

Title	変分原理を用いた無衝突磁気リコネクションの解析 (オイラー方程式の数理解析: カルマン渦列と非定常渦運動100年)
Author(s)	廣田, 真; Morrison, P.J.
Citation	数理解析研究所講究録 (2012), 1776: 115-125
Issue Date	2012-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/171758
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

変分原理を用いた無衝突磁気リコネクションの解析

日本原子力研究開発機構・那珂核融合研究所 廣田 真 (Makoto Hirota)
Naka Fusion Institute,
Japan Atomic Energy Agency
テキサス大学・核融合研究所 P. J. Morrison
The University of Texas at Austin,
Institute for Fusion Studies

1 研究背景

太陽表面や磁気圏、磁場閉じ込めプラズマ実験では、磁力線のつなぎ換え (磁気再結合) という現象が観測されており、磁場のエネルギーが解放され、プラズマの運動エネルギーへの変換が起きている。磁場閉じ込め核融合を目指す観点からすると、磁気再結合はプラズマに大なり小なりの崩壊をもたらすため、その発生メカニズムを理解し、回避や抑制をすることが重要となる。

宇宙空間の希薄プラズマや核融合装置の高温プラズマでは、ミクロなイオンと電子の衝突頻度は非常に小さく、電磁流体力学 (MHD) の枠組みにおいて電気抵抗などの散逸効果を見捨てた理想 MHD 方程式がマクロな挙動を支配する。しかし、理想 MHD 方程式では磁束の保存則が成り立ち、磁力線のつなぎ換えは禁止されている (次節を参照)。よって、磁気再結合が起きている場所では、局所的には無視できない何らかの物理機構が理想 MHD 方程式に対する特異摂動として働いていなければならない。電気抵抗のみを加えた抵抗性 MHD 方程式においても磁気再結合が起きることは古くから知られているが、すでに述べたように実際の電気抵抗は非常に小さいため、観測されている磁気再結合の速い時間スケールを説明するには不十分であると考えられている。そこで、二流体効果や運動論的效果などを含めた様々な拡張 MHD 方程式が提案され、無衝突プラズマにおける速い磁気再結合を説明する試みが現在も続いている。散逸を含まない無衝突プラズマのモデルは、エネルギーが保存した力学系を成すべきであり、近年、そのハミルトン形式に着目することで、モデルの正当化や平衡と安定性の理解が進みつつある。

本研究では二流体効果の中でも磁気再結合を直接引き起こす「電子慣性」の効果に着目し、無衝突プラズマで起きる磁気再結合に対して、変分原理 (ラグランジアン) を用いた解析手法を初めて適用した。その結果、磁気再結合の引き金として知られるテアリング不安定性に対し、従来から提唱されていた線形成長率のみならず、非線形飽和に至る力学的なメカニズムを明らかにすることに成功した。

2 モデル方程式

プラズマは電離気体とも呼ばれ、イオンと電子の二成分の流体から成る (二流体: two fluids)。ただし、十分に大きなスケールに着目して様々な微視的効果を見捨てることにより、比較的解析が容易な MHD 方程式が導出される (例えば教科書 [1] を参照)。ここでは本研究で扱う電子慣性を含んだモデル方程式についての的を絞って解説をする。簡単のため非圧縮流体 ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) を仮定すると、抵抗性 MHD 方程式は以下のようなイオンの運動方程式、ファラデーの法則、オームの法則から構成される。

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (2)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{J} \quad (3)$$

ここで、 \mathbf{v} は流れ場、 \mathbf{E} は電場、 \mathbf{B} は磁場、 $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$ は電流、 p は圧力、 η は電気抵抗である (ただし、系のスケール長とアルフベン速度を用いて規格化し、物理量はすでに無次元化してある)。(2) と (3) を合わせた方程式 $\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}$ は、電気抵抗 η がゼロならば磁束の保存則を表し、磁力線のつなぎ換え (トポロジーの変化) は起こらない (非粘性流体の渦度に対するケルビンの循環定理と同様)。 η が存在すると、磁場の散逸によって磁気再結合が起こるのだが、前節でも述べたように希薄かつ高温のプラズマでは η の値は非常に小さく、現実に行っている磁気再結合の時間スケールを説明できない。

オームの法則 (3) はもともと電子の運動方程式に由来しており、実は導出の過程において電子の慣性項が見捨てられている。そこで、電気抵抗 η を見捨てる代わりに、電子の慣性項を復活させると (3) は

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + d_e^2 (\partial_t \mathbf{J} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot \nabla \mathbf{v}) \quad (4)$$

となり、 $d_e (\ll 1)$ は電子のスキン長を系のスケール長で規格化した無次元パラメータである。この電子慣性項はエネルギーを散逸させないが、電気抵抗とは違ったメカニズムによって磁気再結合を引き起こし得る。実際のプラズマにおけるパラメータ (η や d_e) の数値を代入してその典型的な時間スケールを見積ると、電気抵抗より電子慣性の方が速い磁気再結合を起こすことが指摘されている [2]。

