou não definir uma estratégia para responder corretamente à questão e que dificuldades manifestam.
Resolução da questão 2 (trabalho a pares)	3	• Aplicando o algoritmo da divisão a $(x-2) \div (x-3)$ obtém-se: $$(x-2) = (x-3) + 1 \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x-3} = 1 + \frac{1}{x-3}$$ Assim, a assíntota vertical é $x = 3$ e a assíntota horizontal é $y = 1$. • Dado que o domínio da função é $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ e representando a função na calculadora gráfica, os alunos podem excluir de imediato as opções (A) e (B). Ou até, determinando $\lim_{x\to 3^+} g(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x-2}{x-3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ Logo, $x = 3$ é assíntota vertical.		• Os alunos devem realizar a tarefa com sucesso independentemente da estratégia utilizada. • Avaliação: Conseguem ou não definir uma estratégia para responder corretamente à questão e que dificuldades manifestam.

		Para determinar a assíntota horizontal podem usar a representação gráfica que também a permite identificar ou podem calcular-se facilmente $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$. Logo, $y = 1$ é assíntota horizontal. Opção correta: (C)		
Discussão coletiva das questões 1 e 2		• **(1.)** Apresentar a estratégia de resolução: Como f é dada por uma expressão do tipo $a + \frac{1}{x-b}$, tem-se que $x = b$ é uma assíntota vertical e $y = a$ é uma assíntota horizontal. Tendo em conta a representação gráfica, $b < 0$ e $a > 0$. (Caso surja outra estratégia interessante que não prevista, pode também ser apresentada). • **(2.)** Apresentar a estratégia de resolução que recorre ao algoritmo da divisão: $(x-2) = (x-3) + 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{x-2}{x-3} = 1 + \frac{1}{x-3}$ Assim, a assíntota vertical é $x = 3$ e a assíntota horizontal é $y = 1$. Apresentar a estratégia que recorre ao cálculo dos limites: $\lim_{x\to3^+} g(x) = \lim_{x\to3^+} \frac{x-2}{x-3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ Logo, $x = 3$ é assíntota vertical. $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$ Logo, $y = 1$ é assíntota horizontal.	• Privilegiar a estratégia que identifica $x = b$ como assíntota vertical e $y = a$ como assíntota horizontal.	• Os alunos devem relembrar que numa função do tipo $a + \frac{b}{x-c}$, $x = c$ é a assíntota vertical e $y = a$ é a assíntota horizontal ao gráfico da função. • Os alunos devem relembrar como escrever uma função racional na forma $a + \frac{b}{x-c}$. • Os alunos devem relembrar como se determinam as assíntotas verticais e horizontais ao gráfico de uma função recorrendo ao cálculo dos limites.
Resolução da questão 3 (trabalho a pares)		• Dificuldade: "O que é uma hipérbole?" • **(3.1.1.)** Como $y = -2$ é assíntota horizontal, $CD_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$. • **(3.1.2.)** Para apresentar o conjunto-solução de $f(x) \leq 0$, basta recorrer ao gráfico da função e ver para que valores de x se verifica $f(x) \leq 0$. Portanto, $C.S. =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.	A expressão algébrica $a + \frac{1}{x-b}$ representa um caso particular de uma hipérbole.	• Os alunos conseguem mobilizar conhecimentos de aulas anteriores para responder à tarefa. • Os alunos definem uma estratégia para realizar a tarefa com sucesso independentemente da estratégia utilizada.

