Title	捜索者間での競争のある3人非ゼロ和捜索ゲーム (不確実・不確定環境下における数理的意思決定とその周辺)
Author(s)	宝崎, 隆祐
Citation	数理解析研究所講究録 (2012), 1802: 159-165
Issue Date	2012-07
URL	http://hdl.handle.net/2433/194343
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 1802 巻 2012 年 159-165

捜索者間での競争のある３人非ゼロ和捜索ゲーム

防衛大学校・情報工学科　宝崎　隆祐 (Ryusuke Hohzaki)
Department of Computer Science,
National Defense Academy

1　はじめに

捜索問題へのゲーム理論の応用研究として，Morse and Kimball は有名な著書『Methods of Operations Reseach』[15] の中で，航空機による潜水艦の海峡通峡阻止作戦を分析し，航空機による哨戒線の設定問題を議論している．その後の捜索ゲームの研究として，まず「潜伏・捜索ゲーム」と呼ばれる静止目標に対する捜索ゲームが議論されている．Norris[16] は，Box 空間における静止目標の潜伏と捜索者による捜索を，Baston and Bostock[1] や Garnaev[6] は，潜伏潜水艦への対潜ヘリからの爆雷投下作戦を２人ゼロ和ゲームにより研究した.

その後捜索ゲームは,「逃避・捜索ゲーム」と呼ばれる移動目標への研究へ拡張される．Meinardi[14] は，時間経過の中で直線上を移動する目標と捜索者の捜索問題を探知確率を支払とした多段階のゲームとして議論している．Danskin[4] は，ある一点から拡散的に移動する潜水艦と移動しつつ音響ブイを投下する捜索者の間の捜索問題を 1 段階の捜索ゲームとして論じている．同じ 1 段階の捜索ゲームとしては，移動戦略をとる捜索者を扱った Eagel and Washburn[5] や，捜索資源の投入戦略をとる捜索者を論じた Iida[13] や Hohzaki[10]，Dambreville and Le Cadre[3] の研究がある.「捜索配分ゲーム」と呼ばれる後者の研究では，目標移動に地理制約やエネルギー制約といった現実的な制約条件を課したモデルの拡張が，Washburn[17] や Hohzaki[11, 12, 7] によりなされている．また，捜索配分ゲームを多段階としたモデルが，Hohzaki[9] により議論されている.

Baston and Garnaev[2] のように，共に資源投入戦略をもつ捜索者と阻止者間での非ゼロ和ゲームといった少数の特殊な研究はあるが，上で見たように，長年に亘り研究されてきた捜索ゲームのモデルの多くは，敵対する目標と捜索者との間の２人ゼロ和の非協力ゲームである．しかし，例えば，ある目標物や資源の発見に付随する利益の取得を複数の捜索者が期待する場合には，捜索者間での協力が生じ得る．また捜索救難においては，捜索機を見つけた遭難者は遭難信号の発信や信号弾の発射などを行い，捜索者と目標との間で協力関係が存在する例も多い．このような捜索における協力ゲームを初めて論じたのが Hohzaki[8] である．そこでは，複数捜索者間で提携が生じるとし，提携関係にある捜索者は手持ちの資源を出し合って捜索を行い，一方の目標は捜索者による発見を回避しようとするモデルが，目標探知確率を支払とするゲームとして論じられている．ただし，提携した捜索者のみが捜索に従事するという前提があり，それを使って捜索効率の観点から全体提携が生成されることを証明して，議論を展開している.

しかし，契約あるいは提携関係にある捜索者以外の捜索者は，時に同じ目標探知を競う競争相手として提携者と対立するように行動することもある．この論文では，捜索者全体が２つの提携に分かれ非協力的に捜索活動を行う捜索ゲームを取り上げ，目標も含めた３人ゲームを論じる．ただし，１つの提携を捜索資源を共同出資する１人の捜索者と見ることができるから，モデルとしては２人の捜索者と１人の目標が参加する３人非ゼロ和非協力ゲームとなり，そのナッシュ均衡解を導出することをこの論文の目的とする.