さらに、 $x-y$ 平面の二次元運動を仮定し、 $\mathbf{v} = \nabla \phi(x, y, t) \times \mathbf{e}_z$ 、 $\mathbf{B} = \nabla \psi(x, y, t) \times \mathbf{e}_z$ と置くと、式 (1)、(2) と (4) から

$$\text{渦度方程式: } \frac{\partial \nabla^2 \phi}{\partial t} - [\phi, \nabla^2 \phi] - [\nabla^2 \psi, \psi] = 0, \quad (5)$$

$$\text{オームの法則: } \frac{\partial (\psi - d_e^2 \nabla^2 \psi)}{\partial t} - [\phi, \psi - d_e^2 \nabla^2 \psi] = 0, \quad (6)$$

を得る。ここで、 ϕ は流れ関数、 ψ は磁束関数と呼ばれ、 $[f, g] = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$ である。

磁気再結合の引き金となるテアリング不安定性の線形成長率は文献 [2, 3, 4] などによって解析的に評価され、非線形シミュレーションも行われた [5, 6]。しかし、非線形

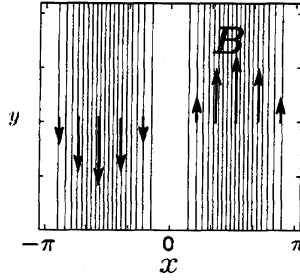


図 1: 平衡状態の磁力線 (ψ の等高線に相当)

発展の理論となると、Ottaviani & Porceli [6] の発見的な考察があるのみで、あまり厳密な解析は行われていない。特に式 (6) は、磁束 ψ の保存則ではなくなったものの、 $\psi_e = \psi - d_e^2 \nabla^2 \psi$ (電子の z 方向の正準運動量) の保存則になっており、 $\mathbf{B}_e = \nabla \psi_e \times \mathbf{e}_z$ なるものを定義すれば、 \mathbf{B}_e のトポロジーはやはり変化できない。よって、純粋に電子慣性のみで磁気再結合が持続的に起こり続けるのかは疑問である。

本研究ではテアリング不安定性が起きる簡単な平衡として、流れの無いスラブ平衡

$$\phi \equiv 0, \quad \psi(x) = \cos x \quad (7)$$

を考える (図 1)。 x と y 方向には共に周期境界であるとする。そして、散逸を含まない方程式系 (5)、(6) の力学的性質に着目し、線形および非線形ダイナミクスの解析を行う。

3 変分法的アプローチ

支配方程式 (5)、(6) のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2} \int [|\nabla \phi|^2 + |\nabla \psi|^2 + d_e^2 (\nabla^2 \psi)^2] d^2x \quad (8)$$

であり、理想 MHD の場合 ($d_e = 0$) と比較して、運動エネルギーと磁気エネルギーの他にも、電流 $J = -\nabla^2 \psi$ のエネルギー (もともとは電子の z 方向の運動エネルギー) が加わる。また、非正準なポアソン括弧 $\{, \}$ を用いて、方程式 (5)、(6) がハミルトン形式で書けることもすでに知られている。これに対し、本研究では変分原理を構築し、ラグランジアン形式に基づいた解析を行う。一般に、流体をオイラー的描像 (流れ場 \mathbf{v}) で記述すると非正準ハミルトン方程式となるが、ラグランジュ的描像 (流体要素の運動) で記述すると正準力学系となる。後者については自然に変分原理が成り立ち、運動が作用積分の極値問題として特徴付けられることから、摂動解析において対称性やガラーキン法による様々な恩恵がある。特に、式 (6) の ψ_e のように、単に流体要素によって運ばれているだけの物理量がある場合は、ラグランジュ的描像を用いる利点はさらに増す。

実際に、平衡状態 (7) から摂動を受けた後の状態を $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}$ と表記し、関数 $G(x, y, t)$ を用いて、

$$\tilde{\phi}(x + \partial_y G(x, y, t), y, t) = \partial_t G(x, y, t), \quad (9)$$

$$\tilde{\psi}_e(x + \partial_y G(x, y, t), y, t) = \psi_e(x) \quad (10)$$

とおいてみる。ここで、もちろん $\tilde{\psi}_e = \tilde{\psi} - d_e^2 \nabla^2 \tilde{\psi}$ 、 $\psi_e = \psi - d_e^2 \psi'' = (1 + d_e^2) \cos x$ であり、本稿では x 微分を略記してしばしばプライム (') で表す。このように生成された状態 $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}$ は (6) を自動的に満たすことが確認できる。すなわち、この摂動は平衡状態の ψ_e を保存するような特殊な拘束条件が課された摂動であり、実際に、 $\psi_e \rightarrow \tilde{\psi}_e$ という変化は x 方向の流体要素の変位を意味する $\Xi = \partial_y G$ によって運ばれているにすぎない。このように (6) を形式的に解いてしまった事により、一般には $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}$ の両方を独立に考えねばならない摂動を一つの関数 G だけで表現できる。

