Title	Jucys-Murphy元を変数とする対称関数 (表現論と調和解析における諸問題)
Author(s)	松本, 詔
Citation	数理解析研究所講究録 (2011), 1770: 35-51
Issue Date	2011-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/171666
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 1770 巻 2011 年 35-51

Jucys–Murphy 元を変数とする対称関数

名古屋大学大学院多元数理科学研究科　松本 詔 (Sho MATSUMOTO)
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

RIMS 研究集会「表現論と調和解析における諸問題」 2011 年 6 月 28 日 - 7 月 1 日

1　はじめに

1.1　Jucys–Murphy 元

対称群 S_n の **Jucys–Murphy 元** (または Young-Jucys-Murphy 元) とは，群環 $\mathbb{Q}[S_n]$ の元で，次で定義される．$k=2,3,4,\ldots,n$ に対し，

$$J_k=(1\ k)+(2\ k)+\cdots+(k-1\ k).$$

ただし $(i\ k)$ は i と k の互換を表す．便宜上 $J_1=0$ とおく．J_k たちが互いに可換であることは容易に確かめられる．

$J_1,J_2,\ldots,J_n$ で生成される $\mathbb{Q}[S_n]$ の部分環 $GZ(n)$ は，Gelfand–Zetlin 環と呼ばれ，$\mathbb{Q}[S_n]$ の極大可換部分環になる．この $GZ(n)$ は，ちょうど半単純リー環におけるカルタン部分環と同じような働きをし，Jucys–Murphy 元の積作用の同時スペクトル分解によって対称群の既約表現が記述できる．このような議論は Okounkov–Vershik [OV] により確立され，本 [CST] でも詳しく述べられている．

本稿では，Jucys–Murphy 元のもっと素朴な性質に着目する．F を有理数を係数とする (無限個の変数の) 対称関数とする．F の変数に Jucys–Murphy 元を代入したものを考える:

$$F(J_1,J_2,\ldots,J_n)=F(J_1,J_2,\ldots,J_n,0,0,\ldots).$$

Jucys–Murphy 元は互いに可換だから，$F(J_1,\ldots,J_n)$ はちゃんと定義されて $\mathbb{Q}[S_n]$ の一つの元を定める．実はこの $F(J_1,\ldots,J_n)$ は $\mathbb{Q}[S_n]$ の中心元になる．このような形の中心元の性質を見ていくことが本稿の目的である．

1.2　分割と変形サイクルタイプ

お馴染みの Macdonald の本 [Mac] にしたがって分割の記号を復習しよう．分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ に対し，λ の重さ，長さ，各 $r=1,2,\ldots$ の重複度はそれぞれ $|\lambda|=\sum_{i\geq 1}\lambda_i$,

$\ell(\lambda) = \#\{i \geq 1 \mid \lambda_i > 0\}$, $m_r(\lambda) = \#\{i \geq 1 \mid \lambda_i = r\}$ で定まる．λ の鉤の長さ (hook length) の積を H_λ で表す．$|\lambda| = n$ のとき λ は n の分割であるといい，$\lambda \vdash n$ とも書く．

2つの分割 λ, μ に対し，$\lambda + \mu$ は各成分が $\lambda_i + \mu_i$ となる分割であり，$\lambda \cup \mu$ は λ の成分と μ の成分を並べなおしてできる分割である．例えば $\lambda = (3,3,1)$, $\mu = (3,2,2,1)$ であれば，$\lambda + \mu = (6,5,3,1)$, $\lambda \cup \mu = (3,3,3,2,2,1,1)$ である．

対称群 S_n の共役類は n の分割でパラメトライズされる．置換 $\sigma \in S_n$ が分割 $\lambda \vdash n$ に対応する共役類に含まれるとき，σ のサイクルタイプは λ であるというのだった．これは σ のサイクル分解において，各サイクルの長さが $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ となっていることに他ならない．このとき，λ の各成分から 1 を引いてできる分割 $\mu = (\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \ldots, \lambda_{\ell(\lambda)} - 1)$ を，σ の変形サイクルタイプ (modified cycle-type, reduced cycle-type) と呼ぶ．言い換えれば，μ が σ の変形サイクルタイプであるとは，元のサイクルタイプが $\mu + (1^{n-|\mu|})$ であるときをいう．たとえば，S_n の単位元（恒等置換）の変形サイクルタイプは零の分割 (0) であり，互換の変形サイクルタイプは (1) となる．変形サイクルタイプを扱う利点の一つは，$n+1$ を固定する埋め込み $S_n \hookrightarrow S_{n+1}$ において，それが不変なことである．