次節では移動目標に対する３人非ゼロ和捜索ゲームの問題をモデル化し，プレイヤーの戦略や支払関数について議論する．3 節では，プレイヤーの最適反応の性質を用いて，ナッシュ均衡解を導出するための数値計算アルゴリズムを提案し，4 節において，いくつかの数値例により均衡解の性質を分析する.

2　移動目標に対する２人捜索者による捜索ゲーム

ここでは移動目標に対する捜索ゲームを考える．参加する２人の捜索者は非協力的に捜索を実施し，目標は捜索者による探知を避けるために捜索空間上を移動する.

(B1) 捜索空間を，離散セル空間 $\boldsymbol{K}=\{1,\cdots,K\}$ と離散時間空間 $\boldsymbol{T}=\{1,\cdots,T\}$ から成る集合 $\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{T}$ とする．

(B2) 目標は，時間とともに移動するパスの集合 Ω から 1 つのパスを選択して，捜索空間内を移動する．パス $\omega\in\Omega$ の時間 $t\in\boldsymbol{T}$ における位置は $\omega(t)\in\boldsymbol{K}$ である．

(B3) 2 人の捜索者は，手持ちの捜索資源を捜索空間に投入して目標を発見しようとする．捜索者 $k=1,2$ は時点 t において上限 $\Phi_k(t)$ の捜索資源を使用できるが，資源投入は時点 τ から開始できる．

(B4) 目標がセル i に存在している場合，そこに投入した捜索資源量 x による目標探知確率は $1-\exp(-\alpha_i x)$ であり，捜索者による目標探知事象は互いに独立であるとする．α_i はセル i における捜索資源の効率を示すパラメータである．
捜索者が単独で探知した場合には，その発見者は目標価値 1 を独占できるが，2 人の捜索者が同時に探知した場合には捜索者 1，2 それぞれは $[0,1]$ の間にある価値 $0\le\delta_1,\ \delta_2\le 1$ を得る．目標の探知とともに捜索は終了するが，最終時点 T まで探知がなければ，目標は利益 1 を獲得する．

(B5) 誰も捜索期間中の捜索状況についての情報を得ることはできず，目標と 2 人の捜索者は捜索に先立って戦略を立案しなければならない．

時点 τ から始まる捜索可能な時間帯を，$\widehat{\boldsymbol{T}}=\{\tau,\tau+1,\cdots,T\}$ で表そう．捜索者 $k=1,2$ の捜索資源投入戦略を $\varphi_k=\{\varphi_k(i,t),\ i\in\boldsymbol{K},\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}}\}$ によって表す．$\varphi_k(i,t)\in\boldsymbol{R}$ は時点 t，セル i への資源投入量である．目標の戦略をパス選択に関する混合戦略にとり，パス $\omega\in\Omega$ を選ぶ確率を $\pi(\omega)$ とする戦略 $\pi=\{\pi(\omega),\ \omega\in\Omega\}$ により表現する．このとき，各プレイヤーの戦略 π,φ_k $(k=1,2)$ の実行可能領域は以下で定義される．

$$\Pi\equiv\{\pi|\pi(\omega)\ge 0,\omega\in\Omega,\ \sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)=1\} \tag{1}$$

$$\Psi_k\equiv\{\varphi_k|\varphi_k(i,t)\ge 0,i\in\boldsymbol{K},t\in\widehat{\boldsymbol{T}},\ \sum_{i\in\boldsymbol{K}}\varphi_k(i,t)=\Phi_k(t),t\in\widehat{\boldsymbol{T}}\} \tag{2}$$

パス ω をとった目標に対し最後まで探知が生じない確率 $Q(\omega,\varphi_1,\varphi_2)$ は，次式で与えられる．

$$Q(\omega,\varphi_1,\varphi_2)=\exp\left(-\sum_{t=\tau}^{T}\alpha_{\omega(t)}(\varphi_1(\omega(t),t)+\varphi_2(\omega(t),t))\right) \tag{3}$$

