



## Open Archive Toulouse Archive Ouverte (OATAO)

OATAO is an open access repository that collects the work of some Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author's version published in: <https://oatao.univ-toulouse.fr/27200>

**Official URL:**

**To cite this version :**

Paroissien, Eric Modélisation simplifiée des transferts d'effort dans les assemblages boulonnés et/ou collés. (2020) [HDR]

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator:

[tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr](mailto:tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr)



Université  
de Toulouse

# Habilitation à Diriger des Recherches

Délivrée par :

**Université de Toulouse III Paul Sabatier**

Discipline :

**Génie Mécanique**

Présentée par :

**Éric PAROISSIEN**

Titre :

**Modélisation simplifiée des transferts d'effort dans les assemblages  
boulonnés et/ou collés**

Soutenue le 18 décembre 2020 devant le jury composé de :

Pierre-Alain BOUCARD	Professeur des Universités	ENS Paris-Saclay	Rapporteur
Franck LAURO	Professeur des Universités	Université Polytechnique Hauts de France	Rapporteur
Éric MARTIN	Professeur des Universités	Bordeaux INP Université de Bordeaux	Rapporteur
Christian BES	Professeur des Universités	Université Toulouse III Paul Sabatier	Examineur
Valérie NASSIET	Professeur des Universités	ENI Tarbes	Présidente
Frédéric LACHAUD	Professeur ERE	ISAE-SUPAERO	Directeur

École doctorale :

**MEGeP (Mécanique, Énergétique, Génie civil & Procédés)**

Unité de recherche :

**Institut Clément Ader (UMR CNRS 5312)**

Établissement de rattachement :

**Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace SUPAERO, Université de Toulouse**





Université  
de Toulouse

# Habilitation à Diriger des Recherches

Délivrée par :

**Université de Toulouse III Paul Sabatier**

Discipline :

**Génie Mécanique**

Présentée par :

**Éric PAROISSIEN**

Titre :

**Modélisation simplifiée des transferts d'effort dans les assemblages  
boulonnés et/ou collés**

Soutenue le 18 décembre 2020 devant le jury composé de :

Pierre-Alain BOUCARD	Professeur des Universités	ENS Paris-Saclay	Rapporteur
Franck LAURO	Professeur des Universités	Université Polytechnique Hauts de France	Rapporteur
Éric MARTIN	Professeur des Universités	Bordeaux INP Université de Bordeaux	Rapporteur
Christian BES	Professeur des Universités	Université Toulouse III Paul Sabatier	Examineur
Valérie NASSIET	Professeur des Universités	ENI Tarbes	Présidente
Frédéric LACHAUD	Professeur ERE	ISAE-SUPAERO	Directeur

École doctorale :

**MEGeP (Mécanique, Energétique, Génie civil & Procédés)**

Unité de recherche :

**Institut Clément Ader (UMR CNRS 5312)**

Établissement de rattachement :

**Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace SUPAERO, Université de Toulouse**

*page laissée volontairement sans texte*

*... à Laëtitia, Elyne, Bastian et Albin ...*

## Remerciements

Je remercie en premier lieu les membres du jury pour avoir accepté de jouer les rôles de président, rapporteurs et examinateurs ainsi que pour les commentaires apportés à ce mémoire et les échanges pendant la soutenance orale.

Le présent mémoire est le fruit d'un travail collaboratif avec de nombreuses personnes sur la période 2003-2020.

Je remercie mes collègues et partenaires avec qui j'ai pu collaborer pour les riches interactions tant sur les plans humains, techniques et scientifiques qui m'ont permis d'enrichir ma compréhension des choses et parfois de la chambouler. J'espère que les collaborations nées récemment avec Maëleonn Aufray et Julien Jumel, en particulier, se poursuivront. Je remercie chaleureusement Marie-Odile Monsu pour le support continu, fiable et toujours avec le sourire, sur tous les types de difficultés administratives consommatrices de temps et d'énergie.

Je remercie les étudiants en stage M1, M2, MS, en projet de recherche sur le Master of Science de l'ISAE-SUPAERO ainsi que les doctorants que j'ai eu à la chance de pouvoir contribuer à encadrer. J'ai tenté dans ce mémoire de mettre en lumière vos travaux qui contribuent à l'ensemble de la thématique présentée.

Je remercie mes encadrants Sébastien Didierjean, Laurent Michel, Marc Sartor, Jacques Huet, Denis Campassens et Frédéric Lachaud, qui m'ont formé avec patience et m'ont accordé leur confiance. Les toutes dernières lignes de ce mémoire vous sont dédiées.

Plus particulièrement, je remercie Frédéric Lachaud qui m'accompagne depuis 2003 en tant qu'élève-ingénieur à aujourd'hui en tant qu'enseignant-chercheur. Je ne sais pas si nous aurons le temps d'aborder tous les sujets que nous aimerions mais je suis sûr que nous continuerons à prendre beaucoup de plaisir à travailler ensemble.

## Table des Matières

<b>Nomenclature et abréviations</b> .....	<b>10</b>
<b>Préambule</b> .....	<b>14</b>
<b>1 Introduction</b> .....	<b>15</b>
1.1 <i>Transfert d'effort</i> .....	15
1.2 <i>Assurer la résistance</i> .....	18
1.3 <i>Modélisation</i> .....	19
1.4 <i>Assemblages hybrides (boulonnés/collés)</i> .....	21
<b>2 Synthèse des activités de recherche</b> .....	<b>25</b>
2.1 <i>HBB Joints et JoSAT</i> .....	25
2.2 <i>Principes fondamentaux de résolution illustrés sur la cinématique de barre</i> .....	28
2.2.1 <i>Raideur d'un assemblage collé en simple recouvrement</i> .....	28
2.2.2 <i>Taux de transfert aux fixations d'un assemblage HBC</i> .....	39
2.2.3 <i>Modélisation par macro-élément d'un simple recouvrement collé</i> .....	49
2.3 <i>Choix d'une cinématique plus représentative : cinématique de poutre</i> .....	55
2.3.1 <i>Modélisation simplifiée à fondation élastique</i> .....	55
2.3.2 <i>Formulation d'un macro-élément « poutres-collées »</i> .....	61
2.3.3 <i>Modélisation par macro-élément d'un simple recouvrement collé</i> .....	74
2.4 <i>Méthodologies de formulation adaptées à des physiques plus complexes</i> .....	81
2.4.1 <i>Formulation par l'exponentiel de matrice</i> .....	81
2.4.2 <i>Gradient des propriétés géométriques et matérielles</i> .....	88
2.4.3 <i>Formulation d'un macro-élément à gradient de propriétés</i> .....	95
2.4.4 <i>Comportement non linéaire matériau</i> .....	99
2.5 <i>Contribution à la modélisation du comportement mécanique des assemblages</i> .....	110
2.5.1 <i>Assemblages boulonnés composites</i> .....	110
2.5.2 <i>Assemblages collés</i> .....	113
2.5.3 <i>Interface substrat / colle dans un cadre pluridisciplinaire (TACCOS)</i> .....	117
<b>3 Perspectives de recherche</b> .....	<b>120</b>
3.1 <i>Dimensionnement des assemblages</i> .....	120
3.1.1 <i>Assemblages par boulonnage</i> .....	120
3.1.2 <i>Assemblages par collage</i> .....	126
3.2 <i>Approche pluridisciplinaire du dimensionnement des assemblages collés</i> .....	137

3.2.1	Assemblages HBC .....	137
3.2.2	Interface substrat colle.....	139
3.2.3	Réparations multimatériaux .....	142
<b>4</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>145</b>
	<b>Références bibliographiques .....</b>	<b>148</b>
<b>5</b>	<b>Annexe A.....</b>	<b>166</b>
5.1	<i>Mode propre fondamentale d'un simple recouvrement collé équilibré en cinématique de barre .....</i>	<i>166</i>
5.2	<i>Complément sur l'effet du cisaillement transverse des substrats .....</i>	<i>168</i>
5.3	<i>Complément au ME poutres-collées .....</i>	<i>170</i>
5.3.1	Racines du polynôme caractéristique.....	170
5.3.2	Sandwich collé .....	172
5.3.3	Efforts et déplacements nodaux .....	173
5.3.4	Modifications des hypothèses initiales .....	177
<b>6</b>	<b>Annexe B.....</b>	<b>179</b>
6.1	<i>Identification.....</i>	<i>179</i>
6.2	<i>Parcours universitaire.....</i>	<i>180</i>
6.3	<i>Parcours professionnel (après le doctorat).....</i>	<i>181</i>
6.4	<i>Activités d'enseignement.....</i>	<i>182</i>
6.4.1	Introduction.....	182
6.4.2	2004-2014 : enseignant vacataire à l'ENSICA puis l'ISAE formation ENSICA..	184
6.4.3	2014-2016 : professeur associé à mi-temps à l'ENSEIRB-MATMECA .....	185
6.4.4	Depuis 2016 : enseignant-chercheur à l'ISAE-SUPAERO .....	186
6.5	<i>Activités de recherche.....</i>	<i>188</i>
6.5.1	Synthèse .....	188
6.5.2	Liste des communications.....	189
6.5.3	Activités d'évaluateur .....	196
6.6	<i>Activités d'encadrement.....</i>	<i>197</i>
6.6.1	Synthèse des activités d'encadrement .....	197
6.6.2	Liste des thèses de doctorat soutenues .....	199
6.6.3	Liste des thèses de doctorat en cours .....	200
6.6.4	Liste des thèses de doctorat débutant à l'automne 2020 .....	202
6.6.5	Liste des études post-doctorales .....	203
6.6.6	Liste des stages M1, M2 ou MS .....	204

6.6.7	Liste des projets de recherche MAE .....	212
6.7	<i>Responsabilités scientifiques</i> .....	214
6.7.1	Animations .....	214
6.7.2	Projets de recherche.....	216
6.7.3	Partenariats .....	218

## Nomenclature et abréviations

DCB	double cantilever beam
ENF	end notched flexure
FGA	functionally graded adhesive
HBC	hybride (boulonné / collé)
ME	macro-élément
MEF	Méthode par Éléments Finis
MMB	mixed-mode bending
MMC	Mécanique des Milieux Continus
RDM	Résistance des Matériaux
TS	traction - séparation
$a$	longueur de fissure en mm
$A_c$	surface du petit rond en mm <sup>2</sup>
$A_i$	raideur de membrane du substrat $i$ en N
$A_s$	raideur de membrane d'un substrat en N
$\mathcal{A}$	matrice de système
$b$	demi-profondeur en mm
$c$	demi-longueur de recouvrement en mm
$c_k$	constante d'intégration
$C$	vecteur des constantes d'intégration
$C_f$	raideur de cisaillement de la fixation en N.mm <sup>-1</sup>
$C_i$	paramètre raideur du substrat $i$ en N.mm <sup>3</sup>
$C'_i$	paramètre raideur du substrat $i$ en N.mm <sup>3</sup>
$C_j$	raideur de cisaillement de la fixation $j$ en N.mm <sup>-1</sup>
$C_u$	demi-raideur de cisaillement de la fixation selon $x$ en N.mm <sup>-1</sup>
$C_v$	demi-raideur de cisaillement de la fixation selon $y$ en N.mm <sup>-1</sup>
$C_\theta$	demi-raideur de cisaillement de la fixation autour de $z$ en N.mm
$\bar{C}$	paramètre en N.mm
$d$	distance au bord en mm
$d_i$	abscisse de la fixation en mm
$D$	paramètre dommage
$D_e$	matrice de couplage

$e$	épaisseur de colle en mm
$e_i$	épaisseur d'un substrat en mm
$e_s$	épaisseur du substrat i en mm
$E_i$	module d'Young du substrat i en MPa
$E_s$	module d'Young d'un substrat en MPa
$f$	effort de traction appliqué en N
$f_c$	effort critique en N
$F_e$	vecteur des efforts nodaux du ME
$F_{e,th}$	vecteur des efforts nodaux du ME équivalents au chargement thermique
$F_e$	vecteur des efforts nodaux de la structure
$G$	module de cisaillement de la colle en MPa
$G_c$	taux de restitution d'énergie critique en N.mm <sup>-1</sup>
$G_i$	module de cisaillement du substrat i en MPa
$G_s$	module de cisaillement d'un substrat en MPa
$G_I$	densité surfacique d'énergie emmagasinée en mode I en N.mm <sup>-1</sup>
$G_{Ic}$	taux de restitution d'énergie critique en mode I en N.mm <sup>-1</sup>
$G_{II}$	densité surfacique d'énergie emmagasinée en mode II en N.mm <sup>-1</sup>
$G_{IIc}$	taux de restitution d'énergie critique en mode II en N.mm <sup>-1</sup>
$h$	demi-épaisseur de colle en mm
$h_i$	demi-épaisseur du substrat i en mm
$h_+$	décalage de fibre neutre entre les deux substrats en mm
$H_i$	raideur de cisaillement du substrat i en N
$k_a$	raideur de l'assemblage collé en simple cisaillement en N.mm <sup>-1</sup>
$k_c$	raideur du recouvrement collé en N.mm <sup>-1</sup>
$k_i$	raideur du ressort représentant le substrat i hors recouvrement en N.mm <sup>-1</sup>
$K_e$	matrice de raideur élémentaire du ME
$K_{e,i}$	matrice de raideur élémentaire du substrat i hors recouvrement
$K_k$	constante d'intégration
$K_s$	matrice de raideur de la structure
$l_i$	longueur hors recouvrement du substrat i en mm
$l_i$	longueur hors recouvrement du substrat en mm
$L$	longueur de recouvrement en mm
$L_e$	matrice de couplage

$n$	nombre de fixations
$M_i$	Moment de flexion du substrat i en N.mm
$N_i$	effort normal du substrat i en N
$N_{i,j}$	effort normal du substrat i dans le recouvrement j en N
$S$	contrainte de pelage de la colle en MPa
$S_i$	contrainte de pelage de la couche colle i en MPa
$T$	contrainte de cisaillement de la colle en MPa
$T_i$	contrainte de cisaillement de la couche colle i en MPa
$T_j$	contrainte de cisaillement de la colle sur le recouvrement j en MPa
$T'_i$	contrainte de cisaillement transverse dans le substrat i en MPa
$T_{max}$	contrainte de cisaillement maximale de la colle en MPa
$T_{moy}$	contrainte de cisaillement moyenne de la colle en MPa
$u_i$	déplacement longitudinal du substrat i en mm
$u_f$	déplacement total de l'éprouvette en mm
$U_e$	vecteur des déplacements nodaux du ME
$U_e$	vecteur des déplacements nodaux de la structure
$v_i$	flèche du substrat i en mm
$v_c$	flèche critique en mm
$V_i$	effort tranchant du substrat i en N
$w$	profondeur de recouvrement en mm
$X$	abscisse adimensionnée le long du recouvrement
$(x,y)$	repère cartésien associée à la couche de colle
$(x,y_i)$	repère cartésien associée au substrat i
$\hat{\alpha}_i$	coefficient d'expansion thermique du substrat i en K <sup>-1</sup>
$\hat{\alpha}_i^{p_i}$	coefficient d'expansion thermique du pli p <sub>i</sub> en K <sup>-1</sup>
$\beta_d$	paramètre sans unité
$\beta_t$	paramètre sans unité
$\beta'_t$	paramètre sans unité
$\chi$	paramètre sans unité
$\Delta T$	variation de température en K
$\phi$	fonction adimensionnelle de $\omega$
$\phi_j$	paramètre sans unité

$\kappa$	fonction adimensionnelle de $\omega$
$\eta$	paramètre en $\text{mm}^{-1}$
$\eta_d$	paramètre en $\text{mm}^{-1}$
$\eta_t$	paramètre en $\text{mm}^{-1}$
$\mu$	paramètre de mixité
$\theta_i$	angle de flexion du substrat i en rad
$\sigma$	contrainte équivalente en MPa
$\sigma_c$	contrainte critique en MPa
$\sigma_I$	contrainte d'interface en mode I en MPa
$\sigma_{Ie}$	contrainte d'interface d'initiation en mode I en MPa
$\sigma_{II}$	contrainte d'interface en mode II en MPa
$\sigma_{IIe}$	contrainte d'interface d'initiation en mode II en MPa
$\tau_j$	taux de transfert de la fixation j
$\omega$	paramètre sans unité
$\Omega$	pulsation modale fondamentale en $\text{rad.s}^{-1}$
$\Omega_r$	pulsation modale fondamentale du recouvrement collé en $\text{rad.s}^{-1}$
$\xi$	paramètre sans unité

## Préambule

Le poste que j'occupe aujourd'hui à l'ISAE-SUPAERO s'intitule *enseignant-chercheur en mécanique des structures aérospatiales*. Mes activités de recherche et d'enseignement sont centrées sur la mécanique des structures appliquée à la construction aérospatiale. Avant son départ à la retraite, Jacques Huet (Professeur ISAE-SUPAERO) occupait ce poste. Jacques Huet est aussi mon co-directeur de thèse de doctorat. Il me disait que la mécanique des structures s'attache à la détermination des transferts d'effort entre les éléments structuraux : il s'agit *simplement* de les équilibrer. Mon activité de recherche vise principalement à modéliser ces transferts d'effort réalisés par des liaisons boulonnées et/ou collées, afin de les dimensionner.

Après ma thèse de doctorat, entre 2007 et 2016, j'ai travaillé au service de l'industrie aéronautique. En 2016, j'ai été recruté en tant qu'enseignant-chercheur par l'ISAE-SUPAERO. Deux périodes professionnelles sont donc distinguées. La première est baptisée *période professionnelle industrielle (2007-2016)* tandis que la seconde est dénommée *période professionnelle universitaire (2016-2020)*. Mes activités de recherche et d'enseignement s'inscrivent en cohérence sur ces deux périodes. La rédaction de ce mémoire est guidée par la volonté de mettre en évidence cette cohérence. Une brève présentation de mes travaux de doctorat s'avère alors nécessaire puisque mes activités de recherche durant la plus grande partie de ma période professionnelle industrielle y sont liées.

De plus, la structure choisie pour ce manuscrit vise à répondre au mieux aux attentes pour un mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches, telles que je les ai perçues, au travers de mes discussions avec mon parrain, Frédéric Lachaud (Professeur ISAE-SUPAERO), et de mes lectures des mémoires d'autres collègues. Il est composé de deux parties principales. La première vise à dresser le bilan de mes activités de recherche tandis que la seconde présente mes perspectives de recherche. De plus, une annexe est dédiée à ma notice personnelle, fournissant, en particulier, la liste exhaustive des communications scientifiques et des encadrements auxquels j'ai contribué.

Les travaux et les perspectives présentés dans ce mémoire sont le fruit d'une production collaborative avec mes co-auteurs, collègues et partenaires, qu'ils soient enseignant-chercheur, ingénieur ou étudiant en doctorat ou mastère.

# 1 Introduction

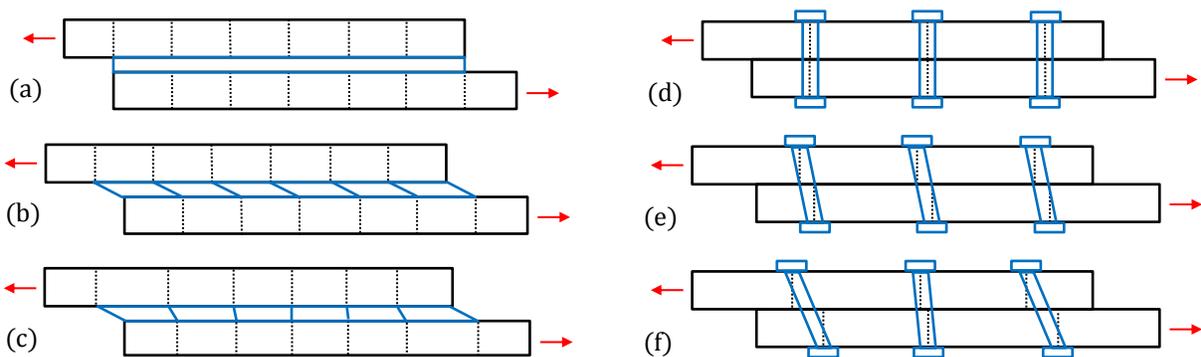
## 1.1 Transfert d'effort

Les assemblages restent incontournables dans la construction mécanique. Leur fonction principale est de permettre l'existence d'une structure, constituée elle-même d'éléments structuraux. Il existe de nombreuses technologies d'assemblage. En aéronautique, les technologies d'assemblage les plus utilisées sont l'assemblage par fixation mécanique, par soudage ou par collage. Dans ce mémoire, le boulonnage désignera de manière générique les assemblages par fixation mécanique, incluant le vissage et le rivetage par exemple.

En opération, une structure est généralement soumise à un ensemble de charges extérieures, auxquelles elle doit résister afin d'assurer ses fonctions. Ces charges se répartissent dans les éléments structuraux sous forme d'efforts dont la nature dépend des choix de conception initiaux. Les éléments structuraux sont alors dimensionnés pour résister à ces efforts. Par exemple, une structure de type voilure possède une forme géométrique permettant de générer de la portance à partir de la réaction de la pression aérodynamique sur sa surface. Cette charge aérodynamique génère dans la structure des efforts tranchants, moments de flexion et moment de torsion. Le longeron est l'élément structural qui est capable de reprendre le moment de flexion, qu'il va transmettre au fuselage et permettre le vol de l'appareil. Les assemblages assurent alors l'équilibre des éléments structuraux sous les efforts résultants. Les éléments de liaison, tels que le boulon, la soudure ou la couche de colle, sont soumis aux réactions des efforts résultants. Ainsi, les éléments de liaison se déforment générant des contraintes qui s'opposent à ces déformations. Ces contraintes permettent alors d'équilibrer les efforts résultants. La déformation des éléments de liaison permet donc d'assurer l'équilibre des éléments structuraux ou, autrement dit, le transfert d'effort.

Les éléments structuraux se déforment aussi et influencent les champs de déformation et de contrainte au sein des éléments de liaison. Pour illustrer, la configuration de l'assemblage collé en simple cisaillement est choisie ([Figure 1](#)). Les deux éléments structuraux sont soumis à des efforts de traction. Pour simplifier, la cinématique est réduite aux champs des déplacements longitudinaux dans les substrats. Le déplacement relatif aux interfaces entre la colle et l'élément structural génère une déformation de cisaillement dans la colle pour tous les points du recouvrement. Le transfert de charge est donc réalisé par le cisaillement de la colle comme représenté explicitement par de Bruyne dans ses figures labellisées par « *cinema picture* » [[de Bruyne 1944](#)]. Si les éléments structuraux étaient infiniment rigides, alors cette déformation de cisaillement serait constante le long du recouvrement ([Figure 1](#)). Or, les éléments structuraux se déforment et induisent un gradient de déformation de cisaillement le long du recouvrement. Ce mode de transfert

d'effort est dit continu (Figure 2) [Demarkles 1955]. Il a été décrit par Arnovljevic en 1909 [Arnovljevic 1909] et par Volkersen en 1938 [Volkersen 1938] en considérant la tension différentielle dans les substrats induite par le cisaillement appliqué par la couche de colle (*shear-lag*). Il est remarqué que, dans son article de 1938, Volkersen vise à évaluer les efforts transférés par les fixations mécaniques dans un assemblage riveté en s'appuyant sur les efforts transférés dans un assemblage collé. Pour un assemblage boulonné en simple recouvrement, la déformation par cisaillement des fixations permet le transfert d'effort. Ce mode de transfert est dit discret (Figure 2) [Demarkles 1955]. Dans le cadre de recherches effectuées à la NACA et publiées en 1946 et 1947 [Ross 1946] [Tate et Rosenfeld 1946] [Rosenfeld 1947], il est montré que le transfert de charges entre les deux éléments structuraux supposés déformables n'est pas uniformément réparti entre les fixations (Figure 1). Les modélisations de Ross et de Tate et Rosenfeld sont discrètes, à base de ressorts, supposant la compatibilité des déplacements. Inversement, les éléments de liaison peuvent modifier localement les champs de déformation et de contrainte dans les éléments structuraux. Par exemple, le boulonnage implique de réaliser un trou. Si la liaison est soumise à un effort, un gradient de contrainte apparaît en bord trou. Ce gradient de contrainte est modifié par l'ajout de la fixation dans le trou et dépend des distances entre les fixations et des distances aux bords libres. De plus, une fois en contact, la fixation exerce une pression sur le trou : le matage. Dans une cinématique simplifiée uni-axiale, si la fixation était infiniment rigide alors la pression exercée serait uniforme dans l'épaisseur du trou. Or, la fixation se déforme et entraîne alors un gradient de contrainte.



**Figure 1** Transfert des efforts dans un assemblage à simple recouvrement par collage (a) en position initiale, (b) en position finale avec des éléments structuraux indéformables, (c) en position finale avec des éléments structuraux déformables et par boulonnage (d) en position initiale, (e) en position finale avec des éléments structuraux indéformables, (f) en position finale avec des éléments structuraux déformables.

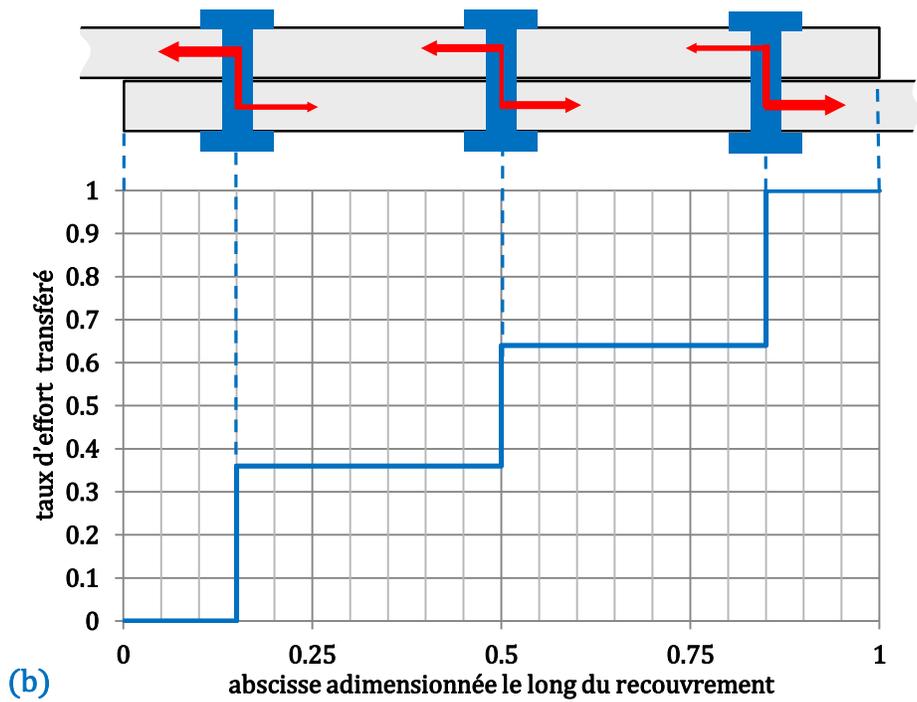
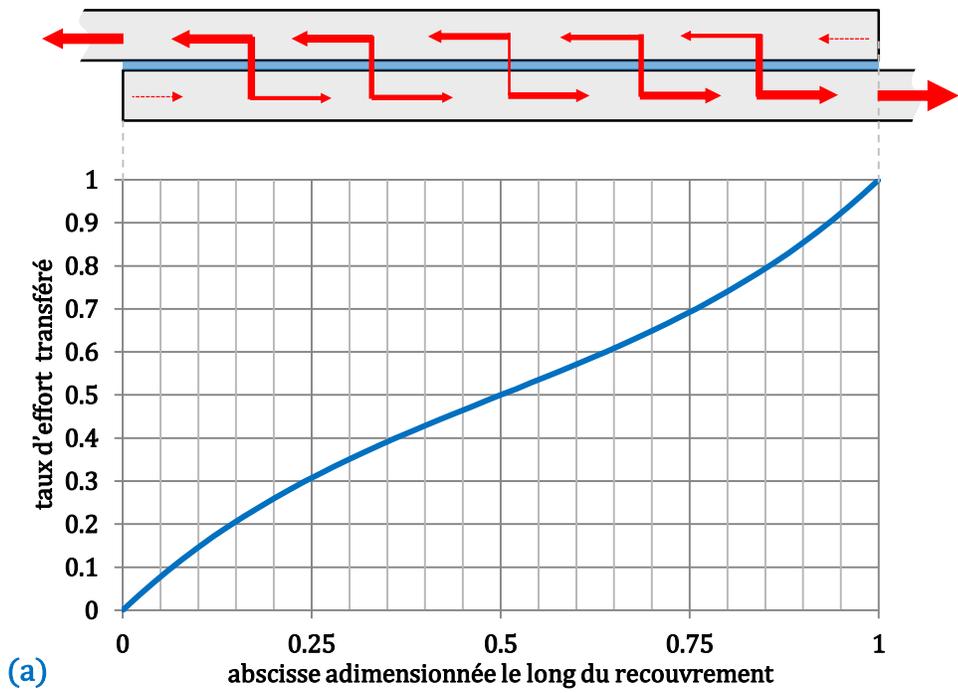


Figure 2 Transfert des efforts dans un assemblage à simple recouvrement (a) par collage et (b) par boulonnage.

## 1.2 Assurer la résistance

Assurer la résistance des assemblages implique alors d'assurer la résistance des éléments de liaison ainsi que la résistance locale des éléments structuraux. Assurer la résistance des éléments structuraux hors zone d'assemblage ne suffit donc généralement pas à assurer la résistance de la structure. L'intégrité de cette dernière est donc directement dépendante de l'intégrité des assemblages.

Le dimensionnement d'une structure consiste à déterminer un espace géométrique quantifié ainsi que la nature et la localisation spatiale des matériaux remplissant l'espace géométrique. Concevoir une structure consiste à la dimensionner en respectant des exigences d'un cahier des charges, exprimées en termes de fonctions à réaliser sous des contraintes prescrites, telles que la sécurité, l'environnement... En dehors de la fonction de démantèlement, la réalisation des fonctions nécessite, en particulier, d'assurer la résistance ou l'intégrité du système mécanique. En effet, si le système mécanique vient à rompre alors les fonctions pourraient ne plus être réalisées.

Un dimensionnement implique de réaliser des calculs permettant de prédire un comportement mécanique. Une tenue mécanique sera prédite si un critère de tenue et un admissible sont définis. Les résultats des calculs permettront d'évaluer le critère pour la tenue mécanique cherchée. Les critères peuvent s'exprimer sous diverses formes (scalaire, probabilité...) à l'aide de diverses grandeurs (contrainte, déformation, déplacement, énergie...). Le critère peut contenir dans sa formulation un facteur de sécurité. Les admissibles sont en général mesurés expérimentalement et peuvent inclure des facteurs prenant en compte un retour d'expérience ou d'usage (Figure 3). Dans l'industrie aéronautique, il est usuel de comparer le critère évalué à l'admissible en formant le rapport admissible sur critère, appelé *Reserve Factor*.

La Résistance des Matériaux (RDM) est une discipline scientifique qui est utilisée pour le dimensionnement des structures à concevoir [Vallat 1950] [Boucard 2011]. La RDM s'inscrit dans une théorie plus générale : la Mécanique des Milieux Continus (MMC). La RDM est basée sur un ensemble d'hypothèses simplificatrices cohérentes avec la réalité physique et peut permettre des résolutions purement analytiques tout en conservant des résultats en accord suffisant avec l'observation expérimentale. Par exemple, l'analyse d'éléments structuraux élançés avec la Théorie des Poutres réduit le cadre général tridimensionnel de la MMC à un cadre d'analyse unidimensionnel.

### 1.3 Modélisation

La modélisation est l'art de l'ingénieur qu'il pratique en s'appuyant sur ses connaissances scientifiques et son appréhension de la réalité physique [Boucard 2011]. Elle lui permet de **mieux la comprendre** et par suite de **mieux la modéliser**.

L'activité de modélisation consiste à idéaliser la réalité physique en posant des hypothèses simplificatrices. Ces hypothèses simplificatrices sont alors traduites en un jeu d'équations mathématiques qu'il s'agit de résoudre. Une résolution purement analytique, fournissant un résultat sous la forme d'une équation prête à être utilisée, est possible si, en général, les hypothèses simplificatrices sont suffisamment fortes. L'intérêt de disposer d'une résolution analytique est de pouvoir obtenir des résultats simplement et rapidement. Par contre, si les hypothèses sont trop fortes, autrement dit trop en décalage avec la réalité, les résultats présentent le risque d'être éloignés des mesures expérimentales. Quand le traitement formel des équations mathématiques n'est plus possible, c'est souvent le signe d'hypothèses simplificatrices posées un peu moins fortes. Une approche de résolution est la résolution semi-analytique. L'accès aux résultats passe par la programmation d'un code informatique dédié, utilisant des méthodes numériques plus ou moins élémentaires, tout en demandant peu de temps de calcul. Le code nommé A4EA d'Hart-Smith pour la prédiction de tenue statique de joints collés en simple recouvrement incluant le comportement élastoplastique de la colle [Hart-Smith 1973a] est un exemple. Ce code est programmé en FORTRAN IV et permet la résolution des équations issues de la modélisation proposée par Hart-Smith, rendue impossible *à la main* par la considération d'un comportement élastoplastique de la colle. Pour le cas du double recouvrement collé, le code A4EB est fourni en annexe de [Hart-Smith 1973b]. Enfin, quand il n'est plus possible de poser des hypothèses cohérentes pour simplifier la complexité du cas réel considéré, des méthodes numériques avancées, auxquelles la Méthode par Éléments Finis (MEF) appartient, sont utilisées pour la résolution. Le développement de ces méthodes est concomitant avec l'avènement des outils informatiques. Si elles sont appliquées correctement, des résultats très proches de la mesure expérimentale sont attendus, après des temps de mise en œuvre et de calcul plus longs que pour les résolutions analytiques ou semi-analytiques.

Le dimensionnement s'appuie sur des étapes de modélisation des charges, des géométries et des comportements matériaux. Le dimensionnement est donc dépendant de la définition des conditions d'opération ainsi que de procédés de fabrication (Figure 3) et est ainsi par nature un problème pluridisciplinaire. Les données d'entrée de ces étapes de modélisation peuvent être issues d'essais en service et d'essais expérimentaux de caractérisation, en plus de celles issues du cadre normatif. Ces essais physiques permettent aussi de définir les admissibles nécessaires à estimer la résistance par comparaison à des critères évalués par les essais numériques. Ces essais numériques mettent en œuvre des schémas de résolution associés aux modélisations considérées.

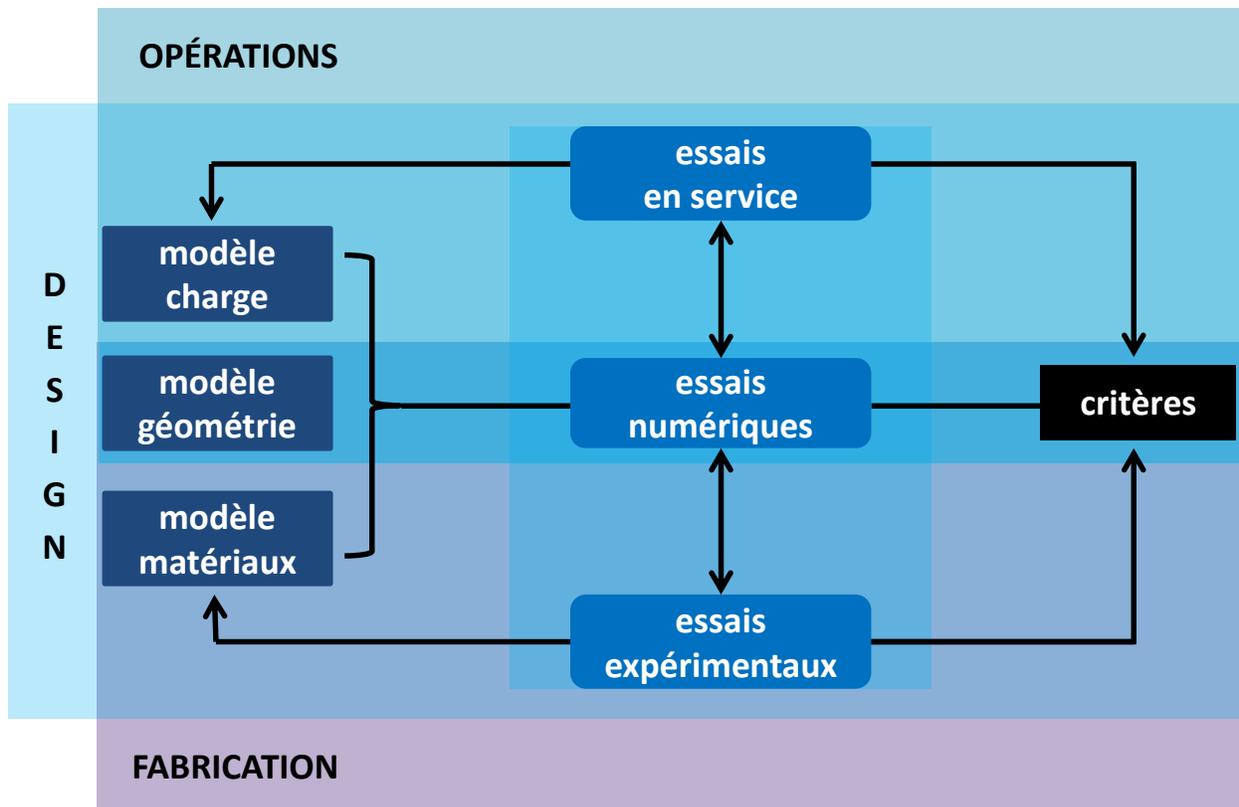


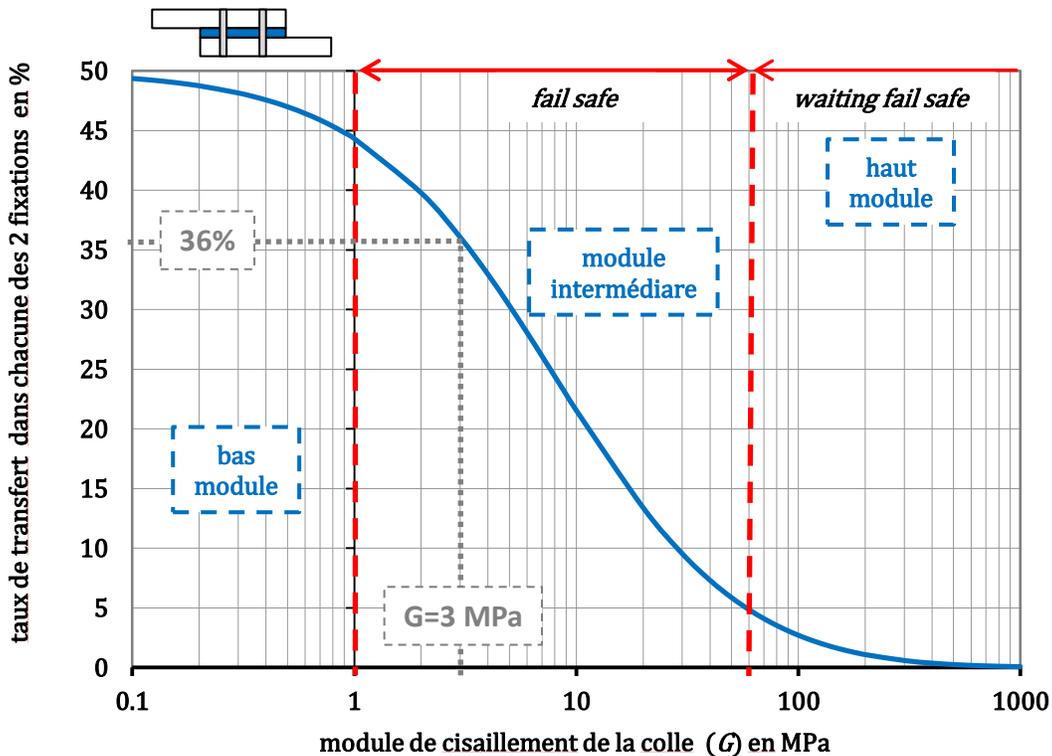
Figure 3 Contextualisation des activités de modélisation pour le dimensionnement.

Les performances des systèmes informatiques s’améliorent continuellement, conduisant en particulier à des réductions des temps de calcul. Pourtant les modélisations associées à des méthodes de résolution analytique ou semi-analytique restent toujours attractives. Dans la phase de pré-dimensionnement, des prises de décision rapides et au moindre coût sont souhaitées. De plus, les calculs itératifs (fiabilité, optimisation, non linéarité) convergeront plus rapidement si le temps calcul de chaque itération est réduit. Par contre, il pourrait être imaginé que l’amélioration des performances informatiques offre l’opportunité de choisir le niveau de précision du dimensionnement structural à réaliser.

Une première problématique induite porte alors sur **l’association du niveau de complexité de modélisation nécessaire à la représentation des phénomènes physiques observés**. En corollaire, une seconde problématique est de déterminer **des méthodes de résolution permettant d’intégrer le plus de complexité possible en termes de modélisation à moindre coût de calcul**. Mes activités de recherche visent à adresser ces deux problématiques, sur les technologies d’assemblage par boulonnage, par collage et hybride (boulonné /collé), notée HBC, pour application sur structure aéronautique.

## 1.4 Assemblages hybrides (boulonnés/collés)

Dans le cadre de la conception des structures, le choix des technologies d'assemblage est prépondérant puisque ces dernières sont garantes de l'intégrité du système fabriqué. Si la solution d'assemblage par boulonnage se présente comme la solution de confiance pour les concepteurs, il n'en reste pas moins qu'elle est peu performante mécaniquement en termes de ratio tenue sur masse. La technologie d'assemblage HBC peut être vue comme une solution d'amélioration de la performance mécanique des assemblages boulonnés par l'utilisation d'une colle judicieusement choisie pour un fonctionnement synergétique. Sur les avions civils de transport, le collage est utilisé depuis la fin de la seconde guerre mondiale [Higgins 2000]. Néanmoins, sur les structures dites primaires, dont la rupture conduit à la perte de l'appareil, le collage est accompagné de fixations mécaniques, afin de remplir les exigences certificatives concernant la tolérance aux dommages. Ces exigences certificatives sont exprimées seulement pour les avions civils légers (FAR/JAR 23.573) : démontrer la tenue à charge limite si la liaison est 100% décollée. Cette stratégie de conception est appelée *waiting fail safe*. Par conséquent, aujourd'hui sur avion un assemblage collé sur structure primaire est forcément HBC [CERTBOND 2019] et utilise des adhésifs structuraux. Cette stratégie *waiting fail safe* n'offre pas d'amélioration du ratio tenue sur masse sous sollicitation statique [Hart-Smith 1985], puisqu'un transfert total des efforts est assuré par la colle. Les efforts transférés par les fixations dans un assemblage HBC peuvent être estimés à l'aide d'une modélisation simplifiée associée à une résolution semi-analytique, présentée dans ma thèse de doctorat [Paroissien 2006]. A partir des prédictions de cette approche simplifiée, il est possible de définir une classe de colle dite à « haut module » pour laquelle les efforts sont transférés par la colle (Figure 4), correspondant donc à la stratégie de conception *waiting fail safe*. La classe de colle est dite à « module intermédiaire » permet de partager le transfert des efforts entre les fixations et la colle. Une conséquence fondamentale est qu'un chemin d'effort supplémentaire existe, correspondant alors à une stratégie de conception appelée *fail safe*. De plus, la possibilité de réduire le nombre de fixations donc la masse (et le coût) est offerte. Par exemple, pour une configuration matérielle et géométrique donnée [Paroissien 2006], le modèle analytique prédit un transfert de 36 % des efforts par chacune des deux fixations pour un module de cisaillement de la colle  $G=3$  MPa (Figure 4). Ce transfert de 36% correspondra à la charge reprise par les fixations externes d'une jonction boulonnée à trois fixations déduite de la configuration géométrique et matérielle de la jonction HBC à deux lignes de fixations.



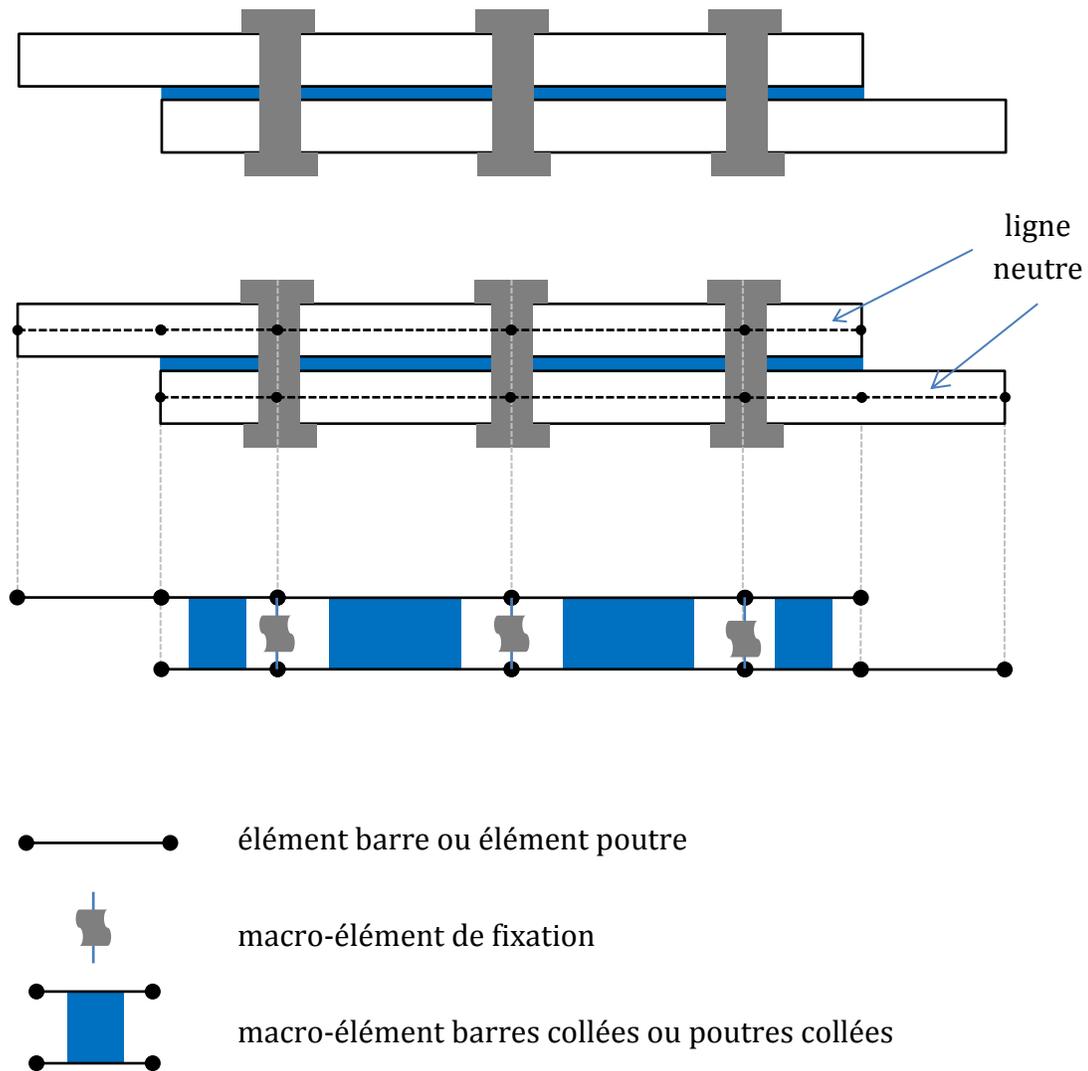
**Figure 4** Taux de transfert aux fixations en fonction du module de cisaillement de colle prédit par un modèle analytique pour un simple recouvrement HBC à 2 lignes de fixations et un paramétrage matériel et géométrique donnée.

En termes de tenue statique, des gains significatifs ont été obtenus en utilisant une colle polyuréthane, colle dite flexible [Kelly 2006], sur une configuration d'assemblage composite en simple cisaillement. Cette colle présente une raideur initiale importante ainsi que la capacité à se déformer, en accommodant les contraintes. Les colles flexibles peuvent être alors classées dans la catégorie des colles à module intermédiaire au sens d'Adams et Mallick [Adams et Mallick 1993]. Pour des applications aéronautiques, la tenue à la fatigue des assemblages boulonnés est en général dimensionnante et entraîne une multiplication des fixations mécaniques et/ou une augmentation des épaisseurs dans la zone d'assemblage. Ainsi, au regard de la tenue statique, l'assemblage boulonné peut être surdimensionné. En 1966, Hartman montre des gains significatifs en fatigue sur une jonction aluminium en simple cisaillement boulonnée, en remplaçant le mastic d'interposition par la colle époxy EC2216 [Hartman 1966]; cette colle possède la propriété de pouvoir se déformer largement. En 2006, Kelly montre aussi des gains en fatigue avec la même colle flexible polyuréthane utilisée en statique entre l'assemblage HBC et son équivalent purement collé [Kelly 2006]. En 2006, sur une configuration double cisaillement aluminium, il est montré qu'en utilisant la colle polyuréthane de Kelly à la place du mastic d'interposition, une réduction d'un tiers du nombre de fixations est envisageable tout en augmentant significativement la tenue en fatigue [Paoissien 2006]. Le gain en fatigue

obtenu avec deux fixations au lieu de trois et la colle au lieu du mastic est mesuré, à  $1.10^5$  cycles, égal à 20% en termes de contrainte (rapport de charge de 0,1). La présence de la colle permet de décharger les fixations et par suite de réduire les surcontraintes en bord de trou, sensible à la fatigue. De nombreuses autres publications démontrent l'intérêt mécanique des assemblages HBC, comme par exemple [Kweon *et al.* 2006] [Bodjona *et al.* 2015] [Choi *et al.* 2017] [Lim *et al.* 2018].

Une conclusion de ma thèse de doctorat est que pour une conception *fail safe* ou synergétique, le choix judicieux de colle s'oriente vers des colles à module intermédiaire. Par ailleurs, dans cette thèse de doctorat, des modélisations simplifiées à résolution semi-analytique du comportement statique d'assemblages HBC en simple cisaillement pour un nombre quelconque de fixations sont présentées. La première modélisation s'inscrit dans le cadre d'une cinématique de barre ; elle découle des travaux d'Arnovljevic ou de Volkersen et de la NACA (section 1.1). Les éléments structuraux sont modélisés comme des barres linéaires élastiques, les fixations comme des ressorts de cisaillement reliant les interfaces et la couche de colle comme une fondation élastique à un paramètre (cisaillement). Les paramètres géométriques et matériaux sont quelconques. A partir des équations d'équilibre local et les relations constitutives, deux méthodes de résolution semi-analytique sont présentées. La première consiste à intégrer directement les équations. Des constantes d'intégration apparaissent et les conditions aux limites sont écrites. L'inversion d'un système linéaire fournit la solution. De plus, un schéma de résolution élémentaire est mis en place pour considérer un comportement de colle élasto-plastique parfait et bilinéaire entre le bord du recouvrement et les fixations externes, zone de surcontrainte adhésive. Bois *et al.* utilisent alors ce modèle et cette méthode de résolution pour la prédiction de la tenue statique d'un assemblage HBC en double cisaillement symétrique à une fixation [Bois *et al.* 2013]. La deuxième méthode de résolution est basée sur la modélisation par macro-élément (ME). Cette approche pour l'analyse des assemblages comportant des recouvrements collés (Figure 5) est née dans l'esprit de mon directeur de thèse, Marc Sartor (Professeur des Universités, retraité de l'INSA Toulouse). Depuis, cette modélisation par ME est au cœur de mes activités de recherche et est présentée en détail dans la section 2.2.3 de ce mémoire. Elle permet d'apporter une solution à la modélisation dans une cinématique de poutre de l'assemblage HBC en simple recouvrement pour un nombre quelconque de fixations. Dans le cadre de ma thèse de doctorat, la modélisation se limite à considérer que les deux éléments structuraux sont deux poutres identiques, isotropes linéaires élastiques selon le modèle d'Euler-Bernoulli. Une nouvelle modélisation de la fixation – ME de fixation – est proposée et permet d'étendre l'approche de Ross à la cinématique de poutre. La couche de colle est représentée par une fondation élastique à deux paramètres (cisaillement et pelage), telle que modélisée pour la première fois par Goland et Reissner en 1944 [Goland et Reissner 1944]. En plus d'être présentées dans ma thèse de doctorat, ces modélisations et résolutions associées sont publiées dans [Paroissien

*et al.* 2006a] [Paroissien *et al.* 2006b] [Paroissien *et al.* 2007a] [Paroissien *et al.* 2007b]. Enfin, cette même idée de ME pour représenter le comportement mécanique des recouvrements collés est développée de manière indépendante et au même moment à l'Université du Michigan [Gustafson et Waas 2007] [Gustafson 2008] [Gustafsson et Wass 2009a].



**Figure 5** Principe de modélisation par macro-élément d'un assemblage hybride (boulonné / collé) en simple cisaillement.

## 2 Synthèse des activités de recherche

### 2.1 HBB Joints et JoSAT

A la suite de mon doctorat, ma période professionnelle industrielle a débuté. J'ai eu l'opportunité de continuer à travailler sur la poursuite de mon sujet de thèse, à quasi temps plein, de 2007 à 2014, en tant qu'ingénieur de recherche sous la direction de Denis Campassens (Ingénieur, AIRBUS Toulouse). J'étais embauché par SOGETI High Tech (CAPGEMINI) et je travaillais en assistance technique puis au forfait pour AIRBUS sur le projet intitulé HBB Joints pour *Hybrid (Bolted / Bonded) Joints*.

Sur ce projet, une unique publication a été réalisée [Paroissien et Campassens 2011]. Il s'agissait d'une présentation au quatorzième séminaire annuel d'HUTCHINSON sur la simulation numérique, dont la diffusion a été restreinte. Ce mémoire ne peut donc pas divulguer les contenus techniques et scientifiques liés au projet HBB Joints. La description qui suit se bornera au contenu publié par ailleurs et tirera avantage en particulier des publications relatives au projet « MP32 : *Conception et assemblage multi-matériaux par collage* » [Ramière et al. 2010] [Leroy 2011]. Le projet MP32, débuté en 2007 pour trois ans, sous financement Région Pays-de-Loire et DGCIS, était mené par le CETIM et concernait les assemblages multimatériaux par collage. Le cas d'application des assemblages HBC était alors proposé par AIRBUS. Par conséquent, mes travaux sur le projet HBB Joints durant la période 2008-2010 ont été réalisés en lien étroit avec MP32.

Bien que la description qui suit reste techniquement et scientifiquement limitée, je pense qu'elle est nécessaire pour éclairer la construction de mes activités d'enseignement et de recherches. De plus, elle vise montrer la continuité de mes activités de recherche pendant ma période professionnelle industrielle.

Le projet HBB Joints visait à appliquer la technologie d'assemblage HBC sur avion dans le but de réduire le nombre de fixations. Les structures de fuselage métallique étaient visées, en particulier les éclisses de cadre et les jonctions longitudinales de fuselage. Dans un premier temps, le projet a été structuré afin de pouvoir prendre en compte l'ensemble des exigences. Il a alors été identifié que les quatre aspects suivant devaient être considérés en parallèle : (i) matériaux et procédés, (ii) analyse mécanique, (iii) fabrication et (iv) contrôle. Les aspects fabrication et contrôle était traités par l'usine d'AIRBUS à Saint-Nazaire, partie prenante de MP32. Mon activité sur ces aspects consistaient à (i) bien comprendre comment les assemblages étaient réalisés en production ainsi qu'à (ii) réaliser une revue bibliographique puis une veille technologique sur les moyens de contrôle non destructifs du collage. Concernant l'analyse mécanique, une partie du travail avait déjà été amorcée pendant mes travaux de thèse de doctorat. L'effort a alors porté sur le développement de modèles EF d'assemblage HBC, en lien avec l'aspect matériaux et procédés.

L'aspect matériaux et procédés consistait à déterminer des colles compatibles avec les exigences bureau d'étude et des usines tout en permettant un fonctionnement mécanique synergétique de l'assemblage HBC tel qu'identifié dans ma thèse de doctorat (section 1.4). Pour l'application éclipse de cadre, des colles de type polyuréthane et méthacrylate ont été identifiées. Comme l'application jonctions longitudinales de fuselage imposait des temps très longs de manipulation, la recherche de colle s'est orientée vers des mastics structuraux sur une chimie polysulfure avec addition de noir de carbone.

La formulation des mastics structuraux était réalisée par LE JOINT FRANÇAIS en collaboration avec le Centre de Recherches d'HUTCHINSON à Chalette-sur-Loing (45). J'ai alors été amené à concevoir des matrices d'essais expérimentaux élémentaires et technologiques, afin d'identifier les comportements de ces mastics structuraux et d'évaluer leur effet sur la tenue statique et en fatigue des assemblages HBC. Je n'étais pas autorisé à réaliser les essais expérimentaux. Par contre, j'avais pour mission d'assister et de suivre au plus près la fabrication des éprouvettes, la mise au point des outillages et la réalisation des essais expérimentaux sur les éprouvettes technologiques. La plupart des essais élémentaires sur mastic a été réalisée par le LRCCP à Vitry-sur-Seine (94).

En parallèle, à l'aide du logiciel de calcul EF SAMCEF (édité par SAMTECH, maintenant SIEMENS), j'ai développé des modélisations EF raffinées des éprouvettes technologiques dans le but de comprendre les comportements physiques observés et d'aiguiller la formulation chimique. L'objet de la présentation réalisée en 2011 au séminaire d'HUTCHINSON était alors d'illustrer l'usage de la simulation numérique comme support à la formulation des mastics structuraux [Paroissien et Campassens 2011]. Les mastics structuraux sont des matériaux élastomériques, associés à des comportements complexes tels que visco-hyper-élastiques quasi-incompressibles, auxquels je me suis initié. De plus, dans l'assemblage, ces matériaux sont confinés car utilisés en fine couche, d'épaisseur variable sur la surface recouverte et directement dépendante du serrage des fixations. En termes de modélisation, le traitement numérique de cette couche confinée de matériau hyper-élastique quasi-incompressible a contribué à conduire SAMTECH à apporter une nouvelle fonctionnalité à son code (paramètre BULK 2, linéarisation du potentiel volumique). Enfin, la considération des colles de chimie polyuréthane ou métacrylate n'a pas induit des développements aussi poussés en termes de caractérisation matériaux. En effet, l'idée n'était pas de développer un nouveau produit mais d'utiliser des références commerciales existantes, afin de les évaluer expérimentalement sur éprouvette technologique directement. Ainsi, des lois élasto-plastiques simples ont été considérées pour la couche de colle dans les modèles EF raffinés.

Pour le développement des modèles EF raffinés, j'ai bénéficié de l'aide de Cat-Tan Hoang-Ngoc, qui, en 2008, réalisait son stage de fin études d'Ingénieur ENSMA [Hoang-Ngoc 2008], dans le cadre du projet de recherche interne à SOGETI High Tech baptisé JoSAT pour *Joint Stress Analysis Tool*. Cat-Tan Hoang-Ngoc a été le premier stagiaire que j'ai encadré. Il

a réalisé un travail lui permettant de publier un article dans International Journal of Adhesion and Adhesives [Hoang-Ngoc et Paroissien 2010]. En 2008, j'ai créé le projet de recherche JoSAT, que j'ai développé et dirigé jusqu'en 2016, en parallèle de mes autres activités. Ce projet a été éligible au Crédit d'Impôts Recherche à partir de 2009 et couvrait près de trois mille jours de charge en 2015 – soit environ quinze équivalents temps plein. Ce projet a permis la signature d'une convention avec l'ISAE, dans le cadre de laquelle la thèse de doctorat, sous convention CIFRE, de Guillaume Lélias s'est déroulée [Lélias 2016]. J'ai encadré ou co-encadré un total de vingt-trois stages M1 ou M2 (section 6.6.6), dont neuf étaient des stages de fin d'études d'Ingénieur (ENSEIRB-)MATMECA. Cette relation privilégiée a contribué à l'obtention d'un poste de Professeur Associé à Mi-Temps (PAST) à l'ENSEIRB-MATMECA, Département Mathématique et Mécanique sous la direction d'Éric Martin (Professeur des Universités, Université de Bordeaux). Ce poste de PAST a sans aucun doute joué un rôle bénéfique dans mon recrutement en 2016 en tant qu'enseignant-chercheur à l'ISAE-SUPAERO.

En termes d'activités scientifiques, JoSAT m'a permis de continuer à développer la modélisation par ME et le champ d'application de la thèse de doctorat (section 1.4). En particulier, les travaux de stage de fin d'études d'Ingénieur (ENSEIRB-)MATMECA d'Anthony Da Veiga [Da Veiga 2009] et de Sébastien Schwartz [Schwartz 2013], ainsi que la thèse de doctorat de Guillaume Lélias [Lélias 2016] représentent des contributions décisives. De plus, Anthony Da Veiga, Sébastien Schwartz et Guillaume Lélias ont contribué à l'animation et l'encadrement de JoSAT. L'encadrement direct du projet a été réalisé par Anthony Da Veiga entre 2014 et 2016 et par Sébastien Schwartz entre 2014 et 2019. Enfin, JoSAT m'a aussi permis de poursuivre, dans la mesure du possible, une activité de publication scientifique : un total de dix communications scientifiques dont six ACL, référencées en section 6.5.2 respectivement [12-21,30] et [15-19,30].

La section 2.2 de ce mémoire présente des résolutions purement analytiques, rendues possibles grâce à un cadre d'analyse 1D en cinématique de barre. L'objectif de ces approches analytiques est de fournir des résultats pour une évaluation rapide en prédimensionnement, tout en essayant de se rapprocher de la réalité physique. Cette section permet aussi d'introduire la démarche et les équations de base qui seront utilisées dans le cadre de la poursuite du développement de la modélisation par ME présentée en section 2.3. En section 2.4, ces modélisations par ME seront complexifiées grâce en particulier au développement de nouvelles méthodologies de formulation et l'usage d'algorithmes de calcul itératif. Enfin, trois applications au comportement et à la tenue des assemblages seront présentées, sur la base essentiellement des travaux de doctorants (Guillaume Lélias, Agathe Jaillon, Benoit Montagne et Thiago Birro) en section 2.5.

Dans la suite de ce mémoire, le terme de **substrat** sera employé pour désigner un élément structural assemblé, même si le collage n'est pas utilisé.

## 2.2 Principes fondamentaux de résolution illustrés sur la cinématique de barre

### 2.2.1 Raideur d'un assemblage collé en simple recouvrement

#### Introduction

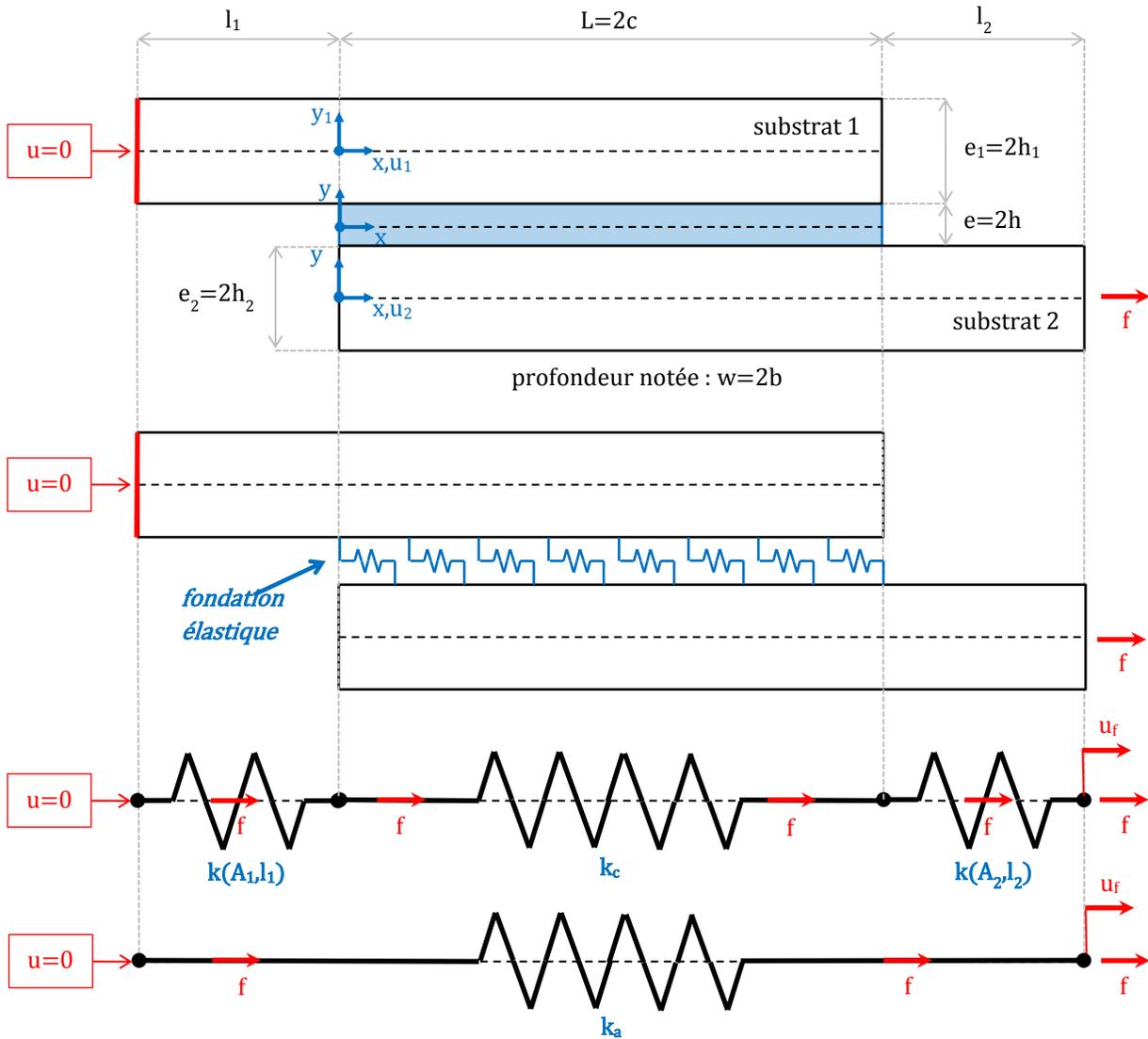
L'analyse du comportement mécanique d'un élément structural peut être réalisée à différentes échelles. Le comportement global correspond à la relation entre efforts appliqués et déplacements de leurs points d'application, ce qui permet de déterminer leur travail. Pour un comportement linéaire élastique et en régime quasi-statique, le travail des efforts appliqués est stocké dans la structure sous forme d'énergie de déformation élastique et les relations linéaires entre efforts et déplacements sont les raideurs.

La structure considérée ici est un assemblage collé en simple recouvrement. Cet assemblage est encastré à une extrémité, tandis qu'à l'autre extrémité il est chargé par un effort de traction  $f$ ; la translation dans la direction de l'effort, dite direction longitudinale, est le seul degré de liberté autorisé à cette extrémité. Sous l'effort  $f$ , l'assemblage s'allonge d'une longueur totale  $u_f$ . Afin d'approximer la raideur de l'assemblage, autrement dit le rapport entre  $f$  et  $u_f$ , un cadre d'analyse 1D – dépendance à la variable  $x$  uniquement – est choisi. Puisque les déplacements hors plan sont négligés, une modélisation de l'assemblage consiste à le représenter par l'association de trois ressorts en série, dont il s'agit d'exprimer chacune des trois raideurs. Le paramétrage utilisé ainsi que la représentation de l'assemblage sont illustrés dans la [Figure 6](#). L'énergie de déformation élastique  $W_{int}$  stockée dans la jonction s'écrit à partir de l'effort appliqué  $f$ , du déplacement de son point d'application  $u_f$  et de la raideur  $k_a$  de l'assemblage selon :

$$\text{Eq. 1 } W_{int} = \frac{1}{2} k_a u_f^2$$

Une évolution non-linéaire de la raideur de l'assemblage peut être l'expression de l'évolution des propriétés matériaux (régime non linéaire, endommagement, fissuration). Owens et Lee-Sullivan développent un modèle de prédiction de la raideur des assemblages collés en simple cisaillement dans le but de suivre du décollement de l'interface [[Owens et Lee-Sullivan 2000](#)]. Ce modèle s'inspire du modèle de la NACA [[Tate et Rosenfeld 1946](#)] [[Ross 1946](#)] [[Rosenfeld 1947](#)] pour la détermination des taux de transfert aux fixations. En effet, il considère le recouvrement collé comme un assemblage d'une série de cellules élémentaires, chacune d'entre elles composée par deux ressorts de traction pour les substrats et de deux ressorts de cisaillement pour la colle. Le déplacement relatif de chacune de ces cellules élémentaires est évalué au travers de l'analyse simplifiée d'Adams et Peppiatt [[Adams et Peppiatt 1973](#)] [[Adams et Peppiatt 1974](#)]. L'allongement total peut alors être obtenu en sommant les allongements de chacune des cellules élémentaires. Aucune formule analytique n'est pourtant fournie. En 2004, Xiao *et al.* fournissent une formule analytique de la raideur d'un assemblage en double recouvrement collé en supposant une déformation de cisaillement constante le long du recouvrement collé [[Xiao et](#)

al. 2004]. La déformabilité des substrats sur le recouvrement apparaît alors comme négligée dans cette formulation. En 2018, Li *et al.* déterminent une formule analytique de la raideur d'un assemblage collé quadruple recouvrement en prenant en compte la déformabilité des substrats et de la colle [Li *et al.* 2018], basée sur la modélisation d'Arnovljevic ou de Volkersen [Arnovljevic 1909] [Volkersen 1938].



**Figure 6** Paramétrage d'un assemblage collé en simple recouvrement soumis à un effort de traction, modélisation de la couche de colle par une fondation élastique et modélisation associée de type ressort. La raideur du recouvrement collé est  $k_c$ . La raideur de l'assemblage est  $k_a$ . Les raideurs de la barre  $i$  hors recouvrement est  $k(A_i, l_i)$ , où  $A_i$  est la raideur de membrane.

Le premier objectif de cette section est de fournir une expression analytique de la raideur d'un assemblage collé en simple recouvrement dans une cinématique de barre, représenté par un assemblage de trois ressorts. Le cadre et les objectifs d'analyse sont donc similaires à ceux de [Li *et al.* 2018]. Néanmoins, la résolution présentée ci-après est propre à ce mémoire. Les solutions finales fournies ne sont pas données dans la littérature à ma connaissance : les développements ci-après n'ont pas fait l'objet de communication scientifique. Le second objectif de cette section est d'introduire les principes de modélisation et de résolution qui seront utilisés et complexifiés par la suite.

### Hypothèses et équations gouvernant le modèle

Les hypothèses simplificatrices utilisées découlent des travaux d'Arnovljevic ou de Volkersen [Arnovljevic 1909] [Volkersen 1938] :

- **H1-1** : cadre des hypothèses des petites perturbations sous charge quasi-statique;
- **H1-2** : les matériaux sont homogènes linéaires élastiques ;
- **H1-3** : les substrats sont modélisés comme des barres ;
- **H1-4** : la colle est modélisée par une fondation élastique homogène à un paramètre, associé au cisaillement reliant les deux interfaces ;
- **H1-5** : les paramètres géométriques sont quelconques mais constants.

Cette modélisation implique alors que toutes les composantes des tenseurs des contraintes respectifs sont négligées devant (i) la contrainte normale pour les substrats et (ii) la contrainte de cisaillement pour la couche de colle. De plus, la contrainte de cisaillement dans la colle est constante dans l'épaisseur de colle.

Les équations d'équilibre local de chacun des deux substrats sont obtenues, en isolant entre  $x$  et  $x+dx$  un volume élémentaire. Chaque volume élémentaire de substrat  $i$  est soumis aux efforts normaux  $N_i$  ainsi que, par réaction, aux contraintes de cisaillement dans la colle  $T$  sur la surface d'aire  $2b dx$ , où  $b$  est la demi-profondeur de recouvrement. L'équilibre de chaque volume élémentaire s'écrit donc (Figure 7) :

$$\text{Eq. 2} \quad N_i(x + dx) - N_i(x) = (-1)^i 2b \int_x^{x+dx} T(s) ds \quad i = 1, 2$$

En notant  $P_T$  une primitive de  $T$ , la contribution des contrainte de cisaillement devient :

$$\text{Eq. 3} \quad (-1)^i 2b \int_x^{x+dx} T(s) ds = (-1)^i 2b [P_T(s)]_x^{x+dx} = (-1)^i 2b [P_T(x + dx) - P_T(x)]$$

Les équations d'équilibre local de chacun des deux substrats s'obtiennent en réalisant un développement de Taylor à l'ordre 1 de  $N_i$  et de  $P_T$ . Soit :

$$\text{Eq. 4} \quad \frac{dN_i}{dx} = (-1)^i 2b T \quad i = 1, 2$$

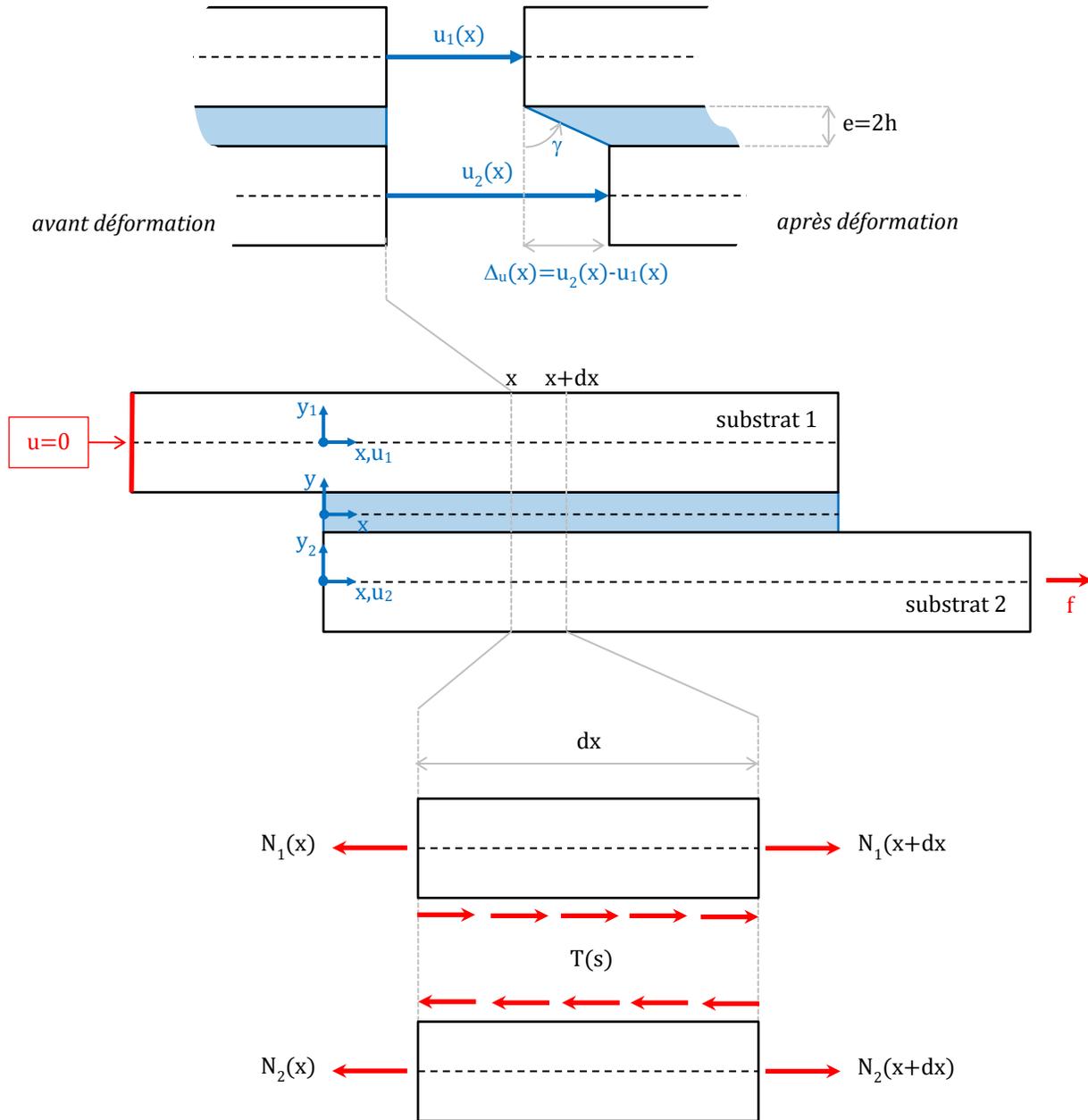


Figure 7 Cinématique et équilibre local.

La modélisation des substrats comme des barres linéaires élastiques implique que la déformation transverse des substrats est négligée. De plus, ils sont homogènes. Les relations constitutives de chacun des deux substrats sont donc les suivantes :

$$\text{Eq. 5} \quad N_i = A_i \frac{du_i}{dx} \Leftrightarrow \frac{du_i}{dx} = \frac{N_i}{A_i} \quad i = 1, 2$$

où, pour le substrat  $i$ ,  $u_i$  est le déplacement longitudinal de la ligne neutre,  $A_i = 2be_iE_i$  est la raideur de membrane,  $e_i$  l'épaisseur et  $E_i$  le module d'Young.

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, les déformations sont supposées petites. Par conséquent, la déformation de cisaillement  $\gamma$  dans la colle induite par la cinématique supposée (Figure 7) s'écrit :

$$\text{Eq. 6} \quad \gamma \simeq \tan \gamma = \frac{u_2 - u_1}{e}$$

La relation constitutive pour la colle s'écrit donc :

$$\text{Eq. 7} \quad T = G \frac{u_2 - u_1}{e} = \frac{G}{e} \Delta_u$$

où  $\Delta_u$  est le déplacement longitudinal relatif des deux interfaces. Ainsi, la modélisation est régie par quatre équations différentielles d'ordre 1 (Eq. 4, Eq. 5) couplées par la relation constitutive pour la colle (Eq. 7). Les quatre fonctions de  $x$  inconnues du problème sont  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $N_1$  et  $N_2$ .

### Résolution des équations différentielles

Les équations constitutives des substrats (Eq. 5) sont dérivées une fois :

$$\text{Eq. 8} \quad \frac{du_i}{dx} = \frac{N_i}{A_i} \Rightarrow \frac{d^2 u_i}{dx^2} = \frac{1}{A_i} \frac{dN_i}{dx} \quad i = 1, 2$$

L'utilisation des équations d'équilibre local (Eq. 4) et de l'équation constitutive de la colle (Eq. 7) permet l'écriture d'un système d'équations différentielles couplées en les déplacements longitudinaux des substrats. Ce système s'écrit :

$$\text{Eq. 9} \quad \begin{cases} \frac{d^2 u_1}{dx^2} = \frac{-1}{e_1 E_1} \frac{G}{e} \Delta_u \\ \frac{d^2 u_2}{dx^2} = \frac{1}{e_2 E_2} \frac{G}{e} \Delta_u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d^2 \Delta_u}{dx^2} = \frac{G}{e} \left( \frac{1}{e_1 E_1} + \frac{1}{e_2 E_2} \right) \Delta_u = \eta^2 \Delta_u \\ \frac{d^2 \Sigma_u}{dx^2} = -\frac{G}{e} \left( \frac{1}{e_1 E_1} - \frac{1}{e_2 E_2} \right) \Delta_u = -\chi \eta^2 \Delta_u = -\chi \frac{d^2 \Delta_u}{dx^2} \end{cases}$$

avec :

$$\text{Eq. 10} \quad \begin{pmatrix} \Sigma_u \\ \Delta_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_u \\ \Delta_u \end{pmatrix}$$

$$\text{Eq. 11} \quad \eta^2 = \frac{G}{e} \left( \frac{1}{e_1 E_1} + \frac{1}{e_2 E_2} \right) = \frac{G}{e} \frac{1 + \xi}{e_2 E_2}$$

$$\text{Eq. 12} \quad \chi = \frac{\frac{1}{e_1 E_1} - \frac{1}{e_2 E_2}}{\frac{1}{e_1 E_1} + \frac{1}{e_2 E_2}} = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}$$

$$\text{Eq. 13} \quad \xi = \frac{e_2 E_2}{e_1 E_1}$$

Le paramètre  $\eta$  s'exprime en  $\text{mm}^{-1}$  et gouverne la solution de la modélisation. Les paramètres  $\chi$  et  $\xi$  sont sans unité et sont relatifs à la dissymétrie éventuelle des substrats en termes de raideur. Si les deux substrats sont identiques alors  $\chi=0$  et  $\xi=1$ . La résolution du système d'équations différentielles données en Eq. 9 permet alors d'obtenir les déplacements longitudinaux avec Eq. 10. Soit :

$$\text{Eq. 14 } \begin{pmatrix} \Sigma_u \\ \Delta_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & x & -\chi e^{-\eta x} & -\chi e^{\eta x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & e^{-\eta x} & e^{\eta x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eq. 15 } \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & x & -(1+\chi)e^{-\eta x} & -(1+\chi)e^{\eta x} \\ \mathbf{1} & x & (1-\chi)e^{-\eta x} & (1-\chi)e^{\eta x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

où les  $c_i$  sont quatre constantes d'intégration. La contrainte de cisaillement dans la couche de colle s'écrit alors :

$$\text{Eq. 16 } T = \frac{G}{e} \Delta_u \Rightarrow T = \frac{G}{e} (c_3 e^{-\eta x} + c_4 e^{\eta x})$$

Les efforts normaux des substrats sont déduits des relations constitutives (Eq. 5) et sont alors donnés par :

$$\text{Eq. 17 } \begin{pmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A_1 & \eta(1+\chi)A_1 e^{-\eta x} & -\eta(1+\chi)A_1 e^{\eta x} \\ \mathbf{0} & A_2 & -\eta(1-\chi)A_2 e^{-\eta x} & \eta(1-\chi)A_2 e^{\eta x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

L'équation de l'équilibre local du substrat 2 (Eq. 4) est dérivée une fois :

$$\text{Eq. 18 } \frac{dN_2}{dx} = 2bT = 2b \frac{G}{e} \Delta_u \Rightarrow \frac{d^2 N_2}{dx^2} = 2b \frac{G}{e} \left( \frac{du_2}{dx} - \frac{du_1}{dx} \right)$$

Les relations constitutives des substrats (Eq. 5) permettent alors d'écrire :

$$\text{Eq. 19 } \frac{d^2 N_2}{dx^2} = \frac{G}{e} \left( \frac{1}{e_2 E_2} N_2 - \frac{1}{e_1 E_1} N_1 \right)$$

Comme les contraintes normales dans la couche de colle sont négligées, l'équilibre global de l'assemblage permet de lier  $N_1$  et  $N_2$  selon relation :

$$\text{Eq. 20 } N_1 + N_2 = f$$

Ainsi, une équation différentielle du second ordre en  $N_2$  apparaît :

$$\text{Eq. 21 } \frac{d^2 N_2}{dx^2} - \eta^2 N_2 = -\frac{G}{e} \frac{1}{e_1 E_1} f = -\eta^2 \frac{1+\chi}{2} f$$

La forme de solution pour  $N_2$  est alors :

$$\text{Eq. 22 } N_2 = c_5 e^{-\eta x} + c_6 e^{\eta x} + \frac{1+\chi}{2} f$$

Les conditions aux limites en  $x=0$  et  $x=2c$  fournissent les valeurs des constantes d'intégration  $c_5$  et  $c_6$ .

$$\text{Eq. 23 } \begin{cases} N_2(0) = 0 \\ N_2(2c) = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_5 = -\frac{(1-\chi)+(1+\chi)e^{\eta 2c}}{4 \sinh \eta 2c} f \\ c_6 = \frac{(1-\chi)+(1+\chi)e^{-\eta 2c}}{4 \sinh \eta 2c} f \end{cases}$$

Or, l'identification de la forme de  $N_2$  donnée en Eq. 17, conduit à exprimer les constantes  $c_2$ ,  $c_3$  et  $c_4$  :

$$\text{Eq. 24} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} A_2 c_2 = \frac{1+\chi}{2} f \\ -\eta(1-\chi) A_2 c_3 = c_5 = -\frac{(1-\chi)+(1+\chi)e^{\eta 2c}}{4 \sinh \eta 2c} f \\ \eta(1-\chi) A_2 c_4 = c_6 = \frac{(1-\chi)+(1+\chi)e^{-\eta 2c}}{4 \sinh \eta 2c} f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = (1+\chi) \frac{f}{A_2} \\ c_3 = \frac{1}{\eta} \frac{1+\frac{1+\chi}{1-\chi} e^{\eta 2c}}{4 \sinh \eta 2c} \frac{f}{A_2} = \frac{1}{\eta} \frac{1+\xi e^{\eta 2c}}{4 \sinh \eta 2c} \frac{f}{A_2} \\ c_4 = \frac{1}{\eta} \frac{1+\frac{1+\chi}{1-\chi} e^{-\eta 2c}}{4 \sinh \eta 2c} \frac{f}{A_2} = \frac{1}{\eta} \frac{1+\xi e^{-\eta 2c}}{4 \sinh \eta 2c} \frac{f}{A_2} \end{cases}$$

Les solutions en termes de contraintes de cisaillement et d'effort normal sont complètement définies. Par contre, les déplacements longitudinaux sont définis à la constante  $c_1$  près.