		• **(3.2.)** Para determinar a expressão analítica de f devem ter em conta as assíntotas verticais e horizontais. $f(x) = -2 + \frac{b}{x-1}$ pois $y = -2$ é assíntota horizontal. Para determinar o valor de b, utilizar um ponto que pertence à função. Como diz no enunciado, o gráfico da função f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -1. Quer isto dizer que $(-1,0)$ pertence ao gráfico da função, ou seja $f(-1) = 0$. Substituindo as coordenadas desse ponto na expressão de f: $$-2 + \frac{b}{-1-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{-2} = 2 \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow b = -4$$ Assim, $$f(x) = -2 + \frac{-4}{x-1}$$		• Avaliação: Conseguem ou não definir uma estratégia para responder corretamente à questão e que dificuldades manifestam.
Discussão coletiva da questão 3		• **(3.1.1.)** Indicar o contradomínio da função: $CD_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$. • **(3.1.2.)** Apresentar o conjunto-solução de $f(x) \leq 0$, recorrendo ao gráfico da função apresentado. Explicar como identificar os valores de x para os quais $f(x) \leq 0$. Portanto, $C.S. =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. • **(3.2.)** Explicar como determinou a expressão analítica de f: Como $y = -2$ é assíntota horizontal, $f(x) = -2 + \frac{b}{x-1}$. Como o gráfico da função f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -1, $f(-1) = 0$. Substituindo as coordenadas desse ponto na expressão de f: $$-2 + \frac{b}{-1-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{-2} = 2 \Leftrightarrow b = -4$$ Assim, $f(x) = -2 + \frac{-4}{x-1}$		• Os alunos devem relembrar que numa função do tipo $a + \frac{b}{x-c}$, x = c é a assíntota vertical e y = a é a assíntota horizontal ao gráfico da função.
Resolução da questão 4 (trabalho a pares)		• $x = 2$ é a assíntota vertical e $y = 1$ é assíntota horizontal. Portanto, $a = 3$ e $c = 2$. Dificuldade: os alunos podem não se recordar qual das letras corresponde a cada uma das assintotas. Portanto, $f(x) = -3 + \frac{b}{x-2}$	• Recordar as questões resolvidas anteriormente.	• Os alunos conseguem mobilizar conhecimentos de aulas anteriores para responder à tarefa. • Os alunos devem realizar a tarefa com

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>Dificuldade: Os alunos podem não conseguir identificar a informação importante do enunciado que permite determinar o valor de b.

Como a origem do referencial pertence ao gráfico da função, $f(0) = 0$.
$$-3 + \frac{b}{0-2} = 0 \Leftrightarrow -3 = \frac{b}{-2} \Leftrightarrow b = 6$$</td>
<td>• Analisar cuidadosamente o enunciado e identificar a informação que ainda não foi utilizada.</td>
<td>sucesso independentemente da estratégia utilizada.

• Avaliação: Conseguem ou não definir uma estratégia para responder corretamente à questão e que dificuldades manifestam.</td>
</tr>
<tr>
<td>Discussão coletiva da questão 4</td>
<td></td>
<td>• Justificar que $x = 2$ é a assíntota vertical e $y = 1$ é a assíntota horizontal.
Concluir que $a = 3$ e $c = 2$.
Portanto, $f(x) = -3 + \frac{b}{x-2}$

Determinar o valor de b:
$f(0) = 0 \Leftrightarrow -3 + \frac{b}{0-2} = 0 \Leftrightarrow -3 = \frac{b}{-2}$
$\Leftrightarrow b = 6$</td>
<td></td>
<td>• Os alunos devem relembrar que numa função do tipo $a + \frac{b}{x-c}$, $\mathrm{x} = \mathrm{c}$ é a assíntota vertical e $y = \mathrm{a}$ é a assíntota horizontal ao gráfico da função.</td>
</tr>
<tr>
<td>Resolução da questão 5 (trabalho a pares)</td>
<td></td>
<td>• (5.1.)
$f(x) \geq 3 \Leftrightarrow 4 - \frac{4}{x+2} \geq 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4 - \frac{4}{x+2} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 - \frac{4}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{(x+2)-4}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x+2} \geq 0$

Zeros do numerados:
$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Zeros do denominador:
$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Construir do quadro de sinais:

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-2</td><td></td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$x-2$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$x+2$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$\frac{x-2}{x+2}$</td><td>$+$</td><td>$n.d.$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
</table>

$C.S =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

• (5.2.)
Dificuldade: Identificar a sequência de passos necessários para determinar a área da figura.</td>
<td>• “Começa por pensar como podes determinar a área dessa figura”</td>
<td>• Os alunos conseguem mobilizar conhecimentos de aulas anteriores para responder à tarefa.
• Os alunos devem realizar a tarefa com sucesso independentemente da estratégia utilizada.