次に捜索者 k による時点 $t\in\widehat{\boldsymbol{T}}$ での目標探知を考える．時点 t 以前に探知が生じない確率や時点 t での捜索者 k による目標探知確率，及び他の捜索者 $j(\neq k)$ による探知や非探知確率を考慮して，捜索者 k の時点 t での期待利得を次のように導出できる．

$$\exp\left(-\sum_{\zeta=\tau}^{t-1}\alpha_{\omega(\zeta)}(\varphi_1(\omega(\zeta),\zeta)+\varphi_2(\omega(\zeta),\zeta))\right)(1-\exp(-\alpha_{\omega(t)}\varphi_k(\omega(t),t)))$$
$$\times\{\exp(-\alpha_{\omega(t)}\varphi_j(\omega(t),t))+\delta_k(1-\exp(-\alpha_{\omega(t)}\varphi_j(\omega(t),t)))\}$$

各時点での探知事象は互いに排反であるから，目標がパス ω をとった場合の捜索者 $k=1,2$ の期待利得 $R_k(\omega,\varphi_k,\varphi_j)$，$(k,j)\in\{(1,2),(2,1)\}$ は次式となる．

$$\begin{aligned}R_k(\omega,\varphi_k,\varphi_j)=&\sum_{t=\tau}^{T}\exp\left(-\sum_{\zeta=\tau}^{t-1}\alpha_{\omega(\zeta)}(\varphi_k(\omega(\zeta),\zeta)+\varphi_j(\omega(\zeta),\zeta))\right)(1-\exp(-\alpha_{\omega(t)}\varphi_k(\omega(t),t)))\\&\times\{\exp(-\alpha_{\omega(t)}\varphi_j(\omega(t),t))+\delta_k(1-\exp(-\alpha_{\omega(t)}\varphi_j(\omega(t),t)))\}\end{aligned} \tag{4}$$

以上により，目標の混合戦略 π を考慮した目標及び捜索者 k の期待支払 $Q(\pi,\varphi_1,\varphi_2)$，$R_k(\pi,\varphi_k,\varphi_j)$ は次の式で与えられる．

$$Q(\pi,\varphi_1,\varphi_2)\ =\ \sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)Q(\omega,\varphi_1,\varphi_2) \tag{5}$$

$$R_k(\pi,\varphi_k,\varphi_j)\ =\ \sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)R_k(\omega,\varphi_k,\varphi_j),\ (k,j)=(1,2),(2,1) \tag{6}$$

ここでの問題は，目標は非探知確率 $Q(\pi,\varphi_1,\varphi_2)$ を最大にするような π をとり，捜索者 $k=1,2$ は各自の期待獲得価値 $R_1(\pi,\varphi_1,\varphi_2)$, $R_2(\pi,\varphi_2,\varphi_1)$ を最大にするようにそれぞれの戦略 φ_1, φ_2 を変化させようとする非ゼロ和の３人非協力ゲームとなる．このゲームにおいて，任意の $\pi\in\Pi$, $\varphi_1\in\Psi_1$, $\varphi_2\in\Psi_2$ に対し，

$$Q(\pi^*,\varphi_1^*,\varphi_2^*)\ge Q(\pi,\varphi_1^*,\varphi_2^*),\ R_1(\pi^*,\varphi_1^*,\varphi_2^*)\ge R_1(\pi^*,\varphi_1,\varphi_2^*),\ R_2(\pi^*,\varphi_2^*,\varphi_1^*)\ge R_2(\pi^*,\varphi_2^*,\varphi_1) \quad (7)$$

を成立させるナッシュ均衡解 $\pi^*,\varphi_1^*,\varphi_2^*$ を求めることが，ここでの目的である．

3 ナッシュ均衡解の数値解法アルゴリズム

前節では，各プレイヤーの期待支払を求め，ナッシュ均衡解の条件式 (7) を明らかにした．ここでは，ナッシュ均衡解の存在を言い，その後解を導出する数値解法アルゴリズムを提案しよう．