### Expression des raideurs dans la modélisation de type ressort

La raideur du ressort associée à une barre de raideur membrane  $A$  et une longueur  $\Delta$  est donnée par :

$$\text{Eq. 25} \quad k(A, \Delta) = \frac{A}{\Delta}$$

Les substrats hors recouvrement sont des barres de longueur  $l_i$  et de raideur de membrane  $A_i$  ont donc pour raideur  $k(A_i, l_i)$ . En particulier, puisque le substrat est encastré à son extrémité, le déplacement en  $x=0$  du substrat vaut sous la charge  $f$ :

$$\text{Eq. 26} \quad u_1(0) = \frac{f}{k(A_1, l_1)}$$

Cette condition permet alors de déterminer  $c_1$  et par suite les expressions complètes des déplacements longitudinaux.

De plus, l'allongement total du substrat hors recouvrement s'exprime de la même manière :

$$\text{Eq. 27} \quad u_f - u_2(2c) = \frac{f}{k(A_2, l_2)}$$

Par ailleurs, d'après l'équation Eq. 15, les expressions suivantes sont établies :

$$\text{Eq. 28} \quad u_2(2c) = \frac{1}{2} [c_1 + 2c c_2 + (1-\chi)e^{-\eta 2c} c_3 - (1+\chi)e^{-\eta 2c} c_4]$$

$$\text{Eq. 29} \quad u_1(0) = \frac{1}{2} [c_1 - (1+\chi)(c_3 + c_4)]$$

Ainsi, le déplacement relatif horizontal du recouvrement s'exprime par :

$$\text{Eq. 30} \quad u_2(2c) - u_1(0) = \frac{2\xi}{1+\xi} \frac{1}{A_2} \frac{1}{\eta} \left[ \eta c + \frac{1}{2} \frac{2+\frac{1+\xi^2}{\xi} \cosh \eta 2c}{2 \sinh \eta 2c} \right] f = \frac{f}{k_c}$$

La raideur du ressort  $k_c$  représentant le recouvrement collé est alors déduite sous la forme suivante :

$$\text{Eq. 31 } k_c = \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2 + \frac{1+\xi^2}{\xi} \cosh 2\omega}{2\omega \sinh 2\omega} \right)\right]} \frac{1+\xi}{\xi} \frac{A_2}{2c} = \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2 + \frac{1+\xi^2}{\xi} \cosh 2\omega}{2\omega \sinh 2\omega} \right)\right]} \frac{1+\xi}{\xi} k(A_2, 2c)$$

où :

$$\text{Eq. 32 } \omega = \eta c = \frac{\sqrt{\frac{G2bc}{e}}}{\sqrt{\frac{1}{1+\xi} \frac{E_2 2be_2}{c}}}$$

Ce paramètre  $\omega$  est donc construit à partir d'un terme représentant une raideur liée au cisaillement de la colle et d'un terme lié à l'extension des substrats. Pour un paramétrage géométrique fixé,  $\omega$  grand signifie que le déplacement relatif des deux substrats induit par la souplesse de la colle devient petit. Enfin, la raideur de l'assemblage  $k_a$  est donnée par :

$$\text{Eq. 33 } k_a = \frac{1}{\frac{1}{k(A_1, l_1)} + \left[1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2 + \frac{1+\xi^2}{\xi} \cosh \omega}{2\omega \sinh \omega} \right)\right] \frac{1}{\frac{1+\xi}{\xi} k(A_2, 2c)} + \frac{1}{k(A_2, l_2)}}$$

### Cas où les deux substrats sont identiques

Le cas simple où les deux substrats sont les mêmes est considéré. Si les deux substrats sont identiques alors  $A_1=A_2=A_s$  et  $\xi=1$ . L'expression de  $k_c$  devient alors :

$$\text{Eq. 34 } k_r = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\omega \tanh \omega}} 2k(A_s, 2c) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\omega \tanh \omega}} k(2A_s, 2c)$$

Comme les deux substrats sont identiques, le terme  $2k(A_s, 2c) = k(A_2, 2c) + k(A_1, 2c) = k(2A_s, 2c)$  représente la raideur d'un ressort représentatif de la raideur des deux substrats le long du recouvrement sans aucune souplesse introduite entre eux. Le rapport  $\kappa(\omega) = k_c / k(2A_s, 2c)$  est tracé en fonction de  $\omega$  dans la [Figure 8](#). Le rapport  $\kappa(\omega)$  est strictement croissant avec  $\omega$ . Il est compris entre 0 et 1. Il tend asymptotiquement vers 0 quand  $\omega$  tend vers 0 et vers 1 quand  $\omega$  tend vers l'infini. Autrement dit : (i) plus la différence – portée par  $\omega$  – entre les raideurs de cisaillement de la colle et d'extension des substrats est importante, moins le recouvrement collé est raide et (ii) plus les raideurs de cisaillement de la colle et d'extension des substrats sont proches, moins la souplesse de colle est visible sur la raideur du recouvrement. Ces observations sont naturellement en accord avec la physique. Pour un substrat donné, plus la colle est raide moins le déplacement relatif entre les substrats sera important et plus le recouvrement sera raide.

Par ailleurs, comme la raideur du recouvrement est directement dépendante du module de cisaillement de la colle, il pourrait être envisagé de l'identifier expérimentalement en mesurant la raideur du recouvrement (effort appliqué et déplacement relatif du recouvrement). Pour l'exemple, une configuration d'assemblage de substrat en aluminium est choisie telle que  $E_1=E_2=70$  GPa,  $e=0,2$  mm,  $e_1=e_2=2$  mm et

$2c=4b=60$  mm. Trois valeurs du module de cisaillement de la colle sont choisies pour représenter différents types du matériau colle :  $G=1$  MPa pour une colle à bas module,  $G=0.1$  GPa pour une colle à module intermédiaire et  $G=1$  GPa pour une colle à haut module. Il apparaît (Figure 8) que pour la colle à haut module le rapport  $\kappa(\omega)$  vaut 0,94 soit 1,13 fois celui de la colle à module intermédiaire qui a un module de cisaillement 10 fois inférieur. Par conséquent, il peut être difficile de distinguer, sur la base d'une mesure expérimentale de la raideur du recouvrement, deux colles différentes mais de même type, d'autant plus que les modules tendent à être élevés. Cela est d'autant plus difficile si la mesure expérimentale s'appuie sur la raideur totale l'assemblage, la proportion relative de colle étant encore amoindrie. Si les deux substrats sont identiques alors  $l_1=l_2=l_s$  et la raideur de l'assemblage a alors pour expression :

$$\text{Eq. 35 } k_a = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2\omega \tanh \omega}\right) \frac{1}{2k(A_s, 2c)} + \frac{2}{k(A_s, l_s)}} = \frac{A}{L_{eq}(\omega, l_s, c)}$$

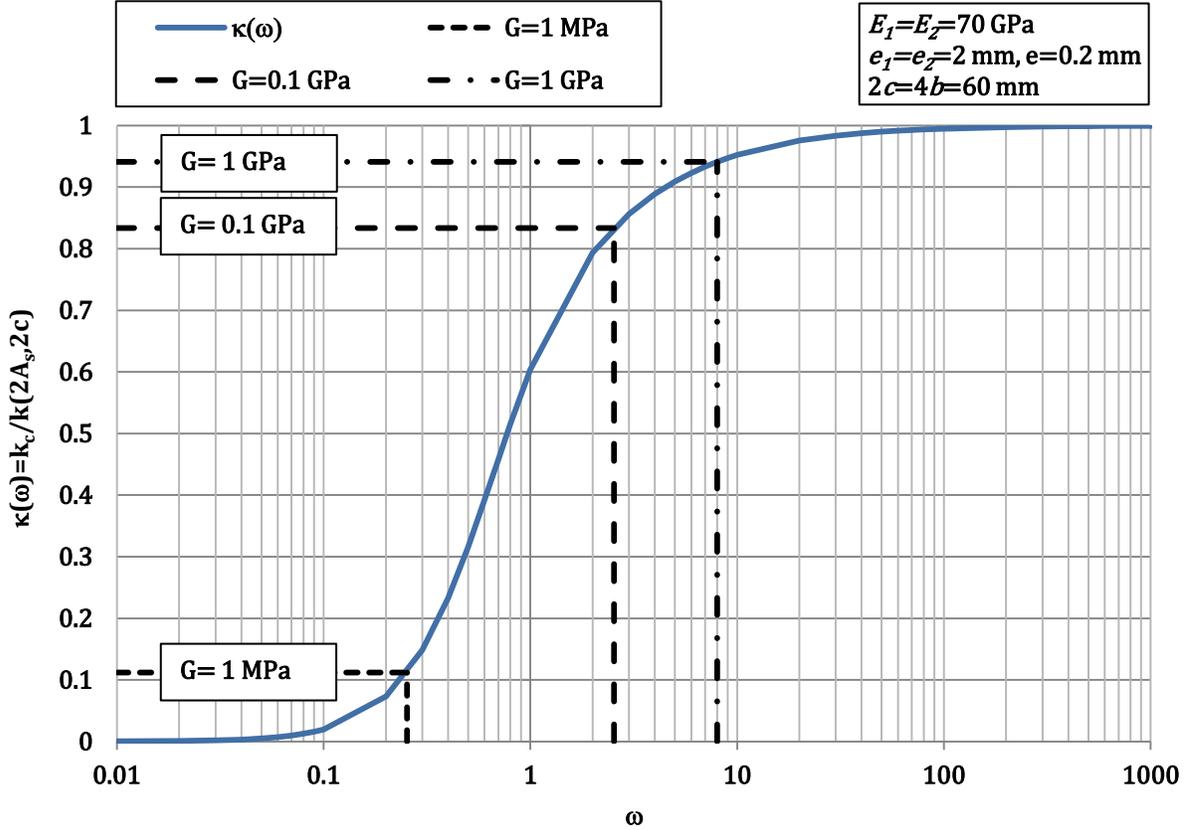
où :

$$\text{Eq. 36 } L_{eq}(\omega, l_s, c) = \left(\frac{1}{2\omega \tanh \omega} - 1\right) c + 2c + 2l_s = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2\omega \tanh \omega}\right) \frac{c}{2c+2l_s}\right] (2c + 2l_s)$$

La contribution de la raideur du recouvrement à la raideur totale de l'éprouvette apparaît donc pondérée par la proportion de longueur totale du recouvrement ( $2c$ ) par rapport à la longueur totale de l'éprouvette ( $2l_s+2c$ ). Enfin, si les substrats en aluminium sont remplacés par des substrats en acier de module d'Young  $E_1=E_2=210$  GPa – soit 3 fois plus raides en membrane – alors un facteur égal à 1,24 est obtenu entre le rapport  $\kappa(\omega)$  de la colle raide et celui de la colle souple. En choisissant des épaisseurs des substrats en acier 5 fois plus grandes ( $e_1=e_2=10$  mm), le facteur passe à 1,86. L'augmentation de l'écart en termes de raideurs entre la colle qui est cisailée et les substrats en tension entraîne une réduction de  $\omega$  et donc un écart relatif plus important sur les rapports  $\kappa(\omega)$ , comme l'illustre le cas  $G=1$  MPa sur la Figure 8.

La modélisation simple de type ressort employée permet de qualifier et de quantifier *approximativement* le mode de transfert des efforts par la colle. Par ailleurs, la résolution analytique permet aussi d'obtenir une expression de la répartition des efforts normaux et des contraintes adhésives. L'utilisation de ces informations peut contribuer à évaluer si l'intégrité des substrats et de la colle est bien assurée pour permettre le transfert des efforts. L'hypothèse est faite ici que les substrats sont dimensionnés de sorte qu'ils ne rompent pas. Dans le cas d'une cinématique de barre, cette hypothèse est une conséquence du fait que les substrats sont dimensionnés pour soutenir la charge loin des zones d'assemblage. Par contre, si la cinématique inclut la flexion, alors le dimensionnement correct des substrats loin de l'assemblage ne suffit plus à assurer sa tenue. En effet, en bord de recouvrement au niveau de l'interface avec la colle, les substrats sont soumis à une contrainte de traction additionnelle due à la flexion et un redimensionnement des substrats

peut être nécessaire et réalisé simplement [Adams et Davies 2002]. De plus, il est supposé que la colle ne peut pas rompre à l'interface avec les substrats, de sorte que seule la tenue cohésive de la colle est considérée.



**Figure 8** Variation de  $\kappa(\omega)$  en fonction de  $\omega$  et valeurs associées pour  $G=1$  MPa,  $G=0.1$  GPa et  $G=1$  GPa pour une configuration matérielle et géométrique particulière.

A partir des équations Eq. 16 et Eq. 24, l'expression des contraintes adhésives de cisaillement est obtenue. Une contrainte maximale  $T_{max}$  sur les bords du recouvrement est alors prédite et vaut pour le cas où les deux substrats sont identiques [Volkersen 1965] :

$$\text{Eq. 37 } T_{max} = \frac{\omega}{\tanh \omega} T_{moy}$$

où :

$$\text{Eq. 38 } T_{moy} = \frac{f}{2b2c}$$

Le paramètre  $\omega$  influe significativement aussi sur la distribution des contraintes de cisaillement dans la colle le long du recouvrement. À contrainte de cisaillement moyenne appliquée constante, la contrainte de cisaillement maximale est une fonction strictement croissante avec  $\omega$ . Quand  $\omega$  tend vers 0,  $T_{max}$  tend vers  $T_{moy}$ , ce qui signifie que la répartition

des contraintes de cisaillement tend à s'uniformiser le long du recouvrement. L'essai expérimental TAST pour *Thick Adherend Shear Test* [NF EN 14869-2 2011] tire avantage du comportement mécanique pour  $\omega$  petit. Il permet de mesurer une courbe contrainte déformation en cisaillement de la colle et en particulier de fournir une contrainte critique à rupture  $T_c$ . Quand  $\omega$  tend vers l'infini,  $T_{max}$  tend vers l'infini. S'il est supposé que le critère de rupture cohésive de la couche de colle consiste à assurer que  $T_{max}$  est inférieure à  $T_c$ , alors il n'est pas possible de raidir l'assemblage collé indéfiniment sans rompre la colle. De plus, à partir des équations Eq. 37 et Eq. 38, il est possible de déterminer le flux de tension transmissible à rupture  $f_c/2b$  [Volkersen 1965] :

$$\text{Eq. 39 } \frac{f_c}{2b} = 2\eta^{-1}T_c \tanh \omega = 2\eta^{-1}T_c \tanh \eta c$$

Le flux de tension transmissible à rupture est une fonction strictement croissante et bornée de la longueur du recouvrement, pour une configuration matérielle et géométrique donnée. Autrement, dit le flux de tension transmissible à rupture augmente avec la longueur du recouvrement jusqu'à une valeur maximale. La valeur maximale du flux de tension transmissible à rupture est alors donné par :

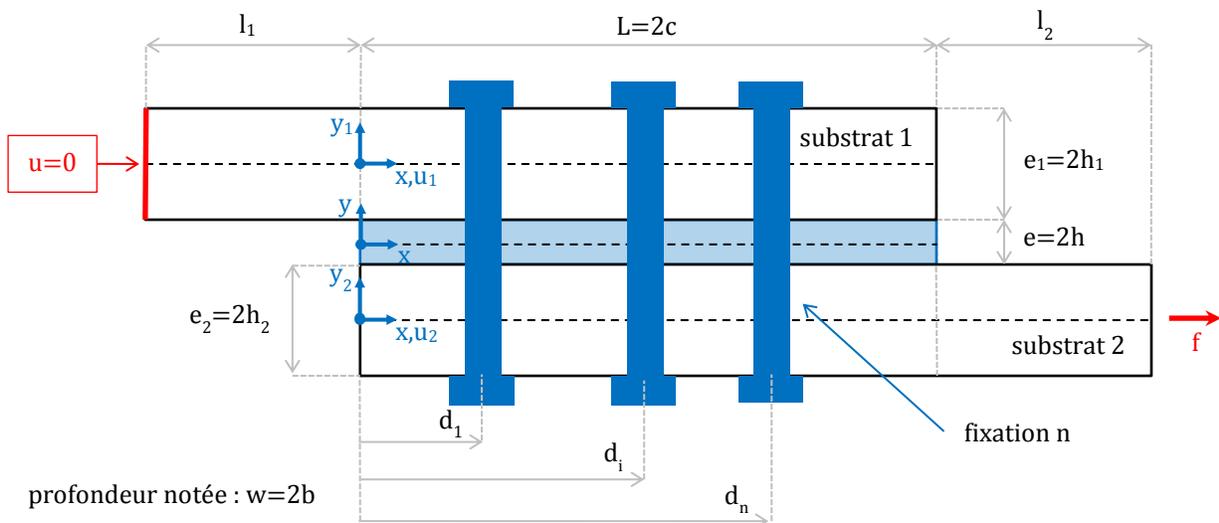
$$\text{Eq. 40 } \frac{f_c}{2b} \rightarrow 2\eta^{-1}T_c$$

## 2.2.2 Taux de transfert aux fixations d'un assemblage HBC

### Introduction

Dans ma thèse de doctorat, une modélisation simplifiée d'un assemblage HBC à  $n$  fixations (Figure 9) en cinématique de barre est proposée et résolue par une approche classique d'intégration des équations différentielles gouvernant le modèle [Paroissien 2006]. Des constantes d'intégration apparaissent et sont levées à l'aide des conditions aux limites. Comme le paramétrage est quelconque, un système linéaire, dont la taille s'exprime en fonction du nombre de fixations  $n$ , est à inverser pour obtenir la solution. La résolution est donc semi-analytique.

Dans cette section, la modélisation est complexifiée par la considération d'un cisaillement transverse dans les substrats. En effet, Demarkles montre que le cisaillement appliqué à l'interface des substrats tend à gauchir les sections des substrats de sorte le déplacement longitudinal des substrats dépend aussi de la coordonnée dans l'épaisseur [Demarkles 1955]. Le gauchissement tend à réduire le déplacement relatif des interfaces et par suite les contraintes maximales de cisaillement dans la couche de colle. Il est alors présenté dans cette section une adaptation de la résolution initiale issue de ma thèse de doctorat sur la base de l'approche de Tsai *et al.* [Tsai *et al.* 1998]. De plus, des solutions analytiques pour les taux de transfert aux fixations et la contrainte maximale dans la colle sont données pour des configurations particulières. Les travaux présentés s'appuient sur [Da Veiga 2009] [Paroissien *et al.* 2009] [Paroissien et Lachaud 2019]. Enfin, une approche pour la calibration de l'approche analytique est présentée et son utilisation dans un but de prédiction de tenue est discutée.



**Figure 9** Paramétrage d'un assemblage HBC avec  $n$  fixations en simple recouvrement soumis à un effort de traction.

## Hypothèses et équations gouvernant le modèle

Les hypothèses simplificatrices H1-1 à H1-5 utilisées en section 2.2.1 sont reprises. De plus, il est supposé que :

- H1-6 : la contrainte de cisaillement de chaque substrat varie linéairement avec son épaisseur ;
- H1-7 : les fixations sont modélisées par des ressorts de cisaillement liant les deux substrats.

Le paramétrage géométrique et mécanique reste quelconque (H1-5), tout comme le nombre de fixations, noté  $n$  (Figure 9).

Les équilibres locaux des substrats sont alors les mêmes que ceux obtenus dans l'équation Eq. 4. De plus, la relation constitutive de la colle consiste alors à écrire la contrainte de cisaillement de la colle  $T$  comme proportionnelle, au travers de  $G/e$ , au déplacement relatif des deux interfaces  $\Delta u$  (terme à gauche de l'implication dans Eq. 16, Figure 10). La relation constitutive des fixations traduit la proportionnalité entre l'effort porté par la fixation  $j$ , noté  $\tau_j f$  où  $\tau_j$  est le taux de transfert de la fixation  $j$ , et le déplacement longitudinal relatif des substrats. Le coefficient de proportionnalité est la raideur de la fixation  $j$  notée  $C_j$ . Dans le cas où le cisaillement transverse des substrats n'est pas considéré, alors le déplacement longitudinal relatif des substrats est représenté par le déplacement longitudinal relatif des lignes neutres au droit de la fixation. Dans le cas, où le cisaillement transverse des substrats est considéré, une adaptation, présentée ci-après, est effectuée. En termes de méthodologie, chaque recouvrement collé est analysé puis les fixations sont ajoutées.

### Adaptation de la résolution d'un simple recouvrement collé selon le modèle de Tsai *et al.*

Tsai *et al.* supposent un cisaillement transverse linéaire dans l'épaisseur des substrats (Figure 10). Comme, les bords extérieurs des substrats sont libres, la contrainte de cisaillement transverse  $T'_i$  s'écrit pour le substrat  $i$  :

$$\text{Eq. 41 } T'_i(x, y_i) = -\frac{1}{2} \left( \mathbf{1} + (-\mathbf{1})^i \frac{y_i}{h_i} \right) T(x) \quad i = 1, 2$$

où  $h_i$  est la demi-épaisseur du substrat  $i$  et  $y_i$  l'axe des ordonnées associés au substrat  $i$ . En cinématique de barre, la déformation de cisaillement est donnée par :

$$\text{Eq. 42 } \frac{\partial u_i}{\partial y_i}(x, y_i) = \frac{T'_i(x, y_i)}{G_i} = -\frac{1}{2} \left( \mathbf{1} + (-\mathbf{1})^i \frac{y_i}{h_i} \right) \frac{T(x)}{G_i} \quad i = 1, 2$$

où  $G_i$  est le module de cisaillement du substrat  $i$  et  $u_i$  le déplacement longitudinal dans le substrat  $i$ .

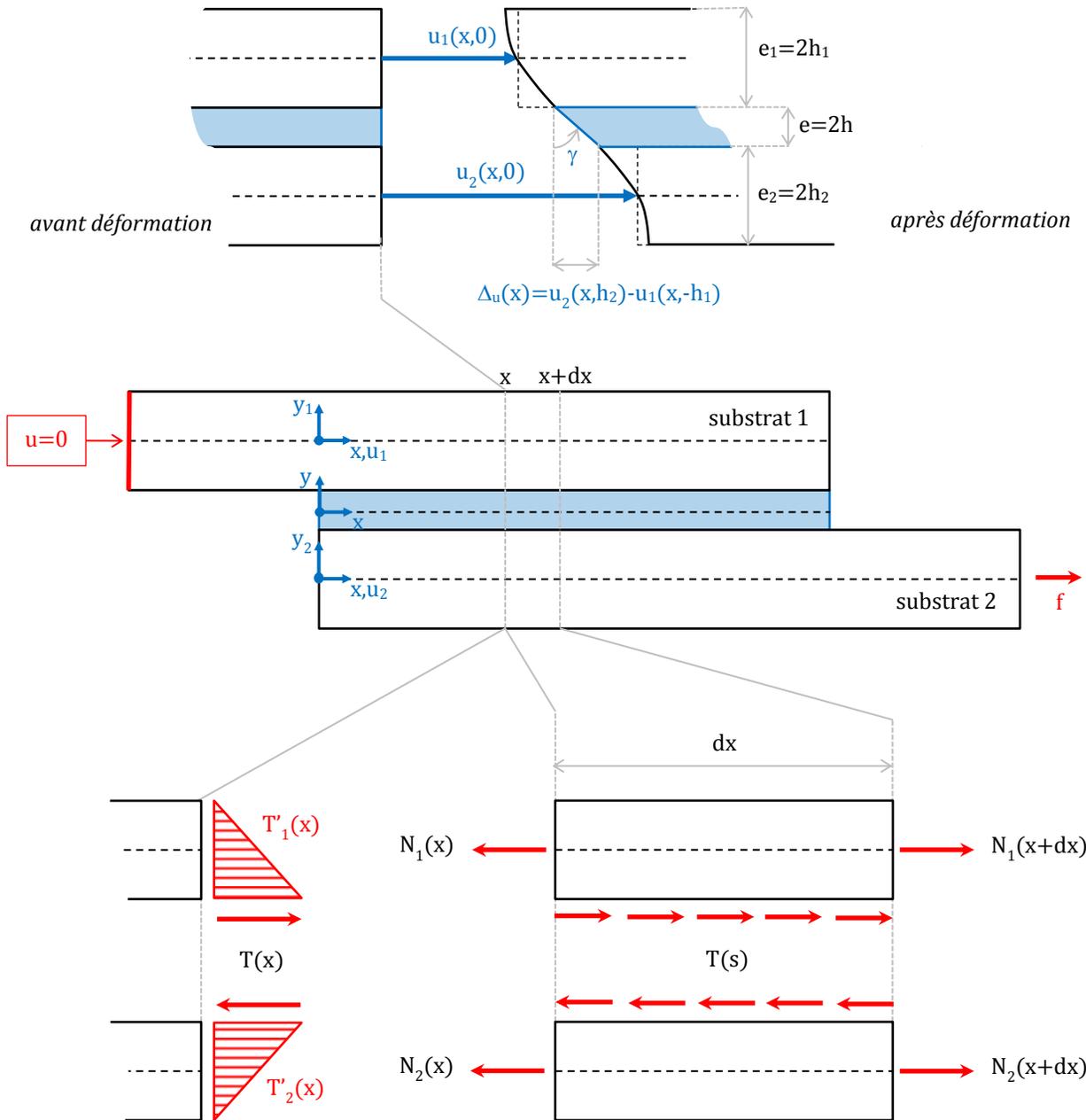


Figure 10 Cinématique et équilibre local.

Après intégration, un champ de déplacement longitudinal quadratique est obtenu :

$$\text{Eq. 43 } \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, y_i) = \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, \mathbf{0}) - \frac{1}{2} \left( \frac{y_i}{h_i} + (-1)^i \left( \frac{y_i}{h_i} \right)^2 \right) \frac{T(x)}{G_i} \mathbf{h}_i \quad i = 1, 2$$

Cette dernière relation fournit les déplacements relatifs aux interfaces des substrats avec la colle :

$$\text{Eq. 44} \quad \begin{cases} \mathbf{u}_1(x, -h_1) = \mathbf{u}_1(x, \mathbf{0}) + \frac{3}{4} \frac{T(x)}{G_1} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{u}_2(x, h_2) = \mathbf{u}_2(x, \mathbf{0}) - \frac{3}{4} \frac{T(x)}{G_2} \mathbf{h}_2 \end{cases}$$

De plus, les expressions des efforts normaux s'obtiennent par intégration de la déformation longitudinale. En choisissant de les exprimer en fonction des déplacements longitudinaux des interfaces, il vient :

$$\text{Eq. 45} \quad N_i(x) = E_i 2b \int_{-h_i}^{h_i} \frac{\partial u_i}{\partial y_i}(x, y_i) dy_i = A_i \left[ \frac{du_i(x, (-1)^i h_i)}{dx} + (-1)^i \frac{2}{3} \frac{h_i}{G_i} \frac{dT}{dx} \right] \quad i = 1, 2$$

Ces expressions des efforts normaux représentent les équations constitutives des substrats dans ce nouveau cadre de modélisation. Elles peuvent alors se réduire à :

$$\text{Eq. 46} \quad N_i(x) = A_i \frac{d\langle u_i \rangle}{dx} \quad i = 1, 2$$

avec :

$$\text{Eq. 47} \quad \langle u_i \rangle(x) = u_i(x, (-1)^i h_i) + (-1)^i \frac{2}{3} \frac{T(x)}{G_i} h_i \quad i = 1, 2$$

Le déplacement  $\langle u_i \rangle$  est le déplacement longitudinal moyen sur la section d'abscisse  $x$  du substrat  $i$ . La contrainte de cisaillement est alors donnée par :

$$\text{Eq. 48} \quad T(x) = \frac{G}{e} \Delta_u(x) = \frac{G}{e} [u_2(x, h_2) - u_1(x, -h_1)]$$

Donc en dérivant une fois et en utilisant les expressions des efforts normaux dans les substrats (Eq. 45) ainsi que l'équilibre global (Eq. 20), il vient :

$$\text{Eq. 49} \quad \frac{dT}{dx} = \frac{G}{e} \left[ \frac{N_2}{A_2} - \frac{N_1}{A_1} - \frac{2}{3} \left( \frac{h_2}{G_2} + \frac{h_1}{G_1} \right) \frac{dT}{dx} \right] = \frac{G}{e} \left( \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_1} \right) N_2 - \frac{2}{3} \frac{G}{e} \left( \frac{h_2}{G_2} + \frac{h_1}{G_1} \right) \frac{dT}{dx} - \frac{G}{e} \frac{f}{A_1}$$

Une équation différentielle en  $N_2$  est alors obtenue en utilisant l'équilibre local du substrat 2 (Eq. 4), tandis que celle en  $T$  nécessite en plus une seconde dérivation :

$$\text{Eq. 50} \quad \frac{d^2 N_2}{dx^2} - \eta_t^2 N_2 = -\eta_t^2 \frac{1+\chi}{2} f$$

$$\text{Eq. 51} \quad \frac{d^2 T}{dx^2} - \eta_t^2 T = 0$$

avec :

$$\text{Eq. 52} \quad \eta_t^2 = \frac{1}{1+\beta_t} \frac{G}{e} \left( \frac{1}{e_1 E_1} + \frac{1}{e_2 E_2} \right)$$

$$\text{Eq. 53} \quad \beta_t = \frac{1}{3} \frac{G}{e} \left( \frac{e_1}{G_1} + \frac{e_2}{G_2} \right)$$

Etant donné que les conditions aux limites sont les mêmes que dans la section 2.2.1, les solutions complètes en termes d'efforts normaux et de contrainte de cisaillement dans la couche adhésive sont alors les mêmes en remplaçant  $\eta$  par  $\eta_t$ . De plus, l'équation constitutive de la contrainte de cisaillement s'écrit en fonction des déplacements moyens des substrats comme :

$$\text{Eq. 54 } T(x) = \frac{1}{1+\beta_t} \frac{G}{e} [\langle u_2 \rangle(x) - \langle u_1 \rangle(x)]$$

Par conséquent, des développements précédents, il est constaté que la résolution de la modélisation de Tsai *et al.* peut s'obtenir directement à partir de celle d'Arnovljevic ou de Volkersen (section 2.2.1) en remplaçant les déplacements longitudinaux par les déplacements longitudinaux moyens et en remplaçant  $G$  par  $G/(1+\beta_t)$ . Les déplacements longitudinaux dans la modélisation de Tsai *et al.* s'obtiennent donc à partir des équations Eq. 44, Eq. 46 et Eq. 47. Les champs de déplacements sont évidemment obtenus à une constante près qui apparaît dans l'intégration de l'équation Eq. 46. Enfin, en section 5.2, quelques compléments sont fournis.

### Application à la jonction HBC

La constatation obtenue précédemment est directement appliquée pour produire une modélisation d'un assemblage HBC avec une variation linéaire de la contrainte de cisaillement transverse à partir de celle sans cisaillement transverse dans les substrats et développée dans [Paroissien 2006].

L'approche s'inspire des travaux d'Erdogan et Ratwani sur les assemblages collés à marches d'escalier [Erdogan et Ratwani 1971]. Elle consiste à déterminer les formes de solution sur chaque recouvrement collé et à exprimer des conditions aux limites. Pour une jonction HBC à  $n$  fixations comportent  $n+1$  recouvrements collés, chacun délimité par deux fixations ou par une fixation et un bord libre. Ainsi, le recouvrement collé 1 est compris entre le bord libre à gauche (Figure 9) et la fixation 1 soit pour  $0 < x < d_1$ , où  $d_1$  est l'axe de la fixation 1. Le recouvrement  $1 < j < n+1$  est compris entre la fixation  $j-1$  et  $j$ , soit pour  $d_{j-1} < x < d_j$ , où  $d_j$  est l'abscisse de l'axe de la fixation  $j$ . Le recouvrement  $n+1$  est compris entre la fixation  $n$  et le bord libre à droite, soit  $d_n < x < L$ . Sur chaque recouvrement  $j$ , il est possible d'écrire une équation différentielle en effort normal dans le substrat 2 noté  $N_{2j}$  qui prend la forme de l'équation Eq. 50. Sa solution s'écrit alors :

$$\text{Eq. 55 } N_{2,j} = c_{2j-1} e^{-\eta_t x} + c_{2j} e^{\eta_t x} + \frac{1+x}{2} f \quad j=1 \dots n+1$$

où  $c_{2j-1}$  et  $c_{2j}$  sont deux constantes d'intégration. La contrainte de cisaillement dans la couche de colle  $T_j$  est alors obtenue par dérivation de l'effort normal selon l'équilibre local (Eq. 4) :

$$\text{Eq. 56 } T_j = \frac{\eta_t}{w} (-c_{2j-1} e^{-\eta_t x} + c_{2j} e^{\eta_t x}) \quad j=1 \dots n+1$$

Par conséquent, pour  $n$  fixations soit  $n+1$  recouvrements,  $2(n+1)$  constantes d'intégration et  $2(n+1)$  conditions aux limites sont alors à exprimer. La première correspond à dire que l'effort normal en  $x=0$ , soit  $N_{2,1}(0)$ , est nul. La seconde consiste à écrire que l'effort normal en  $x=L$ , soit  $N_{2,n+1}(L)$ , est égal à l'effort appliqué  $f$ . Au droit de chaque fixation, il est supposé que la contrainte de cisaillement dans la couche de colle est continue, ce qui fournit  $n$

équations supplémentaires. Les  $n$  dernières équations sont obtenues en exprimant le transfert des efforts au droit de chacune des  $n$  fixations, soit :

$$\text{Eq. 57 } N_{2,j+1}(d_j) = N_{2,j}(d_j) + \tau_j f \quad j=1 \dots n$$

La modélisation des fixations par des ressorts de cisaillement permet d'écrire la relation constitutive suivante :

$$\text{Eq. 58 } \tau_j f = C_j [\langle u_{2,j} \rangle (d_j) - \langle u_{1,j} \rangle (d_j)] \quad j = 1 \dots n$$

où  $\langle u_{i,j} \rangle$  est le déplacement longitudinal moyen sur l'épaisseur du substrat  $i$  dans le recouvrement  $j$ . Ainsi, il vient :

$$\text{Eq. 59 } \tau_j f = C_j \left[ (1 + \beta_t) \frac{e}{G} T_j(d_j) \right] = \phi_j (-c_{2j-1} e^{-\eta_t x} + c_{2j} e^{\eta_t x}) \quad j = 1 \dots n$$

où :

$$\text{Eq. 60 } \phi_j = C_j (1 + \beta_t) \frac{e \eta_t}{G w} \quad j=1 \dots n$$

Un système linéaire de taille  $2(n+1)$  est donc obtenu.

$$\text{Eq. 61 } \begin{cases} c_1 + c_2 = -\frac{1+\chi}{2} f \\ e^{-\eta_t d_i} c_{2j-1} - e^{\eta_t d_i} c_{2j} - e^{-\eta_t d_j} c_{2j+1} + e^{\eta_t d_j} c_{2j+1} = 0 & j = 1 \dots n \\ (1 - \phi_j) e^{-\eta_t d_i} c_{2j-1} + (1 + \phi_j) e^{\eta_t d_i} c_{2j} - e^{-\eta_t d_j} c_{2j+1} - e^{\eta_t d_j} c_{2j+1} = 0 & j = 1 \dots n \\ c_{2n+1} + c_{2n+2} = \frac{1-\chi}{2} f \end{cases}$$

En utilisant un logiciel de calcul scientifique, ce système peut être inversé numériquement. Les constantes d'intégration peuvent donc être fournies menant à la détermination des distributions des efforts normaux, des contraintes de cisaillement dans la colle, des taux de transfert et des déplacements longitudinaux.

Si la configuration géométrique et matérielle est simplifiée, il est envisageable de résoudre *à la main* ce système. Une simplification intéressante consiste à considérer un assemblage HBC à deux fixations tel (i) que les deux substrats sont identiques, (ii) que les deux distances au bord sont égales ( $d_1=L-d_n=d$ ), (iii) que le pas longitudinal entre deux fixations vaut  $2d$  et (iv) que les raideurs des deux fixations ( $C_f$ ) sont identiques. Les taux de transfert sur chacune des deux fixations sont donc égaux et s'écrivent [Da Veiga 2009] [Paroissien *et al.* 2009] [Paroissien et Lachaud 2019] :

$$\text{Eq. 62 } \tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{2} C_f \frac{e \eta_t}{G w} \left( \frac{\bar{r} + \bar{q}}{\bar{r} e^{\eta_t d} - \bar{q} e^{-\eta_t d}} \right)$$

où :

$$\text{Eq. 63 } \bar{q} = 1 - \cosh \eta_t (L - 2d) + \left( 1 - C_f (1 + \beta_t) \frac{e \eta_t}{G w} \right) \sinh \eta_t (L - 2d)$$

$$\text{Eq. 64 } \bar{r} = -1 + \cosh \eta_t (L - 2d) - \left( 1 + C_f (1 + \beta_t) \frac{e \eta_t}{G w} \right) \sinh \eta_t (L - 2d)$$

La contrainte maximale de cisaillement dans la colle est donnée par:

$$\text{Eq. 65 } T_{max} = \frac{1}{2} \frac{\bar{r}e^{\eta t^d} + \bar{q}e^{-\eta t^d}}{\bar{r}e^{\eta t^d} - \bar{q}e^{-\eta t^d}} \eta t \frac{f}{w}$$

Des expressions analytiques pour le cas d'assemblage HBC avec deux substrats identiques à deux et trois fixations et des simplifications géométriques moins importantes sont disponibles dans [Da Veiga 2009].

### Calibration de la raideur des fixations

Le paramètre de raideur des fixations peut être vu comme un paramètre global représentant un ensemble de phénomènes locaux. Dans la littérature, il existe de nombreuses formules pour la raideur des fixations, par exemple [Tate et Rosenfeld 1946] [Nelson *et al.* 1983] [Swift 1984] [Huth 1986] [Cope et Lacy 2000] [Morris 2004]. Ces formules peuvent être établies théoriquement et/ou phénoménologiquement. Quand elles sont calibrées à l'aide d'essais expérimentaux alors le champ d'application peut être vu comme restreint. Ces formules peuvent aussi être évaluées pour un champ d'application bien connu à l'aide d'essais numériques [Notta 2009]. L'intérêt principal du recours aux essais numériques est de maîtriser les hypothèses d'établissement des formules au travers de la maîtrise des hypothèses de modélisation – donc de ce qui est cherché à représenter au travers de la raideur de fixation – à moindre coût comparé au coût des essais expérimentaux. Une illustration de l'approche est donnée ci-après.

Dans [Paroissien *et al.* 2009] la raideur de la fixation  $C_f$  de la formule en équation Eq. 62 est calibrée en fonction du module de cisaillement de la colle à l'aide d'un modèle EF 3D, dont une présentation détaillée est disponible dans [Hoang-Ngoc et Paroissien 2010]. La configuration géométrique et matérielle est telle que  $e=0,1$  mm,  $e_s=1,6$  mm,  $d=12$  mm,  $w=24$  mm,  $L=48$  mm,  $l_s=178$  mm,  $E_s=73100$  MPa et  $\nu_s=0,33$  MPa. Le diamètre du fût de la fixation est 4,8 mm. Dans le modèle EF 3D, l'assemblage est encastré à une extrémité et est libre de se déplacer seulement dans la direction  $x$  à l'autre extrémité. Une contrainte de traction de 80 MPa est appliquée, compatible avec une charge de fatigue. Le calcul est non-linéaire géométrique et matériau. La non-linéarité matériau est portée par la colle. En effet, un nombre fini de modules de cisaillement de colle a été choisi entre 0.01 MPa et 120 MPa. Afin de pouvoir représenter la colle pour ces faibles modules et de n'utiliser qu'un unique type de représentation pour toute la campagne numérique, le comportement de la colle est modélisé par un comportement hyperélastique. Plus précisément, dans le but de traduire une relation linéaire entre la contrainte de cisaillement et l'extension de déformation, le modèle de Mooney [Mooney 1940] [Rivlin 1948]. Certes, l'hypothèse H1-1 des petites perturbations de la modélisation analytique n'est pas respectée. Néanmoins, une relation linéaire entre la contrainte de cisaillement de colle et son extension de cisaillement – égale à  $\Delta u/e$  – est écrite en transformation homogène et est la même que dans le cas des petites

déformations. Le coefficient de proportionnalité est alors  $G=2(C_{10}+C_{01})$ , où  $C_{10}$  et  $C_{01}$  sont les deux modules du modèle de Mooney et sont choisis tels que sont tels que  $C_{10}=1,6C_{01}$ . Un module de compressibilité de 5 GPa est appliqué pour représenter l'incompressibilité du comportement. Il est alors évident que l'hypothèse H1-4 menant à négliger toutes les composantes du tenseur des contraintes de la colle devant celle de cisaillement n'est pas valide. L'approche analytique paraît donc limitée pour la prédiction de la tenue de la couche de colle. Elle reste néanmoins pertinente en termes de transfert d'effort dans les substrats au travers des fixations mécaniques à condition de supposer l'intégrité de la colle. Le transfert des efforts par les deux fixations est mesuré alors sur le modèle EF pour chacun des modules de cisaillement de la colle. La raideur  $C_f$  est cherchée pour minimiser l'ensemble des écarts quadratiques avec la prédiction analytique issue de l'équation Eq. 62. Pour la relation constitutive des fixations choisie dans le modèle analytique (Eq. 58), la raideur alors calibrée vaut 29302 N.mm<sup>-1</sup>. Les taux de transfert par les fixations mécaniques en fonction du module de cisaillement sont tracés en Figure 11, pour le modèle EF 3D et la formule analytique. Sur cet exemple, il est observé qu'un excellent accord est obtenu pour les faibles modules de colle (jusqu'à 12 MPa). L'écart ensuite croît modérément puis tend à se réduire pour des modules de colle plus importants. Afin d'améliorer la corrélation, il pourrait être envisagé d'adapter la valeur de la raideur des fixations point par point ou intervalle par intervalle.

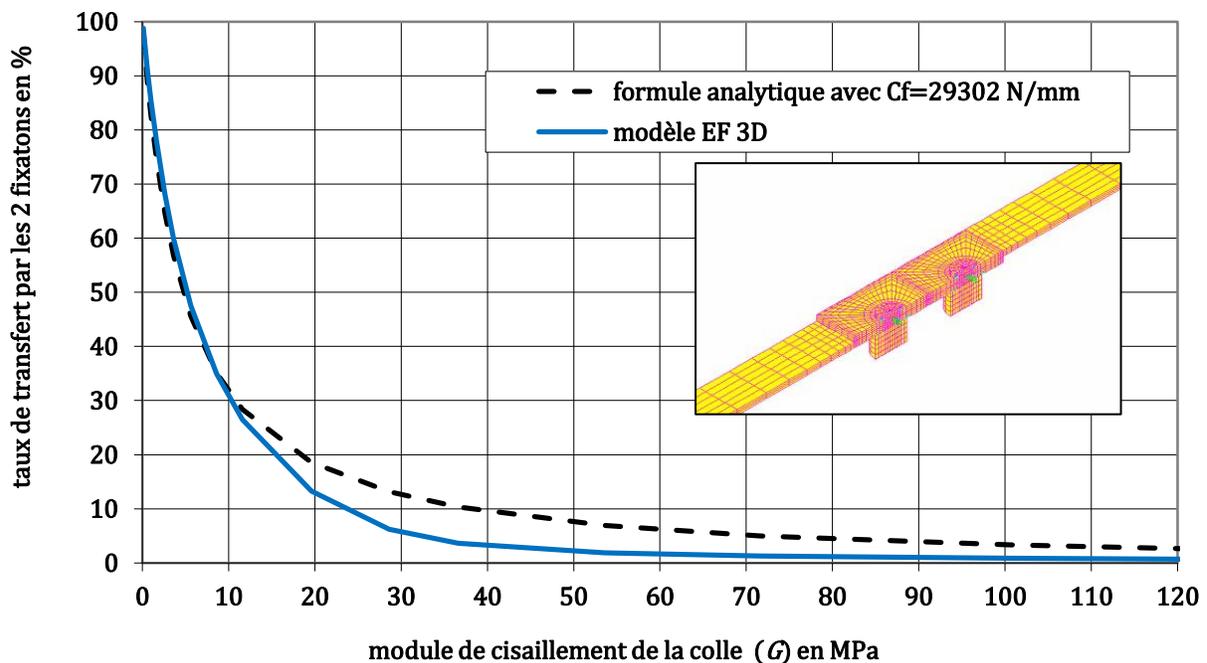


Figure 11 Taux de transfert par les deux fixations mécaniques en fonction du module de cisaillement de la colle fournis par le modèles EF 3D et analytique avec  $C_f=29302$  N.mm<sup>-1</sup>.

## Illustration sur un prédimensionnement en fatigue

En termes de prédimensionnement, le taux de transfert aux fixations permet d'évaluer la tenue en statique et en fatigue de la partie boulonnée [Niu 1999] [Chieragatti *et al.* 2004]. En statique, la tenue en matage du trou et la tenue en cisaillement est évaluée directement à partir du taux de transfert aux fixations. Selon l'approche uni-axiale de Niu, la tenue en fatigue est évaluée au travers d'abaques et de facteurs technologiques à partir de la contrainte maximale en bord de trou. Cette contrainte maximale est obtenue par superposition de la contrainte due à l'effort transféré et de la contrainte due à l'effort passant. Chacun de ces efforts dépend du transfert aux fixations.

Un cas d'application est alors choisi pour un module de cisaillement de la colle  $G=10$  MPa. Ce choix de module de cisaillement assure une bonne corrélation entre l'approche analytique et le modèle EF 3D en termes de transfert d'effort ainsi que sa répartition entre la couche de colle et les fixations mécaniques. Par ailleurs, il est remarqué que le rapport  $(G/e)/(G_s/e_s)$  est de l'ordre de  $6.10^{-3}$ . Le cisaillement transverse dans les substrats a ainsi une influence non significative sur les contraintes de cisaillement de la colle (section 5.2) et son utilisation dans un but de prédiction une tenue de la colle est discutable pour ces faibles niveaux de module. Le transfert des efforts prédit par l'approche analytique pour les cas purement boulonné, purement collé et HBC est représenté dans la Figure 12. Un transfert d'effort de 16% par fixation et un effort passant de 64% au droit de la fixation au droit sont alors obtenu. Comparé à l'assemblage à trois lignes de fixations, qui serait obtenu par l'ajout d'un pas de fixation à l'assemblage à deux lignes de fixations, le niveau d'effort passant est similaire mais le taux de transfert est plus de deux fois moindre. En supposant que la colle conserve son intégrité, un gain potentiel en fatigue est alors attendu avec cet assemblage HBC à deux lignes de fixations par rapport à une jonction boulonnée à trois lignes de fixations. Enfin, la répartition de contraintes de cisaillement dans la colle le long du recouvrement prédite par l'approche analytique pour les cas purement collé et HBC est représentée dans la Figure 13. Pour le cas purement collé, l'aire sous la courbe représente la contrainte moyenne de cisaillement appliquée multipliée par la longueur du recouvrement soit le flux de tension appliqué (Eq. 38). Pour le cas HBC, l'aire sous la courbe représente donc le flux de tension appliqué moins les transferts des flux effort par les fixations mécaniques. Ces transferts de flux d'effort sont visibles sur la courbe au travers des points singuliers au niveau des fixations ( $x/L=0,25$  et  $x/L=0,75$ ) ; la contrainte de cisaillement est continue mais sa dérivée première ne l'est pas au niveau des fixations. Des équations Eq. 20 et Eq. 46, la dérivée de la contrainte de cisaillement s'écrit en fonction de  $N_2$  qui est une fonction discontinue au droit des fixations :

$$\text{Eq. 66 } \frac{dT}{dx} = \frac{1}{1+\beta_t} \frac{G}{e} \frac{1}{A_s} [2N_2(x) - f]$$

Les fixations mécaniques permettent donc de réduire le niveau de contrainte de cisaillement dans la couche de colle.

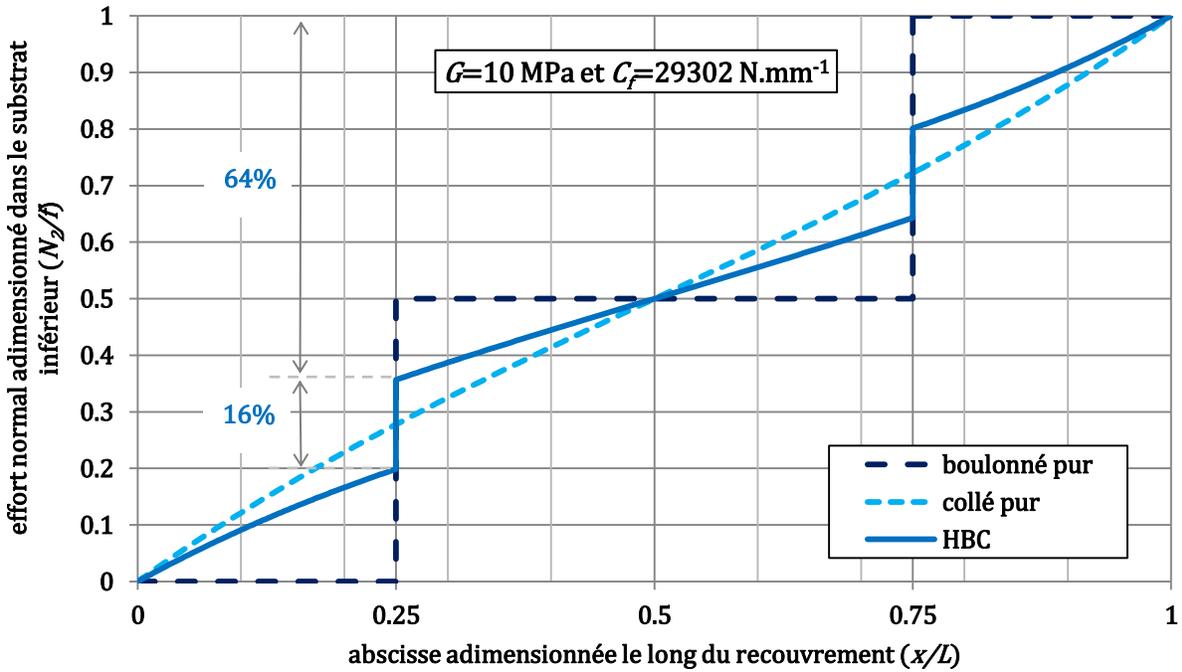


Figure 12 Répartition du transfert d' d'après le modèle analytique pour les cas boulonné pur, collé pur et HBC et collé pur avec  $G=10 \text{ MPa}$  et  $C_f=29302 \text{ N.mm}^{-1}$ .

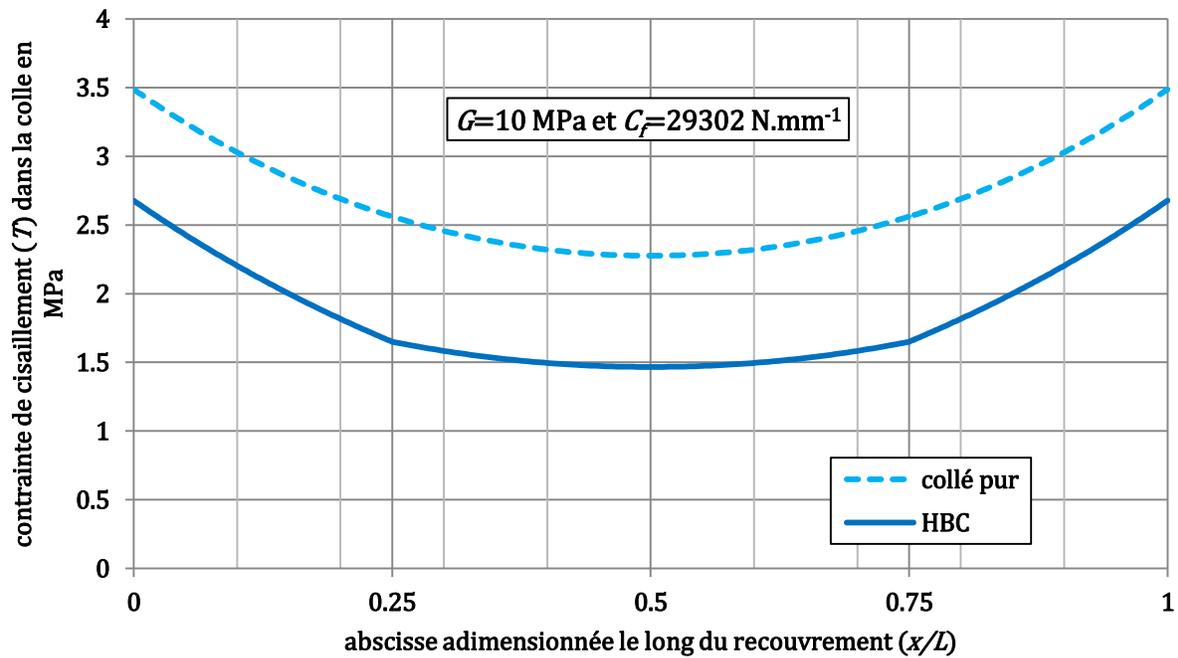


Figure 13 Répartition des contraintes de cisaillement d'après le modèle analytique pour les cas collé pur et HBC avec  $G=10 \text{ MPa}$  et  $C_f=29302 \text{ N.mm}^{-1}$ .

### 2.2.3 Modélisation par macro-élément d'un simple recouvrement collé

#### Introduction

Dans ma thèse de doctorat, les coefficients de la matrice de raideur d'un ME barres-collées sont exprimés analytiquement. Ce ME barres-collées représente un recouvrement collé selon le modèle d'Arnovljevic ou de Volkersen [Arnovljevic 1909] [Volkersen 1938]. Dans [Paroissien *et al.* 2018], la prise en compte des dilatations thermo-élastiques des substrats dues à une variation de température est intégrée pour l'analyse d'un simple recouvrement collé en cinématique de barre. Si les substrats présentent des coefficients de dilatation thermique différents alors la colle peut être soumise à une contrainte de cisaillement additionnelle. Le modèle obtenu correspond à celui d'Hart-Smith [Hart-Smith 1973b]. Le chargement thermique est introduit au travers d'un effort nodal équivalent comme utilisé dans la méthode des EF. Dans [Paroissien *et al.* 2013a] [Paroissien *et al.* 2013b], la matrice de raideur du ME barres-collés est reformulée pour prendre en compte le cisaillement transverse dans l'épaisseur des substrats selon le modèle de Tsai *et al.* [Tsai *et al.* 1998].

L'objectif de cette section est de présenter la technique par ME au travers des nouveaux développements réalisés depuis la thèse de doctorat sur le cas simple de la cinématique de barre. Il s'agit, en particulier, de montrer (i) que la technique par ME permet d'intégrer dans une brique élémentaire un ensemble d'hypothèses simplificatrices et (ii) qu'elle tire avantage des méthodologies existantes de la méthode par EF. L'approche pour formulation de la matrice de raideur du ME utilisée dans cette section correspond à celle donnée dans [Paroissien *et al.* 2018] et diffère de celle utilisée dans la thèse de doctorat.

#### Hypothèses et équations gouvernant le modèle

Les hypothèses simplificatrices H1-1 à H1-5 utilisées en section 2.2.1 sont reprises afin de se placer dans le cadre d'analyse d'Arnovljevic ou de Volkersen. Il est supposé que l'assemblage est soumis à un effort de tension et à une variation de température  $\Delta\hat{T}$  uniforme. La dilatation thermique de la colle est négligée dans ce modèle. L'hypothèse H1-6 en section 2.2.2 incluant une contrainte de cisaillement linéaire dans les substrats sera appliquée ultérieurement. Le paramétrage géométrique et matériel est quelconque tel que défini en Figure 6.

Les équations d'équilibre local des substrats (Eq. 4) et la relation constitutive de la colle (Eq. 7) restent les mêmes que dans la section 2.2.1. Par contre, les relations constitutives pour des substrats prennent en compte la dilatation thermique selon :

$$\text{Eq. 67 } \frac{du_i}{dx} = \frac{N_i}{A_i} + \hat{\alpha}_i \Delta\hat{T} \quad i = 1, 2$$

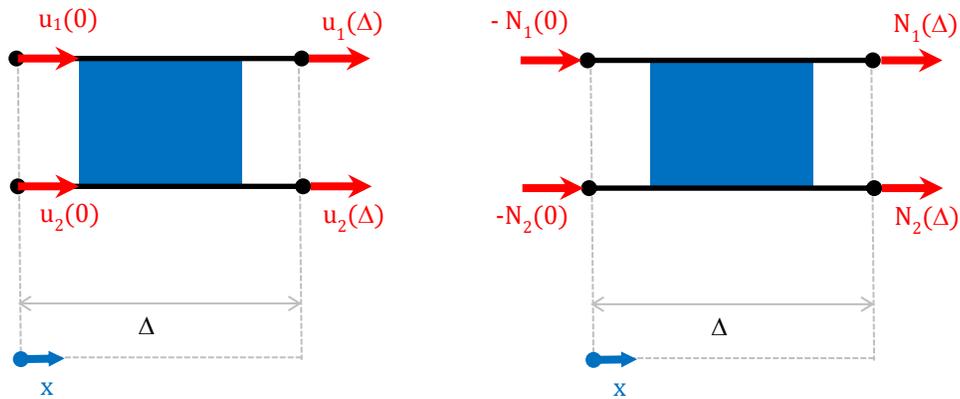
où  $\hat{\alpha}_i$  est le coefficient de dilatation thermique du substrat  $i$ .

## Formulation de la matrice de raideur du ME

Un recouvrement collé de longueur  $\Delta$  est considéré. Il est modélisé par un ME à quatre nœuds (Figure 5). Chaque nœud a un déplacement nodal et un effort nodal, chacun défini à partir du déplacement longitudinal  $u_i$  et de l'effort normal  $N_i$  (Figure 14). Le vecteur des déplacements nodaux du ME est noté  $U_e$ , tandis que le vecteur des efforts nodaux est noté  $F_e$ ; ils s'écrivent :

$$\text{Eq. 68 } U_e = \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_1(\Delta) \\ u_2(\Delta) \end{pmatrix}$$

$$\text{Eq. 69 } F_e = \begin{pmatrix} -N_1(0) \\ -N_2(0) \\ N_1(\Delta) \\ N_2(\Delta) \end{pmatrix}$$



**Figure 14** Déplacements nodaux et efforts nodaux sur un ME barres-collés ainsi que l'axe local  $x$  associé au ME.

La matrice de raideur du ME est notée  $K_e$ . Elle est définie à partir de son énergie de déformation élastique stockée, par :

$$\text{Eq. 70 } W_{int} = \frac{1}{2} U_e^t K_e U_e$$

Le travail des efforts nodaux, noté  $W_{ext}$  s'écrit :

$$\text{Eq. 71 } W_{ext} = \frac{1}{2} U_e^t F_e$$

Or, sous les hypothèses H1-1 et H1-2, la conservation de l'énergie implique que le travail des efforts nodaux est égal à l'énergie de déformation stockée, soit :

$$\text{Eq. 72 } U_e^t K_e U_e = U_e^t F_e$$

En suivant le même schéma de résolution qu'en section 2.2.1, les déplacements longitudinaux des substrats donnés en Eq. 15 sont obtenus. Les quatre constantes d'intégration  $c_i$  peuvent être exprimées en fonction des déplacements nodaux, ce qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\text{Eq. 73 } \mathbf{C} = \mathbf{D}_e^{-1} \mathbf{U}_e$$

avec :

$$\text{Eq. 74 } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eq. 75 } \mathbf{D}_e^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} - \chi & \mathbf{1} + \chi & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{\mathbf{1} - \chi}{\Delta} & -\frac{\mathbf{1} + \chi}{\Delta} & \frac{\mathbf{1} - \chi}{\Delta} & \frac{\mathbf{1} + \chi}{\Delta} \\ -\frac{e^{\eta\Delta}}{2 \sinh \eta\Delta} & \frac{e^{\eta\Delta}}{2 \sinh \eta\Delta} & \frac{1}{2 \sinh \eta\Delta} & -\frac{1}{2 \sinh \eta\Delta} \\ \frac{e^{-\eta\Delta}}{2 \sinh \eta\Delta} & -\frac{e^{-\eta\Delta}}{2 \sinh \eta\Delta} & -\frac{1}{2 \sinh \eta\Delta} & \frac{1}{2 \sinh \eta\Delta} \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{C}$  le vecteur des constantes d'intégration et  $\mathbf{D}_e$  une matrice de couplage. Dans un premier temps, il est supposé que la variation de la température est nulle. Les efforts nodaux sont déduits à partir de l'équation Eq. 17 en fonction des constantes d'intégration:

$$\text{Eq. 76 } \mathbf{F}_e = \mathbf{L}_e \mathbf{C}$$

où :

$$\text{Eq. 77 } \mathbf{L}_e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -A_1 & -\eta(\mathbf{1} + \chi)A_1 & \eta(\mathbf{1} + \chi)A_1 \\ \mathbf{0} & -A_2 & \eta(\mathbf{1} - \chi)A_2 & -\eta(\mathbf{1} - \chi)A_2 \\ \mathbf{0} & A_1 & \eta(\mathbf{1} + \chi)e^{-\eta\Delta}A_1 & -\eta(\mathbf{1} + \chi)e^{\eta\Delta}A_1 \\ \mathbf{0} & A_2 & -\eta(\mathbf{1} - \chi)e^{-\eta\Delta}A_2 & \eta(\mathbf{1} - \chi)e^{\eta\Delta}A_2 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{L}_e$  est une matrice de couplage non inversible. Ainsi, à partir des équations Eq. 72, Eq. 73 et Eq. 76, le travail des efforts nodaux se mets sous la forme :

$$\text{Eq. 78 } W_{int} = \frac{1}{2} \mathbf{U}_e^t \mathbf{F}_e = \frac{1}{2} \mathbf{U}_e^t \mathbf{L}_e \mathbf{C} = \frac{1}{2} \mathbf{U}_e^t \mathbf{L}_e \mathbf{D}_e^{-1} \mathbf{U}_e$$

La matrice de raideur du ME, traduisant les relations linéaires entre les efforts nodaux et déplacements nodaux, est alors déduite à partir des matrices de couplages  $\mathbf{D}_e$  et  $\mathbf{L}_e$ :

$$\text{Eq. 79 } \mathbf{K}_e = \mathbf{L}_e \mathbf{D}_e^{-1}$$

avec :

$$\text{Eq. 80 } K_e = \frac{1}{1+\xi} \frac{A_2}{\Delta} \begin{pmatrix} \frac{\eta\Delta}{\tanh \eta\Delta} + \frac{1}{\xi} & 1 - \frac{\eta\Delta}{\tanh \eta\Delta} & -\frac{\eta\Delta}{\sinh \eta\Delta} - \frac{1}{\xi} & \frac{\eta\Delta}{\sinh \eta\Delta} - 1 \\ 1 - \frac{\eta\Delta}{\tanh \eta\Delta} & \frac{\eta\Delta}{\tanh \eta\Delta} + \xi & \frac{\eta\Delta}{\sinh \eta\Delta} - 1 & -\frac{\eta\Delta}{\sinh \eta\Delta} - \xi \\ -\frac{\eta\Delta}{\sinh \eta\Delta} - \frac{1}{\xi} & \frac{\eta\Delta}{\sinh \eta\Delta} - 1 & \frac{\eta\Delta}{\tanh \eta\Delta} + \frac{1}{\xi} & 1 - \frac{\eta\Delta}{\tanh \eta\Delta} \\ \frac{\eta\Delta}{\sinh \eta\Delta} - 1 & -\frac{\eta\Delta}{\sinh \eta\Delta} - \xi & 1 - \frac{\eta\Delta}{\tanh \eta\Delta} & \frac{\eta\Delta}{\tanh \eta\Delta} + \xi \end{pmatrix}$$

En ajoutant dans la modélisation, le chargement thermique sous la forme d'une variation uniforme de la température et connaissant les expressions des déplacements longitudinaux (Eq. 15), les efforts normaux s'écrivent :

$$\text{Eq. 81 } \begin{pmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & A_1 & \eta(1+\chi)A_1e^{-\eta x} & -\eta(1+\chi)A_1e^{\eta x} \\ 0 & A_2 & -\eta(1-\chi)A_2e^{-\eta x} & \eta(1-\chi)A_2e^{\eta x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_1\widehat{\alpha}_1\Delta\widehat{T} \\ A_2\widehat{\alpha}_2\Delta\widehat{T} \end{pmatrix}$$

Le vecteur des efforts nodaux équivalents au chargement thermique, noté  $F_{e,th}$ , est donc déduit à partir de :

$$\text{Eq. 82 } F_e + F_{e,th} = K_e U_e$$

avec :

$$\text{Eq. 83 } F_{e,th} = \begin{pmatrix} -A_1\widehat{\alpha}_1 \\ -A_2\widehat{\alpha}_2 \\ A_1\widehat{\alpha}_1 \\ A_2\widehat{\alpha}_2 \end{pmatrix} \Delta\widehat{T}$$

Afin de considérer une contrainte de cisaillement linéaire dans les substrats, il suffit de considérer l'adaptation définie en section 2.2.2, à savoir remplacer les déplacements longitudinaux par les déplacements longitudinaux moyens et  $G$  par  $G/(1+\beta_t)$ .

### Application au simple recouvrement collé

Le cas du simple recouvrement collé en cinématique de barre est considéré. La modélisation par ME est alors illustrée dans la Figure 15. Chaque substrat  $i$  hors recouvrement est représenté par une barre dont la matrice de raideur  $K_{i,e}$  est :

$$\text{Eq. 84 } K_{e,i} = \frac{A_i}{l_i} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2$$

Le vecteur nodal équivalent au chargement thermique a pour composantes  $-A_i\alpha_i$  et  $A_i\alpha_i$ .

Le modèle comporte 6 nœuds, numérotés de 1 à 6 (Figure 15). Le vecteur des déplacements nodaux de la structure  $U_s$  est :

$$\text{Eq. 85 } U_s^t = (u(1) \quad u(2) \quad u(3) \quad u(4) \quad u(5) \quad u(6))$$

où  $u(k)$  signifie le déplacement nodal du nœud  $k$ . Ce vecteur est l'inconnue du problème. La matrice de raideur de la structure  $K_s$  est alors assemblée à partir des matrices de raideur élémentaires  $K_{e,i}$  et  $K_e$ . Chaque nœud a un unique degré de liberté, de sorte que  $K_s$  est de taille 6x6 avant application des conditions aux limites.  $K_s$  prend alors la forme suivante :

Eq. 86

$$K_s = \frac{1}{1+\xi} \frac{A_2}{L} \begin{pmatrix} \frac{1+\xi}{\xi} \frac{L}{l_1} & -\frac{1+\xi}{\xi} \frac{L}{l_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1+\xi}{\xi} \frac{L}{l_1} & \frac{\eta L}{\tanh \eta L} + \frac{1}{\xi} + \frac{1+\xi}{\xi} \frac{L}{l_1} & 1 - \frac{\eta L}{\tanh \eta L} & -\frac{\eta L}{\sinh \eta L} - \frac{1}{\xi} & \frac{\eta L}{\sinh \eta L} - 1 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\eta L}{\tanh \eta L} & \frac{\eta L}{\tanh \eta L} + \xi & \frac{\eta L}{\sinh \eta L} - 1 & -\frac{\eta L}{\sinh \eta L} - \xi & 0 \\ 0 & -\frac{\eta L}{\sinh \eta L} - \frac{1}{\xi} & \frac{\eta L}{\sinh \eta L} - 1 & \frac{\eta L}{\tanh \eta L} + \frac{1}{\xi} & 1 - \frac{\eta L}{\tanh \eta L} & 0 \\ 0 & \frac{\eta L}{\sinh \eta L} - 1 & -\frac{\eta L}{\sinh \eta L} - \xi & 1 - \frac{\eta L}{\tanh \eta L} & \frac{\eta L}{\tanh \eta L} + \xi + (1+\xi) \frac{L}{l_2} & -(1+\xi) \frac{L}{l_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(1+\xi) \frac{L}{l_2} & (1+\xi) \frac{L}{l_2} \end{pmatrix}$$

Le vecteur des efforts nodaux de la structure  $F_s$  est construit à partir de l'effort appliqué  $f$  et des efforts équivalents nodaux au chargement thermique, soit :

$$Eq. 87 \quad F_s = \begin{pmatrix} -A_1 \widehat{\alpha}_1 \Delta \widehat{T} \\ 0 \\ -A_1 \widehat{\alpha}_1 \Delta \widehat{T} \\ A_1 \alpha_1 \Delta \widehat{T} \\ 0 \\ f + A_2 \widehat{\alpha}_2 \Delta \widehat{T} \end{pmatrix}$$

Enfin, le déplacement du nœud 1 est nul. La première ligne des vecteurs  $F_s$  et  $U_s$  ainsi que la première ligne et la première colonne de  $K_s$  sont supprimées. La taille du système à inverser est donc 5x5. La minimisation de l'énergie potentielle permet d'obtenir  $U_s = K_s^{-1} F_s$ .

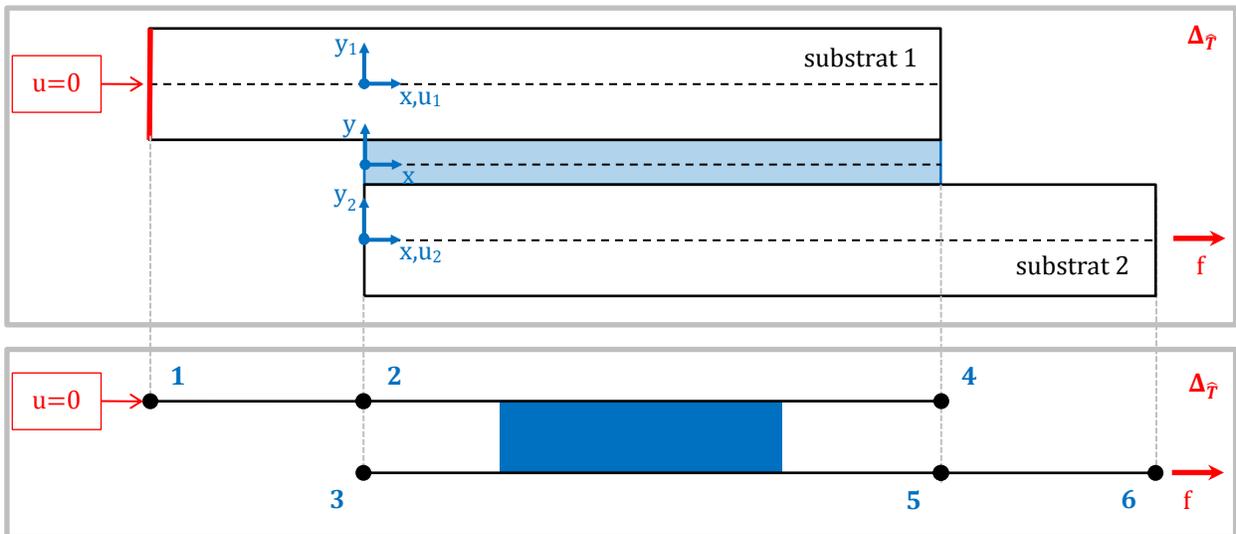


Figure 15 Modélisation par ME d'un simple recouvrement collé en cinématique de barre et numérotation des nœuds de 1 à 6. La longueur du recouvrement collé est  $L$ .

## Remarque conclusive

Le cadre d'analyse de cinématique de barre autorise une résolution analytique pour les assemblages collés quand la colle est considérée comme une fondation élastique. Des solutions analytiques sont possibles pour les assemblages boulonnés ou HBC quand des hypothèses supplémentaires de symétrie sont prises. Sinon, une résolution semi-analytique est possible par l'inversion d'un système linéaire. La modélisation par ME est ici une approche supplémentaire de résolution semi-analytique.

La résolution analytique permet de fournir une description du comportement global de l'assemblage collé en simple cisaillement, limitée par le domaine de validité des hypothèses simplificatrices. De plus, la description du comportement global est enrichie, naturellement dans ce cas, par une description locale du comportement de la couche de colle permettant de limiter les prédictions du comportement global de l'assemblage. Le transfert des efforts est donc réalisé en fonction des déformabilités des substrats et de la colle mais aussi de leur tenue. Le transfert des efforts peut être réalisé en s'éloignant du risque de rupture de la colle en cisaillement, mais l'assemblage devra alors tolérer une raideur globale moins importante. Une description approchée peut être fournie en utilisant cette modélisation simplifiée et ouvrant d'ailleurs la voie à une analyse vibratoire simplifiée (section 5.1).

Néanmoins, cette modélisation n'est certainement pas suffisamment complexe pour prendre en compte le comportement local des substrats et de la colle. Par exemple, d'après Hart-Smith, la tenue cohésive de la colle dépend de sa capacité à se déformer en cisaillement [Hart-Smith 1973b]. Un choix de colle avec un comportement de type élasto-plastique permettrait d'augmenter le flux de tension transmissible. En ce cas, une analyse prenant en compte un comportement non linéaire pourrait être plus adaptée, nécessitant un schéma de résolution dédié, comme par exemple la mise en place d'un calcul itératif ou le recours à l'approche par équivalence d'Adams et Mallick [Adams et Mallick 1993]. La tenue de la colle est aussi limitée par la présence du pelage [Hart-Smith 1973a] [Hart-Smith 1973b]. L'influence est d'autant plus importante que les épaisseurs des substrats sont importantes puisque l'augmentation des épaisseurs implique l'augmentation du décalage de fibre neutre. Pour prendre en compte le pelage, une cinématique de poutre doit être choisie à la place de la cinématique de barre [Goland et Reissner 1944] [Volkersen 1965] [Hart-Smith 1973a]. Une question se pose alors sur le choix de la cinématique à adopter en fonction des épaisseurs des substrats. De plus, la restriction du tenseur des contraintes de la colle à une unique composante, qui est constante dans son épaisseur ne permet pas de représenter le champ de contrainte réel en bord de recouvrement. Or, le bord du recouvrement est le siège des plus forts gradients de contrainte et de déformation. Le bord du recouvrement est donc la zone, où la colle entrera dans son éventuel domaine non linéaire et/ou son endommagement s'initiera menant à une fissure susceptible de se propager [Gilibert et Rigolot 1985].

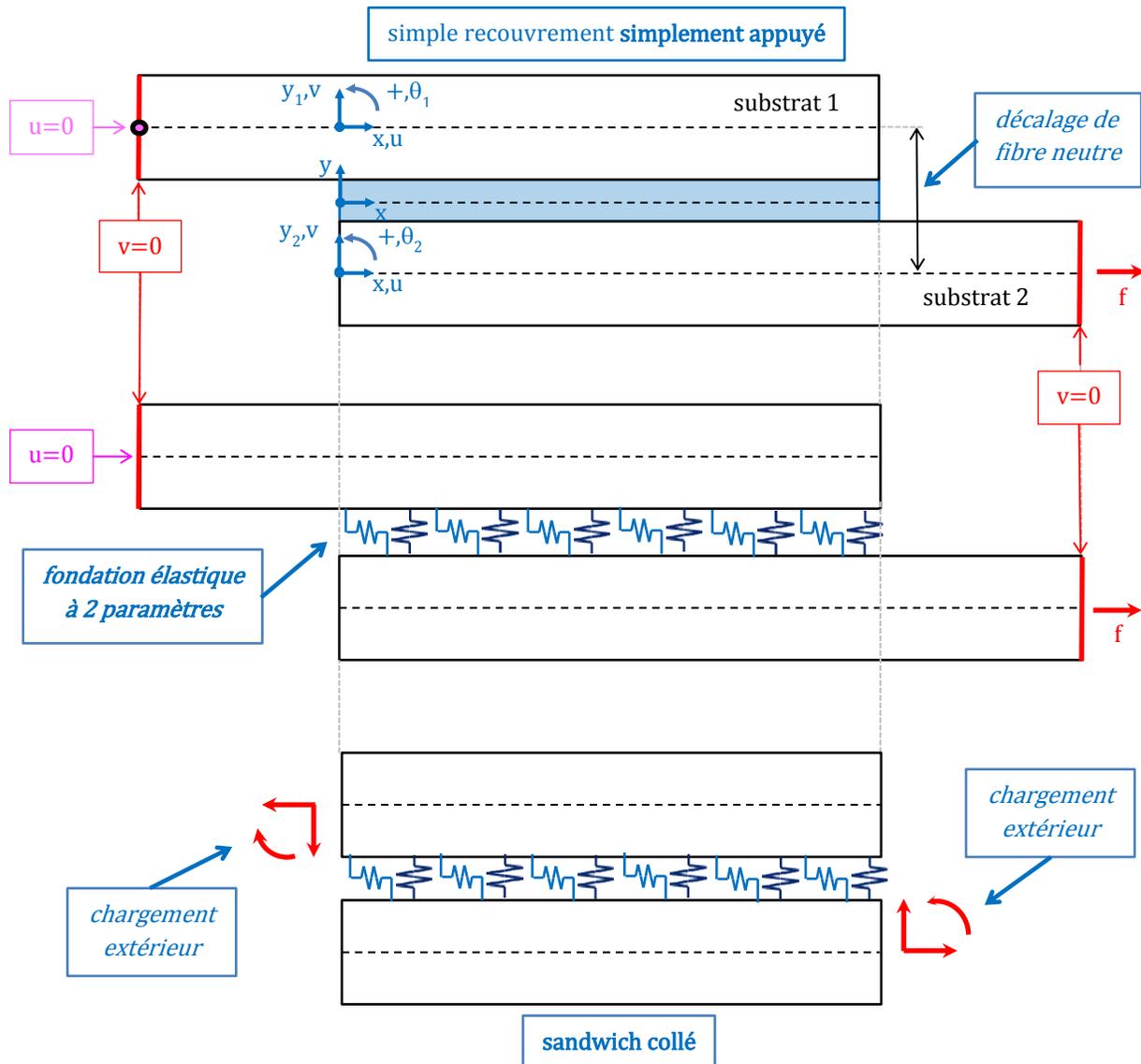
## 2.3 Choix d'une cinématique plus représentative : cinématique de poutre

### 2.3.1 Modélisation simplifiée à fondation élastique

#### Introduction

Les modélisations simplifiées des assemblages collés permettant une résolution analytique ou semi-analytique peuvent être classées en deux catégories. La première catégorie correspond à des hypothèses simplificatrices qui considèrent l'assemblage des deux substrats comme deux poutres ou deux plaques en flexion cylindrique reliées par une fondation élastique, représentant la couche de colle. Les modélisations de Volkersen ou d'Arnovljevic appartiennent à cette catégorie. Considérer la colle comme une fondation élastique permet d'exprimer les déformations et les contraintes dans la colle en fonction des déplacements et rotations des substrats et de leurs dérivées. Autrement dit, la couche de colle est représentée comme un couplage cinématique des deux substrats, de sorte que l'équilibre de la colle n'est pas considéré dans ces modélisations. La seconde catégorie considère l'assemblage comme un milieu continu, régi par l'élasticité plane. L'équilibre de la couche de colle est alors considéré. L'effort de traitement mathématique associé aux modèles monodimensionnels de la première catégorie apparaît comme moins important que celui demandé pour les modèles potentiellement bidimensionnels de la seconde catégorie. Néanmoins, contrairement au cadre d'analyse en cinématique de barre, la possibilité d'écrire une solution purement analytique pour une modélisation à fondation élastique n'est pas toujours garantie en cinématique de poutre – incluant le comportement en membrane et en flexion. Pourtant, la flexion des substrats, due au décalage de fibre neutre (Figure 16), induit des contraintes de pelage qui influent significativement sur la tenue des assemblages collés [Hart-Smith 1973a] [Hart-Smith 1985].

La brève revue bibliographique sur les modélisations à fondation élastique qui suit vise à mettre en évidence les limites des champs d'application des formules analytiques pour le comportement mécanique d'un assemblage en simple recouvrement collé (Figure 16) en cinématique de poutre. Des revues bibliographiques sur le sujet peuvent être trouvées par exemple dans [van Ingen et Vlot 1993] [da Silva *et al.* 2009a]. Une brève revue bibliographique des modélisations à milieu continu est présentée en section 3.1.2.



**Figure 16** Modélisation d'un assemblage en simple recouvrement collé simplement appuyé et du sandwich collé sous chargement extérieur par une fondation élastique à 2 paramètres. Représentation du décalage de fibre neutre.