• Avaliação: Conseguem ou não definir uma estratégia para responder corretamente à questão e que dificuldades manifestam.</td>
</tr>
</table>

		$f(x) = 4 - \frac{4}{x+2}$ $x = -2$ é assíntota vertical e $y = 4$ é a assíntota horizontal. $r: y = 4$ e $s: x = -2$ Assim, $C(-2,4)$ e $D(0,4)$. O ponto B tem ordenada nula pois corresponde à interseção do gráfico com o eixo das abcissas: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{4}{x+2} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{4(x+2)-4}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{4x+8-4}{x+2} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{4x+4}{x+2} = 0 \Leftrightarrow 4x+4 = 0 \wedge x+2 \neq 0$ $\Leftrightarrow 4x = -4 \wedge x \neq -2$ $\Leftrightarrow x = -1 \wedge x \neq -2$ Portanto, $B(-1,0)$. O ponto A tem abcissa nula pois corresponde à interseção do gráfico com o eixo das ordenadas: $f(0) = 4 - \frac{4}{0+2} = 4 - 2 = 2$ Portanto, $A(0,2)$. $A_{[ABCD]} = 2 \times 4 - \frac{1 \times 4}{2} - \frac{1 \times 2}{2} = 8 - 2 - 1$ $= 5$ unidades quadradas. (Neste caso calculou-se a área da figura como sendo a diferença entre área do retângulo $[OBCD]$ e a soma das áreas dos dois triângulos a branco. Contudo, podem considerar-se outras formas de calcular a área da figura). Dificuldade: os alunos podem considerar erradamente $[ABCD]$ um trapézio e aplicar a fórmula da área do trapézio.		
Discussão da questão 5		• **(5.1.)** Apresentar todos os passos para resolver a inequação. Passar todos os termos para o 1.º membro: $f(x) \geq 3 \Leftrightarrow 4 - \frac{4}{x+2} \geq 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4 - \frac{4}{x+2} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 - \frac{4}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{(x+2)-4}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{x-2}{x+2} \geq 0$ Determinar os zeros do numerados:		• Os alunos devem relembrar como se resolve uma inequação envolvendo funções racionais. • Os alunos devem conhecer e

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Determinar os zeros do denominador:

$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Construir do quadro de sinais:

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-2}{x+2}$	$+$	$n.d.$	$-$	0	$+$

Apresentar o conjunto-solução:
$C.S =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

- **(5.2.)**

Justificar que $x = -2$ é assíntota vertical e $y = 4$ é assíntota horizontal ao gráfico da função.
Definir as retas:
$r: y = 4$ e $s: x = -2$
Indicar as coordenadas dos pontos $C(-2,4)$ e $D(0,4)$.
Explicar como se obtêm as coordenadas do ponto B:
B tem ordenada nula pois corresponde à interseção do gráfico com o eixo das abcissas:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{4}{x+2} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{4(x+2)-4}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{4x+8-4}{x+2} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{4x+4}{x+2} = 0 \Leftrightarrow 4x + 4 = 0 \land x + 2 \neq 0$
$\Leftrightarrow 4x = -4 \land x \neq -2$
$\Leftrightarrow x = -1 \land x \neq -2$

Portanto, $B(-1,0)$.

Explicar como se obtêm as coordenadas do ponto A:
A tem abcissa nula pois corresponde à interseção do gráfico com o eixo das ordenadas:

$f(0) = 4 - \frac{4}{0+2} = 4 - 2 = 2$

Portanto, $A(0,2)$.

Definir um estratégia para calcular a área do quadrilátero.

$A_{[ABCD]} = 2 \times 4 - \frac{1 \times 4}{2} - \frac{1 \times 2}{2} = 8 - 2 - 1$
$= 5$ unidades quadradas.

Apresentar uma forma diferente de calcular a mesma área (outro aluno).

- Sugerir representar graficamente a solução como forma de confirmar o resultado obtido.

compreender outras estratégias de resolução.