$\tilde{\phi}, \tilde{\psi}$ の運動を支配するラグランジアンは

$$L(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}_e) = \frac{1}{2} \int [|\nabla \tilde{\phi}|^2 - |\nabla \tilde{\psi}|^2 - d_e^2 (\nabla^2 \tilde{\psi})^2] d^2x \quad (11)$$

となり、変分原理 $\delta \int L(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}_e) dt = 0$ を適用する際には「 G に関して変分 δG をとる」ことに注意する。ハミルトニアン (8) と比較すると、この変分問題において磁気エネルギーと電流エネルギーはポテンシャルエネルギーの役割を担っている。摂動解析をする場合には $|G|$ が小さいとして摂動展開をするので、 $L(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}_e) = L(\phi, \psi_e) + \tilde{L}[G]$ とおけば、

$$\int \tilde{L}[G] dt = \int \left[\frac{1}{2} L^{(2)}(G, G) + \frac{1}{6} L^{(3)}(G, G, G) + \frac{1}{24} L^{(4)}(G, G, G, G) + \dots \right] dt \quad (12)$$

のようにテーラー展開される。ここで一次の項 $L^{(1)}(G)$ が消えているのは、平衡状態 (7) がすでに作用積分の極値となっているからである。 $L^{(n)}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) はそれぞれ、 n 個の引数 G の交換に関する対称性をもった n 次形式である。

4 線形安定性解析

二次オーダーのラグランジアンは線形ダイナミクスを支配し、以下で与えられる。

$$L^{(2)}(G, G) = \int [|\nabla \partial_t G|^2 + \psi'_e \partial_y G \nabla_e^2 (\psi'_e \partial_y G) + J' \psi'_e (\partial_y G)^2] d^2x \quad (13)$$

ここで、 $\nabla_e^2 = (1 - d_e^2 \nabla^2)^{-1} \nabla^2$ である。これは対称な二次形式であり、変分原理を適用すれば線形な G の発展方程式が導かれる。

y 方向の波数 k を固定して、 $\Xi(x, y, t) = \partial_y G(x, y, t) = \hat{\xi}(x) e^{ik(y-ct)}$ とおけば、固有値 c と固有関数 $\hat{\xi}$ に対する固有値問題が、

$$\{[c^2 - (\psi'_e)^2] \hat{\xi}'\}' - k^2 [c^2 - (\psi'_e)^2] \hat{\xi} = d_e^2 \psi'_e J''' \hat{\xi} + d_e^2 \psi'_e \nabla^2 (1 - d_e^2 \nabla^2)^{-1} \nabla^2 (\psi'_e \hat{\xi}) \quad (14)$$

と表される(ただし、ここでは $\nabla^2 = \partial_x^2 - k^2$ である)。 $d_e \rightarrow 0$ とした理想 MHD の極限では右辺が消え、左辺は $c^2 - (\psi')^2 = 0$ となる場所が特異点となる。 $\hat{\xi}$ はそこで発散し、これはよく知られたアルフベン連続スペクトルに対応する。一方、電子慣性 $d_e \neq 0$ は特異摂動として寄与し、右辺に $(1 - d_e^2 \nabla^2)^{-1}$ が存在するものの、全体として整理すると四階の常微分方程式になる。四階微分 $\hat{\xi}''''$ の係数は $c^2 d_e^2$ とわかり、 $c \neq 0$ と $d_e \neq 0$ である限り、固有関数 $\hat{\xi}$ は正則であることが証明される。よって、それによって生成される $\hat{\psi}_e$ や $\hat{\psi}$ なども正則関数である。

四階の微分方程式を解くことは容易ではなく、一般には漸近接続法がよく用いられる。しかし、ここでは理想 MHD 安定性理論においてよく用いられるエネルギー原理 [7, 8] という手法が、電子慣性を含んだ今の問題にも応用できることを示す。固有値問題の両辺に $\hat{\xi}^*$ をかけて x で積分すると、 $c^2 \delta I = \delta W$ という形式になり、

$$\delta I = \int dx \left(|\hat{\xi}'|^2 + k^2 |\hat{\xi}|^2 \right) > 0,$$

$$\delta W = \int dx \left[|\nabla(\psi'_e \hat{\xi})|^2 + \psi'_e \psi'''' |\hat{\xi}|^2 - \nabla^2(\psi'_e \hat{\xi}^*) d_e^2 (1 - d_e^2 \nabla^2)^{-1} \nabla^2(\psi'_e \hat{\xi}) \right]$$