$\mathcal{C}_\mu(n)$ を変形サイクルタイプが μ となる置換 $\sigma \in S_n$ 全体の和と定めると，

$$\{\mathcal{C}_\mu(n) \mid |\mu| + \ell(\mu) \leq n\}$$

は $\mathbb{Q}[S_n]$ の中心 $Z(\mathbb{Q}[S_n])$ の基底となる．$|\mu| + \ell(\mu) > n$ のときは $\mathcal{C}_\mu(n) = 0$ と定める．

1.3 係数 $A_\mu(F, n)$

F を対称関数とする．§1.1 で述べたように，また §2.1 できちんと証明を与えるように，$F(J_1, \ldots, J_n)$ は $Z(\mathbb{Q}[S_n])$ に属する．したがって基底 $\{\mathcal{C}_\mu(n)\}_{|\mu|+\ell(\mu)\leq n}$ の線型結合で一意的に書ける．

$$F(J_1, J_2, \ldots, J_n) = \sum_{\mu : |\mu| + \ell(\mu) \leq n} A_\mu(F, n) \mathcal{C}_\mu(n). \tag{1.1}$$

問題 1. 対称関数 F が具体的に与えられたとき，$A_\mu(F, n)$ はどのような値をとるか．また，どのような性質を満たすだろうか．

本稿の目的は，この問題 1 に関する現在の研究結果をまとめて報告することである．

まずは一つ例を挙げよう．

例 1. $F = p_2 = \sum_{i \geq 1} x_i^2$ (2 次のべき和対称関数) を考えると，

$$p_2(J_1, J_2, \ldots, J_n) = \mathcal{C}_{(2)}(n) + \binom{n}{2} \mathcal{C}_{(0)}(n)$$

となる．言い換えれば $A_{(2)}(p_2,n) = 1$, $A_{(0)}(p_2,n) = \binom{n}{2}$ で，それ以外の μ に対して $A_\mu(p_2,n)=0$. 実際，

$$J_k^2 = \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-1}(i\ k)(j\ k) = \sum_{(i,j):i\neq j<k}(i\ j\ k) + (k-1)\cdot e$$

(e は恒等置換) であるから，$J_1^2+J_2^2+\cdots+J_n^2 = \sum_{(i,j,k):i\neq j<k\leq n}(i\ j\ k)+(\sum_{k=1}^n(k-1))\cdot e = \mathcal{C}_{(2)}(n)+\binom{n}{2}\mathcal{C}_{(0)}(n)$ となる．

1.4 ユニタリ行列積分

問題 1 はそれ自身組合せ論的に興味のある問題ではあるが，それとは別にランダム行列論からの動機がある．$U(N)$ を N 次のユニタリ群とし，dU をその正規化されたハール測度とする．次のような積分を考えよう．$i_k, j_k, i'_k, j'_k, (k=1,2,\ldots,n)$ を $\{1,2,\ldots,N\}$ の元とし，

$$\int_{U(N)} u_{i_1j_1}u_{i_2j_2}\cdots u_{i_nj_n}\overline{u_{i'_1j'_1}u_{i'_2j'_2}\cdots u_{i'_nj'_n}}dU. \tag{1.2}$$

各 u_{ij} はユニタリ行列 $U\in U(N)$ の行列成分を表す.（正確に言えば，u_{ij} は $U(N)$ 上の座標関数である.）この積分の被積分関数は，$U(N)$ 上の単項式関数である．このとき，積分 (1.2) は次のような対称群上の二重和で書ける（Collins の Weingarten 公式 [C]）．

$$\sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ (i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)},\ldots,i_{\sigma(n)})=(i'_1,i'_2,\ldots,i'_n)}}\ \sum_{\substack{\tau\in S_n \\ (j_{\tau(1)},j_{\tau(2)},\ldots,j_{\tau(n)})=(j'_1,j'_2,\ldots,j'_n)}} \mathrm{Wg}_n^{U(N)}(\sigma^{-1}\tau). \tag{1.3}$$

ここで，$\mathrm{Wg}_n^{U(N)}$ はユニタリ Weingarten 関数と呼ばれ，

$$\mathrm{Wg}_n^{U(N)}(\sigma) = \sum_{\substack{\lambda\vdash n \\ \ell(\lambda)\leq N}} \frac{1}{H_\lambda\prod_{(i,j)\in\lambda}(N+j-i)}\chi^\lambda(\sigma), \qquad (\sigma\in S_n) \tag{1.4}$$

と定義される S_n 上の類関数である．χ^λ は S_n の既約指標であり，H_λ は λ の鉤の長さの積である．右辺の分母の積は，λ のヤング図形の箱の座標 (i,j) 全体を走り，$j-i$ はその箱の容量 (content) である．