式 (1), (2) から分かるように，戦略の実行可能領域 Π, Ψ_k は，いずれも閉凸集合である．期待支払に関しては，$Q(\pi,\varphi_1,\varphi_2)$ は π に関して線形であることは明らかである．$R_k(\pi,\varphi_k,\varphi_j)$ の φ_k に関する狭義凹性は，(4) 式で与えられる $R_k(\omega,\varphi_k,\varphi_j)$ の狭義凹性を示すことにより証明できる．この狭義凹性と実行可能領域 Ψ_k の閉凸有界性から，捜索者 k の最適反応戦略は，他のプレイヤーの戦略 π, φ_j $(j\neq k)$ が与えられている場合には唯一つ存在する．期待支払や実行可能領域に関する以上の考察から，現在の戦略 $(\pi,\varphi_1,\varphi_2)$ を用い，最適化問題 $\max_\pi Q(\pi,\varphi_1,\varphi_2)$, $\max_{\varphi_j} R_k(\pi,\varphi_k,\varphi_j)$ $(j=1,2)$ を解いて得られる新しい解 $(\pi',\varphi_1',\varphi_2')$ を写像と考えれば，不動点定理から，均衡解の条件式 (7) を満たす点，すなわち不動点が存在することがいえる．

以下では，その存在が証明されたナッシュ均衡解を実際に求める解法を議論しよう．まず，捜索者の戦略 φ_1, φ_2 が与えられている場合，非探知確率 $Q(\pi,\varphi_1,\varphi_2)$ を最大にする目標の最適反応戦略 $\pi\in\Pi$ の必要条件を求める．条件 (3), (5) 及び (1) から，容易に次の条件が導出できる．

予備定理 1 最適なパス選択確率 π は，$\Omega_M(\varphi_1+\varphi_2)\equiv\{\omega_m\in\Omega|g(\omega_m,\varphi_1+\varphi_2)=\min_{\omega\in\Omega}\ g(\omega,\varphi_1+\varphi_2)\}$ に対し，$\omega\in\Omega_M(\varphi_1+\varphi_2)$ ならば $\pi(\omega)\ge 0$ とし，$\omega\notin\Omega_M(\varphi_1+\varphi_2)$ ならば $\pi(\omega)=0$ とすべきである．

ただし，パス $\omega\in\Omega$ 上に投入される捜索資源 φ_1, φ_2 の重み付き総量 $g(\omega,\varphi_1+\varphi_2)$ を次式で定義する．

$$g(\omega,\varphi_1+\varphi_2)\equiv\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\alpha_{\omega(t)}(\varphi_1(\omega(t),t)+\varphi_2(\omega(t),t)) \quad (8)$$

目標のパス戦略 π 及び捜索者 j の戦略 φ_j に対するもう 1 人の捜索者 $k(\neq j)$ の最適反応戦略を求める問題 $P_k(\varphi_j;\pi)$ は次により作成できる．ただし，$\Omega^+(\pi)\equiv\{\omega\in\Omega|\pi(\omega)>0\}$ とする．因みに，このとき $\Omega\backslash\Omega^+(\pi)=\{\omega\in\Omega|\pi(\omega)=0\}$ である．

$$\begin{aligned}
P_k(\varphi_j;\pi)\ :\ & \max_{\varphi_k,\lambda}\ R_k(\pi,\varphi_k,\varphi_j) \\
s.t.\ & \sum_{i\in\boldsymbol{K}}\varphi_k(i,t)\le\Phi_k(t),\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}},\quad \varphi_k(i,t)\ge 0,\ i\in\boldsymbol{K},\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}}, && (9)\\
& g(\omega,\varphi_k+\varphi_j)=\lambda,\ \omega\in\Omega^+(\pi),\quad g(\omega,\varphi_k+\varphi_j)\ge\lambda,\ \omega\in\Omega\backslash\Omega^+(\pi) && (10)
\end{aligned}$$

予備定理 1 から分かるように，条件式 (10) は，π が φ_1 及び φ_2 に対する目標の最適反応であり続けるための条件である．このとき次の定理が成り立つ．ただし，証明は略す．

定理 1 任意の $\{\pi(\omega),\omega\in\Omega\}$ に対し，問題 $P_k(\varphi_j;\pi)$ を $(k,j)=(1,2),(2,1)$ として逐次的に解く解が φ_1^*, φ_2^* に収束すれば，$(\pi,\ \varphi_1^*,\ \varphi_2^*)$ はナッシュ均衡解である．