である。 $\delta W \in \mathbb{R}$ はこの固有モードが摂動として与えられた時の、二次オーダーのポテンシャルエネルギーの変化量に相当する。この事から c^2 は実数であり、固有モードが不安定である時 ($c^2 < 0$) は $\delta W < 0$ であることがわかる。逆に、 $\delta W / \delta I$ を最小とするような関数 $\hat{\xi}(x)$ は最小固有値 $c^2 = \delta W / \delta I$ の固有関数であるため、 $\delta W / \delta I$ をなるべく小さくするような適当な試行関数 $\hat{\xi}(x)$ をうまく選んで $\delta W < 0$ となることを示せれば、四階の微分方程式を解かずとも不安定モードの近似的な固有値と固有関数を見つけたことになる。

$k^2 \ll d_e \ll 1$ のオーダーリングにおいて、テアリング不安定性が起きることはこれまでの理論やシミュレーション研究からも指摘されており、固有関数の形についてもある程度の傾向はわかっている。それが $\delta W / \delta I$ を最小かつ負にしているはずなので、ここではそうした知見に基づき、図 2 のような試行関数 $\hat{\xi}$ を選ぶ。 $x = 0, \pm\pi$ の位置は平衡の磁場がゼロとなる所だが、理想 MHD の安定限界 $d_e = 0, c^2 \sim 0$ においてこれらは特異点であり、 $\hat{\xi}$ は発散する。 $d_e \neq 0$ において不安定性が生じるためには、特異点近傍で $\hat{\xi}$ が滑らかにならないといけない。ここで選んだ試行関数は、幅が $2d_e$ 程度の薄い境界層を想定して、外部領域では $\hat{\xi} = 1$ or -1 とし、境界層内部でそれが単調に接続されているという非常にシンプルなものである。この変位 $\hat{\xi}$ に対応して $\hat{\psi}_e = -\hat{\xi} \psi'_e$ や $\hat{\psi} = (1 - d_e^2 \nabla^2)^{-1} \hat{\psi}_e$ がただちに求まり、磁場のモード構造がわかる(図 2)。今の場合、外部領域では $\hat{\psi} \simeq \hat{\psi}_e = \sin |x|$ という形をする。

境界層内部 $[-d_e, d_e]$ における $\hat{\xi}$ の形状としては、簡単な多項式で近似し、例えば、

$$\hat{\xi} = \frac{1}{17} (18X - X^3), \quad (15)$$

$$\hat{\psi}_e / d_e = \Psi_e = \frac{1}{17} (18X^2 - X^4), \quad (16)$$

$$\hat{\psi} / d_e = \Psi = \frac{12}{17} \left(\frac{X^2}{2} - \frac{X^4}{12} + 1 \right) \quad (17)$$

といったものが選べる(ここで、 $X = x/d_e$ であり、図 3 参照)。 $x = \pm\pi$ の位置にも境界層はあるが、左右を反転するだけで、まったく同様の関数が選べる。