この公式「(1.2)=(1.3)」は，ユニタリ群上の積分を計算する際に非常に役に立つ．被積分関数が $U(N)$ 上の類関数のときはワイルの積分公式や既約指標（シューア関数）の直交性を使って計算することが多いが，そうではないときにこの公式は特に効力を発揮する．

ハール測度に従うランダムなユニタリ行列の成分を複素数値確率変数と思ったとき，(1.2) はそれらの混合モーメントである．我々は特に，行列のサイズ N が大きいときの振舞い

に興味がある．これを知るためには，$\mathrm{Wg}_n^{U(N)}(\sigma)$ の $N\to\infty$ での振舞いを知る必要がある．まず,「(1.2)=(1.3)」と (1.4) から，$N\geq n$ のとき各 $\sigma\in S_n$ に対して

$$\int_{U(N)}\prod_{k=1}^{n}u_{ii}\overline{u_{i\sigma(i)}}dU=\mathrm{Wg}_n^{U(N)}(\sigma)=\sum_{\lambda\vdash n}\frac{1}{H_\lambda\prod_{(i,j)\in\lambda}(N+j-i)}\chi^\lambda(\sigma)$$

が成り立つ．この表示だと $N\to\infty$ の振舞いが読み取れない．そこで次の表示が役に立つ．

命題 1 ([N]). $N\geq n$ とし，μ を $\sigma\in S_n$ の変形サイクルタイプとする．このとき，

$$\mathrm{Wg}_n^{U(N)}(\sigma)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kA_\mu(h_k,n)N^{-n-k}.$$

ここで，h_k は完全対称関数である.（右辺の級数は絶対収束している.） □

このように，$\mathrm{Wg}_n^{U(N)}(\sigma)$ の N^{-1} に関する展開の係数として $A_\mu(h_k,n)$ が現れ，ユニタリ行列積分の漸近挙動を知ることが問題1(の $F=h_k$ の場合) に帰着される．例えば，σ を恒等置換 id_n とすれば，§3.3 で見るように $A_{(0)}(h_k,n)$ を実際に求めることで

$$\int_{U(N)}\prod_{k=1}^{n}|u_{ii}|^2dU=\mathrm{Wg}_n^{U(N)}(\mathrm{id}_n)$$
$$=N^{-n}+\binom{n}{2}N^{-n-2}+\left[3\binom{n}{4}+8\binom{n}{3}+\binom{n}{2}\right]N^{-n-4}+O(N^{-n-6})\qquad(N\to\infty)$$

という表示が得られる．

2　係数 $A_\mu(F,n)$ についての一般論

この章では係数 $A_\mu(F,n)$ の一般的な性質について見ていこう．

2.1　Jucys の定理

最初に基本対称関数

$$e_k(x_1,x_2,\dots)=\sum_{i_1<i_2<\cdots}x_{i_1}x_{i_2}\cdots$$

について見よう．

定理 2 (Jucys [J]).

$$e_k(J_1,\dots,J_n)=\sum_{\mu\vdash k}\mathcal{C}_\mu(n).\tag{2.1}$$

特に $e_k(J_1,\dots,J_n)$ は中心 $Z(\mathbb{Q}[S_n])$ に属する．

証明は特に難しくない．以下の証明は Jucys 自身による．

証明. $\nu(\sigma)$ で $\sigma \in S_n$ のサイクルの個数を表すとする．ただし自明なサイクルもカウントする．$\sigma \in S_n$ ならば $1 \leq \nu(\sigma) \leq n$ であり，特に $\nu(\sigma) = n$ となるのは恒等置換に限る．

σ の変形サイクルタイプが μ のとき $\nu(\sigma) = n - |\mu|$ であるから，式 (2.1) は次のように言い換えられる:

$$e_k(J_1, \ldots, J_n) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \nu(\sigma) = n-k}} \sigma. \tag{2.2}$$

$0 \leq k < n$ でないときは，両辺とも 0 であることに注意する．$n = 2$ かつ $k = 1$ のときは $e_1(J_1, J_2) = J_2 = (1\ 2)$ であり，主張は正しい．以下 $n > 2$ かつ $0 \leq k < n$ とし，(2.2) を n についての帰納法で示す．

各 $\sigma \in S_n$ に対して，S_{n-1} の元 $P_n(\sigma)$ を

$$P_n(\sigma)(i) = \begin{cases} \sigma(i), & \sigma(i) \neq n \text{ のとき} \\ \sigma(n), & \sigma(i) = n \text{ のとき}, \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq n-1,$$