さて，このようにある問題を逐次的に解いて収束解を求めようとする数値計算アルゴリズムは，他の分野の問題においても多く用いられるが，暫定解が時に大きく振れることから収束しないケースがよくある．そのような大幅な振れを減少させるためには，解の変化にペナルティを付加した目的関数を用いることが有効である．2つの問題 $P_k(\varphi_j;\pi)$ $(k=1,2)$ において，目的関数 $R_k(\pi,\varphi_k,\varphi_j)$ を

$$\widetilde{R_k}(\pi,\varphi_k,\varphi_j)\equiv R_k(\pi,\varphi_k,\varphi_j)-\gamma||\varphi_k-\widehat{\varphi_k}||^2$$

に代えた問題を $\widetilde{P_k}(\varphi_j;\pi)$ と書こう．ただし，$\widehat{\varphi_k}$ はプレイヤー k の現在得られている暫定的な戦略である．

さて，このようなアルゴリズム的工夫はさておき，目的関数 $R_k(\pi,\varphi_k,\varphi_j)$，あるいは $\widetilde{R_k}(\pi,\varphi_k,\varphi_j)$ の狭義凹性から，$k=1,2$ に対する2つの問題はそれぞれ1つの最適解を導き出し，不動点である収束解も存在する．つまり任意の π に対しナッシュ均衡解は必ず存在し，定理1で述べた収束解が数値解法により求められれば，それがナッシュ均衡解の1つである．

定理1から多数のナッシュ解が存在することが予想されるが，以下では，定理1による捜索者の収束解 φ_1^*，φ_2^* を導く際に固定パラメータとする尤もらしい目標戦略 π を提案する．目標にとって2人の捜索者戦略 φ_1，φ_2 が最悪となるケースは，投入捜索資源量 φ_1，φ_2 が非探知確率 $Q(\pi,\varphi_1,\varphi_2)$ を最小にする場合である．目標がそのような場合のリスクを最小にしたければ，支払 $Q(\pi,\varphi_1,\varphi_2)$ を小さくしようと両捜索者が協力して行動すると仮定して，そのような捜索者戦略に対する最適な反応戦略を採用すべきである．この状況は，非探知確率を支払として目標をマキシマイザー，両捜索者を1人のミニマイザーとする2人ゼロ和ゲームで捉えることができる．すなわち，パス $\omega\in\Omega$ を選択する目標と資源配分 $\varphi(i,t)=\varphi_1(i,t)+\varphi_2(i,t)$ を行う捜索者の支払が，(3) 式を修正した

$$Q(\omega,\varphi)=\exp\left(-\sum_{t=\tau}^{T}\alpha_{\omega(t)}\varphi(\omega(t),t)\right)$$

で与えられる2人ゼロ和ゲームである．幸いにも，この問題はすでに Hohzaki[8] による研究があり，それによれば捜索者の最適解 φ^* は次の線形計画問題の解により与えられる．

$$\begin{aligned}
P_S\ :\quad & w=\max_{\varphi,\eta}\ \eta\\
s.t.\quad & \sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\alpha_{\omega(t)}\varphi(\omega(t),t)\ge\eta,\ \omega\in\Omega,\\
& \sum_{i\in\boldsymbol{K}}\varphi(i,t)=\Phi_1(t)+\Phi_2(t),\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}},\qquad \varphi(i,t)\ge 0,\ i\in\boldsymbol{K},\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}}
\end{aligned}$$

また，目標の最適パス選択確率 π^* は，上記の問題 P_S と双対な関係にある次の問題を解けばよい．

$$\begin{aligned}
D_T\ :\quad & w=\min_{\nu,\pi}\ \sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\nu(t)(\Phi_1(t)+\Phi_2(t))\\
s.t.\quad & \sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)=1,\qquad \pi(\omega)\ge 0,\ \omega\in\Omega,\qquad \alpha_i\sum_{\omega\in\Omega_{it}}\pi(\omega)\le\nu(t),\ i\in\boldsymbol{K},\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}}
\end{aligned}$$

ただし，記号 Ω_{it} は時点 t においてセル i を通過するパス群 $\Omega_{it}\equiv\{\omega\in\Omega|\omega(t)=i\}$ を意味する．因みに均衡解により得られる非探知確率は，上記の線形計画問題の最適値 w を用いた式 $\exp(-w)$ により計算できる．