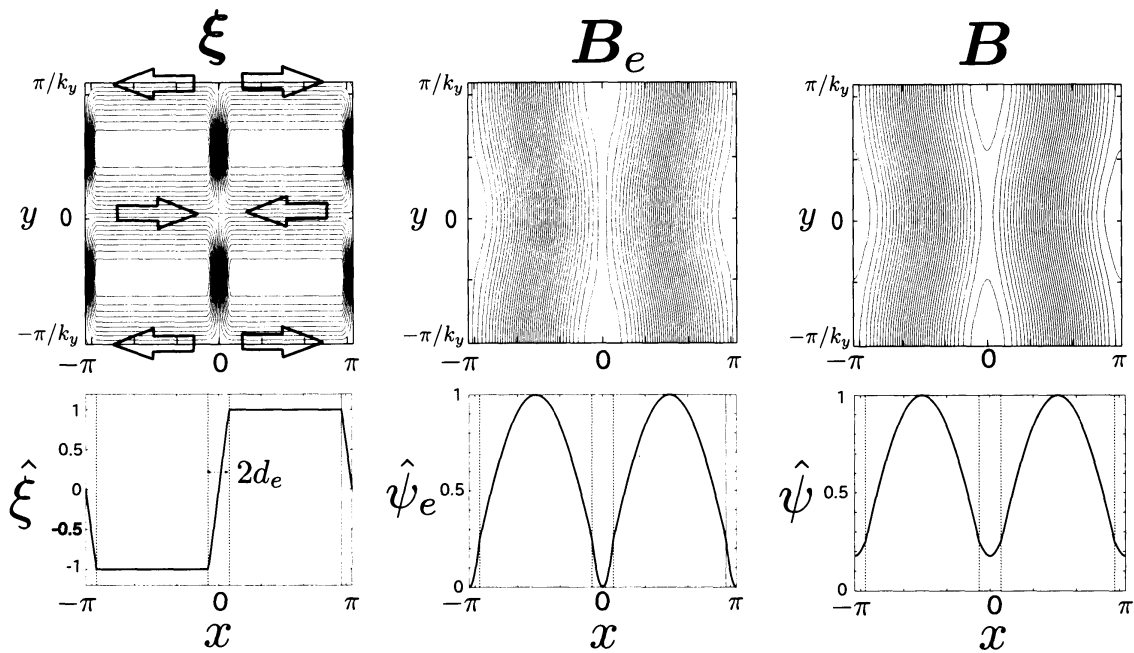


図 2: 近似的な固有関数 (試行関数) として用いた変位 $\hat{\xi}$ とそれに対応する $\hat{\psi}_e$ と $\hat{\psi}$ (下段)。上段は平衡状態 (7) にこれらの固有関数が加わった場合の変位 ξ と電子の正準運動量に対する渦度 B_e 、磁場 B をそれぞれ図示したものの。

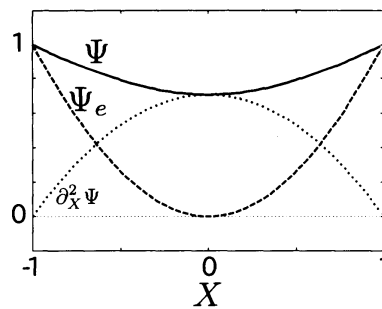


図 3: 境界層内部 $X = x/d_e \in [-1, 1]$ における試行関数

このような試行関数 $\hat{\xi}$ を代入して、 δI と δW を見積ると、まず、外部領域では

$$\begin{aligned}\delta I_{\text{out}} &= \left(\int_{-\pi+d_e}^{-d_e} dx + \int_{d_e}^{\pi-d_e} dx \right) (|\hat{\xi}'|^2 + k^2|\hat{\xi}|^2) = 2k^2(\pi - 2d_e) \simeq 0, \\ \delta W_{\text{out}} &= \left(\int_{-\pi+d_e}^{-d_e} dx + \int_{d_e}^{\pi-d_e} dx \right) [\dots] = -4 \sin d_e \cos d_e \simeq -4d_e,\end{aligned}$$

となり、この変位によって主に磁気エネルギーが下がる ($\delta W_{\text{out}} < 0$) ことがテアリング不安定性の起源となる。境界層内部では上記の多項式を代入すると、

$$\begin{aligned}\delta I_{\text{in}} &\simeq \frac{2}{d_e} \frac{9}{17^2} \left[36X - 4X^3 + \frac{X^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{d_e} 4.02, \\ \delta W_{\text{in}} &\simeq 2d_e \frac{12^2}{17^2} \left[X - \frac{X^3}{3} + \frac{X^5}{15} + \frac{X^7}{63} \right]_{-1}^1 = d_e 1.494\end{aligned}$$

となり、合計すると、

$$c^2 = \frac{\delta W}{\delta I} = \frac{\delta W_{\text{out}} + \delta W_{\text{in}}}{\delta I_{\text{out}} + \delta I_{\text{in}}} = -0.625d_e^2$$

のように不安定性 $c^2 < 0$ が示される。モードの線形成長率 $\propto e^{\gamma t}$ で表すと、

$$\gamma = k\sqrt{-c^2} = 0.791kd_e \quad (18)$$

となり、これはすでに知られている成長率 $\gamma \sim kd_e$ [2, 3, 4] とつじつまが合う。ここで選んだ試行関数は厳密に $\delta W/\delta I$ を最小にするものではないだろうが、少なくとも $\gamma = 0.791kd_e + O(k^2d_e^2)$ よりも早く成長する不安定固有値が存在することを証明したことになる。

図2の下段は固有関数をまとめてあり、上段にはこの固有モードがある程度成長した場合の ϕ, ψ_e, ψ の等高線を描いている。 \mathbf{B}_e のトポロジーは変化しないが、 \mathbf{B} ではつなぎ換えが起きており、平衡状態 (図1) と比較してテアリング不安定性に特徴的な磁気島が生じている。

5 非線形発展の解析

ラグランジアンの変動展開 (12) において、 $L^{(2)}$ の変分原理から線形不安定性が前節で導かれた。この不安定モードが非線形段階においてどのように発展するのかは、さらに $L^{(3)}$ や $L^{(4)}$ まで考慮して変分原理を適用すれば解析できる。大まかに言うと、 $L^{(3)}$ を含めれば、三波相互作用に代表されるような異なる固有モード間の非線形結合の影響を議論することができ、 $L^{(4)}$ まで含めれば、固有モードが平衡状態を変化させて自己相互作用する効果などを議論することができる。どれかの効果が不安定成長を飽和させない限り、揺動はさらに大きくなるので、さらに高次オーダーのラグランジアン解析が必要となる。