で定める．すなわち，σ のサイクル分解において文字 n を取り除くことで $P_n(\sigma)$ が得られる．P_n は S_n から S_{n-1} への上への写像を与え，各 $\tau \in S_{n-1}$ の逆像は

$$(P_n)^{-1}(\tau) = \{\tau \cdot (s\ n) \mid 1 \leq s \leq n-1\} \cup \{\tau \cdot (n)\}$$

である．また容易に分かるように $\nu(\tau \cdot (s\ n)) = \nu(\tau)$ かつ $\nu(\tau \cdot (n)) = \nu(\tau) + 1$ である．したがって (2.2) の右辺は

$$\sum_{\tau \in S_{n-1}} \sum_{\substack{\sigma \in (P_n)^{-1}(\tau) \\ \nu(\sigma) = n-k}} \sigma = \sum_{\substack{\tau \in S_{n-1} \\ \nu(\tau) = n-1-k}} \tau \cdot (n) + \sum_{\substack{\tau \in S_{n-1} \\ \nu(\tau) = n-k}} \sum_{s=1}^{n-1} \tau(s\ n)$$

となる．帰納法の仮定から，これは $e_k(J_1, \ldots, J_{n-1}) \cdot (n) + e_{k-1}(J_1, \ldots, J_{n-1}) \cdot J_n$ に等しい．恒等式 $e_k(x_1, \ldots, x_n) = e_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) + e_{k-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) x_n$ により，上の式はさらに $e_k(J_1, \ldots, J_n)$ に等しいことが分かる．以上により (2.2) が，したがって (2.1) が示された． □

対称関数の基本定理により，任意の対称関数 F は $e_1, e_2, \ldots$ の多項式として書ける．したがって，次が言える．

系 3. 任意の対称関数 F に対して，$F(J_1, \ldots, J_n) \in Z(\mathbb{Q}[S_n])$. □

この系を出発点として，§1 で述べたこと（特に (1.1)）により係数 $A_\mu(F,n)$ が定義される．

注意 1. 系 3 の逆の主張も成り立つ．すなわち $Z(\mathbb{Q}[S_n])$ の任意の元は，$F(J_1,\ldots,J_n)$ (F は対称関数) の形で表すことができる（一意的ではない）．

中心元 $F(J_1,\ldots,J_n)$ を基底 $\{\mathcal{C}_\mu(n)\}_{|\mu|+\ell(\mu)\le n}$ で展開することで $A_\mu(F,n)$ を定めたが，もう一つの基底 $\{\chi^\lambda\}_{\lambda\vdash n}$ に関する表示を述べておこう．分割 λ に対し，$\mathrm{Cont}(\lambda)$ で λ の容量のなす集合（重複有り）を表すとする: $\mathrm{Cont}(\lambda)=\{j-i \mid (i,j)\in\lambda\}$．例えば $\mathrm{Cont}(3,3,2,1)=\{0,1,2,-1,0,1,-2,-1,-3\}$.

命題 4 ([J])**.**

$$F(J_1,J_2,\ldots,J_n)=\sum_{\lambda\vdash n}F(\mathrm{Cont}(\lambda))\frac{\chi^\lambda}{H_\lambda}.$$

言い換えれば，

$$A_\mu(F,n)=\sum_{\lambda\vdash n}F(\mathrm{Cont}(\lambda))\frac{\chi^\lambda_{\mu+(1^{n-|\mu|})}}{H_\lambda}. \tag{2.3}$$

□

2.2 係数 $A_\mu(F,n)$ と $c_\mu(F)$

以下，F は次数 k の斉次対称関数と仮定する．

定理 5. 次の主張が成り立つ．

1. $A_\mu(F,n)\neq 0$ ならば

$$|\mu|\le k \qquad \text{かつ} \qquad |\mu|\equiv k \pmod 2.$$

2. $|\mu|=k$ ならば，$A_\mu(F,n)$ は n に依らない．

3. 一般に $A_\mu(F,n)$ は次のような形に書ける．

$$A_\mu(F,n)=\sum_{i\ge 0}c_{\mu+(1^{\ell(\mu)+i})}(F)\binom{n-|\mu|-\ell(\mu)}{i}. \tag{2.4}$$

ここで，$c_\rho(F)$ は n に依らない．さらに F の全ての係数が非負整数であれば，$c_\rho(F)$ は全て非負整数である．

□

1つ目の主張を見ることは難しくない．Jucys–Murphy元は互換の和だったから，$F(J_1,\dots,J_n)$ は k 個の互換の積の線型結合である．一方，置換 σ の変形サイクルタイプが μ であるとする．σ を互換の積で表そうとすれば，少なくとも互換は $|\mu|$ 個必要であることが分かる．よって，$A_\mu(F,n)\neq 0$ ならば $|\mu|\le k$ である．さらに σ の符号は $(-1)^{|\mu|}$ だから，$(-1)^k=(-1)^{|\mu|}$ でなければならない．