### Analyse de l'assemblage en simple recouvrement collé

En 1944, Goland et Reissner proposent une solution analytique pour la répartition des contraintes de cisaillement et de pelage dans la colle le long du recouvrement [Goland et Reissner 1944], adossée à une méthodologie d'analyse qui sera reprise par la suite par d'autres auteurs. La solution proposée est limitée au cas où les deux substrats sont identiques et ont un comportement mécanique linéaire élastique isotrope, tout comme la colle. De plus, l'assemblage est simplement supporté et chargé par un effort de traction (Figure 16), de sorte que la structure est isostatique. Les substrats sont modélisés comme

des plaques en flexion cylindrique sous la cinématique de Kirchhoff-Love. La méthodologie présentée consiste à considérer le recouvrement collé ou sandwich collé (Figure 16) pour déterminer la forme analytique des contraintes de cisaillement et de pelage le long du recouvrement à partir des équations d'équilibre local et des équations constitutives. Sept constantes d'intégration apparaissent alors. Elles sont déterminées à partir de six conditions aux limites aux bords du recouvrement exprimés en effort et de la condition de transfert total de l'effort par la couche de colle (Eq. 38). Il est donc nécessaire d'analyser le comportement mécanique hors du recouvrement. La solution proposée par Goland et Reissner suppose l'équilibre des zones hors recouvrement en configuration déformée. Les efforts tranchants et moments de flexion en bord de recouvrement dépendent alors non-linéairement de l'effort de traction appliqué. Cette dépendance non-linéaire est introduite dans un facteur correctif du moment fléchissant. La détermination de ce coefficient est réalisée en négligeant la souplesse entre les deux substrats due à la présence de la colle : le recouvrement collé est traité comme une plaque homogène d'épaisseur égale à la somme des épaisseurs des substrats. Dans les années 70, Hart-Smith modifie l'approche linéaire élastique de Goland et Reissner en prenant en compte l'épaisseur de la colle dans les équations d'équilibre local en moment [Hart-Smith 1973a]. De plus, contrairement à Goland et Reissner, la détermination du moment de flexion en bord de recouvrement est réalisée en prenant en considérant individuellement chaque substrat et la présence de la contrainte de cisaillement de la colle. Une nouvelle expression du facteur correctif de moment fléchissant est obtenue. Enfin, Hart-Smith introduit un coefficient dans la raideur de flexion des substrats permettant de prendre en compte leur possible stratification. Afin d'obtenir une solution analytique, la valeur des efforts tranchants en bord sont considérés nulles. Au travers d'une résolution dédiée, des comportements élasto-plastiques parfait et bilinéaire de la colle sont intégrés dans la formulation. Par ailleurs, Hart-Smith fournit des solutions analytiques ou semi-analytiques pour le cas de l'assemblage du double recouvrement collé [Hart-Smith 1973b], biseauté ou en escalier [Hart-Smith 1973c]. Ojalvo et Eidinoff modifie l'analyse de Goland et Reissner en considérant que le déplacement longitudinal et de la flèche varient linéairement avec la position dans l'épaisseur de la couche de colle [Ojalvo et Eidinoff 1978]. Il en résulte que la définition de déformation de cisaillement dans la colle inclut à la fois le déplacement longitudinal et la flèche. Une solution analytique pour les contraintes de cisaillement et de pelage est fournie. En 1998, Tsai *et al.* fournissent une solution du modèle de Goland et Reissner avec prise en compte d'une variation linéaire de la contrainte de cisaillement dans l'épaisseur des substrats [Tsai *et al.* 1998]. En 1991, Oplinger modifie l'analyse d'Hart-Smith en considérant en plus que les substrats ont de grandes déflexions sur le recouvrement [Oplinger 1991] [Oplinger 1994]. Un nouveau facteur de moment fléchissant est alors fourni en plus des expressions des contraintes adhésives de cisaillement et de pelage dans la colle. Tsai et Morton évaluent les analyses de Goland et Reissner, Hart-Smith et Oplinger par rapport à des résultats EF issus d'une analyse non linéaire géométrique [Tsai et Morton 1994]. En termes de facteur correctif de

moment, l'approche d'Hart-Smith est la plus adaptée pour des recouvrements courts tandis que celle d'Oplinger l'est pour des recouvrements longs. Il est montré aussi qu'en termes de répartition de contraintes dans la couche de colle, l'approche de Goland et Reissner fournit des prédictions correctes que le recouvrement soit long ou court. En 2007, Luo et Tong étendent la formulation d'Oplinger en prenant en compte la déformation de la couche de colle [Luo et Tong 2007] impliquant alors le couplage des deux substrats pour la détermination du moment de flexion en bord de recouvrement. En effet, dès les équations d'équilibre local, l'effort normal et le moment de flexion sont couplés. La solution analytique de Luo et Tong est écrite pour deux substrats identiques sans couplage membrane flexion. Ils montrent que, comparées à des prédictions EF non linéaires géométriques, les prédictions de leur modèle sont plus proches que celles de Goland et Reissner, Hart-Smith ou Oplinger. Les modèles à fondation élastique à deux paramètres ne permettent pas de reproduire l'état de contrainte libre sur les facettes en bord de couche de colle. En 2009, Wang et Zhang proposent un modèle à fondation élastique à trois paramètres permettant de retrouver une contrainte de cisaillement nulle aux bords libres de la couche de colle [Wang et Zhang 2009]. Les substrats peuvent être différents et sont considérés comme des poutres linéaires isotropes élastiques de Timoshenko. L'équilibre local des substrats correspond à celui de Goland et Reissner et fait apparaître deux contraintes de pelage qui peuvent être différentes aux interfaces substrat colle. Trois relations constitutives pour la couche de colle sont alors utilisées : une pour le cisaillement et une pour chacune des contraintes de pelage. Ces relations constitutives étendent les expressions des modèles de fondation élastique à deux paramètres. De plus elles sont compatibles avec l'équilibre local de la colle permettant de lier la dérivée de la contrainte de cisaillement avec les deux contraintes de pelage. L'effort tranchant dans la colle est alors considéré dans l'équilibre global de la structure. Les efforts en bord de sandwich collé sont déterminés à partir des facteurs de moment fléchissant donnés par Cheng *et al.* [Cheng *et al.* 1991] ; l'approche utilisée correspond à celle de Goland et Reissner mais appliquée au cas de deux substrats différents.

### **Analyse du sandwich collé**

La détermination des efforts appliqués en bord de sandwich collé peut être complexe et nécessiter d'autres approches pour les évaluer comme l'utilisation de modélisations par EF. Plusieurs travaux se sont alors concentrés sur l'analyse du sandwich collé, dont les solutions sont fournies en fonction des conditions en bord. En 1975, Williams reprend les hypothèses de Goland et Reissner sont reprises mise à part celle sur l'identité des substrats puisqu'ils peuvent être différents [Williams 1975]. Les charges en bord de recouvrement pour déterminer les sept constantes d'intégration sont à exprimer en fonction des contraintes dans la colle et de leurs dérivées et à déterminer par l'utilisateur en fonction de la configuration donnée. En 1977, Renton et Vinson considèrent deux substrats pouvant être différents et possiblement orthotropes en déformation plane,

incluant les déformations transverses de cisaillement et de tension ainsi que les dilatations thermiques [Renton et Vinson 1977]. En particulier, une répartition de la contrainte de cisaillement parabolique dans l'épaisseur des substrats est supposée. L'équilibre local des substrats est celui de la théorie de Goland et Reissner, théorie à partir de laquelle les efforts en bords de sandwich collé sont déterminés. Une équation d'ordre 8 bicarrée en la contrainte de cisaillement est obtenue en manipulant les équations constitutives des substrats et les équations d'équilibre local. Une contrainte de cisaillement nulle dans la colle aux bords du recouvrement est obtenue. La résolution est semi-analytique. En 1981, Delale *et al.* fournissent la solution analytique de la répartition des contraintes dans la colle pour un sandwich collé réalisé à l'aide de deux substrats, possiblement orthotropes différents [Delale *et al.* 1981] [Delale et Erdogan 1981]. Le cisaillement transverse dans les substrats selon la théorie de Mindlin-Reissner et les déformations longitudinales dans la colle sont pris en compte dans la formulation. La déformation longitudinale de la colle est évaluée à partir de la moyenne des déformations longitudinales aux deux interfaces des substrats. L'effet Poisson permet alors de l'introduire dans la déformation de pelage. L'équilibre local d'Hart-Smith est utilisé. La déformation normale de colle est exprimée en fonction des dérivées de déplacement et rotation des substrats. Les constantes d'intégration sont exprimées en fonction des efforts en bord de recouvrement. En 1989, Bigwood et Crocombe ne considèrent que le sandwich collé et des substrats différents [Bigwood et Crocombe 1989]. Les équations d'équilibre local correspondent à celles d'Hart-Smith et prennent donc en compte l'épaisseur de colle dans l'équilibre des moments. Des formules analytiques sur les contraintes maximales dans la colle sont établies en fonction du chargement en bord du recouvrement qui est à déterminer par l'utilisateur. En 1990, Bigwood et Crocombe utilisent un schéma de résolution basé sur les différences finies afin de résoudre le système d'équations différentielles non linéaires induit par un comportement non-linéaire de la colle [Bigwood et Crocombe 1990]. Un cas d'application avec un comportement de la colle sous la forme d'une contrainte dépendante de la tangente hyperbolique de la déformation à des facteurs près est considéré. En 2004, Alfredsson et Högberg fournissent une solution à la répartition des contraintes dans la colle pour des conditions au bord du sandwich exprimées en effort ou en déplacement [Högberg 2004] [Alfredsson et Högberg 2008]. Dans leur analyse, les deux substrats sont différents et modélisés comme des poutres d'Euler-Bernoulli. Les équations d'équilibre local correspondent à celles de Goland et Reissner. En 2014, Weißgraeber *et al.* donnent une résolution semi-analytique pour la répartition des contraintes de la colle en supposant que les substrats sont stratifiés et différents [Weißgraeber *et al.* 2014]. L'analyse s'appuie sur le comportement de plaque de Mindlin-Reissner, restreinte à une cinématique plane. Le couplage membrane-flexion est inclus dans l'analyse et les équations d'équilibre local d'Hart-Smith sont choisies. La même année, les contraintes dans la couche de colle sont fournies par [Liu *et al.* 2014] en fonction d'un chargement appliqué en bord de recouvrement sous forme d'effort et/ou de déplacement. La résolution est semi-analytique et considère les substrats comme des poutres de

Timoshenko incluant le couplage membrane-flexion et pouvant être différents. De plus, l'équilibre local correspond à celui de Goland et Reissner.

### **Remarque conclusive**

Le champ d'application des formules analytiques paraît donc réduit, malgré le travail effectué à partir des hypothèses initiales de Goland et Reissner. Pour une application de ces modélisations simplifiées à des configurations matérielles, géométriques et de chargement variées, une résolution semi-analytique apparaît nécessaire. A la fin des années 90, Mortensen et Thomsen proposent un schéma de résolution permettant d'envisager diverses conditions aux limites et de chargement ainsi que différentes géométrie (recouvrement biseauté, en escalier) [Mortensen et Thomsen 1997] [Mortensen 1998] [Mortensen et Thomsen 2002a] [Mortensen et Thomsen 2002b]. Les substrats sont linéaires élastiques, considérés comme des poutres stratifiées d'Euler-Bernoulli ou des plaques stratifiées en cinématique de Kirchhoff-Love. La couche de colle est une fondation élastique qui peut présenter un comportement non-linéaire. Un schéma d'intégration numérique (*multi-segment method of integration* [Kalnins 1964]) est utilisé et s'appuie sur un maillage, même pour un calcul linéaire élastique. L'approche de Mortensen et Thomsen a été implémentée dans ESAComp, l'outil de prédimensionnement de structures composites développé par l'Agence Spatiale Européenne [Mortensen et Thomsen 2002a]. L'approche par ME a été développée à l'origine pour l'analyse simplifiée des assemblages HBC. Néanmoins, la modélisation par ME appliquée aux assemblages collés est aussi une approche de résolution semi-analytique de modélisation à fondation élastique offrant l'avantage de fournir une solution pour des configurations matérielles, géométriques et de chargement pour lesquelles, en particulier, il n'existe pas de solution analytique.

## 2.3.2 Formulation d'un macro-élément « poutres-collées »

### Introduction

Pendant ma thèse de doctorat, seul un ME de poutres-collées avec deux substrats linéaires élastiques isotropes identiques a été formulé – en cinématique de membrane plus flexion. Dans cette section, la formulation d'un ME poutres-collées considérant deux substrats linéaires élastiques orthotropes différents avec couplage membrane-flexion est présentée. Le chemin mathématique et la méthode nécessaire à son implémentation ont été établis fin 2008. Le ME a alors vu le jour en 2009 grâce au travail d'Anthony Da Veiga [Da Veiga 2009]. La formulation a été publiée dans [Paroissien *et al.* 2011] [Paroissien *et al.* 2013a] [Paroissien *et al.* 2013b].

Le chemin de résolution nécessaire à la formulation de la matrice de raideur du ME est proche de celui de [Högberg 2004] [Alfredsson et Högberg 2008] et prend en compte en plus les raideurs de couplage membrane-flexion des substrats. Le formalisme de présentation de la formulation diffère légèrement de celle présentée dans [Paroissien *et al.* 2011] [Paroissien *et al.* 2013a] [Paroissien *et al.* 2013b] et correspond à celui adopté en section 2.2.3 ou dans [Lachaud *et al.* 2020].

### Hypothèses et équations gouvernant le modèle

Les hypothèses simplificatrices sont les suivantes :

- H2-1 : cadre des hypothèses des petites perturbations sous charge quasi-statique ;
- H2-2 : les matériaux sont linéaires élastiques ;
- H2-3 : les substrats sont modélisés comme des poutres stratifiées d'Euler-Bernoulli ;
- H2-4 : la colle est modélisée par une fondation élastique homogène reliant les deux interfaces et à deux paramètres, associés au cisaillement et au pelage ;
- H2-5 : les paramètres géométriques sont quelconques mais constants.

Les équations d'équilibre local de chacun des deux substrats sont obtenues, en isolant entre  $x$  et  $x+dx$  un volume élémentaire. Chaque volume élémentaire de substrat  $i$  est soumis aux efforts normaux  $N_i$ , tranchants  $V_i$  et moments de flexion  $M_i$ , ainsi que, par réaction, aux contraintes de la colle de cisaillement  $T$  et de pelage  $S$  sur la surface d'aire  $w dx$ , où  $w$  est la profondeur de recouvrement. L'équilibre de chaque volume élémentaire s'écrit alors (Figure 17) :

$$\text{Eq. 88 } \frac{dN_i}{dx} = (-1)^i w T \quad i = 1, 2$$

$$\text{Eq. 89 } \frac{dV_i}{dx} = (-1)^{i+1} w S \quad i = 1, 2$$

$$\text{Eq. 90 } \frac{dM_i}{dx} = -V_i - w h_i T \quad i = 1, 2$$

où  $h_i$  est la demi épaisseur du substrat  $i$ . Cet équilibre correspond à celui réalisé par Goland et Reissner. Les équations constitutives des substrats sous l'hypothèse H2-3 sont données par :

$$\text{Eq. 91 } N_i = A_i \frac{du_i}{dx} - B_i \frac{d\theta_i}{dx} \quad i = 1, 2$$

$$\text{Eq. 92 } M_i = -B_i \frac{du_i}{dx} + D_i \frac{d\theta_i}{dx} \quad i = 1, 2$$

$$\text{Eq. 93 } \frac{dv_i}{dx} = \theta_i \quad i = 1, 2$$

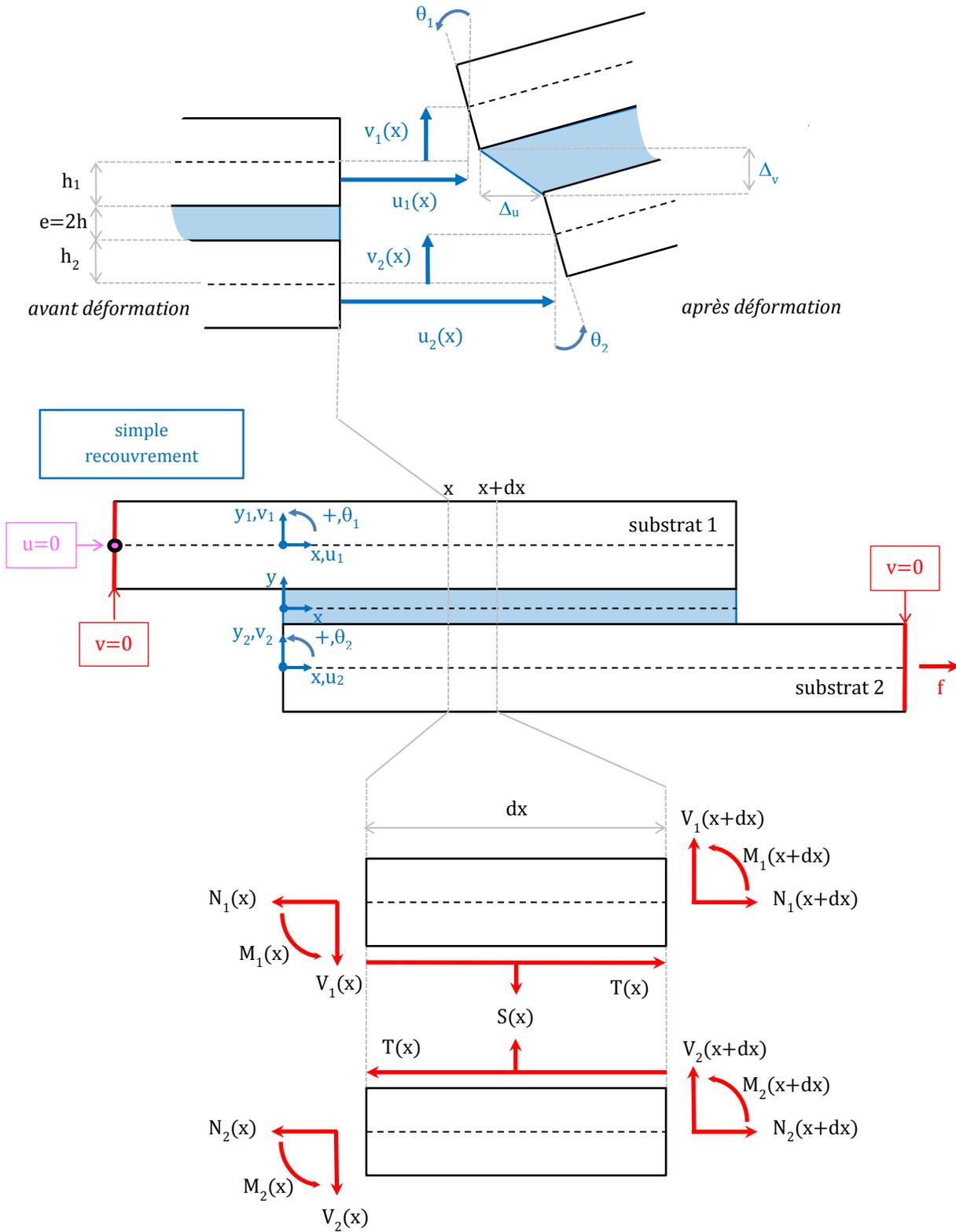
où, pour le substrat  $i$ ,  $B_i$  est la raideur de couplage membrane-flexion,  $D_i$  la raideur de flexion,  $v_i$  la flèche et  $\theta_i$  l'angle de flexion. Les équations Eq. 88 à Eq. 93 forment un système de douze équations différentielles du premier ordre couplées au travers des contraintes de cisaillement et de pelage dans la colle.

Les équations constitutives de la colle s'écrivent à partir des déplacements relatifs des interfaces de la colle par :

$$\text{Eq. 94 } T = \frac{G}{e} \Delta_u = \frac{G}{e} (u_2 - u_1 - h_2 \theta_2 - h_1 \theta_1)$$

$$\text{Eq. 95 } S = \frac{E}{e} \Delta_v = \frac{E}{e} (v_1 - v_2)$$

où  $\Delta_v$  est le déplacement relatif vertical des deux substrats et  $E$  le module de pelage de la colle. Il est remarqué que la variation d'épaisseur de la colle  $e$  dans la transformation est négligée. Ce module de pelage est par exemple défini par Hart-Smith comme le module effectif de la colle sous sollicitation du pelage prenant en compte à la fois une légère déformation transverse des substrats et le confinement de la colle [Hart-Smith 1973b]. En effet, sous une sollicitation de pelage, la contraction transversale de celle-ci est contrariée par les substrats bien plus raides qu'elle et qui s'y opposent.



**Figure 17** Cinématique et équilibre local. Les conditions aux limites de l'assemblage correspondent au cas du simple recouvrement simplement appuyé.

## Formulation de la matrice de raideur du ME

Un recouvrement collé de longueur  $\Delta$  est considéré. Il est modélisé par un ME à quatre nœuds (Figure 5). Chaque nœud a trois déplacements nodaux et trois efforts nodaux, définis à partir de  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $\theta_i$  puis de  $N_i$ ,  $V_i$  et  $M_i$  (Figure 18). Le vecteur des déplacements nodaux du ME est noté  $U_e$ , tandis que le vecteur des efforts nodaux est noté  $F_e$ ; ils sont définis par :

$$\text{Eq. 96 } U_e = \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_1(\Delta) \\ u_2(\Delta) \\ v_1(0) \\ v_2(0) \\ v_1(\Delta) \\ v_2(\Delta) \\ \theta_1(0) \\ \theta_2(0) \\ \theta_1(\Delta) \\ \theta_2(\Delta) \end{pmatrix} \quad \text{et } F_e = \begin{pmatrix} -N_1(0) \\ -N_2(0) \\ N_1(\Delta) \\ N_2(\Delta) \\ -V_1(0) \\ -V_2(0) \\ V_1(\Delta) \\ V_2(\Delta) \\ -M_1(0) \\ -M_2(0) \\ M_1(\Delta) \\ M_2(\Delta) \end{pmatrix}$$

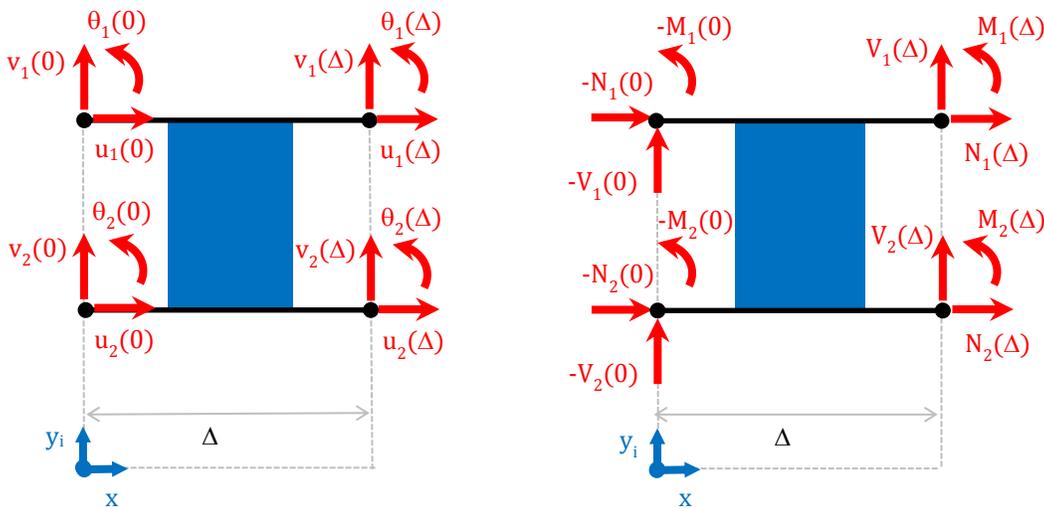


Figure 18 Déplacements nodaux et efforts nodaux sur un ME poutres-collées ainsi que le système d'axes local  $(x; y)$  associé au ME.

La démarche consiste alors à exprimer les efforts nodaux en fonction des déplacements nodaux afin de déterminer la matrice de raideur du ME  $K_e$ . Comme pour le cas du ME barres-collées, les déplacements nodaux et les efforts nodaux sont exprimés en fonction d'un vecteur de constantes d'intégration via des matrices de couplage  $D_e$  et  $L_e$ .

Les équations constitutives Eq. 91 et Eq. 92 sont dans un premier temps inversées afin d'exprimer les déformations en fonction des efforts :

$$\text{Eq. 97 } \frac{du_i}{dx} = \frac{D_i}{\Delta_i} N_i + \frac{B_i}{\Delta_i} M_i \quad i = 1, 2$$

$$\text{Eq. 98 } \frac{d\theta_i}{dx} = \frac{B_i}{\Delta_i} N_i + \frac{A_i}{\Delta_i} M_i \quad i = 1, 2$$

où  $\Delta_i = A_i D_i - B_i B_i \neq 0$ . En manipulant les équations d'équilibre local (Eq. 88 à Eq. 90), les équations constitutives des substrats (Eq. 94 à Eq. 95) et les équations constitutives des substrats précédentes (Eq. 97 à Eq. 98), un système d'équations différentielles couplées en les contraintes de la colle est obtenu sous la forme :

$$\text{Eq. 99 } \begin{cases} \frac{d^3 T}{dx^3} = k_1 \frac{dT}{dx} + k_2 S \\ \frac{d^4 S}{dx^4} = -k_3 \frac{dT}{dx} - k_4 S \end{cases}$$

où :

$$\text{Eq. 100 } k_1 = w \frac{G}{e} \left[ \frac{D_1}{\Delta_1} \left( 1 + \frac{h_1^2 A_1}{D_1} \right) + \frac{D_2}{\Delta_2} \left( 1 + \frac{h_2^2 A_2}{D_2} \right) + 2 \left( \frac{h_1 B_1}{\Delta_1} - \frac{h_2 B_2}{\Delta_2} \right) \right]$$

$$\text{Eq. 101 } k_2 = w \frac{G}{e} \left[ \frac{h_1 A_1}{\Delta_1} - \frac{h_2 A_2}{\Delta_2} + \left( \frac{B_1}{\Delta_1} + \frac{B_2}{\Delta_2} \right) \right]$$

$$\text{Eq. 102 } k_3 = w \frac{E}{e} \left[ \frac{h_1 A_1}{\Delta_1} - \frac{h_2 A_2}{\Delta_2} + \left( \frac{B_1}{\Delta_1} + \frac{B_2}{\Delta_2} \right) \right]$$

$$\text{Eq. 103 } k_4 = w \frac{E}{e} \left[ \frac{A_1}{\Delta_1} + \frac{A_2}{\Delta_2} \right]$$

Si les deux substrats sont identiques et isotropes, alors  $k_2 = k_3 = 0$ . Le système est alors découplé et correspond à celui de Goland et Reissner. De plus, le système obtenu est similaire à celui obtenu par Williams [Williams 1975] ou Alfredsson et Högberg [Högberg 2004] [Alfredsson et Högberg 2008] : seuls les coefficients  $k_i$  changent du fait des raideurs de couplage membrane flexion. Le système en Eq. 99 peut être découplé par combinaison linéaires et dérivations successives pour fournir les deux équations différentielles suivantes :

$$\text{Eq. 104 } \begin{cases} \frac{d^6 S}{dx^6} - k_1 \frac{d^4 S}{dx^4} + k_4 \frac{d^2 S}{dx^2} + (k_2 k_3 - k_1 k_4) S = 0 \\ \frac{d}{dx} \left[ \frac{d^6 T}{dx^6} - k_1 \frac{d^4 T}{dx^4} + k_4 \frac{d^2 T}{dx^2} + (k_2 k_3 - k_1 k_4) T \right] = 0 \end{cases}$$

Le pelage et la dérivée du cisaillement sont donc alors les solutions d'une équation différentielle d'ordre 6 et présentent le même polynôme caractéristique qui a la particularité d'être bicarré. Les racines peuvent donc être exprimées analytiquement avec la méthode de Cardan. Guillaume Lélias montre qu'il existe quatre jeux de racines possibles [Lélias 2016]. Si le discriminant de Cardan est strictement positif alors le polynôme caractéristique admet (i) une paire de racines réelles opposées et deux paires de racines complexes conjuguées ou bien (ii) une paire de racines imaginaires pures conjuguées et

deux paires de racines complexes conjuguées. Si le discriminant de Cardan est négatif ou nul alors le polynôme caractéristique admet (iii) une paire de racines réelles opposées et deux paires de racines imaginaires pures conjuguées ou bien (iv) deux paires de racines réelles opposées et une paire de racines imaginaires pures conjuguées. Dans le cas où les deux substrats sont identiques sans raideur de couplage membrane-flexion alors le polynôme caractéristique admet le premier jeu de racines, à savoir une paire de racines réelles opposées et deux paires de racines complexes conjuguées, à condition que tous les paramètres géométriques et matériaux soient strictement positifs [Lélias 2016]. Ce jeu de racines est aussi celui déterminé pour deux substrats différents qu'ils soient isotropes [Högberg 2004] ou orthotropes sans couplages membrane-flexion [Williams 1975]. La formulation présentée ci-après correspond au choix du premier jeu de racines impliquant la forme suivante pour les formes de solution de  $T$  et  $S$ :

$$\text{Eq. 105} \begin{cases} T(x) = K_1 e^{sx} \sin tx + K_2 e^{sx} \cos tx + K_3 e^{-sx} \sin tx + K_4 e^{-sx} \cos tx + K_5 e^{rx} + K_6 e^{-rx} + K_7 \\ S(x) = K_8 e^{sx} \sin tx + K_9 e^{sx} \cos tx + K_{10} e^{-sx} \sin tx + K_{11} e^{-sx} \cos tx + K_{12} e^{rx} + K_{13} e^{-rx} \end{cases}$$

où les  $K_i$  sont des constantes d'intégration et  $r$ ,  $s$  et  $t$  sont trois réels obtenus à l'aide de la méthode de Cardan (section 5.3.1). Il est possible de formuler un ME pour chacun des trois autres jeux de racines en suivant exactement la même démarche que celle présentée ci-après. L'objectif pratique de la prise en compte des raideurs de couplage membrane-flexion est la modélisation de recouvrements biseautés ou en escalier par exemple. La modélisation de ces cas s'appuie sur un maillage le long du recouvrement. Il est noté ici qu'il existe d'autres approches de formulation du ME compatibles avec une stratégie de maillage et qui ne nécessitent pas de distinction des formes de solution (section 2.4.1).

Treize constantes d'intégration sont donc apparues. En introduisant, les expressions des contraintes données en Eq. 105 dans le système d'équations différentielles couplées Eq. 99, il est possible d'écrire six relations linéaires :

$$\text{Eq. 106} \begin{pmatrix} K_8 \\ K_9 \\ K_{10} \\ K_{11} \\ K_{12} \\ K_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \end{pmatrix}$$

où :

$$\text{Eq. 107} \alpha_1 = \frac{s(s^2 - 3t^2 - k_1)}{k_1}$$

$$\text{Eq. 108} \alpha_2 = \frac{t(t^2 - 3s^2 + k_1)}{k_2}$$

$$\text{Eq. 109} \alpha_3 = \frac{r(r^2 - k_1)}{k_2}$$

À ce stade, il reste sept constantes d'intégration à déterminer. En utilisant l'approche de Goland et Reissner, il est possible de déterminer ces constantes d'intégration en fonction

des efforts nodaux et donc de fournir un modèle de sandwich collé dépendant des efforts en bord (section 5.3.2). Néanmoins, cela n'est pas suffisant pour aboutir à la matrice de raideur du ME, exprimant les relations linéaires entre les efforts nodaux et déplacements nodaux. À partir des équations constitutives des substrats (Eq. 97 à Eq. 98) et des équations d'équilibre (Eq. 88 à Eq. 90) les dérivées quatrièmes des flèches et troisièmes des déplacements longitudinaux sont exprimés :

$$\text{Eq. 110 } \frac{d^4 v_1}{dx^4} = A_{10} \frac{dT}{dx} + B_{10} S$$

$$\text{Eq. 111 } \frac{d^4 v_2}{dx^4} = A_{20} \frac{dT}{dx} + B_{20} S$$

$$\text{Eq. 112 } \frac{d^3 u_1}{dx^3} = C_{10} \frac{dT}{dx} + D_{10} S$$

$$\text{Eq. 113 } \frac{d^3 u_2}{dx^3} = C_{20} \frac{dT}{dx} + D_{20} S$$

où:

$$\text{Eq. 114 } A_{10} = -\frac{w}{\Delta_1} (B_1 + h_1 A_1)$$

$$\text{Eq. 115 } B_{10} = -\frac{w A_1}{\Delta_1}$$

$$\text{Eq. 116 } A_{20} = \frac{w}{\Delta_2} (B_2 - h_2 A_2)$$

$$\text{Eq. 117 } B_{20} = \frac{w A_2}{\Delta_2}$$

$$\text{Eq. 118 } C_{10} = -\frac{w}{\Delta_1} (h_1 B_1 + D_1)$$

$$\text{Eq. 119 } D_{10} = -\frac{w B_1}{\Delta_1}$$

$$\text{Eq. 120 } C_{20} = \frac{w}{\Delta_2} (-h_2 B_2 + D_2)$$

$$\text{Eq. 121 } D_{20} = \frac{w B_2}{\Delta_2}$$

Le système d'équations différentielles couplées (Eq. 99) est écrit sous la forme suivante :

$$\text{Eq. 122 } \begin{cases} S = \frac{1}{k_2 k_3 - k_1 k_4} \left[ k_3 \frac{d^3 T}{dx^3} + k_1 \frac{d^4 S}{dx^4} \right] \\ \frac{dT}{dx} = \frac{1}{k_1 k_4 - k_2 k_3} \left[ k_4 \frac{d^3 T}{dx^3} + k_2 \frac{d^4 S}{dx^4} \right] \end{cases}$$

Les expressions du pelage  $S$  et de la dérivée du cisaillement  $T$  sont alors introduites dans les équations Eq. 110 à Eq. 113, puis intégrer :

$$\text{Eq. 123 } u_1 = \frac{C_{10} k_4 - D_{10} k_3}{k_1 k_4 - k_2 k_3} T + \frac{C_{10} k_2 - D_{10} k_1}{k_1 k_4 - k_2 k_3} \frac{dS}{dx} + J_4 \left( \frac{x}{\Delta} \right)^2 + J_5 \frac{x}{\Delta} + J_6$$

$$\text{Eq. 124 } u_2 = \frac{C_{20}k_4 - D_{20}k_3}{k_1k_4 - k_2k_3} T + \frac{C_{20}k_2 - D_{20}k_1}{k_1k_4 - k_2k_3} \frac{dS}{dx} + \bar{J}_4 \left(\frac{x}{\Delta}\right)^2 + \bar{J}_5 \frac{x}{\Delta} + \bar{J}_6$$

$$\text{Eq. 125 } v_1 = \frac{A_{10}k_4 - B_{10}k_3}{(k_1k_4 - k_2k_3)^2} \left( k_4 \frac{dT}{dx} + k_2 \frac{d^2S}{dx^2} \right) + \frac{A_{10}k_2 - B_{10}k_1}{k_1k_4 - k_2k_3} S + J_0 \left(\frac{x}{\Delta}\right)^3 + J_1 \left(\frac{x}{\Delta}\right)^2 + J_2 \frac{x}{\Delta} + J_3$$

$$\text{Eq. 126 } v_2 = \frac{A_{20}k_4 - B_{20}k_3}{(k_1k_4 - k_2k_3)^2} \left( k_4 \frac{dT}{dx} + k_2 \frac{d^2S}{dx^2} \right) + \frac{A_{20}k_2 - B_{20}k_1}{k_1k_4 - k_2k_3} S + \bar{J}_0 \left(\frac{x}{\Delta}\right)^3 + \bar{J}_1 \left(\frac{x}{\Delta}\right)^2 + \bar{J}_2 \frac{x}{\Delta} + \bar{J}_3$$

$$\text{Eq. 127 } \theta_1 = \frac{A_{10}k_4 - B_{10}k_3}{k_1k_4 - k_2k_3} (T - K_7) + \frac{A_{10}k_2 - B_{10}k_1}{k_1k_4 - k_2k_3} \frac{dS}{dx} + 3J_0 \frac{x^2}{\Delta^3} + 2J_1 \frac{x}{\Delta^2} + J_2 \frac{1}{\Delta}$$

$$\text{Eq. 128 } \theta_2 = \frac{A_{20}k_4 - B_{20}k_3}{k_1k_4 - k_2k_3} (T - K_7) + \frac{A_{20}k_2 - B_{20}k_1}{k_1k_4 - k_2k_3} \frac{dS}{dx} + 3\bar{J}_0 \frac{x^2}{\Delta^3} + 2\bar{J}_1 \frac{x}{\Delta^2} + \bar{J}_2 \frac{1}{\Delta}$$

Quatorze nouvelles constantes d'intégration apparaissent. L'équilibre local en effort selon  $x$  pour le substrat 2 ainsi que son équation constitutive donnent :

$$\text{Eq. 129 } \frac{dN_2}{bdx} = T \Rightarrow A_2 \frac{d^2u_2}{dx^2} - B_2 \frac{d^3v_2}{dx^3} = bT$$

d'où :

$$\text{Eq. 130 } A_2 \frac{2\bar{J}_4}{\Delta^2} - B_2 \frac{6\bar{J}_0}{\Delta^3} = wK_7 \Rightarrow \bar{J}_4 = \frac{w\Delta^2 K_7}{2A_2} + \frac{3B_2\bar{J}_0}{A_2\Delta}$$

De la même manière, avec le substrat 1, il vient :

$$\text{Eq. 131 } J_4 = -\frac{w\Delta^2 K_7}{2A_1} + \frac{3B_1 J_0}{A_1\Delta}$$

Ensuite, le déplacement vertical de l'interface  $\Delta_v$  est écrit :

$$\text{Eq. 132 } v_1 - v_2 = \frac{S}{k_1} + (J_0 - \bar{J}_0) \left(\frac{x}{\Delta}\right)^3 + (J_1 - \bar{J}_1) \left(\frac{x}{\Delta}\right)^2 + (J_2 - \bar{J}_2) \frac{x}{\Delta} + J_3 - \bar{J}_3$$

Mais, vu l'expression de l'équation constitutive de la colle en pelage (Eq. 95), l'identification au polynôme nul fournit :

$$\text{Eq. 133 } \bar{J}_i = J_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Enfin, à partir des expressions définissant  $k_i$ , les identités suivantes sont écrites :

$$\text{Eq. 134 } D_{10} - D_{20} + h_1 B_{10} + h_2 B_{20} = -\frac{k_2}{\frac{G}{e}}$$

$$\text{Eq. 135 } C_{20} - C_{10} - h_1 A_{10} - h_2 B A_{20} = \frac{k_1}{\frac{G}{e}}$$

Le déplacement relatif horizontal de l'interface  $\Delta_u$  est alors écrit :

$$\text{Eq. 136 } u_2 - u_1 - h_2 \theta_2 - h_1 \theta_1 = \frac{T}{k_{II}} + P(x)$$

où  $P(x)$  est un polynôme d'ordre, pour lequel tous les coefficients doivent être nuls

$$\text{Eq. 137 } \bar{J}_4 - J_4 - 3h_1 \frac{J_0}{\Delta} - 3h_2 \frac{\bar{J}_0}{\Delta} = 0$$

$$\text{Eq. 138 } \bar{J}_5 - J_5 - 2h_1 \frac{J_1}{\Delta} - 2h_2 \frac{\bar{J}_1}{\Delta} = 0$$

$$\text{Eq. 139 } \bar{J}_6 - J_6 - h_1 \frac{J_2}{\Delta} - h_2 \frac{\bar{J}_2}{\Delta} + \frac{K_7}{k_1 k_4 - k_2 k_3} [k_4 (h_1 A_{10} + h_2 A_{20}) - k_3 (h_1 B_{10} + h_2 B_{20})] = 0$$

Le jeu de constantes d'intégration  $J_1, J_2, J_3, J_5$  et  $J_6$  est donc indépendant. Les déplacements et les efforts peuvent s'exprimer en fonction des contraintes de la colle et de leurs dérivées :

$$\text{Eq. 140 } u_1(x) = \bar{\beta}_1 T + \bar{\beta}_1 \frac{dS}{dx} - \frac{w\Delta^3 K_7 - 6B_1 J_0}{2\Delta A_1} \left(\frac{x}{\Delta}\right)^2 + J_5 \frac{x}{\Delta} + J_6$$

$$\text{Eq. 141 } u_2(x) = \bar{\beta}_2 T + \bar{\beta}_2 \frac{dS}{dx} + \frac{w\Delta^3 K_7 - 6B_2 J_0}{2\Delta A_2} \left(\frac{x}{\Delta}\right)^2 + \left(J_5 + 2 \frac{h_1 + h_2}{\Delta} J_1\right) \frac{x}{\Delta} + J_6 + \frac{h_1 + h_2}{\Delta} J_2 - (h_1 \bar{\beta}_5 + h_1 \bar{\beta}_6) K_7$$

$$\text{Eq. 142 } v_1(x) = \bar{\beta}_3 \left(k_4 \frac{dT}{dx} + k_2 \frac{d^2 S}{dx^2}\right) + \bar{\beta}_5 S + J_0 \left(\frac{x}{\Delta}\right)^3 + J_1 \left(\frac{x}{\Delta}\right)^2 + J_2 \frac{x}{\Delta} + J_3$$

$$\text{Eq. 143 } v_2(x) = \bar{\beta}_4 \left(k_4 \frac{dT}{dx} + k_2 \frac{d^2 S}{dx^2}\right) + \bar{\beta}_6 S + J_0 \left(\frac{x}{\Delta}\right)^3 + J_1 \left(\frac{x}{\Delta}\right)^2 + J_2 \frac{x}{\Delta} + J_3$$

$$\text{Eq. 144 } \theta_1(x) = \bar{\beta}_5 T + \bar{\beta}_5 \frac{dS}{dx} + 3J_0 \left(\frac{x}{\Delta}\right)^2 + 2J_1 \frac{x}{\Delta} + \frac{1}{\Delta} J_2 - \bar{\beta}_5 K_7$$

$$\text{Eq. 145 } \theta_2(x) = \bar{\beta}_6 T + \bar{\beta}_6 \frac{dS}{dx} + 3J_0 \left(\frac{x}{\Delta}\right)^2 + 2J_1 \frac{x}{\Delta} + \frac{1}{\Delta} J_2 - \bar{\beta}_6 K_7$$

avec:

$$\text{Eq. 146 } \bar{\beta}_1 = \frac{C_{10} k_4 - D_{10} k_3}{k_1 k_4 - k_2 k_3}$$

$$\text{Eq. 147 } \bar{\beta}_1 = \frac{C_{10} k_2 - D_{10} k_1}{k_1 k_4 - k_2 k_3}$$

$$\text{Eq. 148 } \bar{\beta}_2 = \frac{C_{20} k_4 - D_{20} k_3}{k_1 k_4 - k_2 k_3}$$

$$\text{Eq. 149 } \bar{\beta}_2 = \frac{C_{20} k_2 - D_{20} k_1}{k_1 k_4 - k_2 k_3}$$

$$\text{Eq. 150 } \bar{\beta}_5 = \frac{A_{10} k_4 - B_{10} k_3}{k_1 k_4 - k_2 k_3}$$

$$\text{Eq. 151 } \bar{\beta}_5 = \frac{A_{10} k_2 - B_{10} k_1}{k_1 k_4 - k_2 k_3}$$

$$\text{Eq. 152 } \bar{\beta}_6 = \frac{A_{20} k_4 - B_{20} k_3}{k_1 k_4 - k_2 k_3}$$

$$\text{Eq. 153 } \bar{\beta}_6 = \frac{A_{20} k_2 - B_{20} k_1}{k_1 k_4 - k_2 k_3}$$

$$\text{Eq. 154 } \bar{\beta}_3 = \frac{\bar{\beta}_5}{k_1 k_4 - k_2 k_3}$$

$$\text{Eq. 155 } \bar{\beta}_4 = \frac{\bar{\beta}_6}{k_1 k_4 - k_2 k_3}$$

$$\text{Eq. 156 } J_0 = \frac{w\Delta^3 \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right)}{6 \left( h_1 + h_2 + \frac{B_1}{A_1} + \frac{B_2}{A_2} \right)} K_7$$

Les équations constitutives des substrats (Eq. 91 à Eq. 92) permettent à partir des expressions des déplacements de trouver les expressions des efforts :

$$\text{Eq. 157 } N_1(x) = \widetilde{a}_1 \frac{dT}{dx} + \overline{a}_1 \frac{d^2S}{dx^2} - wK_7x - 2 \frac{B_1}{\Delta^2} J_1 + \frac{A_1}{\Delta} J_5 + J_6$$

$$\text{Eq. 158 } N_2(x) = \widetilde{a}_2 \frac{dT}{dx} + \overline{a}_2 \frac{d^2S}{dx^2} + wK_7x + 2 \left( \frac{(h_1+h_2)A_2 - B_2}{\Delta^2} \right) J_1 + \frac{A_2}{\Delta} J_5$$

$$\text{Eq. 159 } V_1(x) = -\widetilde{a}_3 \frac{d^2T}{dx^2} - \overline{a}_3 \frac{d^3S}{dx^3} - wh_1T - \frac{6\Delta_1 J_0 + w\Delta^3 B_1 K_7}{A_1 \Delta^3}$$

$$\text{Eq. 160 } V_2(x) = -\widetilde{a}_4 \frac{d^2T}{dx^2} - \overline{a}_4 \frac{d^3S}{dx^3} - wh_2T - \frac{6\Delta_2 J_0 + w\Delta^3 B_2 K_7}{A_2 \Delta^3}$$

$$\text{Eq. 161 } M_1(x) = \widetilde{a}_3 \frac{dT}{dx} + \overline{a}_3 \frac{d^2S}{dx^2} + \frac{6\Delta_1 J_0 + w\Delta^3 B_1 K_7}{A_1 \Delta^2} \frac{x}{\Delta} + 2 \frac{D_1}{\Delta^2} J_1 - \frac{B_1}{\Delta} J_5$$

$$\text{Eq. 162 } M_2(x) = \widetilde{a}_4 \frac{dT}{dx} + \overline{a}_4 \frac{d^2S}{dx^2} + \frac{6\Delta_2 J_0 + w\Delta^3 B_2 K_7}{A_2 \Delta^2} \frac{x}{\Delta} + 2 \left( \frac{D_2 - (h_1+h_2)B_2}{\Delta^2} \right) J_1 - \frac{B_2}{\Delta} J_5$$

avec :

$$\text{Eq. 163 } \widetilde{a}_1 = A_1 \widetilde{\beta}_1 - B_1 \widetilde{\beta}_5$$

$$\text{Eq. 164 } \overline{a}_1 = A_1 \overline{\beta}_1 - B_1 \overline{\beta}_5$$

$$\text{Eq. 165 } \widetilde{a}_2 = A_2 \widetilde{\beta}_2 - B_2 \widetilde{\beta}_6$$

$$\text{Eq. 166 } \overline{a}_2 = A_2 \overline{\beta}_2 - B_2 \overline{\beta}_6$$

$$\text{Eq. 167 } \widetilde{a}_3 = -B_1 \widetilde{\beta}_1 + D_1 \widetilde{\beta}_5$$

$$\text{Eq. 168 } \overline{a}_3 = -B_1 \overline{\beta}_1 + D_1 \overline{\beta}_5$$

$$\text{Eq. 169 } \widetilde{a}_4 = -B_2 \widetilde{\beta}_2 + D_2 \widetilde{\beta}_6$$

$$\text{Eq. 170 } \overline{a}_4 = -B_2 \overline{\beta}_2 + D_2 \overline{\beta}_6$$

Les expressions des efforts et déplacements nodaux sont fournies en section 5.3.3. Le jeu des douze constantes d'intégration identifiées est formé par  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, J_1, J_2, J_3, J_5$  et  $J_6$ , de sorte qu'il est possible de définir les deux matrices de couplage  $D_e$  et  $L_e$  et d'en déduire la matrice de raideur  $K_e$  du ME. L'implémentation passe ensuite par un logiciel de calcul scientifique tel que SCILAB ou MATLAB.

## Modifications des hypothèses initiales

Une première modification consiste à considérer l'épaisseur de colle dans l'équilibre local en moment des deux substrats : l'équilibre local selon Hart-Smith [Hart-Smith 1973a] :

$$\text{Eq. 171 } \frac{dM_i}{dx} = -V_i - w(h_i + h)T \quad i = 1, 2$$

Cette modification entraîne la modification de certaines constantes, décrite en section 5.3.4 pour le premier jeu de racines.

Tsaï *et al.* adaptent le modèle de Goland et Reissner en supposant une contrainte de cisaillement linéaire dans les substrats [Tsaï *et al.* 1998]. Il est alors ici supposé que :

- H2-6 : la contrainte de cisaillement de chaque substrat varie linéairement avec son épaisseur selon l'équation Eq. 41.

La démarche de formulation est ensuite similaire à celle présentée en section 2.2.2. Autrement dit, le champ des déplacements longitudinaux est obtenu par intégration :

$$\text{Eq. 172 } u_i(x, y_i) = u_i(x, 0) - \frac{1}{2} \left( \frac{y_i}{h_i} + (-1)^i \left( \frac{y_i}{h_i} \right)^2 \right) \frac{T(x)}{G_i} h_i - y_i \frac{dv_i}{dx} \quad i = 1, 2$$

Les efforts normaux et les moments de flexion des deux substrats sont donc obtenus par intégration :

$$\text{Eq. 173 } N_i = A_i \frac{du_i}{dx} - B_i \frac{d\theta_i}{dx} - C_i \frac{dT}{dx} \quad i = 1, 2$$

$$\text{Eq. 174 } M_i = -B_i \frac{du_i}{dx} + D_i \frac{d\theta_i}{dx} + C'_i \frac{dT}{dx} \quad i = 1, 2$$

où :

$$\text{Eq. 175 } C_1 = \frac{e_1 B_1 - D_1}{2e_1 G_1}$$

$$\text{Eq. 176 } C_2 = \frac{e_2 B_2 + D_2}{2e_2 G_2}$$

$$\text{Eq. 177 } C'_1 = \frac{e_1 D_1 - F_1}{2e_1 G_1}$$

$$\text{Eq. 178 } C'_2 = \frac{e_2 D_2 + F_2}{2e_2 G_2}$$

$$\text{Eq. 179 } F_i = w \int_{-h_i}^{h_i} E_i(y_i) y_i^3 dy_i \quad i = 1, 2$$

Si le substrat est un stratifié comptant  $p_i$  plis, de module rapporté à l'axe  $x$   $Q_i^{p_i}$  et d'épaisseur  $h_{p_i} - h_{p_i-1}$ , la raideur  $F_i$  s'écrit au même titre que les raideurs  $A_i$ ,  $B_i$  et  $D_i$  par :

$$\text{Eq. 180 } F_i = w \int_{-h_i}^{h_i} E_i(y_i) y_i^3 dy_i = \frac{w}{4} \sum_{p_i=1}^{n_i} Q_i^{p_i} (h_{p_i}^4 - h_{p_i-1}^4) \quad i = 1, 2$$

$$\text{Eq. 181 } A_i = w \int_{-h_i}^{h_i} E_i(y_i) dy_i = w \sum_{p_i=1}^{n_i} Q_i^{p_i} (h_{p_i} - h_{p_i-1}) \quad i = 1, 2$$

$$\text{Eq. 182 } B_i = w \int_{-h_i}^{h_i} E_i(y_i) y_i dy_i = \frac{w}{2} \sum_{p_i=1}^{n_i} Q_i^{p_i} (h_{p_i}^2 - h_{p_i-1}^2) \quad i = 1, 2$$

$$\text{Eq. 183 } D_i = w \int_{-h_i}^{h_i} E_i(y_i) y_i^2 dy_i = \frac{w}{3} \sum_{p_i=1}^{n_i} Q_i^{p_i} (h_{p_i}^3 - h_{p_i-1}^3) \quad i = 1, 2$$

Les coefficients  $C'_i$  ne sont pas présents dans les développements de Tsai *et al.*; ils doivent donc être pris égaux à zéro dans la formulation pour retrouver leurs résultats. Les déformations s'expriment alors par :

$$\text{Eq. 184 } \frac{du_i}{dx} = \frac{D_i}{\Delta_i} N_i + \frac{B_i}{\Delta_i} M_i + \frac{D_i C_i - B_i C'_i}{\Delta_i} \frac{dT}{dx} \quad i = 1, 2$$

$$\text{Eq. 185 } \frac{d\theta_i}{dx} = \frac{B_i}{\Delta_i} N_i + \frac{A_i}{\Delta_i} M_i + \frac{B_i C_i - A_i C'_i}{\Delta_i} \frac{dT}{dx} \quad i = 1, 2$$

De plus, la contrainte de cisaillement s'écrit :

$$\text{Eq. 186 } T = \frac{1}{1+\beta'_t e} G (u_2 - u_1 - h_2 \theta_2 - h_1 \theta_1)$$

où :

$$\text{Eq. 187 } \beta'_t = \frac{3G}{8e} \left( \frac{e_1}{G_1} + \frac{e_2}{G_2} \right)$$

Un système d'équations différentielles couplées en les contraintes  $S$  et  $T$  similaire au cas initial peut être écrit :

$$\text{Eq. 188 } \begin{cases} \frac{d^3 T}{dx^3} = k'_1 \frac{dT}{dx} + k'_2 S \\ \frac{d^4 S}{dx^4} = -k'_3 \frac{dT}{dx} - k'_4 S \end{cases}$$

où :

$$\text{Eq. 189 } k'_1 = \frac{k_1}{1-\alpha'}$$

$$\text{Eq. 190 } k'_2 = \frac{k_2}{1-\alpha'}$$

$$\text{Eq. 191 } k'_3 = k_3 + k'_1 k_5$$

$$\text{Eq. 192 } k'_4 = k_4 + k'_2 k_5$$

$$\text{Eq. 193 } k_5 = \frac{E}{e} \left[ \frac{B_2 C_2 - A_2 C'_2}{\Delta_2} - \frac{B_1 C_1 - A_1 C'_1}{\Delta_1} \right]$$

$$\text{Eq. 194 } \alpha' = \frac{1}{1+\beta'_t e} G \left[ \frac{D_1 C_1 - B_1 C'_1}{\Delta_1} - \frac{D_2 C_2 - B_2 C'_2}{\Delta_2} + h_1 \frac{B_1 C_1 - A_1 C'_1}{\Delta_1} + h_2 \frac{B_2 C_2 - A_2 C'_2}{\Delta_2} \right]$$

La résolution consiste donc à modifier certaines constantes. Ces modifications sont données en section 5.3.4 pour le premier jeu de racines.

## Variation de la température

Comme pour le cas de la cinématique de barre, un chargement sous la forme d'une variation uniforme de la température peut être pris en compte au travers un vecteur de forces nodales équivalentes au chargement thermique [Paroissien *et al.* 2011] [Paroissien *et al.* 2018]. Les efforts normaux et moments de flexion s'écrivent alors :

$$\text{Eq. 195 } N_i = A_i \frac{du_i}{dx} - B_i \frac{d\theta_i}{dx} - N_i^{\Delta\hat{T}} \quad i = 1, 2$$

$$\text{Eq. 196 } M_i = -B_i \frac{du_i}{dx} + D_i \frac{d\theta_i}{dx} + M_i^{\Delta\hat{T}} \quad i = 1, 2$$

où  $N_i^{\Delta\hat{T}}$  et  $M_i^{\Delta\hat{T}}$  sont respectivement la force normale et le moment de flexion dans le substrat  $i$  dus à une variation uniforme de température  $\Delta\hat{T}$ . Leurs expressions sont données par :

$$\text{Eq. 197 } N_i^{\Delta\hat{T}} = w \sum_{p_i=1}^{n_i} Q_i^{p_i} \hat{\alpha}_i^{p_i} (h_{p_i} - h_{p_i-1}) \Delta\hat{T} \quad i = 1, 2$$

$$\text{Eq. 198 } M_i^{\Delta\hat{T}} = \frac{w}{2} \sum_{p_i=1}^{n_i} Q_i^{p_i} \hat{\alpha}_i^{p_i} (h_{p_i}^2 - h_{p_i-1}^2) \Delta\hat{T} \quad i = 1, 2$$

où  $\hat{\alpha}_i^{p_i}$  est le coefficient de dilatation thermique du pli  $p_i$  du substrat  $i$ . Si le substrat  $i$  est à symétrie de miroir alors  $B_i=0$  et  $M_i^{\Delta\hat{T}} = 0$ .

Le vecteur de forces nodales équivalentes au chargement thermique associé au ME est alors :

$$\text{Eq. 199 } F_{e,th} = \begin{pmatrix} -N_1^{\Delta\hat{T}} \\ -N_2^{\Delta\hat{T}} \\ N_1^{\Delta\hat{T}} \\ N_2^{\Delta\hat{T}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_1^{\Delta\hat{T}} \\ M_2^{\Delta\hat{T}} \\ -M_1^{\Delta\hat{T}} \\ -M_2^{\Delta\hat{T}} \end{pmatrix}$$

### 2.3.3 Modélisation par macro-élément d'un simple recouvrement collé

#### Introduction

La comparaison entre les résultats par ME avec les modèles de référence de Goland et Reissner et de Hart-Smith est présentée dans ma thèse de doctorat. Les résultats en termes de répartition de contraintes de pelage et de cisaillement le long du recouvrement sont identiques aux prédictions de Goland et Reissner. Par contre, un léger écart avec sur le pelage et le cisaillement est constaté. Cet écart vient du fait qu'Hart-Smith néglige l'effort tranchant en bord de recouvrement afin d'écrire une équation analytique. Dans la formulation du ME proposée, cet effort tranchant n'est pas négligé. L'écart en termes de pelage intégré le long du recouvrement vaut alors le flux d'effort tranchant existant en bord de recouvrement. Pour rendre possible cette comparaison, les longueurs hors recouvrement des substrats ont été modifiées dans le modèle par ME, de sorte à imposer les mêmes moments de flexion en bord de recouvrement que ceux prédits par les modèles analytiques. Au lieu de procéder par itération, une formule analytique peut être écrite pour calculer la nouvelle longueur hors recouvrement  $l'$ . Il suffit d'évaluer le moment de flexion en bord de recouvrement dans une analyse linéaire géométrique et de l'égaliser au moment de flexion du modèle de référence choisi :

$$\text{Eq. 200 } l' = \frac{1}{\frac{1}{k_M} - 1} c$$

où  $k_M$  est le facteur de moment fléchissant du modèle de référence. Cette formule n'est valable que pour des configurations où les longueurs hors recouvrement initiales sont suffisamment longues pour disparaître des expressions des facteurs de moment fléchissant. La comparaison par rapport au modèle de référence de Tsai *et al.* [Tsai *et al.* 1998] n'est pas donnée dans ce mémoire. Elle est réalisée dans [Da Veiga 2009] [Paroissien *et al.* 2013a] [Paroissien *et al.* 2013b], en suivant la même adaptation de la longueur hors recouvrement. Il est montré que les résultats des deux calculs sont identiques. Les mêmes hypothèses mènent donc aux mêmes résultats.

L'objectif de cette section est de donner des éléments de validation de la formulation du ME poutres-collées sur la configuration classique du simple recouvrement collé simplement appuyé. L'objectif est bien de valider et non d'évaluer la pertinence des modélisations par rapport à la réalité physique. La validation est réalisée par rapport à des modèles EF simplifiés et représentatifs des modélisations simplifiées sur la base de celles décrites dans [Seddiki 2019] [Paroissien *et al.* 2019] pour un chargement combiné mécanique et thermique. Il existe dans la littérature des modélisations analytiques du comportement d'un sandwich collé soumis à une variation de température. En 1973, Hart-Smith étend l'analyse d'Arnovljevic ou Volkersen pour l'analyse d'un assemblage en double recouvrement soumis à un chargement combiné mécanique et thermique (section 2.2.3) [Hart-Smith 1973b]. En 1979, Chen et Nelson étendent les modèles du sandwich collé

d'Arnovljevic ou Volkersen et de Goland et Reissner pour prendre en compte la dilation thermique des substrats sans chargement mécanique [Chen et Nelson 1979]. Des expressions analytiques des contraintes dans la couche de colle sont fournies. Suhir développe une modélisation de sandwich collé à deux, trois ou un nombre quelconque de substrats soumis une variation de température [Suhir 1986] [Suhir 1988] [Suhir 1989] [Suhir 2001]. Des formules analytiques sont données. Dans cette modélisation, la couche de colle est représentée comme une interface sans épaisseur géométrique appliquant une distribution de contraintes de cisaillement et de pelage sur les substrats. La continuité des déplacements aux interfaces est supposée. Pour les déplacements longitudinaux, l'équation de comptabilité est issue de Timoshenko, pour l'analyse d'un barreau prismatique soumis à une contrainte de cisaillement sur une des faces. Une souplesse d'interface (*interface compliance*) est introduite et est liée à un champ de déplacement normal dans le substrat variant non linéairement avec l'épaisseur du substrat sous l'effet de cisaillement. Cette équation de compatibilité permet donc d'introduire dans la formulation cette contrainte de cisaillement, inconnue du problème sans équation d'équilibre mécanique. En particulier, en utilisant l'approche de Suhir, il est possible – mais non présenté dans ce mémoire – de définir une autre équation analytique intégrant l'existence d'un cisaillement fonction de l'épaisseur des substrats dans une cinématique de barre. Pour le pelage, Suhir introduit de la même manière une souplesse d'interface pour décrire la compatibilité des interfaces en flèche. En 2003, afin de prendre en compte la dilatation thermique de la colle, Zhang utilise l'approche de Suhir appliquée à un assemblage à trois couches de substrats [Suhir 1989] pour le lequel le substrat central devient la couche de colle [Zhang 2003]. Les contraintes entre les substrats et la colle sont des contraintes d'interface. Il est à noter que les modélisations de Chen et Nelson, Suhir et Zhang sont développées pour le dimensionnement de composants électroniques.

L'application présentée dans cette section considère un assemblage en simple cisaillement simplement supporté soumis à un chargement combiné mécanique ( $f=5$  kN) et thermique ( $\Delta T = 50^\circ K$ ). La configuration matérielle et géométrique est telle que  $e=0.2$  mm,  $e_s=2$  mm,  $w=25$  mm,  $L=25$  mm,  $I_1=I_2=75$  mm,  $E=6500$  MPa,  $G=2890$  MPa,  $E_1=210$  GPa,  $E_2=70$  GPa,  $\widehat{\alpha}_1 = 12 \cdot 10^{-6} K^{-1}$  et  $\widehat{\alpha}_2 = 24 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ . Pour rappel, l'expansion thermique de la colle n'est pas considérée. Les résultats présentés supposent une analyse linéaire géométrique avec l'équilibre de Goland et Reissner. Une illustration des modélisations par ME et EF est présentée en Figure 19.

### Éléments de validation pour un chargement combiné mécanique et thermique

La modélisation par ME de l'assemblage en simple recouvrement collé est réalisé selon la même procédure que celle décrite en section 2.2.3. La matrice de raideur élémentaires  $K_{e,i}$  des éléments poutres hors recouvrement dans le cadre des hypothèses H2-2 et H2-3 est la suivante [Da Veiga 2009] :

Eq. 201  $K_{e,i} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{A_i}{l_i} & -\frac{A_i}{l_i} & 0 & 0 & -\frac{B_i}{l_i} & \frac{B_i}{l_i} \\ -\frac{A_i}{l_i} & \frac{A_i}{l_i} & 0 & 0 & \frac{B_i}{l_i} & -\frac{B_i}{l_i} \\ 0 & 0 & \frac{12\Delta_i}{l_i^3 A_i} & -\frac{12\Delta_i}{l_i^3 A_i} & \frac{6\Delta_i}{l_i^2 A_i} & \frac{6\Delta_i}{l_i^2 A_i} \\ 0 & 0 & -\frac{12\Delta_i}{l_i^3 A_i} & \frac{12\Delta_i}{l_i^3 A_i} & -\frac{6\Delta_i}{l_i^2 A_i} & -\frac{6\Delta_i}{l_i^2 A_i} \\ -\frac{B_i}{l_i} & \frac{B_i}{l_i} & \frac{6\Delta_i}{l_i^2 A_i} & -\frac{6\Delta_i}{l_i^2 A_i} & \frac{1}{l_i} \left( \frac{3\Delta_i}{A_i} + D_i \right) & \frac{1}{l_i} \left( \frac{3\Delta_i}{A_i} - D_i \right) \\ \frac{B_i}{l_i} & -\frac{B_i}{l_i} & \frac{6\Delta_i}{l_i^2 A_i} & -\frac{6\Delta_i}{l_i^2 A_i} & \frac{1}{l_i} \left( \frac{3\Delta_i}{A_i} - D_i \right) & \frac{1}{l_i} \left( \frac{3\Delta_i}{A_i} + D_i \right) \end{pmatrix} \quad i = 1, 2$$

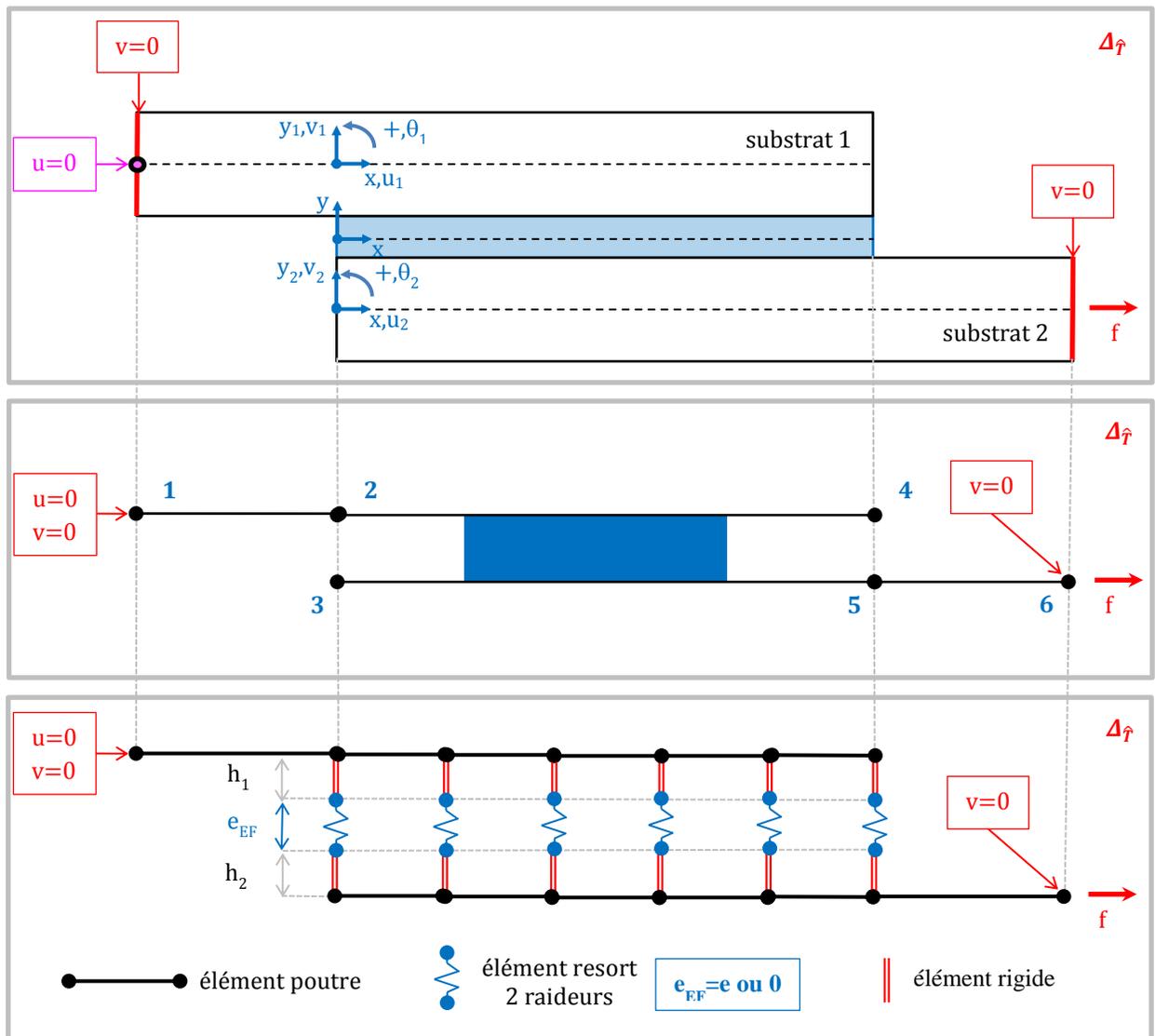
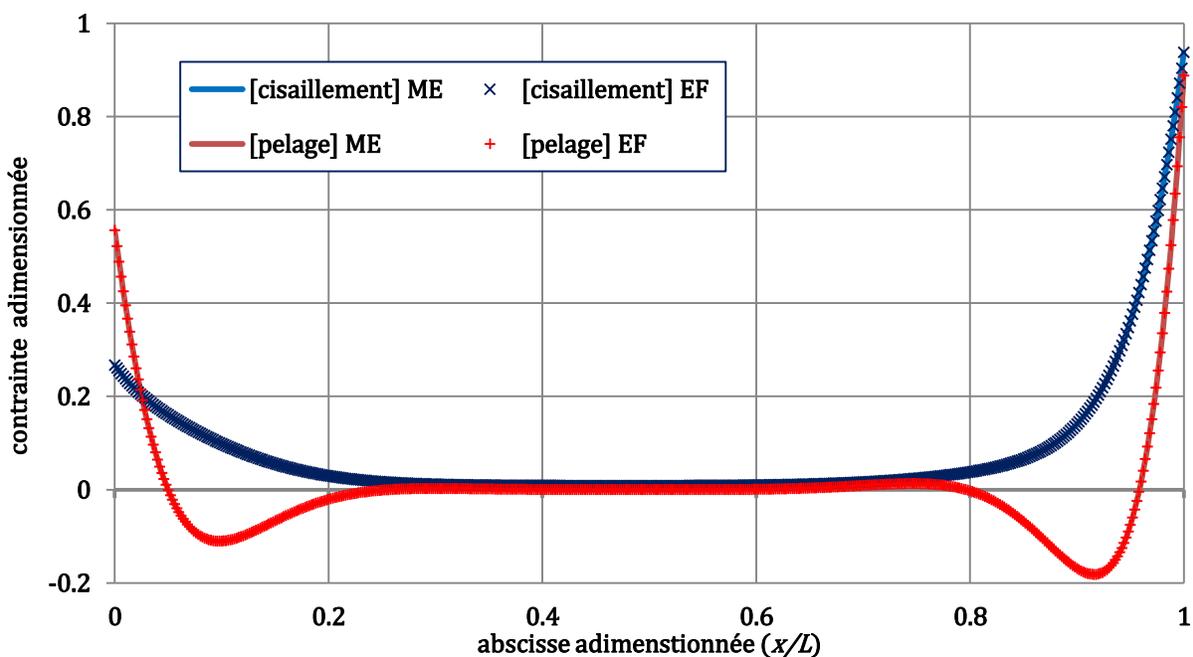


Figure 19 Modélisations par ME et EF du simple recouvrement simplement appuyé.  $e_{EF}$  est l'épaisseur géométrique de la couche de colle donnée dans le modèle EF.

Le vecteur des efforts nodaux équivalents au chargement thermique a la même forme que celui du ME (Eq. 199) ; il comporte les trois composantes  $N_i^{\Delta T}$ , 0 et  $M_i^{\Delta T}$ . La modélisation par ME possède 6 nœuds, chaque nœud ayant trois degrés de liberté. Après application des conditions aux limites, la matrice de raideur de la structure  $K_S$  est de taille 15x15. La modélisation par EF est construite à partir d'éléments poutre d'Euler-Bernoulli pour représenter les substrats et de ressorts alimentés dans la direction  $x$  et  $y$  (axes globaux) pour représenter la couche de colle. Les raideurs de la colle sont évaluées à partir des modules de pelage et de cisaillement de la colle ainsi que des sections travaillantes situées sur un demi-pas de part et d'autre du ressort [Dechwayukul *et al.* 2000]. L'épaisseur géométrique utilisée dans le modèle EF et notée  $e_{EF}$  peut être nulle pour correspondre à l'équilibre de Goland et Reissner ou égale à l'épaisseur réelle  $e$  pour représenter l'équilibre d'Hart-Smith. Dans le cas présenté, cette épaisseur est donc prise nulle. Enfin, des éléments rigides assurent la connexion des ressorts entre la ligne neutre et l'interface de chaque substrat. Une densité de 20 ressorts par mm uniformément distribués est choisie après étude de convergence. Le calcul est ici linéaire géométrique. Les répartitions le long du recouvrement des contraintes de cisaillement et de pelage adimensionnées par la contrainte de traction appliquée à l'assemblage ( $f/(e_s w)=100$  MPa) est fournie en Figure 20. Une excellente corrélation qualitative et quantitative est obtenue. Les résultats issus de la modélisation ME ont un écart relatif par rapport aux résultats EF de 0,005% et 0,03% sur la contrainte maximale de pelage et de cisaillement respectivement.



**Figure 20** Comparaison de la répartition le long du recouvrement des contraintes de cisaillement et de pelage adimensionnées par la contrainte de traction appliquée ( $f/(e_s w)=100$  MPa) donnée par les modèles par ME et EF.

## Extension aux assemblages HBC

Dans ma thèse de doctorat, un ME de fixation est défini en fonction de la cinématique. Dans la cinématique barre, la fixation est modélisée par un ressort de cisaillement. Dans la cinématique de poutre, la fixation est modélisée par un élément rigide et deux triplets de ressorts de raideurs ( $2C_u$ ;  $2C_v$ ;  $2C_\theta$ ), chacun des triplets décrivant le comportement de la fixation liée avec chacun des deux substrats. Pour chaque triplet, un ressort est utilisé pour chacun des trois degrés de liberté (Figure 21).

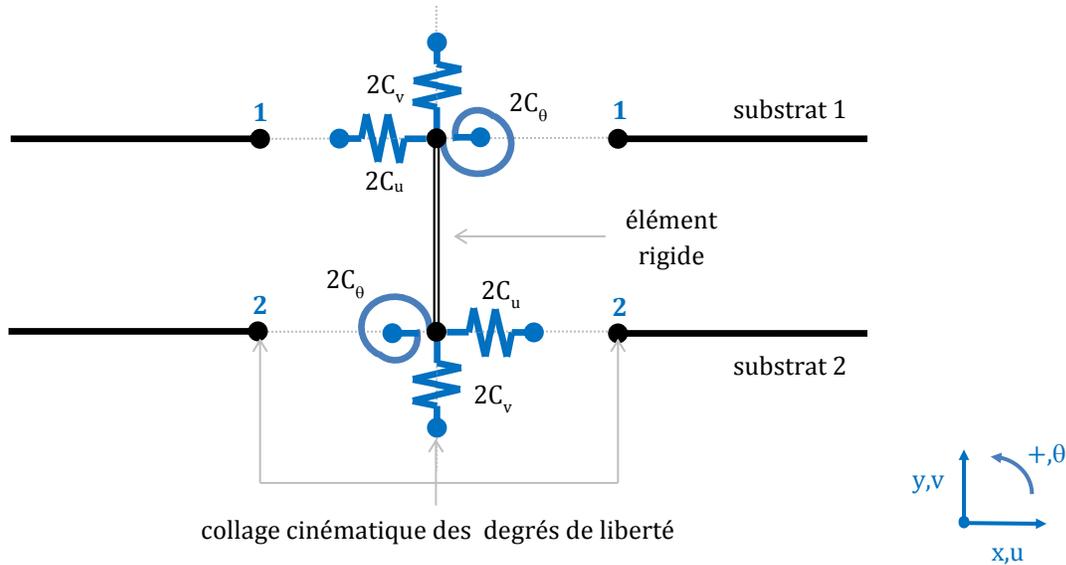


Figure 21 ME de fixation en cinématique de poutre.

L'élément rigide assure la continuité des déplacements entre les deux substrats. Par contre deux nœuds supplémentaires sont introduits dans le modèle. Dans [Paroissien *et al.* 2017], un modèle de fixation sans ces deux nœuds supplémentaires est présenté, réduisant ainsi la taille du modèle à traiter. Ce travail a été réalisé par Patrick Barrière (Ingénieur, SOGETI High Tech). L'utilisation des relations cinématiques et d'équilibre statique induites par l'élément rigide permettent de procéder à cette réduction. En notant pour le nœud  $k$  ( $k=1,2$ )  $F_u(k)$  et  $F_v(k)$  les forces nodales selon  $x$  et  $y$  et  $F_\theta(k)$  le moment nodal autour de  $z$  ainsi que  $u(k)$  et  $v(k)$  les déplacements nodaux selon  $x$  et  $y$  et  $\theta(k)$  la rotation angulaire autour de  $z$ , la relation entre les efforts nodaux et déplacements nodaux est alors la suivante, faisant apparaître la matrice de raideur associée :

$$\text{Eq. 202} \quad \begin{pmatrix} F_u(1) \\ F_u(2) \\ F_v(1) \\ F_v(2) \\ F_\theta(1) \\ F_\theta(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2C_u C_\theta}{\bar{c}} & -\frac{2C_u C_\theta}{\bar{c}} & 0 & 0 & -h_+ \frac{2C_u C_\theta}{\bar{c}} & -h_+ \frac{2C_u C_\theta}{\bar{c}} \\ -\frac{2C_u C_\theta}{\bar{c}} & \frac{2C_u C_\theta}{\bar{c}} & 0 & 0 & h_+ \frac{2C_u C_\theta}{\bar{c}} & h_+ \frac{2C_u C_\theta}{\bar{c}} \\ 0 & 0 & C_v & -C_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_v & C_v & 0 & 0 \\ -h_+ \frac{2C_u C_\theta}{\bar{c}} & h_+ \frac{2C_u C_\theta}{\bar{c}} & 0 & 0 & \frac{2C_\theta^2 + h_+^2 C_u C_\theta}{\bar{c}} & -\frac{2C_\theta^2}{\bar{c}} \\ -h_+ \frac{2C_u C_\theta}{\bar{c}} & h_+ \frac{2C_u C_\theta}{\bar{c}} & 0 & 0 & -\frac{2C_\theta^2}{\bar{c}} & \frac{2C_\theta^2 + h_+^2 C_u C_\theta}{\bar{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(2) \\ v(1) \\ v(2) \\ \theta(1) \\ \theta(2) \end{pmatrix}$$

où :

$$\text{Eq. 203} \quad \bar{c} = 2C_\theta + \frac{1}{2}h_+^2 C_u$$

$$\text{Eq. 204} \quad h_+ = h_1 + h_2$$

Le paramètre  $h_+$  représente donc le décalage de fibre neutre entre les deux substrats. Enfin, il existe une formulation similaire en supposant que les deux triplets de raideurs de ressort ne sont pas identiques. Elle n'est pas présentée dans ce mémoire ni dans [Paoissien *et al.* 2017].

### Remarque conclusive

Le cas d'application présenté ici considère une configuration simplement supportée. La modélisation par ME peut s'étendre sans difficulté à une configuration encastrée – donc hyperstatique – telle qu'utilisée classiquement pour les essais statiques sur ce type d'éprouvette. Dans ce cas de conditions aux limites, la taille de la matrice de raideur de structure est réduite à 13x13. D'excellentes corrélations sont alors obtenues en analyse linéaire géométrique [Seddiki 2019]. La simple adaptation de la longueur de recouvrement présentée dans cette section pour la configuration encastrée nécessiterait donc l'usage de facteur de moment fléchissant adapté. Schijve fournit des formules pour des cas particuliers d'assemblages boulonnés en simple recouvrement sous différentes conditions aux limites [Schijve 1972]. Récemment, Talmont de l'Armée *et al.* ont étendu l'approche initiale de Goland et Reissner pour différentes conditions aux limites [Talmont de l'Armée *et al.* 2016]. L'assemblage des deux substrats et de la couche de colle est donc vu comme une poutre équivalente d'une seule et unique couche. Les deux substrats peuvent être différents et sont modélisés comme des poutres de Timoshenko, incluant le couplage membrane-flexion. La résolution est analytique seulement pour le cas où l'assemblage est simplement supporté, sinon elle passe par l'inversion d'un système linéaire. Le volume de travail et la complexité associés pour la formulation de la matrice de raideur d'un ME poutres-collées ne sont pas négligeables. Comme présenté en section 2.3.2, deux difficultés ont dû être dépassées. La première difficulté est la détermination d'un chemin de traitement mathématique des équations de départ capable de donner accès aux formes des champs de déplacement. Ces champs de déplacement doivent être exprimés en fonction d'un jeu de constantes d'intégration libre, à identifier. Une fois les champs de déplacement obtenus, les efforts

internes se déduisent sans difficulté à partir des relations constitutives. La seconde difficulté est la détermination méthodologie d'implémentation de la matrice de raideur dans un code de calcul scientifique. La méthodologie identifiée passe par l'utilisation de matrices de couplage (section 2.2.3 et 2.3.2). Une fois réalisé le travail de traitement analytique des équations (première difficulté), la méthodologie proposée d'implémentation est directe.

Le traitement mathématique présenté dans la section 2.3.2 est basé sur la détermination des formes des solutions des contraintes dans la couche de colle. Or, il est montré l'existence possible de plusieurs formes de solutions. Ainsi, à chaque forme de solutions, il est nécessaire reprendre le traitement analytique pour exprimer la matrice de raideur. De plus, il est possible que considérer quelques modifications des hypothèses de départ ne conduisent qu'à quelques adaptations mineures de la formulation initiale (section 2.3.2), liée au traitement des équations de départ (première difficulté). Cependant, il pourrait être possible que les adaptations à effectuer en cas de variation des hypothèses de départ soient plus conséquentes. L'idée est donc venue de chercher à s'affranchir de la première difficulté en élaborant des méthodes de résolution plus systématiques et tolérantes aux variations des hypothèses de départ, éventuellement représentatives de cinématiques plus complexes.

## 2.4 Méthodologies de formulation adaptées à des physiques plus complexes

### 2.4.1 Formulation par l'exponentiel de matrice

#### Introduction

Des hypothèses de la formulation du ME de poutres-collées de la section 2.3.2, les relations constitutives des substrats (Eq. 93, Eq. 97 et Eq. 98) et l'équilibre local (Eq. 88 à Eq. 90) se présentent *quasi directement* sous la formes d'équations différentielles d'ordre 1. Le seul traitement analytique nécessaire est l'inversion des relations constitutives (Eq. 88 et Eq. 89). De plus, dans le cadre d'une approche de modélisation de la colle comme une fondation élastique, les contraintes de cisaillement et de pelage sont directement exprimées en fonction des déplacements des substrats. Ainsi, la traduction des hypothèses de départ en équations permet d'écrire *quasi directement* un système d'équations différentielles couplées d'ordre 1 comportant douze inconnues. Les douze inconnues sont les trois déplacements et les trois efforts internes de chacun des deux substrats. Une solution de résolution est l'usage de l'exponentielle de matrice.