これまでの議論から，目標と2人の捜索者の間で行われる3人非ゼロ和ゲームの1つのナッシュ均衡解を求めるアルゴリズムが，次のようにまとめられる．

<u>アルゴリズム AL_{2S}</u>

(i) 問題 D_T を解くことにより目標戦略 π^* を求める．また，問題 P_S を解いて得た捜索資源配分 $\varphi^*(i,t)$ を，手持ち資源総量 $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ に比例配分した量

$$\varphi_k^0(i,t)=\varphi^*(i,t)\frac{\Phi_k(t)}{\Phi_k(t)+\Phi_j(t)},\ i\in\boldsymbol{K},\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}}$$

を捜索者 $k=1,2$ の初期暫定戦略とする．

(ii) $\pi=\pi^*$ 及び初期暫定解 $\varphi_k^0(i,t)$ を用いて，凸計画問題 $\widetilde{P_k}(\varphi_j;\pi)$ を $k=1,2$ として繰り返し解く．解が φ_1^*，φ_2^* に収束すれば，π，φ_1^* 及び φ_2^* が目標，捜索者1及び2の戦略に関するナッシュ均衡解であり，各プレイヤーの期待支払は $Q(\pi,\varphi_1^*,\varphi_2^*)$ 及び $R_k(\pi,\varphi_k^*,\varphi_j^*)$，$(k,j)=(1,2),(2,1)$ により与えられる．

4　数値例

4つのセルから成るセル空間 $\boldsymbol{K} = \{1, \cdots, 4\}$ と時間空間 $\boldsymbol{T} = \widehat{\boldsymbol{T}} = \{1, \cdots, 10\}$ の捜索空間を考える．この上に5本の目標パス群 $\Omega = \{1, \cdots, 5\}$ を想定するが，図1は各パスの具体的なルートを，縦にセルを横に時点をとって示したものである．パス1，2及び3は，それぞれセル1，2及び3にとどまっている．パス4は前半の期間はセル4に留まるが，時間 $t = 5$ 以降セル3に移動してパス3に合流する．パス5はセル間を横断しつつ，時点 $t = 3$ 以降パス3に合流するパスである．すべてのセルの資源効率を $\alpha_i = 0.2$ $(i = 1, \cdots, 4)$ とし，捜索の効率性に関するセル間の差違は無いものとする．2人の捜索者は各時点で同じ資源量を持ち，$\Phi_1(t) = \Phi_2(t) = 0.5$ $(t \in \widehat{\boldsymbol{T}})$ であると設定した．

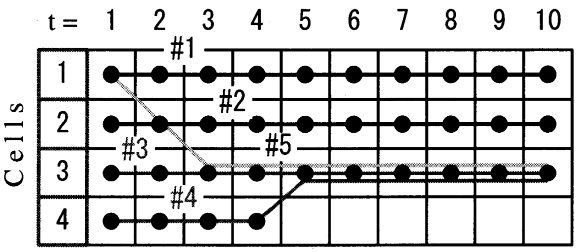

図1．目標パス群

この数値例を問題 D_T に定式化して解いた結果，$\pi^* = (\pi^*(1), \pi^*(2), \pi^*(3), \pi^*(4), \pi^*(5)) = (1/3,\ 1/3,\ 1/6,\ 1/6,\ 0)$ となった．パス5は他のパスとの交点が多く，捜索資源が交点に置かれることによって効率的な捜索がなされるから，目標にとっては避けるべきパスである．目標がこのパスを通る可能性が無い場合，パス1及び2は他のパスと全く交わることなく独立して走行するパスとなる．パス3及び4は時間5以降合流するため，その合流するセル3は捜索資源の効率的な配置場所である．以上のことから，π^* は非探知確率を評価尺度にする目標側の尤もらしいパス選択戦略であると言える．また，問題 P_S の最適解から作成したプレイヤー $k = 1, 2$ の初期暫定解 φ_k^0 は，どちらも表1のようになる．これにより，パス ω_k $(k = 1, \cdots, 5)$ ごとの重み付き資源配分総量 $g(\omega_k, \varphi^0)$ は (0.667, 0.667, 0.667, 0.667, 0.805) となり，予備定理1で記したように，パス選択確率 $\pi^*(\omega)$ に対応したものとなっている．

表1．1人の捜索者の初期暫定解

Cells \ t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.173	0.327	0.250	0.250	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111
2	0.327	0.173	0.250	0.250	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111
3	0	0	0	0	0.278	0.278	0.278	0.278	0.278	0.278
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Phi_k(t)$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5