2つ目の主張はそれほど明らかではない．$F=m_\lambda$（単項対称関数）の場合に主張を示せば十分である．これは§4で見る．

3つ目の主張は深い洞察による結果である．まず，$\mu=(0)$ の場合が Stanley [S2] により示された．$f^\lambda=\chi^\lambda_{(1^n)}$ とおくと，命題4と鉤公式 $f^\lambda=\frac{n!}{H_\lambda}$ から

$$A_{(0)}(F,n)=\sum_{\lambda\vdash n}F(\mathrm{Cont}(\lambda))\frac{(f^\lambda)^2}{n!} \tag{2.5}$$

である．Stanley は $A_{(0)}(e_\lambda,n)$ の組合せ論的意味を考察することで主張を示した．また Olshanski [Ol] は，対応 $\lambda\mapsto F(\mathrm{Cont}(\lambda))$ が Okounkov–Olshanski [OO] の shifted symmetric function になっていることに注目し，Stanley の結果の別証明を与えた．Olshanski の証明を一般の μ に拡張することは難しくなく，それは [Mat] で与えられている．他方，Lassalle [L] は Ivanov–Kerov [IK] の partial permutation algebra の理論からの自然な帰結としてこの主張を導いている．

注意 2. 対称群の Plancherel 測度は，$\mathbb{P}(\{\lambda\})=\frac{(f^\lambda)^2}{n!}$ $(\lambda\vdash n)$ と定義される，n の分割全体の上の確率測度である．(2.5) の右辺は，確率変数 $\lambda\mapsto F(\mathrm{Cont}(\lambda))$ の Plancherel 測度における平均に他ならない．すなわち $A_{(0)}(F,n)=\mathbb{E}[F(\mathrm{Cont}(\cdot))]$.

問題を整理しよう．定理5から，$F(J_1,\dots,J_n)$ は

$$F(J_1,\dots,J_n)=\sum_{\mu\vdash k}A_\mu(F,n)\mathcal{C}_\mu(n)+\sum_{\mu\vdash k-2}A_\mu(F,n)\mathcal{C}_\mu(n)+\cdots$$

の形で書けていることが分かった．また $\mu\vdash k\,(=\deg F)$ のとき，係数 $A_\mu(F,n)=c_{\mu+(1^{\ell(\mu)})}(F)$ は n に依存しない．これらを主要係数と呼ぶことにする．

次の章では，F がべき和対称関数 p_k，完全対称関数 h_k，単項対称関数 m_λ のときに，主要係数がどのように与えられるか，また係数 $c_\rho(F)$ がどういう関係式を満たすか，を見ていこう．

3 主な対称関数における係数 $A_\mu(F,n)$

3.1 基本対称関数

F が基本対称関数 e_k の場合については，既に §2.1 で見た．主要係数が

$$A_\mu(e_k,n)=1 \qquad (\mu\vdash k)$$

となり，それ以外の係数は全て 0 であった: $A_\mu(e_k,n)=0$ $(|\mu|\neq k)$.

3.2 べき和対称関数

次にべき和対称関数

$$p_k(x_1,x_2,\dots)=x_1^k+x_2^k+\cdots$$

の場合について見ていこう．主要係数は次のようになる．

$$\mu\vdash k \text{ ならば} \qquad A_\mu(p_k,n)=\begin{cases}1 & \mu=(k)\text{ のとき},\\ 0 & \text{それ以外}.\end{cases} \tag{3.1}$$

一般の係数 $A_\mu(p_k,n)$ は (2.4) の形をしているので，$c_\rho(p_k)$ について具体的に知りたい．$c_\rho(p_k)$ は次のように母関数を持つ．

定理 6 (Lascoux–Thibon [LT]). 分割 ρ に対し，係数 $c_\rho(p_k)$ は次の母関数を持つ．

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_\rho(p_k)\frac{t^k}{k!}=\frac{e^{-t}}{|\rho|!}(1-e^{-t})^{|\rho|-2}\prod_{r\geq 1}(e^{rt}-1)^{m_r(\rho)}.$$

□

証明は頂点作用素と関連づけて得られている．この定理を用いることで，単位元での係数 $A_{(0)}(p_{2k},n)$ を具体的に与えることができる．定理 5 の第 1 の主張から $A_{(0)}(p_{2k-1},n)=0$ であることに注意しよう．

系 7 (Fujii–Kanno–Moriyama–Okada [FKMO]).

