

Title	準凸計画問題に対する双対定理とその適用例 (非線形解析学と凸解析学の研究)
Author(s)	鈴木, 聡; 黒岩, 大史
Citation	数理解析研究所講究録 (2013), 1841: 86-92
Issue Date	2013-07
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/194978">http://hdl.handle.net/2433/194978</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

# 準凸計画問題に対する双対定理とその適用例

島根大学大学院総合理工学研究科 鈴木 聡 (Satoshi Suzuki)

Major in Interdisciplinary Science and Engineering, Shimane University

島根大学大学院総合理工学研究科 黒岩大史 (Daishi Kuroiwa)

Major in Interdisciplinary Science and Engineering, Shimane University

## 概要

数理計画問題においては多くの双対定理が提案されてきた。近年では双対定理に対する必要十分な制約想定が盛んに研究されるなど新たな発展を遂げている。本論文では [9, 11] において示した Lagrange 型双対定理, surrogate 双対定理に対する必要十分な制約想定を紹介し, その有用性について考察する。

## 1 導入

本論文では, 次のような数理計画問題について考える。

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && f(x) \\ & \text{subject to} && g_i(x) \leq 0, \forall i \in I. \end{aligned}$$

ただし,  $X$ : 局所凸ハウスドルフ線形位相空間,  $I$ : 添字集合,  $f, g_i: X \rightarrow [-\infty, \infty]$  である。この問題において, 各関数が凸関数であるとき凸計画問題と呼ばれ, 多くの研究者によって研究がなされてきた。さらに, 凸計画問題の拡張である準凸計画問題においては, 凸関数に対する劣微分や Fenchel 共役関数などがあまり有用な働きをなさないため, さまざまな新しい共役関数やそれに伴う新しい劣微分等の概念を用いて双対定理や最適性条件の研究がなされてきた。

近年, 双対定理に対する必要十分な制約想定が盛んに研究されている。その中でも代表的なものが凸計画問題における Lagrange 双対定理に対する必要十分な制約想定である。ベクトル値制約を持つ問題に対しては, Jeyakumar, Dinh, Lee による closed cone constraint qualification (CCCQ) ([5]), 実数値制約を持つ問題に対しては, Goberna, Jeyakumar, López による Farkas Minkowski (FM) ([4]) がそれぞれ示されている。CCCQ と FM は非常に関係の深い概念であり, また様々な研究者によって拡張され研究されている。([1, 2, 3, 6, 10])

我々は CCCQ, FM に関する研究を参考に, [9] において準凸計画問題に対する Lagrange 型双対定理を提案し, その必要十分な制約想定である closed cone constraint

qualification for quasiconvex programming (Q-CCCQ) について考察した. [9] においては Lagrange 型双対定理が凸計画問題に対しても非常に有用な定理であることも示している. また, [11] において, ベクトル値凸制約をもつ準凸計画問題における surrogate 双対定理に対する必要十分な制約想定である closed cone constraint qualification for surrogate duality (S-CCCQ) について提案した. [11] においては surrogate 双対定理と Lagrange 双対定理の関係, また CCCQ と S-CCCQ との関連についても述べている. それぞれの双対定理がこれまでは双対定理を用いて解くことが出来なかった問題にも対応できるようなものとなっており, 数理計画問題の新たな解法を提案するようになっている.

本論文では [9, 11] において示した Lagrange 型双対定理, surrogate 双対定理に対する必要十分な制約想定を紹介し, その有用性について考察する.

## 2 準備

本論文を通じて,  $X$  は局所凸ハウスドルフ線形位相空間,  $X^*$  をその双対空間,  $f$  は  $X$  から  $\mathbb{R} = [-\infty, \infty]$  への関数とする.  $f$  が準凸関数であるとは, 任意の  $x_1, x_2 \in X, \alpha \in (0, 1)$  に対して,

$$f((1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$$

が成り立つときをいう. 次に, 任意の  $\alpha \in \mathbb{R}$  と  $\mathbb{R}$  上の二項関係  $\diamond$  に対して関数  $f$  のレベル集合を次のように定義する:

$$L(f, \diamond, \alpha) = \{x \in X \mid f(x) \diamond \alpha\}.$$

このとき,  $f$  が準凸関数であることと, 任意の  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して  $L(f, \leq, \alpha)$  が凸集合であることは同値である. また,  $f$  が準凹関数であるとは,  $-f$  が準凸関数であるときをいい, 関数  $f$  が準アフィン関数であるとは,  $f$  が準凸かつ準凹であるときをいう. 重要な事実として,  $f$  が下半連続準アフィン関数であることと,  $f = k \circ w$  となるような  $k \in Q$  および  $w \in X^*$  が存在することが同値であることが知られている. ここで,  $Q = \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \text{下半連続非減少}\}$  である. この事実は, 準アフィン関数とはある種の単調性を持った関数である, ということを示している. 次に, 準凸関数に関する次の定理を紹介する.