#### Formulation du ME poutres-collées initial

Le vecteur colonne  $X$ , tel que sa transposée est  $X^t = (u_1 \ u_2 \ v_1 \ v_2 \ \theta_1 \ \theta_2 \ N_1 \ N_2 \ V_1 \ V_2 \ M_1 \ M_2)$ , est le vecteur des fonctions de inconnues de  $x$ . L'écriture matricielle de ce système d'équations différentielles couplées prend la forme  $\frac{dX}{dx} = \mathcal{A}X$  où :

$$\text{Eq. 205 } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{D_1}{\Delta_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{B_1}{\Delta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{D_2}{\Delta_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{B_2}{\Delta_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{B_1}{\Delta_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{A_1}{\Delta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{B_2}{\Delta_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{A_2}{\Delta_2} \\ \frac{G}{e}w & -\frac{G}{e}w & 0 & 0 & \frac{G}{e}wh_1 & \frac{G}{e}wh_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{G}{e}w & \frac{G}{e}w & 0 & 0 & -\frac{G}{e}wh_1 & -\frac{G}{e}wh_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{e}w & -\frac{E}{e}w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{e}w & \frac{E}{e}w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{G}{e}wh_1 & -\frac{G}{e}wh_1 & 0 & 0 & \frac{G}{e}wh_1h_1 & \frac{G}{e}wh_1h_1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{G}{e}wh_2 & -\frac{G}{e}wh_2 & 0 & 0 & \frac{G}{e}wh_2h_2 & \frac{G}{e}wh_2h_2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les six premières lignes de  $\mathcal{A}$  correspondent aux équations constitutives tandis que les six suivantes correspondent aux équations d'équilibre local. La matrice fondamentale de  $\mathcal{A}$ , notée  $\Phi_{\mathcal{A}}$ , est définie par son exponentiel  $\Phi_{\mathcal{A}}(x) = e^{\mathcal{A}x}$ . Deux matrices de couplage  $D'_e$  et

$L'_e$  de taille 12x12 peuvent alors être construites à partir d'extraction des évaluations de  $\Phi_{\mathcal{A}}$  aux extrémités du recouvrement en  $x=0$  et  $x=\Delta$  selon :

$$\text{Eq. 206} \begin{cases} D'_e = \begin{pmatrix} [\Phi_{\mathcal{A}}(\mathbf{0})]_{k=1:6,l=1:12} \\ [\Phi_{\mathcal{A}}(\Delta)]_{k=1:6,l=1:12} \end{pmatrix} \\ L'_e = \begin{pmatrix} [\Phi_{\mathcal{A}}(\mathbf{0})]_{k=7:12,l=1:12} \\ [\Phi_{\mathcal{A}}(\Delta)]_{k=7:12,l=1:12} \end{pmatrix} \end{cases}$$

où  $k$  indique le numéro de la ligne et  $l$  le numéro de la colonne. La matrice de couplage  $D_e$  est alors obtenu par un simple réarrangement de l'ordre des lignes de  $D'_e$  pour respecter l'ordre des composantes de  $U_e$  (Eq. 96). La matrice de couplage  $L_e$  est obtenue en procédant au même réarrangement des lignes de  $L'_e$  et en prenant les opposés des composantes situées sur les lignes correspondantes aux efforts en  $x=0$ . La matrice de raideur du ME s'obtient donc à partir du produit  $K_e = L_e D_e^{-1}$ . Les matrices de raideur des poutres hors recouvrement peuvent aussi être formulées en suivant la même méthode.

### Quelques variations des hypothèses simplement formulées dans le ME poutres-collées

Une fois la matrice du système  $\mathcal{A}$  écrite, la méthodologie de formulation reste inchangée. Par conséquent, il devient très simple de formuler la matrice de raideur du ME quand les hypothèses de départ varient. Par exemple, pour remplacer l'équilibre de Goland et Reissner par l'équilibre d'Hart-Smith, il suffit de modifier les deux équations d'équilibre local en moment. Seules les lignes  $k=11$  et  $k=12$  de  $\mathcal{A}$  sont impactées et deviennent :

$$\text{Eq. 207} \begin{cases} \mathcal{A}_{11,l} = \left( \frac{G}{e} w(h_1 + h) \quad -\frac{G}{e} w(h_1 + h) \quad 0 \quad 0 \quad \frac{G}{e} w h_1 (h_1 + h) \quad \frac{G}{e} w h_1 (h_1 + h) \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right) \\ \mathcal{A}_{12,l} = \left( \frac{G}{e} w(h_2 + h) \quad -\frac{G}{e} w(h_2 + h) \quad 0 \quad 0 \quad \frac{G}{e} w h_2 (h_2 + h) \quad \frac{G}{e} w h_2 (h_2 + h) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \right) \end{cases}$$

La prise en compte d'une variation linéaire du cisaillement transverse dans l'épaisseur des substrats selon Tsai *et al.* entraine une modification des équations constitutives de la contrainte de cisaillement de la colle (Eq. 186) et des substrats (Eq. 173 à Eq. 174). La modification de la relation constitutive de la contrainte de cisaillement implique de remplacer  $G$  par  $G/(1+\beta'_t)$ . Dans un premier temps, ce remplacement s'applique simplement aux lignes  $k=7$ ,  $k=8$ ,  $k=11$  et  $k=12$  de  $\mathcal{A}$ . De plus, les équations constitutives des substrats (Eq. 173 à Eq. 174) contiennent la dérivée de la contrainte de cisaillement et donc la dérivée des déplacements longitudinaux et de l'angle de flexion :

$$\text{Eq. 208} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 + \frac{1}{1+\beta'_t} \frac{G}{e} C_1 & -\frac{1}{1+\beta'_t} \frac{G}{e} C_1 & -B_1 + \frac{1}{1+\beta'_t} \frac{G}{e} h_1 C_1 & \frac{1}{1+\beta'_t} \frac{G}{e} h_2 C_1 \\ \frac{1}{1+\beta'_t} \frac{G}{e} C_2 & A_2 - \frac{1}{1+\beta'_t} \frac{G}{e} C_2 & \frac{1}{1+\beta'_t} \frac{G}{e} h_1 C_2 & -B_2 + \frac{1}{1+\beta'_t} \frac{G}{e} h_2 C_2 \\ -B_1 - \frac{1}{1+\beta'_t} \frac{G}{e} C'_1 & \frac{1}{1+\beta'_t} \frac{G}{e} C'_1 & D_1 - \frac{1}{1+\beta'_t} \frac{G}{e} h_1 C'_1 & -\frac{1}{1+\beta'_t} \frac{G}{e} h_2 C'_1 \\ -\frac{1}{1+\beta'_t} \frac{G}{e} C'_2 & -B_2 + \frac{1}{1+\beta'_t} \frac{G}{e} C'_2 & -\frac{1}{1+\beta'_t} \frac{G}{e} h_1 C'_2 & D_2 - \frac{1}{1+\beta'_t} \frac{G}{e} h_2 C'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du_1}{dx} \\ \frac{du_2}{dx} \\ \frac{d\theta_1}{dx} \\ \frac{d\theta_2}{dx} \end{pmatrix}$$

Il est donc nécessaire d'écrire l'inversion des équations constitutives pour isoler les dérivées des déplacements longitudinaux et de l'angle de flexion. Soit  $C_{kl}$  les coefficients de

l'inverse de la matrice définie en Eq. 208. Les lignes  $k=1, k=2, k=5$  et  $k=6$  de  $\mathcal{A}$  sont modifiées en :

$$\text{Eq. 209} \quad \begin{cases} \mathcal{A}_{1,l} = (0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & C_{13} & C_{14}) \\ \mathcal{A}_{2,l} = (0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & C_{23} & C_{24}) \\ \mathcal{A}_{5,l} = (0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{31} & C_{32} & 0 & 0 & C_{33} & C_{34}) \\ \mathcal{A}_{6,l} = (0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{41} & C_{42} & 0 & 0 & C_{43} & C_{44}) \end{cases}$$

Pour passer d'un modèle de poutre d'Euler-Bernoulli à un modèle de poutre de Timoshenko, seule la relation entre la dérivée de la flèche et l'angle de flexion est concernée. Une relation constitutive sur l'effort tranchant est alors écrite sous la forme :

$$\text{Eq. 210} \quad V_i = H_i \left( \frac{dv_i}{dx} - \theta_i \right) \quad i = 1, 2$$

où  $H_i$  est la raideur de cisaillement du substrat  $i$ . Il suffit de remplacer les lignes  $k=3$  et  $k=4$  de  $\mathcal{A}$  par :

$$\text{Eq. 211} \quad \begin{cases} \mathcal{A}_{3,l} = \left( 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{H_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{H_1} & 0 & 0 & 0 \right) \\ \mathcal{A}_{4,l} = \left( 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{H_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{H_2} & 0 & 0 & 0 \right) \end{cases}$$

### ME poutres-collées selon l'équilibre de Luo et Tong

Luo et Tong choisissent un équilibre local permettant de coupler l'effort normal au moment de flexion, permettant dans le but d'approcher l'équilibre en configuration déformée [Luo et Tong 2007] (voir section 2.3.1). Une illustration de cet équilibre est donnée en Figure 22.

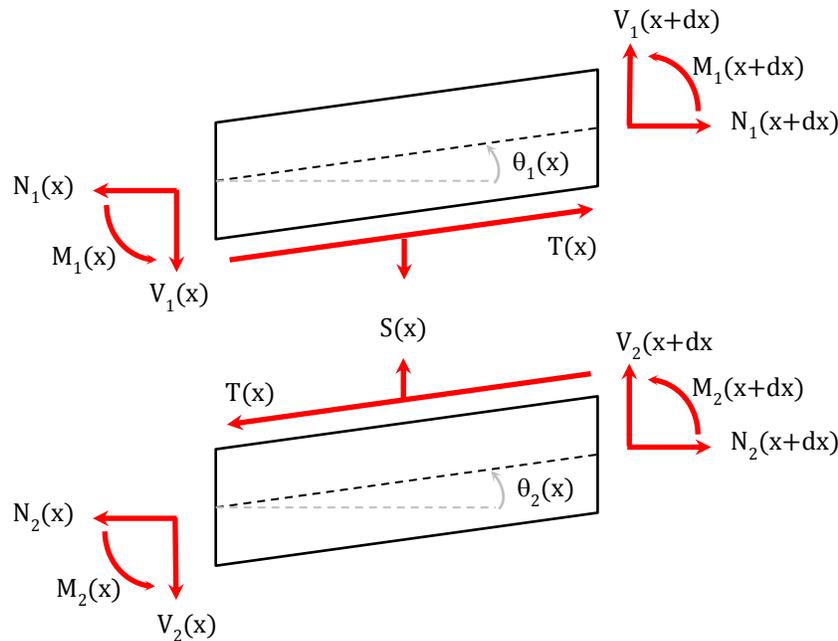


Figure 22 Équilibre local selon Luo et Tong.

Les équations d'équilibre local deviennent :

$$\text{Eq. 212 } \frac{dN_i}{dx} = (-1)^i wT \cos \theta_i \quad i = 1, 2$$

$$\text{Eq. 213 } \frac{dV_i}{dx} = (-1)^{i+1} wS + (-1)^i wT \sin \theta_i \quad i = 1, 2$$

$$\text{Eq. 214 } \frac{dM_i}{dx} = -V_i - wh_i T \cos \theta_i + N_i \sin \theta_i \quad i = 1, 2$$

Le système d'équations différentielles que forment ces équations d'équilibre avec les équations constitutives des substrats est donc non linéaire. Deux premières hypothèses simplificatrices sont prises (i) les angles de flexion sont petits et (ii) les produits de la contrainte de cisaillement par chacun des deux angles de flexion restent petits. Les équations d'équilibre local en force selon  $x$  et  $y$  reprennent les formes initiales (Eq. 88 et Eq. 89). Seule l'équation d'équilibre local en moment reste non linéaire et indique le couplage entre effort normal et moment de flexion.

$$\text{Eq. 215 } \frac{dM_i}{dx} = -V_i - wh_i T + N_i \theta_i \quad i = 1, 2$$

Le schéma de résolution proposée par Luo et Tong utilise les sommes et différences de chacune des douze fonctions inconnues à la place de celles-ci selon le changement de variable définie pour une fonction ou un paramètre  $Y$  quelconque :

$$\text{Eq. 216 } \begin{pmatrix} Y_+ \\ Y_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_+ \\ Y_- \end{pmatrix}$$

Le schéma de résolution est applicable si  $N_1 + N_2 = f$ ; cette relation d'équilibre global est valide pour le cas du simple recouvrement collé à condition que les contraintes normales dans la colle soient négligées. Cette troisième hypothèse est alors retenue. Enfin, une quatrième et dernière hypothèse consiste à négliger les produits  $N.\theta$  et  $N.\theta_+$ . Luo et Tong supposent aussi que les deux substrats sont identiques sans couplage membrane-flexion pour écrire une solution purement analytique. Cette hypothèse n'est pas retenue pour la formulation de la matrice de raideur du ME. Sous ces conditions, avec  $X^t = (u_+ \ u_- \ v_+ \ v_- \ \theta_+ \ \theta_- \ N_+ \ N_- \ V_+ \ V_- \ M_+ \ M_-)$ , le système d'équations différentielles couplées prend la forme  $\frac{dX}{dx} = \mathcal{A}X$  où :

### Eq. 217

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{D_1}{\Delta_1} + \frac{D_2}{\Delta_2} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{D_1}{\Delta_1} - \frac{D_2}{\Delta_2} \right) & 0 & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{B_1}{\Delta_1} + \frac{B_2}{\Delta_2} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{B_1}{\Delta_1} - \frac{B_2}{\Delta_2} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{D_1}{\Delta_1} - \frac{D_2}{\Delta_2} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{D_1}{\Delta_1} + \frac{D_2}{\Delta_2} \right) & 0 & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{B_1}{\Delta_1} - \frac{B_2}{\Delta_2} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{B_1}{\Delta_1} + \frac{B_2}{\Delta_2} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{B_1}{\Delta_1} + \frac{B_2}{\Delta_2} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{B_1}{\Delta_1} - \frac{B_2}{\Delta_2} \right) & 0 & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{A_1}{\Delta_1} + \frac{A_2}{\Delta_2} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{A_1}{\Delta_1} - \frac{A_2}{\Delta_2} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{B_1}{\Delta_1} - \frac{B_2}{\Delta_2} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{B_1}{\Delta_1} + \frac{B_2}{\Delta_2} \right) & 0 & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{A_1}{\Delta_1} - \frac{A_2}{\Delta_2} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{A_1}{\Delta_1} + \frac{A_2}{\Delta_2} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \frac{G}{e} w & 0 & 0 & \frac{G}{e} w h_+ & \frac{G}{e} w h_- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \frac{E}{e} w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{G}{e} w h_+ & 0 & 0 & \frac{G}{2e} w h_+ h_+ + \frac{f}{2} & \frac{G}{2e} w h_+ h_- & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{G}{e} w h_- & 0 & 0 & \frac{G}{2e} w h_+ h_- & \frac{G}{2e} w h_- h_- + \frac{f}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La formulation de la matrice de raideur suit alors la même approche que celle présentée en début de section. Un dernier changement de variable est nécessaire pour revenir aux fonctions initiales et exprimer  $K_e$ . La modélisation par ME basée sur cette formulation permet donc d'étendre le cas de l'analyse de Luo et Tong aux cas où les substrats sont différents et comportent éventuellement un couplage membrane-flexion. De plus, il est possible de considérer des conditions d'encastrement au lieu des conditions de simples appuis supposés par Luo et Tong. Par ailleurs, il est possible de considérer l'épaisseur de la couche de colle dans les équations d'équilibre local en moment, un modèle de poutre de Timoshenko ou encore un cisaillement linéaire dans l'épaisseur des substrats comme décrit dans la sous-section précédente, à condition de travailler avec les sommes et les différences des fonctions inconnues. Enfin, cette matrice de raideur dépend de l'effort de traction appliqué  $f$ . Dans le cas où un déplacement est appliqué au lieu d'un effort, un algorithme de Newton permet d'itérer vers l'effort relatif au déplacement imposé nécessaire à la construction de la matrice de raideur de la structure. Cette même approche s'applique d'ailleurs pour l'adaptation des longueurs de recouvrement en fonction des facteurs de moment fléchissant dépendant explicitement aussi de l'effort (section 2.3.3).

Une modélisation par ME d'un simple recouvrement collé chargé en effort sur la base d'une formulation selon Luo et Tong permet d'approximer le comportement mécanique non linéaire géométrique dans calcul itératif sans adaptation des longueurs hors recouvrement pour un large champ d'application géométrique et matériau.

### Formulation de la matrice de raideur de ME multicouche

La méthodologie de formulation par exponentiel de matrice est appliquée à la formulation de la matrice de raideur de ME multicouche en cinématique de barre et de poutre dans [Sekmen et al. 2020]. L'assemblage considéré comporte  $P$  couches de substrats et donc  $P-1$  couches de colles. Le ME résultant comporte donc  $2(P-1)$  nœuds. Dans [Sekmen

*et al.* 2020], les hypothèses de modélisation d’Arnoljevic ou de Vokersen sont retenues en cinématique de barre tandis qu’en cinématique de poutre celles de Goland et Reissner sont choisies. Toutefois, l’approche de Tsai *et al.*, l’équilibre d’Hart-Smith ou un modèle de poutre de Timoshenko pourraient être considérés aussi.

Les relations constitutives des substrats et de la colle restent inchangées. Les équations d’équilibre local sont de même nature et s’écrivent (Figure 23) dans le cas de la cinématique de poutre :

$$\text{Eq. 218 } \frac{dN_1}{dx} = -wT_1 \quad i = 1, 2$$

$$\text{Eq. 219 } \frac{dN_i}{dx} = w(T_{i-1} - T_i) \quad 1 < i < P$$

$$\text{Eq. 220 } \frac{dN_P}{dx} = wT_{P-1}$$

$$\text{Eq. 221 } \frac{dV_1}{dx} = wS_1$$

$$\text{Eq. 222 } \frac{dV_i}{dx} = w(S_i - S_{i-1}) \quad 1 < i < P$$

$$\text{Eq. 223 } \frac{dV_P}{dx} = -wS_{P-1}$$

$$\text{Eq. 224 } \frac{dM_1}{dx} = -V_1 - wh_1T_1$$

$$\text{Eq. 225 } \frac{dM_i}{dx} = -V_i - wh_i(T_{i-1} + T_i) \quad 1 < i < P$$

$$\text{Eq. 226 } \frac{dM_P}{dx} = -V_P - wh_P T_P$$

où  $T_i$  et  $S_i$  sont les contraintes de cisaillement et de pelage entre les couches de substrat  $i$  et  $i+1$ . Pour la cinématique de barre, il suffit de ne considérer que les efforts selon  $x$ .

A partir du jeu d’équations différentielles au premier ordre, la matrice du système  $\mathcal{A}$  peut-être écrite et la matrice de raideur du ME obtenue. La formulation de ces matrices de raideur ont été validées à l’aide de modèles EF simplifiés et représentatifs des hypothèses simplificatrices selon l’approche décrite en section 2.3.3. Il est remarqué qu’en cinématique de poutre le comportement mécanique est légèrement dépendant du maillage en calcul élastique linéaire. Ce résultat inattendu pourrait être relié aux approximations réalisées dans le calcul numérique des exponentiels de matrice.

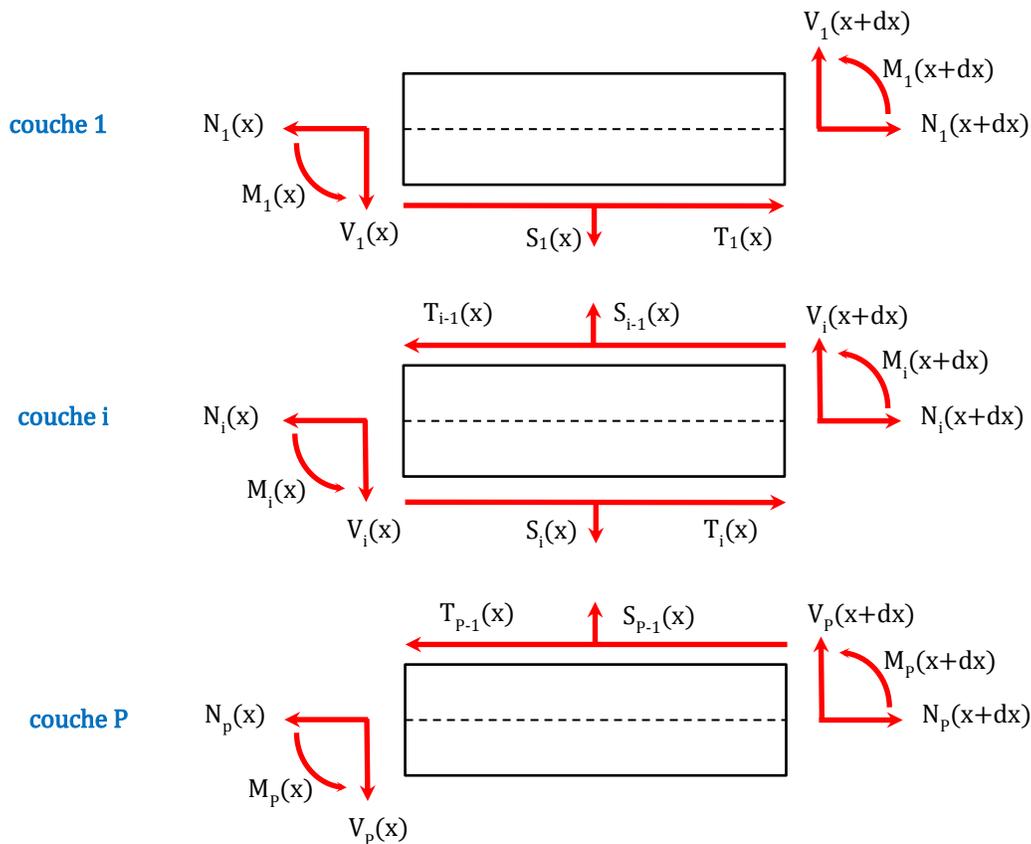


Figure 23 Équilibre local pour un ME multicouche en cinématique de poutre.

### Remarque conclusive

La formulation par exponentiel de matrice est une solution simple pour formuler la matrice de raideur d'un ME poutres-collées en fonction de différents jeux d'hypothèses de départ. Par contre, cette formulation ne donne pas accès aux formes des fonctions déplacements, efforts ou contraintes quel que soit l'abscisse  $x$  du recouvrement. Les déplacements et les efforts ne peuvent être lus qu'aux extrémités du ME. Les contraintes dans la couche de colle en sont alors déduites. Par conséquent, afin d'obtenir la répartition le long du recouvrement, il est nécessaire d'utiliser un maillage. Dans l'absolu, l'utilisation d'un maillage conduit à une augmentation de la taille de la matrice de raideur de la structure et donc des temps de calcul – même si le post-traitement ne nécessite pas de reconstruire les fonctions déplacements et efforts à partir des déplacements nodaux. Toutefois, dans toutes les applications réalisées aujourd'hui, l'augmentation des temps de calcul n'est pas « visible » en pratique.

## 2.4.2 Gradient des propriétés géométriques et matérielles

### Introduction

La déformabilité relative des substrats et de la colle entraîne la présence de surcontraintes en bord d'assemblage (Figure 20). Une conséquence est que le transfert des efforts d'un substrat à l'autre est réalisé sur une zone en bord de recouvrement de taille très restreinte par rapport à la longueur total du recouvrement. L'utilisation d'une conception basée sur des gradients de propriétés mécaniques et/ou géométriques des substrats et/ou de la couche de colle pourrait aider à réduire les pics de contraintes et uniformiser le taux transfert des efforts le long du recouvrement.

Par exemple, la conception des éprouvettes de l'essai TAST (*Thick Adherend Shear Test*) présente l'avantage d'homogénéiser la répartition des contraintes de cisaillement ainsi que celle des transferts d'effort (section 2.2.1) tout en réduisant drastiquement le pelage. De plus, des solutions existent pour réduire les effets de bord aux interfaces [Cognard *et al.* 2010]. Le fait qu'en pratique les bords de la couche de colle et des substrats ne soit pas parfaitement droits réduit les surcontraintes aux interfaces [Adams et Peppiatt 1974] [Frostig *et al.* 1999] [Zhao *et al.* 2011a] [Zhao *et al.* 2011b]. Biseauter les bords des substrats introduit une graduation de leur raideur en flexion et conduit à réduire les pics contraintes de pelage [Hart-Smith 1973c] [Oterkus *et al.* 2004]. Un gradient de propriétés de la couche de colle peut être introduit en utilisant deux colles différentes sur des zones distinctes du recouvrement (*mixed joint*) dans le but d'augmenter la tenue des assemblages [Raphael 1966] [da Silva et Lopes 2009] [Breto *et al.* 2015] [Machado *et al.* 2018]. Une autre solution est d'utiliser une seule colle dont la mise en œuvre permet de produire une couche de colle à gradient de propriétés le long du recouvrement : technologie dite FGA (*functionnally graded adhesive*) [Kawasaki *et al.* 2016] [Durudola 2017] [Marques *et al.* 2019].

Si les propriétés matérielles et/ou géométriques évoluent le long du recouvrement alors le système d'équations différentielles issu des hypothèses simplificatrices devient non linéaire. Les paramètres caractéristiques qui étaient constants deviennent alors des fonctions de l'abscisse  $x$ .

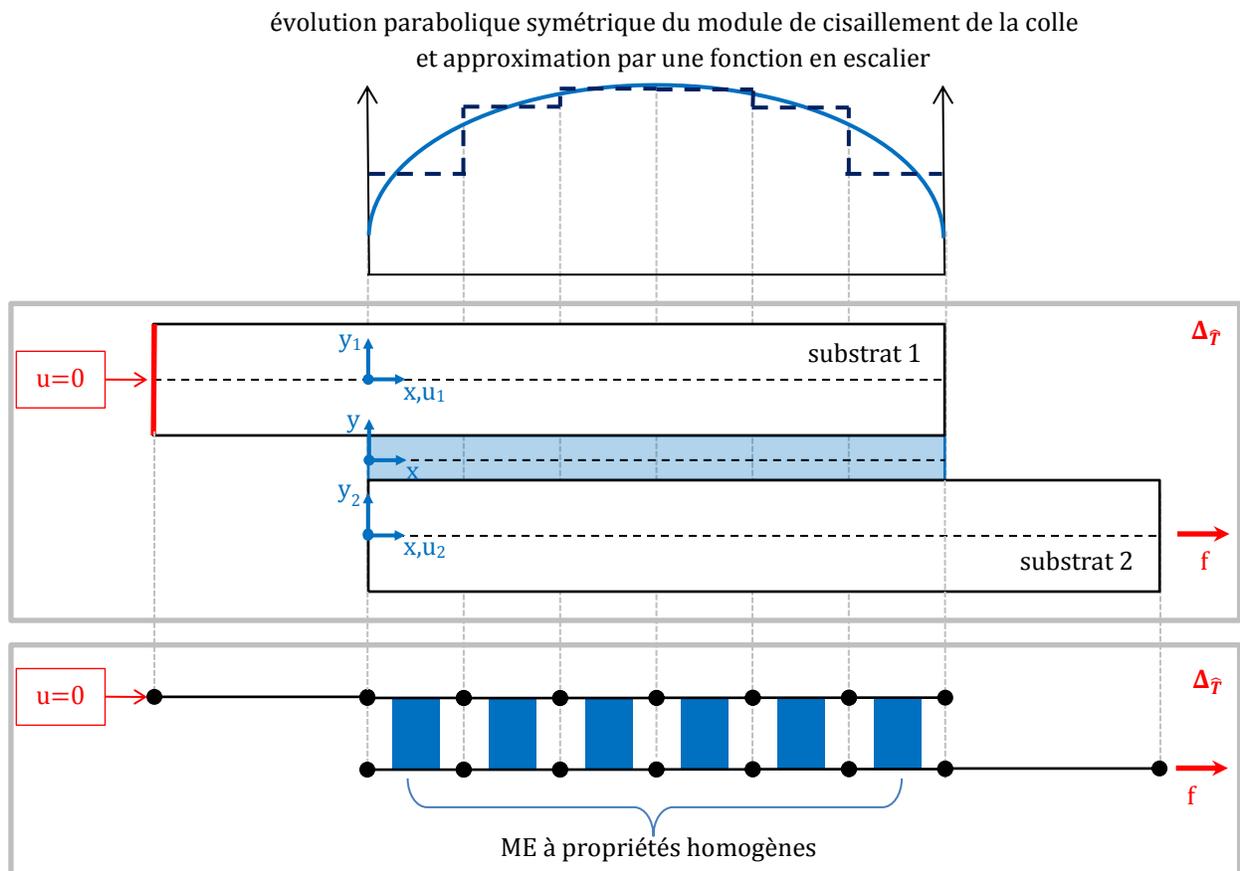
### Modélisation par maillage de ME à propriétés homogènes

La modélisation par ME peut être utilisée dans le cas d'un gradient de propriétés. Le principe est d'utiliser un maillage le long du recouvrement avec des ME à propriétés homogènes. Le gradient des propriétés est alors approché par une fonction en escalier. Dans le cas d'une cinématique de barre, un simple maillage est suffisant pour représenter un gradient des propriétés mécaniques et/ou géométriques. Dans le cas d'une cinématique de poutre et d'un gradient sur les épaisseurs des substrats et/ou de la couche de colle, une étape de gestion du décalage de fibre neutre est nécessaire. En supposant la continuité des contraintes de la couche de colle, des relations cinématiques sur les degrés de liberté de

deux ME consécutifs peuvent être écrites. Une matrice de réduction permet de supprimer de la matrice de raideur de la structure un nœud sur deux consécutifs tout en introduisant ces relations cinématiques. Cette méthode est utilisée par Justine Deléglise dans son stage de fin d'études pour modéliser des simples recouvrements collés pour lesquelles les substrats sont biseautés [Deléglise 2012].

Les premières modélisations des assemblages à gradient de propriétés matérielles de la colle sont fournies par Carbas *et al.* en 2014 [Carbas *et al.* 2014]. Les auteurs utilisent les séries entières pour résoudre le système d'équations différentielles non linéaires. Hart-Smith a recours aux séries entières pour la résolution des assemblages biseautés ou en escalier [Hart-Smith 1973c]. Le modèle suppose un simple recouvrement collé en cinématique de barre chargé mécaniquement et ayant les deux substrats identiques. De plus, le module de cisaillement est supposé avoir une évolution symétrique par rapport au centre du recouvrement et linéaire sur chaque demi-recouvrement. Stein *et al.* étendent cette résolution par séries entières pour des recouvrements collés en cinématiques de barre ou de poutre chargés mécaniquement, pouvant avoir des substrats différents et une évolution quelconque des propriétés matérielles de la colle [Stein *et al.* 2016] [Stein *et al.* 2017]. En particulier pour la cinématique de poutre, la résolution porte sur le sandwich collé chargé mécaniquement aux extrémités. Les substrats sont des plaques Mindlin-Reissner en flexion cylindrique incluant le couplage membrane-flexion et sous équilibre local d'Hart-Smith. Dans le cadre d'une collaboration avec Lucas F.M. da Silva (Professeur, Universidade do Porto) Paroissien *et al.* considèrent le cas d'un chargement combiné mécanique et thermique [Paroissien *et al.* 2018]. Un intérêt des assemblages FGA peut résider aussi dans la réduction des pics de contraintes dus aux différences d'expansion thermique des substrats. Une première résolution par série entière est proposée dans le cadre de la cinématique de barre pouvant avoir des substrats différents et une évolution quelconque des propriétés matérielles de la colle. La résolution est semi-analytique et s'appuie sur l'inversion d'un système linéaire après troncature des séries entières. Comparé aux résultats de Stein *et al.*, il est montré que le modèle développé, restreint à un chargement mécanique, fournit les mêmes résultats. Une seconde résolution par maillage de ME à propriétés homogènes est présentée (Figure 24). Dans ce travail, la valeur du module de cisaillement de la colle de chaque ME est fixée à la valeur de la distribution réelle pour l'abscisse correspondant à son centre. Il est montré qu'avec une densité de 40 ME par mm, l'écart relatif sur les contraintes de cisaillement de la couche de colle est de l'ordre de 0,2% pour un chargement purement mécanique ou purement thermique. Pour le cas de la cinématique de poutre, seule la résolution par maillage de ME à propriétés homogènes est présentée. Le ME utilisé est celui issu d'une formulation par exponentiel de matrice selon l'équilibre de Luo et Tong avec prise en compte de l'épaisseur de colle dans les équations d'équilibre en moment. Les substrats sont des poutres d'Euler-Bernoulli avec couplage membrane-flexion. L'approche par maillage de ME à propriétés homogènes permet de s'affranchir de l'introduction des conditions aux limites requises pour l'approche de Stein *et*

*al.* du sandwich collé. La comparaison avec le modèle de Stein *et al.* est réalisée en appliquant les mêmes conditions aux limites au bord du sandwich sur le modèle à ME. Il est montré une bonne corrélation qualitative sur la répartition des contraintes de cisaillement et de pelage dans la couche de colle, pour le cas d'une distribution parabolique symétrique des modules de pelage et de cisaillement de la colle ; il est supposé que le coefficient de Poisson reste constant. Des écarts sur les valeurs des contraintes sont obtenus du fait de la différence des hypothèses de modélisation avec celles de *Stein et al.* Par ailleurs, il est montré que les valeurs des pics de contrainte dans la couche de colle pour le cas à gradients de propriétés sont systématiquement inférieures aux pics de contraintes pour le cas homogène ayant pour modules soit les valeurs minimales soit les valeurs maximales de l'évolution à gradient. Il est montré aussi que la réduction des contraintes est d'autant plus importante que la plage de distribution des hauts modules sur le recouvrement est importante. Les codes MATLAB relatifs à [Paroissien *et al.* 2018] et [Paroissien *et al.* 2019] sont disponibles en ligne suivant ce [lien](https://doi.org/10.17632/4ccmkmxbz2.1) (doi : 10.17632/4ccmkmxbz2.1).



**Figure 24** Modélisation par ME à propriétés homogènes d'un simple recouvrement collé en cinématique de barre et évolution parabolique symétrique du module de cisaillement de la colle.

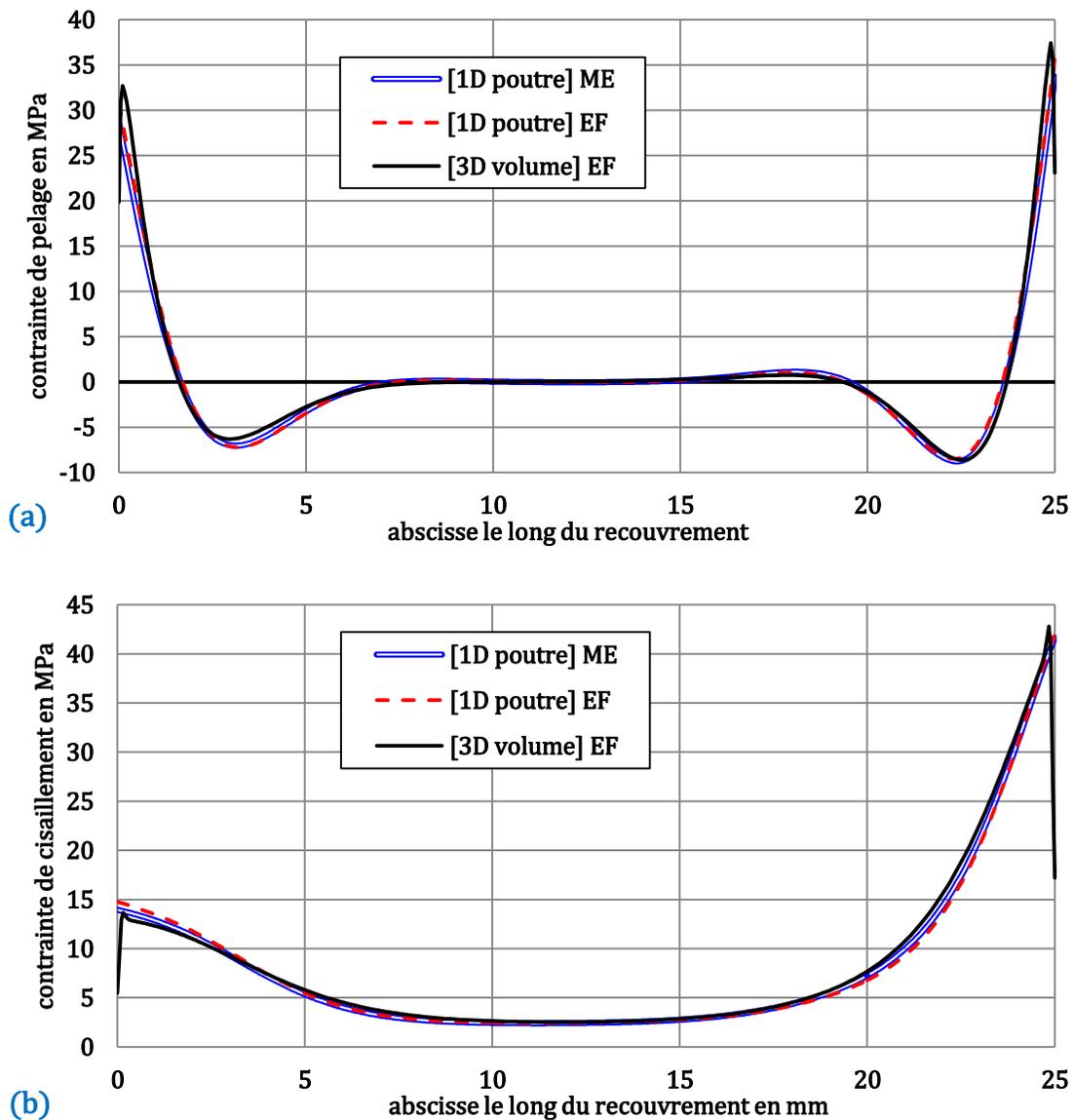
## Validation et évaluation des modélisations simplifiées

Dans [Paroissien *et al.* 2019], une validation et une évaluation des modélisations simplifiées par ME en cinématique de barre et de poutre sont présentées pour des assemblages en simple recouvrement simplement appuyés à gradient de propriétés ou non. Pour le cas à gradient de propriétés, une évolution parabolique symétrique des modules de la colle est supposée. Les chargements sont purement mécaniques si les deux substrats sont identiques et purement thermiques ou combinés mécanique ou thermique si les deux substrats sont différents. La validation pour les deux cinématiques est réalisée par rapport à des modélisations par EF simplifiées et représentatives des hypothèses simplificatrices (section 2.3.3). L'évaluation est réalisée pour la cinématique de poutre seulement par rapport à des modélisations EF volumiques.

Les modélisations par ME ne supposent pas de cisaillement transverse dans les substrats. En cinématique de poutre, les quatre formulations de ME suivantes ont été utilisées (i) équilibre de Goland et Reissner, (ii) équilibre de Hart-Smith, (iii) équilibre de Luo et Tong sans épaisseur de colle dans l'équilibre local et (iv) équilibre de Luo et Tong avec épaisseur de colle dans l'équilibre local. Le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli est utilisé. Les modélisations simplifiées par EF prennent en compte ou non l'épaisseur géométrique de la colle au travers du paramètre  $e_{EF}$  (Figure 19). D'autre part, pour qu'une modélisation EF volumique ne prenne pas en compte l'épaisseur de colle, des éléments d'interface sans épaisseur géométrique sont utilisés pour la couche de colle à la place des éléments volumiques. Dans ces modèles EF volumiques, la couche de colle est donc représentée comme un ensemble de relations cinématiques liant les interfaces des substrats, à l'instar de l'approche à fondation élastique. Les analyses EF sont soit linéaires géométriques soit non linéaires géométriques. Quand l'analyse EF est non linéaire géométrique alors la formulation du ME selon l'équilibre de Luo et Tong est à considérer pour la comparaison. Tous les modèles par ME et par EF ont subi une étude de convergence avant de procéder aux confrontations. Les confrontations consistent à évaluer l'écart relatif en valeur absolue des valeurs maximales obtenues avec la modélisation par ME par rapport à celle obtenues par EF. Les contraintes sont lues sur le long de la ligne moyenne de la couche de colle pour le modèle EF purement volumique.

En ce qui concerne la validation, les écarts relatifs mesurés sont inférieurs à 0,01% et 0,32% pour les cas homogènes et à gradient respectivement, en cinématique de barre. En cinématique de poutre et en analyse linéaire géométrique, les écarts relatifs mesurés sont inférieurs à 0,6% et 1,1% pour les cas homogènes et à gradient respectivement ; les plus forts écarts sont obtenus quand l'épaisseur géométrique de colle est prise en compte. Si l'analyse devient non linéaire géométrique, les écarts relatifs mesurés sont inférieurs à 7,61% et 6,61% pour les cas homogènes et à gradient respectivement ; les écarts relatifs sont du même ordre de grandeur que l'épaisseur géométrique de la couche de colle soit prise en compte ou non. Il est intéressant de noter que la modélisation simplifiée basée sur

l'équilibre de Luo et Tong pour approximer un comportement non linéaire géométrique fournit des écarts relatifs faibles tout en ne nécessitant pas de calcul itératif.



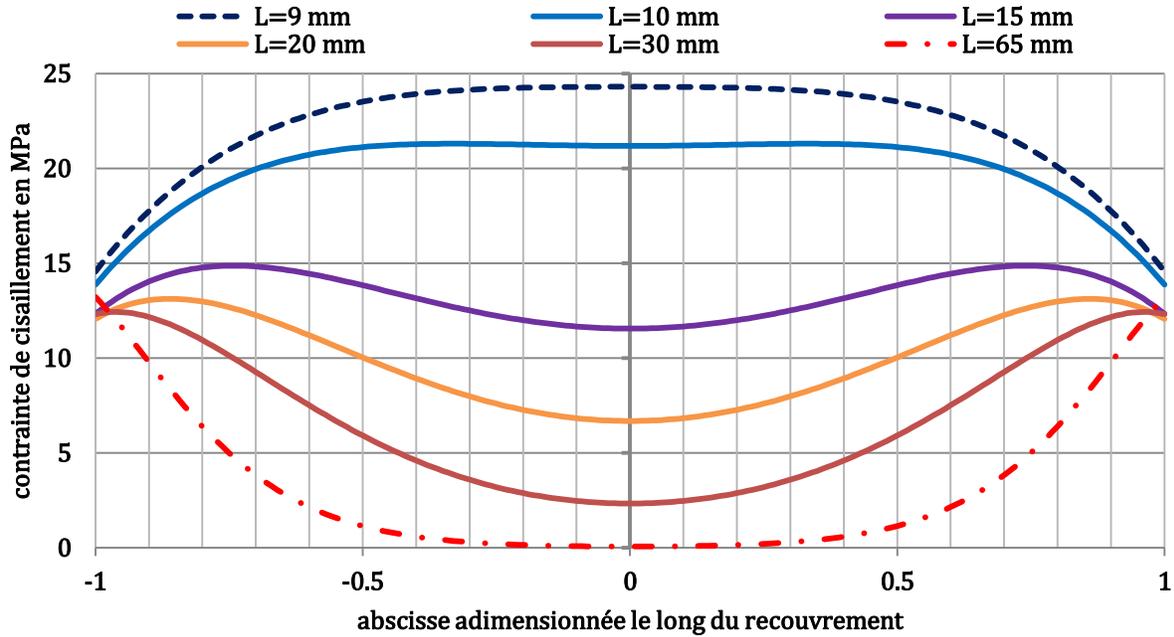
**Figure 25** Répartitions des contraintes de pelage (a) et de cisaillement (b) dans la couche de colle le long du recouvrement d'après la modélisation à ME ([1D poutre ME]) sous équilibre de Luo et Tong avec prise en compte de l'épaisseur, la modélisation simplifiée EF ([1D poutre] EF) avec  $e_{EF}=e$  et analyse non linéaire géométrique et la modélisation EF 3D volumique en analyse non linéaire géométrique. Le chargement est combiné mécanique et thermique. L'évolution des modules de la colle est parabolique symétrique.

En ce qui concerne l'évaluation, les écarts relatifs se situent entre 0.82% et 7.88% pour le cisaillement et entre 1.36% et 17.5% pour le pelage tous cas confondus. Aucune influence

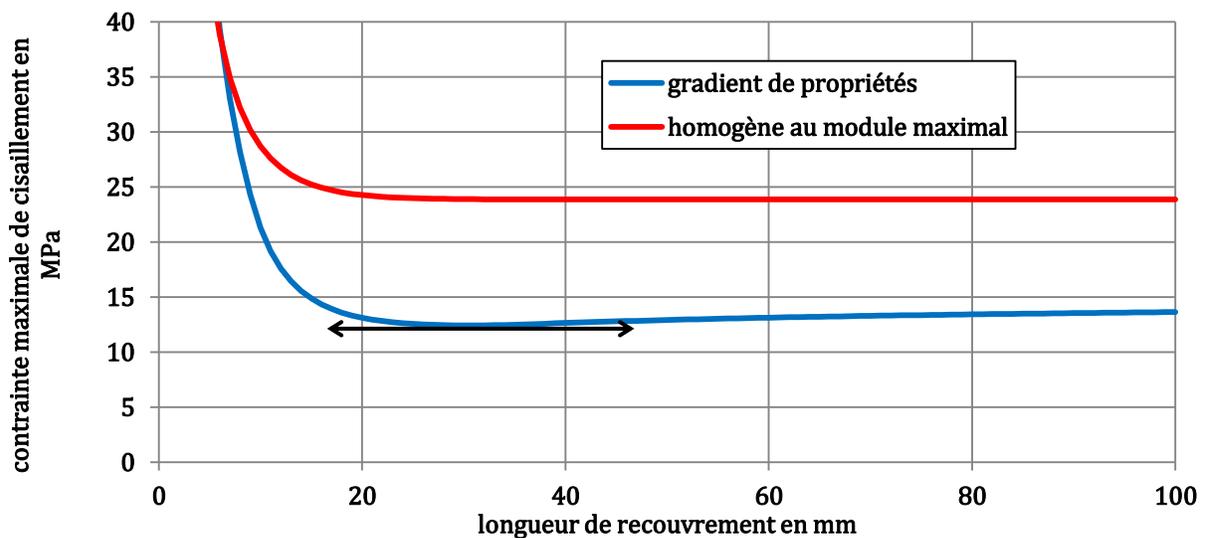
significative du gradient des propriétés sur les écarts relatifs n'est relevée. Les écarts relatifs sont plus importants quand l'analyse est non linéaire géométrique et prend en compte l'épaisseur de colle. Les répartitions des contraintes de pelage et de cisaillement sont données en [Figure 25](#) pour un des cas à gradient de propriétés fournissant les plus forts écarts : prise en compte de l'épaisseur en analyse non linéaire géométrique et sous chargement combiné mécanique et thermique.

Il est donc montré que la modélisation par ME permet d'approcher différents niveaux de complexité comme par exemple le gradient des propriétés ou la non linéarité géométrique. Elle fournit des résultats en bon accord avec ceux issus des modélisations plus complexes supposées plus représentatives de la réalité physique. Elles peuvent donc être utilisées pour explorer rapidement le domaine de conception. En particulier, l'influence de la longueur de recouvrement sur les contraintes maximales de cisaillement est étudiée dans [\[Paroissien et al. 2019\]](#). L'étude concerne un assemblage en simple recouvrement en cinématique de barre chargé mécaniquement et ayant les deux mêmes substrats. L'évolution du module de cisaillement de la colle est parabolique symétrique. Pour des recouvrements longs, la contrainte maximale se situe sur les extrémités du recouvrement, alors que pour des recouvrements courts elle se situe au centre du recouvrement ([Figure 26](#)). Il est intéressant de voir que le profil de contrainte de cisaillement peut changer radicalement de celui obtenu si la colle est à propriétés homogènes et peut donc induire des approches de conception différentes. Ce comportement a aussi été observé par Stein *et al.* [\[Stein et al. 2017\]](#). Par ailleurs, il est montré qu'il existe une longueur de recouvrement finie qui minimise la contrainte maximale de cisaillement, alors que pour le cas d'une colle à propriétés homogènes la tendance est asymptotique ([Figure 27](#)).

Par ailleurs et pour finir, dans [\[Paroissien et Lachaud 2019\]](#), une modélisation d'un assemblage HBC en cinématique de barre avec un gradient de propriété de la couche de colle est présentée. La modélisation utilise un maillage de ME barres-collées à propriétés homogènes au sein duquel et des ressorts de cisaillement sont insérés pour représenter les boulons [\[Paroissien 2006\]](#). Il est montré que le gradient de propriété a un effet significatif sur l'augmentation de la tenue de la colle. *Le code MATLAB relatif à [\[Paroissien et Lachaud 2019\]](#) est disponible en ligne suivant ce [lien](#) (doi : 10.2514/1.J058372).*



**Figure 26** Répartitions de la contrainte de cisaillement le long du recouvrement pour différentes longueurs de recouvrement. L'assemblage est à simple recouvrement chargé mécaniquement en cinématique de barre et a les deux mêmes substrats. La colle est à gradient de propriétés parabolique symétrique.



**Figure 27** Contraintes maximales de cisaillement en fonction de la longueur de recouvrement pour une colle à gradient parabolique symétrique et une colle à module de cisaillement homogène égale à la valeur maximale de l'évolution par gradient. L'assemblage est à simple recouvrement chargé mécaniquement en cinématique de barre et a les deux mêmes substrats.

### 2.4.3 Formulation d'un macro-élément à gradient de propriétés

#### Introduction

Afin de conserver les formes des fonctions déplacement, effort et contrainte tout en ayant la possibilité de faire varier les hypothèses de départ et de les complexifier éventuellement, une méthodologie de formulation à l'aide de séries entières est développée [Torrelli et Paroissien 2020] [Ordonneau *et al.* 2020]. De la même manière que pour la formulation par exponentiel de matrice, le travail vise à contourner la première difficulté de traitement analytique des équations. Par contre, une attention particulière doit être portée à la méthodologie d'implémentation.

Pour simplifier, une première méthodologie est présentée sur le cas du ME barres-collées sous les hypothèses de modélisation d'Arnoljivic ou de Volkersen puis appliquée à la formulation d'un ME multicouche en cinématique de barre [Torrelli et Paroissien 2020]. Cette première méthodologie est ensuite étendue au ME poutres-collées ainsi qu'aux ME barres-collées et poutres-collées à gradient de propriétés [Ordonneau *et al.* 2020]. Une modélisation utilisant un maillage de ME à propriétés homogènes permet d'approcher cette configuration (section 2.4.2). Au contraire, Ordonneau *et al.* formulent un ME à quatre nœuds, incluant un gradient de propriétés quelconques pour la couche de colle.

#### Formulation de la matrice de raideur d'un ME dans une cinématique de barre

Les hypothèses de modélisation d'Arnoljivic ou de Volkersen permettent l'écriture des équations d'équilibre local (Eq. 4) ainsi que des équations constitutives des substrats (Eq. 5) et de la colle (Eq. 7) données en section 2.2.1.

La formulation s'appuie sur une abscisse adimensionnée  $X=x/\Delta$ . Les fonctions déplacements longitudinaux sont supposées s'écrire sous la forme :

$$\text{Eq. 227 } \mathbf{u}_i(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{u}_i)_n X^n \quad i = 1, 2$$

où les  $(u_i)_n$  sont les coefficients des séries qui sont inconnues. Le fait de travailler en abscisse adimensionnée permet aux coefficients de la série de conserver la même unité que les fonctions auxquelles ils se rapportent. Un autre intérêt est de limiter le risque de divergence numérique lié à l'usage de polynômes dont les ordres peuvent être élevés. Les équations constitutives permettent d'écrire les expressions des efforts normaux :

$$\text{Eq. 228 } N_i(X) = A_i \frac{1}{\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{u}_i)_{n+1} X^n \quad i = 1, 2$$

Le système d'équations différentielles donné en Eq. 9 est exprimé sous forme de série :

$$\text{Eq. 229 } \begin{cases} \frac{d^2 \mathbf{u}_1}{dX^2} + \frac{1}{e_1 E_1} \frac{G}{e} (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) = \mathbf{0} \\ \frac{d^2 \mathbf{u}_2}{dX^2} - \frac{1}{e_2 E_2} \frac{G}{e} (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+2)(n+1)(\mathbf{u}_1)_{n+2} + \frac{G}{e} \frac{\Delta^2}{e_1 E_1} ((\mathbf{u}_2)_n - (\mathbf{u}_1)_n) \right] X^n = \mathbf{0} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+2)(n+1)(\mathbf{u}_2)_{n+2} - \frac{G}{e} \frac{\Delta^2}{e_2 E_2} ((\mathbf{u}_2)_n - (\mathbf{u}_1)_n) \right] X^n = \mathbf{0} \end{cases}$$

Une troncature à l'ordre  $N$  est alors réalisée. Le nombre d'inconnues est donc égal à  $2(N+1)$ . Les équations Eq. 229 permettent d'écrire les deux relations de récurrence suivantes :

$$\text{Eq. 230} \begin{cases} \forall n \in [0; N-2], (n+2)(n+1)(\mathbf{u}_1)_{n+2} + \frac{G}{e} \frac{\Delta^2}{e_1 E_1} ((\mathbf{u}_2)_n - (\mathbf{u}_1)_n) = \mathbf{0} \\ \forall n \in [0; N-2], (n+2)(n+1)(\mathbf{u}_2)_{n+2} - \frac{G}{e} \frac{\Delta^2}{e_2 E_2} ((\mathbf{u}_2)_n - (\mathbf{u}_1)_n) = \mathbf{0} \end{cases}$$

Ainsi,  $2(N-1)$  équations peuvent être écrites. Les quatre déplacements nodaux fournissent les quatre équations suivantes :

$$\text{Eq. 231} \begin{cases} \mathbf{u}_1(\mathbf{0}) = (\mathbf{u}_1)_0 \\ \mathbf{u}_1(\mathbf{1}) = \sum_{n=0}^N (\mathbf{u}_1)_n \\ \mathbf{u}_2(\mathbf{0}) = (\mathbf{u}_2)_0 \\ \mathbf{u}_2(\mathbf{1}) = \sum_{n=0}^N (\mathbf{u}_2)_n \end{cases}$$

Par conséquent, un système linéaire de taille  $2(N+1)$  est écrit sous la forme :

$$\text{Eq. 232} \mathbf{D}_N \mathbf{C}_N = \begin{pmatrix} [\mathbf{0}]_{2(N-1)} \\ \mathbf{u}_1(\mathbf{0}) \\ \mathbf{u}_2(\mathbf{0}) \\ \mathbf{u}_1(\mathbf{1}) \\ \mathbf{u}_2(\mathbf{1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{0}]_{2(N-1)} \\ \mathbf{U}_e \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{C}_N = \mathbf{D}_N^{-1} \begin{pmatrix} [\mathbf{0}]_{2(N-1)} \\ \mathbf{U}_e \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{C}_N$  est le vecteur des coefficients des séries et  $\mathbf{D}_N$  la matrice de couplage. Les quatre efforts nodaux fournissent les quatre équations suivantes en utilisant l'équation Eq. 228 :

$$\text{Eq. 233} \begin{cases} -N_1(\mathbf{0}) = -\frac{A_1}{\Delta} (\mathbf{u}_1)_1 \\ N_1(\mathbf{1}) = \frac{A_1}{\Delta} \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) (\mathbf{u}_1)_{n+1} \\ -N_2(\mathbf{0}) = -\frac{A_2}{\Delta} (\mathbf{u}_2)_1 \\ N_2(\mathbf{1}) = \frac{A_2}{\Delta} \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) (\mathbf{u}_2)_{n+1} \end{cases}$$

Il est alors possible de construire un système linéaire de taille  $2(N+1)$  sous la forme :

$$\text{Eq. 234} \mathbf{L}_N \mathbf{C}_N = \begin{pmatrix} [\mathbf{0}]_{2(N-1)} \\ -N_1(\mathbf{0}) \\ -N_2(\mathbf{0}) \\ N_1(\mathbf{1}) \\ N_2(\mathbf{1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{0}]_{2(N-1)} \\ \mathbf{F}_e \end{pmatrix}$$

$\mathbf{L}_N$  est une matrice de couplage comportant  $2(N-1)$  lignes de zéros. Avec l'équation Eq. 232, la relation matricielle suivante est obtenue :

$$\text{Eq. 235} \begin{pmatrix} [\mathbf{0}]_{2(N-1)} \\ \mathbf{F}_e \end{pmatrix} = \mathbf{L}_N \mathbf{D}_N^{-1} \begin{pmatrix} [\mathbf{0}]_{2(N-1)} \\ \mathbf{U}_e \end{pmatrix}$$

Puisque les  $2(N-1)$  premières composantes du vecteur colonne dans le membre de droite de l'équation Eq. 235 sont nulles, la matrice de raideur élémentaire approchée du ME est extraite de  $L_N D_N^{-1}$  en sélectionnant son bloc inférieur droit défini à partir l'intersection des lignes  $2N-1$  à  $2N+1$  et des colonnes  $2N-1$  à  $2N+1$ .

Dans [Torrelli et Paroissien 2020], une étude de convergence sur l'ordre de troncature  $N$  est menée. Au-delà de  $N=15$ , les résultats en termes d'effort normal ou de contraintes de cisaillement dans la colle ne varient plus de manière significative. Pour  $N=20$ , l'erreur relative maximale sur l'effort normal entre la formulation par séries entières et la solution exacte est de l'ordre de  $1.10^{-4}\%$ . Par ailleurs, cette méthodologie est appliquée pour la formulation de la matrice de raideur du ME multicouche en cinématique de barre. Une étude de convergence à l'ordre de la troncature montre des résultats stabilisés à partir de  $N=15$ . La validation est réalisée avec une modélisation EF simplifiée selon l'approche décrite dans la section 2.3.3. Plusieurs configurations matérielles sont testées et une erreur relative de  $0.4\%$  est mesurée pour  $N=15$ . Cette formulation par séries entières est vue comme une solution à la dépendance au maillage observée avec la formulation par exponentiel de matrice du ME multicouche en cinématique de poutre (section 2.4.1). Il serait intéressant de tester. Les codes MATLAB relatifs à [Torrelli et Paroissien 2020] sont disponibles en ligne suivant ce [lien](#) (doi : 10.17632/dn9zy3zwxc.1).

### Extension de la formulation

Dans Ordonneau *et al.*, un ME formulé par séries entières en cinématique de poutre [Ordonneau *et al.* 2020]. La présentation est réalisée à partir des hypothèses du ME initial (section 2.3.2) à savoir des substrats d'Euler-Bernoulli avec couplage membrane-flexion et équilibre local de Goland et Reissner. Comme pour le cas de la cinématique de barre, il s'agit d'écrire un système d'équations différentielles dont les inconnues sont les déplacements. À partir des équations d'équilibre local (Eq. 88 à Eq. 90), les quatre équations suivantes sont écrites :

$$\text{Eq. 236} \quad \begin{cases} \frac{dN_i}{dx} + (-1)^{i+1} \mathbf{wT} = \mathbf{0} \\ \frac{d^2 M_i}{dx^2} + (-1)^{i+1} \mathbf{wS} + \mathbf{wh}_i \frac{dT}{dx} = \mathbf{0} \end{cases} \quad i = 1, 2$$

L'équation d'équilibre en moment est donc dérivée une fois, permettant de remplacer la dérivée de l'effort tranchant par le pelage. Il suffit alors d'exprimer les efforts et des contraintes en fonction des déplacements longitudinaux et flèches à l'aide des équations constitutives (Eq. 91 à Eq. 95) :

$$\text{Eq. 237} \quad \begin{cases} A_i \frac{d^2 u_i}{dx^2} - B_i \frac{d^3 v_i}{dx^3} + (-1)^{i+1} \mathbf{w}_e^G (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 - \mathbf{h}_2 \frac{dv_2}{dx} - \mathbf{h}_1 \frac{dv_1}{dx}) = \mathbf{0} \\ (-B_i \frac{d^3 u_i}{dx^3} + D_i \frac{d^4 v_i}{dx^4}) + (-1)^{i+1} \mathbf{w}_e^E (v_1 - v_2) + \frac{we_i G}{2e} \left( \frac{du_2}{dx} - \frac{du_1}{dx} - \mathbf{h}_2 \frac{d^2 v_2}{dx^2} - \mathbf{h}_1 \frac{d^2 v_1}{dx^2} \right) = \mathbf{0} \end{cases} \quad i = 1, 2$$

Les déplacements longitudinaux et flèches sont alors écrits sous forme de série de l'abscisse adimensionnée  $X$ . Quatre relations de récurrence sont alors déduites. Ces relations de

récurrence sont tronquées à l'ordre  $N$ , de sorte que les coefficients de plus grand ordre pour les déplacements longitudinaux et flèches sont respectivement  $(u_i)_{N+2}$  et  $(v_i)_{N+4}$ . Un total de  $4(N+1)=4N+4$  coefficients est à déterminer. Les relations de récurrence fournissent  $2(N-1)+2(N-3)=4N-8$  équations. Les douze dernières équations viennent de l'écriture des douze déplacements. Un système linéaire de taille  $4(N+4)$  est donc obtenu représenté par une matrice  $D_N$ , comme dans le cas de la cinématique de barre. Les efforts nodaux sont alors exprimés à partir des déplacements au travers des équations constitutives des substrats et de l'équation d'équilibre local en force selon  $y$  pour l'effort tranchant (Eq. 89). Une matrice  $L_N$  apparaît, menant à la matrice de raideur élémentaire approchée du ME  $K_e$  à partir de  $L_N D_N^{-1}$ . Une étude de convergence sur l'ordre de troncature montre qu'au-delà de  $N=40$ , la matrice de raideur approchée tend vers la matrice de raideur exacte (section 2.3.2) avec un écart relatif sur les coefficients de la matrice maximal inférieur à  $1.10^{-3}\%$ . Afin de prendre en compte un gradient des modules de la colle le long du recouvrement, ceux-ci sont écrits sous forme de séries entières. Leurs expressions sont alors introduites dans les systèmes d'équations différentielles en déplacement Eq. 229 et Eq. 237. Il est remarqué que l'obtention des systèmes d'équations différentielles en déplacement ne nécessite pas de dériver les modules de la colle. Le passage à un ME à gradient de propriétés ne demande donc que de faire l'effort, en termes de traitement mathématique, d'écrire des produits de séries. La méthodologie de formulation des matrices de raideur élémentaires du ME restent alors la même. Dans [Ordonneau *et al.* 2020], il est montré que les résultats obtenus en termes de répartition de contrainte dans la colle le long du recouvrement avec la modélisation par ME à gradient convergent vers ceux issus de la modélisation par ME à propriétés homogènes ou que ceux la modélisation par EF simplifiée (section 2.4.2).

Enfin, les travaux de thèse de doctorat de Benjamin Ordonneau sont toujours en cours. Quelques évolutions sur la méthodologie de formulation non encore publiées ont été réalisées. En particulier, il est possible d'obtenir une matrice de raideur approchée à partir des équations différentielles au premier ordre comme pour le cas de la formulation par exponentielle de matrice (section 2.4.1). L'avantage est d'éviter de manipuler les équations et de dériver des séries.

## 2.4.4 Comportement non linéaire matériau

### Introduction

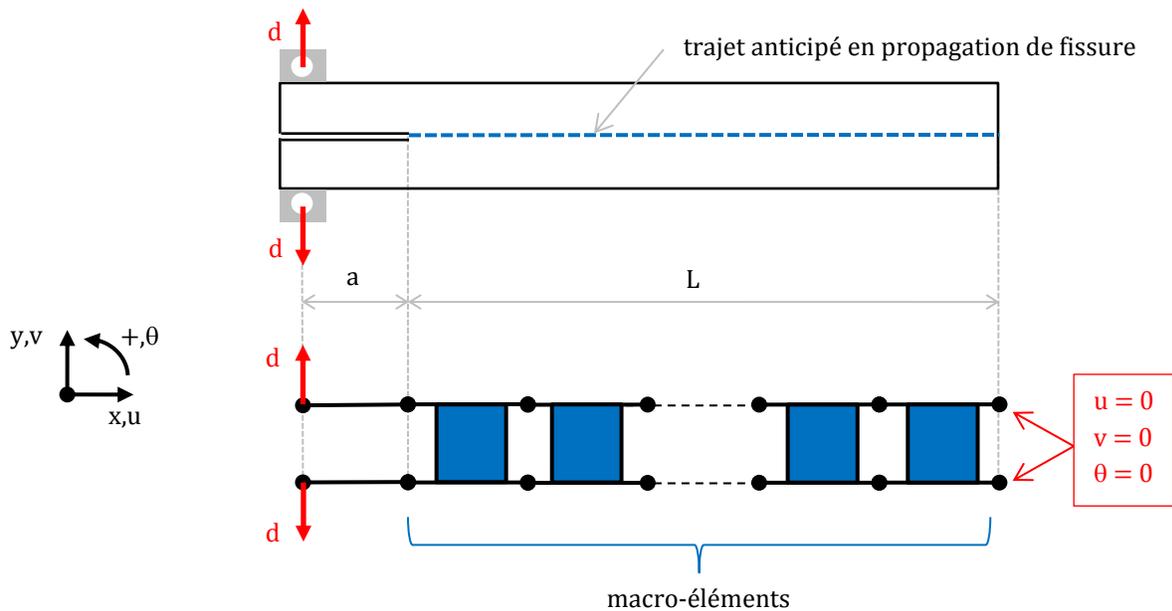
La considération de lois de comportement matériau non linéaires représente un niveau de complexité supplémentaire et s'accompagne par une approche de résolution semi-analytique des modélisations simplifiées. En supposant un comportement élasto-plastique parfait de la colle, Hart-Smith relie les efforts qui peuvent être transférés par un assemblage collé à sa capacité à se déformer en cisaillement [Hart-Smith 1973b]. La saturation du comportement matériau implique une redistribution de la répartition des efforts transférés par la couche de colle ou par les fixations. La prise en compte d'un comportement adoucissant endommageable permet de simuler la rupture progressive de l'assemblage.

Les travaux de thèse de Guillaume Lélias [Lélias 2016] portent sur (i) la caractérisation expérimentale de fine couche colle modélisée comme une zone cohésive, similaire à une fondation élastique avec une loi de comportement endommageable et (ii) la simulation du comportement mécanique statique d'assemblage collé. Cette thèse était sous financement CIFRE avec SOGETI High Tech sur la période 2013 à 2016. Dans le cadre de ces travaux un algorithme de calcul non linéaire est implémenté dans le cadre de la modélisation par ME [Gavoille 2014] [Lélias et al. 2015]. L'algorithme répond au schéma de calcul itératif implicite de Newton-Raphson à matrice sécante. De plus, le chargement en déplacement par lagrangien augmenté a été mis en place dans la modélisation par ME [Hubald 2014] [Lélias et al. 2015]. Un calcul non linéaire matériau nécessite alors de mailler le recouvrement. Deux exemples d'application sont alors présentés dans cette section présentant la mise en œuvre de ces algorithmes.

### Application au délaminage d'un composite stratifié

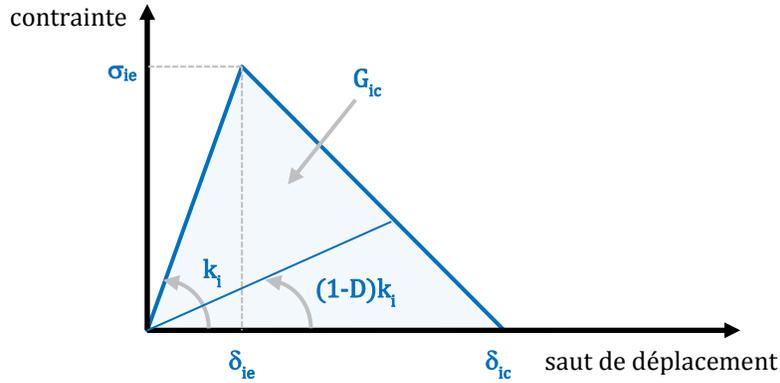
La résistance des structures composites stratifiées peut être réduite par le délaminage et donc influencer sur les transferts des efforts. Le délaminage en mode I requiert le moins d'énergie pour fissurer et pilote principalement la fissuration des structures telles que les raidisseurs co-cuits, co-collés ou collés sur panneau, les zones de reprises de plis ou le dépliage de cornière.

Dans [Lachaud et al. 2020], la modélisation par ME est utilisée pour simuler le délaminage en mode I sur des éprouvettes DCB pour *double cantilever beam* (Figure 28). Les éprouvettes sont réalisées à partir de plis unidirectionnels IMA/M21E. Une éprouvette DCB consiste en un parallélépipède pré-fissuré à mi-épaisseur sur une longueur  $a$  et sa profondeur  $w$ . Chaque extrémité pré-fissurée de l'éprouvette est soumise à un déplacement hors plan  $d$  symétrique de sorte à appliquer à la pointe de fissure une sollicitation pure d'arrachement ou de pelage. L'objectif de cet essai est de mesurer le taux de restitution d'énergie critique en mode I interlaminaire.



**Figure 28** Modélisation par ME d'un essai DCB. La longueur  $a$  est la longueur de pré-fissure.

Pour simuler cet essai, l'utilisation d'un modèle de zone cohésive pour représenter l'interface soumise à la fissuration est commune. Le modèle de zone cohésive s'appuie sur une loi dite de traction-séparation liant la contrainte à l'interface au saut de déplacement de l'interface. Il existe plusieurs formes de loi traction - séparation (TS) [Goustanios and Sørensen 2012]. Dans [Lachaud *et al.* 2020], la loi choisie est la loi bilinéaire ou triangulaire, classiquement utilisée (Figure 29). Elle comporte une première phase linéaire élastique selon une pente  $k_i$  jusqu'à une contrainte maximale  $\sigma_{ie}$  et un saut de déplacement  $\delta_{ie}$  dits contrainte d'initiation et saut de déplacement à l'initiation respectivement. L'indice  $i$  représente le mode pur I ou II. Cette première phase est suivie d'une phase adoucissante selon un trajet linéaire dans le plan de TS jusqu'à une contrainte nulle et un saut de déplacement correspondant  $\delta_{ic}$ . Sur la phase adoucissante, un paramètre dommage  $D$  évolue entre 0 et 1. Il traduit la perte de raideur et donc la dégradation progressive de l'interface. À  $\sigma_{ie}$ , le dommage vaut 0 et s'initie. Le dommage vaut 1 quand le saut de déplacement vaut  $\delta_{ic}$  signifiant le début de la propagation de fissure. L'aire sous la courbe de TS est le taux de restitution d'énergie critique en mode  $i$ . Quand  $D=1$ , suffisamment d'énergie est fournie pour propager la fissure.



**Figure 29** Loi TS bilinéaire ou triangulaire en mode pur  $i=I, II$ .

Dans la modélisation par ME, l'interface à fissurer est représentée par la fondation élastique, représentant la couche de colle dans le cas de la modélisation d'un assemblage collé. En effet, les relations constitutives pour la couche de colle initialement utilisée (Eq. 94 et Eq. 95) définissent une relation entre la contrainte et le saut de déplacement de l'interface. Il suffit alors de remplacer les raideurs  $E/e$  et  $G/e$  par  $k_I$  et  $k_{II}$  respectivement, où  $k_{II}$  est la raideur de la loi TS en mode pur II, déterminée par ailleurs. Les sauts de déplacement en mode pur I et II sont alors  $\delta_I = v_1 - v_2$  et  $\delta_{II} = u_2 - u_1 - h_1\theta_1 - h_2\theta_2$ .

L'essai DCB est tel que la contrainte de cisaillement à l'interface reste nulle. Le comportement en mode I est donc celui qui pilote le comportement. En mode pur, un triplé de paramètres suffit à caractériser une loi TS bilinéaire. Dans [Lachaud *et al.* 2020], la contrainte d'initiation  $\sigma_{Ie} = 40$  MPa est caractérisée à partir par d'essais de flexion quatre points sur cornière par une approche analytique [Ko 1988] [Ko et Jackson 1989] et par l'utilisation d'une modélisation EF. La théorie des poutres modifiées est utilisée pour mesurer le taux de restitution d'énergie critique  $G_{Ic} = 0.4$  N.mm<sup>-1</sup> [ASTM D5528]. La raideur d'interface  $k_I = 85$  kN.mm<sup>-1</sup> est identifiée pour que la modélisation par EF de l'essai corrèle au mieux la partie linéaire de la courbe force – déplacement de l'essai DCB. La raideur en mode pur II  $k_{II} = 75$  kN.mm<sup>-1</sup> est évaluée sur la base d'essais ENF, pour *end notched flexure*.

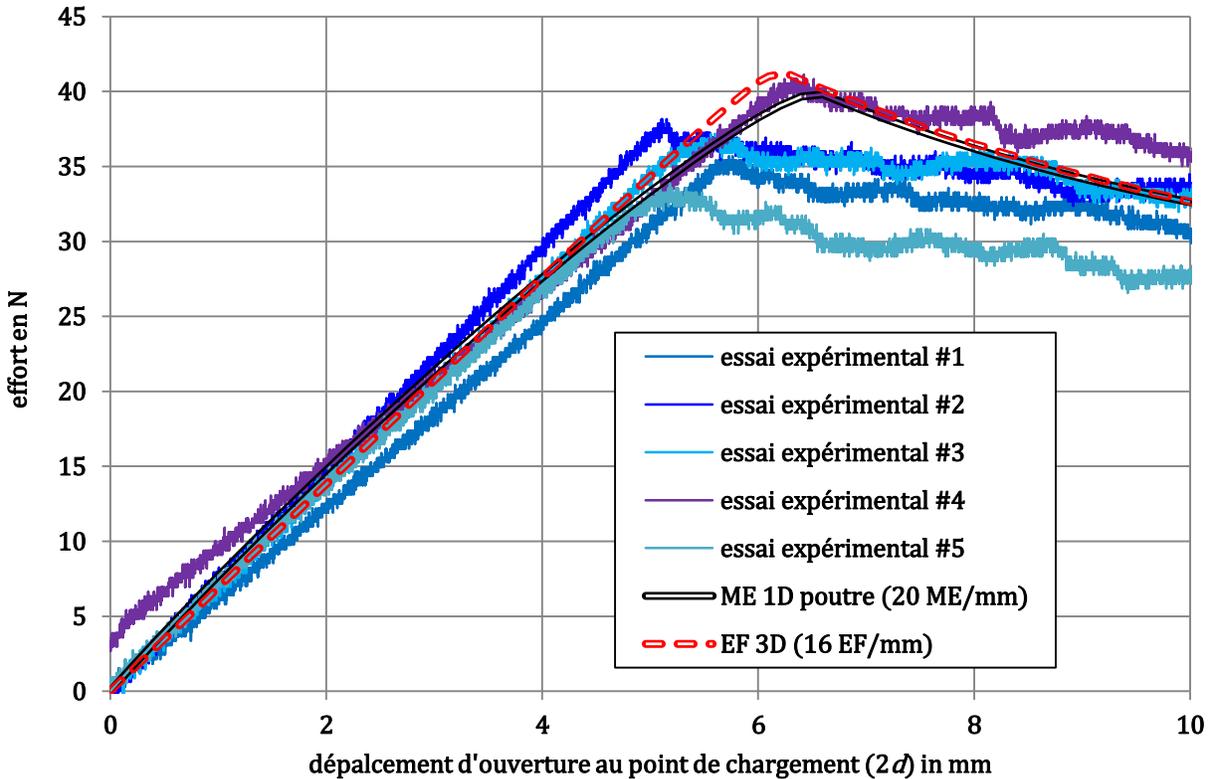
L'algorithme de calcul non linéaire est basé sur la mise à jour à chaque itération de chaque incrément de la matrice sécante de la structure. À chaque itération et à chaque incrément, les matrices élémentaires des ME doivent donc être ré-évaluées avec les raideurs sécantes courantes de l'interface  $k_I(1-D)$  et  $k_{II}(1-D)$ , où l'hypothèse d'un dommage isotrope est appliquée. Le paramètre dommage est calculé par l'équation suivante, obtenue à partir de la loi TS en mode pur I en exprimant l'intersection de la droite en phase adoucissante et d'une droite sécante:

$$\text{Eq. 238 } (1 - D)k_I\delta_I = k_I\delta_{Ie} \left(1 - \frac{\delta_I - \delta_{Ie}}{\delta_{Ic} - \delta_{Ie}}\right) \Leftrightarrow D = \frac{\delta_{Ic}(\delta_I - \delta_{Ie})}{\delta_I(\delta_{Ic} - \delta_{Ie})} = \frac{\delta_{Ic}}{\delta_{Ic} - \delta_{Ie}} \left(1 - \frac{\delta_{Ie}}{\delta_I}\right)$$

Aucun dommage n'est évalué si le saut de déplacement est négatif. Ce paramètre dommage est calculé à chaque abscisse du maillage. Comme chaque ME comporte deux paires de

nœuds, alors chaque ME a deux paramètres dommage calculés – un à chaque extrémité du ME. Or, pour recalculer la matrice de raideur élémentaire de chaque ME, un seul jeu de raideurs sécantes est nécessaire. Dans [Lachaud *et al.* 2020], il est choisi de considérer la valeur maximale de  $D$  sur chacune des deux paires de nœuds. Le choix d'une valeur minimale, moyenne ou autre peut être facilement implémenté. De plus, la valeur du paramètre dommage maximal choisie est  $D_{max}=0.9999999$ . Dans la procédure de calcul itératif, la convergence d'un incrément de temps est obtenu le résidu est inférieur à  $1.10^{-3}$  ; le résidu considéré est la norme de la différence entre le vecteur des efforts nodaux internes augmenté et le vecteur des efforts nodaux externes augmenté.

Les essais expérimentaux sont simulés à l'aide d'une modélisation par EF 3D et de la modélisation par ME en cinématique de poutre. Les paramètres géométriques sont  $a=45$  mm,  $L=120$  mm,  $w=20$  mm et  $e_s=1,33$  mm. Les propriétés orthotropes des plis permettent de définir les propriétés homogénéisées des substrats utilisées pour les deux modélisations telles que  $A_s=3531898$  N,  $D_s=520631$  Nmm<sup>2</sup>. Tous les plis sont orientés à zéro de sorte que la raideur de couplage membrane-flexion est nulle. Le code Abaqus est utilisé pour la modélisation par EF. Les substrats sont modélisés par des éléments volumiques à 8 nœuds et 3 degrés de liberté par nœud en intégration normale. Des éléments d'interface alimentés par la loi TS bilinéaire caractérisée sont utilisés pour modéliser l'interface à fissurer. La modélisation par ME utilise une formulation en cinématique de poutre d'Euler-Bernoulli sous équilibre local de Goland et Reissner. Le cisaillement transverse des substrats n'est pas considéré. Les maillages le long de la zone de propagation dans recouvrement sont uniformément répartis. Les modélisations par EF et par ME ont subi une étude de convergence afin de déterminer la densité de maillage à utiliser. Les courbes force déplacement issues des essais expérimentaux et des simulations numériques sont données en [Figure 30](#).



**Figure 30** Courbes effort déplacement mesurées expérimentalement et simulées par ME 1D poutre et EF 3D.

Il apparaît que les simulations permettent de retrouver le comportement global macroscopique mesuré expérimentalement. Les simulations par EF et par ME sont proches sans être superposées. La modélisation par EF volumique permet de retrouver un front de fissure non constant le long de la profondeur contrairement à la modélisation par ME monodimensionnelle. De plus, les longueurs du recouvrement pour lesquelles le paramètre dommage est strictement compris entre 0 et 1 sont différentes. Par exemple, pour une ouverture au point de chargement  $2d=10$  mm, elles valent 6.35 mm et 1.31 mm d'après les simulations par EF et par ME respectivement. Dans la modélisation par EF 3D, le dommage maximal est 0.999. De plus, une régularisation visqueuse dont le temps caractéristique est faible ( $1.10^{-4}$  s) est appliquée. Ainsi, à l'échelle du pli, les simulations fournissent des résultats différents.

### Application aux assemblages HBC

Dans [Paroissien *et al.* 2017], un essai expérimental statique sur assemblage HBC en simple cisaillement encastré et chargé en tension est réalisé jusque rupture. Les deux substrats sont en aluminium 2024-T351 peints et sont identiques. L'éprouvette comporte deux lignes et trois rangées de vis têtes fraisées en titane de diamètre de fut  $\phi_f=5.56$  mm

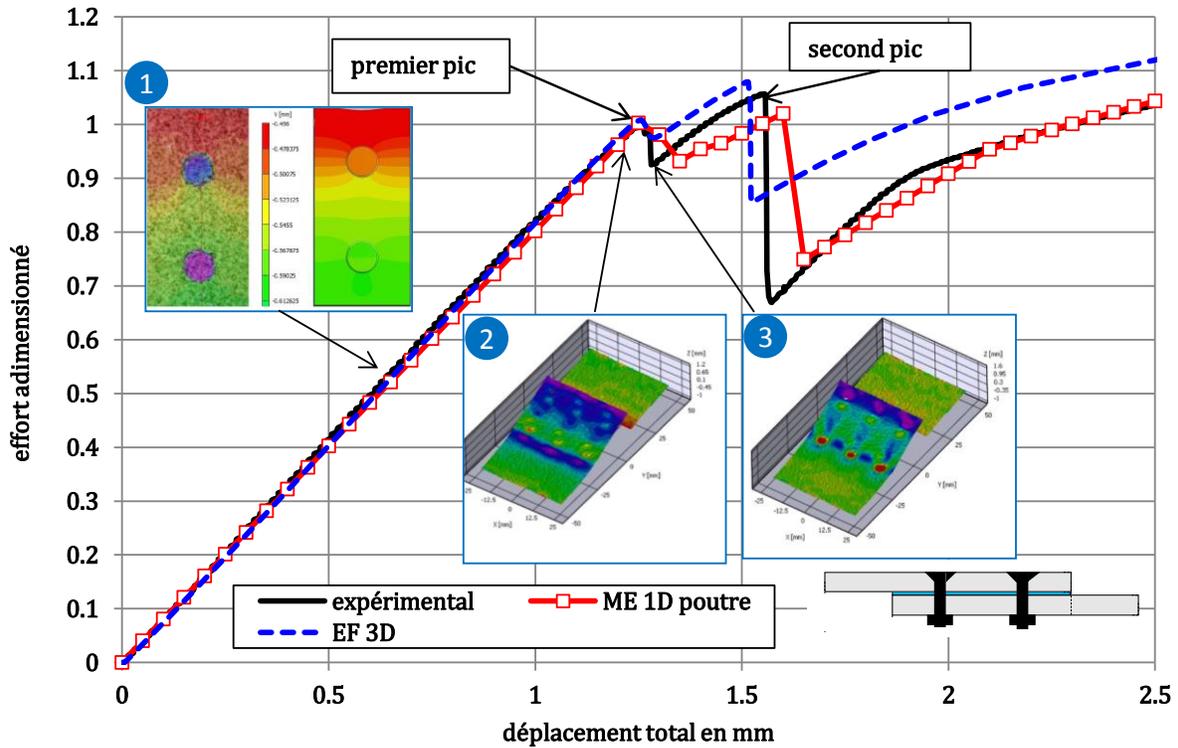
(prEN6114-V-3A-4) et écrous en acier (ASNA2531-3A). Les fixations sont montées sans jeu et serrées sur colle méthacrylate non polymérisée. La courbe effort déplacement est donnée en [Figure 31](#). Il est observé une réponse globalement linéaire jusqu'à une première chute d'effort, définissant un premier pic d'effort utilisé comme référence notamment pour adimensionner par la suite les efforts. La chute d'effort mesurée est d'environ 8%. Une reprise d'effort est constatée jusqu'à une seconde chute, définissant le second pic d'effort. Le second pic d'effort est environ 6% supérieur au premier pic d'effort et la chute d'effort et la seconde chute est environ de 32%. Une reprise d'effort de forme bilinéaire est ensuite observée jusqu'à la rupture finale de l'éprouvette coïncidente avec la rupture d'une ligne de fixations dans le filetage. Des mesures des champs de déplacements et déformations par stéréo-corrélation avant et après les premiers et seconds pics indiquent (i) que la première chute d'effort est due au décollement des deux substrats sur les deux distances au bord et (ii) que la seconde est due au décollement des deux substrats entre les fixations.