$$A_{(0)}(p_{2k},n)=\sum_{j=1}^{k}T(k,j)\frac{(2j)!}{(j+1)!}\binom{n}{j+1}.$$

ここで $T(k,j)$ は *central factorial number* と呼ばれる，組合せ論で重要な数である．(例えば $T(k,j)=h_{k-j}(1^2,2^2,\dots,j^2)$ と書ける．) □

[F, L] では，$A_\mu(p_k, n)$ たちに関する漸化式も得られている．

例 2.

$$p_4(J_1, \ldots, J_n) = \mathcal{C}_{(4)}(n) + \left[3\binom{n-3}{1} + 5\right]\mathcal{C}_{(2)}(n) + 4\mathcal{C}_{(1^2)}(n) + \left[4\binom{n}{3} + \binom{n}{2}\right]\mathcal{C}_{(0)}(n).$$

3.3 完全対称関数

次に完全対称関数

$$h_k(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{\substack{a_1, a_2, \cdots \geq 0 \\ a_1 + a_2 + \cdots = k}} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \cdots} x_{i_1} x_{i_2} \cdots$$

の場合について見ていこう．

一般に，主要係数 $A_\mu(h_{|\mu|}, n)$ はカタラン数の積になる．

定理 8. $\mu \vdash k$ ならば

$$A_\mu(h_k, n) = \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \mathrm{Cat}(\mu_i).$$

ここで，$\mathrm{Cat}(m) = \frac{(2m)!}{(m+1)!\, m!}$ はカタラン数． □

この定理は Murray [Mu] が Frahat–Higman 代数の理論から代数的な証明を与えた．一方 Novak [N] は，命題 1 と Collins [C] によって得られた $\mathrm{Wg}_n^{U(N)}$ の $N \to \infty$ における漸近挙動から結果を得た（Collins の結果は Biane の無限対称群の理論を用いている）．また Matsumoto–Novak [MN] は，直接的かつ組合せ論的証明を与えた（§4 を参照）．

一般の係数 $A_\mu(h_k, n)$ を求めるため，やはり $c_\rho(h_k)$ について知りたい．次の漸化式が知られている．

定理 9 (Lassalle [L], Féray [F]). 係数 $c_\rho(h_k)$ たちは次の漸化式を満たす．任意の分割 ρ と $k, m \geq 1$ に対し

$$\begin{aligned} c_{\rho\cup(m)}(h_k) &= \sum_{i=1}^{\ell(\rho)} \rho_i c_{\rho\setminus(\rho_i)\cup(\rho_i+m)}(h_{k-1}) + \sum_{r=1}^{m-1} c_{\rho\cup(r)\cup(m-r)}(h_{k-1}) \\ &\quad + \delta_{m\geq 2}\, 2c_{\rho\cup(m-1)}(h_{k-1}) + \delta_{m,2}\, c_\rho(h_{k-1}). \end{aligned}$$

第 2 段の第 1 項は $m \geq 2$ のときのみ，第 2 項は $m = 2$ のときのみ必要となる．また，$\rho\setminus(\rho_i)$ は ρ から成分 ρ_i を取り除いた分割である． □

この定理と $c_{(2)}(h_1)=1$, $c_\rho(h_1)=0$ $(\rho\neq(2))$ という初期条件から，$c_\rho(h_k)$ を順次計算していくことは容易である．定理の証明は partial permutation algebra の理論を用いて，漸化式 $h_k(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})=h_{k-1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)+x_{n+1}h_{k-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})$ を出発点として得られる．しかし，定理6のように母関数をうまく求めることは難しそうである ([L]).

系7に対応するような式は，h_k の場合には知られていない．[F, L] では，$A_\mu(h_k,n)$ たちに関する漸化式も得られている．

その他の結果として，

$$A_{(n-1)}(h_{n-1+2k},n)=\mathrm{Cat}_{n-1}T(n-1+k,n-1)$$

という式が得られている ([MN]). 他にも幾つか同種の式が [F] で与えられている．

例 3.

$$\begin{aligned}
h_4(J_1,\ldots,J_n)=&14\mathcal{C}_{(4)}(n)+5\mathcal{C}_{(3,1)}(n)+4\mathcal{C}_{(2^2)}(n)+2\mathcal{C}_{(2,1^2)}(n)+\mathcal{C}_{(1^4)}(n)\\
&+\left[2\binom{n-3}{2}+15\binom{n-3}{1}+10\right]\mathcal{C}_{(2)}(n)\\
&+\left[\binom{n-4}{2}+8\binom{n-4}{1}+20\right]\mathcal{C}_{(1^2)}(n)\\
&+\left[3\binom{n}{4}+8\binom{n}{3}+\binom{n}{2}\right]\mathcal{C}_{(0)}(n).
\end{aligned}$$