**定理 1.** [7]  $f$  が下半連続準凸関数であることと,  $f = \sup_{i \in I} k_i \circ w_i$  となるような添字集合  $I, \{k_i\}_{i \in I} \subset Q$  および  $\{w_i\}_{i \in I} \subset X^*$  が存在することは同値である.

定理 1 は, 下半連続準凸関数はある下半連続準アフィン関数の族の上限に等しいということを示している. このことは, 下半連続凸関数が, アフィン関数の上限に等しいということと非常に良く対応している. [9] において我々は, この定理を用いて準凸関数の生成集合を次のように定義した.

**定義 1.** [9]  $\{(k_i, w_i) \mid i \in I\} \subset Q \times X^*$  が準凸関数  $f$  の生成集合であるとは  $f = \sup_{i \in I} k_i \circ w_i$  が成り立つときをいう。

定理 1 より, 任意の下半連続準凸関数は少なくとも一つの生成集合を持つ. 中でも代表的な例として,  $f$  が下半連続真凸関数であるとき,  $B_f = \{(k_v, v) \mid v \in \text{dom} f^*, k_v(t) = t - f^*(v), \forall t \in \mathbb{R}\} \subset Q \times X^*$  は  $f$  の生成集合である. 実際, 任意の  $x \in X$  に対して,

$$f(x) = f^{**}(x) = \sup\{\langle v, x \rangle - f^*(v) \mid v \in \text{dom} f^*\} = \sup_{v \in \text{dom} f^*} k_v(\langle v, x \rangle),$$

が成り立つことよりわかる.

次の定理において, Farkas Minkowski が Lagrange 双対定理に対する必要十分な制約想定であることが示されている.

**定理 2.** [4]  $I$ : 添字集合,  $\forall i \in I, g_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ , 下半連続凸関数,  $S = \{x \mid \forall i \in I, g_i(x) \leq 0\} \neq \emptyset$ . このとき, 次の二つの条件は同値である:

(i)  $\text{epi} \delta_S^* = \text{coneco} \bigcup_{i \in I} \text{epi} g_i^* + \{0\} \times [0, \infty)$  (Farkas Minkowski),

(ii)  $\forall f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , 凸関数,

$$\inf_{x \in S} f(x) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}} \inf_{x \in X} \left\{ f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) \right\},$$

ただし,  $\mathbb{R}_+^{(I)} = \{\lambda \in \mathbb{R}^I \mid \forall i \in I, \lambda_i \geq 0, \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\} : \text{有限集合}\}$

### 3 準凸計画問題に対する双対定理とその必要十分な制約想定

この章では以下の準凸計画問題について考察する:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && f(x) \\ & \text{subject to} && g_i(x) \leq 0, \forall i \in I. \end{aligned}$$

ただし,  $X$ : 局所凸ハウスドルフ線形位相空間,  $I$ : 添字集合,  $f, g_i : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ , 準凸関数,  $S = \{x \mid \forall i \in I, g_i(x) \leq 0\} \neq \emptyset$  である.

まず Lagrange 型双対定理とその必要十分な制約想定について述べる. 準凸計画問題において, Lagrange 型双対性が成立するとは次の等式が成立するときをいう:

$$\inf_{x \in S} f(x) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \inf_{x \in X} \left\{ f(x) + \sum_{t \in T} \lambda_t (w_t(x) - k_t^{-1}(0)) \right\},$$

ただし,  $G_i = \{(k_j^i, w_j^i) \mid j \in J_i\} \subset Q \times X^* : g_i$  の生成集合,  $T = \{t = (i, j) \mid i \in I, j \in J_i\}$  である. すなわち Lagrange 型双対定理とは, 準凸制約  $g_i$  をアフィン制約  $w_t - k_t^{-1}(0)$  に変換し, その変換したアフィン制約に対する Lagrange 双対定理を考えることと同値である. [9]において我々は, Lagrange 型双対定理に対する必要十分な制約想定である closed cone constraint qualification for quasiconvex programming (Q-CCCQ) について考察した.