このパス選択確率 π^* と初期暫定解 φ_k^0 を用い，$(\delta_1,\ \delta_2)$ として $(1, 1)$（ケース1），$(0.8, 0.2)$（ケース2）及び $(0, 0)$（ケース3）の3つのケースに対し，アルゴリズム AL_{2S} を用いてナッシュ均衡解を得た．その結果，2人の捜索者の最適捜索資源配分は表1とほとんど変わらないものとなった．ケース1 ～ 3のそれぞれの非探知確率 $Q(\pi^*, \varphi_1, \varphi_2)$ を小数点第5位まで書けば，0.51346, 0.51347 及び 0.51348 となり，δ 値による双方の捜索者に対する同時探知の望ましさを反映した値となっているものの，その差は微小である．因みに，各ケースにおけるプレイヤー $k = 1, 2$ の期待利得 $R_k(\pi^*, \varphi_k, \varphi_j)$ は，$(0.249, 0.249)$, $(0.247, 0.240)$ 及び $(0.238, 0.238)$ となり，プレイヤー k の利得は δ_k が減少するにつれ減少する．この利得の変化からも分かるように，δ_k がプレイヤーの利得に及ぼす影響は極めて小さく，少なくとも1人の捜索者が探知するという全体の目標探知の中で，両捜索者による同時探知が影響する期待利得の部分は小さく，δ_k のどのケースにおいても，全体の探知確率を最大にする問題 P_S の解と余り異ならない資源配分が得られたと思われる．

そこで，ケース2に対し，π^* とは異なるパス選択 $\pi = (0.4,\ 0.4,\ 0,\ 0,\ 0.2)$ をアルゴリズム AL_{2S} のステップ (ii) に適用した結果，捜索者の最適資源配分計画 φ_k^* $(k = 1, 2)$ として表2を得た．パス選択 π と上

の捜索資源配分による非探知確率は 0.525 であり，$\delta_1 = 0.8, \delta_2 = 0.2$ にも関わらず，プレイヤー 1，2 の期待利得は (0.214, 0.261) となる．この結果を目標戦略 π^* のナッシュ解と比べれば，目標とプレイヤー 2 には望ましく，プレイヤー 1 には望ましくない．

表 2．最適資源配分（ケース 2；$\pi = (0.4,\ 0.4, 0,\ 0,\ 0.2)$, 順序 $k = 1, 2$）

Searcher 1										
Cells \ t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0.254	0.200	0.200	0.149	0.149	0.150	0.150	0.150	0.150
2	0.255	0	0.200	0.199	0.149	0.149	0.149	0.150	0.150	0.150
3	0.173	0.173	0	0	0.202	0.201	0.201	0.201	0.201	0.200
4	0.072	0.073	0.100	0.101	0	0	0	0	0	0
$\Phi_1(t)$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5

Searcher 2										
Cells \ t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.174	0.328	0.250	0.250	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111
2	0.326	0.172	0.250	0.250	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111
3	0	0	0	0	0.277	0.278	0.278	0.278	0.278	0.278
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Phi_2(t)$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5

しかし，この結果はアルゴリズム AL_{2S} のステップ (ii) における逐次最適化の順序を $k = 1, 2$ としたためであり，これを $k = 2, 1$ と変えれば，表 2 の捜索資源配分をプレイヤー間で交換したものにほぼ等しいものが得られる．この場合の非探知確率も 0.525 であり，プレイヤー 1 及び 2 の期待利得は (0.266, 0.208) となって，π^* の場合に比較すると，今度は目標とプレイヤー 1 にとっては望ましく，プレイヤー 2 にとっては望ましくない状態のナッシュ均衡解となる．アルゴリズム AL_{2S} における最適化の順序は，通常の非協力ゲームの問題においてしばしば見られるプレイヤーの手番の影響と同じく，初期暫定解 $\varphi_k^0(i, t)$ を先に宣言した捜索者が有利となり，順序 $k = 1, 2$ では捜索者 2 が，順序 $k = 2, 1$ では捜索者 1 が有利なナッシュ均衡解となる．ここで，どちらのナッシュ均衡解でも目標に有利となっていることに注意すると，定理 1 で言及した目標戦略 π の尤もらしい値として提案した π^* でなく，他のパス選択を目標が持つと捜索者に信じさせることが，目標にとって有利な方向に 2 人の捜索者による非協力的行動の結果を導くことを，表 2 が物語っている．