Anexo 14: Plano de aula 8 (18 de março)

IPP III
Mestrado em Ensino da Matemática

Plano de aula

Escola Básica e Secundária Alfredo da Silva

Data: 18/03/2020

Ano: 11.º Turma: B

Duração: 100 minutos

DOMÍNIO: Funções Reais de Variável Real (FRVR11)

SUBDOMÍNIO: Assíntotas ao gráfico de uma função.

TÓPICOS MATEMÁTICOS:

OBJETIVO(S) DE APRENDIZAGEM:

- Determinar assíntotas verticais, horizontais e oblíquas ao gráfico de uma função.

ESTRATÉGIA GERAL:

- Tarefas de consolidação;
- Trabalho a pares;
- Discussão e análise coletiva das questões da tarefa.

ESTRUTURA DA AULA	TEMPO (EM MINUTOS)
1. Introdução.	5
2. Resolução das questões da página 86.	5
3. Discussão das questões da página 86.	6
4. Resolução da questão 129. da página 87.	12
5. Discussão da questão 129 da página 87.	10
6. Resolução da questão 132 da página 87.	5
7. Discussão da questão 132 da página 87.	5
8. Síntese final	2

RECURSOS	
Do aluno	**Do professor**
- Manual - Calculadora gráfica	- Manual - Computador - Projetor

DESENVOLVIMENTO DA AULA				
Tarefas e atividades de aprendizagem	**Duração Esperada**	**Atividades dos alunos e possíveis dificuldades**	**Respostas do professor e aspetos a ter em atenção**	**Objetivos e avaliação**
Introdução	5		• "O objetivo da aula é resolver algumas tarefas de consolidação relacionadas com o tema Assíntotas ao gráfico de uma função. Começam por resolver as tarefas da página 86 do manual e depois fazemos uma breve discussão. Em seguida, passam às tarefas 129 e 132 da página 87 do manual".	
Resolução das questões da página 86 (trabalho a pares)	5	• **(123.)** Dificuldade: Reconhecer que o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}$ corresponde ao declive da reta que é assíntota oblíqua. Dificuldade: Encontrar dois pontos para determinar o declive da reta. $(0,1)$ e $(4,0)$ são pontos da assíntota ao gráfico de f. Pela representação gráfica apresentada, esta assíntota é obliqua. Portanto, a sua equação é da forma $y = mx + b$. O valor de m pode calcular-se de várias formas: $(0,1) - (4,0) = (-4,1)$ e $m = -\frac{1}{4}$ ou $m = \frac{0-1}{4-0} = -\frac{1}{4}$ Como $m = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x} = -\frac{1}{4}$ Opção correta: (B)	• Relembrar como se determina a equação de uma assíntota oblíqua.	• Os alunos devem conceber diferentes estratégias de resolução da mesma tarefa. • Os alunos mobilizam conhecimentos de aulas anteriores para resolver a tarefa. • Os alunos justificam as suas respostas, apresentam uma razão para a escolha de cada uma das opções. • Os alunos devem realizar a tarefa com sucesso independentemente da estratégia utilizada.

• **(124.)**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\frac{1}{3}$$

Como f tem apenas uma assíntota, esta terá declive $-\frac{1}{3}$ uma vez que o declive de uma assíntota obliqua é dado por $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

A assíntota é obliqua por isso excluem-se as opções (A) e (D), e o declive da assíntota é negativo por isso exclui-se a opção (B).

Opção correta: (C)

• **(125.)**

$y=\frac{1}{2}x-3$ é uma assíntota ao gráfico da função em $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}$$

Dificuldade: Reconhecer que $m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}$.

Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

Opção correta: (A)

• **(126.)**

Como $y=2x-1$ é assíntota ao gráfico da função em $-\infty$, então $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2$.

Dificuldade : Reconhecer que

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2$$

Portanto,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{g(x)}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=$$

$$=\frac{1}{2}\times 2=1$$

Dificuldade: Escrever $\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{2x}$ como $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{g(x)}{x}\right)$

Opção correta: (C)

• **(127.)**

Como $y=-4x-3$ é assíntota ao gráfico da função em $-\infty$, então $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-4$ e $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-4x))=-3$.

