Title	一般化されたOstrovsky方程式の漸近挙動 (非線形波動現象の数理と応用)
Author(s)	林, 仲夫; Naumkin, Pavel I.; 新里, 智行
Citation	数理解析研究所講究録 (2014), 1890: 212-215
Issue Date	2014-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/195766
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 1890 巻 2014 年 212-215

一般化された Ostrovsky 方程式の漸近挙動

大阪大学・理学研究科　林　仲夫
Nakao hayashi
Department of Mathematics Graduate School of Science,
Osaka University

Pavel I. Naumkin
Instituto de Matemáticas,
UNAM

大阪大学・理学研究科　新里　智行
Tomoyuki Niizato
Department of Mathematics Graduate School of Science,
Osaka University

1 初めに

本稿の目的は, 文献 [1] の概要を述べることである. 一般化された Ostrovsky 方程式のコーシー問題

$$\begin{cases} u_{tx} = u + (f(u))_{xx}, & x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{1}$$

を考える. ここで, ρ が非整数のときは $f(u) = |u|^{\rho-1}u$, ρ が整数のときは $f(u) = u^{\rho}$, あるいは $f(u) = |u|^{\rho-1}u$ とする. また, $u_0(x)$ は実数値関数とし, 以下では実数値解のみを考える. 方程式 (1) はコリオリ力などの回転の力を考慮した水面波を記述する方程式として知られている Ostrovsky 方程式 [5]: $(u_t + uu_x + u_{xxx})_x = u$ の高周波の分散がないという仮定の下で導出される. 特に $\rho = 2$ の時は Ostrovsky-Hunter 方程式 [2], $\rho = 3$ の時は Short pulse 方程式 [6] と呼ばれている.

本稿では以下の記号を用いる. $\mathbf{L}^p$ は通常のルベーグ空間とする. 重みつきソボレフ空間 $\mathbf{H}_p^{m,s}$ を以下で定義する：

$$\mathbf{H}_p^{m,s} = \left\{ \varphi \in \mathbf{S}'; \|\phi\|_{\mathbf{H}_p^{m,s}} = \left\| \langle x \rangle^{\frac{s}{2}} \langle i\partial_x \rangle^{\frac{m}{2}} \phi \right\|_{\mathbf{L}^p} < \infty \right\},$$

ここで, $m, s \in \mathbf{R}, 1 \le p \le \infty$, $\langle x \rangle = \sqrt{1+x^2}, \langle i\partial_x \rangle = \sqrt{1-\partial_x^2}$. また, $p = 2$ のときは $\mathbf{H}^{m,s}$ と書き, さらに $s = 0$ のときは $\mathbf{H}^m$ と記号を簡略化して書く. 斉次ソボレフ空間 $\dot{\mathbf{H}}^m$

を以下で定義する：

$$\dot{\mathbf{H}}^m = \left\{ \phi \in \mathbf{S}'; \|\phi\|_{\dot{\mathbf{H}}^m} = \left\| \left(-\partial_x^2\right)^{\frac{m}{2}} \phi \right\|_{\mathbf{L}^2} < \infty \right\}.$$

文献 [1] の主結果について詳しく述べる前に, 一般化された Ostrovsky 方程式について知られている結果をいくつか紹介する. 文献 [7] において, $\rho \geq 2$ の時, (1) の時間局所適切性が $\mathbf{H}^s$, $s > 3/2$ で示されている. さらに文献 [7] では, $\rho \geq 4$, ρ : 整数に対して, $\mathbf{H}^5 \cap \mathbf{H}^{3,1}$ の意味で初期条件が小さいならば, 方程式 (1) の時間大域解が存在し, 時間減衰評価 $\|u\|_{\mathbf{L}^r} \sim t^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{p}}$, $2 \leq r < \infty$ が成り立つことが示されている. 初期条件が小さいことは, 時間大域解を得るために必要な仮定である. なぜなら, 文献 [3], [4] において, 有限時間で爆発する解の存在が $\rho = 2, 3$ の場合に示されている. 以上の結果をふまえた上で文献 [1] の結果について述べる. 大まかにいって, 文献 [1] では, 初期条件に関して文献 [7] より強い仮定を用いることにより, より小さい非線形項の指数に対して時間大域解が一意に存在することを示している. さらに, その解が自由解に漸近することも示している. また, $\rho = 3$ の時には, いわゆる"Almost global existence"と呼ばれる結果を示している.

以下では, これらの結果を正確に述べるために記号と関数空間を導入する. Ostrovsky 方程式の自由発展群を

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{F}^{-1} e^{-\frac{it}{\xi}} \mathcal{F}.$$

で定義する. ここで $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}$ はそれぞれ, フーリエ変換, フーリエ逆変換である. また自由発展群を通して作用素

$$\mathcal{J} = \mathcal{U}(t) x \mathcal{U}(-t) = x - t\partial_x^{-2}$$

を定義する. 初期条件に対する関数空間として, $\mathbf{X}_0^m$ を次で定義する：

$$\mathbf{X}_0^m = \left\{ \phi \in \mathbf{L}^2; \|\phi\|_{\mathbf{X}_0^m} < \infty \right\},$$

ここで, ノルムは,

$$\|\phi\|_{\mathbf{X}_0^m} = \|\phi\|_{\mathbf{H}^m} + \|\partial_x \phi\|_{\mathbf{H}^{0,1}} + \|\phi\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}}.$$

とする. また, 解を考える関数空間を,

$$\mathbf{X}_T^m = \left\{ u(t) \in \mathbf{C}\left([0,T); \mathbf{L}^2\right); \|u\|_{\mathbf{X}_T^m} < \infty \right\},$$

ここで, ノルムは,

$$\|u\|_{\mathbf{X}_T^m} = \sup_{t\in[0,T)} \|u(t)\|_{\mathbf{H}^m} + \sup_{t\in[0,T)} \|\mathcal{J}\partial_x u(t)\|_{\mathbf{L}^2} + \sup_{t\in[0,T)} \|u(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}}$$

とする.