**定理 3.** [9]  $I$ : 添字集合,  $\forall i \in I, g_i : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , 下半連続準凸関数,  $G_i = \{(k_j^i, w_j^i) \mid j \in J_i\} \subset Q \times X^* : g_i$  の生成集合,  $T = \{t = (i, j) \mid i \in I, j \in J_i\}$ ,  $S = \{x \mid \forall i \in I, g_i(x) \leq 0\} \neq \emptyset$ . このとき, 次の二つの条件は同値:

$$(i) \text{epi} \delta_S^* = \text{cone co} \bigcup_{t \in T} \{(w_t, \delta) \in X^* \times \mathbb{R} \mid k_t^{-1}(0) \leq \delta\} \text{ (Q-CCCQ w.r.t. } \bigcup_{i \in I} G_i),$$

(ii)  $\forall f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , 連続凸関数,

$$\inf_{x \in S} f(x) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \inf_{x \in X} \left\{ f(x) + \sum_{t \in T} \lambda_t (w_t(x) - k_t^{-1}(0)) \right\}.$$

Q-CCCQ においては生成集合  $G_i$  の取り方が非常に重要である. 関数  $g_i$  や集合  $S$  が変化しなくても,  $G_i$  の取り方により, Q-CCCQ が成り立つ場合や成り立たない場合が出てくる. 特に各  $g_i$  が凸関数である場合,  $B_{g_i}$  を生成集合として取ると Q-CCCQ と FM は同値になるが, FM が成り立たない場合においても適切な生成集合をとることにより Q-CCCQ が成り立つ場合がある. 具体例は後述する.

次に surrogate 双対定理とその必要十分な制約想定について述べる. 数理計画問題において, surrogate 双対性が成立するとは次のような等式が成立するときをいう:

$$\inf_{x \in S} f(x) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}} \inf \left\{ f(x) \mid \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) \leq 0 \right\}.$$

Surrogate 双対定理は準凸計画問題をはじめ, 整数計画問題など様々な場面で用いられる双対定理である. 特に Lagrange 双対定理との関連が深く, 次のような不等式が一般に成立する: 任意の  $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}$  に対して,

$$\inf_{x \in S} f(x) \geq \inf \left\{ f(x) \mid \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) \leq 0 \right\} \geq \inf_{x \in X} \left\{ f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) \right\}.$$

上記不等式より, Lagrange 双対定理が成り立つとき surrogate 双対定理も成り立つこと, また Lagrange 双対定理に対する制約想定は surrogate 双対定理の制約想定となることが分かる. しかし, 一般にそれらの逆は成り立たないことが知られている. Lagrange 双対定理に対する必要十分な制約想定に関する研究を参考に, 我々は [11]においてベクトル値制約を持つ surrogate 双対定理に対する必要十分な制約想定, closed cone constraint qualification for surrogate duality (S-CCCQ) を示した. 本論文では S-CCCQ を実数値制約に置き換えた次の定理の形で紹介する.

**定理 4.** [11]  $I$ : 添字集合,  $\forall i \in I, g_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ , 連続凸関数,  $S = \{x \mid \forall i \in I, g_i(x) \leq 0\} \neq \emptyset$ , このとき, 次の二つの条件は同値:

$$(i) \text{ epi} \delta_S^* = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}} \text{cl cone epi} \left( \sum_{i \in I} \lambda_i g_i \right)^* \text{ (S-CCCQ)},$$

(ii)  $\forall f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , 上半連続準凸関数

$$\inf_{x \in S} f(x) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}} \inf \left\{ f(x) \mid \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) \leq 0 \right\}.$$

上記のとおり Lagrange 双対定理に対する制約想定は surrogate 双対定理の制約想定にもなるが, 一般に逆は成り立たない. このことは, Lagrange 双対定理が適用できないような問題に対しても surrogate 双対定理を適用して問題を解くことが出来る場合があることを示している.

最後に, Q-CCCQ, S-CCCQ の有用性を例を用いて示す.