具体的な戦略として、揺動の振幅パラメータ $\epsilon \ll 1$ を導入して摂動展開

$$G = \epsilon G^{(1)} + \frac{\epsilon^2}{2} G^{(2)} + \frac{\epsilon^3}{6} G^{(3)} + \dots, \quad (19)$$

を (12) に代入し、最低次のオーダーから順に変分がゼロとなるように解いていく。ただし、 $G^{(1)}$ は

$$G^{(1)}(x, y, t) = A(\gamma t) \hat{g}(x) e^{iky} + \text{c.c.} \quad (20)$$

とおき、 $\gamma (\sim d_e k \ll 1)$ と $\hat{\xi}(x) = ik \hat{g}(x)$ は前節で求めた線形成長率と固有関数とする。 $T = \gamma t$ の時間スケールでゆっくりと変化する振幅 $A(T)$ はこの時点では未知関数である。この $G^{(1)}$ はほとんど線形解なので、最低次 $O(\epsilon^2)$ のラグランジアンは

$$\frac{\epsilon^2}{2} L^{(2)}(G^{(1)}, G^{(1)}) = \epsilon^2 \gamma^2 (|\partial_T A|^2 + |A|^2) \frac{\delta I}{k^2} \quad (21)$$

となり、 γ^2 だけ小さくなる。ここで A に関する変分原理を適用すると、 $A = e^{\gamma t}$ という線形成長を再現する。我々はこの $O(\epsilon^2 \gamma^2)$ と競合する非線形項 $O(\epsilon^n)$, $n \geq 3$ が高次のラグランジアン $L^{(3)}, L^{(4)}, \dots$ の中に存在するかどうかに関心がある。よって、非線形項の解析においては γ^2 を含むものは無視する。

二次揺動 $G^{(2)}$ を決めるためには $G^{(2)}$ に関して変分をとればよく、記号的には

$$\mathcal{F}G^{(2)} = -\mathcal{F}^{(2)}(G^{(1)}, G^{(1)}) \quad (22)$$

といった非同次方程式になる (\mathcal{F} は線形作用素、 $\mathcal{F}^{(2)}$ は対称二次形式)。 $G^{(1)}$ が波数 k をもっていることから、非同次解は

$$G^{(2)}(x, y, t) = A^2(\gamma t) \hat{g}^{(2)}(x) e^{i2ky} + \text{c.c.} \quad (23)$$

のように第二高調波 (波数が $2k$ の成分) であることがわかる。ここで、波数がゼロの成分も存在しないのかという疑問が湧くが、それはこの方程式では定まらない (underdetermined problem)。実際、 G における y 方向の波数がゼロの成分は、変位 $\Xi = \partial_y G$ がゼロであり、 ϕ や ψ 、さらにはラグランジアンに何ら変化を与えない。よって、それが変分原理で定まらないのは当然であり、そもそも運動に無関係なので最初からゼロとみなして問題ない。 $\hat{\xi}^{(2)} = i2k \hat{g}^{(2)}$ に対する方程式を具体的に書くと、

$$-\nabla_e^2 (\hat{\xi}^{(2)} \psi'_e) - J' \hat{\xi}^{(2)} = -\nabla_e^2 (\hat{\xi} \hat{\xi} \psi'_e)' - (J' \hat{\xi} \hat{\xi})' \quad (24)$$

となる。作用素 ∇_e^2 が複雑なので、一般にこれを解くのは困難と思われるが、今考えている平衡 $\psi = \cos x$ は $J'' \psi'_e - J' \psi''_e \equiv 0$ という関係を満たし、偶然にも厳密解が

$$\hat{\xi}^{(2)} = \frac{(\hat{\xi} \hat{\xi} \psi'_e)'}{\psi'_e} \quad (25)$$

だとわかってしまう。ちなみに、 ψ'_e がゼロとなる場所 ($x = 0, \pm\pi$) では、 $\hat{\xi}$ もゼロになるので、この $\hat{\xi}^{(2)}$ が発散するようなことはない。また、このように非同次解が求

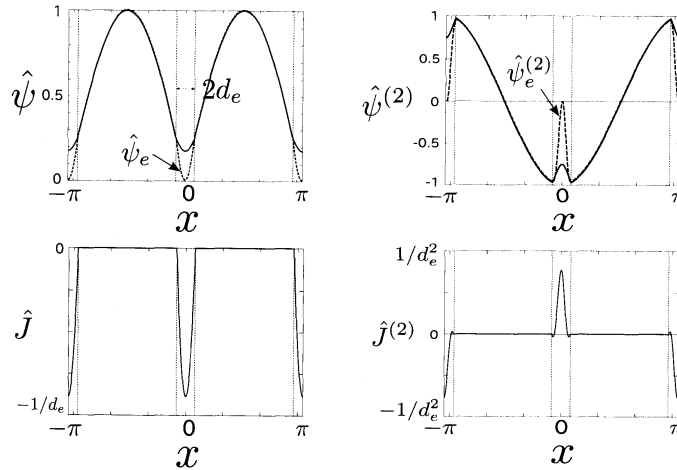


図 4: 固有関数 $\hat{\psi}$ (点線は $\hat{\psi}_e$)、 \hat{J} と平衡の変化 $\hat{\psi}^{(2)}$ (点線は $\hat{\psi}_e^{(2)}$)、 $\hat{J}^{(2)}$