Des modélisations par EF 3D et par ME en cinématique de poutre sont réalisées afin d'essayer de simuler le scénario de ruine de l'éprouvette observé expérimentalement. Aucune caractérisation expérimentale de la colle n'est effectuée. De plus, l'épaisseur de colle n'est pas maîtrisée et varie sur la surface de recouvrement du fait du serrage des fixations sur colle fraîche. Un modèle de zone cohésive en mode mixte est donc supposé et les paramètres associés sont choisis pour représenter au mieux le comportement expérimental. Les lois de TS sur les modes purs sont supposées bilinéaires avec une loi d'interaction pour l'initiation quadratique en contraintes.

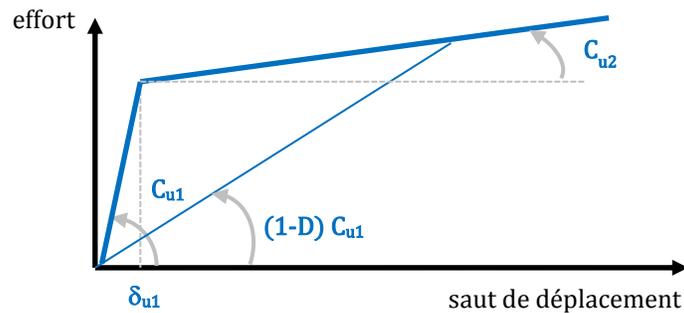
Dans le modèle EF 3D, réalisé à l'aide d'Abaqus, les substrats et les vis sont modélisés par des lois élasto-plastiques parfaites. L'écrou est linéaire élastique. La colle est modélisée par des éléments d'interface. Le critère de Benzeggagh-Kenane est utilisé pour la loi d'interaction en propagation.

La modélisation par ME suppose un comportement linéaire élastique des substrats. Le ME de fixation présenté en section [2.3.3](#) est utilisé. La raideur  $C_v$  est fixée à la raideur axiale de du fût cylindrique de la vis par  $C_v = \frac{E_f \pi \phi_f^2}{4h_+}$ , où  $E_f$  est le module d'Young de la vis. La raideur  $C_\theta$  se déduit de  $C_u$  selon [[Parioissien 2006](#)] par  $C_\theta = \frac{3}{8}(1 + \nu_f)\phi_f^2 C_u$ , où  $\nu_f$  est le coefficient de Poisson de la vis. La raideur  $C_u$  pilote alors le comportement de la fixation dans le modèle par ME. Il est supposé que la loi entre l'effort dans la fixation et le déplacement relatif axial des lignes des substrats  $\delta_u$  suit une loi bilinéaire à écrouissage positif ([Figure 32](#)), dont les trois paramètres  $C_{u1}$ ,  $C_{u2}$  et  $\delta_{u1}$ , sont déterminés pour représenter au mieux le comportement expérimental. Pour le calcul non linéaire, la raideur sécante de la fixation  $(1-D)C_{u1}$  est évaluée. Dans ce cas, le paramètre  $D$  n'a pas le sens d'un endommagement physique mais a le sens d'un abattement numérique et vaut :

$$\text{Eq. 239 } (1 - D)C_{u1}\delta_u = C_{u1}\delta_{u1} + C_{u2}(\delta_u - \delta_{u1}) \Leftrightarrow D = 1 - \frac{\delta_u}{\delta_{u1}} - \frac{C_{u2}}{C_{u1}} \left(1 - \frac{\delta_u}{\delta_{u1}}\right)$$



**Figure 31** Courbes effort – déplacement mesurées expérimentalement et simulée par ME 1D poutre et EF 3D. L'effort est adimensionnée par la valeur de l'effort expérimental au premier pic. Schéma de l'éprouvette. L'image 1 représente la déformation longitudinale mesurée et simulée par EF. Les images 2 et 3 représentent la flèche mesurée avant et après le premier pic respectivement.



**Figure 32** Loi bilinéaire à écrouissage positif pour  $C_u$ .

La loi d'interaction en propagation suit une loi énergétique linéaire. Un endommagement isotrope est supposé et est calculé selon la description analytique suivante. Elle a été validée par comparaison avec la loi *DAMINT* implémentée dans SAMCEF [Schwartz 2013] [Lélias *et al.* 2015] [Lélias 2016]. À partir des sauts de déplacement en mode purs, un saut

de déplacement équivalent  $\lambda$ , une contrainte équivalente  $\sigma$  et un paramètre de mixité  $\mu$  associé à un angle de mixité  $\varphi$  sont définis selon :

$$\text{Eq. 240} \left\{ \begin{array}{l} \delta = \sqrt{\delta_I^2 + \delta_{II}^2} \\ \sigma = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2} \\ \mu = \frac{\delta_{II}}{\delta_I} = \tan \varphi \end{array} \right.$$

Il est alors supposé que la loi en mode mixte est aussi bilinéaire de sorte que l'expression du paramètre dommage est :

$$\text{Eq. 241} \quad D = \frac{\delta_c(\delta - \delta_e)}{\delta(\delta_c - \delta_e)} = \frac{\delta_c}{\delta_c - \delta_e} \left( 1 - \frac{\delta_e}{\delta} \right)$$

où  $\delta_e$  et  $\delta_c$  sont les sauts de déplacement à la mixité  $\mu$  à l'initiation et à la propagation respectivement. Ces grandeurs doivent être déterminées à l'aide de lois d'interaction des modes purs à l'initiation et à la propagation. Une loi d'interaction à l'initiation énergétique en puissance est supposée sous la forme :

$$\text{Eq. 242} \quad \left( \frac{G_I}{G_{Ie}} \right)^p + \left( \frac{G_{II}}{G_{IIe}} \right)^p = 1$$

où  $p$  est un paramètre du modèle.  $G_{Ie}$  et  $G_{IIe}$  sont les densités surfaciques d'énergie en mode pur à l'initiation, correspondant donc aux aires du premier triangle dans la loi de TS bilinéaire. Ces énergies sont donc définies à partir des lois de TS en mode pur.  $G_I = k_I \delta_I / 2$  et  $G_{II} = k_{II} \delta_{II} / 2$  sont les densités surfaciques d'énergie stockée en mode pur. Il est remarqué qu'à l'initiation le critère d'interaction quadratique en contrainte correspond au cas particulier  $p=1$ . En introduisant les expressions de  $G_I$  et  $G_{II}$  et celles des projections de  $\delta$  sur les modes purs dans la loi d'interaction à l'initiation, le saut de déplacement à l'initiation en mode mixte est :

$$\text{Eq. 243} \quad \delta_e = \delta_{Ie} \delta_{IIe} \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{[(\delta_{IIe})^{2p} + (\mu \delta_{Ie})^{2p}]^{\frac{1}{2p}}}$$

La loi d'interaction à la propagation est supposée être une loi puissance de la forme :

$$\text{Eq. 244} \quad \left( \frac{G_I}{G_{Ic}} \right)^q + \left( \frac{G_{II}}{G_{IIc}} \right)^q = 1$$

où  $q$  est un paramètre du modèle. Si  $q=1$  alors la loi est énergétique linéaire. Pour calculer le saut de déplacement à la propagation, il est nécessaire d'exprimer  $G_I$  et  $G_{II}$ . Il est alors supposé que les lois de TS projetées dans les modes purs sont aussi bilinéaires, définies à partir des raideurs des modes purs et des projections de  $\delta_e$  et  $\delta_c$  selon la mixité  $\mu$ . Le saut de déplacement à la propagation devient alors :

$$\text{Eq. 245 } \delta_c = \delta_{Ic} \delta_{IIc} \frac{\left[1 + \left(\frac{\mu}{\mu_e}\right)^{2p}\right]^{\frac{1}{2p}}}{\left[(\delta_{IIc})^q + \left(\frac{\mu}{\mu_e}\right)^q (\mu \delta_{Ic})^q\right]^{\frac{1}{q}}} \sqrt{1 + \mu^2}$$

où  $\mu_e = \delta_{IIe} / \delta_{Ie}$ .

Après plusieurs essais, un jeu de paramètres est retenu pour alimenter le modèle de zone cohésive et la loi bilinéaire à écrouissage positif pour la fixation. Les modèles ainsi déterminés ne peuvent pas être considérés comme des modèles matériau intrinsèques. Les simulations par EF et ME sont alors capables d'approcher le comportement global mesuré expérimentalement et en particulier les deux chutes d'effort (Figure 31). En Figure 33, l'évolution des paramètres dommage dans la colle aux deux extrémités du recouvrement (point A et B) et au centre (point C) en fonction du déplacement total est ajoutée à l'évolution de l'effort adimensionné. Il est montré que la seconde chute d'effort correspond au décollement des substrats sur l'essentiel de la surface de recouvrement (point C). Le modèle EF montre une initiation du dommage aux extrémités (points A et B) à des niveaux de charge différents du fait de la dissymétrie de l'assemblage induite par la vis tête fraisée et son écrou. Une analyse de l'évolution du dommage sur les distances au bord montre que le dommage puis le décollement s'initie en bord de recouvrement. Aux abords de la première chute d'effort, les distances aux bords sont bien complètement décollées.

À partir du modèle par ME et en supposant que les paramètres retenus pour les lois de la couche de colle et des fixations sont applicables, le même essai statique est simulé pour les cas purement collés et les cas purement boulonnés. Les courbes effort déplacement correspondantes sont ajoutées à celle de la configuration HBC simulée par ME et la courbe mesurée expérimentalement en Figure 34. Il est montré que l'effort maximal atteint dans le cas purement collé est sensiblement le même que l'effort du premier pic (HBC). De plus, le comportement de l'éprouvette purement boulonnée est superposé à celui de l'éprouvette HBC une fois les substrats complètement décollés (après la seconde chute d'effort). Enfin, il est montré qu'en augmentant la surface du recouvrement et en réduisant l'épaisseur des substrats induisant une réduction de 12% de la masse, la valeur au premier pic est augmentée de 10% (Figure 35). La modification de géométrie réalisée suit la préconisation d'Hart-Smith : tendre à un rapport longueur de recouvrement sur épaisseur supérieur ou égal à 30. Dans la configuration initiale, ce rapport vaut 23,2 ; dans la nouvelle configuration, il vaut 30.

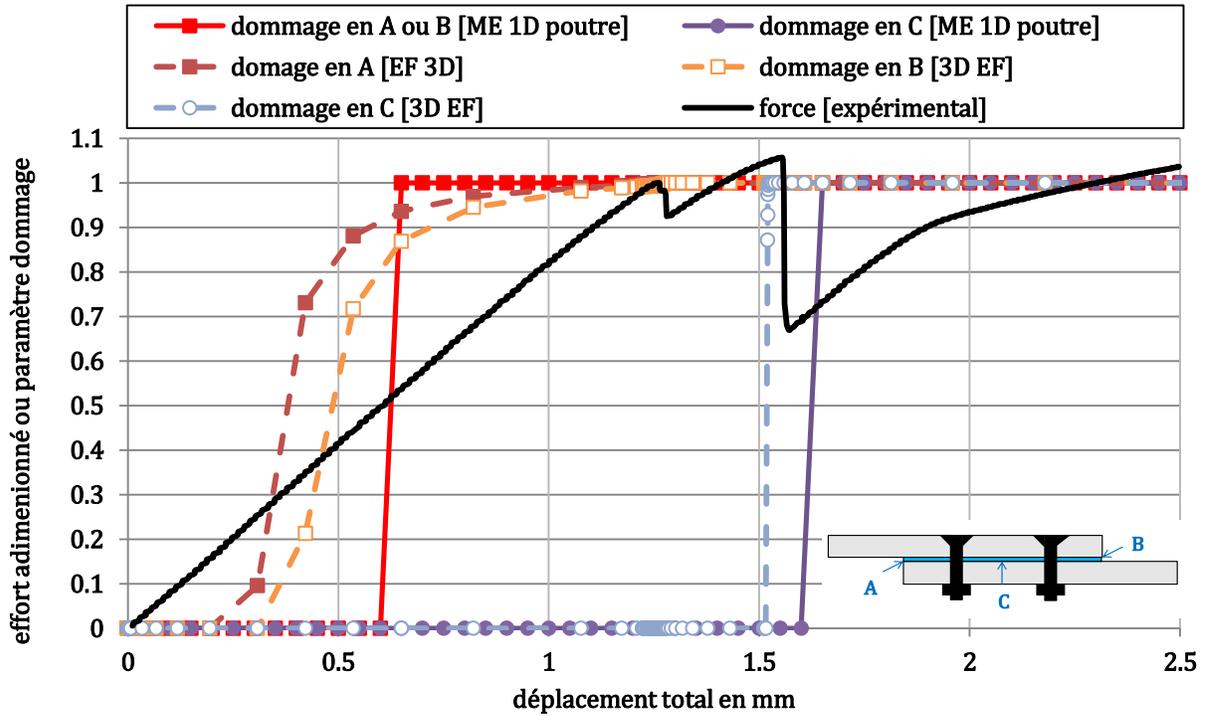


Figure 33 Évolution en fonction du déplacement total de l'effort adimensionné et du paramètre dommage mesuré sur les simulations par EF et par ME pour trois points A, B et C dans la couche de colle. A et B sont situés aux extrémités du recouvrement et C au centre.

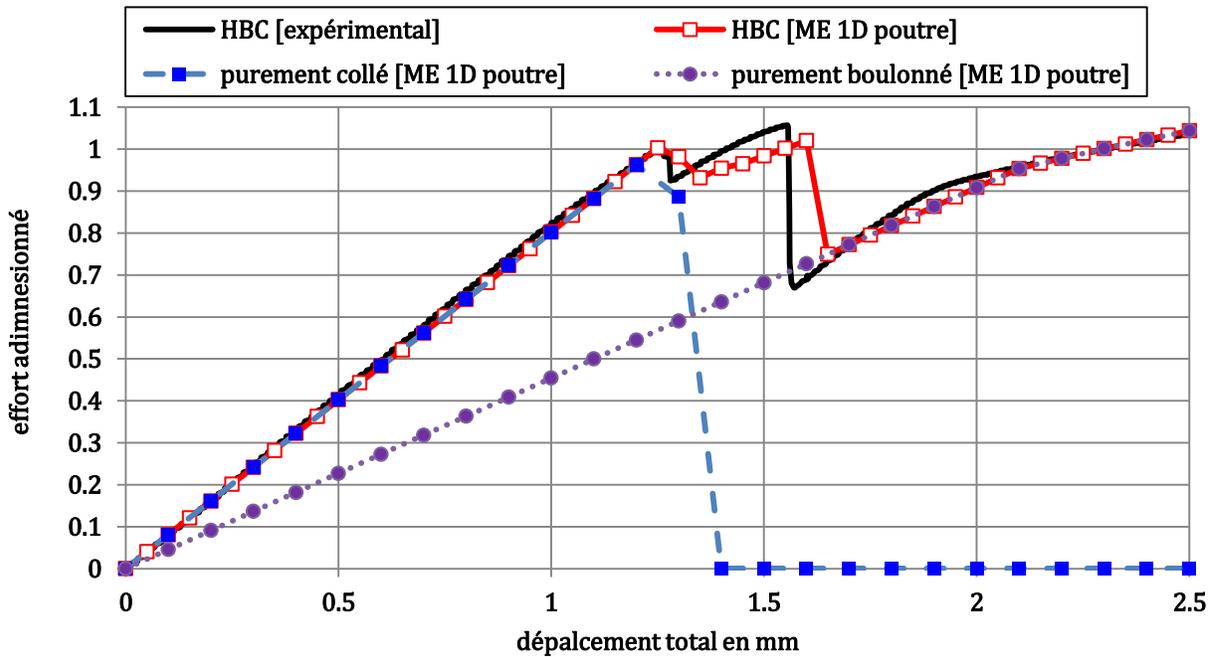


Figure 34 Courbes effort déplacement simulées par ME 1D poutre pour les configurations HBC, purement collées et purement boulonnées

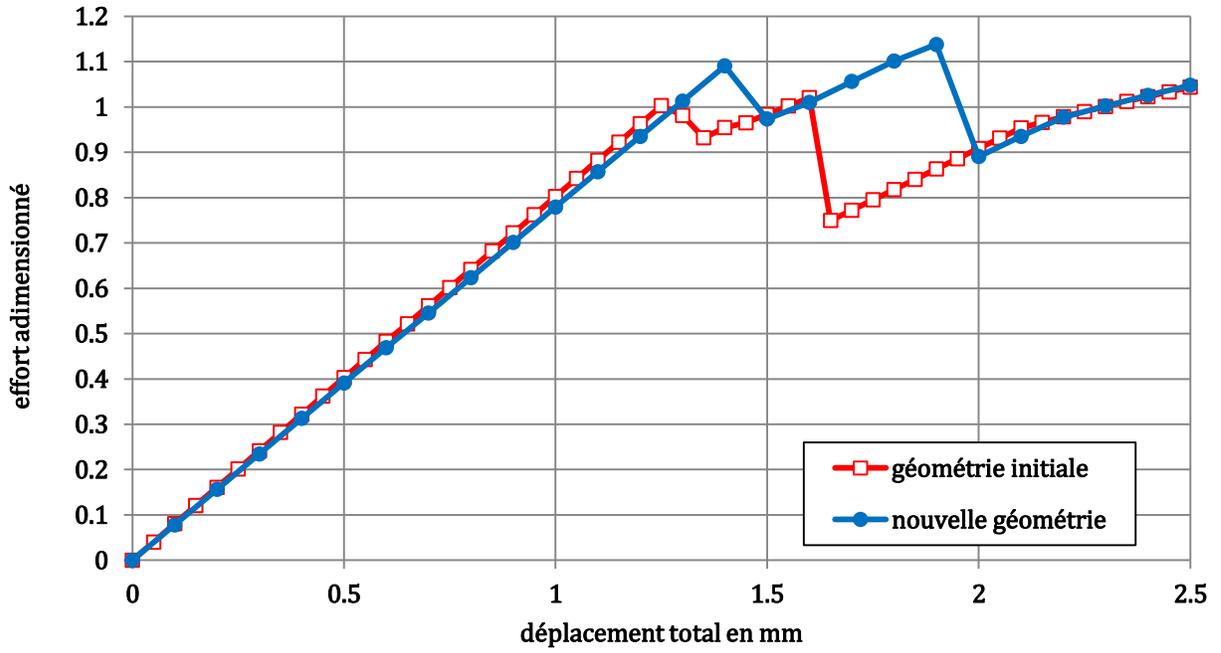


Figure 35 Courbes effort déplacement simulées par ME 1D poutre sur la géométrie initiale et la nouvelle géométrie.

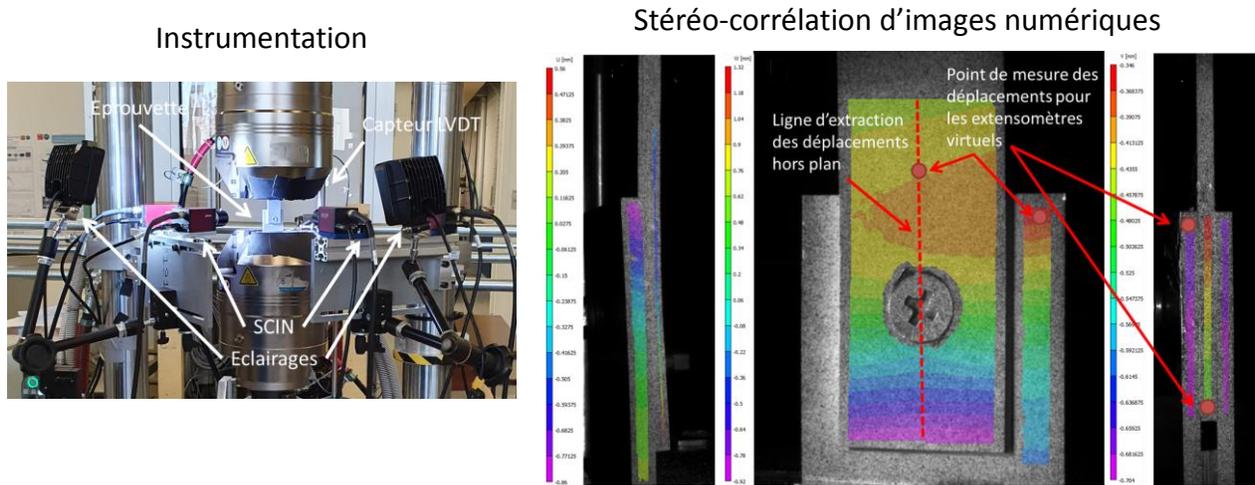
## 2.5 Contribution à la modélisation du comportement mécanique des assemblages

### 2.5.1 Assemblages boulonnés composites

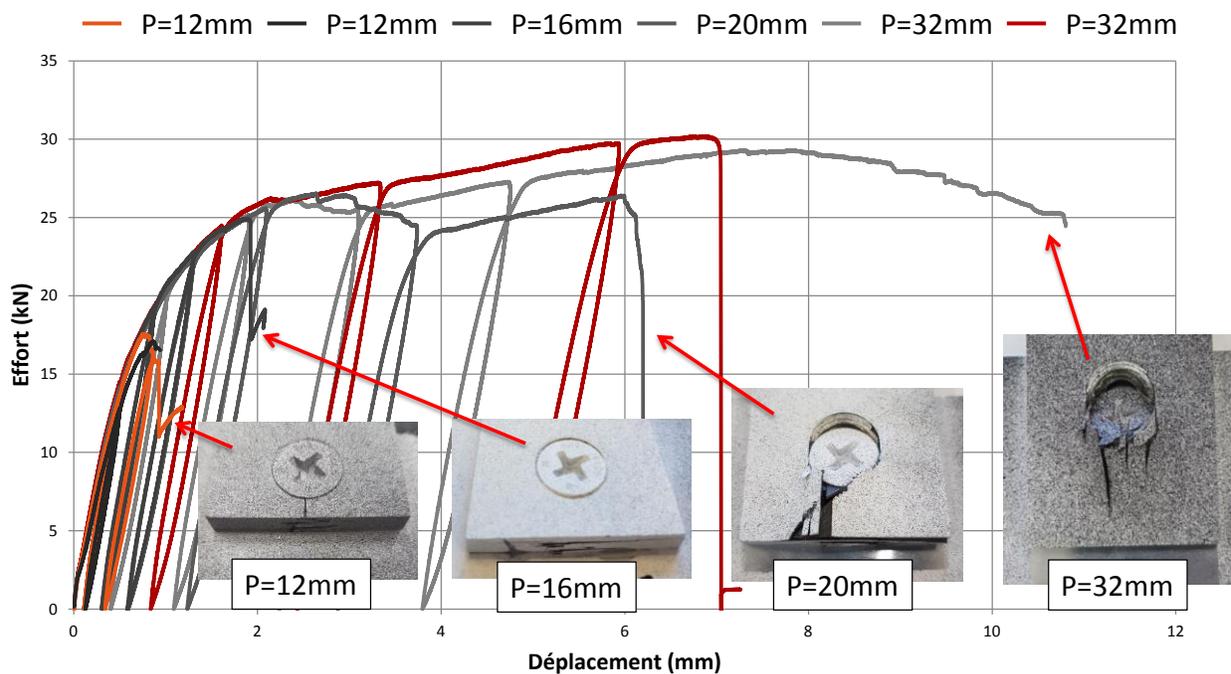
Benoit Montagne a réalisé sa thèse de doctorat en collaboration avec DASSAULT AVIATION, dans le cadre du projet MARCOS financé par la DGAC [Montagne 2020] [Montagne *et al.* 2020]. Cette thèse s'est déroulée entre 2017 et 2020. La problématique de sa thèse est d'identifier la complexité des modélisations nécessaires pour représenter l'influence des paramètres de conception sur les modes de rupture statique dans les substrats des assemblages boulonnés composite. Les différents modes de ruine statiques des substrats composite sont (i) la section nette, (ii) le cisaillement, (iii) le clivage et (iv) le matage [Hart-Smith 1976]. Les paramètres géométriques de conception influençant le mode de ruine sont le diamètre du fût de la fixation, la distance au bord longitudinale ou la pince, la distance au bord transversale et l'épaisseur [Hart-Smith 1976] [Collings 1977] [Hart-Smith 1980]. La stratification des plaques composites ainsi que le système de fixation mécanique et sa mise en oeuvre influencent aussi le mode de ruine statique [Aktas et Dirikolu 2003] [Gohorianu 2008] [Egan *et al.* 2012].

DASSAULT AVIATION a fourni une base de données d'essais, sur des éprouvettes spécialement conçues, sur trois matériaux (T700/M21, T800/M21 et IMS/977-2), pour différentes pinces, distances au bord transversales et stratifications. Une analyse de cette base de données est menée en rationalisant les efforts à rupture en fonction des modes de ruine observés. Il est montré que la pince est le paramètre qui influe le plus le mode de ruine et la tenue associée, en cohérence avec la littérature [Hart-Smith 1976] [Collings 1977]. Pour des pinces faibles, le mode de rupture est le clivage si la stratification est pauvre en plis à 90° par rapport à la direction de chargement et le cisaillement si la stratification est riche en plis à 90°. Pour des pinces fortes, le mode de rupture est la section nette si la distance au bord transversale est faible et le matage si la distance au bord transversale est importante. Des essais complémentaires multi-instrumentés sont réalisés pour comprendre l'influence de la pince sur les mécanismes d'endommagement et de fissuration menant à la ruine (Figure 36). Quatre pinces et trois stratifications sont testées sur deux matériaux (T700/M21 et un matériau DASSAULT AVIATION). La distance au bord transversale est grande. Un scénario décrivant les mécanismes d'endommagement et de fissuration menant à la ruine est alors déduit selon que la pince soit faible ou forte à partir des observations expérimentales (comportement globale, stéréo-corrélation, tomographie RX des éprouvettes post-mortem ou prélevées en cours d'essai). Pour des pinces faibles et pour les deux modes de ruine (cisaillement ou clivage), les différentes étapes du scénario sont (i) dégradation en bord de trou, (ii) délaminage et rupture matricielle sur les bords libres puis (iii) convergence de ces dégradations l'une vers l'autre. Au contraire, pour des pinces fortes, la dégradation reste localisée en bord de trou jusqu'à la rupture par matage.

Les scénarios observés sont similaires que l'éprouvette soit montée en simple ou double cisaillement.



(a)



(b)

**Figure 36** Essais expérimentaux sur T700/M21 : (a) instrumentation des éprouvettes et stéréo corrélation et (b) courbes effort déplacement pour différentes pince sur T700/M21. *Les illustrations sont extraites du support de soutenance de thèse de Benoit Montagne qui m'a donné l'autorisation de les utiliser pour ce mémoire.*

Des modélisations par EF embarquant différents niveaux de complexité en termes de variables spatiales dépendantes et de comportement matériau sont considérées : modélisations en contraintes planes dans les cinématiques de membrane et de membrane flexion puis volumiques. Aucune tentative de modélisation monodimensionnelle n'est présentée. Des comportements matériaux linéaire et non linéaire sont utilisés. Dans le cas d'un comportement linéaire du composite stratifié, chaque pli unidirectionnel est modélisé par un milieu homogène isotrope transverse élastique. De plus, des critères en contrainte à l'échelle du pli sont implémentés pour prédire une rupture du premier pli. Le comportement non linéaire du composite est décrit au travers d'une loi d'endommagement développée à l'Institut Clément Ader depuis la fin des années 90 [Lachaud 2011] sur la base des travaux de Matzenmiller *et al.* [Matzenmiller *et al.* 1995] et de Xiao *et al.* [Xiao *et al.* 2007]. Dans le cas des travaux de Benoit Montagne, trois variables d'endommagement sont utilisées pour dégrader le comportement plan de chaque pli. Ces variables d'endommagement sont calculées à partir de combinaisons linéaires de critères de rupture exprimés en contrainte. De plus, la dégradation du comportement interlaminaire n'est pas prise en compte dans cette version de la loi. Il est montré que toutes les modélisations sont capables de prédire la dégradation par matage sans être capables de distinguer la dégradation finale discriminant le mode de ruine (cisaillement ou clivage). Les modélisations en membrane et membrane flexion associées à un comportement linéaire matériau et un critère de ruine au premier pli ne permettent pas de prédire l'effort maximal atteint ni les différentes phases de dégradations progressives dues au matage. Au contraire, l'utilisation du comportement non linéaire endommageable permet de représenter le scénario de dégradation progressive due au matage, tel que déduit des observations expérimentales. La modélisation membrane reproduit fidèlement alors le comportement global des éprouvettes en double cisaillement. La modélisation membrane flexion montre un problème de raideur significatif et ne permet pas de capter l'effort maximal des essais sur éprouvette en simple cisaillement, certainement du fait de la modélisation utilisée pour la fixation. La modélisation 3D est capable de reproduire fidèlement le comportement des éprouvettes en simple cisaillement et la dégradation due au matage. Comme la modélisation ne permet pas de représenter le délaminage, la dégradation menant à la ruine finale n'est pas captée. L'introduction d'éléments d'interfaces alimentés par des lois de TS en mode mixte I/II/III est réalisée. Des difficultés de convergence apparaissent suffisamment tôt pour empêcher de savoir si la prise en compte du délaminage suffit à discriminer les différents modes de ruine.

Ces travaux illustrent en particulier une démarche progressive de complexification des modélisations visant à représenter les mécanismes physiques du comportement mécanique de l'assemblage jusqu'à l'endommagement pré et post rupture.

## 2.5.2 Assemblages collés

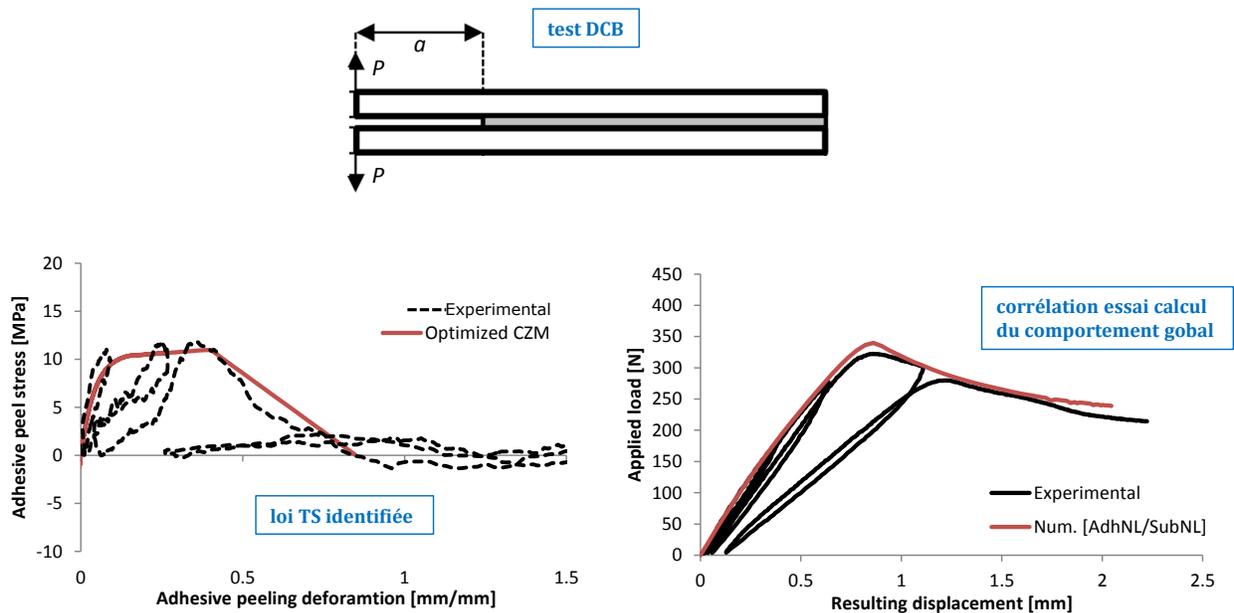
Les modèles de zone cohésive sont largement utilisés afin de représenter le comportement mécanique jusque la ruine des assemblages collés en statique et en fatigue [Li *et al.* 2006] [de Moura *et al.* 2009] [Khoramishad *et al.* 2010] [Khoramishad *et al.* 2011] [da Silva et Campilho 2012]. Ces modèles s'appuient sur des lois de TS en modes purs et d'interaction entre modes purs en initiation et propagation (section 2.4.4). Les formes de ces lois et le paramétrage associé doivent être caractérisées expérimentalement. Une méthode consiste à procéder par identification inverse de mesures locales et/ou globales réalisées lors d'essais expérimentaux [Kafkalidis *et al.* 2000] [Liljedahl *et al.* 2007] [Sans *et al.* 2013] [Jumel *et al.* 2015] [Lélias 2016] [Škec 2019]. A partir de l'hypothèse d'une forme des lois de TS et/ou d'interaction, les paramètres associés sont identifiés pour que les résultats simulés à partir d'une modélisation numérique soient les plus proches des mesures expérimentales. Une autre méthode consiste à utiliser l'intégrale J [Rice 1968] sur des contours spécifiques d'éprouvettes particulières pour solliciter l'éprouvette en mode I, II ou mixte I/II [Sørensen et Jacobsen 2003] [Alfredsson 2003] [Alfredsson 2004] [Andersson *et al.* 2004] [Andersson et Biel 2006] [Leffer *et al.* 2006]. La forme des lois de TS en mode purs et les paramètres associés sont directement obtenus par dérivation de l'intégrale J par rapport aux sauts de déplacement en pointe de fissure. Högberg *et al.* proposent une éprouvette pour identifier les lois de TS en mode purs à partir d'une sollicitation en mode mixte [Högberg et Stigh 2006] [Högberg *et al.* 2007].

Dans sa thèse de doctorat, Guillaume Lélias caractérise le comportement de la colle méthacrylate SAF-30MIB fabriquée par BOSTIK /AEC Polymers (groupe ARKEMA) [Lélias 2016] [Lélias *et al.* 2019]. Guillaume Lélias propose une méthode d'identification utilisant un modèle simplifié pour évaluer les lois de TS (Figure 37). Sur la base de la modélisation d'un recouvrement collé en cinématique de poutre d'Euler-Bernoulli présentée en section 2.3.2, les contraintes de cisaillement et de pelage dans la colle s'expriment à partir des équations d'équilibre local des substrats (Eq. 88 à Eq. 90) et constitutives des substrats et de la colle (Eq. 91 à Eq. 95) selon :

$$\text{Eq. 246} \quad \begin{cases} T = (-1)^i \left[ \frac{A_i}{w} \frac{d^2 u_i}{dx^2} - \frac{B_i}{w} \frac{d^3 v_i}{dx^3} \right] \\ S = \left[ (-1)^i \frac{D_i}{w} - h_i \frac{B_i}{w} \right] \frac{d^4 v_i}{dx^4} + \left[ h_i \frac{A_i}{w} - (-1)^i \frac{B_i}{w} \right] \frac{d^3 u_i}{dx^3} \end{cases}$$

Les contraintes de cisaillement et de pelage peuvent être évaluées à partir des dérivées secondes et troisièmes du déplacement longitudinal et des dérivées troisièmes et quatrièmes de la flèche sur un des deux substrats. Les lois de TS peuvent donc théoriquement être établies si la mesure des sauts de déplacement en pointe de fissures est réalisée. Guillaume Lélias utilise la stéréo-corrélation pour mesurer les champs de déplacement dans les substrats et déduire les lois de TS en mode pur I et mode pur II à partir d'essais sur éprouvettes DCB et ENF respectivement. De plus, un plan d'expériences

sur la base de mesures expérimentales simulées est réalisé afin d'évaluer les paramètres affectant la détermination des lois de TS. Il est mis en avant que la réduction des bruits des mesures expérimentales et leurs résolutions spatiales sont les principaux facteurs qui influent sur l'évaluation des dérivées successives des champs de déplacement sur les substrats [Lélias 2016] [Lélias *et al.* 2019]. Cette méthode d'identification est testée sur des éprouvettes MMB (pour *mixed mode bending*) pour le mode mixte I/II. Néanmoins, la différence entre les déplacements longitudinaux et les flèches n'a pas permis d'évaluer les dérivées successives. Une méthode d'identification inverse est alors utilisée en supposant des lois d'interaction puissance en initiation et en propagation avec les mêmes exposants ( $p=q$  dans les équations Eq. 242 et Eq. 244). Sur ces hypothèses, les essais MMB sont simulés à l'aide de la modélisation par ME sous les hypothèses de modélisation retenues pour la méthode d'identification des lois de TS en mode pur. Le calcul en mode mixte est mené tel que présenté en section 2.4.4 pour différents exposants  $p=q$ . La solution  $p=q=1$  est alors choisie. Enfin, une confrontation calcul essai sur une éprouvette en simple recouvrement encastree est réalisée. La simulation par ME fournit un comportement global et un effort maximal atteint très proches de la mesure expérimentale (Figure 37).



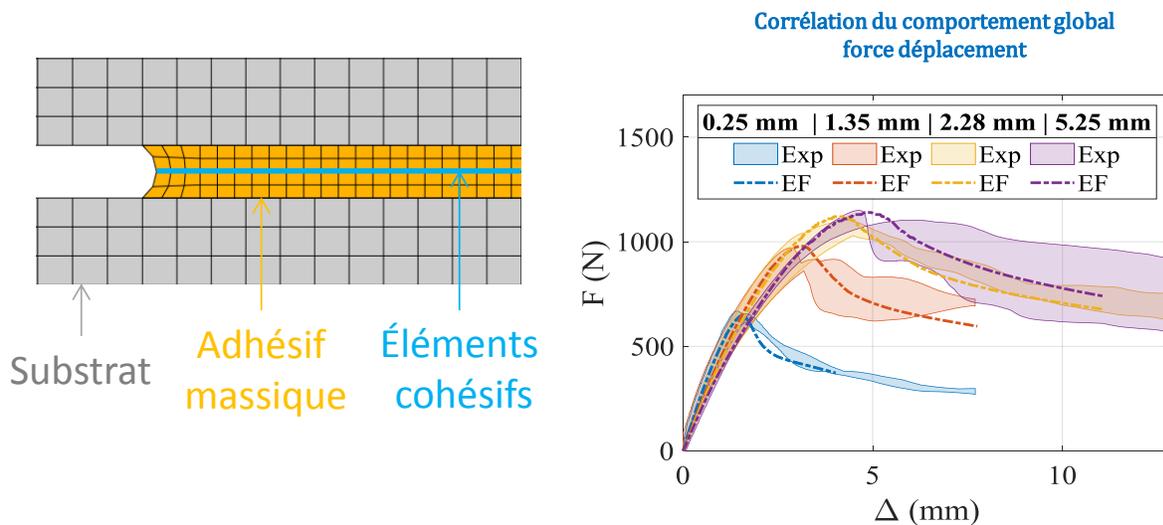
**Figure 37** Essais DCB avec la SAF30-MIB : loi TS identifiée et comportement global simulé par ME confronté à celui mesuré. *Les illustrations sont extraites du support de soutenance de thèse de Guillaume Lélias qui m'a donné l'autorisation de les utiliser pour ce mémoire après adaptation.*

Agathe Jaillon a réalisé sa thèse de doctorat dans le cadre du projet collaboratif S3PAC pour *Système de Supervision et de Simulation de la Production d'Assemblage par Collage* financé au titre du FUI 21 sur la période 2017 à 2020 [Jaillon 2020]. Agathe Jaillon a

utilisé la même colle que celle de Guillaume Lélías. Une analyse de robustesse des méthodes d'identification utilisant différents jeux de mesures expérimentales est alors réalisée sur la base de l'essai DCB. En effet, une première question que posent les méthodes d'identification inverse est l'influence des choix initiaux de forme des lois de TS (et d'interaction). Pour une identification à partir de l'intégrale J, la question concerne l'influence du choix de la représentation simplifiée de la loi de TS après traitement des données. Un essai DCB ne permet pas de discriminer la forme de la loi de TS en mode I et l'influence de la forme de la loi de TS est visible autour de pic d'effort de la courbe effort déplacement [Alfano 2006] [Gustafsson et Wass 2009b]. Agathe Jaillon retrouve la même conclusion sur cette insensibilité [Jaillon *et al.* 2020a] [Jaillon 2020]. En effet, sur la base d'une loi de TS trapézoïdale, les différents jeux de données expérimentales, bruitées synthétiquement, nécessaires aux différentes approches d'identification inverse sélectionnées sont générées : (i) intégrale J avec les mesures de la rotation au point de chargement et de l'ouverture ( $2d$ ) [Sørensen et Jacobsen 2003], (ii) courbe effort-ouverture ( $2d$ ), (iii) *backface strain technique* [Jumel *et al.* 2013] et (iv) flèches et rotations des substrats le long recouvrement par stéréo-corrélation [Alfano *et al.* 2015] [Blaysat *et al.* 2015]. En supposant la recherche d'une loi de TS triangulaire, l'application de ces méthodes d'identification inverse conduit à des triplets de paramètres, parmi lesquels seule l'évaluation du taux de restitution d'énergie critique est correcte. Par ailleurs, les intervalles de confiance associés à chacune des quatre méthodes d'identification sont estimés [Jaillon *et al.* 2020b] [Jaillon 2020]. Cette estimation est réalisée de la même manière en générant des jeux de données expérimentales simulées et bruitées synthétiquement à partir d'une loi de TS triangulaire. Il ressort que les méthodes d'identification utilisant la stéréo-corrélation sur le suivi des rotations des substrats ou l'intégrale J avec les mesures de la rotation au point de chargement et de l'ouverture ( $2d$ ) sont les méthodes d'identification menant aux intervalles de confiance les plus resserrés. En considérant l'effort d'instrumentation et de post-traitement, la méthode par intégrale J paraît donc être la plus attractive. Elle est alors utilisée pour identifier les lois de TS triangulaires en fonction de l'épaisseur de la couche de colle. Une augmentation des efforts maximaux et de la ténacité avec l'augmentation de l'épaisseur sont constatées. De plus, la présence de zones plastiques en pointe de fissure est observée.

Les modèles de zone cohésive utilisés sont par nature incapables de décrire ni la présence de gradients de contrainte et de déformation dans l'épaisseur de la colle ni la présence de zones plastiques en pointe de fissure. De plus, le comportement de la colle étudiée dépend du temps et entre dans sa transition vitreuse vers 40°C. L'application d'une méthode d'identification utilisant l'intégrale J est donc discutable. La signification des paramètres identifiés, et en particulier celle de l'aire sous la courbe de TS, pose question. Dans sa thèse de doctorat, Agathe Jaillon propose une modélisation par EF des éprouvettes DCB pour laquelle les substrats et la colle sont représentés par des éléments quadrangles ou volumiques selon le cadre de modélisation (Figure 38). La colle a un comportement

élasto-plastique calibré par des essais expérimentaux sur éprouvette haltère, représenté par une loi de Johnson-Cook. Le seuil d'écoulement est supposé être piloté par la contrainte de von Misès. Des éléments d'interface sont ajoutés le long du plan moyen de la couche de colle pour modéliser la fissuration, pour laquelle une loi de TS doit être identifiée. La raideur de la loi de TS est choisie telle que les champs de contrainte local n'est pas modifié en présence des éléments d'interface. Le choix du couple contrainte maximale et taux de restitution d'énergie critique est choisi de sorte à permettre la propagation de la fissure avec un ratio taux de restitution d'énergie critique sur énergie de fissuration minimale. L'énergie de fissuration correspond ici à l'aire sous la courbe de la loi TS identifiée macrosocopiquement. En termes de réponse macroscopique, la simulation par EF 2D contraintes planes embarquant ce modèle plus complexe de colle montre une très bonne corrélation avec les mesures expérimentales. Cependant, l'énergie dissipée plastiquement paraît trop faible comparée à l'énergie de propagation. La simulation du comportement par EF 3D montre que la colle ne plastifie que sur les bords libres de l'éprouvette. En effet, l'état de déformation dans la couche de colle confinée loin des bords est proche des déformations planes ne permettant pas un écoulement plastique avec le critère de von Misès. L'aspect des fronts de fissure observés conduit à penser que le modèle élasto-plastique utilisé est trop simpliste pour reproduire le comportement local. Ces travaux montrent en particulier qu'il est possible de représenter fidèlement le comportement macroscopique des assemblages collés et donc le transfert des efforts, avec des modélisations simplifiées alimentées par une caractérisation expérimentale appropriée. Par contre, du fait de la difficulté à reproduire le comportement local, l'application des modélisations plus ou moins simplifiées à d'autres configurations que celles utilisées pour la caractérisation expérimentale est questionnable.



**Figure 38** Essais DCB : comportement global simulé par EF confronté à celui mesuré. *Les illustrations sont extraites du support de soutenance de thèse d'Agathe Jaillon qui m'a donné l'autorisation de les utiliser pour ce mémoire.*

### 2.5.3 Interface substrat / colle dans un cadre pluridisciplinaire (TACCOS)

#### Introduction

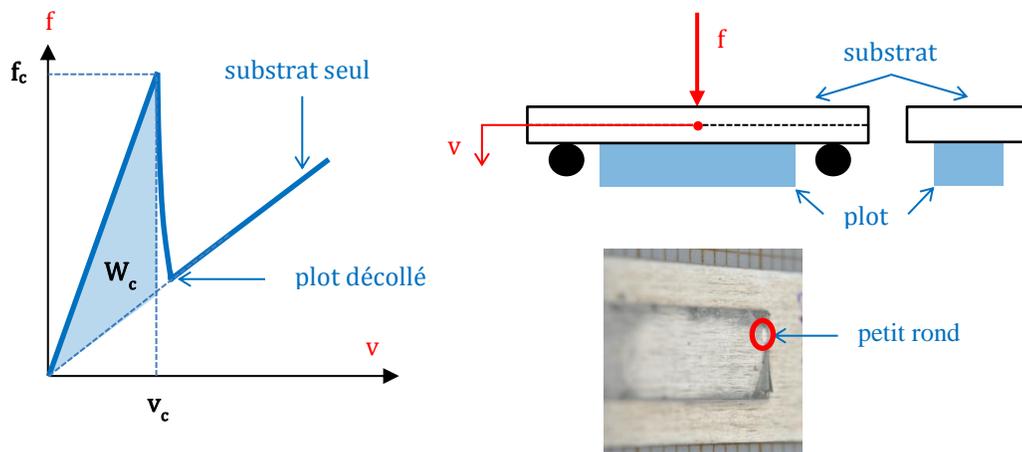
Le collage est une technologie d'assemblage chimique pour remplir une fonction de tenue mécanique. Investiguer le comportement des assemblages collés du point de vue mécanique seulement peut sembler insuffisant. En 2017, avec mes collègues Maëleonn Aufray (Maître de Conférences, ENSIACET) et Frédéric Lachaud, nous avons créé l'initiative TACCOS. TACCOS signifie « Toulouse Adhésion Cohésion Collage Structural. De la chimie à la mécanique ». TACCOS est un groupe informel d'enseignant-chercheurs, qui s'appuie sur les axes transverses « ADHÉRENCE » du CIRIMAT et « ASSEMBLAGES » de l'ICA. Il vise (i) à l'émergence d'un pôle toulousain pour l'enseignement et la recherche pluridisciplinaire physico-chimie des matériaux et interfaces et mécanique des matériaux et des structures et (ii) à la promotion de collaborations académiques et industriels sur le collage. Dans cet esprit, nous avons élaboré une formation intitulée « Technologie d'Assemblage par Collage Structural ». Elle est au catalogue de l'organisme de formation continue EUROSAE et a été délivré pour la première fois en 2019. Julien Jumel (Professeur ENSTA Bretagne) participe à cette formation. Robert Piquet (Professeur des Universités, Université de Toulouse III), qui nous a quittés récemment, a aussi participé à cette formation. Par ailleurs, l'initiative TACCOS a permis à l'élaboration du projet SIMPACOS pour « Modélisation et simulation particulière d'assemblages collés structuraux en fonctionnalisation duale tenue / fragmentation ». Ce projet couvre la thèse de doctorat de Lorraine Aparecida-Silva, dirigée par Christine Espinosa (Professeur ISAE-SUPAERO) et Lucas da Silva (Professeur, Universidade do Porto).

La naissance de TACCOS est soutenue par le gain d'une bourse doctorale sur l'Appel à Projets de Recherches 2017 de l'Université Fédérale de Toulouse Midi-Pyrénées. Le doctorant est Thiago Birro et a commencé fin 2017. Cette thèse se finira fin 2020. Pour tirer le plein avantage du potentiel en termes de ratio tenue sur masse offert par le collage, il est nécessaire d'être en mesure de dimensionner l'assemblage afin qu'il soutienne les efforts appliqués. L'observation d'éprouvettes post-mortem fait apparaître plusieurs types de rupture. Un premier type est dit cohésif quand la rupture se produit au sein de la matière, comme les substrats ou la colle. Un second type est dit adhésif quand la rupture est à l'interface entre les substrats et la colle. Une première difficulté dans cette description est liée à la rugosité des substrats. Comme les substrats ne sont pas infiniment lisses, il est nécessaire de se donner un critère pour distinguer la rupture adhésive de la rupture cohésive. Autrement dit, il pourrait être toléré qu'une rupture adhésive permette que de la colle soit encore présente sur le substrat. Une seconde difficulté est l'éventuelle existence d'une couche d'interphase à l'interface entre le substrat et la colle créé lors de la polymérisation de la colle [Roche *et al.* 1994] [Aufray et Roche 2005]. La nature de cette interphase est différente de celle de la colle pure induisant un gradient de propriétés mécaniques entre le substrat et la colle pure, si l'épaisseur du joint de colle permet la

présence d'une couche de colle pure [Bouchet *et al.* 2001] [Roche *et al.* 2006]. Une autre conséquence est qu'une rupture cohésive peut se produire au sein de l'interphase. Une troisième difficulté est que l'examen post-mortem du faciès de rupture indique en général comment la rupture s'est propagée. Cette propagation peut par ailleurs combiner rupture adhésive et rupture cohésive. Or, le dimensionnement d'un assemblage collé peut se baser sur un critère d'initiation [Weißgraeber et Becker 2013] ce qui est d'autant plus pertinent si le champ de contrainte présente de forts gradients et si la rupture a un caractère fragile. Une initiation de la rupture peut alors être de type cohésif ou adhésif. L'essai de flexion trois points présente la particularité de localiser la zone d'initiation de la rupture adhésive [Roche *et al.* 1994] [Sauvage *et al.* 2017]. La thèse de doctorat de Thiago Birro prend la suite de celle de Jean-Baptiste Sauvage [Sauvage 2016] et vise à développer une méthodologie de prédiction de l'initiation la rupture adhésive à l'aide de cet essai de flexion trois points.

### Prédiction de l'initiation de la rupture adhésive

L'essai de flexion trois points est développé par Roche *et al.* [Roche *et al.* 1982]. L'éprouvette est constituée d'un substrat sur lequel est collé un plot de colle. Cette éprouvette est simplement appuyée sur ses deux extrémités (Figure 39). Le substrat est soumis à un effort vertical appliqué à équidistance des substrats jusqu'à ce que le plot de colle se décolle. L'effort maximal atteint  $f_c$ , le déplacement à l'effort maximal et l'énergie  $W_c$  contenue à  $f_c$  entre la réponse de l'éprouvette et celle du substrat seul sont utilisés pour évaluer l'adhérence de systèmes colle substrat [Roche *et al.* 1994]. De plus, l'examen post-mortem révèle l'existence d'une surface  $A_c$  ayant la forme d'un petit rond et associée à l'initiation de la rupture à l'interface avec le substrat (Figure 39).



**Figure 39** Éprouvette et réponse de flexion trois points. Localisation du petit rond. *Thiago Birro est l'auteur de la photo et m'a donné l'autorisation de l'utiliser pour ce mémoire.*

Dans [Birro *et al.* 2020], une méthodologie d'exploitation de ces essais utilisant la surface mesurée du petit rond est présentée afin d'identifier les propriétés de l'interface. La méthodologie utilise le critère couplé contrainte énergie [Leguillon 2002] [Martin *et al.* 2012] [Weißgraeber et Becker 2013] [Carrère *et al.* 2015] [Martin *et al.* 2016]. Ce critère vise à déterminer l'effort et la longueur de fissure à l'initiation, grâce à l'application combinée d'un critère énergétique et d'un critère en contrainte. Le bilan énergétique entre avant et après l'apparition d'une fissure de surface finie est écrit. Le critère énergétique est alors déduit : le taux incrémental de restitution d'énergie est supérieur ou égal au taux de restitution d'énergie critique. Un critère en contrainte est alors ajouté stipulant qu'une contrainte équivalente atteint une valeur critique  $\sigma_c$  sur la longueur de fissure anticipée. Le critère en contrainte assure que les microfissures s'initient tandis que le critère en énergie implique la propagation de ces microfissures en l'initiation d'une fissure de surface finie [Carrère *et al.* 2015].

Dans le cas de l'essai de flexion trois points, il est alors supposé que l'effort maximal atteint  $f_c$  est l'effort critique d'initiation auquel une fissure de surface  $S_c$  apparaît. L'essai de flexion trois points est alors modélisé par ME. L'interface est représentée par deux raideurs d'interfaces deux raideurs de l'interface  $k_I$  et  $k_{II}$  [Cornetti *et al.* 2012], à l'image du délaminage de composite stratifié présenté en section 2.4.4. Dans [Birro *et al.* 2012], la méthodologie s'affranchit de la mixité locale de la sollicitation de sorte qu'il est supposé que  $k_I=k_{II}$ . La contrainte équivalente choisie est celle utilisée pour la loi d'interaction à l'initiation en contrainte quadratique sans couplage (section 2.4.4, Eq. 240) ; les contraintes critiques associées en mode I et mode II sont les mêmes. Le taux de restitution d'énergie incrémental est évalué à partir de la valeur de l'intégrale J selon [Fraisse et Schmit, 1993]. Les valeurs de  $k_I=k_{II}$  ainsi que les longueurs hors recouvrement sont ajustées de manière à caler les raideurs globales, avant et après le décollement du plot, la réponse simulée à la mesure expérimentale. Connaissant  $f_c$  et  $A_c$  et en supposant  $k_I=k_{II}$ , le taux de restitution d'énergie critique  $G_c$  et la contrainte critique  $\sigma_c$  sont directement obtenues. Il est remarqué que si  $k_I$  est différent de  $k_{II}$  alors il existe une infinité de couple  $k_I$  et  $k_{II}$  permettant de recaler la réponse expérimentale. Une conséquence est qu'il existe une infinité de couple  $G_c$  et  $\sigma_c$  solution. Enfin, une simulation par ME est réalisée en représentant l'interface par un modèle de zones cohésives pour lequel les lois de TS des deux modes purs sont les mêmes et triangulaires. Les paramètres sont directement ceux identifiés à l'aide du critère couplé :  $G_{Ic}=G_{IIc}$ ,  $\sigma_{Ie}=\sigma_{IIe}=\sigma_c$  et  $k_I=k_{II}$ . La réponse de la simulation montre que les raideurs globales de l'essai et la force maximale sont bien restituées. Néanmoins, la phase de propagation instable ne l'est pas.

## 3 Perspectives de recherche

### 3.1 Dimensionnement des assemblages

#### 3.1.1 Assemblages par boulonnage

##### Contexte

La réduction du temps d'assemblage est synonyme d'augmentation du nombre d'avions livrés. Les fabricants d'avions travaillent donc à l'amélioration des procédés d'assemblage en termes de réduction des temps de cycle tout en conservant le niveau de qualité requis. Les opérations de perçage sont critiques. En effet, de fortes contraintes en production existent afin de garantir la tenue finale des assemblages, fondamentale pour l'intégrité de l'avion. Une piste envisagée est le montage dit MECCANO ou *hole-to-hole*. L'idée est de réaliser les trous définitifs sur les pièces élémentaires afin qu'en phase d'assemblage final seuls le positionnement et la pose des fixations soient à réaliser. Au-delà de la modularité et de l'interchangeabilité induites par cette approche, le temps nécessaire à l'assemblage final est significativement réduit, puisque la phase d'épinglage disparaît. De plus, les substrats à assembler sont libres de toute pollution et le hall d'assemblage est propre car sans copeau. La faisabilité technique de l'assemblage MECCANO nécessite que la fixation puisse s'insérer dans les trous pré-perçés. Bloem montre que la tolérance de positionnement doit être supérieure à la différence entre le diamètre du trou et le diamètre de la fixation. Ainsi, le montage MECCANO nécessite par nature des diamètres de trous plus grands que ceux des fixations et induit potentiellement un désalignement des axes des trous des plaques à assembler [Bloem 2007]. Or, le jeu et le désalignement peuvent avoir un impact sur la tenue en statique et en fatigue de l'assemblage boulonné [Benhaddou 2015]. La thèse de doctorat de Guillaume Pichon vise à trouver des solutions technologiques industrialisables afin de garantir un niveau de performance mécanique en statique et en fatigue au moins identique à celui de l'assemblage apparié ajusté d'aujourd'hui ; cette thèse est sous financement CIFRE avec AIRBUS sur la période 2019-2022. Ces solutions devront donc pouvoir compenser les pertes de tenue mécanique liée au possible désalignement pour les assemblages à substrats métalliques, composite ou métallique et composite. Les travaux de thèse de Guillaume Pichon passent donc par une première étape de compréhension du comportement mécanique d'assemblages boulonnés embarquant différents scénarios de jeux et désalignement associés. Afin de déterminer l'influence des différents paramètres des procédés d'assemblages MECCANO – le désalignement, le jeu (positif et négatif) – sur les performances mécaniques en statique et en fatigue – incluant comportement global, tenue et mécanisme de ruine – une campagne d'essais expérimentaux pourrait être envisagée. Néanmoins, le nombre de configurations à tester – en termes de matériaux, fixations, paramètre d'assemblage – rend cette solution purement expérimentale économiquement prohibitive. Le recours à des essais numériques en plus

d'essais expérimentaux est une solution envisageable. Les essais numériques permettent de réduire le coût des essais et de mieux comprendre le comportement mécanique. Cependant, pour être utiles, les essais numériques doivent reposer sur des principes de modélisation adaptés aux comportements mécaniques observés tout en cherchant à réduire les temps de calcul. En effet, le recours systématique à des essais numériques basés sur des modélisations par EF volumiques peut s'avérer prohibitif en temps de calcul. Ainsi, il découle les deux enjeux scientifiques majeurs de cette thèse : (i) comprendre l'influence des différents paramètres des procédés d'assemblages sur les performances mécaniques en statique et fatigue (réponse globale, tenue et mécanisme de ruine), (ii) déterminer le niveau de complexité de modélisation et de technique de résolution associée en fonction du comportement mécanique à simuler. Bien que les capacités de calcul soient de plus en plus importantes, chercher à réduire les temps de calcul reste toujours un enjeu dans un contexte de prédimensionnement rapide, optimal et fiable [Askri *et al.* 2016] [Liu *et al.* 2018]. En particulier, dans le cadre de la thèse de Guillaume Pichon, il s'agit d'évaluer la sensibilité du jeu, du désalignement et du serrage sur les performances mécaniques en statique et fatigue.

Des travaux de thèse de doctorat de Benoit Montagne (section 2.5.1), il ressort qu'un premier axe d'amélioration est la modélisation simplifiée de la fixation dans son trou dans le cadre d'une modélisation simplifiée membrane flexion. Dans la modélisation membrane flexion, une raideur est ajoutée liant chaque surface rigide de chacun des deux trous. Pourtant, la réponse globale du modèle membrane flexion est significativement plus raide que celle mesurée expérimentalement. Le fait de considérer des surfaces rigides supprime le gradient de contrainte dans l'épaisseur. De plus, cela ne permet pas de représenter l'inhomogénéité des transferts d'effort par les fixations et limite donc l'utilisation de ce type d'approche aux assemblages à une seule fixation. Par ailleurs, les fixations utilisées dans les essais expérimentaux ont des têtes fraisées. Cependant, la fraisure n'est pas représentée dans les modélisations, alors que le trou est le lieu d'amorçage privilégié des dégradations dans le stratifié composite. Mario Planas montre que la représentation de la fraisure avec une modélisation des substrats en membrane flexion permet de corriger les écarts de raideur sur le comportement global [Planas 2019].

## Éléments bibliographiques

Dans la littérature, il existe différentes solutions pour la modélisation d'une fixation et de son trou : (i) utilisation d'un connecteur ou (ii) représentation surfacique ou volumique avec ou sans connecteur. Un connecteur peut être un simple ressort de cisaillement, tels qu'utilisé dans les développements de la NACA (section 1.1) dans le cas d'une cinématique de barre ou un ensemble de ressorts associées à un élément rigide dans une cinématique de poutre (section 2.3.3). Dans ces approches, le jeu, les frottements à l'interface des substrats ou les erreurs de positionnement peuvent être pris en compte [McCarthy *et al.* 2006] [McCarthy et Gray 2011] [Andriamampianina *et al.* 2012] [Lecomte

*et al.* 2014] [Liu *et al.* 2015]. Ces modélisations font appel à des paramètres à calibrer et à identifier [Alkatan 2007] [Bérot 2009] et peuvent aussi être appliquées avec des substrats en membrane et membrane flexion en reliant les plans neutres [Foster 2014]. Les connecteurs peuvent aussi remplacer la fixation dans son trou dans le cadre d'une modélisation 3D volumique [Soulé de Laffont 2017] [Verwaerde *et al.* 2020]. Ils peuvent aussi être associés à une représentation simplifiée surfacique ou volumique de la fixation dans son trou et en contact avec les substrats [Kim *et al.* 2007] [Askri *et al.* 2018] [Planas 2019] [Montagne 2020]. Les travaux dans [Oterkus *et al.* 2007] [Barut et Madenci 2009] présentent une solution semi-analytique indépendante d'un code de calcul EF. En effet, une résolution simplifiée de type membrane-flexion est proposée permettant de prendre en compte le serrage de la fixation, les contacts fixation substrat ainsi que la présence de jeu. Cette très brève revue bibliographique est incomplète mais montre l'intérêt des communautés académiques et industrielles pour la modélisation simplifiée des assemblages boulonnés.

### Démarche envisagée

Dans le but de réduire les temps de calcul, les capacités d'un cadre de modélisation 1D pourraient être évaluées. La modélisation par ME peut être envisagée, à la fois pour les comportements matériaux linéaires et non linéaires. Les perspectives de recherche concernent (i) la modélisation par ME de la fixation et (ii) la modélisation par ME de substrats composites stratifiés. Au-delà d'une utilisation directe en prédimensionnement, l'association d'une bonne représentation du comportement mécanique avec un faible temps de calcul permettrait aussi de réaliser rapidement des études statistiques sur l'impact des variabilités des paramètres de conception sur la tenue. Ces études de sensibilité permettraient de définir les paramètres sur lesquels les contraintes en production seront plus ou moins sévères. De plus, ces modélisations précises et rapides pourraient être utilisées pour la recherche de solution de conception optimale.

La démarche de dégradation des modélisations passe par leur validation en référence à des modélisations plus raffinées. En particulier, le développement de modélisations à graduation de typologie de modélisation en fonction de la zone de l'assemblage et de la phase de comportement considérées pourrait représenter une solution intermédiaire. Il s'agirait d'associer dans une même modélisation différentes typologies de modélisation. Par exemple, si la dégradation par matage en forte pince est cherchée à reproduire, le trou et la fixation pourraient être modélisés en 3D avec une loi non linéaire matériau, tandis qu'une modélisation membrane flexion linéaire élastique serait utilisée ailleurs. Dans les zones sensibles au délaminage, l'utilisation de ME ou de modélisations 3D avec des éléments d'interfaces pourraient être choisies. La complexité de la modélisation est alors reportée sur la connexion des différentes typologies et le choix pertinent des différentes typologies. Dans le même ordre d'idée, le recours à des approches

global local pourraient se traduire en des réductions de temps de calcul tout en conservant une bonne représentation du comportement mécanique.

### *Modélisation par ME de la fixation*

Dans un premier temps, [une revue bibliographique détaillée](#) pourrait être réalisée afin d'établir la compatibilité existante ou potentielle des connecteurs déjà disponibles.

Une seconde étape serait de formuler une matrice de raideur du ME de fixation avec [deux triplets de raideurs de ressorts différents](#) prenant en compte la dissymétrie tête écrou ainsi que les jeux et désalignements.

Une troisième étape consisterait à [modéliser la fraisure](#) dans une approche de type 1D à l'image de ce qui a été réalisé par Mario Planas pour l'approche membrane flexion [Planas 2019]. En effet, la fraisure implique une variation locale de la stratification des substrats. Leurs propriétés homogénéisées varient donc graduellement et la ligne neutre se déplace. La représentation de la fraisure implique donc aussi de travailler sur la modélisation des substrats.

Une quatrième étape serait de travailler à la représentation [du gradient de pression](#) dans l'épaisseur du trou lié à la déformabilité de la fixation. Une idée pourrait être de formuler les ressorts du ME de telle sorte qu'ils incluent un gradient de raideurs dans l'épaisseur du trou. L'identification des paramètres pourraient être réalisées à partir de modélisations EF 3D raffinées avec une représentation volumique (section 2.2.2) et simplifiée des fixations. Pour la représentation simplifiée, l'adaptation de la modélisation de la fixation développée par Askri *et al.* [Askri *et al.* 2018] pourrait être envisagée. Cette modélisation a l'avantage de pouvoir être intégrée dans un code de calcul EF. Il s'agirait alors ici de représenter une fixation à tête fraisée à la place de tête protubérante.

Par ailleurs, plusieurs ouvertures, qui s'imbriquent les unes avec les autres sur ce sujet, peuvent être envisagées, toujours dans cette optique d'intégrer la physique à l'échelle macroscopique.

Une première ouverture concerne [l'intégration de la représentation des défauts ou des endommagements liés au perçage dans ME de fixation](#).

Une seconde ouverture est la [prise en compte de l'ajout d'une bague dans le trou consécutif à une réparation](#). L'idée est ici de d'adapter les raideurs du ME de fixation permettant de représenter la présence d'une interface nouvelle représentant la bague.

Une troisième ouverture concerne la prise en compte dans le ME de fixation [des effets de la prétension des fixations](#). En effet, dans une cinématique 1D membrane-flexion, le gradient des contraintes et des déformations dans l'épaisseur est inexistant. Or, il joue un rôle prépondérant dans le confinement du développement de l'endommagement du trou par matage par exemple. Peut-être qu'une piste consisterait à modifier localement les propriétés des substrats autour du trou.

Une quatrième ouverture est la [simulation d'éclissage à rangées et lignes de fixations multiples](#) – bénéficiant éventuellement des enrichissements des différentes ouvertures précédentes – ce qui implique une cinématique de plaque.

Enfin, la dernière ouverture concerne la modélisation [de ME de fixation sous chargement dynamique](#) pour représenter des sollicitations de type impact ou crash.

### *Modélisation par ME de substrats composites stratifiés*

Pour la modélisation d'un recouvrement à base de substrats composite stratifiés le long des recouvrements, [le ME poutres-collées](#) (section [2.3.2](#)) peut être utilisé directement. Il suffit de choisir des valeurs très faibles pour les raideurs de la couche de colle. Par ailleurs, l'utilisation de la représentation de fondation élastique pourrait être adaptée pour introduire un contact avec frottement entre les deux substrats, en lien en particulier avec la représentation de la prétension des fixations évoquées précédemment. Dans ce cas du ME poutres-collées, les propriétés homogénéisées du stratifié composite sont utilisées. Le recours à la théorie classique des stratifiés permettrait de déterminer l'état des contraintes et des déformations dans chaque pli à chaque instant du calcul et donc l'application de critère de tenue en contraintes ou déformation. Elle permettrait de plus de pouvoir implémenter le comportement élasto-plastique endommageable à l'échelle du pli utilisé dans les travaux de thèse de Benoit Montagne. Afin de représenter le délaminage, la loi pourrait être complétée avec un comportement hors plan endommageable.

Une autre piste est l'utilisation du [ME multicouche](#) (section [2.4.1](#)). Chaque couche de substrat représenterait un pli du stratifié tandis que les couches de colles auraient un comportement défini par des lois de TS en mode mixte. Il serait avantageux de formuler la matrice de raideur du ME par séries entières (section [2.4.3](#)), afin d'éviter le problème de légère dépendance au maillage [[Sekmen et al. 2020](#)]. Dans cette approche, une première étape serait de valider le ME multicouches avec des couches d'interfaces endommageables sur des essais de délaminage comme ceux présentés dans la section [2.4.4](#), sans puis avec comportement du pli élasto-plastique endommageable. Par ailleurs, un travail pourrait être réalisé sur le calcul non linéaire à l'aide du ME à gradient de propriétés formulé en séries entières (section [2.4.2](#)). Une solution sans maillage pourrait être proposée en mettant à jour les propriétés matériaux nécessaire au calcul de la matrice de raideur sécante (section [2.4.4](#)) sur un nombre discret d'abscisse. Ainsi, la mise-à-jour des raideurs des interfaces et des substrats concernerait les termes des séries définissant ces raideurs par minimisation des moindres carrées. Des évaluations par rapport à des essais élémentaires de fissuration sont citées. D'autres configurations d'évaluation comme les zones de reprise de plis sont aussi d'intérêt.

Dans les travaux de Benoit Montagne [[Montagne 2020](#)], la prédiction de la tenue à partir des modélisations linéaires élastiques des assemblages est évaluée à la ruine du premier pli sur la base des critères de contraintes maximales et de Hashin [[Hashin 1980](#)]. Si ces approches permettent de prédire l'initiation de la dégradation en matage, l'effort

associé n'est obtenu qu'en considérant un comportement non linéaire matériaux. Une approche consisterait à prédire la tenue à la ruine du dernier pli en supprimant dans la modélisation les plis ayant rompu précédemment. Un mécanisme de dégradation et de rupture progressive pourrait alors être représenté grâce à la redistribution progressive des efforts dans le substrat. Enfin, pour une utilisation industrielle des simulations numériques, le couplage des développements sur le ME de fixation avec une représentation simplifiée du comportement et de la tenue en matage en fonction de la pince des assemblages ([Figure 36](#)) pourrait être envisagé.

Enfin, les travaux de doctorat de Benjamin Ordonneau (section [3.1.2](#)) visent à étendre la modélisation par [ME à la cinématique de plaque](#) sous sollicitation statique et dynamique. Cette modélisation par ME pourrait donc être appliquée et évaluée pour représenter le comportement mécanique des matériaux composites stratifiés, qu'ils soient utilisés dans des assemblages boulonnés ou non. De plus, un travail spécifique de formulation d'un [ME de fixation compatible avec la cinématique de plaques](#) pourrait être réalisé.

### 3.1.2 Assemblages par collage

#### Contexte

Le ratio tenue sur masse est le verrou majeur relatif aux structures qu'il a fallu lever pour permettre le vol d'aéronefs. Le ratio tenue sur masse est alors devenu un enjeu majeur pour l'industrie aéronautique mais aussi pour l'industrie des transports plus généralement dans le but accroître la performance et la compétitivité des produits. Le développement et l'application des matériaux composites en est une illustration. En 2015, les accords de Paris engageant juridiquement les États signataires dans la lutte contre le réchauffement climatique de la planète [OJEU L282/4 2016]. Dans ce contexte de transition écologique, le ratio tenue sur masse est un enjeu crucial puisque réduction de la masse est synonyme de réduction de l'impact environnemental.

Les assemblages collés offrent souvent des performances mécaniques plus élevées à moindre masse que des solutions d'assemblage plus conventionnelles et sont particulièrement adaptés pour l'assemblage multimatériaux de structures minces [da Silva *et al.* 2018]. Ainsi, par nature, le collage est une technologie d'assemblage attractive pour la conception de structures légères et résistantes. Néanmoins, pour l'aviation civile, son utilisation comme seule technologie d'assemblage est impossible pour des applications structurales (section 1.4). Un des verrous identifiés est l'absence de méthodologies de dimensionnement assurant l'intégrité de l'assemblage de sa fabrication à son utilisation en service [MACS 2014]. Le verrou du dimensionnement intègre l'action de coopération européenne (COST), baptisée CERTBOND, lancée au printemps 2019 afin de certifier les structures primaires collées [CERTBOND 2019]. Le dimensionnement pose la question (i) des modélisations (et schémas de résolution associés) adaptées pour évaluer les critères de tenue et (ii) de la caractérisation expérimentale du comportement mécanique permettant de définir des critères de tenue et les données d'entrée nécessaires aux modélisations.

#### Éléments bibliographiques

Le paragraphe ci-après fait suite à la synthèse bibliographique proposée en section 2.3.1 sur la première catégorie des modélisations simplifiées des assemblages collés, les modélisations à fondation élastique. La deuxième catégorie des modélisations simplifiées permettant une résolution analytique ou semi-analytique est celle dite à milieu continu plan. Contrairement à la modélisation à fondation élastique, l'équilibre local de la colle est pris en compte.

En 1965, Volkersen considère l'équilibre local de la colle dans le plan  $(x,y)$  afin de prendre en compte la redescende à zéro des contraintes de cisaillement dans la couche de colle en bord de recouvrement [Volkersen 1965]. La variable  $x$  décrit la longueur du recouvrement, tandis que la variable  $y$  décrit les épaisseurs. Une contrainte de pelage en bord de recouvrement apparaît donc même pour la configuration de double recouvrement collé. Néanmoins, d'après Adams et Peppiatt, la solution donnée par Volkersen comporte

des erreurs [Adams et Peppiatt 1974]. Allman ou Chen et Cheng ajoutent à l'équilibre local des substrats l'équilibre de la couche de colle dans le plan  $(x,y)$  [Allman 1976] [Chen et Cheng 1982]. Dans ces modèles, la contrainte de cisaillement de la colle est supposée constante dans l'épaisseur et les contraintes de pelage aux interfaces substrat colle sont supposées distinctes. Les équations d'équilibre local et les conditions aux limites en bord de la couche de colle mènent alors à (i) une variation linéaire de la contrainte de pelage dans la couche de colle et (ii) une contrainte normale dans la couche de colle nulle en tout point. De plus, il est supposé que la contrainte normale dans chacun des deux substrats varie linéairement avec l'épaisseur. La continuité des contraintes est imposée le long des interfaces substrat colle. L'état de contrainte dans le sandwich collé devient alors dépendant de deux fonctions inconnues dépendantes de  $x$  et homogènes à des contraintes. Sous les hypothèses de déformations planes, l'application du théorème de l'énergie complémentaire mène alors à deux équations différentielles couplées d'ordre 4 en les deux fonctions inconnues. Un découplage de ces équations est possible menant à deux équations différentielles bicarrées d'ordre 8. Une solution analytique est fournie pour le cas du simple recouvrement collé dont les deux substrats sont identiques, en appliquant les conditions aux bords du sandwich collé de Goland et Reissner. Une résolution semi-analytique existe pour des configurations géométriques et matérielles quelconques. Elle n'est pas présentée dans [Allman 1976] mais dans un rapport technique de la *Royal Aircraft Establishment* [Allman, D.J., 1976. RAE Tech Report 76024] aujourd'hui *Defence Science and Technology Laboratory*. Adams et Mallick proposent une formulation en contraintes planes ou déformations planes pour laquelle les contraintes normales dans les substrats et la colle sont supposées variées linéairement [Adams et Mallick 1992]. La contrainte de cisaillement de la colle n'est donc plus constante dans l'épaisseur de colle. L'application des équations d'équilibre local et l'hypothèse de contraintes continues aux interfaces substrat colle réduit alors le problème à la recherche de quatre fonctions dépendantes de l'abscisse  $x$ . L'intégration analytique des équations pour déterminer ces fonctions est vue comme trop complexe de sorte qu'elles sont évaluées aux nœuds d'un maillage le long du recouvrement, selon une approche de type EF telle que proposée par Allman. Le théorème de l'énergie complémentaire permet de déterminer les valeurs de ces fonctions et de leurs dérivées premières par inversion d'un système linéaire. Le vecteur des inconnues nodales est alors formé par les valeurs aux nœuds de ces fonctions inconnues et de leurs dérivées premières. Enfin, un schéma de calcul itératif est présenté pour prendre en compte un comportement élasto-plastique de la colle. Nemes et Lachaud utilisent le théorème de l'énergie complémentaire pour l'analyse d'un double recouvrement collé symétrique en contraintes planes dans le plan  $(x,y)$  [Nemes et Lachaud 2010]. La configuration est telle qu'elle restreint l'analyse à un sandwich collé en simple recouvrement dont les deux substrats ont la même épaisseur. La flexion est de plus négligée : les contraintes normales dans les substrats sont supposées ne dépendre que de  $x$ . Les contraintes normales dans la colle sont supposées nulles en tout point. Les contraintes dans les substrats et la colle respectent les

équilibres locaux, les conditions de continuité aux interfaces ainsi que les conditions de bord libre. La résolution conduit à dire que la variation d'énergie complémentaire est nulle si la contrainte normale dans un des deux substrats est la solution d'une équation différentielle bicarrée d'ordre 4. Wu et Jensen considère le cas d'une configuration de couvre joints permettant l'assemblage de deux plaques bout à bout. Dans leur approche, ils prennent comme inconnues les contraintes de cisaillement et de pelage aux interfaces substrat colle [Wu et Jensen 2011]. La contrainte normale des substrats prend l'expression de celle considérée dans une poutre d'Euler-Bernoulli et les équations d'équilibre local permettent d'exprimer les contraintes de cisaillement et de pelage. Chaque substrat est vu comme un milieu continu plan simplifié en contraintes planes ou déformations planes. L'énergie complémentaire est évaluée en négligeant l'énergie dans la couche de colle puis minimisée pour fournir deux équations différentielles couplées. Les conditions aux limites introduites ne prennent pas en compte le décalage de fibre neutre. La résolution mathématique est alors semi-analytique. Wu et Zhao étendent le modèle précédent en supposant que les contraintes interraciales de pelage et de cisaillement sont différentes sur chaque interface [Wu et Zhao 2013]. De plus, l'état de contrainte plane dans la colle suit la même formulation que les substrats et est pris en compte dans l'énergie complémentaire. La résolution suit le même plan et nécessite alors la résolution de quatre équations différentielles couplées. Pour une application de renforcement structural de poutres par un patch en composite stratifié collé, Chen et Qiao considèrent la couche de colle comme un milieu continu 2D simplifié [Chen et Qiao 2012]. Le champ de déplacement longitudinal est supposé être similaire à celui d'une poutre ; il est obtenu à partir du déplacement longitudinal de la colle sur la ligne neutre et de la dérivée par rapport  $x$  du déplacement transverse – ne dépendant que de  $x$ . La contrainte normale dans la couche de colle est obtenue à partir du champ de déplacement longitudinal supposé et en négligeant les effets Poisson. Les expressions des contraintes de cisaillement et de pelage sont alors déduites des équations d'équilibre local. Les substrats sont modélisés par des poutres de Timoshenko. Des conditions de compatibilités en déplacement introduisant une souplesse d'interface sont considérées, comme introduit par Suhir (section 2.3.3). La manipulation de ces équations conduit à une équation différentielle d'ordre 8 bicarrée en l'effort normal d'un des deux substrats, dont la résolution permet de déterminer les formes des efforts internes ainsi que celles des champs de contrainte et de déplacement dans le sandwich collé. La résolution est alors semi-analytique pour la recherche des racines et des huit constantes d'intégration dépendant de huit conditions aux limites. Il est à noter que les contraintes normales et de cisaillement dans la colle ne sont pas uniformément nulles le long de l'épaisseur des bords libres. En 2015, Jiang et Qiao complexifient le modèle précédent en exprimant le champ des déplacements dans la colle à partir de la loi de Hooke [Jiang et Qiao 2015]. L'effet Poisson est alors considéré. La contrainte normale dans la couche de colle est alors supposée varier linéairement avec l'épaisseur. De plus, le déplacement transverse du plan moyen de la colle est supposé égal au déplacement

transverse moyen sur l'épaisseur. Un système de d'équations différentielles couplées en les efforts normaux et les moments de flexion des deux substrats est alors obtenu. Le même modèle est présenté dans [Du *et al.* 2019].

En 2009, toujours sur la configuration de poutre renforcée par un patch collé, Yang *et al.* appliquent un schéma de résolution par séries de Fourier [Yang *et al.* 2009]. Dans ces modèles les substrats sont considérés comme des poutres élastiques homogènes orthotropes d'Euler-Bernoulli. La couche de colle est modélisée par un milieu continu élastique en contraintes planes avec une variation linéaire des contraintes normales avec l'épaisseur. Les contraintes de cisaillement et de pelage à l'interface sont alors supposées prendre la forme de séries de Fourier dépendantes que de  $x$ , dont les termes sont les inconnues du problème. Les contraintes dans les substrats et la colle sont exprimées en fonction des contraintes d'interface. Le théorème de l'énergie complémentaire permet d'écrire un système linéaire en ces coefficients. Sawa *et al.* analysent la répartition des contraintes aux interfaces substrat colle pour un simple recouvrement collé [Sawa *et al.* 2000]. L'analyse est réalisée en élasticité linéaire plane (déformations ou contraintes planes). La résolution proposée passe par des fonctions d'Airy construites à partir de polynômes des variables  $x$  et  $y$  et séries de Fourier. La continuité des contraintes de cisaillement et de pelage et des déformations normales aux interfaces substrat colle est supposée. Il est montré que les singularités de contrainte aux interfaces sont bien approchées au voisinage du bord. Il est remarqué que les modèles, présentés précédemment à partir de celui de Wu et Jensen, s'intéressent principalement aux contraintes d'interface. La corrélation avec les résultats issus de modélisation par EF est limitée par la présence des singularités de contraintes non captées par les approches simplifiées. Pour l'analyse simplifiée du comportement mécanique des assemblages en double recouvrement, Gilibert et Rigolo utilisent une approche basée sur les développements asymptotiques [Gilibert et Rigolot 1979] [Gilibert et Rigolot 1985]. Ils mettent en évidence l'existence d'une couche limite aux deux extrémités du bord du recouvrement. Cette couche limite a une longueur d'environ un sixième de la longueur de recouvrement à chaque extrémité du joint. Le champ de contrainte de couche limite dans la couche de colle se raccorde au champ de contrainte dans la couche colle tel que déterminé par les approches à fondations élastiques d'Arnovljevic ou de Volkersen. Ainsi, hors de la couche limite, une contrainte normale dans les substrats et une contrainte de cisaillement dans la couche de colle indépendantes de la coordonnée d'épaisseur prévalent. La contrainte de cisaillement dans la couche de colle peut être exprimée comme proportionnelle au déplacement relatif des deux interfaces. Dans la zone de couche limite, les contraintes normales dans les substrats prévalent encore mais deviennent dépendantes des coordonnées d'épaisseur. De plus, à une distance du bord égale à environ l'épaisseur du joint de colle, la contrainte de pelage devient prépondérante et est indépendante de la coordonnée d'épaisseur. La contrainte de cisaillement dans la couche de colle ne revient pas exactement à zéro. Les auteurs remarquent que leur modélisation n'est

plus légitime, puisqu'en particulier, elle ne prend pas en compte la présence des singularités aux interfaces. Ces singularités impliquent que la colle ne doit plus être linéaire élastique même pour des chargements très faibles. Adams et Peppiatt notent qu'en réalité il est invraisemblable que les bords de la couche de colle soient parfaitement droits : ils comportent un bourrelet [Adams et Peppiatt 1974]. Par simulation par EF, ils montrent (i) que la présence d'un bourrelet triangulaire réduit les surcontraintes de cisaillement et de pelage et (ii) que la contrainte maximale est une contrainte de traction située dans le bourrelet à proximité du bord droit du substrat. Par conséquent, l'utilisation de modélisations par EF ou simplifiées, ne prenant pas en compte la présence du bourrelet conduira à un prédimensionnement conservatif. Frostig *et al.* proposent même de baser le prédimensionnement sur l'hypothèse d'un bourrelet avec une épaisseur égale à deux fois l'épaisseur du joint de colle [Frostig *et al.* 1999]. Une modélisation simplifiée de type fondation élastique est de plus associée.