3.4 単項対称関数

分割 λ に対し，単項対称関数 m_λ は

$$m_\lambda(x_1,x_2,\ldots)=\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots$$

で定まる．ここで，$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$ は $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ の異なる順列全体を走る．$\{m_\lambda\}_{\lambda:\text{分割}}$ は，対称関数のなす代数の基底である．対応 $F\mapsto A_\mu(F,n)$ は線型なので，$A_\mu(m_\lambda,n)$ が全部計算できれば，(原理的には) 全ての $A_\mu(F,n)$ が求まることになる．

Matsumoto–Novak [MN] の主結果を述べるために，いくつか準備をしよう．$\boldsymbol{i}=(i_1,\ldots,i_k)$ を正の整数からなる有限列とする．各 $p=1,2,\ldots$ に対し，$m_p(\boldsymbol{i})$ で $\boldsymbol{i}$ の中の p の重複度と定める．もちろん $\sum_{p\geq1}m_p(\boldsymbol{i})=k$ である．非負整数の列 $m_1(\boldsymbol{i}),m_2(\boldsymbol{i}),\ldots$ を大きい順に並べ替えることで分割 $\lambda\vdash k$ が定まる．この λ を列 $\boldsymbol{i}$ の型 (type) と呼ぼう．例えば $\boldsymbol{i}=(555669999)$ の型は $(4,3,2)\vdash 9$.

正の整数 k に対し，条件

$$i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k, \qquad i_p \ge p\ (p = 1, 2, \ldots, k-1), \qquad i_k = k$$

を満たす列 $(i_1, \ldots, i_k)$ のなす集合を $\mathfrak{C}(k)$ とおく．例えば，

$$\mathfrak{C}(3) = \{(123), (133), (223), (233), (333)\}.$$

実は個数 $|\mathfrak{C}(k)|$ はカタラン数 $\mathrm{Cat}(k)$ に一致する．

定義 1. 分割 λ に対し，$\mathfrak{C}(|\lambda|)$ に属する型 λ の列の個数を $\mathrm{RC}(\lambda)$ とおく．これを細分カタラン数 (**R**efined **C**atalan number) と呼ぶ．

$\sum_{\lambda \vdash k} \mathrm{RC}(\lambda) = \mathrm{Cat}(k)$ である．また，定義から $\mathrm{RC}((k)) = \mathrm{RC}((1^k)) = 1$ が容易に分かる．一般の $\mathrm{RC}(\lambda)$ の表示は，次のようになる．

補題 10 (Stanley [S1]).

$$\mathrm{RC}(\lambda) = \frac{|\lambda|!}{(|\lambda| - \ell(\lambda) + 1)! \prod_{i \ge 1} m_i(\lambda)!} = \frac{m_\lambda(1^{|\lambda|+1})}{|\lambda| + 1}.$$

□

主要係数 $A_\mu(m_\lambda, n)$ $(\mu \vdash k)$ は次のように与えられる．

定理 11 (Matsumoto–Novak [MN]). λ, μ を $|\lambda| = |\mu|$ なる分割とするとき，

$$A_\mu(m_\lambda, n) = \sum_{(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots)} \mathrm{RC}(\lambda^{(1)}) \mathrm{RC}(\lambda^{(2)}) \cdots.$$

ここで和は

$$\lambda^{(i)} \vdash \mu_i \quad (i \ge 1) \qquad \lambda = \lambda^{(1)} \cup \lambda^{(2)} \cup \cdots \tag{3.2}$$

を満たすような分割の列 $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots)$ 全体を走る． □

例 4. $\lambda = (3, 2, 2, 1)$, $\mu = (5, 3)$.

$$A_{(5,3)}(m_{(3,2,2,1)}, n) = \mathrm{RC}((3,2))\mathrm{RC}((2,1)) + \mathrm{RC}((2,2,1))\mathrm{RC}((3)) = 5 \cdot 3 + 10 \cdot 1 = 25.$$

式 (3.1) と定理 8 は，定理 11 の系として得ることができる．定理 11 の証明のアイディアを次章で述べる．

二つの分割 $\lambda, \mu \vdash k$ に対し，(3.2) を満たすような列 $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots)$ が存在するときに，λ は μ の細分 (refinement) であるという．このとき $\lambda \leq_R \mu$ と書くと，これは k の分割に半順序を与える．定理 11 から，行列 $(A_\mu(m_\lambda, n))_{\lambda,\mu \vdash k}$ がこの半順序 $\leq_R$ に関して三角行列になっていることが分かる: $\lambda, \mu \vdash k$ のとき

$$\lambda \leq_R \mu \qquad \Leftrightarrow \qquad A_\mu(m_\lambda, n) \neq 0.$$

$\leq$ を分割の支配順序 (dominance order) とする．すなわち

$$\lambda \leq \mu \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{r} \mu_i \quad (\forall r \geq 1).$$