5 おわりに

この論文では，移動目標と 2 人の捜索者間でプレイされる 3 人非ゼロ和ゲームを取り扱った．定理 1 で述べたように，移動目標問題にはナッシュ均衡解が多数存在することが予想され，論文ではその 1 つの均衡解導出のための数値解法アルゴリズムを提案した．それは，尤もらしい目標戦略をまず求め，それを基にして 2 人の捜索者の最適化問題を逐次的に解き，収束解としてのナッシュ解を導出しようとするものである．数値例では，目標側がみずからの探知に捜索者同士が協力する最悪の状況に対処するように戦略をとれば，そのことが逆に目標と敵対する形で 2 人の捜索者間に協力関係を生じさせる例をみた．次に，この目標戦略を変えることにより，目標に有利な状況を現出できることも確認した．今回はナッシュ均衡解導出に焦点をあてたが，例えば "根拠の無い脅し" の存在が引き合いに出されるような均衡解の妥当性についても今後は考察し，均衡解の精緻化も必要となる．

ここで考えた 3 人ゲームのモデルは，競合する 2 つの提携（捜索者群）と目標との間のモデルへすぐに拡張できるが，それを通じて提携間で競争のある捜索ゲームに発展させることが次の課題である．その際，獲得価値を提携メンバー間で配分する捜索ゲームの提携形協力モデルを論じた研究 [8] が役立つと思われる．

参考文献

[1] V.J. Baston and F.A. Bostock, A one-dimensional helicopter-submarine game, *Naval Research Logistics*, **36**, pp.479–490, 1989.

[2] V.J. Baston and A.Y. Garnaev, A search game with a protector, *Naval Research Logistics*, **47**, pp.85–96, 2000.

[3] F. Dambreville and J.-P. Le Cadre, Search game for a moving target with dynamically generated informations, Proceedings of the 5th International Conference on Information Fusion (FUSION'2002), pp.243–250, 2002.

[4] J.M. Danskin, A helicopter versus submarine search game, *Operations Research*, **16**, pp.509–517, 1968.

[5] J.N. Eagle and A.R. Washburn, Cumulative search-evasion games, *Naval Research Logistics*, **38**, pp.495–510, 1991.

[6] A.Y. Garnaev, A Remark on a Helicopter-Submarine Game, *Naval Research Logistics*, **40**, pp.745–753, 1993.

[7] R. Hohzaki, Search allocation game, *European Journal of Operational Research*, **172**, pp.101–119, 2006.

[8] R. Hohzaki, A cooperative game in search theory, *Naval Research Logistics*, **56**, 264–278, 2009.

[9] R. Hohzaki, A generalization of the multi-stage search allocation game, Annals of the International Society of Dynamic Games, **11**, pp.189-208, 2011.

[10] R. Hohzaki and K. Iida, A search game with reward criterion, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **41**, pp.629–642, 1998.

[11] R. Hohzaki, K. Iida and T. Komiya, Discrete search allocation game with energy constraints, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **45**, pp.93–108, 2002.

[12] R. Hohzaki and A. Washburn, An approximation for a continuous datum search game with energy constraint, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **46**, pp.306–318, 2003.

[13] K. Iida, R. Hohzaki and S. Furui, A search game for a mobile target with the conditionally deterministic motion defined by paths, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **39**, pp.501–511, 1996.

[14] J.J. Meinardi, *A Sequentially Compounded Search Game*, in: Theory of Games: Techniquea and Applications, The English Universities Press, London, pp.285–299, 1964.

[15] P.M. Morse and G.E. Kimball, *Methods of Operations Research*, MIT Press, Cambridge, 1951.

[16] R.C. Norris, *Studies in Search for a Conscious Evader*, MIT Technical Report No.279, 1962.

[17] A.R. Washburn and R. Hohzaki, The diesel submarine flaming datum problem, *Military Operations Research*, **4**, pp.19–30, 2001.