Il existe des approches de type EF dites simplifiées dans le but de réduire le nombre de degrés de liberté inhérents aux modélisations par EF. Wooley et Carver montrent une bonne corrélation entre les résultats de simulation par EF en contrainte planes avec l'approche purement analytique de Goland et Reissner tout en indiquant qu'il est nécessaire de raffiner le maillage sur les bords du recouvrement [Wooley et Carver 1971]. Afin de réduire la taille des modèles, Naboulsi et Mall modélisent par EF l'assemblage de deux substrats collés par trois plans maillés avec des éléments de plaque et des conditions de compatibilités en déplacements aux interfaces substrat colle [Naboulsi et Mall 1997a] [Naboulsi et Mall 1997b]. Dans ce même objectif de réduire la taille des modèles, des EF spéciaux 2D contraintes ou déformations planes et 3D sont formulés. Ils peuvent représenter une épaisseur de colle [Carpenter 1973] [Nageswara Rao *et al.* 1982] [Yadagiri *et al.* 1987] [Groth 1986] [Carpenter et Barsoum 1989] [Carpenter 1991] ou bien les deux substrats et la colle [Amijima et Fujii 1987] [Taylor 1996] [Andruet *et al.* 2001]. Schmidt et Edlund formulent un EF spécial à 8 nœuds pour modéliser un recouvrement collé dont les substrats et la couche de colle sont suffisamment peu épais pour être représentés par leur plan moyen [Schmidt et Edlund 2006] [Schmidt et Edlund 2010]. Ces EF spéciaux utilisent des fonctions de forme supposées et un maillage est nécessaire pour obtenir la solution.

### Démarche envisagée

Dans le cadre du comité AFNOR « T76A – Colles et adhésifs », un groupe d'experts national (dont le CETIM et l'ISAE-SUPAERO font partie) a lancé une action pour l'établissement d'une norme de dimensionnement des assemblages collés. Cette norme nécessite en particulier de définir une méthodologie de calcul. La modélisation par ME peut être considérée comme un candidat potentiel et je participe alors à cette action. En effet, la modélisation par ME de recouvrements collés est présentée en section 2 comme une solution de résolution du système d'équations différentielles issues des hypothèses simplificatrices dans le cadre des approches à fondations élastiques. Elle permet en

particulier d'étendre l'application de ces approches à des domaines non couverts par les formules analytiques. La modélisation par ME peut aussi être vue comme une méthode de résolution *intermédiaire* entre les résolutions analytiques et les résolutions numériques avancées telles que les EF. En parallèle, le projet *MULTIMAT\_BOND* visant à développer un prototype de code basé sur la modélisation par ME est en cours de développement avec Toulouse Tech Transfer – la société d'accélération de transfert de technologies pour l'ICA – en lien avec le CETIM. Ce prototype de logiciel sera associé à une spécification logicielle offrant la possibilité d'une industrialisation potentielle. De plus, ce prototype sera suffisamment ouvert permettant (i) une utilisation simplifiées et donc plus efficaces par les étudiants et (ii) l'implémentation de nouveaux développement accélérant leur transfert vers l'industrie. Il me semble par ailleurs qu'une réflexion devrait être initiée à l'échelle du DMSM de l'ISAE-SUPAERO et de l'ICA pour capitaliser, à bon escient, à l'aide d'une plateforme logiciel les développements produits en termes de modélisation numérique. La proposition d'une norme dimensionnement passe par l'identification du champ d'application des modélisations envisagées et par conséquent de mesurer la complexité de la modélisation nécessaire pour représenter le comportement mécanique physique. Cette évaluation implique amors le choix des critères de tenue et des données d'entrée. Il est nécessaire d'associer la modélisation et son schéma de résolution à la modélisation comportement mécanique et matériau de l'assemblage collé. Autrement dit : quelle loi pour quel critère ?

Les perspectives de recherche suivantes sont alors envisagées (i) **complexification de la modélisation par ME de recouvrements collés** et (ii) **modélisation du comportement mécanique de la couche utilisée en couche**. L'objectif ici est de permettre la complexification du comportement mécanique de la couche de colle à moindre coup de calcul. Le développement ce type modélisation répond à un besoin à la fois en termes de prédimensionnement mais aussi de de compréhension du comportement mécanique de la colle à l'aide d'essais expérimentaux. Un laboratoire commun entre le CETIM et l'ICA au travers de son axe transverse ASSEMBLAGES est en cours d'élaboration. Alain Daidié (Professeur, INSA Toulouse), Frédéric Lachaud et moi portons ce projet pour l'ICA. Ce laboratoire commun concernera le comportement mécanique (i) des assemblages par boulonnage et (ii) des assemblages collés ou HBC. Ce laboratoire commun pourra alors hébergé cette perspective sur le dimensionnement des assemblages collés.

### *Complexification de la modélisation par ME de recouvrements collés*

Cette perspective comporte quatre sujets complémentaires (i) implémentation de ME à fondation élastique en cinématique 1D, (ii) développement de ME à fondations élastiques en cinématique de plaque, (iii) développement de ME à milieu continu plan et (iv) évaluation des modélisations. Cette perspective a pour ambition de pouvoir fournir des méthodologies utiles à la modélisation du comportement de colle utilisée en couche, objet de la seconde perspective.

Le premier sujet consisterait à [étendre la librairie des ME en cinématique 1D](#) aux nombreuses autres approches à fondation élastique disponibles dans la littérature (section [2.3.1](#)). En termes de méthodologie de formulation, la solution simple serait l'emploi de l'exponentielle matricielle (section [2.4.1](#)). Elle permettrait en plus de combiner différentes approches à fondations élastiques [[Paroissien et al. 2018](#)]. De plus, il serait intéressant d'appliquer le schéma de formulation initial semi-analytique (section [2.3.2](#)) quand cela est possible. L'intérêt est d'accéder aux expressions analytiques des racines des solutions dans un objectif d'évaluation des modélisations les unes par rapport aux autres.

Les travaux de la thèse doctorat de Benjamin Ordonneau, cofinancés par le CETIM et la DGA, ont pour objectif de proposer une méthodologie de formulation [des matrices de raideur et de masse de ME multicouche représentant un recouvrement collé en cinématique de plaque](#). Cette thèse se déroule sur la période 2018-2021. Ils s'inscrivent donc dans le second sujet. Le but est bien de modéliser un recouvrement collé par une unique brique, en simplifiant les modélisations des couches de colle et des substrats par des fondations élastiques et par des plaques, respectivement. Comme pour le cas de cinématique de barre de poutre, l'intérêt est de réduire les temps de calculs tout en conservant une bonne représentativité de la réponse mécanique et sans avoir recours à un maillage pour évaluer la solution. Les travaux de thèse de Benjamin Ordonneau conduisent à proposer une méthodologie de formulation par séries entières (section [2.4.3](#)). Elle est validée en cinématique de barre et de poutre et montre son potentiel pour la résolution de configurations à gradient de propriétés menant à des systèmes d'équations différentielles non linéaires [[Ordonneau et al. 2020](#)]. Les matrices de masse sont en cours de de formulation, visant à permettre une analyse modale simplifiée. L'approche en cinématique de barre a été validée par confrontation à la méthode par EF dans le cadre du stage M1 d'Alejandro Benitez-Martin [[Benitez-Martin 2020](#)]. Les développements sont en cours pour la cinématique de plaque, ce qui implique un niveau de complexité supérieure de formulation puisque la modélisation devient dépendante des deux variables du plan moyen. De plus, pour envisager l'intégration de comportement matériaux non linéaires à l'aide de la modélisation de ME à propriétés homogènes, un maillage est aujourd'hui nécessaire. Cela pose la question du raccordement des arrêtes, question absente dans le cas d'une cinématique 1D.

Les modélisations simplifiées à milieu continu permettent de capter l'état de contrainte en bord dans la colle, en particulier en bord de recouvrement, zone où la colle est susceptible d'entrer dans son domaine non linéaire. Le troisième sujet est alors la [formulation de ME prenant en compte les équilibres locaux de la colle et des substrats](#). À l'image des travaux de Sawa *et al.* [[Sawa et al. 2000](#)], l'utilisation d'une formulation par séries entières à deux variables, comme pour le cas du ME en cinématique de plaque, pourrait être envisagée sans hypothèse restrictive sur la forme des composante du champ de contrainte. De plus, avec une formulation par séries entières, la recherche de compatibilité avec le formalisme des approches asymptotiques est envisageable. Afin de

représenter la fissuration progressive de la colle, il pourrait être imaginé d'intégrer une zone cohésive. Autrement dit, il s'agit de développer une modélisation par ME multicouche pour laquelle les substrats et la colle sont considérés comme des milieux continus plans avec une fondation élastique dans l'épaisseur de la couche de colle.

Enfin, le quatrième sujet est l'évaluation [des capacités prédictives des modélisations simplifiées](#) en fonction des paramètres géométriques de conception et des modélisations du comportement matériaux de la couche de colle. Une étape préliminaire consisterait à réaliser une étude bibliographique détaillée. Des travaux ont été publiés mais aucune étude exhaustive dédiée existent à ma connaissance [[van Ingen et Vlot 1993](#)] [[Carpenter 1991](#)] [[Tsaï et Morton 1994](#)] [[da Silva et al. 2006a](#)] [[da Silva et al. 2006b](#)] [[da Silva et al. 2009b](#)] [[Rodriguez et al. 2010](#)] [[He 2011](#)] [[Akhavan-Safar et al. 2017](#)] [[Ramalho et al. 2020](#)]. L'approche pourrait consister à s'intéresser dans un premier temps au sandwich collé avec un chargement varié à ses quatre extrémités en supposant la rupture dans la couche de colle. Une analyse en grandeurs adimensionnées pourrait être choisie afin de réduire les tailles de campagnes d'essais numériques. Une conséquence est la reformulation nécessaire des ME à l'aide de paramètres adimensionnés. La répartition des contraintes serait alors comparée et mènerait à choisir, en fonction du chargement, des critères de rupture adaptés soit en contrainte soit couplé énergie contrainte – critère couplé et/ou modèle de zone cohésive. Ensuite l'évaluation de l'introduction des conditions aux limites aux bords du recouvrement pourrait être évaluée, en particulier pour le cas du simple recouvrement collé. Les comparaisons seraient effectuées par rapport à des résultats EF issus de modélisations EF 3D raffinées. Cette étude, brièvement décrite, représente un volume de travail très important. De plus, une colle montre souvent une dépendance au temps et à la température ainsi qu'une phase plastique. Le comportement intrinsèque matériau de la colle est alors en général complexe à modéliser. Le comportement de l'assemblage résultant l'est aussi, d'autant plus qu'il dépend des substrats et du niveau de confinement induit dans la couche de colle.

### *Modélisation du comportement mécanique de la colle utilisée en couche*

En fonction de son épaisseur et pour une configuration d'assemblage fixée, la couche de colle est plus ou moins confinée impliquant éventuellement des états de contraintes ou de déformations prédominants. Ce confinement conduit à utiliser un module de pelage différent du module d'Young de la colle [[Hart-Smith 1973b](#)] [[Högberg 2004](#)] [[Jumel et al. 2011](#)] [[Lélias 2016](#)]. Deux problématiques sont alors induites. La première est le gradient des propriétés de la couche de colle dans l'épaisseur du fait de l'existence possible d'interphase (section 2.5.3). Ce point sera abordé en section 3.2.2. La seconde problématique est la variabilité spatiale de l'état mécanique multiaxial au cours de la déformation. De plus, le niveau d'inhomogénéité de répartition des champs de contrainte dans l'épaisseur de colle est sensible au confinement [[Jaillon 2020](#)]. Cette variabilité complexifie l'intégration du comportement constitutif matériau de la colle dans le cadre de

modélisations simplifiées tant en champ dit homogène qu'en fissuration. En effet, les différentes chimies de colles mènent à différents types de comportement matériau tels que linéaire élastique fragile, élasto-plastique, hyper-élastique avec une dépendance au temps et à la température. Manterola définit une colle raide comme ayant un module d'Young supérieur à 1 GPa et une faible déformation à rupture [Manterola 2020]. Si la colle présente une raideur faible à modérée et une grande capacité à se déformer alors cette colle est dite flexible [Créac'hcadec *et al.* 2013] [Hasegawa *et al.* 2015a] [Hasegawa *et al.* 2015b] [Manterola 2020].

La caractérisation du comportement mécanique à champ homogène d'une colle peut être réalisée sur des éprouvettes de colle massive ou en couche sur la base d'essais ARCAN modifiés par exemple [Cognard *et al.* 2005] [Cognard *et al.* 2010] [Créac'hcadec *et al.* 2013] [Dufour *et al.* 2016] [Jaillon 2020]. Ces essais ont pour but d'identifier des lois de comportement plus ou moins complexes compatibles avec une modélisation continue de la couche de colle. Les colles ayant une phase plastique peuvent montrer un écoulement sensible à la pression hydrostatique que le modèle simple de von Mises ne peut pas prendre en compte [Ward 1971]. Les colles sujettes à des mécanismes de dissipation visqueuse ou plastique rend difficile l'identification de la dissipation énergétique due à la fissuration [Li et Chandra 2000]. Ainsi, sur une simple éprouvette DCB pour la caractérisation de la fissuration en mode I, la couche de colle peut se trouver dans un état de déformations planes au centre du recouvrement ou un état de contraintes planes sur les bords libres. Des méthodologies particulières de mesure [Lee *et al.* 2004] [Campilho *et al.* 2015] et d'identification [Cabello *et al.* 2017] [Manterola *et al.* 2019] peuvent être mises en place, sur la base de nouveaux modèles représentant de manière macroscopique la couche de colle. Sarrado *et al.* représentent l'épaisseur de la couche de colle comme l'association en série de deux ressorts élastiques dont la jonction est capable de fissurer [Sarrado *et al.* 2016]. Cabello *et al.* proposent une formulation de fondation élastique non linéaire élastique basée sur une loi de Mooney-Rivlin quasi-incompressible pour représenter le comportement de colles dites flexibles [Cabello *et al.* 2016a]. La raideur de la fondation élastique devient dépendante du saut de déplacement et de la position par rapport à la pointe de fissure. Une réduction de ce modèle à un comportement linéaire de la fondation élastique qui rend compte macroscopiquement de la contraction latérale de la couche de colle est donnée dans [Cabello *et al.* 2016b] puis validée dans [Manterola *et al.* 2019]. Dans ces modèles, des lois de TS bilinéaires sont utilisées pour lesquelles la raideur et la contrainte d'initiation sont issus d'essais sur éprouvettes de colle massives : (i) la raideur initiale est alimentée par le module d'Young de la colle et son coefficient de Poisson et (ii) la contrainte d'initiation est la contrainte maximale en traction. Le taux de restitution d'énergie vient de la mesure sur essais DCB et utilise l'intégrale J. Si l'intégrale J apparaît comme un outil robuste et relativement simple à mettre en œuvre expérimentalement pour caractériser les lois de TS [Jaillon 2020], elle ne permet pas de distinguer l'énergie dissipée par plastification de l'énergie nécessaire à la fissuration [Li et Chandra 2000] [Sadeghi *et al.* 2018]. La

caractérisation du comportement mécanique et sa modélisation via une approche simplifiée cohésive sont donc complexifiées [Xu et Wei 2013], d'autant plus que la non homogénéité du champ de contrainte en pointe de fissure mettent en défaut la représentation de la couche de colle par une zone cohésive [Jaillon 2020]. Cela pousse à évaluer des modélisations par EF combinant éléments volumique et zones cohésives [Jaillon 2020]. L'intégrale J n'est pas applicable en l'état si le comportement est dissipatif en fonction du temps et de la température. Alfano et Mutos proposent un modèle de zone cohésive combinant endommagement et visco-élasticité [Mutos et Alfano 2013]. La modélisation est basée sur l'hypothèse de l'existence d'une énergie élastique de fissuration intrinsèque indépendante du temps qui pilote la variable d'endommagement. L'identification présentée dans [Mutos et Alfano 2013] concerne la fissuration en mode I et est basée sur une identification inverse utilisant une modélisation par EF intégrant la loi cohésive formulée. Morin *et al.* proposent un élément cohésif embarquant un comportement élasto-plastique différenciant la réponse en traction et en compression pour des sollicitations dynamiques [Morin *et al.* 2013]. Les propriétés matérielles sont obtenues à partir d'essais sur éprouvettes massives. Une brève revue bibliographique sur les zones cohésives dépendantes du temps et de la température est donnée dans [Cui *et al.* 2019]. De même, dans le cas où l'assemblage est soumis à un effort mécanique dans un environnement agressif de nature à dégrader le comportement de la couche de colle dans le temps, l'intégrale J n'est pas un paramètre théoriquement utilisable. Par ailleurs, la simulation de la fissuration en mode mixte telle que présentée en section 2.4.4 est basée sur une modélisation embarquant deux hypothèses fortes, qui sont discutables du fait de la non proportionnalité du chargement une fois l'endommagement initié. De Moura *et al.* proposent une modélisation basé sur le calcul incrémental des énergies dissipées dans les modes purs au lieu des sauts de déplacement pour évaluer le paramètre dommage [de Moura *et al.* 2016]. Néanmoins, ce-dernier reste évalué en faisant l'hypothèse d'une forme triangulaire en mode mixte. La caractérisation expérimentale du comportement en mode mixte permettant le pilotage de l'essai nécessite le développement de bancs d'essais spécifiques [Panettieri *et al.* 2018].

La thèse de doctorat de Mario Planas-Andrés, cofinancée par ARKEMA et l'ISAE-SUPAERO, débutera à l'automne 2020. Le sujet est « *Dimensionnement de assemblages collés de pâles d'éolienne fabriquées en matériaux recyclables* ». Les travaux de thèse s'intéresseront à la modélisation du comportement mécanique des assemblages collés utilisés pour la conception des pâles d'éolienne. Pour cette étude, la fabrication de pâles d'éolienne choisie consiste en l'assemblage de deux demi-coques raidies. Les deux coques en matériaux composite sont collées au niveau des bords de fuite et des bords d'attaque. Le raidissement est réalisé par le collage de deux longerons avec possiblement le doublage des peaux entre les longerons. Les épaisseurs de colle ne sont pas maîtrisées dans le procédé de fabrication. La matrice des matériaux composite et de la colle sont en général thermodurcissables donc non recyclables. Le passage à une matrice thermoplastique pour

les matériaux des peaux composites et de la colle ouvrirait la voie au recyclage des pâles d'éolienne. La problématique globale concerne alors la conception et le dimensionnement des zones d'assemblage des pâles d'éoliennes recyclables assurant si possible des performances mécaniques au moins égales à celles de la solution non recyclable. Les colles thermoplastiques telles que les méthacrylates présentent un comportement mécanique complexe de type élasto-visco-plastique [Lélias 2016] [Jaillon 2020]. Elles sont caractérisées par une forte capacité à se déformer et à dissiper le travail des efforts extérieurs. Elles présentent donc une forte ténacité et sont donc tolérantes aux dommages. De plus, elles peuvent être utilisées en couche pour une large gamme d'épaisseur. La caractérisation du comportement mécanique de la colle seule à l'état massif sera réalisée dans le cadre d'une thèse au Laboratoire de Mécanique des Solides (UMR 7649 CNRS) à Palaiseau qui se déroulera en parallèle. La thèse de Mario Planas se concentrera alors sur la modélisation du comportement mécanique de la colle utilisée en couche à épaisseur variable et constitue alors la suite des travaux de doctorat d'Agathe Jaillon [Jaillon 2020]. Les problématiques identifiées actuellement sont listées ci-après. Quelles méthodologies expérimentales (protocoles, mesures) pour caractériser le comportement mécanique et mesurer les performances mécaniques de l'assemblage collé à épaisseur variable ? Comment modéliser le comportement mesuré expérimentalement et distinguer l'énergie de fissuration – en postulant son existence – des énergies dissipées plastiquement ou par viscosité ? Comment intégrer le comportement modélisé dans une modélisation numérique pour produire des simulations prédictives ? Comment dégrader les modélisations numériques pour fournir des métamodèles permettant un dimensionnement prenant en compte la variabilité de l'épaisseur inhérente à la fabrication ? Il apparaît clairement que l'identification de loi matériau est liée tant à des difficultés de mise au point des protocoles expérimentaux et modélisations associées : que doit-on mesurer et comment ? La simulation du comportement mécanique doit alors s'adapter à ces contraintes expérimentales dans un premier objectif d'être un support à l'identification des lois matériaux. Dans un second temps, la simulation numérique pourra être utilisée par exemple pour proposer des solutions de conception adaptées au changement de technologie envisagée dans ces travaux de thèse : maximiser la tenue mécanique des assemblages à moindre contrainte imposée en production.

## 3.2 Approche pluridisciplinaire du dimensionnement des assemblages collés

### 3.2.1 Assemblages HBC

#### Contexte

Les investigations menées sur les assemblages HBC tirent avantage de celles menées sur le boulonnage et sur le collage tout en les alimentant.

La thèse de doctorat de Minh-Nhat TO, cofinancée par la Région Occitanie et l'Université Fédérale de Toulouse Midi-Pyrénées, débutera à l'automne 2020. Le sujet est « *Mastic fonctionnalisé pour l'amélioration de la performance mécanique des assemblages boulonnés démontables* » (MIAM). Cette thèse, réalisée en collaboration entre le CIRIMAT, le LGP Tarbes et l'ICA, s'inscrit dans le développement de TACCOS. Les travaux visent à proposer une méthodologie de caractérisation et modélisation expérimentale et numérique de matériaux élastomères en fatigue fluage. Cette méthodologie vient en support à la formulation par fonctionnalisation des propriétés de cohésion et d'adhérence de mastics aéronautiques, afin d'augmenter le ratio tenue en fatigue sur masse d'une liaison boulonnée.

#### Démarche envisagée

Il apparaît que la formulation d'un mastic fonctionnalisé implique en premier lieu d'être capable de comprendre, de caractériser puis de modéliser le comportement mécanique de matériaux élastomériques à comportement fortement non linéaires en temps, température et déformation, sous des sollicitations cycliques.

Le premier objectif de ce projet est alors de développer une méthodologie de caractérisation et de modélisation numérique et expérimentale du comportement mécanique en fatigue fluage des matériaux élastomères utilisés en couche adhésive et des assemblages HBC utilisant ces matériaux. Les essais numériques permettent de réduire le coût des essais expérimentaux et de mieux comprendre le comportement mécanique. Cependant, ils doivent reposer sur des principes de modélisation adaptés aux comportements mécaniques observés lors des essais expérimentaux. De plus, chercher à réduire les temps de calcul reste toujours un enjeu en phase de prédimensionnement en bureau d'étude ou dans le cadre d'algorithmes d'optimisation ou de calculs statistiques, bien que les capacités de calcul soient de plus en plus importantes. Un enjeu du projet est donc de déterminer le niveau nécessaire de complexité de modélisation et de technique de résolution associée en fonction du comportement mécanique à simuler. Ainsi, différentes méthodes de simulation seront développées et évaluées, des simulations basées sur des modélisations 1D associées à une résolution analytique à celles basées sur des modélisations 3D associées à la résolution par éléments finis. En particulier, une attention particulière sera portée à la simulation de niveau de complexité intermédiaire, basée sur

une modélisation par ME. L'idée est ici est de définir le champ d'application de cette méthode de simulation intermédiaire aux matériaux élastomériques utilisés en couche de colle fine, ainsi que de l'y étendre si pertinent. De plus, à l'aide des travaux en cours de Thiago Birro, il sera envisagé d'intégrer dans ces modélisations intermédiaires le comportement à l'interface. Les résultats des simulations numériques seront confrontés entre eux ainsi qu'aux résultats des essais expérimentaux. Une instrumentation, incluant en particulier stéréo-corrélation et thermographie IR, sera utilisée dans un protocole expérimental à établir en fonction des résultats des essais expérimentaux élémentaires. Le second objectif est de proposer une formulation de mastic fonctionnalisé en cohésion et adhésion permettant d'améliorer significativement la tenue en fatigue des assemblages boulonnés aéronautiques. Les activités liées à cet objectif sont hors de mon domaine de compétences. Les contraintes imposées à la formulation est que le mastic doit pouvoir conserver dans le temps suffisamment de raideur, sa tenue au pelage ainsi que son adhérence.

Les travaux menés dans ce projet seront l'occasion de contribuer à la modélisation du comportement mécanique de couche de colle flexible et à leur intégration dans des modélisations par ME. En particulier, les développements menés récemment par le groupe de recherche AMADE de l'Université de Gérone pourront être utilisés [Sarrado *et al.* 2016] [Cabello *et al.* 2016a] [Cabello *et al.* 2016b] [Manterola *et al.* 2019]. Par ailleurs, le développement d'une méthodologie d'évaluation de la tenue en fatigue des assemblages HBC, absente de la littérature, sera initié. Cette méthodologie pourra se baser sur l'analyse des transferts des efforts entre la colle et les substrats, prenant en compte l'endommagement progressif de la colle dans le temps. De plus, il pourrait être envisagé d'évaluer l'influence relative sur la tenue en fatigue prédite par des approches uniaxiales basées sur les transferts d'effort aux fixations et par des approches multiaxiales prenant en compte l'état mécanique lié aux procédés de montage (serrage, interférence) [Lélias 2012] [Benhaddou 2015]. Ces dernières investigations pourraient conduire à essayer de représenter l'état multiaxial en bord de trou dans une modélisation macroscopique uniaxiale par ME éventuellement.

Ce projet MIAM illustre la fonctionnalisation d'une couche de colle pour accomplir des fonctions spécifiques additionnelles. Les essais statiques et en fatigue sur assemblages HBC permettront d'évaluer la démarche de fonctionnalisation. Un avantage des assemblages collés par rapport aux assemblages par fixation mécanique pourrait être leur capacité à dissiper l'énergie dans le cas de crash ou d'impact pour l'industrie automobile par exemple. D'où l'intérêt de formuler et d'utiliser des colles compatibles avec les fonctions de tenue mécanique et dissipation d'énergie.

### 3.2.2 Interface substrat colle

#### Contexte

La thèse de doctorat de Thiago Birro supporte la création de l'initiative TACCOS (section 2.5.3) pour une approche pluridisciplinaire des questions posées par le collage. Les travaux visent à modéliser le comportement mécanique de l'interface substrat colle en exploitant l'essai de flexion trois points qui présente l'avantage de localiser l'initiation de la rupture interfaciale. Les perspectives de recherche décrites ci-après ne pourront être développées que dans un cadre pluridisciplinaire, celui de TACCOS.

#### Démarche envisagée

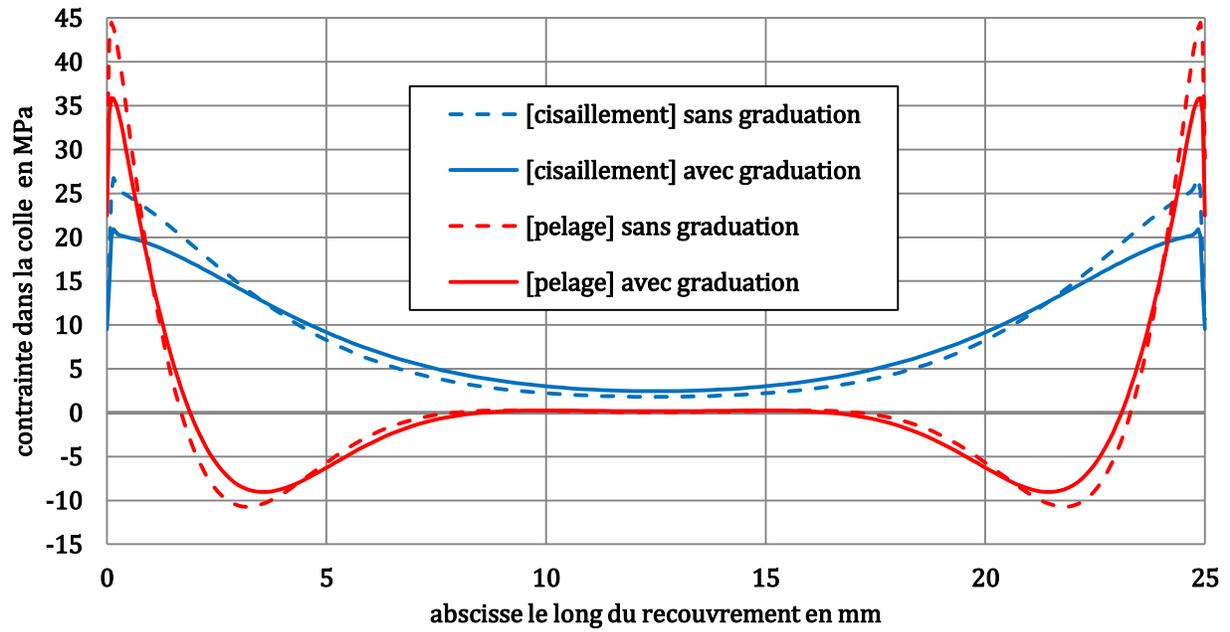
La première question que j'aimerais aborder concerne le petit rond (section 2.5.3). J'aimerais comprendre la cinétique de sa création et déterminer les conditions géométriques et matérielles dans lesquelles il apparaît. En effet, la méthodologie de caractérisation de l'interface proposée par Thiago Birro est conditionnée par l'existence de ce petit rond. De plus, elle suppose que l'effort maximal atteint correspond à l'effort nécessaire pour la création de ce petit rond. Or, il peut arriver qu'il n'y ait pas de petit rond, de sorte que la chute d'effort est représentative de la propagation de la fissure. Les derniers travaux de Thiago Birro s'intéressent à ces questions et seront un point de départ pour ces investigations. En particulier, de nouveaux protocoles expérimentaux sont en cours d'élaboration.

La seconde question porte sur la caractérisation de la durabilité de l'interface colle substrat. L'essai de flexion trois points peut-il être exploité ? Si oui, comment et dans quelle mesure ? La durabilité s'entend au sens large et inclut les chargements en fatigue et/ou fluage éventuellement (i) sous un environnement agressif ou (ii) après exposition forfaitaire à un environnement agressif. Ce sujet pourra simplement être initié dans le cadre de la thèse de Minh-Nhat TO (section 3.2.1). Des demandes de subventions d'études post-doctorales ont été réalisées en 2020, sans succès pour l'instant.

La troisième question concerne la prise en compte de la mixité locale dans la caractérisation de l'interface. D'après les résultats des simulations numériques par EF des essais de flexion trois points menés par Sauvage, la contrainte d'arrachement apparaît comme être la composante du tenseur de contrainte la plus intense [Sauvage 2016]. Une analyse VCCT réalisée par Thiago Birro montre une prédominance du mode I par rapport aux modes II et III sur l'essai de flexion trois points [Birro *et al.* 2020]. Cependant, dans d'autres configurations d'essais, tel que le simple recouvrement, la contribution des modes II et III pourraient ne plus être négligeables. De nouveaux protocoles expérimentaux devraient être mis au point pour la caractérisation de l'interface en modes purs II et III ainsi qu'en modes mixtes.

La quatrième question est relative à l'interphase, tant au niveau de l'interface que de la couche de colle. Un sujet non abordé dans les travaux de Thiago Birro est l'influence de la présence d'une interphase sur la caractérisation de l'interface. Ce sujet devrait être abordé en parallèle des investigations à mener de la première question sur le petit rond. Par ailleurs, dans le mémoire de stage de fin d'études de Salah Seddiki, les répartitions de contraintes de cisaillement et de pelage le long de la ligne moyenne de l'adhésif pour la configuration classique de l'assemblage en simple cisaillement sont fournis en considérant soit des propriétés homogènes dans la couche de colle, soit un gradient de propriétés dans l'épaisseur [Seddiki 2019]. Dans l'exemple proposé, il est montré que la présence du gradient d'épaisseur diminue significativement les contraintes maximales dans la couche de colle (Figure 40). Pour cet exemple, une répartition parabolique symétrique du module d'Young et un coefficient de Poisson constant dans l'épaisseur sont supposés ; le module d'Young de la colle au milieu de la couche est supposé valoir deux fois moins que celui à l'interface. L'analyse reste linéaire élastique matériaux et non linéaire géométrique. L'épaisseur de colle vaut 200  $\mu\text{m}$  pour des substrats en aluminium de 2 mm. Quand l'interphase existe, sa présence devrait être prise en compte dans la modélisation, d'autant plus dans le cas où l'effet d'épaisseur de la couche de colle est analysée. Cela pose aussi la question de la mesure expérimentale des propriétés mécaniques en fonction de la position dans la couche de colle. En termes de modélisation par ME, deux possibilités pourraient être considérées pour la prise en compte d'un gradient de propriété dans l'épaisseur. La première possibilité est le ME multicouche. Dans ce cas l'interphase serait représentée de manière discrète. La seconde possibilité serait le recours à un ME à milieu continu (section 3.1.2) à gradients de propriétés, à l'image du ME à gradients de propriétés le long du recouvrement [Ordonneau *et al.* 2020]. Une formulation par séries entières pourrait être employée (section 2.4.3).

Enfin la cinquième question concerne l'interaction du chemin de fissuration entre l'interface et la colle. Dans [Belnoue *et al.* 2016], le chemin de fissuration à l'interface colle substrat est supposée connu et est piloté par une zone cohésive tandis que celui au sein de la couche de colle ne l'est pas et utilise l'approche *smearred-crack* [Belnoue et Hallett 2016] [Cervera et Chiumenti 2006]. En particulier, l'effet du confinement de la couche de colle, modélisée par un comportement élasto-plastique avec prise en compte de la pression hydrostatique, est considéré. Il pourrait être envisagé d'essayer d'enrichir la modélisation par ME avec ce type d'approche avec ou sans prise en compte des propriétés de l'interface et de l'interphase.



**Figure 40** Répartition des contraintes de cisaillement et de pelage le long de la ligne moyenne de la couche de colle

### 3.2.3 Réparations multimatériaux

#### Contexte

Le sujet des réparations collées structurales multimatériaux est une application technologique, qui présente aujourd'hui un fort enjeu industriel du fait de l'augmentation des flottes d'appareils en vol. Une réparation structurale consiste généralement à enlever de la matière autour de la zone endommagée (fissure de fatigue, impact, corrosion...) puis à rajouter de la matière saine. Le rajout de matière saine est réalisé par un assemblage. Les méthodes d'assemblage, dites classiques, sont le boulonnage, le collage et l'assemblage hybride (boulonné / collé). La matière saine rajoutée peut être réalisée dans un matériau différent de la matière initiale, menant à la présence d'interfaces multimatériaux (composite, métallique) qu'il s'agit de maîtriser. Pourtant, aujourd'hui l'aviation civile n'a pas recours au collage pour des applications structurales et les solutions d'assemblage classique sont préférées. Afin de concevoir une réparation les ingénieurs des bureaux d'étude ont recours à la simulation numérique. Selon l'objectif attendu de la simulation servant un objectif de conception, des hypothèses de modélisation spécifiques peuvent être prises. Selon ces hypothèses, des méthodes de résolution variées, telles qu'analytiques, semi-analytiques ou numériques avancées incluant différents niveaux de représentation, peuvent être utilisées. Afin de réduire les temps de conception directement dépendant des temps de simulation numérique, il est utile de savoir quel type de résolution est adapté au problème de conception souhaité. Une problématique scientifique consiste alors à définir le niveau de modélisation nécessaire pour représenter les mécanismes physiques du comportement mécanique de la réparation, incluant ceux relatifs à la rupture sous ses différents modes. Une convention spécifique sur le dimensionnement des réparations collées structurales multimatériaux avec DGA TA est actuellement en cours de signature. Côté ISAE-SUPARO, cette convention est élaborée et portée par un groupe d'enseignant-chercheurs dont je fais partie. Les deux axes de recherche identifiés concernent la tenue nominale (statique, fatigue, durabilité) et la tenue en environnement sévère (vulnérabilité, impact, crash). Ce cadre travail devrait permettre d'aborder le verrou du dimensionnement des assemblages collés au travers de l'application des réparations collées.

Le second verrou à lever pour une plus grande utilisation du collage est le contrôle de la qualité du collage. Contrairement aux assemblages par fixation mécanique, un simple contrôle visuel ne suffit pas pour assurer que l'assemblage a bien été réalisé. L'utilisation de contrôles non destructifs et destructifs sur éprouvettes suivieuses peut être considérée. Néanmoins, ces contrôles induisent une augmentation des coûts de production. De plus, aujourd'hui aucun contrôle ne permet d'assurer la tenue réelle dans le temps de l'assemblage collé. Enfin, l'utilisation de contrôles non destructifs ne permet de ne détecter que les défauts qui sont connus. C'est dans ce contexte que le projet collaboratif S3PAC pour *système de supervision et de simulation de la production d'assemblage collé* a été lancé sous financement FUI. Le consortium était constitué par AEC Polymers, SOGETI High Tech,

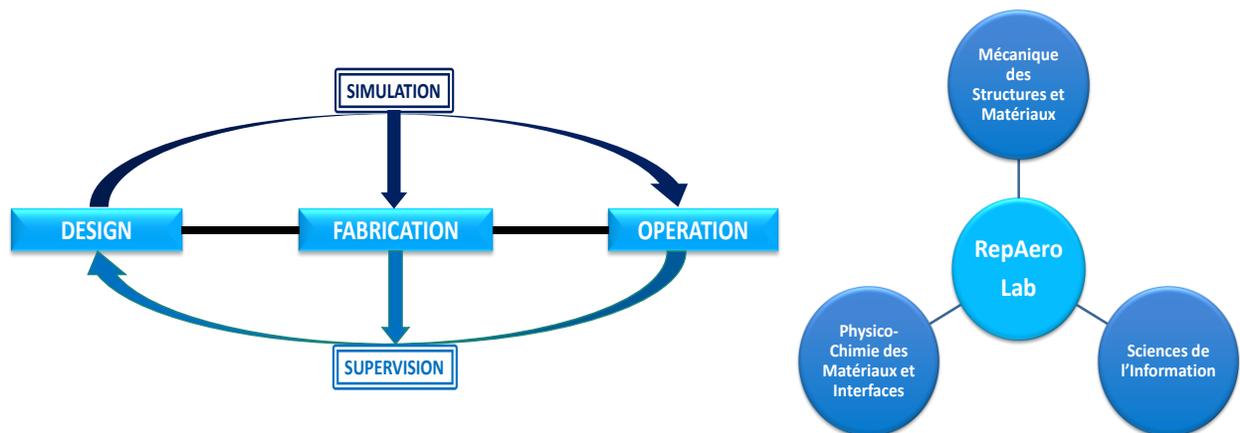
OPENCASCADE, ELEMCA, VLM, NIMITECH, ALISAERO, I2M et ICA. Ce projet a été labellisé par les pôles AEROSPACE VALLEY et ROUTE DES LASERS. Le projet S3PAC devait conduire à la maîtrise du collage structural en rendant ce procédé robuste et fiable. Il s'agissait d'offrir aux industriels une solution économiquement viable pour augmenter la performance mécanique des structures tout en réduisant leur masse. S3PAC visait à développer une offre innovante d'adhésif structural augmenté du service de conception et de mise œuvre, comme solution aux freins au recours au collage structural et à ses bénéfices inhérents. L'objectif ambitieux de S3PAC était de lever les freins à l'utilisation de l'assemblage par collage pour permettre la substitution et/ou la réduction de l'usage des fixations mécaniques en s'appuyant (i) sur les avancées de la chimie des matériaux (colles de nouvelle génération) et (ii) sur les avancées des technologies de l'information et de la communication. L'idée de projet était d'assurer la qualité de l'assemblage collé produit, en analysant les informations physiques nécessaires et pertinentes tout au long du procédé d'assemblage. La solution envisagée était donc un système de supervision et de simulation couvrant à la fois le bureau d'étude et les ateliers de fabrication permettant de suivre et tracer chacune des étapes, dès la phase de définition des assemblages. En parallèle de la fabrication de l'assemblage, ce système conduisait à la création d'un jumeau numérique, à partir duquel des alertes pouvaient être levées et évaluées, assistant l'opérateur ou le concepteur dans leur décision. La variabilité de l'épaisseur de la couche colle a été choisie comme défaut pour la démonstration de l'approche S3PAC, menant à la thèse de doctorat d'Agathe Jaillon [Jaillon 2020].

### **Démarche envisagée**

RepAero Lab est un projet de laboratoire commun ouvert pluridisciplinaire sans mur visant à étendre l'approche de S3PAC au suivi en opération sur l'application technologique particulière des réparations collées multimatériaux. La fabrication envisagée serait la dépose de fils fondus chargés ou non sur un substrat à réparer. Un synoptique de l'approche S3PAC étendue est donnée en [Figure 41](#). Les disciplines scientifiques concernées sont la physico-chimie des matériaux et des interfaces, la mécanique des structures et des matériaux et les sciences de l'information. Autrement dit, RepAero Lab étend la structure informelle TACCOS aux sciences de l'information. Le moyen d'assemblage envisagé est une cellule robotisée à deux bras disposant de plusieurs effecteurs. Un bras permettrait de fabriquer tandis que l'autre suivrait la fabrication. La cellule robotisée permettrait la fabrication d'éprouvettes élémentaires de caractérisation et d'éprouvettes technologiques de démonstration, de sorte que RepAero Lab se positionne sur les deux premiers étages de la pyramide des essais. Le jumeau numérique nécessite l'utilisation d'une plateforme logicielle permettant le contrôle des bras robotisés, la fabrication et la conception, la simulation du procédé et des essais, l'enregistrement, le stockage et le traitement des informations. Aucun développement particulier sur la robotique n'est prévu à ce stade. Les travaux de recherche concernent essentiellement la mise en œuvre expérimentale et le

développement de briques algorithmiques à intégrer au sein de la plateforme logicielle. La modélisation par ME peut être vue comme une de ces briques. Des développements en cours réalisés par mes collègues Frédéric Lachaud et Joseph Morlier (Professeur, ISAE-SUPAERO) sur l'optimisation du placement de fibres aboutiront à d'autres briques. Les travaux de thèse de doctorat de Lorraine Aparecida-Silva, sous financement du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche sur la période 2018-2021, dirigés par Christine Espinosa (Professeur ISAE-SUPAERO) et Lucas FM da Silva (Universidade do Porto) apporteront à RepAero Lab des briques supplémentaires. En effet, ces travaux visent à concevoir dès le bureau d'étude des assemblages collés permettant de réaliser une fonction de tenue mécanique et de démontage à la demande par fonctionnalisation de la colle (3.2.1). Le démontage à la demande sera réalisé par expansion thermique de particules [Banea *et al.* 2017], dont il s'agit de maîtriser la distribution au sein de la couche de colle dès l'accostage. Une stratégie de simulation numérique est alors en cours de création pour simuler l'accostage, le comportement mécanique et le démontage. Par ailleurs, cette fabrication par fil fondu peut être vue comme une fonctionnalisation des substrats : les substrats embarquent la fonction d'assemblage. Cette fonctionnalisation existe déjà au travers des traitements ou d'activation de surface pour le collage ou pour le soudage thermoplastique.

Des discussions sont alors actuellement en cours avec SIEMENS et VLM Robotics afin de monter un projet permettant la création de RepAero Lab.



**Figure 41** Synoptique de l'approche S3PAC étendue et contexte pluridisciplinaire de RepAero Lab.

## 4 Conclusion

Mon parcours professionnel après le doctorat comportent deux périodes : industrielle (2007-2016) puis universitaire (2016-2020). Néanmoins, mes activités de recherche se sont déroulées et ont évolué continûment sur ces deux périodes, découlant de mes travaux réalisés en thèse de doctorat.

En effet, durant ma période industrielle, j'ai mené deux projets complémentaires en parallèle. Le premier projet était au profit d'AIRBUS et concernait l'application sur avion des assemblages HBC dans un objectif de réduction du nombre de fixations mécaniques. Les travaux menés étaient variés. Ils se sont concentrés sur la recherche et l'évaluation de colles potentiellement candidates en lien avec les contraintes des parties matériaux et procédés et fabrication. Après sélection des colles potentielles, les évaluations consistaient principalement en la réalisation d'essais expérimentaux. Afin d'aider au développement de colles adaptées, la modélisation par EF 3D raffinée a été largement utilisée. Le second projet, JoSAT, était au profit de SOGETI High Tech et se focalisait sur le développement de la modélisation simplifiée par ME. Ce projet m'a permis de monter ma première convention de collaboration avec une institution académique (ISAE) et de contribuer à l'encadrement d'un premier doctorant, Guillaume Lélias. Ce dernier a travaillé sur la modélisation numérique et expérimentale du comportement jusque rupture des assemblages collés. Cette thèse représente alors une première incursion sur la caractérisation expérimentale complémentaire à la modélisation numérique et nécessaire au dimensionnement. Le projet JoSAT m'a permis de m'initier aussi à la préparation de dossiers pour le financement de projets collaboratifs à l'échelle nationale et européenne.

En particulier, le gain du projet FUI S3PAC a permis de lancer en 2017 la thèse d'Agathe Jaillon, qui fait suite aux travaux de Guillaume Lélias. J'ai donc pu co-encadrer cette thèse avec Frédéric Lachaud (Professeur ISAE-SUPAERO) et Julien Jumel (Professeur ENSTA Bretagne). Elle sera suivie par la thèse de Mario Planas-Andres à partir de l'automne 2020, avec le support d'ARKEMA. Par ailleurs, le lancement de la structure informelle TACCOS en collaboration avec Frédéric Lachaud et Maëlen Aufray (Maître de Conférences, ENSIACET), a permis d'aborder le collage structural – technologie d'assemblage chimique assurant une fonction mécanique – de manière pluridisciplinaire. La thèse de Thiago Birro, lauréate en 2017 de l'Appel à Projet de Recherches de l'UFT MiP et en collaboration avec Maëlen Aufray et Frédéric Lachaud a permis de supporter la création de TACCOS. La thèse de Minh-Nhat TO, lauréate de l'Appel à Projets Allocations Doctorales Interdisciplinaire de l'UFT MiP 2020, s'inscrit dans le cadre de TACCOS et sera lancée à l'automne 2020, en collaboration avec Valérie Nassiet (Professeur des Universités, ENI Tarbes), Bouchra Hassoune (Maître de Conférences, ENI Tarbes), Maëlen Aufray et Frédéric Lachaud. En parallèle, les travaux sur le développement de la modélisation par ME se poursuivent. La

thèse de Benjamin Ordonneau, sous cofinancement DGA CETIM et co-dirigée avec Michel Salaün (Professeur ISAE-SUPAERO), vise à formuler un ME à fondation élastique en cinématique de plaques. Ces travaux ont déjà mené à l'élaboration d'une formulation par séries entières, en lien, en particulier, avec des développements préliminaires réalisés en collaboration avec Lucas FM da Silva (Professeur, Universidade do Porto) sur les assemblages à gradients de propriété et des projets étudiants pour l'aspect multicouches. Ces travaux ouvrent la voie de plus à l'enrichissement des ME, à formuler dans le cadre de la mécanique des milieux continus. La thèse de Benjamin Ordonneau est en partie due à des discussions avec le CETIM, initiées par Alain Daidié (Professeur des Universités, INSA Toulouse) et visant à créer un laboratoire commun avec l'axe transverse ASSEMBLAGES de l'ICA. Le projet de convention est aujourd'hui en cours d'élaboration. La thèse de Benoit Montagne, en collaboration avec DASSAULT AVIATION et codirigée avec Frédéric Lachaud, a permis d'évaluer la complexité de modélisation nécessaire pour reproduire les mécaniques de dégradation des assemblages boulonnés composite stratifiés. Elle a de plus ouvert des perspectives de recherche sur l'amélioration de la modélisation simplifiée par ME de fixations et des structures composites stratifiées. La thèse de Guillaume Pichon en collaboration avec AIRBUS et co-dirigée avec Alain Daidié, permettra de mettre en avant l'intérêt de la maîtrise de la complexité des modélisations pour la recherche de solutions de mise en œuvre industrielle moins contraintes. Dans la thèse de Lorraine Aparecida-Silva, dirigée par Christine Espinosa (Professeur ISAE-SUPAERO) et Lucas da Silva, illustre l'idée de piloter, par la modélisation numérique au niveau la conception de l'assemblage, la phase de fabrication pour accomplir une fonction duale de tenue et de démontage à la demande. Enfin, RepAero Lab, hérité du projet S3PAC, s'attaque au verrou de la maîtrise du procédé de collage en tirant avantage de l'approche pluridisciplinaire de TACCOS, complétées par les avancées des sciences de l'information. Les réparations collées structurales multilatéraux fabriquées par dépôt de fils fondus chargés ou non est l'application technologique de démonstration choisie. Ce sujet des réparations collées structurales est l'objet d'une convention spécifique avec DGA TA qui permettra de continuer à investigue le verrou du dimensionnement des assemblages collées de manière globale (statique, fatigue, durabilité et vulnérabilité).

Durant ma thèse de doctorat, j'ai commencé à enseigner la théorie des poutres, des plaques et la conception des structures aéronautiques. J'ai continué à enseigner ces matières mais aussi la mécanique des assemblages. En effet, j'ai occupé un poste de Professeur Associé à Mi-Temps (PAST) à l'ENSEIRB-MATMECA entre 2014 et 2016, dans le cadre duquel Éric Martin (Professeur des Univesrités, ENSEIRB-MATMECA) m'a offert la possibilité de créer un module en troisième années de 24 heures sur ce sujet. Cette relation avec l'ENSEIRB-MATMECA est née de l'encadrement de plusieurs de ces étudiants en stage de fin d'études d'études. Anthoy Da veiga et Sébastien Schwartz ont fait partie de ces étudiants et ont contribué grandement au développement de la modélisation par ME.

J'aimerais souligner le privilège du tuteur de stage ou de l'enseignant-chercheur de pouvoir collaborer avec des étudiants motivés. En effet, si le rôle de l'encadrant est de guider ou de former, son engagement lui permet en général de retirer fierté et satisfaction personnelle. Les engagements de Sébastien Didierjean et Laurent Michel (Professeur Associé, ISAE-SUPAERO) pendant mon stage de fin d'études en 2003 puis celui de mes directeurs de thèse Marc Sartor (Professeur des Universités, retraité INSA Toulouse) et Jacques Huet (Professeur retraité de l'ISAE-SUPAERO), sans oublier celui de Frédéric Lachaud depuis 2003, m'ont permis de mener ce début de carrière dans la recherche et l'enseignement.

## Références bibliographiques

- [Adams *et al.* 1973] Adams, R. D., Chambers S.H., Del Strother, P.H.A., Peppiatt, N.A., 1973. *Rubber model for adhesive lap joints*. The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 8(1), 52-57.  
doi : 10.1243/03093247V081052
- [Adams et Davies 2002] Adams, R. D., Davies, R.G.H., 2002. *Strength of lap shear joints*. In: The Mechanics of Adhesion. Editors: D. A. DILLARD and A. V. POCIUS, Elsevier, Amsterdam (NL), pp. 111-144.
- [Adams et Mallick 1992] Adams, R.D., Mallick, V., 1992. *A method for the stress analysis of lap joints*. The Journal of Adhesion, 38, 199-217.  
doi : 10.1080/00218469208030455
- [Adams et Mallick 1993] Adams, R.D., Mallick, V., 1993. *The effect of temperature on the strength of adhesively-bonded composite-aluminium joints*. The Journal of Adhesion, 43, 17-33.  
doi : 10.1080/00218469308026585
- [Adams et Peppiatt 1973] Adams, R.D., Peppiatt, N.A., 1974. *Effect of Poisson's ratio in adherends on stresses of an idealized lap joint*. Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 9(3), 134-139.  
doi : 10.1243/03093247V082134
- [Adams et Peppiatt 1974] Adams, R.D., Peppiatt, N.A., 1973. *Stress analysis of adhesive-bonded lap joints*. Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 8(2), 185-196.  
doi : 10.1243/03093247V093185
- [Akhavan-Safar *et al.* 2017] Akhavan-Safar, A., Ayatollahi, M.R., da Silva, L.F.M., 2017. *Strength prediction of adhesively single lap joints with different bondline thicknesses: A critical longitudinal strain approach*. International Journal of Solids and Structures, 109, 189-198.  
doi : 10.1016/j.ijsolstr.2017.01.022
- [Aktas et Dirikolu 2003] Aktas, A., Dirikolu, M. H., 2003. *The effect of stacking sequence of carbon epoxy composite laminates on pinned-joint strength*. Composite Structures, 62 (1), 107-111.  
doi : 10.1016/S0263-8223(03)00096-5
- [Alfano 2006] Alfano, G., 2006. *On the influence of the shape of the interface law on the application of cohesive-zone models*. Composite Science and Technology, 66, 723-730.  
doi : 10.1016/j.compscitech.2004.12.024
- [Alfano *et al.* 2015] Alfano, M., Lubineau, G., Paulino, G.H., 2015. *Global sensitivity analysis in the identification of cohesive models using full-field kinematic data*. International Journal of Solids and Structures, 55, 66-78.  
doi : 10.1016/j.ijsolstr.2014.06.006
- [Alfredsson 2003] Alfredsson, K.S., 2003. *On the determination of constitutive properties of adhesive layers loaded in shear – an inverse solution*. International Journal of Fracture, 123, 49-62.  
doi : 10.1023/B:FRAC.0000005794.80532.b9
- [Alfredsson 2004] Alfredsson, K.S., 2004. *On the instantaneous energy release rate of the end notched flexure adhesive joint specimen*. International Journal of Solids and Structures, 41, 4787-4807.  
doi : 10.1016/j.ijsolstr.2004.03.008
- [Alfredsson et Högberg 2008] Alfredsson, K.S., Högberg, J.L., 2008. *A closed-form solution to statically indeterminate adhesive joint problems—exemplified on ELS-specimens*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 28, 350-361.  
doi : 10.1016/j.ijadhadh.2007.10.002
- [Alkatan *et al.* 2007] Alkatan, F., Stéphan, P., Daidié, A., 2007. *Equivalent axial stiffness of various components in bolted joints subjected to axial loading*. Finite Elements in Analysis and Design, 43(8), 589-598.  
doi : 10.1016/j.finel.2006.12.013
- [Allman 1976] Allman, D.J., 1976. *A theory for elastic stresses in adhesive bonded lap joints*. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 30(4), 415-436.

doi : 10.1093/qjmam/30.4.415

[Amijima et Fujii 1987] Amijima, S., Fujii, T., 1987. *A microcomputer program for stress analysis of adhesive-bonded joints*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 7, 199-204.

doi : 10.1016/0143-7496(87)90023-6

[Andriamampianina et al. 2012] Andriamampianina, J., Alkatan, F., Stéphan, P., Guillot, J., 2012. *Determining load distribution between the different rows of fasteners of a hybrid load transfer bolted joint assembly*. Aerospace Science and Technology 23(1), 312-320.

doi : 10.1016/j.ast.2011.08.008

[Andersson et al. 2004] Andersson, T., Stigh, U., 2004. *The stress-elongation relation for an adhesive layer loaded in peel using equilibrium of energetic forces*. International Journal of Solids and Structures, 41, 413-434.

doi : 10.1016/j.ijsolstr.2003.09.039

[Andersson et Biel 2006] Andersson, T., Biel, A., 2006. *On the effective constitutive properties of thin adhesive layer loaded in peel*. International Journal of Fracture, 141(1), 227-246.

doi : 10.1007/s10704-006-0075-6

[Andruet et al. 2001] Andruet, R.H., Dillard, D.A., Holzer, S.M., 2001. *Two- and three-dimensional geometrical nonlinear finite elements for analysis of adhesive*. International Journal of Solids and Structures, 21(1), 17-34.

doi : 10.1016/S0143-7496(00)00024-5

[Arnovljevic 1909] Arnovljevic, I., 1909. *Das Verteilungsgesetz der Tiefspannungen in axial beanspruchten Verbundstaben*. Z.F. Archund-Ing-Wesen, 55, 415-418.

[ASTM D5528] ASTM D5528, 2001. *Standard Test Method for Mode I Interlaminar Fracture Toughness of Unidirectional Fiber-Reinforced Polymer Matrix Composites*.

[Askri et al. 2016] Askri, R., Bois, C., Wargnier, H., 2016. *Effect of hole-location error on the strength of fastened multi-material joints*. Procedia CIRP, 43, 292-296.

doi : 10.1016/j.procir.2016.02.040

[Askri et al. 2018] Askri, R., Bois, C., Wargnier, H., Gayton, N., 2018. *Tolerance synthesis of fastened metal-composite joints based on probabilistic and worst-case approaches*. Computer-Aided Design, 100, 39-51.

doi : 10.1016/j.cad.2018.02.008

[Aufroy et Roche 2005] Aufroy, M., Roche, A.A., 2005. *Properties of the interphase epoxy-amine/metal: Influences from the nature of the amine and the metal*. In the book: Adhesion – Current Research and Application, Ed. POSSART W., WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim (DEU), ISBN: 9783527312634, Chap. 7, 89-101.

doi : 10.1002/3527607307.ch7

[Austrell 1997] Austrell, P.E., 1997. *Modeling of elasticity and damping for filled elastomers*. Report TVSM-1009, Lund University (SW).

[Banea et al. 2017] Banea, M.D., da Silva, L.F.M., Carbas, R.J.C., de Barros, S., 2017. *Debonding on command of multi-material adhesive joints*. The Journal of Adhesion, 93(10), 756-770.

doi : 10.1080/00218464.2016.1199963

[Barut et Madenci 2009] Barut, A., Madenci, E., 2008. *Analysis of bolted-bonded composite single-lap joints under combined in-plane and transverse loading*. Composite Structures, 88(4), 579-594.

doi : 10.1016/j.compstruct.2008.06.003

[Belnoue et al. 2016] Belnoue, J.P.H., Giannis, S., Dawson, M., Hallet, S.R., 2016. *Cohesive/adhesive failure interaction in ductile adhesive joints Part II: Quasi-static and fatigue analysis of double lap-joint specimens subjected to through thickness compressive loading*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 68, 369-378.

doi : 10.1016/j.ijadhadh.2016.03.010

[Belnoue et Hallett 2016] Belnoue, J.P.H., Hallet, S.R., 2016. *Cohesive/adhesive failure interaction in ductile adhesive joints Part I: A smeared-crack model for cohesive failure*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 68, 359-368.

doi : 10.1016/j.ijadhadh.2016.03.009

[Bérot 2009] Bérot, M., 2009. *Modélisation simplifiée d'assemblages par éléments équivalents*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris (FR).

[Benitez-Martin 2020] Benitez-Martin, A., 2020. *Développement de modélisations par EF d'assemblages collés sous chargement statique et vibratoire*. ISAE-SUPAERO, Mémoire de stage M1, Ingénieur ISAE-SUPAERO, Toulouse (FR).

[Benhaddou 2015] Benhaddou, T., 2015. *Etude du comportement en statique et fatigue d'assemblages boulonnés précontraints en double et simple cisaillement*. PhD Dissertation, Université de Toulouse III (FR).

[Bigwood et Crocombe 1989] Bigwood, D.A., Crocombe, A.D., 1989. *Elastic analysis and engineering design formulae for bonded joint*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 9(4), 229-242.

doi : 10.1016/0143-7496(89)90066-3

[Bigwood et Crocombe 1990] Bigwood, D.A., Crocombe, A.D., 1990. *Non-linear analysis adhesive bonded joint design analysis*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 10(1), 31-41.

doi : 10.1016/0143-7496(90)90025-S

[Birro et al. 2020][53] Birro, T., Paroissien, E., Aufray, M., Lachaud, F., 2020. *A methodology based on the coupled criterion for the assessment of adhesive-to-adherend interface crack initiation*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 102, 102664.

doi : 10.1016/j.ijadhadh.2020.102664

[Blaysat et al. 2015] Blaysat, B., Hoefnagels, J.P., Lubineau, G., Alfano, M., Geers, M.G., 2015. *Interface debonding characterization by image correlation integrated with double cantilever beam kinematics*. International Journal of Solids and Structures, 55, 79-91.

doi : 10.1016/j.ijsolstr.2014.06.012

[Bloem 2007] Bloem, J., 2007. *Developments in hole-to-hole assembly*. SAE Transactions, 116, Section 1: Journal of Aerospace, 1087-1097.

<https://www.jstor.org/stable/44719545>

[Bodjona et al. 2015] Bodjona, K., Raju, K., Lim, G.H., and Lessard, L., 2015. *Load sharing in single-lap bonded/bolted composite joints. Part I: Model development and validation*. Composite Structures, 129, 268-275.

doi : 10.1016/j.compstruct.2015.04.040

[Bois et al. 2013] Bois, C., Wargnier, H., Wahl, J.C., Le Goff, E., 2013. *An analytical model for the strength prediction of hybrid (bolted/bonded) composite joints*. Composite Structures, 97, 252-260.

doi : 10.1016/j.compstruct.2012.10.022

[Boucard 2011] Boucard, P.A., 2011. *Résistance des matériaux*. Cours de dimensionnement des structures, IUT Cachan, Génie Mécanique et Productique, Première année.

[Bouchet et al. 2001] Bouchet, J., Roche A.A., Jacquelin, E., 2001. *The role of the polymer/metal interphase and its residual stresses in the critical strain energy release rate ( $G_c$ ) determined using a three-point flexure test*. Journal of Adhesion Science and Technology, 15(3), 345-369.

doi : 10.1163/156856101750196784

[Breto et al. 2015] Breto, R., Chiminelli, A., Duvivier, E., Lizaranzu, M., Jiménez, M.A., 2015. *Finite Element Analysis of Functionally Graded Bond-Lines for Metal/Composite Joints*. The Journal of Adhesion, 91, 920-936.

doi : 10.1080/00218464.2014.976335

[Cabello et al. 2016a] Cabello, M., Zurbitu, J., Renart, J., Turon, A., Martinez, F., 2016. *A non-linear hyperelastic foundation beam theory model for double cantilever beam tests with thick flexible adhesive*. International Journal of Solids and Structures, 80, 19-27.

doi : 10.1016/j.ijsolstr.2015.10.017

- [Cabello *et al.* 2016b] Cabello, M., Zurbitu, J., Renart, J., Turon, A., Martinez, F., 2016. *A general analytical model based on elastic foundation beam theory for adhesively bonded DCB joints either with flexible or rigid adhesives*. International Journal of Solids and Structures, 94-95, 21-34.  
doi: 10.1016/j.ijsolstr.2016.05.011
- [Cabello *et al.* 2017] Cabello, M., Turon, A., Zurbitu, J., Renart, J., Sarrado, C., Martinez, F., 2017 *Progressive failure analysis of DCB bonded joints using a new elastic coupled with a cohesive damage model*. European Journal of Mechanics A/Solids, 63, 22-35.  
doi: 10.1016/j.euromechsol.2016.12.004
- [Campilho *et al.* 2015] Campilho, R.D.S.G, Moura, D.C., Banea, M.D., da Silva, L.F.M., 2015. *Adhesive thickness effects of a ductile adhesive by optical measurement techniques*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 57, 125-132.  
doi : 10.1016/j.ijadhadh.2014.12.004
- [Carbas *et al.* 2014] Carbas, R.J.C., da Silva, L.F.M., Madureira, M.L., Critchlow, G.W., 2014. *Modelling of functionally graded adhesive joints*. The Journal of Adhesion, 90(8), 698-716.  
doi : 10.1080/00218464.2013.834255
- [Carpenter 1973] Carpenter, W.C., 1973. *Finite element analysis of bonded connections*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 6(3), 450-451.  
doi : 10.1002/nme.1620060318
- [Carpenter et Barsoum 1989] Carpenter, W.C, Barsoum, R., 1989. *Two finite elements for modeling the adhesive in bonded configurations*. The Journal of Adhesion, 30, pp. 25-46.  
doi : 10.1080/00218468908048192
- [Carpenter 1991] Carpenter, W.C, 1980. *A comparison of numerous lap joint theories for adhesively bonded joints*. The Journal of Adhesion, 35(1), 55-73.  
doi : 10.1080/00218469108030435
- [Carrère *et al.* 2015] Carrère, N., Martin, E., Leguillon, D., 2015. *Comparison between models based on a coupled criterion for the prediction of the failure of adhesively bonded joints*. Engineering Fracture Mechanics 2015, 138,185-201.  
doi : 10.1016/j.engfracmech.2015.03.004
- [CERTBOND 2019] CERTBOND, COST Action, CA18120, <https://certbond.eu/about/background/>
- [Cervera et Chiumenti 2006] Cervera, M., Chiumenti, M., 2006. *Smearred crack approach: back to the original track*. International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 30(12), 1173-1199.  
doi : 10.1002/nag.518
- [Chen et Cheng 1982] Chen, D., Cheng, S., 1982. *An analysis of adhesive-bonded single-lap joints*. Journal of Applied Mechanics, 50, 109-115.  
doi : 10.1115/1.3166976
- [Chieragatti *et al.* 2004][9] Chieragatti, R., Paroissien, E., Huet, J., 2004. *Faisabilité d'assemblages mixtes boulonnés-collés en aéronautique*. CETIM, 21 September 2004, Saint-Étienne (FR).
- [Chen et Nelson 1979] Chen, W.T., Nelson, C.W., 1979. *Thermal stress in bonded joints*. IBM Journal of Research and Development, 23(2), 179-188.  
doi : 10.1147/rd.232.0179
- [Chen et Qiao 2012] Chen, F., Qiao, P., 2012. *On the intralaminar and interlaminar stress analysis of adhesive joints in plated beams*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 36, 44-55.  
doi : 10.1016/j.ijadhadh.2012.03.005
- [Cheng *et al.* 1991] Cheng, S., Chen, D., Shi, Y., 1991. *Analysis of adhesive-bonded joints with nonidentical adherends*. Journal of Engineering Mechanics, 117(3), 605-623.  
doi : 10.1061/(ASCE)0733-9399(1991)117:3(605)
- [Choi *et al.* 2017] Choi, J.I., Hasheminia, S.M., Chun, H.J., and Park, J.C., 2017. *Experimental study on failure mechanism of hybrid composite joints with different adhesives*. Fibers and Polymers, 18, 569-574.

doi : 10.1007/s12221-017-1148-z

[Cognard *et al.* 2005] Cognard, J.Y., Davies, P., Gineste, B., Sohier, L. 2005. *Development of an improved adhesive test method for composite assembly design*. Composite Science and Technology, 65(3-4), 359-368.

doi: 10.1016/j.compscitech.2004.09.008

[Cognard *et al.* 2010] Cognard, J.Y., Créac'hcadec, R., Sohier, L., Leguillon, D., 2010. *Influence of adhesive thickness on the behaviour of bonded assemblies under shear loadings using a modified TAST fixture*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 30, 257-266.

doi: 10.1016/j.ijadhadh.2009.11.003

[Collings 1977] Collings, T., 1977. *The strength of bolted joints in multi directional CFRP laminates*. Composites, 8(1), 43-55.

doi : 10.1016/0010-4361(77)90027-1

[Cope et Lacy 2000] Cope, D.A., Lacy, T.E., 2000. *Stress intensity determination in lap joints with mechanical fasteners*. Proceedings of 41st AIAA / ASME / ASCE / AHS / ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials conference, AIAA-2000-1368, 3-6 April 2000, Atlanta (GA).

doi: 10.2514/6.2000-1368

[Cornetti *et al.* 2012] Cornetti, P., Mantič, P., Carpinteri, A., 2012. *Finite Fracture Mechanics at elastic interfaces*. International Journal of Solids and Structures, 49, 1022-1032.

doi : 10.1016/j.ijsolstr.2012.01.002

[Cui *et al.* 2019] Cui, H.R., Li, H.Y., Shen, Z.B., 2019. *Cohesive zone model for mode-I fracture with viscoelastic-sensitivity*. Engineering Fracture Mechanics, 221, 106578.

doi : 10.1016/j.engfracmech.2019.106578

[Créac'hcadec *et al.* 2013] Créac'hcadec, R., Jamin, G., Cognard, J.Y., Jousset, P., 2013. *Experimental analysis of the mechanical behaviour of a thick flexible adhesive under tensile/compression-shear loads*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 48, 258-267.

doi : 10.1016/j.ijadhadh.2013.09.040

[da Silva *et al.* 2006a] da Silva, L.F.M., Rodrigues, T.N.S.S., Figueiredo, M.A.V., de Moura, M.F.S.F., Chousal, J.A.G., 2006. *Effect of adhesive type and thickness on the lap shear strength*. The Journal of Adhesion, 82, 1091-1115.

doi : 10.1080/00218460600948511

[da Silva *et al.* 2006b] da Silva, L.F.M., Ramos, J.E., Figueiredo, M.A.V., Strohaecker, T.R., 2006. *Influence of the adhesive, the adherend and the overlap on the lap shear strength*. Journal of Adhesion and Interface, 7(4), 1-9.

[da Silva *et al.* 2009a] da Silva, L.F.M., das Neves, P.J.C., Adams, R.D., Spelt, J.K., 2009. *Analytical models of adhesively bonded joints—Part I: Literature survey*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 29, 319-330.

doi : 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005

[da Silva *et al.* 2009b] da Silva, L.F.M., das Neves, P.J.C., Adams, R.D., Spelt, J.K., 2009. *Analytical models of adhesively bonded joints—Part II: Comparative study*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 29, 331-341.

doi : 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.007

[da Silva et Lopes 2009] da Silva, L.F.M., Lopes, M.J.C.Q., 2009. *Joint strength optimization by the mixed-adhesive technique*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 29(5), 509-514.

doi : 10.1016/j.ijadhadh.2008.09.009

[da Silva et Campilho 2012] da Silva, L.F.M., Campilho, R.D.S.G., 2012. *Advances in numerical modeling of adhesive joints*. Springer Briefs in Applied Science and Technology, Computational Mechanics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (DE).

doi : 10.1007/978-3-642-23608-2

[da Silva *et al.* 2018] da Silva, LFM, Öschner, A, Adams, RD (Editors), 2018. *Handbook of Adhesion Technology* (2 volumes), 2nd edition Springer, Heidelberg (DE).

- [Da Veiga 2009] Da Veiga, A., 2009. *Simulation simplifiée de jonctions collées avec un adhésif non-linéaire sous chargement cyclique. Plasticité et endommagement en mode mixte*. SOGETI High Tech, Mémoire de stage de fin d'études, Ingénieur ENSEIRB-MATMECA, Toulouse (FR).
- [de Bruyne 1944] de Bruyne, N., 1944. *The strength of glued joints*. Aircraft Engineering and Aerospace Technology, 16(4), 115-118.  
doi : 10.1108/eb031117
- [Delale *et al.* 1981] Delale F., Edogan F., Aydinoglu, M.N., 1981. *Stresses in adhesively bonded joints: A closed-form solution*. Journal of Composite Materials, 15(3), 249-271.  
doi : 10.1177/002199838101500305
- [Delale *et Erdogan* 1981] Delale F., Edogan F., 1981. *Viscoelastic analysis of bonded joints*. Journal of Applied Mechanics, 48(2), 331-338.  
doi : 10.1115/1.3157618
- [Deléglise 2012] Deléglise, J., 2012. *Simulation simplifiée de jonctions collées sous la forme de différents recouvrements*. SOGETI High Tech, Mémoire de stage de fin d'études, Ingénieur ENSEIRB-MATMECA, Toulouse (FR).
- [Demarkles 1955] Demarkles, L.R., 1953. *Investigation of the use of a rubber analog in the study of stress distribution in riveted and cemented joints*. NACA, TN-3413, 1955, Washington (DC).
- [de Moura *et al.* 2009] de Moura, M.F.S.F., Campilho R.D.S.G., Goncalves, J.P.M., 2009. *Mixed-mode cohesive damage model applied to the simulation of the mechanical behavior of laminated composite adhesive joints*. Journal of Adhesion Science and Technology. 23(10-11), 1477-1491.  
doi : 10.1163/156856109X433036
- [de Moura *et al.* 2016] de Moura, M.F.S.F., Gonçalves, J.P.M., Silva, F.G.A., 2016. *A new energy based mixed-mode cohesive zone model*. International Journal of Solids and Structures, 102-103, 112-119.  
doi : 10.1016/j.ijsolstr.2016.10.012
- [Dechwayukul *et al.* 2000] Dechwayukul, C., Rubin, C.A., Hahn, G.T., 2000. *Analysis of the effects of thin sealant layers in aircraft structural joints*. AIAA Journal, 41(11), 2216-2228.  
doi : 10.2514/2.6814
- [Du *et al.* 2019] Du, Y., Liu, Y., Zhou, F., 2019. *An improved four-parameter model on stress analysis of adhesive layer in plated beam*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 91, 1-11.  
doi : 10.1016/j.ijadhadh.2019.02.005
- [Dufour *et al.* 2016] Dufour L., Bourel, B., Lauro, F., Haugou, G. Leconte, N., 2016. *A viscoelastic-viscoplastic model with non associative plasticity for the modelling of bonded joints at high strain rates*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 70, 304-314.  
doi : 10.1016/j.ijadhadh.2016.07.015
- [Durodola 2017] Durodola, J.F., 2017. *Functionally graded adhesive joints – A review and prospects*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 76, 83-89.  
doi : 10.1016/j.ijadhadh.2017.02.008
- [Egan *et al.* 2012] Egan, B., McCarthy, C.T., McCarthy, M.A., Frizzel, R.M., 2012. *Stress analysis of single-bolt, single-lap, countersunk composite joints with variable bolt-hole clearance*. Composite Structures, 94(3), 1038-1051.  
doi : 10.1016/j.compstruct.2011.10.004
- [Erdogan *et Ratwani* 1971] Erdogan, F., Ratwani, M., 1971. *Stress distribution in bonded joints*. Journal of Composite Materials, 5, 378-393.  
doi : 10.1177/002199837100500308
- [Foster 2014] Foster, B., 2014. *A novel finite element for modeling a fastener in a lap joint assembly*. Thèse de doctorat, Wichita State University (KS).
- [Fraisse *et Schmit*, 1993] Fraisse, P., Schmit, F., 1993. *Use of J-integral as fracture parameter in simplified analysis of bonded joints*. International Journal of Fracture, 63, 59-73.

doi : 10.1007/BF00053316

[Frostig *et al.* 1999] Frostig, Y., Thomsen, O.T., Mortense, F., 1999. *Analysis of adhesive-bonded joints, square-end, and spew-fillet – High order theory approach*. Journal of Engineering Mechanics, 125(11), 1298-1307.

doi : 10.1061/(ASCE)0733-9399(1999)125:11(1298)

[Gavoille 2014] Gavoille, C., 2014. *Modélisation simplifiée de jonctions collées : prise en compte du couplage endommagement et plasticité. Plasticité et endommagement en mode mixte*. SOGETI High Tech, Mémoire de stage de fin d'études, Ingénieur ENSEIRB-MATMECA, Toulouse (FR).

[Gilibert et Rigolot 1979] Gilibert, Y., Rigolot, A., 1979. *Analyse asymptotique des assemblages collés à double recouvrement, sollicités au cisaillement, en traction*. Journal de Mécanique Appliquée, 3(3), 341-372

[Gilibert et Rigolot 1985] Gilibert, Y., Rigolot, A., 1985. *Théorie élastique de l'assemblage collé à double recouvrement: utilisation de la méthode des développements asymptotiques raccordés au voisinage des extrémités*. Matériaux et Constructions, 5(18), 363-387.

doi : 10.1007/bf02472407

[Gohorianu 2008] Gohorianu, G., 2008. *Interaction entre les défauts d'usinage et la tenue en matage des assemblages boulonnés en carbone/epoxy*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse III (FR).

[Goland and Reissner 1944] Goland, M., Reissner, E., 1944. *The stresses in cemented joints*. Journal of Applied Mechanics, 11, A17-A27.

[Goustianos and Sørensen 2012] Goustianos, S., Sørensen, B.F., 2012. *Path dependence of truss-like mixed mode cohesive laws*. Engineering Fracture Mechanics, 91, 117-132.

doi : 10.1016/j.engfracmech.2012.02.011

[Groth 1986] Groth, H.L., 1986. *Calculation of stresses in bonded joints using the substructuring technique*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 6(1), 31-35.

doi : 10.1016/0143-7496(86)90069-2

[Gustafson et Waas 2007] Gustafson, P., Waas, A., 2007. *A macroscopic finite element for a symmetric double lap joint subjected to mechanical and thermal loading*. 16<sup>th</sup> International Conference on Composite Materials (ICCM-16), 8-13 July 2007, Kyoto (JP).

[Gustafson 2008] Gustafson, P., 2008. *Analytical and experimental methods for adhesively bonded joints subjected to high temperatures*. PhD Dissertation, University of Michigan (IL).

[Gustafson et Waas 2009a] Gustafson, P., Bizard, A., Waas, A., 2006. *A bonded joint finite element for a symmetric double lap joint subjected to mechanical and thermal loads*. Numerical Methods in Engineering, 79(1), 94-126.

doi : 10.1002/nme.2561

[Gustafson et Waas 2009b] Gustafson, P.A., Waas, A.M., 2009. *The influence of adhesive constitutive parameters in cohesive zone finite element models of adhesively bonded joints*. International Journal of Solids and Structures, 46(10), 2201-2215.

doi : 10.1016/j.ijsolstr.2008.11.016

[Hart-Smith 1973a] Hart-Smith, L.J., 1973. *Adhesive-bonded single-lap joints*. NASA Contractor Report, CR-112236, Douglas Aircraft Company, Long Beach (CA).

[Hart-Smith 1973b] Hart-Smith, L.J., 1973. *Adhesive-bonded double-lap joints*. NASA Contractor Report, CR-112235, Douglas Aircraft Company, Long Beach (CA).

[Hart-Smith 1973c] Hart-Smith, L.J., 1973. *Adhesive-bonded scarf and stepped-lap joints*. NASA Contractor Report, CR-112235, Douglas Aircraft Company, Long Beach (CA).

[Hart-Smith 1976] Hart-Smith, L.J., 1976. *Bolted joints in graphite-epoxy composites*. NASA Contractor Report, CR-144899, Douglas Aircraft Company, Long Beach (CA).

[Hart-Smith 1980] Hart-Smith, L.J., 1980. *Mechanically-fastened joints for advanced composites. Phenomenological considerations and simple analyses*. In: Lenoe E.M., Oplinger D.W., Burke J.J. (eds) Fibrous Composites in Structural Design. Springer, Boston (MA), 543-574.

doi : 10.1007/978-1-4684-1033-4\_32

- [Hart-Smith 1985] Hart-Smith, L.J., 1985. *Bonded-bolted composite joints*. Journal of Aircraft, 22(11), 993-1000.  
doi: 10.2514/3.45237
- [Hartman 1966] Hartman, A., 1966. *Fatigue tests on single-lap joints in clad 2024-T3 aluminium alloy manufactured by a combination of riveting and adhesive bonding*. NLR TN M2170, 1966, Amsterdam (NL).
- [Hasegawa et al. 2015a] Hasegawa, K., Crocombe, A.D., Coppuck, F., Jewel, D. Maher, S., 2015. *Characterising bonded joints with a thick and flexible adhesive layer-Part1: Fracture testing and behaviour*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 63, 124-131.  
doi: 10.1016/j.ijadhadh.2015.09.003
- [Hasegawa et al. 2015b] Hasegawa, K., Crocombe, A.D., Coppuck, F., Jewel, D. Maher, S., 2015. *Characterising bonded joints with a thick and flexible adhesive layer-Part2: Modelling and prediction of structural joint responses*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 63, 158-165.  
doi: 10.1016/j.ijadhadh.2015.09.004
- [Hashin 1980] Hashin, Z., 1980. *Failure criteria for unidirectional fiber composites*. Journal of Applied Mechanics, 47(2), 329-334.  
doi : 10.1115/1.3153664
- [He 2011] He, X., 2011. *A review of finite element analysis of adhesively bonded joints*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 31, 248-264.  
doi: 10.1016/j.ijadhadh.2011.01.006
- [Higgins 2000] Higgins, A., 2000. *Adhesive bonding of aircraft structures*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 20, 367-376.  
doi: 10.1016/S0143-7496(00)00006-3
- [Hoang-Ngoc 2008] Hoang-Ngoc, C.T., 2008. *Modélisation par la méthode des éléments finis d'assemblages collés à l'aide d'adhésifs flexibles*. SOGETI High Tech, Mémoire de stage de fin d'études, Ingénieur ENSMA, Toulouse (FR).
- [Hoang-Ngoc et Paroissen 2010][15] Hoang-Ngoc, C.T., Paroissien, E., 2010. *Simulation of single-lap bonded and hybrid (bolted/bonded) joints with flexible adhesive*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 30 (3), 117-129.
- [Högberg 2004] Högberg, J.L., 2004. *Mechanical behaviour of single-layer adhesive joints*. Chalmers University of Technology, Thesis for the degree of licentiate of engineering, Göteborg, (SW).
- [Högberg et Stigh 2006] Högberg, J.L., Stigh, U., 2006. *Specimen proposals for mixed-mode testing of adhesive layer*. Engineering Fracture Mechanics, 73, 2541-2556.  
doi : 10.1016/j.engfracmech.2006.04.017
- [Högberg et al. 2007] Högberg, J.L., Sørensen B.F., Stigh, U., 2007. *Constitutive behavior of mixed-mode loaded adhesive layer*. International Journal of Solids and Structures, 44, 8335-8354.  
doi : 10.1016/j.ijsolstr.2007.06.014
- [Hubald 2014] Hubald, M., 2014. *Spécification d'un module de calcul simplifié du comportement de joints collés pour son implémentation en C*. SOGETI High Tech, Mémoire de stage de fin d'études, M2 Université Paul Sabatier, Toulouse (FR).
- [Huth 1986] Huth, H., 1986. *Influence of Fastener flexibility on the prediction of load transfer and fatigue life for multiple row joints*. Fatigue in mechanically fastened composite and metallic joints, ASTM STP 927, John M. Potter, Ed., Philadelphia, PA, pp. 221-250.
- [Jaillon et al. 2020a][45] Jaillon, A., Jumel, J., Paroissien, E., Lachaud, F., 2020. *Mode I cohesive zone model parameters identification and comparison of measurement techniques for robustness to the law shape evaluation*. The Journal of Adhesion, 96 (1-4), 272-299.  
doi: 10.1080/00218464.2019.1669450

- [Jaillon 2020] Jaillon, A., 2020. *Étude expérimentale et numérique du comportement à rupture des assemblages collés à épaisseur de couche adhésive variable*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse III (FR).
- [Jaillon et al. 2020b][50] Jaillon, A., Jumel, J., Lachaud, F., Paroissien, E., 2020. *Mode I cohesive zone model parameters identification and comparison of measurement techniques based on uncertainty estimation*. International Journal of Solids and Structures, 191-192, 577-587.  
doi: 10.1016/j.ijsolstr.2019.12.014
- [Jiang et Qiao 2015] Jiang, W., Qiao, P., 2015. *An improved four-parameter model with consideration of Poisson's effect on stress analysis of adhesive joints*. Engineering Structures, 88, 203-215.  
doi: 10.1016/j.engstruct.2015.01.027
- [Jumel et al. 2011] Jumel, J., Budzik, M.K., Shanahan, M.E., 2011. *Beam on elastic foundation with anti-clastic curvature: application to analysis of mode I fracture tests*. Engineering Fracture Mechanics, 78(18), 3253-3269.  
doi: 10.1016/j.engfracmech.2011.09.014
- [Jumel et al. 2013] Jumel, J., Budzik, M., Salem, N. B., Shanahan, M., 2013. Instrumented end notched flexure-crack propagation and process zone monitoring. Part I : Modelling and analysis. International Journal of Solids and Structures, 50(2), 297-309.  
doi : 10.1016/j.ijsolstr.2012.08.030
- [Jumel et al. 2015] Jumel, J., Salem, N.B., Budzik, M.K., Shanahan, M.E., 2015. *Measurement of interface cohesive stresses and strains evolutions with combined mixed mode crack propagation test and backface strain monitoring measurements*. International Journal of Solids and Structures, 52, 33-44.  
doi : 10.1016/j.ijsolstr.2014.09.004
- [Kafkalidis et al. 2000] Kafkalidis, M., Thouless, M. D., Yang, Q., Ward, S., 2000. *Deformation and fracture of adhesive layers constrained by plastically deforming adherends*. Journal of Adhesion Science and Technology, 14(13), 1593-1607.  
doi : 10.1163/156856100742401
- [Kalnins 1964] Kalnins, A., 1964. *Analysis of shell of revolutions subjected to symmetrical and non-symmetrical loads*. Journal of Applied Mechanics, 31, 1355-1365.  
doi : 10.1121/1.1919208
- [Kawasaki et al. 2016] Kawasaki, S., Nakajima, G., Haraga, K., Sato, C., 2016. *Functionally Graded Adhesive Joints Bonded by Honeymoon Adhesion Using Two Types of Second Generation Acrylic Adhesives of Two Components*. The Journal of Adhesion, 92(7-9), 517-534.  
doi : 10.1080/00218464.2015.1113525
- [Kelly 2006] Kelly, G., 2006. *Quasi-static strength and fatigue life of hybrid (bonded/bolted) composite single-lap joints*. Composite Structures, 72, 119-129.  
doi: 10.1016/j.compstruct.2004.11.002
- [Khoramishad et al. 2010] Khoramishad, H., Crocombe, A.D., Katnam, K.B., Ashcroft, I.A., 2010. *A generalized damage model for constant amplitude fatigue loading of adhesively bonded joints*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 30, 513-521.  
doi : 10.1016/j.ijadhadh.2010.05.003
- [Khoramishad et al. 2011] Khoramishad, H., Crocombe, A.D., Katnam, K.B., Ashcroft, I.A., 2011. Fatigue damage modeling of adhesively bonded joints under variable amplitude loading using cohesive zone model. Engineering Fracture Mechanics, 78, 3212-3225.  
doi : 10.1016/j.engfracmech.2011.09.008
- [Kim et al. 2007] Kim, J., Yoon, J.C., Kang, B.S., 2007. Finite element analysis and modeling of structure with bolted joints. Applied Mathematical Modelling, 31(5), 895-911.  
doi : 10.1016/j.apm.2006.03.020

[Ko 1988] Ko, W.L., 1988. *Delamination stresses in semicircular laminated composite bars*. NASA, Technical Memorandum, TM 4026, Edwards (CA).