まる (可解である) ことは、第二高調波 ($2k$) 成分の固有モードとの共鳴は起きないことも意味し、 $O(\epsilon^3)$ の非線形項は存在しないことになる。

このように求めた $\hat{g}^{(2)}$ を代入すると、

$$\tilde{L} = \epsilon^2 \gamma^2 (|\partial_T A|^2 + |A|^2) \frac{\delta I}{k^2} - \frac{\epsilon^4}{2} |A|^4 \delta W^{(4)} + O(\epsilon^5, \epsilon^3 \gamma^2) \quad (26)$$

のように $O(\epsilon^4)$ の非線形項が残り、 $\delta W^{(4)}$ は

$$\delta W^{(4)} = -\frac{1}{2} L^{(3)}(\hat{g}_k^*, \hat{g}_k^*, \hat{g}_{2k}^{(2)}) - \frac{1}{2} L^{(4)}(\hat{g}_k, \hat{g}_k, \hat{g}_k^*, \hat{g}_k^*) + O(\epsilon^5, \epsilon^3 \gamma^2) \quad (27)$$

によって与えられる (ここで、 $\hat{g}_k = \hat{g} e^{iky}$ 、 $\hat{g}_{2k}^{(2)} = \hat{g}^{(2)} e^{i2ky}$)。その具体的な形を示す前に、ここまでの結果を用いて $\tilde{\psi}_e$ を $O(\epsilon^2)$ まで書き下してみよう。

$$\tilde{\psi}_e = \psi_e + \epsilon(A \hat{\psi}_e e^{iky} + \text{c.c.}) + \epsilon^2 |A|^2 \hat{\psi}_e^{(2)} + O(\epsilon^3) \quad (28)$$

$$\text{where } \hat{\psi}_e = -\hat{\xi} \psi_e', \quad \hat{\psi}_e^{(2)} = (|\hat{\xi}|^2 \psi_e')' \quad (29)$$

ここで、 $\hat{\psi}$ は前節でも示した固有関数だが、二次オーダーにおいて第二高調波成分 $\propto e^{i2ky}$ が存在せず、 y 方向波数がゼロの成分のみが生成されることがわかる。 $\hat{\psi}_e^{(2)}(x)$ の形は図 4 に示すが、これはモードの成長に伴って平衡状態 ψ_e が $\epsilon^2 |A|^2 \hat{\psi}_e^{(2)}$ だけ変化すると解釈できる。

結果として、 $\hat{\psi}^{(2)} = (1 - d_e^2 \partial_x^2)^{-1} \psi_e^{(2)}$ を用いて、 $\delta W^{(4)}$ は以下のように表される。

$$\delta W^{(4)} = \int_{-\pi}^{\pi} \left[|\nabla \hat{\psi}^{(2)}|^2 + d_e^2 |\nabla^2 \hat{\psi}^{(2)}|^2 - \frac{1}{1 + d_e^2} |\hat{\psi}_e^{(2)}|^2 \right] dx \quad (30)$$

これは δW における $\hat{\psi}$ や $\hat{\psi}_e$ を単に $\hat{\psi}^{(2)}$ や $\hat{\psi}_e^{(2)}$ へ置き換えただけであり、 $\delta W^{(4)}$ は平衡が変化することで生じる四次オーダーのポテンシャルエネルギーの変化量である。よって、 δW の場合と同様、試行関数を代入した評価ができる。結果だけ示すと、

$$\delta W_{\text{out}}^{(4)} \simeq 4d_e > 0, \quad (31)$$

$$\delta W_{\text{in}}^{(4)} = \frac{1}{d_e} \times 0.92 > 0 \quad (32)$$

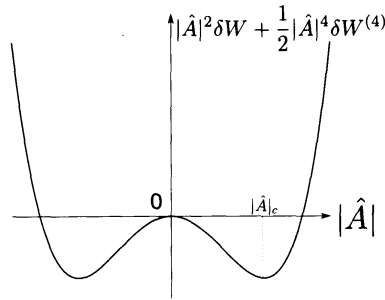


図 5: A の運動を支配するポテンシャルエネルギー

となり、外部領域ではわずかに正になる程度なのに対して、境界層内部で大きく正に寄与している。これは平衡の変化を見ると境界層内部に幅が d_e で高さが $\epsilon^2 |A|^2 / d_e^2$ 程度の鋭い電流ピーク ($\epsilon^2 |A|^2 J^{(2)}$) が生じ、四次のポテンシャルエネルギー (30) の中で電流エネルギー (被積分関数の第二項目) が支配的になることに起因する。