2 主結果の紹介

以上の準備の下で文献 [1] で得られた主結果について述べる. まず $\rho > 3$ の場合には以下の結果が得られた.

Theorem 2.1. $u_0 \in \mathbf{X}_0^m$, $m = 2 + \gamma$, $\gamma > 0$ とし, $\rho > \max\left\{3 + \frac{2}{3+2\gamma}, 3 + \gamma\right\}$, または, $\rho \geq 4$ で ρ は整数とする. このとき, ある $\widetilde{\varepsilon} > 0$ が存在して, $\|u_0\|_{\mathbf{X}_0^m} \leq \widetilde{\varepsilon}$ ならば, *(1)* の時間大域解 $u \in \mathbf{X}_\infty^m$ が一意に存在して, 次の評価をみたす :

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{2}}.$$

さらに, 小さい $\delta > 0$ に対して, 散乱状態 $u_+ \in \mathbf{H}^{m-\delta} \cap \dot{\mathbf{H}}^{-1}, \partial_x u_+ \in \mathbf{H}^{0,1-\delta}$ が一意に存在して, 次が成り立つ :

$$\|\mathcal{U}(-t)\, u(t) - u_+\|_{\mathbf{H}^{m-\delta}} + \|\mathcal{U}(-t)\, u(t) - u_+\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}} + \|\mathcal{U}(-t)\, \partial_x u(t) - \partial_x u_+\|_{\mathbf{H}^{0,1-\delta}} \to 0,$$

$t \to \infty$.

次に $\rho = 3$ の場合に得られた結果について述べる.

Theorem 2.2. $\rho = 3$ とし, $u_0 \in \mathbf{X}_0^m$, $m > 4$, $\|u_0\|_{\mathbf{X}_0^m} = \widetilde{\varepsilon}$ とする. このとき, $\widetilde{\varepsilon}$ に無関係な定数 $\varepsilon_0, B > 0$ が存在して, $0 < \widetilde{\varepsilon} \leq \varepsilon_0$ をみたす $\widetilde{\varepsilon}$ に対し以下の評価が成り立つ :

$$T^* \geq \exp\left(\frac{B}{\widetilde{\varepsilon}^2}\right).$$

ここで, T^* は解の最大存在時間で, $T^* = \sup\left\{T > 0; \|u\|_{\mathbf{X}_T^m} < \infty\right\}$ で定義される.

3 証明の要点

方程式 (1) の両辺を積分すると線形部分は $\mathcal{L} = \partial_t + \partial_x^{-1}$ となる. 線形部分に ∂_x^{-1} があるため, (1) の時間局所解を $\mathbf{H}^{\alpha,\beta}$, $\beta > 1$ で構成するのは難しいことがわかる. そのため, 通常の可換ベクトル場法で定理の結果を証明しようとしてもうまくいかない. ($\beta \geq 2$ で時間局所解を作ることが必要になる.) 文献 [1] では, 次の $\mathbf{L}^\infty$ 時間減衰評価を用いることによって, 重みつきソボレフ空間 $\mathbf{H}^{\alpha,\beta}$, $\beta > 1$ を用いることを避けることに成功した.

Lemma 3.1. $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $l \geq 0$ とする. このとき, 以下の評価が成り立つ :

$$\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{\frac{l}{2}} \phi\right\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C t^{-\frac{1}{2}} \left(\|\phi\|_{\mathbf{H}^{\frac{2l+2-2\varepsilon}{1-2\varepsilon}}} + \|\mathcal{J} \partial_x \phi\|_{\mathbf{L}^2}\right).$$

この不等式は解の高階の微分の $\mathbf{L}^\infty$ ノルムを評価する際, $\mathcal{J}$ に関するノルムは $\|\mathcal{J}\partial_x \phi\|_{\mathbf{L}^2}$ だけを評価すればよいことを主張している. $\mathcal{J} = \mathcal{U}(t) x \mathcal{U}(-t)$ であったから, この不等式から, 重みは一階で十分であることがわかる.

References

[1] N. Hayashi, P. I. Naumikin and T. Niizato. *Asymptotics of solutions to the generalized Ostrovsky equation*, J. Differential Equations, **255** (2013), pp. 2505-2520.

[2] J. Hunter, *Numerical solutions of some nonlinear dispersive wave equations.* Lect. Appl. Math. **26** (1990), pp. 301-316.

[3] Y. Liu, D. Pelinovsky and A. Sakovich, *Wave breaking in the short-pulse equation*, Dynamical. Partial Differential. Equ., **6** (2009), pp. 291-310.

[4] Y. Liu, D. Pelinovsky and A. Sakovich, *Wave breaking in the Ostrovsky-Hunter equation*, SIAM J. Math. Anal. **42** (2010), pp. 1967-1985.

[5] L.A. Ostrovsky, *Nonlinear internal waves in a rotating ocean*, Okeanologia **18** (1978), pp. 181-191.

[6] T. Schäfer and C.E. Wayne, *Propagation of ultra-short optical pulses in cubic nonlinear media*, Physica D, **196** (2004), pp. 90-105.

[7] A. Stefanov, Y. Shen and P.G. Kevrekidis, *Well-posedness and small data scattering for the generalized Ostrovsky equation*, J. Differential Equations, **249** (2010), pp. 2600-2617.