[Ko et Jackson 1989] Ko, W.L., Jackson, R.H., 1989. *Multilayer theory for delamination analysis of a composite curved bar subjected to end forces and end moments*. NASA, Technical Memorandum, TM 4139, Edwards (CA).

[Kweon et al. 2006] Kweon, J.K., Jung, J.W., Kim, T.H., Choi, J.H., and Kim, D.H., 2006. *Failure of carbon composite-to-aluminium joints with combined fastening and adhesive bonding*. *Composite Structures*, 75, 192-198.

doi: 10.1016/j.compstruct.2006.04.013

[Lachaud 2011] Lachaud, F., 2011. *Contribution à l'analyse multi échelle du comportement mécanique non linéaire matériau des structures composites*. Mémoire d'HDR, Université de Toulouse III (FR).

[Lachaud et al. 2020] Lachaud, F., Paroissien, E., Michel, L., 2020. *Validation of a simplified analysis for the simulation of delamination of CFRP composite laminated materials under pure mode I*. *Composite Structures*, 237, 111897

doi: 10.1016/j.compstruct.2020.111897

[Lecomte et al. 2014] Lecomte, J., Bois, C., Wagnier, H., Wahl, J.C., 2014. *An analytical model for the prediction of load distribution in multi-bolt composite joints including hole-location errors*. *Composite Structures*, 117, 354-361.

doi : 10.1016/j.compstruct.2014.06.040

[Lee et al. 2004] Lee, D.B., Ikeda, T., Miyazaki, N., Choi, N.S., 2004. *Effect of bond thickness on the fracture toughness of adhesive joints*. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 126(1), 14-18.

doi : 10.1115/1.1631433

[Leffer et al. 2006] Leffler, K., Alfredsson, K.S., Stigh, U., 2006. *Shear behavior of adhesive layers*. *International Journal of Solids and Structures*, 44, 530-545.

doi : 10.1016/j.ijsolstr.2006.04.036

[Leguillon 2002] Leguillon, D., 2002. *Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch*. *European Journal of Mechanics A-Solid*, 21, 61-72.

doi : 10.1016/S0997-7538(01)01184-6

[Lélias 2012] Lélias, G., 2012. *Étude du comportement en fatigue multi-axiale de jonctions boulonnées. Prise en compte de l'influence du gradient*. SOGETI High Tech, Mémoire de stage de fin d'études, Ingénieur ENSMA, Toulouse (FR).

[Lélias et al. 2015][19] Lélias, G., Paroissien, E., Lachaud, F., Morlier, J., Schwartz, S., Gavaille, C., 2015. *An extended semi-analytical formulation for fast and reliable stress analysis of adhesively bonded joints*. *International Journal of Solids and Structures*, 62, 18-39.

doi : 10.1016/j.ijsolstr.2014.12.027

[Lélias 2016] Lélias, G., 2016. *Adhesively bonded joints: Modeling, simulation and experimental characterization*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse III (FR).

[Lélias et al. 2019][30] Lélias, G., Paroissien, E., Lachaud, F., Morlier, J., 2019. *Experimental characterization of cohesive zone models for thin adhesive layers loaded in mode I, mode II, and mixed-mode I/II by the use of a direct method*. *International Journal of Solids and Structures*, 158, 90-115.

doi : 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.005

[Leroy 2011] Leroy, M., 2011. *Expérimentation et modélisation du comportement mécanique de structures marines collées et aéronautiques collées-boulonnées*. Thèse de doctorat, Mines ParisTech (FR).

[Li et al. 2006] Li, S., Thouless, M.D., Waas, A.M., Schroeder, J.A., Zavattieri, P.D., 2006. *Mixed-mode cohesive zone models for fracture of an adhesively bonded polymer matrix composite*. *Engineering Fracture Mechanics*, 73, 64-78.

doi : 10.1016/j.engfracmech.2005.07.004

- [Li *et al.* 2018] Li, W., Ghafoori, E., Lu, Y., Li S., Motavalli, M., 2018. *Analytical solution for stiffness prediction of bonded CFRP-to-steel double strap joints*. Engineering Structures, 177, 190-197.  
doi : 10.1016/j.engstruct.2018.09.024
- [Li et Chandra 2003] Li, H., Chandra, N., 2003. Analysis of crack growth and crack-tip plasticity in ductile materials using cohesive zone models. International Journal of Plasticity, 19, 849-882.  
doi : 10.1016/S0749-6419(02)00008-6
- [Liljedahl *et al.* 2007] Liljedahl, C., Crocombe, A., Wahab, M., Ashcroft, I., 2007. *Modelling the environmental degradation of adhesively bonded aluminium and composite joints using a CZM approach*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 27(6), 505-518.  
doi : 10.1016/j.ijadhadh.2006.09.015
- [Lim *et al.* 2018] Lim, G.H., Bodjona, K., Raju, K., Romanov, V., Fielding, S. and Lessard, L., 2018. *Evolution of mechanical properties of flexible epoxy adhesives under cyclic loading and its effects on composite hybrid bolted/bonded joint design*. Composite Structures, 189, 54-60.  
doi : 10.1016/j.compstruct.2018.01.049
- [Liu *et al.* 2014] Liu, X., Huang, Y., Yin, Z., Bennati, S., Valvo, P.S., 2014. *A general solution for the two-dimensional stress analysis of balanced and unbalanced adhesively bonded joints*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 54, 112-123.  
doi : 10.1016/j.ijadhadh.2014.05.011
- [Liu *et al.* 2015] Liu, F.R., Zhang J.Y., Zhao L.B., Xin A., Zhou L.W., 2015. *An analytical joint stiffness model for load transfer analysis in highly torqued multi-bolt composite joints with clearances*. Composite Structures, 131, 625-636.  
doi : 10.1016/j.compstruct.2015.06.003
- [Liu *et al.* 2018] Liu, F., Shan, M., Zhai, L., Zhang, J., 2018. *Probabilistic bolt load distribution analysis of composite single-lap multibolt joints considering random bolt-hole clearances and tightening torques*. Composite Structures, 194, 12-20.  
doi : 10.1016/j.compstruct.2018.03.100
- [Luo et Tong 2007] Luo, Q, Tong, L, 2007. *Fully-coupled nonlinear analysis of single lap adhesive joints*. International Journal of Solids and Structure, 44, 2349-2370.  
doi: 10.1016/j.ijsolstr.2006.07.009
- [McCarthy *et al.* 2006] McCarthy, M.A., McCarthy, C.T., Padhi, G.S., 2006. *A simple method for determining the effects of bolt-hole clearance on load distribution in single-column multi-bolt composite joints*. Composite Structures, 73, 78-87.  
doi : 10.1016/j.compstruct.2005.01.028
- [McCarthy et Gray 2011] McCarthy CT, Gray PJ. *An analytical model for the prediction of load distribution in highly torqued multi-bolt composite joints*. Composite Structures, 93, 287-98.  
doi : 10.1016/j.compstruct.2010.09.017
- [Machado *et al.* 2018] Machado, J., Marques, E., da Silva, L.F.M., 2018. *Influence of low and high temperature on mixed adhesive joints under quasi-static and impact conditions*. Composite Structures, 194, 68-79.  
doi : 10.1016/j.compstruct.2018.03.093
- [MACS 2014] Feuille de route nationale. Vers la maîtrise des Assemblages Collés Structuraux. Aerospace Valley, Astech, Pégase, EMC2 (2014).
- [Manterola *et al.* 2019] Manterola, J., Cabello, M., Zurbitu, J., Renart, J., Turon, A., Jumel, J., Urresti, J., 2019. *Effect of the width-to-thickness ratio on the mode I fracture toughness of flexible bonded joints*. Engineering Fracture Mechanics, 106584.  
doi : 10.1016/j.engfracmech.2019.106584
- [Manterola 2020] Manterola, J., 2020. *Development of advanced methods to characterize the fracture behavior of flexible bonded joints*. Thèse de doctorat, Universitat de Girona (ES).

[[Martin et al. 2012](#)] Martin, E., Leguillon, D., Carrère, N., 2012. *A coupled strength and toughness criterion for the prediction of the open hole tensile strength of a composite plate*. International Journal of Solids and Structures, 46(26), 3915-3922.

doi : 10.1016/j.ijsolstr.2012.08.020

[[Martin et al. 2016](#)] Martin, E., Vandellos, T., Leguillon, D., Carrère, N., 2016. *Initiation of edge debonding: coupled criterion versus cohesive zone model*. International Journal of Fracture, 199, 157-168.

doi : 10.1007/s10704-016-0101-2.

[[Marques et al. 2019](#)] Marques, J.B., Barbosa, A.Q., da Silva, C.I., Carbas, R.J.C., da Silva, L.F.M., 2019. *An overview of manufacturing functionally graded adhesives – Challenges and prospects*. The Journal of Adhesion, In press.

doi : 10.1080/00218464.2019.1646647

[[Matzenmiller et al. 1995](#)] Matzenmiller, A., Lubliner, J., Taylor, R., 1995. *A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites*. Mechanics of Materials, 20(2), 125-152.

doi: 10.1016/0167-6636(94)00053-0

[[Montagne 2020](#)] Montagne, B., 2020. *Effet de l'interaction fixation composite sur les modes de rupture des assemblages boulonnés composites*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse III (FR).

[[Montagne et al. 2020](#)][52] Montagne, B., Lachaud, F., Paroissien, E., Martini, D., Congourdeau, F., 2020. *Failure analysis of single lap composite laminate bolted joints: comparison of experimental and numerical tests*. Composite Structures 238, 111949

doi: 10.1016/j.compstruct.2020.111897

[[Mooney 1940](#)] Morris, M., 1940. *A theory of large elastic deformation*. Journal of Applied Physics, 11, 582-592.

doi: 10.1063/1.1712836

[[Morin et al. 2013](#)] Morin, D., Bourel, B., Bennani, B., Lauro, F., Lesueur, D., 2013. *A new cohesive element for structural bonding modelling under dynamic loading*. International Journal of Impact Engineering, 53, 94-105.

doi: 10.1016/j.ijimpeng.2012.02.003

[[Morris 2004](#)] Morris, G., 2004. *Defining a standard formula and tes-method for fastener flexibility in lap-joints*. TU Delft, Master Thesis, Delft (NL).

[[Mortensen et Thomsen 1997](#)] Mortensen, F., Thomsen, O.T., 1997. *Simplified linear and non-linear analysis of stepped and scarfed adhesive-bonded lap-joints between composite laminates*. Composite Structures, 38(1-4), 281-294.

doi : 10.1016/S0263-8223(97)00063-9

[[Mortensen 1998](#)] Mortensen, F., 1998. *Development of Tools for Engineering Analysis and Design of High-Performance FRP-Composite Structural Elements*. Thèse de doctorat, Aalborg University (SW).

[[Mortensen et Thomsen 2002a](#)] Mortensen, F., Thomsen, O.T., 2002. *Analysis of adhesive bonded joints: a unified approach*. Composite Science and Technology, 62, 1011-1031.

doi : 10.1016/S0266-3538(02)00030-1

[[Mortensen et Thomsen 2002b](#)] Mortensen, F., Thomsen, O.T., 2002. *Coupling effects in adhesive bonded joints*. Composite Structures, 56, 165-174.

doi : 10.1016/S0263-8223(02)00002-8

[[Mutos et Alfano 2013](#)] Mutos, M., Alfano, J., 2013. *A novel rate-dependent cohesive-zone model combining damage and visco-elasticity*. Computers & Sciences, 118, 126-133.

doi : 10.1016/j.compstruc.2012.12.020

[[Naboulsi et Mall 1997a](#)] Naboulsi, S., Mall, S., 1997. *Thermal effects on adhesively bonded composite cracked aluminum panels*. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 26(1), 1-12.

doi : 10.1016/S0167-8442(96)00028-6

[Naboulsi et Mall 1997b] Naboulsi, S., Mall, S., 1997. *Fatigue crack growth analysis of adhesively repaired panel using perfectly and imperfectly composite patches*. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 28(1), 13-28.

doi : 10.1016/S0167-8442(97)00027-X

[Nageswara Rao et al. 1982] Nageswara Rao, B., Sadasiva Rao, Y.V.K., Yadagiri, S., 1982. *Analysis of composite bonded joints*. Fibre Science and Technology, 17, 77-90.

doi : 10.1016/0015-0568(82)90037-9

[Nairn 2000] Nairn, J.A., 2000. *Energy release rate analysis for adhesive and laminate double cantilever beam specimens emphasizing the effects of residual stresses*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 20(1), 59-70.

doi : 10.1016/S0143-7496(99)00016-0

[Nelson et al. 1983] Nelson, W.D., Bunin, B.L., Hart-Smith, L.J., 1933. *Critical joints in large composite aircraft structure*. NASA Contractor Report 3710, Douglas Aircraft Company, Long Beach (CA).

[Nemes et Lachaud 2010] Nemes, O., Lachaud, F., 2010. *Double-lap adhesive bonded-joints assemblies modeling*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 30, 288-297.

doi : 10.1016/j.ijadhadh.2010.02.006

[NF EN 14869-2 2011] NF EN 14869-2, 2011. *Adhésifs structuraux - Détermination du comportement en cisaillement de collages structuraux - Partie 2 : méthode d'essai en traction sur éprouvette épaisse*, AFNOR, T76-141-2.

[Niu 1999] Niu, M.C.Y., 1999. *Airframe stress analysis and sizing*, 2nd edition, Hong Kong connilit press ltd.

[Notta 2009] Notta, C., 2009. *Study of fastener flexibility in overlap joints*. SOGETI High Tech, Mémoire de stage de fin d'études, Ingénieur INSA Toulouse, Toulouse (FR).

[Ojalvo et Eidinoff 1978] Ojalvo, I.U., Eidinoff, H.L., 1978. *Bond thickness effects upon stresses in single-lap adhesive joints*. AIAA Journal, 16(3), 204-211.

doi : 10.2514/3.60878

[Oplinger 1991] Oplinger, D.W., 1991. *A layered beam theory for single lap joints*. US Army Materials Technology Laboratory, Technical Report MTL TR 91-23, Watertown (MS).

[Oplinger 1994] Oplinger, D.W., 1994. *Effects of adherend deflections in single lap joints*. International Journal of Solids and Structures, 31(18), 2565-2587.

doi : 10.1016/0020-7683(94)90037-X

[Ordonneau et al. 2020][44] Ordonneau, B., Paroissien, E., Salaün, M., Malrieu, J., Guigue, A., Schwartz, S., 2020. *A methodology for the computation of the macro-element stiffness matrix for the stress analysis of a lap joint with functionally graded adhesive properties*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 97, 102505.

doi : 10.1016/j.ijadhadh.2019.102505

[Oterkus et al. 2004] Oterkus, E., Barut, A., Madenci, E., Smeltzer, S.S., Ambur, D.R., 2004. *Nonlinear analysis of bonded composite joints*. 45th AIAA / ASME / ASCE / AHS / ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 19-22 April 2004, Palm Springs (CA).

doi : 10.2514/6.2004-1560

[Oterkus et al. 2007] Oterkus, E., Barut, A., Madenci, E., Ambur, D.R., 2007. *Analysis of bolted-bonded composite lap joints*. 48th AIAA / ASME / ASCE / AHS / ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 23-26 April 2007, Honolulu (HI).

doi : 10.2514/6.2007-2187

[OJEU L282/4 2016] Paris Agreement, Official Journal of the European Union, ISSN 1977-0677, L282/4, Volume 59, 19 October 2016.

[Owens et Lee-Sullivan 2000] Owens, J.F.P., Lee-Sullivan, P., 2000. *Stiffness behavior due to fracture in adhesively bonded composite-to-aluminum joints. I. Theoretical model*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 20, 39-45.

doi : 10.1016/S0143-7496(99)00013-5

[Panettieri *et al.* 2018] Panettieri, E., Leclerc, G., Jumel, J., Guitard, J., 2018. *Mixed-mode crack propagation tests of composite bonded joints using a dual-actuator load frame – Constant and variable  $GII/GI$  conditions*. Engineering Fracture Mechanics, 202, 471-486.

doi: 10.1016/j.engfracmech.2018.09.015

[Paroissien 2006][3] Paroissien, E., 2006. *Contribution aux assemblages hybrides (boulonnés / collés) – Application aux jonctions aéronautiques*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse III (FR).

[Paroissien *et al.* 2006a][5] Paroissien, E., Sartor, M., Huet, J., Lachaud, F., 2006. *Hybrid (bolted/bonded) joints applied to aeronautic parts: analytical two-dimensional model of a hybrid (bolted/bonded) single-lap joint*. AIAA-2006-2268, 47th AIAA / ASME / ASCE / AHS / ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference (47th SDM AIAA), 1-4 May 2006, Newport (RI).

doi: 10.2514/6.2006-2268

[Paroissien *et al.* 2006b][6] Paroissien, E., Sartor, M., Huet, J., 2006. *Hybrid (bolted/bonded) joints applied to aeronautic parts: analytical one-dimensional models of a single-lap joint*. Proceeding on CD-ROM, ISBN 2-9523979-1-0, paper No. 34, 6th International Conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering (6th IDMME), AFM, 17-19 May 2006, Grenoble (FR).

[Paroissien *et al.* 2007a][7] Paroissien, E., Sartor, M., Huet, J., Lachaud, F., 2007. *Analytical two-dimensional model of a hybrid (bolted/bonded) single-lap joint*. Journal of Aircraft, 44 (2), 573-582.

doi: 10.2514/1.24452

[Paroissien *et al.* 2007b][8] Paroissien, E., Sartor, M., Huet, J., 2007. *Hybrid (bolted/bonded) joints applied to aeronautic parts: analytical one-dimensional models of a single-lap joint*. In the book: Trends and Recent Advances in Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering II. Editors: S. TICHKIEWITCH, M. TOLLENAERE, P. RAY, Springer Eds., ISBN 978-1-4020-6760-0, pp. 95-110.

doi: 10.1007/978-1-4020-6761-7\_7

[Paroissien *et al.* 2009][13] Paroissien, E., Hoang-Ngoc, C.T., Bhugaloo, H., Ducher, D., 2009. *Improving the fatigue life of single-lap bolted joints thanks to the hybrid (bolted/bonded) joining technology*. 25th International Committee on Aeronautical Fatigue (ICAF 2009), 27-29 May 2009, Rotterdam, NL, Book of Proceedings, Springer Eds., ISBN 978-90-481-2745-0, pp. 475-492.

[Paroissien *et al.* 2011][14] Paroissien, E., Da Veiga, A., Laborde, A., 2011. *An 1D-beam approach for stress analysis and fatigue life prediction of bonded joints*. 26th International Committee on Aeronautical Fatigue (ICAF 2011), 1-3 June 2011, Montréal, CN, Book of Proceedings, Springer Eds., ISBN 978-94-007-1663-6, pp. 359-374.

[Paroissien et Campassens 2011][12] Paroissien, E., Campassens, D., 2011. *Stress Analysis support to structural sealant development*. 14th Numerical Simulation Meeting, HUTCHINSON, 16 June 2011, Abbaye des Vaux de Cernay (FR).

[Paroissien *et al.* 2013a][16] Paroissien, E., Gaubert, F., Da Veiga, A., Lachaud, F., 2013. *Elasto-plastic analysis of bonded joints with macro-elements*. Journal of Adhesion Science and Technology, 27 (13), 1464-1498.

doi: 10.1080/01694243.2012.745053

[Paroissien *et al.* 2013b] [17] Paroissien, E., Lachaud, F., Jacobs, T., 2013. *A simplified stress analysis of bonded joints using macro-elements*. In the book: Advances in Modeling and Design of Adhesively Bonded Multilayered Systems. Editors: K.L. MITTAL and S. KUMAR, Wiley Eds., Chapter 4, pp. 93-146.

doi: 10.1002/9781118753682.ch4

[Paroissien *et al.* 2017][21] Paroissien, E., Lachaud, F., Schwartz, S., Da Veiga, A., Barrière, P., 2017. *Simplified stress analysis of hybrid (bolted/bonded) joints*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 77, 183-197.

doi: 10.1016/j.ijadhadh.2017.05.003

[Paroissien *et al.* 2018][29] Paroissien, E., da Silva, L.F.M., Lachaud, F., 2018. *Simplified stress analysis of functionally graded single-lap joints subjected to combined thermal and mechanical loads*. Composite Structures, 203, 85-100.

doi: 10.1016/j.compstruct.2018.07.015

[Paroissien *et al.* 2019][31] Paroissien, E., Lachaud, F., da Silva, L.F.M., Seddiki, S., 2019. *A comparison between macro-element and finite element solutions for the stress analysis of functionally graded single-lap joints*. Composite Structures, 215, 331-350.

doi: 10.1016/j.compstruct.2019.02.070

[Paroissien et Lachaud 2019][32] Paroissien, E., Lachaud, F., 2019. *On the potential static strength of hybrid (bolted/bonded) lap joints with functionally graded adhesives*. AIAA Journal, 57 (9), 4093-4103.

[Planas 2019] Planas, M., 2019. *Modélisation des dommages des assemblages boulonnés composites*. ISAE-SUPAERO, Mémoire de stage M1, Ingénieur ISAE-SUPAERO, Toulouse (FR).

[Ramalho *et al.* 20200] Ramalho, L.D.C., Campilho, R.D.S.G., Belinha, J., da Silva, L.F.M., 2020. *Static strength prediction of adhesive joints : A review*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 96, 102451.

doi: 10.1016/j.ijadhadh.2019.102451

[Ramière *et al.* 2010] Ramière, J.F., Briançon, C., Chéret, F., Jeandrau, J.P., Leroy, M., Renard, J., Thionnet, A., 2010. *Jonctions hybrides boulonnées-collées. Application aux cas des structures d'avions*. Revue des Composites et des Matériaux Avancés, 20(2), 215-232.

doi: 10.3166/rcma.20.215-232

[Raphael 1966] Raphael, C., 1966. *Variable-adhesive bonded joints*. In: Proceedings of the Applied Polymer Symposium, 3, 99-108.

[Renton et Vinson 1977] Renton, W.J., Vinson, J.R., 1977. *Analysis of adhesively bonded joints between panels of composite materials*. Journal of Applied Mechanics, 44, 101-106.

doi : 10.1115/1.3423971

[Rivlin 1948] Rivlin, R.S., 1948. *Some applications of elasticity theory to rubber engineering*. Proceedings to Rubber Technology Conference, 23-25 June 1948, London (UK).

[Rice 1968] Rice, J.R., 1968. *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks*. Journal of Applied Mechanics, 35, 379-386.

doi : 10.1115/1.3601206

[Roche *et al.* 1982] Roche, A.A., Behme, A., Solomon, J., 1982. *A three-point flexure test configuration for improved sensitivity to metal/adhesive interfacial phenomena*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 2, 249-254.

doi : 10.1016/0143-7496(82)90032-X

[Roche *et al.* 1994] Roche, A.A., Dole, P., Bouzziri, M., 1994. *Measurement of the practical adhesion of paint coatings to metallic sheets by the pull-off and three-point flexure tests*. Journal of Adhesion Science and Technology, 8(6), 587-609.

doi : 10.1163/156856194X00366

[Roche *et al.* 2006] Roche, A.A., Aufray, M., Bouchet, J., 2006. *The role of the residual stresses of the epoxy-aluminum interphase on the interfacial fracture toughness*. The Journal of Adhesion, 82, 861-880.

doi : 10.1080/00218460600875771

[Rodriguez *et al.* 2010] Rodriguez, R.Q., Paiva, W.P., Sollero, P., Albuquerque, E.L., Rodrigues, M.B., 2010. *Analytical and numerical tools for bonded joint analysis*. Mecanica Computacional, 29, 7557-7569.

[Rosenfeld 1947] Rosenfeld, S.J., 1947. *Analytical and experimental investigation of bolted joints*. NACA TN-1458, Washington (DC).

[Ross 1946] Ross, R.D., 1946. *An electrical computer for the solution of shear-lag and bolted joints problems*. NACA, TN-1281, 1947, Langley Field (VA).

[Sadeghi *et al.* 2018] Sadeghi, M.z., Zimmermann, J., Gabener, A., Schroeder, K.U., 2018. *The applicability of J-integral approach in the determination of mixed-mode fracture energy in a ductile adhesive*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 83, 2-8.

doi : 10.1016/j.ijadhadh.2018.02.027

- [Sans *et al.* 2013] Sans, D., Renart, J., Costa, J., Gascons, N., Mayugo, J., 2013. *Assessment of the influence of the crack monitoring method in interlaminar fatigue tests using fiber Bragg grating sensors*. Composites Science and Technology, 84, 44-50.  
doi : 10.1016/j.compscitech.2013.04.022
- [Sarrado *et al.* 2016] Sarrado, C., Leone, F.A., Turon, A., 2016. *Finite-thickness cohesive elements for modeling thick adhesives*. Engineering Fracture Mechanics, 168, 105-113.  
doi : 10.1016/j.engfracmech.2016.03.020
- [Sauvage 2016] Sauvage, J.B., 2016. *Caractérisation et modélisation de l'adhérence des assemblages collés*. Thèse de doctorat, Université de Haute Alsace, Mulhouse (FR).
- [Sauvage *et al.* 2017] Sauvage, J.B., Aufray, M., Jeandrau, J.P., Chalandon, P., Poquillon, D., Nardin, M., F., 2017. *Using the 3-point bending method to study failure initiation in epoxide aluminum joints*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 75, 181-189.  
doi : 10.1016/j.ijadhadh.2017.03.011
- [Sawa *et al.* 2000] Sawa, T. Liu, T., Nakano, K., Tanaka, J., 2000. *A two-dimensional stress analysis of single-lap adhesive joints of dissimilar adherends subjected to tensile loads*. Journal of Adhesion Science and Technology, 14(1), 43-66.  
doi : 10.1163/156856100742104
- [Seddiki 2019] Seddiki, S., 2019. *Modélisation par la méthode des éléments finis d'assemblages pour validation et évaluation d'approches simplifiées*. ISAE-SUPAERO, Mémoire de stage de mastère spécialisé, ISAE-SUPAERO, Toulouse (FR).
- [Sekmen *et al.* 2020][43] Sekmen, K., Paroissien, E., Lachaud, F., 2020. *Simplified stress analysis of multilayered adhesively bonded structures*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 97, 102497.  
doi : 10.1016/j.ijadhadh.2019.102497
- [Schmidt et Edlund 2006] Schmidt, P., Edlund, U. 2006. *Analysis of adhesively bonded joints: a finite element method and a material model with damage*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 66(8), 1271-1308.  
doi : 10.1002/nme.1593
- [Schmidt et Edlund 2010] Schmidt, P., Edlund, U. 2010. *A finite element method for failure analysis of adhesively bonded structures*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 30, 665-681.  
doi : 10.1016/j.ijadhadh.2010.05.012
- [Schwartz 2013] Schwartz, S., 2013. *Simulation simplifiée de jonctions collées avec un adhésif non-linéaire sous chargement cyclique. Plasticité et endommagement en mode mixte*. SOGETI High Tech, Mémoire de stage de fin d'études, Ingénieur ENSEIRB-MATMECA, Toulouse (FR).
- [Schijve 1972] Schijve, J., 1972. *Some elementary calculations on secondary bending in simple lap joints*. NLR, Technical Report NLR TR 70236 U (NL).
- [Škec 2019] Škec, L., 2019. *Identification of parameters of a bi-linear cohesive-zone model using analytical solutions for mode-I delamination*. Engineering Fracture Mechanics, 214, 558-577.  
doi : 10.1016/j.engfracmech.2019.04.019
- [Soulé de Laffont 2017] Soulé de Laffont, M.F., 2017. *Conception d'un connecteur élément fini pour la simulation des assemblages boulonnés*. Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay (FR).
- [Sørensen et Jacobsen 2003] Sørensen, B.F., Jacobsen, T.K., 2003. *Determination of cohesive laws by the J integral approach*. Engineering fracture mechanics, 70(14), 1841-1858.  
doi : 10.1016/S0013-7944(03)00127-9
- [Stein *et al.* 2016] Stein, N., Weißgraeber, P., Becker, W., 2016. *Stress solution for functionally graded adhesive joints*. International Journal of Solids and Structures, 97-98, 300-311.  
doi : 10.1016/j.ijsolstr.2016.07.019
- [Stein *et al.* 2017] Stein, N., Felger, J., Becker, W., 2017. *Analytical models for functionally graded adhesive joints: A comparative study*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 76, 70-82.

doi : 10.1016/j.ijadhadh.2017.02.001

[Suhir 1986] Suhir, E., 1986. *Stresses in bi-metal thermostats*. Journal of Applied Mechanics, 53, 657-660.

doi : 10.1115/1.3171827

[Suhir 1988] Suhir, E., 1989. *An approximate analysis of multilayered elastic thin films*. Journal of Applied Mechanics, 51, 143-148.

doi : 10.1115/1.3173620

[Suhir 1989] Suhir, E., 1989. *Interfacial stresses in bi-metal thermostats*. Journal of Applied Mechanics, 56, 595-600.

doi : 10.1115/1.3176133

[Suhir 2001] Suhir, E., 1986. *Analysis of interfacial stresses in a trimaterial assembly*. Journal of Applied Physics, 89(7), 3685-3694.

doi : 10.1063/1.1350623

[Swift 1984] Swift, T., 1984. *Fracture analysis of stiffened structure*. Damage Tolerance of metallic structures: analysis methods and application, ASTM STP 842, J.B. Chang & J.L. Rudd, Eds., American Society for Testing and Materials, pp. 69-107.

[Talmon de l'Armée et al. 2016] Talmon de l'Armée, A., Stein, N., Becker, W., 2016. *Bending moment calculation for single lap joints with composite laminate adherends including bending-extension coupling*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 66, 41-52.

doi : 10.1016/j.ijadhadh.2015.12.001

[Tate et Rosenfeld 1946] Tate, M.B., and Rosenfeld, S.J., 1946. *Preliminary investigation of the loads carried by individual bolts in bolted joints*. NACA TN-1051, Langley Field (VA).

[Taylor 1996] Taylor, M.W., 1996. *Special finite elements for modelling adhesively bonded joints in two- and three-dimensions*. Virginia Polytechnic Institute and State University, Master of Science Dissertation, Blacksburg (VA).

[Torrelli et Paroissien 2020][54] Torrelli, V., Paroissien, E., 2020. Simplified stress analysis of multilayered bonded structure under 1D-bar kinematics. Composite Structures, 112, 112641.

doi : 10.1016/j.compstruct.2020.112641

[Tsai et al. 1998] Tsai, M.Y., Oplinger, D.W., Morton, J., 1998. *Improved theoretical solutions for adhesive lap joints*. International Journal of Solids and Structure, 35, 1163-1185.

doi : 10.1016/S0020-7683(97)00097-8

[Tsai et Morton 1994] Tsai, M.Y., Morton, J., 1994. *An evaluation of analytical and numerical solutions to the single lap joints*. International Journal of Solids and Structures, 31, 2537-2563.

doi : 10.1016/0020-7683(94)90036-1

[Vallat 1950] Vallat, P., 1950. *Résistance des matériaux appliquée à l'aviation*. Ed. Librairie Polytechnique C. BÉRANGER, Paris (FR).

[van Ingen et Vlot 1993] van Ingen, J.w., Vlot, A., 1993. *Stress analysis of adhesively bonded single-lap joints*. TU Delft, Report LR-740, Delft (NL).

[Verwaerde et al. 2020] Verwaerde, R., Guidault, P.A., Boucard, P.A., 2020. *A nonlinear finite element connector for the simulation of bolted assemblies*. Computational Mechanics, 65, 1531-1548.

doi : 10.1007/s00466-020-01833-1

[Volkersen 1938] Volkersen, O., 1938. *Die Nietkraftverteilung in Zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten*. Luftfahrtforschung. 15(24), 41-47.

[Volkersen 1965] Volkersen, O., 1965. *Recherche sur la théorie des assemblages collés*. Construction Métallique, 4, 3-13.

[Wang et Zhang 2009] Wang, J., Zhang, C., 2009. *Three-parameter, elastic foundation for analysis of adhesively bonded joints*. International Journal of Adhesive and Adhesives, 29, 495-502.

doi : 10.1016/j.ijadhadh.2008.10.002

- [Ward 1971] Ward, I.M., 1971. *Review: The yield behaviour of polymers*. Journal of Material Science, 6(11), 1397-1417.  
doi : 10.1007/BF00549685
- [Weißgraeber et Becker 2013] Weißgraeber, P., Becker, W., 2012. *Finite Fracture Mechanics for mixed mode fracture in adhesive joints*. International Journal of Solids and Structures, 50(14-15), 2383-2394.  
doi: 10.1016/j.ijsolstr.2013.03.012
- [Weißgraeber et al. 2014] Weißgraeber, P., Stein, N., Becker, W., 2014. *A general sandwich-type model for adhesive joints with composite adherends*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 55, 56-63.  
doi: 10.1016/j.ijadhadh.2014.06.009
- [Williams 1975] Williams, J.H., 1975. *Stresses in adhesive between dissimilar adherends*. The Journal of Adhesion, 7(2), 97-107.  
doi: 10.1080/00218467508075042
- [Wooley et Carver 1971] Wooley, G.R., Carver, D.R., 1971 *Stress concentration factors for bonded lap joint*. Journal of Aircraft, 8, 817-820.
- [Wu et Jenson 2011] Wu, X.F., Jenson, R.A., 2011. *Stress-function variational method for stress analysis of bonded joints under mechanical and thermal loads*. International Journal of Engineering Science, 49, 279-294.  
doi : 10.1016/j.ijengsci.2010.11.005
- [Wu et Zhao 2013] Wu, X.F., Zhao, Y., 2013. *Stress-function variational method for interfacial stress analysis of adhesively bonded joints*. International Journal of Solids and Structures, 50, 4305-4319.  
doi : 10.1016/j.ijsolstr.2013.09.002
- [Xiao et al. 2004] Xiao, X., Foss, P.H., Schroeder, J.A., 2004. *Stiffness prediction of the double lap shear joint. Part1: Analytical solution*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 24, 229-237.  
doi: 10.1016/j.ijadhadh.2003.10.003
- [Xiao et al. 2007] Xiao, J., Gama, B., Gillespie, J., 2007. *Progressive damage and delamination in plain weave S-2 glass/SC-15 composites under quasi static punch shear loading*. Composite Structures, 78, 182-196.  
doi : 10.1016/j.compstruct.2005.09.001
- [Xu et Wei 2013] Xu, W., Wei, Y., 2013. *Influence of adhesive thickness on local interface fracture and overall strength of mettalic adhesive bonding structures*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 40, 158-167.  
doi : 10.1016/j.ijadhadh.2012.07.012
- [Yadagiri et al. 1987] Yadagiri, S., Papi Reddy, C., Sanjeeva Reddy, T., 1987. *Viscoelastic analysis of adhesively bonded joints*. Computers and Structures, 27(4), 445-454.  
doi : 10.1016/0045-7949(87)90275-6
- [Yang et al. 2009] Yang, J., Chen, J.F., Teng, J.G., 2009. *Interfacial stress analysis of plated beams under symmetric mechanical and thermal loading*. Construction and Building Materials, 23, 2973-2987.  
doi : 10.1016/j.conbuildmat.2009.05.004
- [Zhang 2003] Zhang, J., 2003. *In-process stress analysis of flip chip assembly and reliability assessment during environmental and power cycling*. PhD Dissertation, Georgia Institute of Technology, Atlanta (GA).
- [Zhao et al. 2011a] Zhao, X., Adams, R.D., da Silva, L.F.M., 2011. *Single lap joints with rounded adherend corners: Stress and strain analysis*. Journal of Adhesion Science and Technology, 25, 819-836.  
doi : 10.1163/016942410X520871
- [Zhao et al. 2011b] Zhao, X., Adams, R.D., da Silva, L.F.M., 2011. *Single lap joints with rounded adherend corners: Experimental results and strength prediction*. Journal of Adhesion Science and Technology, 25, 837-856.  
doi : 10.1163/016942410X520880

## 5 Annexe A

### 5.1 Mode propre fondamental d'un simple recouvrement collé équilibré en cinématique de barre

Dans la section 2.2.1, un simple recouvrement collé est représenté par un simple ressort. Une expression analytique est donnée par l'équation Eq. 31 ou par l'équation Eq. 34 si les deux substrats sont identiques. Il est alors aisé de déterminer l'expression du mode propre fondamental du recouvrement collé.

Si la masse de la couche de colle devant celle des substrats, alors la masse du recouvrement collé tend vers la masse des deux substrats du recouvrement. En supposant les deux substrats identiques et en négligeant la masse de la couche de colle devant celle des substrats, la pulsation propre fondamentale  $\Omega_c$  du recouvrement collé s'écrit à partir de l'équation Eq. 34, en fonction de la pulsation propre fondamentale  $\Omega$  des deux substrats du recouvrement liés sans souplesse à leur interface par :

$$\text{Eq. 247} \quad \Omega_c = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{2\omega \tanh \omega}}} \Omega = \Phi(\omega) \Omega = \sqrt{\kappa(\omega)} \Omega$$

Négliger la masse de couche de colle revient à réduire le rapport  $\phi(\omega) = \Omega_c / \Omega$  d'un facteur égal à la racine carrée de un plus le rapport de la masse de couche de colle divisée par la masse du recouvrement collé.

Dans la Figure 42, la variation des rapports  $\phi(\omega) = \Omega_c / \Omega$  et  $\kappa(\omega)$  est tracée en fonction de  $\omega$ . De plus, le même choix de valeurs particulières que celui de la section 2.2.1 est réalisé ( $E_1 = E_2 = 70$  GPa,  $e = 0,2$  mm,  $e_1 = e_2 = 2$  mm,  $2c = 4b = 60$  mm et trois valeurs du module de cisaillement de la colle  $G = 1$  MPa,  $G = 0.1$  GPa et  $G = 1$  GPa). Le passage à la racine de la fonction  $\kappa(\omega)$  à valeurs comprises entre 0 et 1 a pour effet d'augmenter les valeurs du rapport  $\Omega_c / \Omega$  à  $\omega$  fixé mais toujours à valeurs comprises entre 0 et 1. Ainsi, pour la configuration matérielle et géométrique choisie en exemple, la pulsation propre en considérant une couche de colle de module e cisaillement  $G = 1$  GPa est seulement 1.06 plus élevée que celle obtenu avec une colle dix fois moins raide.

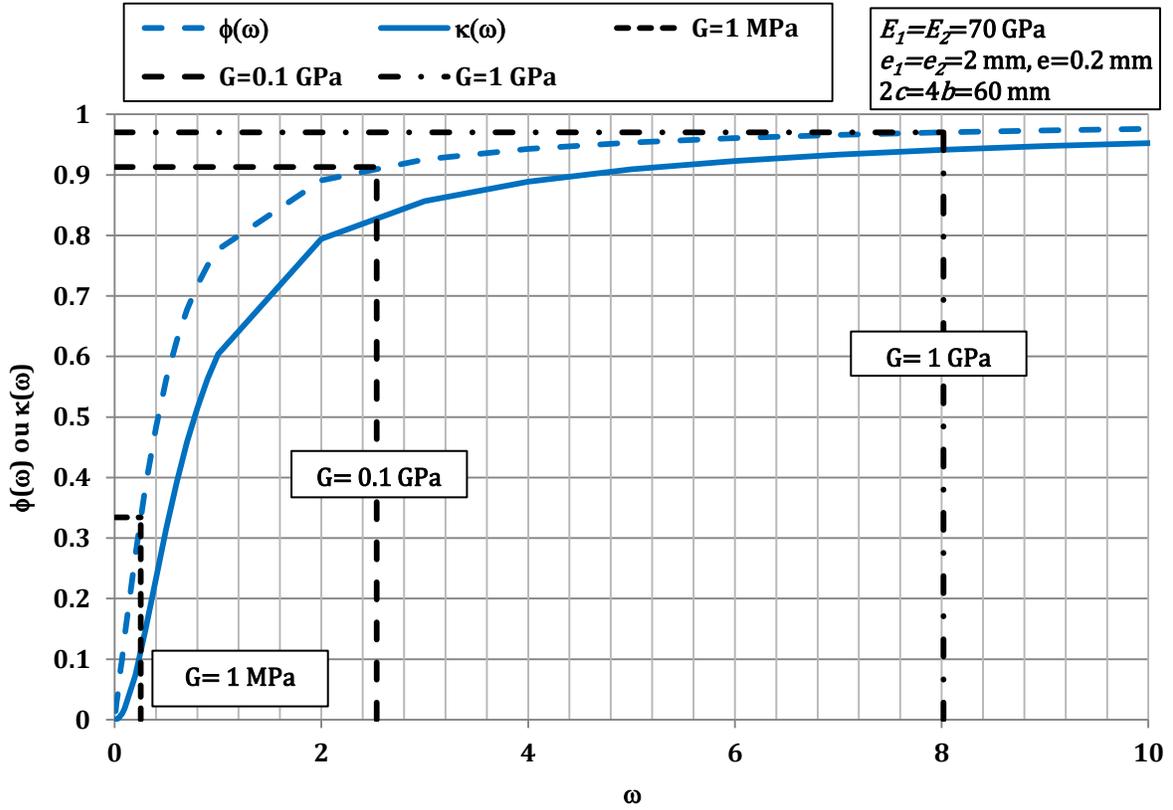


Figure 42 Variation de  $\phi(\omega)=\Omega_r/\Omega$  et  $\kappa(\omega)$  en fonction de  $\omega$  et valeurs associées pour  $G=1$  MPa,  $G=0.1$  GPa et  $G=1$  GPa pour une configuration matérielle et géométrique particulière.

## 5.2 Complément sur l'effet du cisaillement transverse des substrats

Dans la section 2.2.2, une description synthétique de la prise en compte du cisaillement transverse dans les substrats selon Tsai *et al.* [Tsai *et al.* 1998] est fournie. L'hypothèse est faite que la contrainte de cisaillement varie linéairement dans l'épaisseur du substrat. Demarkles propose aussi une résolution avec une contrainte de cisaillement transverse linéaire dans l'épaisseur des substrats [Demarkles 1955]. Cette répartition linéaire est obtenue à partir d'un équilibre, qui suppose que la contrainte normale est uniforme dans l'épaisseur. Autrement dit, la condition d'équilibre local selon l'axe  $x$  n'est pas vérifiée. De la même manière, les allongements évalués pour déterminer le déplacement de l'interface suit cette même hypothèse. La solution alors obtenue pour la contrainte de cisaillement dans la colle par Demarkles est similaire à celle de Tsai *et al.* dans l'équation Eq. 51, en remplaçant  $\eta_t$  par  $\eta_d$  selon :

$$\text{Eq. 248} \quad \eta_d^2 = \frac{1}{1+\beta_d} \frac{G}{e} \left( \frac{1}{e_1 E_1} + \frac{1}{e_2 E_2} \right)$$

avec :

$$\text{Eq. 249} \quad \beta_d = \frac{1}{2} \frac{G}{e} \left( \frac{e_1}{G_1} + \frac{e_2}{G_2} \right) = \frac{3}{2} \beta_t$$

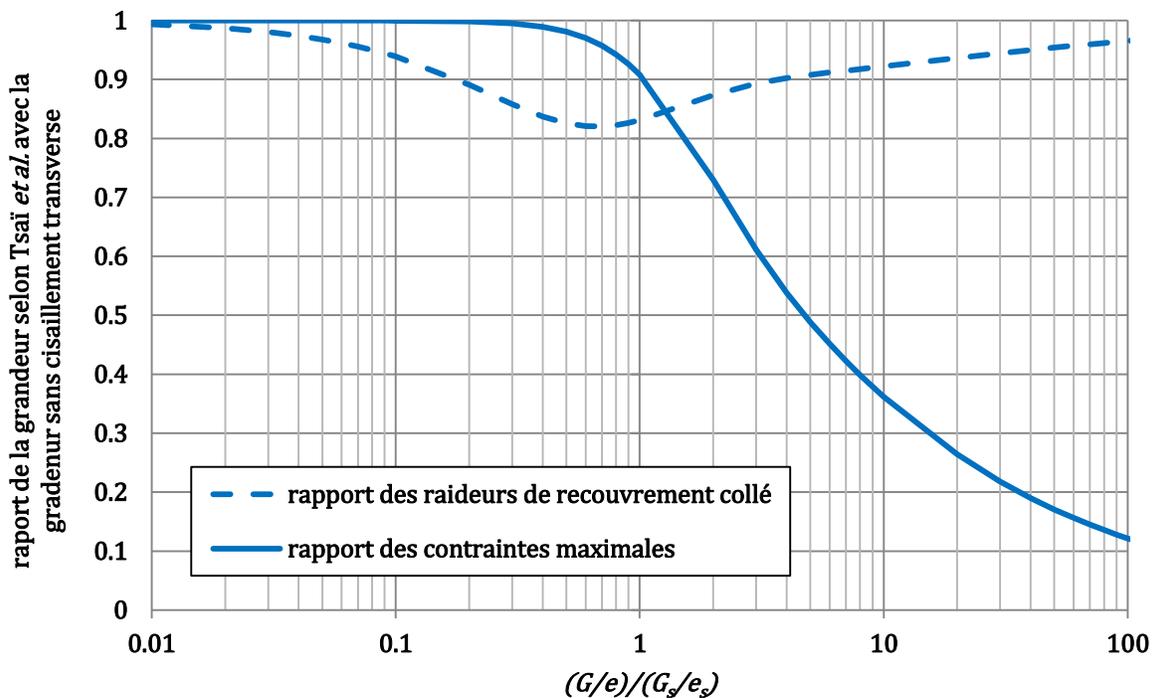
Adams et Peppiatt montrent qu'en considérant l'effet Poisson, la répartition des contraintes normales des substrats obéit un système d'équations aux dérivées partielles [Adams et Peppiatt 1973]. Un cisaillement transverse des substrats selon Demarkless est considéré. La résolution approchée ou semi-analytique de ce système conduit à des expressions des contraintes de cisaillement dans les deux directions planes dans la couche de colle et prédit un cisaillement maximal aux quatre coins du recouvrement. Adams *et al.* [Adams et al. 1973] montrent que les contraintes de cisaillement dans la couche mesurées expérimentalement sont en bon accord avec les prédictions de [Adams et Peppiatt 1973].

En supposant que les deux substrats sont identiques, les expressions de la raideur du recouvrement collé et de la contrainte maximale dans la couche de colle s'obtiennent en suivant l'approche décrite dans les sections 2.2.1 et 2.2.2 ; un remplacement de  $\omega$  par  $\omega_t$  suffit dans les équations Eq. 34 et Eq. 37, respectivement. L'expression de est donné  $\omega_t$  par :

$$\text{Eq. 250} \quad \omega_t = \eta_t c = \sqrt{\frac{1}{1+\beta_t} \frac{G}{e} \frac{2}{e_s E_s}} c = \sqrt{\frac{1}{1+\beta_t} \frac{G}{e} \frac{2e_s}{E_s} \frac{c}{e_s}} = \frac{1}{1+\beta_t} \eta c = \sqrt{\frac{1}{1+\beta_t}} \omega = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{2Ge_s}{3eG_s}}} \omega$$

où  $e_s$  est l'épaisseur d'un substrat,  $E_s$  le module d'Young du substrat et  $G_s$  le module de cisaillement du substrat. Le rapport  $(G/e)/(G_s/e_s)$  apparaît alors comme le paramètre de conception pilotant les différences de prédiction entre le modèle de Tsai *et al.* et le modèle d'Arnovljevic ou de Volkersen (sans cisaillement transverse dans les substrats). Le paramètre donné  $\omega_t$  est toujours inférieur à  $\omega$ . Par conséquent, à configuration géométrique

et matérielle donnée, la raideur du recouvrement collé et la contrainte maximale de la couche de colle selon modèle avec cisaillement transverse seront toujours inférieures à celles prédites sans cisaillement transverse. L'énergie de déformation est augmentée en considérant le cisaillement transverse dans les substrats. Ainsi, à effort imposé, la raideur du recouvrement sera réduite. La réduction de la contrainte maximale de cisaillement s'explique par la réduction du déplacement relatif des interfaces (section 2.2.2). Les rapports des raideurs de recouvrement collé et rapport des contraintes maximales prédites selon Tsai *et al.* relativement au cas sans cisaillement transverse en fonction de  $(G/e)/(G_s/e_s)$  sont tracés dans la Figure 43. Ces tracés supposent que l'épaisseur du substrat et le matériau du substrat sont fixés. L'évolution du rapport des raideurs du recouvrement collé passe par un minimum si  $G/e$  vaut environ 70% de  $G_s/e_s$ . Cette non monotonie s'explique par le fait qu'aux limites, l'effet de la considération ou non du cisaillement transverse n'a plus d'influence significative. L'évolution du rapport des contraintes maximales dans la colle est strictement décroissante : plus la colle est raide relativement au substrat plus la réduction de la contrainte maximale est importante.



**Figure 43** Rapport des raideurs de recouvrement collé et rapport des contraintes maximales dans la colle prédites selon Tsai *et al.* relativement au cas sans cisaillement transverse en fonction de  $(G/e)/(G_s/e_s)$ .

## 5.3 Complément au ME poutres-collées

### 5.3.1 Racines du polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique bicarré de l'équation Eq. 104 est :

$$\text{Eq. 251 } R^3 - k_1 R^2 + k_4 R + (k_2 k_3 - k_1 k_4) = 0$$

avec  $R=r^2$ . La méthode de Cardan est alors appliquée. Le polynôme caractéristique est modifié en :

$$\text{Eq. 252 } R'^3 + \hat{p}R' + \hat{q} = 0$$

avec:

$$\text{Eq. 253 } R' = R - \frac{k_1}{3}$$

$$\text{Eq. 254 } \hat{p} = -\frac{k_1^2}{3} + k_4$$

$$\text{Eq. 255 } \hat{q} = -\frac{k_1}{27}(2k_1^2 - 9k_4) + k_2 k_3 - k_1 k_4$$

Le déterminant de Cardan, supposé positif, est :

$$\text{Eq. 256 } \hat{\Delta} = \hat{q}^2 + \frac{4}{27}\hat{p}^3$$

avec:

$$\text{Eq. 257 } \hat{u} = \sqrt[3]{\frac{-\hat{q} + \sqrt{\hat{\Delta}}}{2}}$$

$$\text{Eq. 258 } \hat{v} = \sqrt[3]{\frac{-\hat{q} - \sqrt{\hat{\Delta}}}{2}}$$

Les racines de l'équation réduites sont :

$$\text{Eq. 259 } R'_1 = \hat{u} + \hat{v}$$

$$\text{Eq. 260 } R'_2 = \hat{u}e^{i\frac{2\pi}{3}} + \hat{v}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\text{Eq. 261 } R'_3 = \hat{u}e^{i\frac{4\pi}{3}} + \hat{v}e^{-i\frac{4\pi}{3}}$$

Les racines de l'équation caractéristique bicarrée sont alors :

$$\text{Eq. 262 } R_1 = \hat{u} + \hat{v} + \frac{k_1}{3} = r^2$$

$$\text{Eq. 263 } R_2 = -\frac{1}{2}(\hat{u} + \hat{v}) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(\hat{u} - \hat{v}) = (s + it)^2$$

$$\text{Eq. 264 } R_3 = -\frac{1}{2}(\hat{u} + \hat{v}) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(\hat{u} - \hat{v}) = (s - it)^2$$

En supposant  $R_1$  positif, les réels liés aux racines des équations différentielles d'ordre 6 sont alors :

$$\text{Eq. 265 } r = \sqrt{\hat{u} + \hat{v} + \frac{k_1}{3}}$$

$$\text{Eq. 266 } s = \sqrt{\frac{1}{2}(\text{Re}(R_2) + |R_2|)}$$

$$\text{Eq. 267 } t = \sqrt{\frac{1}{2}(\text{Re}(R_2) - |R_2|)}$$

où  $\text{Re}(z)$  désigne la partie réelle de  $z$  et  $|z|$  le module de  $z$ .

### 5.3.2 Sandwich collé

Cette section décrit la démarche pour exprimer les 7 constantes d'intégration restantes dans les expressions des contraintes de pelage et de cisaillement de la colle en fonction des efforts en bord. Avec les 6 équations de Eq. 106, un système linéaire de taille 13x13 reste à inverser, en utilisant par exemple un logiciel de calcul scientifique.

La relation constitutive de la contrainte de cisaillement (Eq. 94) est dérivée une fois et les relations constitutives des substrats sont introduites (Eq. 91 et Eq. 92) :

$$\text{Eq. 268 } \frac{dT}{dx} = \frac{G}{e} \left( \frac{du_2}{dx} - \frac{du_1}{dx} - \frac{e_2}{2} \frac{d\theta_2}{dx} - \frac{e_1}{2} \frac{d\theta_1}{dx} \right) = \frac{G}{e} \left( -\frac{B_1 + \frac{e_1}{2} A_1}{\Delta_1} M_1 - \frac{D_1 + \frac{e_1}{2}}{\Delta_1} N_1 - \frac{-B_2 + \frac{e_2}{2} A_1}{\Delta_2} M_2 + \frac{D_2 - \frac{e_2}{2} B_2}{\Delta_2} N_2 \right)$$

La relation constitutive de la contrainte de pelage (Eq. 95) est dérivée deux fois et les relations constitutives des substrats sont introduites (Eq. 91 à Eq. 93) :

$$\text{Eq. 269 } \frac{d^2 S}{dx^2} = \frac{E}{e} \left( \frac{d^2 v_1}{dx^2} - \frac{d^2 v_2}{dx^2} \right) = \frac{E}{e} \left( \frac{d\theta_1}{dx} - \frac{d\theta_2}{dx} \right) = \frac{E}{e} \left( \frac{A_1}{\Delta_1} M_1 + \frac{B_1}{\Delta_1} N_1 - \frac{A_2}{\Delta_2} M_2 + \frac{B_2}{\Delta_2} N_2 \right)$$

De plus, en dérivant une troisième fois, il vient :

$$\text{Eq. 270 } \frac{d^3 S}{dx^3} = \frac{E}{e} \left( \frac{A_1}{\Delta_1} \frac{dM_1}{dx} + \frac{B_1}{\Delta_1} \frac{dN_1}{dx} - \frac{A_2}{\Delta_2} \frac{dM_2}{dx} + \frac{B_2}{\Delta_2} \frac{dN_2}{dx} \right)$$

Les dérivées du premières ordre en les efforts sont remplacées par leurs expressions obtenues avec l'équilibre local des substrats (Eq. 88 et Eq. 90), de sorte que:

$$\text{Eq. 271 } \frac{d^3 S}{dx^3} + T \frac{bE}{e} \left( \frac{e_1 A_1}{2\Delta_1} + \frac{B_1}{\Delta_1} - \frac{e_2 A_2}{2\Delta_2} + \frac{B_2}{\Delta_2} \right) = \frac{E}{e} \left( \frac{A_2}{\Delta_2} V_2 - \frac{A_1}{\Delta_1} V_1 \right)$$

L'application des équations Eq. 268, Eq. 269 et Eq. 271 aux deux extrémités des substrats ( $x=0$  et  $x=L$ ) fournit donc 6 équations. La dernière équation traduit le transfert total de l'effort par la couche de colle le long du recouvrement et est issue de l'équation d'équilibre local du substrat en force selon  $x$ :

$$\text{Eq. 272 } \frac{N_2(L) - N_2(0)}{w} = \int_0^L T dx$$

### 5.3.3 Efforts et déplacements nodaux

Cette section donne les expressions des déplacements et efforts nodaux.

#### Eq. 273

$$u_1(0) = [\bar{\beta}_1(\alpha_1 t - \alpha_2 s)]K_1 + [\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_1(\alpha_2 t + \alpha_1 s)]K_2 + [\bar{\beta}_1(-\alpha_1 t + \alpha_2 s)]K_3 + [\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_1(\alpha_2 t + \alpha_1 s)]K_4 + [\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_1\alpha_3 r]K_5 + [\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_1\alpha_3 r]K_6 + [\bar{\beta}_1]K_7 + J_6$$

#### Eq. 274

$$u_2(0) = [\bar{\beta}_2(\alpha_1 t - \alpha_2 s)]K_1 + [\bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_2(\alpha_2 t + \alpha_1 s)]K_2 + [\bar{\beta}_2(-\alpha_1 t + \alpha_2 s)]K_3 + [\bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_2(\alpha_2 t + \alpha_1 s)]K_4 + [\bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_2\alpha_3 r]K_5 + [\bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_2\alpha_3 r]K_6 + [\bar{\beta}_2 - h_1\bar{\beta}_5 - h_2\bar{\beta}_6]K_7 + \left[\frac{h_1+h_2}{\Delta}\right]J_2 + J_6$$

#### Eq. 275

$$u_1(\Delta) = e^{s\Delta} \left[ \sin t\Delta (\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_1(\alpha_2 t + \alpha_1 s)) + \cos t\Delta (\bar{\beta}_1(\alpha_1 t - \alpha_2 s)) \right] K_1 + e^{s\Delta} \left[ \sin t\Delta (\bar{\beta}_1(-\alpha_1 t + \alpha_2 s)) + \cos t\Delta (\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_1(\alpha_2 t + \alpha_1 s)) \right] K_2 + e^{-s\Delta} \left[ \sin t\Delta (\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_1(\alpha_2 t + \alpha_1 s)) + \cos t\Delta (\bar{\beta}_1(-\alpha_1 t + \alpha_2 s)) \right] K_3 + e^{-s\Delta} \left[ \sin t\Delta (\bar{\beta}_1(\alpha_1 t - \alpha_2 s)) + \cos t\Delta (\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_1(\alpha_2 t + \alpha_1 s)) \right] K_4 + e^{r\Delta} [\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_1\alpha_3 r]K_5 + e^{-r\Delta} [\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_1\alpha_3 r]K_6 + \left[ \bar{\beta}_1 - \frac{w\Delta^2}{2A_1} \left( 1 - \frac{\frac{B_1+B_1}{A_1 A_2}}{h_1+h_2+\frac{B_1}{A_1} \frac{B_2}{A_2}} \right) \right] K_7 + J_5 + J_6$$

#### Eq. 276

$$u_2(\Delta) = e^{s\Delta} \left[ \sin t\Delta (\bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_2(\alpha_2 t + \alpha_1 s)) + \cos t\Delta (\bar{\beta}_2(\alpha_1 t - \alpha_2 s)) \right] K_1 + e^{s\Delta} \left[ \sin t\Delta (\bar{\beta}_2(-\alpha_1 t + \alpha_2 s)) + \cos t\Delta (\bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_2(\alpha_2 t + \alpha_1 s)) \right] K_2 + e^{-s\Delta} \left[ \sin t\Delta (\bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_2(\alpha_2 t + \alpha_1 s)) + \cos t\Delta (\bar{\beta}_2(-\alpha_1 t + \alpha_2 s)) \right] K_3 + e^{-s\Delta} \left[ \sin t\Delta (\bar{\beta}_2(\alpha_1 t - \alpha_2 s)) + \cos t\Delta (\bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_2(\alpha_2 t + \alpha_1 s)) \right] K_4 + e^{r\Delta} [\bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_2\alpha_3 r]K_5 + e^{-r\Delta} [\bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_2\alpha_3 r]K_6 + \left[ \bar{\beta}_2 - h_1\bar{\beta}_5 - h_2\bar{\beta}_6 - \frac{w\Delta^2}{2A_2} \left( 1 + \frac{\frac{B_2+B_2}{A_1 A_2}}{h_1+h_2+\frac{B_1}{A_1} \frac{B_2}{A_2}} \right) \right] K_7 + \left[\frac{h_1+h_2}{\Delta}\right]J_1 + \left[\frac{h_1+h_2}{\Delta}\right]J_2 + J_5 + J_6$$

#### Eq. 277

$$v_1(0) = [\bar{\beta}_3 k_4 t + \bar{\beta}_3 k_2 (2\alpha_1 s t - \alpha_2 (s^2 - t^2)) - \bar{\beta}_5 \alpha_2] K_1 + [\bar{\beta}_3 k_4 s + \bar{\beta}_3 k_2 (2\alpha_2 s t + \alpha_1 (s^2 - t^2)) + \bar{\beta}_5 \alpha_1] K_2 + [\bar{\beta}_3 k_4 t + \bar{\beta}_3 k_2 (2\alpha_1 s t - \alpha_2 (s^2 - t^2)) - \bar{\beta}_5 \alpha_2] K_3 - [\bar{\beta}_3 k_4 s + \bar{\beta}_3 k_2 (2\alpha_2 s t + \alpha_1 (s^2 - t^2)) + \bar{\beta}_5 \alpha_1] K_4 + [\bar{\beta}_3 k_4 r + \bar{\beta}_3 k_2 \alpha_3 r^2 + \bar{\beta}_5 \alpha_3] K_5 - [\bar{\beta}_3 k_4 r + \bar{\beta}_3 k_2 \alpha_3 r^2 + \bar{\beta}_5 \alpha_3] K_6 + J_3$$

#### Eq. 278

$$v_2(0) = [\bar{\beta}_4 k_4 t + \bar{\beta}_4 k_2 (2\alpha_1 s t - \alpha_2 (s^2 - t^2)) - \bar{\beta}_6 \alpha_2] K_1 + [\bar{\beta}_4 k_4 s + \bar{\beta}_4 k_2 (2\alpha_2 s t + \alpha_1 (s^2 - t^2)) + \bar{\beta}_6 \alpha_1] K_2 + [\bar{\beta}_4 k_4 t + \bar{\beta}_4 k_2 (2\alpha_1 s t - \alpha_2 (s^2 - t^2)) - \bar{\beta}_6 \alpha_2] K_3 - [\bar{\beta}_4 k_4 s + \bar{\beta}_4 k_2 (2\alpha_2 s t + \alpha_1 (s^2 - t^2)) + \bar{\beta}_6 \alpha_1] K_4 + [\bar{\beta}_4 k_4 r + \bar{\beta}_4 k_2 \alpha_3 r^2 + \bar{\beta}_6 \alpha_3] K_5 - [\bar{\beta}_4 k_4 r + \bar{\beta}_4 k_2 \alpha_3 r^2 + \bar{\beta}_6 \alpha_3] K_6 + J_3$$

#### Eq. 279

$$v_1(\Delta) = e^{s\Delta} \left[ \sin t\Delta (\bar{\beta}_3 k_4 s + \bar{\beta}_3 k_2 (2\alpha_2 s t + \alpha_1 (s^2 - t^2)) + \bar{\beta}_5 \alpha_1) + \cos t\Delta (\bar{\beta}_3 k_4 t + \bar{\beta}_3 k_2 (2\alpha_1 s t - \alpha_2 (s^2 - t^2)) - \bar{\beta}_5 \alpha_2) \right] K_1 + e^{s\Delta} \left[ \sin t\Delta (-\bar{\beta}_3 k_4 t + \bar{\beta}_3 k_2 (-2\alpha_1 s t + \alpha_2 (s^2 - t^2)) + \bar{\beta}_5 \alpha_2) + \cos t\Delta (\bar{\beta}_3 k_4 s + \bar{\beta}_3 k_2 (2\alpha_2 s t + \alpha_1 (s^2 - t^2)) + \bar{\beta}_5 \alpha_1) \right] K_2 +$$

$$\begin{aligned}
& e^{-s\Delta} \left[ -\sin t\Delta \left( \widetilde{\beta}_3 k_4 s + \widetilde{\beta}_3 k_2 (2\alpha_2 st + \alpha_1 (s^2 - t^2)) + \overline{\beta}_5 \alpha_1 \right) + \cos t\Delta \left( \widetilde{\beta}_3 k_4 t + \widetilde{\beta}_3 k_2 (2\alpha_1 st - \alpha_2 (s^2 - t^2)) - \overline{\beta}_5 \alpha_2 \right) \right] K_3 + \\
& e^{-s\Delta} \left[ \sin t\Delta \left( -\widetilde{\beta}_3 k_4 t + \widetilde{\beta}_3 k_2 (-2\alpha_1 st + \alpha_2 (s^2 - t^2)) + \overline{\beta}_5 \alpha_2 \right) - \cos t\Delta \left( \widetilde{\beta}_3 k_4 s + \widetilde{\beta}_3 k_2 (2\alpha_2 st + \alpha_1 (s^2 - t^2)) + \overline{\beta}_5 \alpha_1 \right) \right] K_4 + e^{r\Delta} [\widetilde{\beta}_3 k_4 r + \widetilde{\beta}_3 k_2 \alpha_3 r^2 + \overline{\beta}_5 \alpha_3] K_5 - e^{-r\Delta} [\widetilde{\beta}_3 k_4 r + \widetilde{\beta}_3 k_2 \alpha_3 r^2 + \overline{\beta}_5 \alpha_3] K_6 + \\
& \left[ \frac{w\Delta^3 \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right)}{6(h_1 + h_2 + \frac{B_1}{A_1} + \frac{B_2}{A_2})} \right] K_7 + J_1 + J_2 + J_3
\end{aligned}$$

### Eq. 280

$$\begin{aligned}
v_2(\Delta) &= e^{s\Delta} \left[ \sin t\Delta \left( \widetilde{\beta}_4 k_4 s + \widetilde{\beta}_4 k_2 (2\alpha_2 st + \alpha_1 (s^2 - t^2)) + \overline{\beta}_6 \alpha_1 \right) + \cos t\Delta \left( \widetilde{\beta}_4 k_4 t + \widetilde{\beta}_4 k_2 (2\alpha_1 st - \alpha_2 (s^2 - t^2)) - \overline{\beta}_6 \alpha_2 \right) \right] K_1 + \\
& e^{s\Delta} \left[ \sin t\Delta \left( -\widetilde{\beta}_4 k_4 t + \widetilde{\beta}_4 k_2 (-2\alpha_1 st + \alpha_2 (s^2 - t^2)) + \overline{\beta}_6 \alpha_2 \right) + \cos t\Delta \left( \widetilde{\beta}_4 k_4 s + \widetilde{\beta}_4 k_2 (2\alpha_2 st + \alpha_1 (s^2 - t^2)) + \overline{\beta}_6 \alpha_1 \right) \right] K_2 + \\
& e^{-s\Delta} \left[ -\sin t\Delta \left( \widetilde{\beta}_4 k_4 s + \widetilde{\beta}_4 k_2 (2\alpha_2 st + \alpha_1 (s^2 - t^2)) + \overline{\beta}_6 \alpha_1 \right) + \cos t\Delta \left( \widetilde{\beta}_4 k_4 t + \widetilde{\beta}_4 k_2 (2\alpha_1 st - \alpha_2 (s^2 - t^2)) - \overline{\beta}_6 \alpha_2 \right) \right] K_3 + \\
& e^{-s\Delta} \left[ \sin t\Delta \left( -\widetilde{\beta}_4 k_4 t + \widetilde{\beta}_4 k_2 (-2\alpha_1 st + \alpha_2 (s^2 - t^2)) + \overline{\beta}_6 \alpha_2 \right) - \cos t\Delta \left( \widetilde{\beta}_4 k_4 s + \widetilde{\beta}_4 k_2 (2\alpha_2 st + \alpha_1 (s^2 - t^2)) + \overline{\beta}_6 \alpha_1 \right) \right] K_4 + e^{r\Delta} [\widetilde{\beta}_4 k_4 r + \widetilde{\beta}_4 k_2 \alpha_3 r^2 + \overline{\beta}_6 \alpha_3] K_5 - e^{-r\Delta} [\widetilde{\beta}_4 k_4 r + \widetilde{\beta}_4 k_2 \alpha_3 r^2 + \overline{\beta}_6 \alpha_3] K_6 + \\
& \left[ \frac{w\Delta^3 \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right)}{6(h_1 + h_2 + \frac{B_1}{A_1} + \frac{B_2}{A_2})} \right] K_7 + J_1 + J_2 + J_3
\end{aligned}$$

### Eq. 281

$$\theta_1(\mathbf{0}) = [\overline{\beta}_5(\alpha_1 t - \alpha_2 s)] K_1 + [\widetilde{\beta}_5 + \overline{\beta}_5(\alpha_2 t + \alpha_1 s)] K_2 + [\overline{\beta}_5(-\alpha_1 t + \alpha_2 s)] K_3 + [\widetilde{\beta}_5 + \overline{\beta}_5(\alpha_2 t + \alpha_1 s)] K_4 + [\widetilde{\beta}_5 + \overline{\beta}_5 \alpha_3 r] K_5 + [\widetilde{\beta}_5 + \overline{\beta}_5 \alpha_3 r] K_6 + \left[ \frac{1}{\Delta} \right] J_2$$

### Eq. 282

$$\theta_j(\mathbf{0}) = [\overline{\beta}_6(\alpha_1 t - \alpha_2 s)] K_1 + [\widetilde{\beta}_6 + \overline{\beta}_6(\alpha_2 t + \alpha_1 s)] K_2 + [\overline{\beta}_6(-\alpha_1 t + \alpha_2 s)] K_3 + [\widetilde{\beta}_6 + \overline{\beta}_6(\alpha_2 t + \alpha_1 s)] K_4 + [\widetilde{\beta}_6 + \overline{\beta}_6 \alpha_3 r] K_5 + [\widetilde{\beta}_6 + \overline{\beta}_6 \alpha_3 r] K_6 + \left[ \frac{1}{\Delta} \right] J_2$$

### Eq. 283

$$\begin{aligned}
\theta_1(\Delta) &= e^{s\Delta} \left[ \sin t\Delta \left( \widetilde{\beta}_5 + \overline{\beta}_5(\alpha_2 t + \alpha_1 s) \right) + \cos t\Delta \left( \overline{\beta}_5(\alpha_1 t - \alpha_2 s) \right) \right] K_1 + e^{s\Delta} \left[ \sin t\Delta \left( \overline{\beta}_5(-\alpha_1 t + \alpha_2 s) \right) + \cos t\Delta \left( \widetilde{\beta}_5 + \overline{\beta}_5(\alpha_2 t + \alpha_1 s) \right) \right] K_2 + e^{-s\Delta} \left[ \sin t\Delta \left( \widetilde{\beta}_5 + \overline{\beta}_5(\alpha_2 t + \alpha_1 s) \right) + \cos t\Delta \left( \overline{\beta}_5(-\alpha_1 t + \alpha_2 s) \right) \right] K_3 + \\
& e^{-s\Delta} \left[ \sin t\Delta \left( \overline{\beta}_5(\alpha_1 t - \alpha_2 s) \right) + \cos t\Delta \left( \widetilde{\beta}_5 + \overline{\beta}_5(\alpha_2 t + \alpha_1 s) \right) \right] K_4 + e^{r\Delta} [\widetilde{\beta}_5 + \overline{\beta}_5 \alpha_3 r] K_5 + e^{-r\Delta} [\widetilde{\beta}_5 + \overline{\beta}_5 \alpha_3 r] K_6 + \left[ \frac{w\Delta^2 \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right)}{2(h_1 + h_2 + \frac{B_1}{A_1} + \frac{B_2}{A_2})} \right] K_7 + \left[ \frac{2}{\Delta} \right] J_1 + \left[ \frac{1}{\Delta} \right] J_2
\end{aligned}$$

### Eq. 284

$$\theta_2(\Delta) = e^{s\Delta} \left[ \sin t\Delta \left( \widetilde{\beta}_6 + \overline{\beta}_6(\alpha_2 t + \alpha_1 s) \right) + \cos t\Delta \left( \overline{\beta}_6(\alpha_1 t - \alpha_2 s) \right) \right] K_1 + e^{s\Delta} \left[ \sin t\Delta \left( \overline{\beta}_6(-\alpha_1 t + \alpha_2 s) \right) + \cos t\Delta \left( \widetilde{\beta}_6 + \overline{\beta}_6(\alpha_2 t + \alpha_1 s) \right) \right] K_2 + e^{-s\Delta} \left[ \sin t\Delta \left( \widetilde{\beta}_6 + \overline{\beta}_6(\alpha_2 t + \alpha_1 s) \right) + \cos t\Delta \left( \overline{\beta}_6(-\alpha_1 t + \alpha_2 s) \right) \right] K_3 +$$

$$e^{-s\Delta} \left[ \sin t\Delta \left( \overline{\beta}_6(\alpha_1 t - \alpha_2 s) \right) + \cos t\Delta \left( \overline{\beta}_6 + \overline{\beta}_6(\alpha_2 t + \alpha_1 s) \right) \right] K_4 + e^{r\Delta} [\overline{\beta}_6 + \overline{\beta}_6 \alpha_3 r] K_5 + e^{-r\Delta} [\overline{\beta}_6 + \overline{\beta}_6 \alpha_3 r] K_6 + \left[ \frac{w\Delta^2 \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right)}{2 \left( h_1 + h_2 + \frac{B_1}{A_1} \frac{B_2}{A_2} \right)} \right] K_7 + \left[ \frac{2}{\Delta} \right] J_1 + \left[ \frac{1}{\Delta} \right] J_2$$

### Eq. 285

$$-N_1(0) = [-\overline{a}_1 t] K_1 + [-\overline{a}_1 s] K_2 + [-\overline{a}_1 t] K_3 + [\overline{a}_1 s] K_4 + [-\overline{a}_1 r] K_5 + [\overline{a}_1 r] K_6 + \left[ \frac{2B_1}{\Delta^2} \right] J_1 - \left[ \frac{A_1}{\Delta} \right] J_5 + [-2\overline{a}_1 s t] K_8 + [-\overline{a}_1 (s^2 - t^2)] K_9 + [2\overline{a}_1 s t] K_{10} + [-\overline{a}_1 (s^2 - t^2)] K_{11} + [-\overline{a}_1 r^2] K_{12} + [-\overline{a}_1 r^2] K_{13}$$

### Eq. 286

$$-N_2(0) = [-\overline{a}_2 t] K_1 + [-\overline{a}_2 s] K_2 + [-\overline{a}_2 t] K_3 + [\overline{a}_2 s] K_4 + [-\overline{a}_2 r] K_5 + [\overline{a}_2 r] K_6 + \left[ \frac{2B_2 - 2A_2(h_1 + h_2)}{\Delta^2} \right] J_1 - \left[ \frac{A_2}{\Delta} \right] J_5 + [-2\overline{a}_2 s t] K_8 + [-\overline{a}_2 (s^2 - t^2)] K_9 + [2\overline{a}_2 s t] K_{10} + [-\overline{a}_2 (s^2 - t^2)] K_{11} + [-\overline{a}_2 r^2] K_{12} + [-\overline{a}_2 r^2] K_{13}$$

### Eq. 287

$$N_1(\Delta) = [e^{s\Delta} \overline{a}_1 (s \sin t\Delta + t \cos t\Delta)] K_1 + [e^{s\Delta} \overline{a}_1 (s \cos t\Delta - t \sin t\Delta)] K_2 + [e^{-s\Delta} \overline{a}_1 (-s \sin t\Delta + t \cos t\Delta)] K_3 - [e^{-s\Delta} \overline{a}_1 (s \cos t\Delta + t \sin t\Delta)] K_4 + [\overline{a}_1 r e^{r\Delta}] K_5 + [-\overline{a}_1 r e^{-r\Delta}] K_6 + [-w\Delta] K_7 + \left[ \frac{-2B_1}{\Delta^2} \right] J_1 + \left[ \frac{A_1}{\Delta} \right] J_5 + [e^{s\Delta} \overline{a}_1 ((s^2 - t^2) \sin t\Delta + 2st \cos t\Delta)] K_8 + [e^{s\Delta} \overline{a}_1 ((s^2 - t^2) \cos t\Delta - 2st \sin t\Delta)] K_9 + [e^{-s\Delta} \overline{a}_1 ((s^2 - t^2) \sin t\Delta - 2st \cos t\Delta)] K_{10} + [e^{-s\Delta} \overline{a}_1 ((s^2 - t^2) \cos t\Delta + 2st \sin t\Delta)] K_{11} + [\overline{a}_1 r^2 e^{r\Delta}] K_{12} + [\overline{a}_1 r^2 e^{-r\Delta}] K_{13}$$

### Eq. 288

$$N_2(\Delta) = [e^{s\Delta} \overline{a}_2 (s \sin t\Delta + t \cos t\Delta)] K_1 + [e^{s\Delta} \overline{a}_2 (s \cos t\Delta - t \sin t\Delta)] K_2 + [e^{-s\Delta} \overline{a}_2 (-s \sin t\Delta + t \cos t\Delta)] K_3 - [e^{-s\Delta} \overline{a}_2 (s \cos t\Delta + t \sin t\Delta)] K_4 + [\overline{a}_2 r e^{r\Delta}] K_5 + [-\overline{a}_2 r e^{-r\Delta}] K_6 + [w\Delta] K_7 + \left[ \frac{2A_2(h_1 + h_2) - 2B_2}{\Delta^2} \right] J_1 + \left[ \frac{A_2}{\Delta} \right] J_5 + [e^{s\Delta} \overline{a}_2 ((s^2 - t^2) \sin t\Delta + 2st \cos t\Delta)] K_8 + [e^{s\Delta} \overline{a}_2 ((s^2 - t^2) \cos t\Delta - 2st \sin t\Delta)] K_9 + [e^{-s\Delta} \overline{a}_2 ((s^2 - t^2) \sin t\Delta - 2st \cos t\Delta)] K_{10} + [e^{-s\Delta} \overline{a}_2 ((s^2 - t^2) \cos t\Delta + 2st \sin t\Delta)] K_{11} + [\overline{a}_2 r^2 e^{r\Delta}] K_{12} + [\overline{a}_2 r^2 e^{-r\Delta}] K_{13}$$

### Eq. 289

$$-V_1(0) = [2\overline{a}_3 s t] K_1 + [\overline{a}_3 (s^2 - t^2) + w h_1] K_2 + [-2\overline{a}_3 s t] K_3 + [\overline{a}_3 (s^2 - t^2) + w h_1] K_4 + [\overline{a}_3 r^2 + w h_1] K_5 + [\overline{a}_3 r^2 + w h_1] K_6 + \left[ w \left( h_1 + \frac{B_1}{A_1} \right) + \frac{\Delta_1}{A_1} \frac{w \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right)}{\left( h_1 + h_2 + \frac{B_1}{A_1} \frac{B_2}{A_2} \right)} \right] K_7 + [\overline{a}_3 t (3s^2 - t^2)] K_8 + [\overline{a}_3 s (s^2 - 3t^2)] K_9 + [\overline{a}_3 t (3s^2 - t^2)] K_{10} + [\overline{a}_3 s (3t^2 - s^2)] K_{11} + [\overline{a}_3 r^3] K_{12} + [-\overline{a}_3 r^3] K_{13}$$

### Eq. 290

$$-V_2(0) = [2\overline{a}_4 s t] K_1 + [\overline{a}_4 (s^2 - t^2) + w h_2] K_2 + [-2\overline{a}_4 s t] K_3 + [\overline{a}_4 (s^2 - t^2) + w h_2] K_4 + [\overline{a}_4 r^2 + w h_2] K_5 + [\overline{a}_4 r^2 + w h_2] K_6 + \left[ w \left( h_2 - \frac{B_2}{A_2} \right) + \frac{\Delta_2}{A_2} \frac{w \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right)}{\left( h_1 + h_2 + \frac{B_1}{A_1} \frac{B_2}{A_2} \right)} \right] K_7 + [\overline{a}_4 t (3s^2 - t^2)] K_8 + [\overline{a}_4 s (s^2 - 3t^2)] K_9 + [\overline{a}_4 t (3s^2 - t^2)] K_{10} + [\overline{a}_4 s (3t^2 - s^2)] K_{11} + [\overline{a}_4 r^3] K_{12} + [-\overline{a}_4 r^3] K_{13}$$

### Eq. 291

$$V_1(\Delta) = [-e^{s\Delta} \overline{a}_3 ((s^2 - t^2) \sin t\Delta + 2st \cos t\Delta) - w h_1 e^{s\Delta} \sin t\Delta] K_1 + [-e^{s\Delta} \overline{a}_3 ((s^2 - t^2) \cos t\Delta - 2st \sin t\Delta) - w h_1 e^{s\Delta} \cos t\Delta] K_2 + [-e^{-s\Delta} \overline{a}_3 ((s^2 - t^2) \sin t\Delta - 2st \cos t\Delta) - w h_1 e^{-s\Delta} \sin t\Delta] K_3 + [-e^{-s\Delta} \overline{a}_3 ((s^2 - t^2) \cos t\Delta + 2st \sin t\Delta) - w h_1 e^{-s\Delta} \cos t\Delta] K_4 + [-\overline{a}_3 r^2 e^{r\Delta} - w h_1 e^{r\Delta}] K_5 + [-\overline{a}_3 r^2 e^{-r\Delta} - w h_1 e^{-r\Delta}] K_6$$

$$\begin{aligned}
& wh_1 e^{-r\Delta} K_6 + \left[ -w \left( h_1 + \frac{B_1}{A_1} \right) - \frac{\Delta_1}{A_1} \frac{w \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right)}{\left( h_1 + h_2 + \frac{B_1}{A_1} + \frac{B_2}{A_2} \right)} \right] K_7 + \\
& [-e^{s\Delta} \bar{a}_3 (s(s^2 - 3t^2) \sin t\Delta + t(3s^2 - t^2) \cos t\Delta)] K_8 + \\
& [-e^{s\Delta} \bar{a}_3 (s(s^2 - 3t^2) \cos t\Delta - t(3s^2 - t^2) \sin t\Delta)] K_9 + \\
& [-e^{-s\Delta} \bar{a}_3 (s(3t^2 - s^2) \sin t\Delta + t(3s^2 - t^2) \cos t\Delta)] K_{10} + [-e^{-s\Delta} \bar{a}_3 (s(3t^2 - s^2) \cos t\Delta - t(3s^2 - \\
& t^2) \sin t\Delta)] K_{11} + [-\bar{a}_3 r^3 e^{r\Delta}] K_{12} + [\bar{a}_3 r^3 e^{-r\Delta}] K_{13}
\end{aligned}$$

### Eq. 292

$$\begin{aligned}
V_2(\Delta) = & [-e^{s\Delta} \bar{a}_4 ((s^2 - t^2) \sin t\Delta + 2st \cos t\Delta) - wh_2 e^{s\Delta} \sin t\Delta] K_1 + [-e^{s\Delta} \bar{a}_4 ((s^2 - t^2) \cos t\Delta - \\
& 2st \sin t\Delta) - wh_2 e^{s\Delta} \cos t\Delta] K_2 + [-e^{-s\Delta} \bar{a}_4 ((s^2 - t^2) \sin t\Delta - 2st \cos t\Delta) - wh_2 e^{-s\Delta} \sin t\Delta] K_3 + \\
& [-e^{-s\Delta} \bar{a}_4 ((s^2 - t^2) \cos t\Delta + 2st \sin t\Delta) - wh_2 e^{-s\Delta} \cos t\Delta] K_4 + [-\bar{a}_4 r^2 e^{r\Delta} - wh_2 e^{r\Delta}] K_5 + [-\bar{a}_4 r^2 e^{-r\Delta} - \\
& wh_2 e^{-r\Delta}] K_6 + \left[ -w \left( h_2 - \frac{B_2}{A_2} \right) - \frac{\Delta_2}{A_2} \frac{w \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right)}{\left( h_1 + h_2 + \frac{B_1}{A_1} + \frac{B_2}{A_2} \right)} \right] K_7 + \\
& [-e^{s\Delta} \bar{a}_4 (s(s^2 - 3t^2) \sin t\Delta + t(3s^2 - t^2) \cos t\Delta)] K_8 + \\
& [-e^{s\Delta} \bar{a}_4 (s(s^2 - 3t^2) \cos t\Delta - t(3s^2 - t^2) \sin t\Delta)] K_9 + \\
& [-e^{-s\Delta} \bar{a}_4 (s(3t^2 - s^2) \sin t\Delta + t(3s^2 - t^2) \cos t\Delta)] K_{10} + [-e^{-s\Delta} \bar{a}_4 (s(3t^2 - s^2) \cos t\Delta - t(3s^2 - \\
& t^2) \sin t\Delta)] K_{11} + [-\bar{a}_4 r^3 e^{r\Delta}] K_{12} + [\bar{a}_4 r^3 e^{-r\Delta}] K_{13}
\end{aligned}$$

### Eq. 293

$$\begin{aligned}
-M_1(0) = & [-\bar{a}_3 t] K_1 + [-\bar{a}_3 s] K_2 + [-\bar{a}_3 t] K_3 + [\bar{a}_3 s] K_4 + [-\bar{a}_3 r] K_5 + [\bar{a}_3 r] K_6 + \left[ \frac{-2D_1}{\Delta^2} \right] J_1 + \left[ \frac{B_1}{\Delta} \right] J_5 + \\
& [-2\bar{a}_3 st] K_8 + [-\bar{a}_3 (s^2 - t^2)] K_9 + [2\bar{a}_3 st] K_{10} + [-\bar{a}_3 (s^2 - t^2)] K_{11} + [-\bar{a}_3 r^2] K_{12} + [-\bar{a}_3 r^2] K_{13}
\end{aligned}$$

### Eq. 294

$$\begin{aligned}
-M_2(0) = & [-\bar{a}_4 t] K_1 + [-\bar{a}_4 s] K_2 + [-\bar{a}_4 t] K_3 + [\bar{a}_4 s] K_4 + [-\bar{a}_4 r] K_5 + [\bar{a}_4 r] K_6 + \left[ \frac{2B_2(h_1+h_2)-2D_2}{\Delta^2} \right] J_1 + \\
& \left[ \frac{B_2}{\Delta} \right] J_5 + [-2\bar{a}_4 st] K_8 + [-\bar{a}_4 (s^2 - t^2)] K_9 + [2\bar{a}_4 st] K_{10} + [-\bar{a}_4 (s^2 - t^2)] K_{11} + [-\bar{a}_4 r^2] K_{12} + [-\bar{a}_4 r^2] K_{13}
\end{aligned}$$

### Eq. 295

$$\begin{aligned}
M_1(\Delta) = & [e^{s\Delta} \bar{a}_3 (s \sin t\Delta + t \cos t\Delta)] K_1 + [e^{s\Delta} \bar{a}_3 (s \cos t\Delta - t \sin t\Delta)] K_2 + [e^{-s\Delta} \bar{a}_3 (-s \sin t\Delta + \\
& t \cos t\Delta)] K_3 - [e^{-s\Delta} \bar{a}_3 (s \cos t\Delta + t \sin t\Delta)] K_4 + [\bar{a}_3 r e^{r\Delta}] K_5 + [-\bar{a}_3 r e^{-r\Delta}] K_6 + \\
& \left[ w\Delta \left( \frac{B_1}{A_1} + \frac{\Delta_1}{A_1} \frac{\left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right)}{\left( h_1 + h_2 + \frac{B_1}{A_1} + \frac{B_2}{A_2} \right)} \right) \right] K_7 + \left[ \frac{2D_1}{\Delta^2} \right] J_1 + \left[ -\frac{B_1}{\Delta} \right] J_5 + \left[ e^{s\Delta} \bar{a}_3 ((s^2 - t^2) \sin t\Delta + 2st \cos t\Delta) \right] K_8 + \\
& \left[ e^{s\Delta} \bar{a}_3 ((s^2 - t^2) \cos t\Delta - 2st \sin t\Delta) \right] K_9 + \left[ e^{-s\Delta} \bar{a}_3 ((s^2 - t^2) \sin t\Delta - 2st \cos t\Delta) \right] K_{10} + \left[ e^{-s\Delta} \bar{a}_3 ((s^2 - \\
& t^2) \cos t\Delta + 2st \sin t\Delta) \right] K_{11} + [\bar{a}_3 r^2 e^{r\Delta}] K_{12} + [\bar{a}_3 r^2 e^{-r\Delta}] K_{13}
\end{aligned}$$

### Eq. 296

$$\begin{aligned}
M_2(\Delta) = & [e^{s\Delta} \bar{a}_4 (s \sin t\Delta + t \cos t\Delta)] K_1 + [e^{s\Delta} \bar{a}_4 (s \cos t\Delta - t \sin t\Delta)] K_2 + [e^{-s\Delta} \bar{a}_4 (-s \sin t\Delta + \\
& t \cos t\Delta)] K_3 - [e^{-s\Delta} \bar{a}_4 (s \cos t\Delta + t \sin t\Delta)] K_4 + [\bar{a}_4 r e^{r\Delta}] K_5 + [-\bar{a}_4 r e^{-r\Delta}] K_6 + \\
& \left[ -w\Delta \left( \frac{B_2}{A_2} - \frac{\Delta_2}{A_2} \frac{\left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right)}{\left( h_1 + h_2 + \frac{B_1}{A_1} + \frac{B_2}{A_2} \right)} \right) \right] K_7 + \left[ \frac{2D_2 - 2B_2(h_1+h_2)}{\Delta^2} \right] J_1 + \left[ -\frac{B_2}{\Delta} \right] J_5 + \\
& \left[ e^{s\Delta} \bar{a}_4 ((s^2 - t^2) \sin t\Delta + 2st \cos t\Delta) \right] K_8 + \left[ e^{s\Delta} \bar{a}_4 ((s^2 - t^2) \cos t\Delta - 2st \sin t\Delta) \right] K_9 + \left[ e^{-s\Delta} \bar{a}_4 ((s^2 - \\
& t^2) \sin t\Delta - 2st \cos t\Delta) \right] K_{10} + \left[ e^{-s\Delta} \bar{a}_4 ((s^2 - t^2) \cos t\Delta + 2st \sin t\Delta) \right] K_{11} + [\bar{a}_4 r^2 e^{r\Delta}] K_{12} + \\
& [\bar{a}_4 r^2 e^{-r\Delta}] K_{13}
\end{aligned}$$

### 5.3.4 Modifications des hypothèses initiales

Pour la formulation du ME avec prise en compte de l'équilibre d'Hart-Smith, les expressions des constantes modifiées sont données ci-dessous :

$$\text{Eq. 297 } k_1 = w \frac{G}{e} \left[ \frac{D_1}{\Delta_1} \left( 1 + \frac{h_1(h_1+h)A_1}{D_1} \right) + \frac{D_2}{\Delta_2} \left( 1 + \frac{h_2(h_2+h)A_2}{D_2} \right) + 2 \left( \frac{(h_1+\frac{h}{2})B_1}{\Delta_1} - \frac{(h_1+\frac{h}{2})B_2}{\Delta_2} \right) \right]$$

$$\text{Eq. 298 } k_3 = w \frac{E}{e} \left[ \frac{(h_1+h)A_1}{\Delta_1} - \frac{(h_2+h)A_2}{\Delta_2} + \left( \frac{B_1}{\Delta_1} + \frac{B_2}{\Delta_2} \right) \right]$$

$$\text{Eq. 299 } A_{10} = -\frac{w}{\Delta_1} (B_1 + (h_1 + h)A_1)$$

$$\text{Eq. 300 } A_{20} = \frac{w}{\Delta_2} (B_2 - (h_2 + h)A_2)$$

$$\text{Eq. 301 } C_{10} = -\frac{w}{\Delta_1} ((h_1 + h)B_1 + D_1)$$

$$\text{Eq. 302 } C_{20} = \frac{w}{\Delta_2} (-(h_2 + h)B_2 + D_2)$$

Les expressions des efforts tranchants son modifiées en :

$$\text{Eq. 303 } V_1(x) = -\widetilde{a}_3 \frac{d^2T}{dx^2} - \widetilde{a}_3 \frac{d^3S}{dx^3} - w(h_1 + h)T - \frac{6\Delta_1 J_0 + w\Delta^3 B_1 K_7}{A_1 \Delta^3}$$

$$\text{Eq. 304 } V_2(x) = -\widetilde{a}_4 \frac{d^2T}{dx^2} - \widetilde{a}_4 \frac{d^3S}{dx^3} - w(h_2 + h)T - \frac{6\Delta_2 J_0 + w\Delta^3 B_2 K_7}{A_2 \Delta^3}$$

Les efforts tranchants nodaux (section 5.3.3) sont alors à modifier en remplaçant  $h_i$  par  $h_i+h$  pour le substrat  $i$ .