		Dificuldade: Reconhecer que $m = -4 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $b = -3 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (-4x))$ Portanto, $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - f(x) - 4x\right)$ $= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - (f(x) + 4x)\right)$ $= -4 - (-3) = -1$ Dificuldade: Reconhecer que $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - f(x) - 4x\right) =$ $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - (f(x) + 4x)\right)$ Opção correta: (D)		
Discussão coletiva das questões da página 86	6	• Alunos distintos apresentam a resposta correta às questões 123, 124, 125, 126 e 127, respetivamente, bem como uma justificação para essa escolha.	• Em cada uma das questões, questionar se alguém tem uma outra justificação para a opção escolhida.	• Os alunos devem conhecer e compreender diferentes justificações para a escolha de cada uma das opções.
Resolução da questão 129 (trabalho a pares)	12	• **(129.1.)** Dificuldade: determinar a e b, por onde começar? Dificuldade: a função g não é do tipo $a + \frac{b}{x-c}$. $g(5) = 2 \Leftrightarrow 5a + b + \frac{3}{5+1} = 2$ $\Leftrightarrow 5a + b + \frac{3}{6} = 2 \Leftrightarrow 5a + b = 2 - \frac{3}{6}$ $\Leftrightarrow 5a + b = \frac{3}{2} \Leftrightarrow b = \frac{3}{2} - 5a$ Por outro lado, $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax + \frac{3}{2} - 5a + \frac{3}{x+1}}{x}$ $= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{ax}{x} + \frac{3}{2x} - \frac{5a}{x} + \frac{3}{x(x+1)}\right) =$ $= \lim_{x\to+\infty} \left(a + \frac{3}{2x} - \frac{5a}{x} + \frac{3}{x(x+1)}\right) = a$ Como, no enunciado $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}$, então $a = \frac{1}{2}$. $b = \frac{3}{2} - 5 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{2}{2} = -1$	• "Que informações me dá o enunciado? $g(5) = 2$ ... então escrevam a expressão de $g(5)$ e sabem que tem de dar..."	• Os alunos devem conceber diferentes estratégias de resolução da mesma tarefa. • Os alunos mobilizam conhecimentos de aulas anteriores para resolver a tarefa. • Os alunos devem realizar a tarefa com sucesso independentemente da estratégia utilizada. • Avaliação: Conseguem ou não encontrar uma estratégia para responder corretamente à questão e que

		• **(129.2.)** $\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\frac{1}{2}x\right)=$ $=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x-1+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{2}x\right)=$ $=\lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{3}{x+1}\right)=-1$ -1 é o valor da ordenada na origem da assíntota obliqua ao gráfico da função em $+\infty$ de equação $y=\frac{1}{2}x-1$. Dificuldade: indicar o significado do limite. • **(129.3.)** $m=\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{2}x-1+\frac{3}{x+1}}{x}$ $=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{3}{x(x+1)}\right)=\frac{1}{2}$ $b=\lim_{x\to-\infty}\left(g(x)-\frac{1}{2}x\right)$ $=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x-1+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{2}x\right)$ $=\lim_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{3}{x+1}\right)=-1$ Portanto, $y=\frac{1}{2}x-1$ é assíntota obliqua ao gráfico da função em $-\infty$. • **(129.4.)** $D_g=\mathbb{R}$ Dificuldade: Determinar o domínio da função. g é uma função racional (quociente de funções polinomiais), logo é continua em $\mathbb{R}$. Dificuldade: A função é continua? Onde? Portanto, não existem assíntotas verticais ao gráfico da função.	• "Quando é que se calcula este limite? Permite determinar o que?" • "Porque não fazem a representação gráfica da função?" • "A função apresentada é ou não racional?"	dificuldades manifestam.
Discussão coletiva da questões 129	10	• **(129.1.)** Apresentar uma estratégia para resolver a questão. • **(129.2.)** Apresentar o cálculo do limite: $\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\frac{1}{2}x\right)=$ $=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x-1+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{2}x\right)=$ $=\lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{3}{x+1}\right)=-1$ Indicar o seu significado: -1 é o valor da ordenada na origem da assíntota obliqua ao gráfico da função em $+\infty$.		• Os alunos devem conhecer e compreender outras estratégias de resolução.