**Example 1.**  $X = \mathbb{R}$ ,  $I = \{1\}$  とし,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を次で与える関数とする:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{if } x \geq 1, \\ 0 & \text{if } -1 < x < 1, \\ x^2 + 2x + 1 & \text{if } x \leq -1. \end{cases}$$

$g^*$  を計算すると次のような関数となる:

$$g^*(v) = \begin{cases} \frac{1}{4}v^2 + v & \text{if } v \geq 0, \\ \frac{1}{4}v^2 - v & \text{if } v \leq 0. \end{cases}$$

このとき, FM は成り立たない. 実際,

$$\text{cone epi} g^* = \{(v, \alpha) \mid \alpha > |v|\} \cup \{0\}$$

となるからである. よってこのとき, 定理 2 より, この制約関数  $g$  に対しては Lagrange 双対定理が常に使えるとは限らない. すなわち, 既存の凸計画問題に関する結果を用いるだけでは解くことが難しい問題がありうるということを示唆している.

しかし, その様なときでも準凸計画問題における結果をうまく用いることで双対定理を用いて問題を解くことが出来る場合がある. 実際この例においても適切な生成集合を用いることにより Q-CCCQ が成り立つ. 以下, それを示す.  $G = \{(k, 1), (k, -1)\} \subset Q \times \mathbb{R}$  とする. ただし  $k$  は以下で定める  $\mathbb{R}$  から  $\mathbb{R}$  への下半連続単調非減少関数である:

$$k(t) = \begin{cases} (t-1)^2 & \text{if } t \geq 1, \\ 0 & \text{if } t < 1. \end{cases}$$

このとき明らかに  $G$  は  $g$  の生成集合であり,  $k^{-1}(0) = 1$  が成り立つ. よって

$$\text{coneco}\{(1, \delta) \mid k^{-1}(0) \leq \delta\} \cup \{(-1, \delta) \mid k^{-1}(0) \leq \delta\} = \{(v, \alpha) \mid \alpha \geq |v|\},$$

すなわち, Q-CCCQ w.r.t.  $G$  が成立する.

また, S-CCCQ も成立する. 実際,

$$\text{cl cone epig}^* = \{(v, \alpha) \mid \alpha \geq |v|\}.$$

が成り立つからである. よって制約  $g$  上での準凸関数の最小化を考える際には, Lagrange 型双対定理並びに surrogate 双対定理を用いて問題を解くことが出来る.

## 参考文献

- [1] R. I. BOŦ AND G. WANKA, *An alternative formulation for a new closed cone constraint qualification*, *Nonlinear Anal.* 64 (2006) 1367–1381.
- [2] R. I. BOŦ, S. M. GRAD AND G. WANKA, *On Strong and Total Lagrange Duality for Convex Optimization Problems*, *J. Math. Anal. Appl.* 337 (2008) 1315–1325.
- [3] R. I. BOŦ, S. M. GRAD AND G. WANKA, *New Regularity Conditions for Strong and Total Fenchel-Lagrange Duality in Infinite Dimensional Spaces*, *Nonlinear Anal.* 69 (2008) 323–336.
- [4] M. A. GOBERNA, V. JEYAKUMAR AND M. A. LÓPEZ, *Necessary and sufficient constraint qualifications for solvability of systems of infinite convex inequalities*, *Nonlinear Anal.* 68 (2008), pp. 1184–1194.
- [5] V. JEYAKUMAR, N. DINH AND G. M. LEE, *A new closed cone constraint qualification for convex optimization*, Research Report AMR 04/8, Department of Applied Mathematics, University of New South Wales, (2004)
- [6] C. LI, K. F. NG AND T. K. PONG, *Constraint qualifications for convex inequality systems with applications in constrained optimization*, *SIAM J. Optim.* 19 (2008), pp. 163–187.
- [7] J. P. PENOT AND M. VOLLE, *On quasi-convex duality*, *Math. Oper. Res.* 15 (1990), pp. 597–625.
- [8] J. P. PENOT AND M. VOLLE, *Surrogate programming and multipliers in quasi-convex programming*, *SIAM J. Control Optim.* 42 (2004), pp. 1994–2003.

- [9] S. SUZUKI AND D. KUROIWA, *On set containment characterization and constraint qualification for quasiconvex programming*, J. Optim. Theory Appl. 149 (2011), pp. 554–563.
- [10] S. SUZUKI AND D. KUROIWA, *Optimality conditions and the basic constraint qualification for quasiconvex programming*, Nonlinear Anal. 74 (2011), pp. 1279–1285.
- [11] S. SUZUKI AND D. KUROIWA, *Necessary and sufficient constraint qualification for surrogate duality*, J. Optim. Theory and Appl. 152 (2012), pp. 366–377.