Pour la formulation du ME avec prise en compte d'une contrainte cisaillement linéaire dans l'épaisseur des substrats selon Tsai *et al*, les expressions des constantes modifiées sont données ci-dessous :

$$\text{Eq. 305 } A_{10} = -\frac{w}{\Delta_1} (B_1 + h_1 A_1) + \frac{B_1 C_1 - A_1 C_1'}{\Delta_2} k'_1$$

$$\text{Eq. 306 } B_{10} = -\frac{w A_1}{\Delta_1} + \frac{B_1 C_1 - A_1 C_1'}{\Delta_2} k'_2$$

$$\text{Eq. 307 } A_{20} = \frac{w}{\Delta_2} (B_2 - h_2 A_2) + \frac{B_2 C_2 - A_2 C_2'}{\Delta_2} k'_1$$

$$\text{Eq. 308 } B_{20} = \frac{w A_2}{\Delta_2} + \frac{B_2 C_2 - A_2 C_2'}{\Delta_2} k'_2$$

$$\text{Eq. 309 } C_{10} = -\frac{w}{\Delta_1} (h_1 B_1 + D_1) + \frac{D_1 C_1 - B_1 C_1'}{\Delta_1} k'_1$$

$$\text{Eq. 310 } D_{10} = -\frac{w B_1}{\Delta_1} + \frac{D_1 C_1 - B_1 C_1'}{\Delta_1} k'_2$$

$$\text{Eq. 311 } C_{20} = \frac{w}{\Delta_2} (-h_2 B_2 + D_2) + \frac{D_2 C_2 - B_2 C_2'}{\Delta_2} k'_1$$

$$\text{Eq. 312 } D_{20} = \frac{wB_2}{\Delta_2} + \frac{D_2C_2 - B_2C'_2}{\Delta_2} k'_2$$

$$\text{Eq. 313 } \widetilde{a}_1 = A_1\widetilde{\beta}_1 - B_1\widetilde{\beta}_5 - C_1$$

$$\text{Eq. 314 } \widetilde{a}_2 = A_2\widetilde{\beta}_2 - B_2\widetilde{\beta}_6 - C_2$$

$$\text{Eq. 315 } \widetilde{a}_3 = -B_1\widetilde{\beta}_1 + D_1\widetilde{\beta}_5 + C'_1$$

$$\text{Eq. 316 } \widetilde{a}_4 = -B_2\widetilde{\beta}_2 + D_2\widetilde{\beta}_6 + C'_2$$

## 6 Annexe B : Notice au 17/12/2020

### 6.1 Identification

Mes données d'identification sont fournies dans la [Table 1](#). Les abréviations utilisées sont définies selon :

- ISAE pour « Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace » ;
- ENSICA pour « École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Constructions Aéronautiques » ;
- DEA pour « Diplôme d'Études Approfondies ».

<b>Nom</b>	PAROISSIEN
<b>Prénom</b>	Éric
<b>Date et lieu de naissance</b>	██
<b>Nationalité</b>	████████
<b>Fonction</b>	enseignant-chercheur en structures aérospatiales
<b>Établissement actuel</b>	enseignement : ISAE-SUPAERO recherche : Institut Clément Ader (ICA)
<b>Doctorat obtenu le</b>	21 novembre 2006 à Toulouse
<b>Autres diplômes</b>	DEA de Génie Mécanique de l'ENSICA (2003) Ingénieur ENSICA (2003) Baccalauréat Scientifique Option Maths (1997)

**Table 1** Tableau d'identification. *Dans la version du mémoire soumise par l'HDR les information relatives à la naissance et à la nationalité ont été fournies.*

## 6.2 Parcours universitaire

Mon parcours universitaire est synthétisé dans la [Table 2](#).

<b>02/2004 – 12/2006</b>	<b>Université Paul Sabatier</b> Doctorat de Génie Mécanique   mention Très Honorable Toulouse (31), France
<b>09/2002 – 09/2003</b>	<b>ENSICA</b> DEA de Génie Mécanique   mention Très Bien Toulouse (31), France
<b>09/2000 – 09/2003</b>	<b>ENSICA</b> Ingénieur de Constructions Aéronautiques Toulouse (31), France
<b>09/1997 – 07/2000</b>	<b>Lycée Albert Schweitzer</b> CPGE (MPSI, MP*) Le Raincy (93), France
<b>07/1997</b>	<b>Lycée André Baulloche</b> Baccalauréat Scientifique Option Maths   mention Bien Livry-Gargan (93), France

**Table 2** Synthèse du parcours universitaire.

### 6.3 Parcours professionnel (après le doctorat)

Mon parcours professionnel est synthétisé dans la [Table 3](#).

<b>depuis 12/2016</b>	<b>EUROSAE</b> Animateur et formateur (formation continue) Toulouse (31), France
<b>depuis 09/2016</b>	<b>ISAE-SUPAERO</b> Enseignant-chercheur en structures aérospatiales Toulouse (31), France
<b>09/2014 – 08/2016</b>	<b>Bordeaux INP / ENSEIRB-MATMECA</b> Professeur associé à mi-temps (PAST) Talence (33), France
<b>01/2007 – 08/2016</b>	<b>SOGETI High Tech (CAPGEMINI)</b> Manager de l'innovation (08/2014 – 08/2016) Chef de projet de recherche (01/2008 – 08/2016) Ingénieur de recherche (01/2007 – 08/2016) Blagnac et Toulouse (31), France
<b>01/2007 – 08/2014</b>	<b>ENSICA puis ISAE cursus ENSICA</b> Enseignant vacataire Toulouse (31), France

**Table 3** Synthèse du parcours professionnel.

## 6.4 Activités d'enseignement

### 6.4.1 Introduction

Mes activités d'enseignement ont commencé en 2004 alors que j'étais en thèse de doctorat. Entre 2004 et 2014, j'ai alors été enseignant vacataire à l'ENSICA puis à l'ISAE cursus ENSICA. Entre 2014 et 2016, j'ai occupé un poste de professeur associé à mi-temps (PAST) à Bordeaux INP / ENSEIRB-MATMECA. Depuis septembre 2016, j'enseigne en tant qu'enseignant-chercheur l'ISAE-SUPAERO.

Dans les sections qui suivent, mes activités d'enseignement sont présentées de manière synthétique pour chacune des trois périodes :

- 2004-2014 : enseignant vacataire à l'ENSICA puis à l'ISAE cursus ENSICA (6.4.2)
- 2014-2016 : PAST à Bordeaux INP / ENSEIRB-MATMECA (0)
- depuis 2016 : enseignement-chercheur à l'ISAE-SUPAERO (0)

Mes activités d'enseignement se décomposent en trois tâches :

- face-à-face pédagogique
- responsabilité de cours
- correspondance de cours

Les tâches de face-à-face pédagogique et de responsabilité de cours sont évidentes. La correspondance de cours désigne une tâche pour laquelle la responsabilité de cours est exercée par une personne extérieure à l'entité délivrant l'enseignement et qui consiste à réaliser l'interface.

Le face-à-face pédagogique est catégorisé sous les cinq natures suivantes :

- cours (C) ;
- travaux dirigés (TD) ;
- travaux pratiques (TP) ;
- petite classe (PC) ;
- bureau d'études (BE).

Une PC correspond à une séance avec un effectif d'étudiants réduit pendant laquelle des exercices et des éléments de cours sont présentés. Un BE correspond à une séance où des exercices, généralement inspirés de cas industriels donc plus élaborés que les exercices classiques de TD, sont réalisés en autonomie par les étudiants et avec le support du professeur. Quand les noms des cours sont écrits en anglais, l'enseignement est dispensé en anglais.

Enfin, quelques explications sur la typologie des personnels scientifiques à l'ISAE-SUPAERO et l'organisation des enseignements sont données ci-après.

Les personnels scientifiques de l'ISAE-SUPAERO sont soit enseignant, soit ingénieur-chercheur ou soit enseignant-chercheur. Un enseignant-chercheur de l'ISAE SUPAERO est soit professeur associé, soit professeur. Une condition nécessaire mais non suffisante pour passer au grade de professeur est de justifier d'une HDR.

Un enseignant-chercheur n'a pas de service chiffré en termes de volume d'enseignement en face-à-face pédagogique. Au DMSM, ces dernières années un professeur réalise en moyenne 60h par année scolaire de face-à-face pédagogique tandis qu'un professeur associé réalise en moyenne 80h par année scolaire. A l'ISAE-SUPAERO, les enseignements se déroulent en général en parallèle. Il est rare qu'un cours soit répété. Vu le nombre d'enseignant relativement à la tailles des promotions et au nombre de promotions, de nombreux vacataires interviennent. Un enseignant-chercheur doit gérer les vacataires qui interviennent sur les modules dont il a la responsabilité.

## 6.4.2 2004-2014 : enseignant vacataire à l'ENSICA puis l'ISAE formation ENSICA

### Face-à-face pédagogique

La liste des matières enseignées, la nature des enseignements et le niveau associé sont listés dans la [Table 4](#), tandis que le volume en heures année scolaire par année scolaire est fourni dans la [Table 5](#).

MATIÈRE	NATURE	NIVEAU
Mécanique générale	TD	L3
Poutres longues	TD, PC	L3
Théorie des plaques	TD	L3
Résistance des constructions	BE	M1

**Table 4** Matière, nature et niveau pour la période 2004-2014.

ANNÉE SCOLAIRE	VOLUME EN HEURES
2004 - 2005	10
2005 - 2006	31
2006 - 2007	45
2007 - 2008	45
2008 - 2009	46
2009 - 2010	45
2010 - 2011	45
2011 - 2012	49
2012 - 2013	54
2013 - 2014	61

**Table 5** Volume en heures pour la période 2004-2014.

### Responsabilité de cours

Je n'avais aucune responsabilité de cours.

### Correspondance de cours

Je n'avais aucune correspondance de cours.

### 6.4.3 2014-2016 : professeur associé à mi-temps à l'ENSEIRB-MATMECA

#### Face-à-face pédagogique

La liste des matières enseignées, la nature des enseignements et le niveau associé est listé dans la [Table 6](#), tandis que le volume en heures équivalent TD année scolaire par année scolaire est fourni dans la [Table 7](#).

MATIÈRE	NATURE	NIVEAU
Mécanique des assemblages	C, TD, TP	M2
Éléments finis	C, TP	M2

[Table 6](#) Matière, nature et niveau pour la période 2014-2016.

ANNÉE SCOLAIRE	VOLUME EN HEURES EQUIVALENT TD
2014 - 2015	96
2015 - 2016	96

[Table 7](#) Volume en heures équivalent TD pour la période 2014-2016.

Les volumes horaires incluent aussi des tutorats de projet de fin d'études.

#### Responsabilité de cours

J'avais la responsabilité de la matière « Mécanique des assemblages », où j'étais le seul à intervenir en face-à-face pédagogique.

#### Correspondance de cours

Je n'avais aucune correspondance de cours.

#### 6.4.4 Depuis 2016 : enseignant-chercheur à l'ISAE-SUPAERO

##### Face-à-face pédagogique

La liste des matières enseignées, la nature des enseignements et le niveau associé est listé dans la [Table 8](#), tandis que le volume en heures année scolaire par année scolaire est fourni dans la [Table 9](#). *MS signifie mastère spécialisé.*

MATIÈRE	NATURE	NIVEAU
Calcul de structures 1 : poutres	TD, BE	L3
Calcul de structures 2 : plaques	TD	M1
Calcul de structures 2 : EF	TP	M1
Introduction to aircraft structures. Beam theory	C, TD, BE	L3-M1
Flight loads and ground loads	BE	M1
Preliminary design of aircraft structures	C, PC, BE	M1, MS
Modelling of aircraft structures	BE	MS
Assembly	C	MS

[Table 8](#) Matière, nature et niveau depuis 2016.

ANNÉE SCOLAIRE	VOLUME EN HEURES
2016 - 2017	61
2017 - 2018	110
2018 - 2019	66
2019 - 2020	69

[Table 9](#) Volume en heures depuis 2016.

##### Responsabilité de cours

Mes responsabilités de cours et le niveau associé sont listés dans la [Table 10](#).

De plus, un taux est ajouté afin d'indiquer si j'exerce seul la responsabilité (100%) ou en binôme (50%).

<b>MATIÈRE</b>	<b>TAUX</b>	<b>NIVEAU</b>
Calcul de structures 1 : poutres	50%	L3
Introduction to aircraft structures. Beam theory	100%	L3-M1
Aircraft structures 1	100%	M1
Modelling of aircraft structures	100%	MS

**Table 10** Responsabilité de cours, taux et niveau associés depuis 2016.

### Correspondance de cours

Mes correspondances de cours et le niveau associé sont listés dans la [Table 11](#). Pour tous les cours dont j'ai la correspondance, je suis le seul correspondant.

<b>MATIÈRE</b>	<b>NIVEAU</b>
Introduction aux charges et structures des aéronefs	M2
Aircraft structures 2	M2
Aircraft structures	MS

**Table 11** Correspondance de cours et niveau associé depuis 2016.

## 6.5 Activités de recherche

### 6.5.1 Synthèse

Depuis 2003, mes activités de recherche se sont concrétisées par des communications sous diverses formes (Table 12).

Un total de 54 communications est dénombré. Sur ces 54 communications,

- 2 sont associées à mon stage de DEA
- 8 sont associées à ma thèse de doctorat
- 11 sont associées à ma période professionnelle industrielle (2007-2016)
- 33 sont associées à ma période professionnelle universitaire (2016-2020)

De plus, le 02/12/2007, ma thèse de doctorat a reçu un Prix d'Académie de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse.

<b>Mémoire de thèse</b> TH	2
<b>Chapitre de livre</b> OSC	2
<b>Article avec comité de lecture</b> ACL	19
<b>Article de conférence</b> ACT	12
<b>Communication invitée</b> INV	1
<b>Conférence sans article</b> COM	9
<b>Poster dans une conférence</b> AFF	4
<b>Autre publication</b> AP	5
<b>Brevet</b>	0

**Table 12** Synthèse des communications issues des travaux de recherche.

## 6.5.2 Liste des communications

Une liste exhaustive catégorisée de ces communications est fournie ci-après. Quand cela est possible, un lien hypertexte donnant l'identifiant numérique de l'article (doi) et renvoyant vers la page web du site de l'éditeur fournissant la communication et/ou un lien hypertexte renvoyant vers la page OATAO (« oatao link ») de la communication sont fournis. *Enfin, mon nom est indiqué en police gras couleur bleu afin de faciliter le travail d'évaluation.*

### Mémoire de thèse (TH) : 2

[3] **Paroissien, E.**, 2006. *Contribution aux assemblages hybrides (boulonnés/collés) – Application aux jonctions aéronautiques*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse III (FR). [oatao link](#)

[1] **Paroissien, E.**, 2003. *Reprise hydrique des matériaux composites carbone époxy (IM7/977-2)*. EADS CCR, Mémoire de fin d'études, Ingénieur ENSICA, Toulouse (FR).

### Chapitre de livre (OSC) : 2

[17] **Paroissien, E.**, Lachaud, F., Jacobs, T., 2013. *A simplified stress analysis of bonded joints using macro-elements*. In the book: *Advances in Modeling and Design of Adhesively Bonded Multilayered Systems*. Editors: K.L. Mittal and S. Kumar, Wiley Eds., Chapter 4, pp. 93-146. [doi: 10.1002/9781118753682.ch4](#) | [oatao link](#)

[8] **Paroissien E.**, Sartor M, Huet J. *Hybrid (bolted/bonded) joints applied to aeronautic parts: Analytical one-dimensional models of a single-lap joint*. In: Tichkiewitch S, Tollenaere M, Ray P, editors. *Advanced in integrated design and manufacturing in mechanical engineering II*. Dordrecht, The Netherlands: Springer; 2007. p. 95–110. [doi: 10.1007/978-1-4020-6761-7\\_7](#) | [oatao link](#)

### Article avec comité de lecture (ACL) : 19

[54] Torrelli, V., **Paroissien, E.**, 2020. *Simplified stress analysis of multilayered bonded structure under 1D-bar kinematics*. *Composite Structures*, 112, 112641. [doi: 10.1016/j.compstruct.2020.112641](#) | [oatao link](#)

[53] Birro, T., **Paroissien, E.**, Aufray, M., Lachaud, F., 2020. *A methodology based on the coupled criterion for the assessment of adhesive-to-adherend interface crack initiation*. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 102, 102664. [doi: 10.1016/j.ijadhadh.2020.102664](#) | [oatao link](#)

- [52] Montagne, B., Lachaud, F., **Paroissien, E.**, Martini, D., Congourdeau, F., 2020. *Failure analysis of single lap composite laminate bolted joints: comparison of experimental and numerical tests*. Composite Structures 238, 111949  
[doi: 10.1016/j.compstruct.2020.111897](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.111897) | [oatao link](#)
- [51] Lachaud, F., **Paroissien, E.**, Michel, L., 2020. *Validation of a simplified analysis for the simulation of delamination of CFRP composite laminated materials under pure mode I*. Composite Structures, 237, 111897  
[doi: 10.1016/j.compstruct.2020.111897](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.111897) | [oatao link](#)
- [50] Jaillon, A., Jumel, J., Lachaud, F., **Paroissien, E.**, 2020. *Mode I cohesive zone model parameters identification and comparison of measurement techniques based on uncertainty estimation*. International Journal of Solids and Structures, 191-192, 577-587.  
[doi: 10.1016/j.ijsolstr.2019.12.014](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.12.014) | [oatao link](#)
- [46] Schwartz, S., **Paroissien, E.**, Lachaud, F., 2020. *General formulation of macro-elements for the simulation of multi-layered bonded structures*. The Journal of Adhesion, 96 (6), 602-632  
[doi: 10.1080/00218464.2019.1622420](https://doi.org/10.1080/00218464.2019.1622420) | [oatao link](#)
- [45] Jaillon, A., Jumel, J., **Paroissien, E.**, Lachaud, F., 2020. *Mode I cohesive zone model parameters identification and comparison of measurement techniques for robustness to the law shape evaluation*. The Journal of Adhesion, 96 (1-4), 272-299  
[doi: 10.1080/00218464.2019.1669450](https://doi.org/10.1080/00218464.2019.1669450) | [oatao link](#)
- [44] Ordonneau, B., **Paroissien, E.**, Salaün, M., Malrieu, J., Guigue, A., Schwartz, S., 2020. *A methodology for the computation of the macro-element stiffness matrix for the stress analysis of a lap joint with functionally graded adhesive properties*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 97, 102505.  
[doi: 10.1016/j.ijadhadh.2019.102505](https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2019.102505) | [oatao link](#)
- [43] Sekmen, K., **Paroissien, E.**, Lachaud, F., 2020. *Simplified stress analysis of multilayered adhesively bonded structures*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 97, 102497.  
[doi: 10.1016/j.ijadhadh.2019.102497](https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2019.102497) | [oatao link](#)
- [32] **Paroissien, E.**, Lachaud, F., 2019. *On the potential static strength of hybrid (bolted/bonded) lap joints with functionally graded adhesives*. AIAA Journal, 57 (9), 4093-4103.  
[doi: 10.2514/1.J058372](https://doi.org/10.2514/1.J058372) | [oatao link](#)
- [31] **Paroissien, E.**, Lachaud, F., da Silva, L.F.M., Seddiki, S., 2019. *A comparison between macro-element and finite element solutions for the stress analysis of functionally graded single-lap joints*. Composite Structures, 215, 331-350.  
[doi: 10.1016/j.compstruct.2019.02.070](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.02.070) | [oatao link](#)

[30] Lélias, G., **Paroissien, E.**, Lachaud, F., Morlier, J., 2019. *Experimental characterization of cohesive zone models for thin adhesive layers loaded in mode I, mode II, and mixed-mode I/II by the use of a direct method*. International Journal of Solids and Structures, 158, 90-115.

[doi: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.005](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.005) | [oatao link](#)

[29] **Paroissien, E.**, da Silva, L.F.M., Lachaud, F., 2018. *Simplified stress analysis of functionally graded single-lap joints subjected to combined thermal and mechanical loads*. Composite Structures, 203, 85-100.

[doi: 10.1016/j.compstruct.2018.07.015](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.07.015) | [oatao link](#)

[25] **Paroissien, E.**, Lachaud, F., Morlier, J., Schwartz, S., 2018. *A direct method for the assessment of cohesive zone models for thin adhesive layers loaded in mode I, mode II, and mixed-mode I/II*. Reviews of Adhesion and Adhesives.

[doi: 10.7569/RAA.2018.097301](https://doi.org/10.7569/RAA.2018.097301) | [oatao link](#)

[21] **Paroissien, E.**, Lachaud, F., Schwartz, S., Da Veiga, A., Barrière, P., 2017. *Simplified stress analysis of hybrid (bolted/bonded) joints*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 77, 183-197.

[doi: 10.1016/j.ijadhadh.2017.05.003](https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2017.05.003) | [oatao link](#)

[19] Lélias, G., **Paroissien, E.**, Lachaud, F., Morlier, J., Schwartz, S., Gavaille, C., 2015. *An extended semi-analytical formulation for fast and reliable stress analysis of adhesively bonded joints*. International Journal of Solids and Structures, 62, 18-39.

[doi: 10.1016/j.ijsolstr.2014.12.027](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.12.027) | [oatao link](#)

[16] **Paroissien, E.**, Gaubert, F., Da Veiga, A., Lachaud, F., 2013. *Elasto-plastic analysis of bonded joints with macro-elements*. Journal of Adhesion Science and Technology, 27 (13), 1464-1498.

[doi: 10.1080/01694243.2012.745053](https://doi.org/10.1080/01694243.2012.745053) | [oatao link](#)

[15] Hoang-Ngoc, C.T., **Paroissien, E.**, 2010. *Simulation of single-lap bonded and hybrid (bolted/bonded) joints with flexible adhesive*. International Journal of Adhesion and Adhesives, 30 (3), 117-129.

[doi: 10.1016/j.ijadhadh.2009.12.002](https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2009.12.002) | [oatao link](#)

[7] **Paroissien, E.**, Sartor, M., Huet, J., Lachaud, F., 2007. *Analytical two-dimensional model of a hybrid (bolted/bonded) single-lap joint*. Journal of Aircraft, 44 (2), 573-582.

[doi: 10.2514/1.24452](https://doi.org/10.2514/1.24452) | [oatao link](#)

#### Article de conférence (ACT) : 12

[42] Montagne, B., Lachaud, F., **Paroissien, E.**, Martini, D., Congourdeau, F., 2019. *Nonlinear finite element analysis of composite bolted lap-joints: experimental vs. numerical tests*.

Proceedings of 22nd Conference on Composite Materials (ICCM 22), 11-16 August 2019, Melbourne (AU). [oatao link](#)

[41] Jaillon, A., Jumel, J., Lachaud, F., **Paroissien, E.**, 2019. *Cohesive zone model identification on mode I bonded assembly: sensitivity analysis*. Proceedings of 22nd Conference on Composite Materials (ICCM 22), 11-16 August 2019, Melbourne (AU). [oatao link](#)

[34] Montagne, B., Lachaud, F., **Paroissien, E.**, Martini, D., Congourdeau, F., Dragon-Louiset, M., 2019. *Analyse non linéaire par éléments finis d'assemblages composites boulonnés : comparaison essais-calculs*. Proceedings of 21st Journées Nationales Composites (JNC 21), 1-3 July 2019, Bordeaux (FR). [oatao link](#)

[33] Jaillon, A., Jumel, J., Lachaud, F., **Paroissien, E.**, 2019. *Identification des modèles de zones cohésives en mode I pour des assemblages composites collés : état de l'art et analyse de sensibilité*. Proceedings of 21st Journées Nationales Composites (JNC 21), 1-3 July 2019, Bordeaux (FR). [oatao link](#)

[24] Montagne, B., Lachaud, F., **Paroissien, E.**, Martini, D., 2018. *Analyzing the failure of composite bolted joints: experimental results and 2D analysis*. Proceedings of 18th European Conference on Composite Materials (ECCM 2018), 25-28 June 2018, Athens (GR). [oatao link](#)

[23] Jaillon, A., Jumel, J., Lachaud, F., **Paroissien, E.**, Renart, J., 2018. *Thickness influence on a structural methacrylate adhesive behavior*. Proceedings of 6th World Congress on Adhesion and Related Phenomena (WCARP 2018), 25 February – 2 March 2018, San Diego (CA). [oatao link](#)

[14] **Paroissien, E.**, Da Veiga, A., Laborde, A., 2011. *An 1D-beam approach for stress analysis and fatigue life prediction of bonded joints*. 26th International Committee on Aeronautical Fatigue (ICAF 2011), 1–3 June 2011, Montréal, CN, Book of Proceedings, Springer Eds., ISBN 978-94-007-1663-6, pp. 359-374. [oatao link](#)

[13] **Paroissien, E.**, Hoang-Ngoc, C.T., Bhugaloo, H., Ducher, D., 2009. *Improving the fatigue life of single-lap bolted joints thanks to the hybrid (bolted/bonded) joining technology*. 25th International Committee on Aeronautical Fatigue (ICAF 2009), 27-29 May 2009, Rotterdam, NL, Book of Proceedings, Springer Eds., ISBN 978-90-481-2745-0, pp. 475-492. [oatao link](#)

[6] **Paroissien, E.**, Sartor, M., Huet, J., 2006. *Hybrid (bolted/bonded) joints applied to aeronautic parts: analytical one-dimensional models of a single-lap joint*. Proceeding on CD-ROM, ISBN 2-9523979-1-0, paper No. 34, 6th International Conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering (6th IDMME), AFM, 17-19 May 2006, Grenoble (FR). [oatao link](#)

[5] **Paroissien, E.**, Sartor, M., Huet, J., Lachaud, F., 2006. *Hybrid (bolted/bonded) joints applied to aeronautic parts: analytical two-dimensional model of a hybrid (bolted/bonded) single-lap joint*. AIAA-2006-226847th AIAA / ASME / ASCE / AHS / ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference (47th SDM AIAA), 1-4 May 2006, Newport (RI).

doi: 10.2514/6.2006-2268 | [oatao link](#)

[4] **Paroissien, E.**, Sartor, M., Huet, J., 2005. *Contribution aux assemblages hybrides (boulonnés/collés) aéronautiques : modèle analytique monodimensionnel*. 17ème Congrès Français de Mécanique (17ème CFM), AFM, Proceeding on CD-ROM, Paper No. 162, 30 August - 3 September 2005, Troyes (FR). [oatao link](#)

[2] Didierjean, S., Michel, L., Barrau, J.J., **Paroissien, E.**, 2003. *Predicting the behavior of graphite/epoxy laminates under hydrothermal loads*. EUROMECH 453, December 2003, Saint-Etienne (FR). [oatao link](#)

#### **Communication invitée (INV) : 1**

[26] **Paroissien, E.**, Gourinat, Y., 2018. *Stratégie de modélisation avancée des assemblages structuraux aérospatiaux. Matériaux, interfaces, fatigue, dynamique*. Journée scientifique 3AF & Onera Assemblages innovants : de l'élaboration matérielle à la modélisation structurale, Invited keynote lecture, 13 June 2018, Châtillon (FR). [oatao link](#)

#### **Conférence sans article (COM) : 9**

[40] Silva, L.A., Espinosa, C., da Silva, L.F.M., **Paroissien, E.**, Lachaud, F., 2019. *Simulation of adhesive squeeze flow using smoothed particle hydrodynamics*. Computational Methods in Multi-Scale, Multi-Uncertainty and Multi-Physisc Problems (CM4P - Ecomas Thematic Conference), 15-17 July 2019, Porto (PT).

[39] Silva, L.A., Espinosa, C., da Silva, L.F.M., **Paroissien, E.**, Lachaud, F., 2019. *Numerical simulations of adhesive squeeze flow: a review*. 5th International Conference on Structural Adhesive Bonding Conference (AB2019), 11-12 July 2019, Porto (PT).

[38] Sekmen, K., **Paroissien, E.**, Lachaud, F., 2019. *Simplified Stress Analysis of Multilayered Adhesively Bonded Metallic Structures*. 5th International Conference on Structural Adhesive Bonding Conference (AB2019), 11-12 July 2019, Porto (PT).

[37] Ordonneau, B., **Paroissien, E.**, Salaün, M., Malrieu, J., Guigue, A., Schwartz, S., 2019. *A methodology for the approached formulation of a macro-element for the simulation of bonded overlap with graded properties*. 5th International Conference on Structural Adhesive Bonding Conference (AB2019), 11-12 July 2019, Porto (PT).

[36] Jaillon A., Jumel, J., **Paroissien, E.**, Lachaud, F., 2019. *Cohesive zone model identification in mode I: parameters sensitivity*. 5th International Conference on Structural Adhesive Bonding Conference (AB2019), 11-12 July 2019, Porto (PT).

[35] Birro T.V., **Paroissien, E.**, Aufray, M., Lachaud, F., 2019. *Adhesive failure characterization using Coupled Criterion and Cohesive Zone Modeling*. 5th International Conference on Structural Adhesive Bonding Conference (AB2019), 11-12 July 2019, Porto (PT).

[27] Birro, T.V., **Paroissien, E.**, Aufray, M., Lachaud, F., 2018. *Prediction of Adhesion Failure of Bonded Joints using 3-Point Bending Test and Stress-Energy Coupled Criterion*. Proceedings of 8th International Conference on Structural Analysis of Advanced Materials (ICSAAM 2018), 28-31 August September 2018, Tarbes (FR). [oatao link](#)

[20] **Paroissien, E.**, Da Veiga, A., Schwartz, S., Lélias, G., Lachaud, F., 2015. *Modélisation simplifiée de liaisons collées à l'aide de la technique par macro-élément*. *Revue des développements réalisés depuis 2004*. Forum TERACTION, 24 June 2015, Ecole Polytechnique, Palaiseau (FR). [oatao link](#)

[18] Lachaud, F., Piquet, R., **Paroissien, E.**, Huet, J., 2013. *Approche couplée essais-calculs pour l'analyse du comportement des assemblages boulonnés en composites stratifiés*. NAFEMS, 30 May 2013, Noisy-le-Grand (FR). [oatao link](#)

#### **Poster dans une conférence (AFF) : 4**

[49] Jaillon, A., Lachaud, F., **Paroissien, E.**, Jumel, J., 2019. *Modélisations numériques de joints de colle épais en mode I*. JADH2019, 2-6 December 2019, Annecy (FR).

[48] Ordonneau, B., **Paroissien, E.**, Salaün, M., Malrieu, J., Guigue, A., Schwartz, S., 2019. *Analyse simplifiée du comportement mécanique des joints collés à gradient de propriétés*. JADH2019, 2-6 December 2019, Annecy (FR).

[28] Birro, T.V., **Paroissien, E.**, Aufray, M., Lachaud, F., 2018. *Prediction of adhesion failure of bonded joints using 3-point bending test and stress-energy coupled criterion*. Proceedings of 12th European Adhesion Conference (EURADH 2018), 5-7 September 2018, Lisbon (PT). [oatao link](#)

[22] Aufray, M., **Paroissien, E.**, Sauvage, J.B., Poquillon, D., Lachaud, F., 2017. *Modélisation numérique et expérimentale de l'essai de flexion trois points*. JADH2017, 11-13 October 2017, Sainte-Maxime (FR). [oatao link](#)

#### **Autre publication (AP) : 5**

[47] Silva, L.A., Espinosa, C., da Silva, L.F.M., **Paroissien, E.**, Lachaud, F., Sanches, L., 2019. *Simulating the squeeze flow of a technical adhesive to contribute to a demise design*. CNES COMET Animation "Design for Demise", 3 October 2019, CNES, Toulouse (FR)

[12] **Paroissien, E.**, Campassens, D., 2011. *Stress Analysis support to structural sealant development*. 14th Numerical Simulation Meeting, HUTCHINSON, 16 June 2011, Abbaye des Vaux de Cernay (FR).

[11] Hoang-Ngoc, C.T., **Paroissien, E.**, 2009. *Modélisation par la méthode des éléments finis d'assemblages collés à l'aide d'adhésifs flexibles - Application à la modélisation d'assemblages hybrides (boulonnés/collés) aéronautiques*. Technical Presentation, SAMTECH Workshop on Non Linear Simulation, 29 January 2009, Seilh (FR).

[10] **Paroissien, E.**, 2007. *Contribution aux assemblages hybrides (boulonnés/collés) - Application aux jonctions aéronautiques*. Technical Presentation, Journée « Collage - Caractérisation et Applications », CCT CNES, 8 March 2007, Toulouse (FR).

[9] Chieragatti, R., **Paroissien, E.**, Huet, J., 2004. *Faisabilité d'assemblages mixtes boulonnés-collés en aéronautique*. CETIM, 21 September 2004, Saint-Étienne (FR). [oatao link](#)

### 6.5.3 Activités d'évaluateur

Depuis 2016, je suis sollicité en tant qu'évaluateur pour des communications scientifiques (ACL) ou des projets de recherche. La [Table 13](#) donne le nombre d'évaluations réalisées.

DEMANDEUR	NATURE	NOMBRE
International Journal of Adhesion and Adhesives	ACL	13
International Journal of Adhesion and Adhesives	plagia	1
The Journal of Adhesion	ACL	8
AIAA Journal	ACL	2
Journal of Adhesion Science and Technology	ACL	1
International Journal of Solids and Structures	ACL	1
Engineering Fracture Analysis	ACL	1
Part L: Journal of Materials: Design and Applications	ACL	1
Part G: Journal of Aerospace Engineering	ACL	1
Multidiscipline Modeling in Materials and Structures	ACL	1
Theoretical and Applied Fracture Mechanics	ACL	1
Polymer Testing	ACL	1
Aerospace Valley	projet	2
National Science Center (Pologne)	projet	1
Nobatek INEF 4	projet	1
Université Fédérale de Toulouse Midi-Pyrénées	projet	2

**Table 13** Synthèse des évaluations des communications scientifiques (ACL), thèses de doctorat ou des projets de recherche.

J'ai participé aux jurys des thèses de doctorat suivants :

- Guillaume Lélias (08/07/2016, 2016, Université de Toulouse) en tant qu'invité
- Benoit Montagne (22/06/2020, Université de Toulouse) en tant qu'encadrant
- Agathe Jaillon (29/06/2020, 2020, Université de Toulouse) en tant qu'encadrant
- Julen Manterola Nareja (16/07/2020, Unisersitat de Girona) en tant que « *first member* », incluant la rédaction d'un rapport avant soutenance

## 6.6 Activités d'encadrement

### 6.6.1 Synthèse des activités d'encadrement

Les activités d'encadrement présentées dans cette notice comprennent :

- les thèses de doctorat soutenues
- les thèses de doctorat en cours
- les stages au niveau M1, M2 ou MS (mastère spécialisé)
- les projets de recherche MAE (voir ci-dessous)

La [Table 14](#) donne le nombre et la somme des taux d'encadrement relatifs à chaque catégorie.

Les stages M1 listés ci-après ont une durée de trois mois. Les stages M2 ont une durée de cinq à six mois et correspondent à des stages de fin d'études pour un diplôme d'ingénieur ou master universitaire. Les stages MS, pour lesquels les étudiants ont déjà un M2, ont une durée de 5 à 6 mois et permettent de valider la délivrance d'un certificat. Dans la présentation de ces stages ([6.6.6](#)), une distinction est réalisée entre ceux encadrés en tant qu'enseignant-chercheur (période professionnelle universitaire) ou non (période professionnelle industrielle). Par ailleurs, les stagiaires au niveau L2 ou L3 ne sont pas présentés.

Les projets de recherche MAE s'inscrivent dans le cursus du « Master of Science in Aerospace Engineering » (MAE) de l'ISAE-SUPAERO. Ils représentent 450h répartis sur 14 mois, à cheval entre le second et troisième semestre.

Mon activité d'encadrement de collaborateurs en tant que chef de projet durant ma période professionnelle industrielle n'est pas relatée. Il est simplement indiqué qu'à la fin de cette mission (2015-2016) le projet affichait une charge de 3000 jours soit 15 équivalents temps pleins.

Les sections qui suivent fournissent une liste nominative exhaustive catégorisée des personnes encadrées. En plus des durées d'encadrement, éventuellement données précédemment, d'autres indications utiles sont fournies. *Enfin, mon nom est indiqué en police gras couleur bleu afin de faciliter le travail d'évaluation.*

NATURE		NOMBRE	SOMME DES TAUX D'ENCADREMENT
thèse de doctorat <i>soutenue</i>	co-dirigée	1	0,5
	co-encadrée	2	0,66
thèse de doctorat <i>en cours</i>	co-dirigée	2	1
	co-encadrée	2	0,57
thèse de doctorat <i>débutant</i> <i>à l'automne 2020</i>	co-dirigée	2	0,7
post-doctorat <i>en cours</i>		1	0,33
stage M1, M2 ou MS	2016-2020	12	6,83
	2008-2016	23	14,5
projet de recherche MAE	<i>en cours</i>	1	0,5
	<i>soutenu</i>	5	4,5

**Table 14** Synthèse des activités d'encadrement.

## 6.6.2 Liste des thèses de doctorat soutenues

<b>Doctorante</b>	<b>Agathe JAILLON</b>		
<b>Titre</b>	<i>Étude expérimentale et numérique du comportement à rupture des assemblages collés à épaisseur de couche adhésive variable</i>		
<b>Labo.   E.D.</b>	ICA   MEGeP		
<b>Financement</b>	BPI France, Région Occitanie, Région Nouvelle Aquitaine [FUI 21]		
<b>Projet</b>	« S3PAC »		
<b>Encadrement</b>	Directeur	Frédéric LACHAUD	33%
	Co-directeur	Julien JUMEL (I2M puis IRDL)	33%
	<b>Co-encadrant</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>33%</b>
<b>Durée</b>	36 mois, soutenue le 29/06/2020		
<b>Doctorant</b>	<b>Benoit MONTAGNE</b>		
<b>Sujet</b>	<i>Effet de l'interaction fixation composite sur les modes de rupture des assemblages boulonnés composites</i>		
<b>Labo.   E.D.</b>	ICA   MEGeP		
<b>Financement</b>	DASSAULT AVIATION		
<b>Projet</b>	« MARCOS »		
<b>Encadrement</b>	Directeur	Frédéric LACHAUD	50%
	<b>Co-directeur</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
<b>Durée</b>	36 mois, soutenue le 22/06/2020		
<b>Doctorant</b>	<b>Guillaume LÉLIAS</b>		
<b>Titre</b>	<i>Adhesively bonded joints: Modeling, simulation and experimental characterization</i>		
<b>Labo.   E.D.</b>	ICA   MEGeP		
<b>Financement</b>	ANRT (CIFRE SOGETI High Tech)		
<b>Projet</b>	« JoSAT »		
<b>Encadrement</b>	Directeur	Frédéric LACHAUD	33%
	Co-directeur	Joseph MORLIER	33%
	<b>Co-encadrant</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>33%</b>
<b>Durée</b>	36 mois, soutenue le 08/07/2016		

### 6.6.3 Liste des thèses de doctorat en cours

<b>Doctorant</b>	<b>Thiago VASCONCELLOS-BIRRO</b>		
<b>Titre</b>	<i>Prédiction de la Rupture des Assemblages Collés Composite / Métal</i>		
<b>Labo.   E.D.</b>	ICA   MEGeP		
<b>Financement</b>	Région Occitanie, UFT MIP [APR UFTMIP 2017]		
<b>Projet</b>	« PRACCOMET »		
<b>Encadrement</b>	Directeur	Frédéric LACHAUD	33%
	Co-directrice	Maëlen AUFRAY (CIRIMAT)	33%
	<b>Co-encadrant</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>33%</b>
<b>Durée</b>	40 mois (12/2017 au 04/2021)		
<b>Doctorant</b>	<b>Benjamin ORDONNEAU</b>		
<b>Titre</b>	<i>Méthodologies pour la simulation rapide et fiable de structures collées multi-couches sous sollicitation dynamique</i>		
<b>Labo.   E.D.</b>	ICA   MEGeP		
<b>Financement</b>	DGA, CETIM		
<b>Projet</b>	« SCODYN »		
<b>Encadrement</b>	Directeur	Michel SALAÛN	50%
	<b>Co-directeur</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
<b>Durée prévue</b>	36 mois (10/2018 au 10/2021)		
<b>Doctorant</b>	<b>Guillaume PICHON</b>		
<b>Titre</b>	<i>Étude du comportement des assemblages en hole to hole type MECCANO afin optimiser et accélérer les processus d'assemblages</i>		
<b>Labo.   E.D.</b>	ICA   MEGeP		
<b>Financement</b>	ANRT (CIFRE AIRBUS)		
<b>Projet</b>	<i>interne AIRBUS</i>		
<b>Encadrement</b>	Directeur	Alain DAIDIÉ	50%
	<b>Co-directeur</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
<b>Durée prévue</b>	36 mois (12/2019 au 12/2022)		

<b>Doctorante</b>	<b>Lorraine APARECIDA-SILVA</b>		
<b>Titre</b>	<i>Modélisation et simulation particulière d'assemblages collés structuraux en fonctionnalisation duale tenue / fragmentation</i>		
<b>Labo.   E.D.</b>	ICA   MEGeP		
<b>Financement</b>	ED MEGeP		
<b>Projet</b>	« SIMPACOS »		
<b>Encadrement</b>	Directrice	Christine ESPINOSA	25%
	Co-directeur	Lucas FM DA SILVA (Université de Porto)	25%
	<b>Co-encadrant</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>25%</b>
	Co-encadrant	Frédéric LACHAUD	25%
<b>Durée</b>	36 mois (10/2018 au 06/2022)		

#### 6.6.4 Liste des thèses de doctorat débutant à l'automne 2020

<b>Doctorante</b>	<b>Minh-Nhat TO</b>		
<b>Titre</b>	<i>Mastic fonctionnalisé pour l'amélioration de la performance mécanique des assemblages des assemblages boulonnés démontables</i>		
<b>Labo.   E.D.</b>	ICA   AA		
<b>Financement</b>	Région Occitanie, UFT MiP		
<b>Projet</b>	« MIAM »		
<b>Encadrement</b>	Directrice	Valérie NASSIET (LGP Tarbes)	20%
	<b>Co-directeur</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	20%
	Co-encadrante	Bouchra HASSOUNE (LGP Tarbes)	20%
	Co-encadrant	Frédéric LACHAUD	20%
	Co-encadrante	Maëlenn AUFRAY (CIRIMATO)	20%
<b>Durée</b>	36 mois à partir de l'automne 2020		
<b>Doctorante</b>	<b>Mario PLANAS-ANDRES</b>		
<b>Titre</b>	<i>Méthodologie de dimensionnement de assemblages collés de pâles d'éolienne fabriquées en matériaux recyclables</i>		
<b>Labo.   E.D.</b>	ICA   MEGeP		
<b>Financement</b>	ARKEMA, ISAE-SUPAERO		
<b>Projet</b>	<i>interne ARKEMA</i>		
<b>Encadrement</b>	Directeur	Frédéric LACHAUD	50%
	<b>Co-directeur</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	50%
<b>Durée</b>	36 mois à partir de l'automne 2020		

### 6.6.5 Liste des études post-doctorales

<b>Post-doctorant</b>	<b>Simon ESSONGUE-BOUSSOUGOU</b>	
<b>Sujet</b>	<i>Influence de la tenue à rupture de la couche de colle sur la performance d'un système céramique-colle-composite</i>	
<b>Financement</b>	DGA [Projet École]	
<b>Encadrement</b>	Christine ESPINOSA	33%
	Frédéric LACHAUD	33%
	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>33%</b>
<b>Durée prévue</b>	34 mois (03/2019 – 12/2021)	

### 6.6.6 Liste des stages M1, M2 ou MS

Période professionnelle universitaire (2016-2020)

*2020*

<b>Étudiant</b>	<b>Alejandro BENITEZ-MARTIN</b>	
<b>Formation</b>	M1   ISAE-SUPAERO	
<b>Sujet</b>	<i>Développement de modélisations par EF d'assemblages collés sous chargement statique et vibratoire</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>33%</b>
	Benjamin ORDONNEAU	33%
	Michel SALAÜN	33%

<b>Étudiant</b>	<b>Tristan MALGRAS</b>	
<b>Formation</b>	M2   SIGMA	
<b>Sujet</b>	<i>Définition d'un essai élémentaire discriminant pour le collage structural de pâles d'éolienne</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Frédéric LACHAUD	50%

<b>Étudiant</b>	<b>Amal RAI</b>	
<b>Formation</b>	M2   ISAE-SUPAERO	
<b>Sujet</b>	<i>Modélisation et simulation du comportement mécanique de réparations collées</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Frédéric LACHAUD	50%

*2019*

<b>Étudiante</b>	<b>Kubra SEKMEN</b>	
<b>Formation</b>	M2   ISAE-SUPAERO	
<b>Sujet</b>	<i>Modélisation de zones cohésives en mode mixte pour les assemblages collés</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Frédéric LACHAUD	50%

<b>Étudiante</b>	<b>Marcela MATUS</b>	
<b>Formation</b>	M2   IMT Mines Albi	
<b>Sujet</b>	<i>Modélisation numérique et expérimentale d'un essai sur une structure aéronautique de type voilure</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Frédéric LACHAUD	50%

*2018*

<b>Étudiant</b>	<b>Salah SEDDIKI</b>	
<b>Formation</b>	Mastère Spécialisé   ISAE-SUPAERO	
<b>Sujet</b>	<i>Modélisation par la méthode des éléments finis d'assemblages pour validation et évaluation d'approches simplifiées</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Lucas FM DA SILVA (Université de Porto)	50%

<b>Étudiant</b>	<b>Mohamed Taher SARRAJ</b>	
<b>Formation</b>	M2  ENIM (Monsatir, Tunisie)	
<b>Sujet</b>	<i>Simplified stress analysis of graded adhesively bonded lap joints</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Lucas FM DA SILVA (Université de Porto)	50%

<b>Étudiante</b>	<b>Sabrine KHAMMASSI</b>	
<b>Formation</b>	M2  ENIM (Monsatir, Tunisie)	
<b>Sujet</b>	<i>Etude de sensibilité des paramètres de lois matériaux de l'adhésif sur le comportement mécanique d'assemblages collés</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Frédéric LACHAUD	50%

<b>Étudiant</b>	<b>Ahmed LAHBAZI</b>	
<b>Formation</b>	M2  ENIM (Monsatir, Tunisie)	
<b>Sujet</b>	<i>Conception et modélisation d'un essai expérimental sur une structure aéronautique de type voilure</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Frédéric LACHAUD	50%

<b>Étudiante</b>	<b>Khouloud NAGAZ</b>	
<b>Formation</b>	M2  ENIM (Monsatir, Tunisie)	
<b>Sujet</b>	<i>Implémentation de loi de comportement élasto-visco-plastique de colle thermoplastique pour application aéronautique</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Frédéric LACHAUD	50%

*2017*

<b>Étudiant</b>	<b>Trong-Linh NGUYEN</b>	
<b>Formation</b>	M1   ISAE-ENSMA	
<b>Sujet</b>	<i>Prédiction de la tenue en fatigue de jonctions par collage et/ou boulonnage à l'aide d'une approche simplifiée</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>100%</b>

<b>Étudiant</b>	<b>Shaurya GARG</b>	
<b>Formation</b>	M2  ISAE-SUPAERO	
<b>Sujet</b>	<i>Modélisation EF des structures aéronautiques</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>100%</b>

Période professionnelle industrielle (2007-2016)

*2016*

Étudiante	<b>Marielle GOGNIAT-CHANLON</b>	
Formation	M2   Université Paul Sabatier	
Sujet	<i>Approche fiabiliste pour la conception d'assemblages par collage et/ou boulonnage</i>	
Encadrement	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Frédéric LACHAUD	50%

Étudiant	<b>Bertrand SOLAZ</b>	
Formation	M2   INSA Toulouse	
Sujet	<i>Modélisation des procédés d'impression 3D de type ALM par fusion laser (additive layer manufacturing)</i>	
Encadrement	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Benjamin DEGUILHEM (SOGETI High Tech)	50%

*2014*

Étudiante	<b>Lindsey KHOANG</b>	
Formation	M2   Université Aix-Marseille	
Sujet	<i>Tenue en fatigue multi-axiale selon le critère de Crossland de jonctions boulonnées</i>	
Encadrement	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Frédéric LACHAUD	50%

Étudiant	<b>Cyril GAVOILLE</b>	
Formation	M2   ENSEIRB-MATMECA	
Sujet	<i>Modélisation simplifiée de jonctions collées : prise en compte du couplage endommagement et plasticité</i>	
Encadrement	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Guillaume LÉLIAS (SOGETI High Tech)	50%

<b>Étudiant</b>	<b>Cédric SCHIANO</b>	
<b>Formation</b>	M2   Université Aix-Marseille	
<b>Sujet</b>	<i>Modélisation simplifiée de jonctions collées : prise en compte de la dépendance temps / température de l'adhésif</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Guillaume LÉLIAS (SOGETI High Tech)	50%

<b>Étudiant</b>	<b>Lilian MARTINEAU</b>	
<b>Formation</b>	M2   Université Paul Sabatier	
<b>Sujet</b>	<i>Modélisation simplifiée de jonctions collées : développement de nouveaux macro-éléments et critère couplé</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Anthony DA VEIGA (SOGETI High Tech)	50%

<b>Étudiant</b>	<b>Maximilien HUBALD</b>	
<b>Formation</b>	M2   Université Paul Sabatier	
<b>Sujet</b>	<i>Spécification d'un module de calcul simplifié du comportement de joints collés pour son implémentation en C</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Sébastien SCHWARTZ (SOGETI High Tech)	50%

### *2013*

<b>Étudiant</b>	<b>Sébastien SCHWARTZ</b>	
<b>Formation</b>	M2   ENSEIRB-MATMECA	
<b>Sujet</b>	<i>Simulation simplifiée de jonctions collées avec un adhésif non-linéaire sous chargement cyclique. Plasticité et endommagement en mode mixte</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Guillaume LÉLIAS (SOGETI High Tech)	50%

<b>Étudiante</b>	<b>Natascha SIEFERT</b>	
<b>Formation</b>	M2   ENSEIRB-MATMECA	
<b>Sujet</b>	<i>Prédiction de la durée de vie des assemblages boulonnés en fatigue multi-axiale. Influence du serrage et de l'interférence</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Frédéric LACHAUD	50%

<b>Étudiante</b>	<b>Nathalie BOUSSARIE</b>	
<b>Formation</b>	M2   ENSEIRB-MATMECA	
<b>Sujet</b>	<i>Prédiction de la rupture des jonctions collées</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Anthony DA VEIGA (SOGETI High Tech)	50%

<b>Étudiant</b>	<b>Yones YAMOU</b>	
<b>Formation</b>	M2   ENSEIRB-MATMECA	
<b>Sujet</b>	<i>Endommagement en fatigue des jonctions boulonnées</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Frédéric LACHAUD	50%

<b>Étudiant</b>	<b>Ijaaz GOKHOOL</b>	
<b>Formation</b>	M2   Université Paul Sabatier	
<b>Sujet</b>	<i>Prédiction de la durée de vie des assemblages boulonnés en fatigue multi-axiale. Influence du serrage et du frottement</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Frédéric LACHAUD	50%

## *2012*

<b>Étudiant</b>	<b>Guillaume LÉLIAS</b>	
<b>Formation</b>	M2   IMT Mines Albi	
<b>Sujet</b>	<i>Étude du comportement en fatigue multi-axiale de jonctions boulonnées. Prise en compte de l'influence du gradient</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Frédéric LACHAUD	50%

<b>Étudiant</b>	<b>Thomas JACOBS</b>	
<b>Formation</b>	M2   ENSEIRB-MATMECA	
<b>Sujet</b>	<i>Simulation simplifiée de jonctions collées avec un adhésif non-linéaire sous chargement cyclique. Endommagement en mode II</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Frédéric LACHAUD	50%

<b>Étudiant</b>	<b>Othman ICHO</b>	
<b>Formation</b>	M1   ENSEEIHT	
<b>Sujet</b>	<i>Simulation simplifiée avancée de jonctions collées par macro-élément.</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>100%</b>

### 2011

<b>Étudiant</b>	<b>Frédéric GAUBERT</b>	
<b>Formation</b>	M2   ENSEIRB-MATMECA	
<b>Sujet</b>	<i>Introduction de non linéarités matérielles dans un outil d'analyse de joints collés. Plasticité et algorithme non linéaire</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>50%</b>
	Frédéric LACHAUD	50%

<b>Étudiante</b>	<b>Nabila HADJ TAIEB</b>	
<b>Formation</b>	M2   ENSEIRB-MATMECA	
<b>Sujet</b>	<i>Définition de critères de rupture pour leur implémentation dans un Outil d'analyse simplifiée de jonctions collées</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>100%</b>

### 2010

<b>Étudiante</b>	<b>Audrey LABORDE</b>	
<b>Formation</b>	M2   ENSIACET	
<b>Sujet</b>	<i>Simulation par une formulation analytique de la propagation de fissures au sein de l'adhésif d'un assemblage collé avec prise en compte des sollicitations thermiques et hydriques</i>	
<b>Encadrement</b>	<b>Éric PAROISSIEN</b>	<b>100%</b>

2009

Étudiant	Anthony DA VEIGA	
Formation	M2   MATMECA	
Sujet	<i>Développement de modèles analytiques pour des assemblages collés ou hybrides (boulonnés/collés) non équilibrés</i>	
Encadrement	Éric PAROISSIEN	100%

Étudiante	Olivia LESTIENNE	
Formation	M2   ENSMA	
Sujet	<i>Prédiction de la durée de vie en fatigue des assemblages hybrides (boulonnés/collés)</i>	
Encadrement	Éric PAROISSIEN	50%
	Madalina NICHOTOÏ (SOGETI High Tech)	50%

Étudiante	Caroline NOTTA	
Formation	M2   INSA Toulouse	
Sujet	<i>Study of fastener flexibility in overlap joints</i>	
Encadrement	Éric PAROISSIEN	50%
	Geoff MORRIS (SOGETI High Tech)	50%

Étudiant	Dang-Huy TRUONG	
Formation	M2   ENSMA	
Sujet	<i>Modélisation par la méthode des éléments finis d'assemblages collés structuraux</i>	
Encadrement	Éric PAROISSIEN	100%

2008

Étudiant	Cat-Tan HOANG-NGOC	
Formation	M2   ENSMA	
Sujet	<i>Modélisation par la méthode des éléments finis d'assemblages collés à l'aide d'adhésifs flexibles</i>	
Encadrement	Éric PAROISSIEN	100%

## 6.6.7 Liste des projets de recherche MAE

2020-2021

Étudiant	Yunhyeok HAN	
Sujet	<i>Modelling and numerical simulation of bonded repairs</i>	
Encadrement	Éric PAROISSIEN	50%
	Michel SALAÜN	50%

2019-2020

Étudiant	Josu SARASOLA-MUGICA	
Sujet	<i>Formulation of a macro-element for the simplified stress analysis bonded joints with thick adhesive layer</i>	
Encadrement	Éric PAROISSIEN	100%

2018-2019

Étudiante	Kubra SEKMEN	
Sujet	<i>Methodologies for the sizing of multilayered adhesively bonded aircraft metallic structures</i>	
Encadrement	Éric PAROISSIEN	100%

Étudiant	Vincent TORRELLI	
Sujet	<i>Multilayered Bonded Joints Analysis Using the Volkersen Model</i>	
Encadrement	Éric PAROISSIEN	100%

2017-2018

Étudiant	Leandro Ivan ETCHEVERS COLLAZO	
Sujet	<i>Prediction of thermal history as function of machine process parameters of parts manufactured by SLM and EBM</i>	
Encadrement	Éric PAROISSIEN	100%

2016-2017

<b>Étudiant</b>	<b>Rosa Angelica CÁRDENAS SIERRA et Paolo Rocco SILLETTI</b>	
<b>Sujet</b>	<i>Health monitoring system for rotorcraft critical parts</i>	
<b>Encadrement</b>	Joël JÉZÉGOU	50%
	Éric PAROISSIEN	50%

## 6.7 Responsabilités scientifiques

### 6.7.1 Animations

#### TACCOS

En 2017, avec mes collègues Frédéric Lachaud et Maëleonn Aufray (CIRIMAT), nous avons créé l'initiative TACCOS pour « Toulouse Adhésion Cohésion Collage Structural. De la Chimie à la Mécanique », qui vise à l'émergence d'un pôle toulousain pour l'enseignement et la recherche pluridisciplinaire physico-chimico-mécanique afin de répondre aux questions levées par le collage structural. Dans cet esprit, depuis 2018, j'anime la formation « Technologie d'Assemblage par Collage Structural » au catalogue de l'EUROSAE, que je délivre avec mes collègues Frédéric Lachaud, Maëleonn Aufray, Robert Piquet et Julien Jumel (IRDL).

#### Axe transverse « ASSEMBLAGES » de l'ICA

Depuis 2018, je participe à l'animation avec mes collègues Frédéric Lachaud et Alain Daidié l'axe transverse « ASSEMBLAGES » de l'ICA. J'ai pu participer à la nouvelle structuration de l'axe (Figure 44) ainsi qu'à la rédaction du rapport pour l'HCERES 2019.

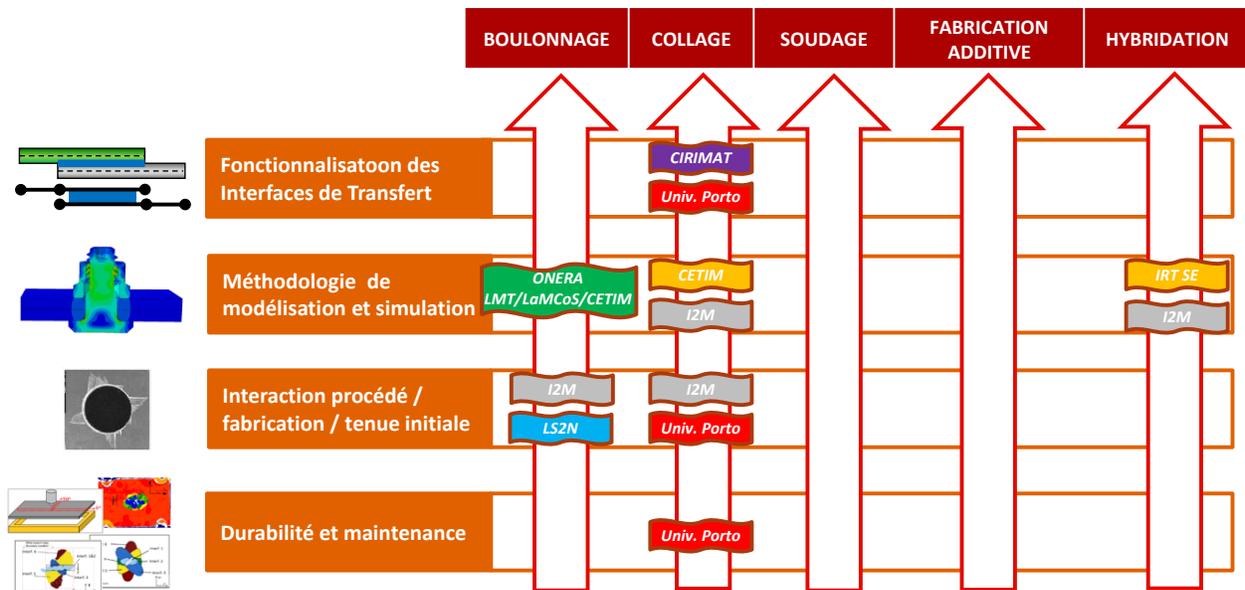


Figure 44 Structuration de l'axe « ASSEMBLAGES » de l'ICA.

### **Pôle de compétitivité AEROSPACE VALLEY**

Je participe au pôle de compétitivité AEROSPACE VALLEY en tant qu'animateur du domaine d'action stratégique (DAS) « Aérostructures, Matériaux et Procédés » (AMP) de 2017 à 2019 et depuis 2020 en tant qu'expert de l'écosystème d'excellence (E<sup>2</sup>) « Structures, Matériaux et Procédés » (SMP).

### **AFNOR**

Depuis 2020, je participe en tant qu'expert au comité AFNOR « T76A – Colles et adhésifs ».

## 6.7.2 Projets de recherche

Depuis l'obtention de mon doctorat, j'ai pu participer et/ou contribuer à monter et déposer des projets de recherches pour financement.

### Période professionnelle industrielle (2007-2016)

#### *Hybrid (Bolted/Bonded) Joints*

Entre 2007 et 2014, j'ai participé en tant qu'ingénieur de recherche au projet *Hybrid (Bolted/Bonded) Joints*. Ce projet était financé par AIRBUS au travers d'une sous-traitance à SOGETI High Tech. Il constituait la suite de mon projet de thèse de doctorat.

#### *JoSAT*

Entre 2009 et 2016, j'ai créé et encadré un projet de recherche interne à SOGETI High Tech autofinancé et intitulé JoSAT – *Joint Stress Analysis Tool*. Entre 2010 et 2016, JoSAT a été éligible au Crédit d'Impôts Recherche (CIR). Ce projet a couvert 24 stages M1 ou M2 ainsi que la thèse de doctorat de Guillaume Lélias, sous convention CIFRE. En 2015, ce projet représentait une charge de 3000 jours soit environ 15 ETP.

#### *SWB et S3PAC*

Entre 2015 et 2016, j'ai participé au montage de S3PAC – *Système de Supervision et de Simulation de la Production d'Assemblage par Collage* – qui a été financé au titre du FUI 21. Le consortium était constitué par AEC Polymers, SOGETI High Tech, OPENCASCADE, ELEMCA, VLM, NIMITECH, ALISAERO, I2M et ICA. Ce projet a été labellisé par les pôles AEROSPACE VALLEY et ROTE DES LASERS. J'ai participé à l'encadrement de la thèse de doctorat d'Agathe Jaillon. Ce projet S3PAC correspondait à la version française du projet SWB – *Simple Way of Bonding* – dont j'ai initié le montage et ai piloté le dépôt en 2015 au FoF8 du programme de recherche européen HORIZON 2020. Il n'a pas été financé. Le consortium était constitué par SOGETI High Tech, ISAE, AEC Polymers, INEGI, SAMTECH, CTAG, ELEMCA, CTC, Faserinstitut Bremen et l'IFAM.

### Période professionnelle universitaire (2016-2020)

#### *PRACCOMET*

Entre 2016 et 2017, j'ai participé au montage et au dépôt du projet PRACCOMET – *Prédiction de la rupture des assemblages collés composite / métal* – à l'appel à projets de recherches (APR) de l'Université Fédérale de Toulouse Midi-Pyrénées (UFT MiP). Ce projet a été retenu et couvre la thèse de doctorat de Thiago Vasconcellos-Birro. Cette thèse est le premier support de TACCOS (section 6.7.1).

### ***SCODYN***

En 2018, j'ai participé au montage et au dépôt de SCODYN – *Méthodologies pour la simulation rapide et fiable de structures collées multi-couches sous sollicitation dynamique* – à l'appel à projets thèses classiques DGA. Ce projet a été retenu et complète le financement apporté par le CETIM pour la thèse de doctorat de Benjamin Ordonneau.

### ***SIMPACOS***

En 2018, j'ai participé au montage et au dépôt de SIMPACOS – *Modélisation et simulation particulière d'assemblages collés structuraux en fonctionnalisation duale tenue / fragmentation* – à l'appel à projets thèses de l'école doctorale MEGeP. Ce projet a été retenu et couvre la thèse de doctorat de Lorraine SILVA. Ce projet est en collaboration avec l'Université de Porto. TACCOS (section 6.7.1) a contribué à créer cette collaboration.

### ***Hole-to-hole***

En 2019, j'ai participé au montage et au dépôt à l'ANRT de la CIFRE avec AIRBUS « *Étude du comportement des assemblages en hole to hole type MECCANO afin optimiser et accélérer les processus d'assemblages* » qui couvre la thèse de doctorat de Guillaume Pichon.

### ***MULTIMAT\_BOND***

En 2019, j'ai soumis un dossier à l'appel à projets TILT (SATT CETIM) intitulé *Vers un outil générique de conception simplifiée des assemblages collés multimatériaux*. Ce projet a été retenu et est en cours de développement sous le nom MULTIMAT\_BOND.

### ***MIAM***

Entre 2019 et 2020, j'ai participé au montage et au dépôt de MIAM – *Mastic fonctionnalisé pour l'amélioration de la performance mécanique des assemblages boulonnés démontables* – à l'appel à projets pour les allocations doctorales interdisciplinaires (ADI 2020) de l'UFT MiP. Ce projet résulte d'une collaboration entre l'ICA, le CIRIMAT et le LGP Tarbes. Il entre dans le cadre de TACCOS (section 6.7.1). Ce projet a été retenu par l'UFT MiP et la Région Occitanie et supportera la thèse de doctorat de Minh-Nhat TO à partir de l'automne 2020.

### 6.7.3 Partenariats

#### Période professionnelle industrielle (2007-2016)

##### *Convention cadre SOGETI High Tech / ISAE*

Entre 2010 et 2011, j'ai contribué et piloté le montage d'un contrat cadre (dit convention EPEE) entre SOGETI High Tech et l'ISAE. Cette convention a été signée en 2011 pour une durée de 5 ans. Cette convention a couvert 8 stages M2 en co-encadrement et la thèse CIFRE de Guillaume Lélias.

#### Période professionnelle universitaire (2016-2020)

##### *Collaboration FEUP / ISAE-SUPAERO*

En 2019, j'ai participé à la signature d'un accord de collaboration pour la mobilité étudiante avec Université de Porto – Faculty of Engineering (FEUP).

##### *Convention spécifique DGA TA / ISAE-SUPAERO*

Entre 2019 et 2020, j'ai participé avec mes collègues Frédéric Lachaud, Christine Espinosa, Laurent Michel et Joseph Morlier à l'élaboration d'une convention spécifique avec DGA TA sur les réparations structurales multimatériaux aéronautiques. Elle est en cours de signature.

##### *Laboratoire commun CETIM / ICA*

Entre 2019 et 2020, j'ai participé avec mes collègues Frédéric Lachaud et Alain Daidié à l'élaboration d'un projet d'accord de laboratoire commun avec le CETIM sur les assemblages. Ce laboratoire commun s'appellera LAMA et la convention est en cours d'analyse.

*page laissée volontairement sans texte*

# Habilitation à Diriger des Recherches

## Titre

Modélisation simplifiée des transferts d'effort dans les assemblages boulonnés et/ou collés

## Auteur

Éric PAROISSIEN

## Résumé

Le poste assemblage est le point critique de toutes les industries de construction mécanique. En effet, les assemblages structuraux sont garants de l'intégrité de la structure durant son utilisation en service. Il est donc crucial de dimensionner ces assemblages. Les travaux présentés dans ce mémoire visent alors à fournir aux concepteurs des méthodologies de calcul rapides et fiables pour la prédiction du comportement mécanique des assemblages par collage et/ou boulonnage. La modélisation par macro-élément (ME) est une approche attractive dans le sens où par nature elle permet dans le cadre d'une résolution macroscopique d'enrichir la modélisation en cohérence avec la réalité physique à l'échelle mésoscopique. Il est donc nécessaire d'identifier le niveau de complexité de modélisation à intégrer dans le ME pour représenter la physique. Ce besoin pose alors la question des méthodologies d'intégration de complexité croissante dans le ME mais aussi celles de l'identification des lois constitutives dans un contexte pluridisciplinaire. Une ouverture mêlant mécanique des structures et matériaux, physico-chimie des matériaux et interfaces et sciences de l'information est proposée.

## Mots clés

assemblage ; boulonnage ; collage ; modélisation simplifiée ; macro-élément ; formule analytique ; élément fini ; zone cohésive ; interface colle substrat ; fonctionnalisation ; TACCOS

## Abstract

The joining stage is the critical stage of all the mechanical manufacturing industries. Indeed, the structural joints are driving the integrity of the structure in-service. It is of the highest significance to size these joints. The research works presented in this Thesis aim at providing to the designers fast and reliable methodologies for the prediction of the mechanical behavior of bolted and/or adhesively bonded joints. The macro-element (ME) modelling is an attractive approach since it offers a macroscopic resolution while enriching the modelling in relevance to the physical reality at the mesoscopic scale. The question is then to identify the level of modelling complexity to be integrated in the ME to be representative for the Physics. This question implies then to find methodologies for the integration of increasing complexity within the ME as well as to identify the constitutive law in a multidisciplinary context. A way forward involving Mechanics of Structures and Materials, Physics and Chemistry of Materials and Interfaces and Information Technology Sciences is suggested.

## Key words

joining ; bolting ; bonding ; simplified modelling ; macro-element ; closed-form solution ; Finite Element ; cohesive zone ; adhesive adherend interface ; functionalization ; TACCOS



# Habilitation à Diriger des Recherches

## Titre

Modélisation simplifiée des transferts d'effort dans les assemblages boulonnés et/ou collés

## Auteur

Éric PAROISSIEN

## Résumé

Le poste assemblage est le point critique de toutes les industries de construction mécanique. En effet, les assemblages structuraux sont garants de l'intégrité de la structure durant son utilisation en service. Il est donc crucial de dimensionner ces assemblages. Les travaux présentés dans ce mémoire visent alors à fournir aux concepteurs des méthodologies de calcul rapides et fiables pour la prédiction du comportement mécanique des assemblages par collage et/ou boulonnage. La modélisation par macro-élément (ME) est une approche attractive dans le sens où par nature elle permet dans le cadre d'une résolution macroscopique d'enrichir la modélisation en cohérence avec la réalité physique à l'échelle mésoscopique. Il est donc nécessaire d'identifier le niveau de complexité de modélisation à intégrer dans le ME pour représenter la physique. Ce besoin pose alors la question des méthodologies d'intégration de complexité croissante dans le ME mais aussi celles de l'identification des lois constitutives dans un contexte pluridisciplinaire. Une ouverture mêlant mécanique des structures et matériaux, physico-chimie des matériaux et interfaces et sciences de l'information est proposée.

## Mots clés

assemblage ; boulonnage ; collage ; modélisation simplifiée ; macro-élément ; formule analytique ; élément fini ; zone cohésive ; interface colle substrat ; fonctionnalisation ; TACCOS

## Abstract

The joining stage is the critical stage of all the mechanical manufacturing industries. Indeed, the structural joints are driving the integrity of the structure in-service. It is of the highest significance to size these joints. The research works presented in this Thesis aim at providing to the designers fast and reliable methodologies for the prediction of the mechanical behavior of bolted and/or adhesively bonded joints. The macro-element (ME) modelling is an attractive approach since it offers a macroscopic resolution while enriching the modelling in relevance to the physical reality at the mesoscopic scale. The question is then to identify the level of modelling complexity to be integrated in the ME to be representative for the Physics. This question implies then to find methodologies for the integration of increasing complexity within the ME as well as to identify the constitutive law in a multidisciplinary context. A way forward involving Mechanics of Structures and Materials, Physics and Chemistry of Materials and Interfaces and Information Technology Sciences is suggested.

## Key words

joining ; bolting ; bonding ; simplified modelling ; macro-element ; closed-form solution ; Finite Element ; cohesive zone ; adhesive adherend interface ; functionalization ; TACCOS