		• **(129.3.)** Explicar o processo para determinar uma assíntota oblíqua de equação $y = mx + b$. $m = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{2}x - 1 + \frac{3}{x+1}}{x}$ $= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{3}{x(x+1)}\right) = \frac{1}{2}$ $b = \lim_{x\to-\infty} \left(g(x) - \frac{1}{2}x\right)$ $= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}x - 1 + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{2}x\right)$ $= \lim_{x\to-\infty} \left(-1 + \frac{3}{x+1}\right) = -1$ Portanto, $y = \frac{1}{2}x - 1$ é assíntota obliqua ao gráfico da função em $-\infty$. • **(129.4.)** Justificar que não existem assíntotas verticais ao gráfico da função pois $D_g = \mathbb{R}$ e g é uma função racional (quociente de funções polinomiais), logo é continua em $\mathbb{R}$.		
Resolução da questões 132 (trabalho a pares)	5	• Como $\lim_{x\to-2} f(x) = -\infty$, $x = -2$ uma assíntota vertical ao gráfico da função. • Como $D_g = \mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$ e a função é contínua, então $\lim_{x\to3} f(x)$ existe e é finito. Sendo que $\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to1} f(x)$, também $\lim_{x\to1} f(x)$ existe e é finito, então o gráfico da função não tem mais assíntotas verticais. Dificuldade: Quais são as assíntotas verticais? • Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $y = 1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função em $-\infty$. • Como $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = 1$, $y = 2x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função em $+\infty$.	• “Que pontos são possíveis assíntotas verticais?”	• Os alunos devem conceber diferentes estratégias de resolução da mesma tarefa. • Os alunos mobilizam conhecimentos de aulas anteriores para resolver a tarefa. • Os alunos devem realizar a tarefa com sucesso independentemente da estratégia utilizada. • Avaliação: Conseguem ou não conceber uma estratégia para responder corretamente à questão e que dificuldades manifestam.

7

Discussão coletiva da questões 132	5	• Identificar as assíntotas ao gráfico de f justificando a razão de cada uma das equações ser assíntota. $x = -2$ uma assíntota vertical pois $\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$. Não existem mais assíntotas verticais pois $D_g = \mathbb{R} \backslash \{-2,1\}$ e a função é contínua, então $\lim_{x \to 3} f(x)$ existe e é finito. Sendo que $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x)$, também $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe e é finito. $y = 1$ é uma assíntota horizontal em $-\infty$ pois $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$. $y = 2x + 1$ é assíntota oblíqua em $+\infty$ pois $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 1$.		• Os alunos devem conhecer e compreender outras estratégias de resolução.
Síntese final	2		• "Ao longo das aulas temos feito tarefas relativas ao tópico Assíntotas ao gráfico de uma função e algumas relacionadas com a resolução de equações e inequações que envolvem funções racionais. Estes serão os conteúdos que sairão na ficha de avaliação de sexta-feira."	

TAREFAS COMPLEMENTARES
Tarefas 128, 130, 131 e 133 da página 87 do manual.

128 Seja f a função racional definida por $f(x)=\dfrac{x^3+7x^2-28x+5}{5x^2-15x+10}$.

128.1 Determina o domínio de f.

128.2 Justifica que f é uma função contínua.

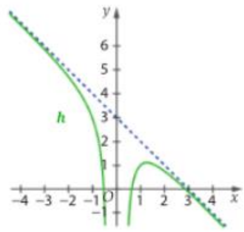
128.3 Determina as assíntotas verticais ao gráfico de f.

128.4 Determina as assíntotas não verticais ao gráfico de f.

130 Na figura seguinte, está representada graficamente a função racional h definida por $h(x)=\dfrac{ax^3+bx^2-1}{x^2}$, $a,\ b\in\mathbb{R}$.

A reta que passa nos pontos de coordenadas $(0\ ,\ 3)$ e $(3\ ,\ 0)$ é a assíntota oblíqua ao gráfico de h em $-\infty$ e em $+\infty$.

Determina os valores de a e de b.