このような δI や $\delta W^{(4)}$ の評価を代入すると、

$$\tilde{L}[G] = \epsilon^2 \gamma^2 (|\partial_T A|^2 + |A|^2) \frac{4.01}{k^2 d_e} - \frac{\epsilon^4}{2} |A|^4 \frac{0.92}{d_e} + O(\epsilon^5, \epsilon^3 \gamma^2) \quad (33)$$

となり、最後に A に関する変分原理を適用すれば、 $\hat{A}(t) = \epsilon A(\gamma t)$ の時間発展方程式は、

$$\frac{d^2 \hat{A}}{dt^2} = \gamma^2 \hat{A} - 0.23 k^2 \hat{A} |\hat{A}|^2, \quad (\gamma = 0.79 k d_e) \quad (34)$$

となる。ここで、 \hat{A} はおよそ磁気島の幅の二分の一に相当する。ラグランジアン (33) のポテンシャルエネルギーが図 5 のように書けることからわかる通り、この解は最初に線形成長率 γ で増大するが、非線形効果によって \hat{A} の成長が $|\hat{A}|_c = \sqrt{-\delta W / \delta W^{(4)}} = 1.65 d_e$ を越えたあたりから減速し、その後 $|\hat{A}|_c$ のまわりで振動する。

6 まとめ

本研究ではエネルギー散逸機構を含まず、電子慣性効果のみによって生じる (無衝突) 磁気再結合の簡単なモデル方程式と平衡に対し、線形・非線形ダイナミクス of 解析を行った。その際、変分原理を定式化して摂動解析に応用したのが従来の研究方法とは異なる。電子慣性項は特異摂動であるため、微分の階数が上がって解析的に解くのは難しくなるが、変分原理においては真の解と形状がよく似た試行関数を代入して変分をとることで、近似的に運動方程式を解くことができる (いわゆるガラキン法)。具体的には、プラズマを何らかの試行関数によって仮想的に変位させた時のポテンシャルエネルギーの変化量を評価すればよいいため、力学的な直感も得やすく、何の自由エネルギーを解放して不安定性 (運動エネルギーの増大) が起こり、それが非線形段階においてどのような増長 or 抑制効果が働くのかが判定できる。

本稿の結果をまとめると、まず、電子慣性に起因する線形のテアリング不安定性は、平衡磁場の磁気再結合を起こして磁気エネルギーを解放し、運動エネルギーと電流のエネルギーを増大させる。この不安定性の成長に伴って揺動の二次オーダーでは平衡が変化し、磁気再結合が起きる境界層の内部では鋭い電流のピークが形成される。磁気エネルギーの減少よりも電流エネルギーの増大が支配的になると、それがポテンシャル障壁となり、不安定性の成長(運動エネルギーの増大)は止まる。ここで解析したモデルには散逸が含まれないので、運動は時間的に可逆であり、モードの振幅は成長と減衰を繰り返す。すなわち、つなぎ換わった磁力線が再びつなぎ換わって元の状態に戻るようになる。現実には、電流層には電気抵抗が働いて時間非可逆となるであろうし、ここで無視したさらに高次の非線形効果によって他のモードへのエネルギー伝達が起きている可能性はある。しかし、電気抵抗が非常に小さい理想的極限で、このように磁気再結合が再帰的に繰り返される傾向があるというのは、これまでに指摘されていなかった興味深い現象である。今後、シミュレーションによる検証や、微小な電気抵抗の効果を含めた考察を行う予定である。

参考文献

- [1] J. P. Goedbloed and S. Poedts *Principles of Magnetohydrodynamics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge (2004).
- [2] J. A. Wesson, *Nucl. Fusion*, **30** 2545-2549 (1990).
- [3] R. D. Hazeltine and H. R. Strauss, *Phys. Fluids*, **21** 1007-1012 (1978).
- [4] B. Basu and B. Coppi, *Phys. Fluids* **24** 465-471 (1981).
- [5] J. F. Drake and R. G. Kleva, *Phys. Rev. Lett.* **66** 1458-1461 (1991).
- [6] M. Ottaviani and F. Porcelli, *Phys. Rev. Lett.* **71** 3802-3805 (1993).
- [7] I. B. Bernstein, E. A. Frieman, M. D. Kruskal and R. M. Kulsrud, *Proc. Roy. Soc. London* **A244**, 17 (1958).
- [8] G. Laval, C. Mercier, R. Pellat, *Nucl. Fusion* **5** 156-158 (1965).