131 Determina, caso existam, as assíntotas ao gráfico das funções definidas por cada uma das expressões seguintes:

131.1 $f(x)=\dfrac{3x+6}{(x+2)^2}$

131.2 $g(x)=\dfrac{2x^3+x}{x^2+1}$

131.3 $h(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2-1}$

131.4 $j(x)=\dfrac{2x^2+3}{x+3}$

131.5 $p(x)=\dfrac{\sqrt{9x^2+5x}}{x+1}$

131.6 $r(x)=\sqrt{4x^2+1}$

131.7 $s(x)=\dfrac{x^2-3}{|5-x|}$

133 Seja g a função r.v.r. definida por $g(x)=\sqrt{\dfrac{2x^3-x}{x+1}}$.

133.1 Determina o domínio de g.

133.2 Identifica as assíntotas ao gráfico de g. No caso de existir alguma assíntota vertical, classifica-a como unilateral ou bilateral.

9

Anexo 15: Plano das aulas 9/10 (20 de março)

Plano de aula

Escola Básica e Secundária Alfredo da Silva

Data: 20/03/2020

Ano:11.º Turma: B

Duração: 100 (50+50) minutos

DOMÍNIO: Funções Reais de Variável Real (FRVR11)

SUBDOMÍNIO: Assíntotas ao gráfico de uma função

OBJETIVO:
O primeiro tempo de 50 minutos será dedicado ao esclarecimento de eventuais dúvidas dos alunos. No caso de não existirem dúvidas, ou estas serem insuficientes para preencherem todo o tempo da aula, propõe-se a resolução das seguintes tarefas:
- 5 da página 92;
- 6,7 e 9 da página 93.

No segundo tempo de 50 minutos será entregue uma ficha de avaliação aos alunos que será resolvida a pares. Os pares, formados pela professora, serão constituídos por alunos com o mesmo nível de desempenho.

ESTRUTURA DA AULA	TEMPO (EM MINUTOS)
1. Introdução.	5
2. Esclarecimento de dúvidas/Tarefas de consolidação.	45
3. Realização de uma ficha de avaliação a pares.	50

RECURSOS	
Do aluno	**Do professor**
Manual Calculadora gráfica Ficha de avaliação	Manual

5 Seja g uma função par, de domínio $\mathbb{R}$, tal que $\lim_{x \to +\infty} (g(x) - 5x + 3) = 0$.

Qual das seguintes é uma equação da assíntota ao gráfico de g em $-\infty$?

(A) $y = -5x + 3$

(B) $y = -5x - 3$

(C) $y = 5x + 3$

(D) $y = 5x - 3$

6 A uma dada mistura de dois líquidos A e B foi adicionado mais líquido B. Inicialmente, a mistura tinha 5 litros e a percentagem de líquido A era de 60%.

Seja x a quantidade, em litros, de líquido B adicionada à mistura inicial.

6.1 Mostra que a percentagem de líquido B presente na mistura é dada, em função de x, por $p(x) = \frac{200 + 100x}{5 + x}$.

6.2 Atendendo ao contexto do problema, indica o domínio de p.

6.3 No mínimo, quantos litros de líquido B têm de ser acrescentados à mistura inicial para que a percentagem deste líquido seja de pelo menos 90%?

6.4 Determina $\lim_{x \to +\infty} p(x)$. Interpreta o resultado no contexto do problema.

6.5 Determina as assíntotas ao gráfico da função racional definida por $f(x) = \frac{200 + 100x}{5 + x}$.

7 Calcula os seguintes limites, começando por identificar, caso exista, o tipo de indeterminação.

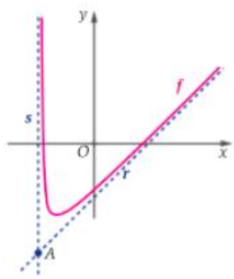
7.1 $\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 + x^2 - 13x + 6}{x^2 - 5x + 6}$

7.2 $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-3}\right)$

9 O gráfico da função f, parcialmente representado na figura ao lado, tem exatamente duas assíntotas: a reta r e a reta vertical s.

Sabe-se que $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = -3$ e que o ponto A (interseção das retas r e s) tem ordenada -6.

Determina equações das retas r e s.



3