$\lambda \leq_R \mu$ ならば $\lambda \leq \mu$ である ([Mac, I. (6.10)])．また $A_\lambda(m_\lambda, n) = 1$ だから，行列 $(A_\mu(m_\lambda, n))_{\lambda,\mu \vdash k}$ は [Mac, I.6] の意味で strictly lower unitrianguler である．

例 5. 分割は逆辞書式順序で並べてある．対角より上の成分は全て 0 である．

$(A_\mu(m_\lambda, n))_{\lambda,\mu \vdash 5} =$

$\lambda \setminus \mu$	5	41	32	31^2	2^21	21^3	1^5
5	1						
41	5	1					
32	5	0	1				
31^2	10	4	1	1			
2^21	10	2	3	0	1		
21^3	10	6	4	3	2	1	
1^5	1	1	1	1	1	1	1

単項対称関数の場合は，主要係数以外の $A_\mu(F, n)$ について，漸化式や母関数といった結果はまだ知られていない．

例 6.

$$\begin{aligned} m_{(2^2)}(J_1, \ldots, J_n) =& 2\mathcal{C}_{(4)}(n) + \mathcal{C}_{(2^2)}(n) + \left[\binom{n-3}{2} + 3\binom{n-3}{1} + 1\right] \mathcal{C}_{(2)}(n) \\ &+ 2\mathcal{C}_{(1^2)}(n) + \left[3\binom{n}{4} + 2\binom{n}{3}\right] \mathcal{C}_{(0)}(n). \end{aligned}$$

(やや大変だが，$m_{(2^2)}(J_1, \ldots, J_n)$ の定義から直接計算して得られる.)

4 定理11の証明について

この章では，定理11のもっとも基本的な場合

$$A_{(k)}(m_\lambda, n) = \mathrm{RC}(\lambda), \qquad (\lambda \vdash k) \tag{4.1}$$

について，[MN]で与えた証明のアイディアを述べる．一般の場合も，以下の議論を精密化することで得られる．

nは十分大きいとし，$|\lambda| = k$とする．単項対称式$m_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$は次のように表すことができる．

$$m_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{1 \le t_1 \le \cdots \le t_k \le n \\ (t_1, \ldots, t_k) \text{ は型 } \lambda}} x_{t_1} \cdots x_{t_k}$$

係数$A_\mu(m_\lambda, n)$は恒等式

$$\sum_{\substack{1 \le t_1 \le \cdots \le t_k \le n \\ (t_1, \ldots, t_k) \text{ は型 } \lambda}} J_{t_1} \cdots J_{t_k} = \sum_\mu A_\mu(m_\lambda, n) \mathcal{C}_\mu(n)$$

によって定まる．Jucys–Murphy元の定義$J_t = \sum_{1 \le s < t} (s\ t)$を思い出せば，$A_\mu(m_\lambda, n)$を求めることは次のように互換の数え上げに帰着される．

補題 12. λ, μを分割とし，$k = |\lambda| \ge |\mu|$とする．σ_μを変形サイクルタイプがμであるようなS_nの元の一つとする．(たとえば

$$\sigma_\mu = (1\ 2\ 3 \cdots \mu_1 + 1)(\mu_1 + 2\ \mu_1 + 3\ \cdots\ \mu_1 + \mu_2 + 2) \cdots$$

とおけばよい.) このとき$A_\mu(m_\lambda, n)$は，次の条件を満たすようなk個の互換の列

$$\big((s_1\ t_1), (s_2\ t_2), \ldots, (s_k\ t_k)\big)$$

の個数に等しい:

- 各$1 \le i \le k$において，$(s_i\ t_i)$はS_nに含まれる互換であり$s_i < t_i$;
- $(t_1, \ldots, t_k)$は型λで，$t_1 \le \cdots \le t_k$;
- 互換の積$(s_1\ t_1)(s_2\ t_2) \cdots (s_k\ t_k)$は$\sigma_\mu$に等しい．

□

特に重要なのは最後の性質で，σ_μをk個の互換の積で表すときにその表し方は何通りあるか，ということを問うている．

$A_{(k)}(m_\lambda, n)$を求めるには，上の補題の置換$\sigma_\mu = \sigma_{(k)}$はサイクル$(1\ 2 \cdots\ k+1)$を選べば良い．次の補題が鍵である．

補題 13. $2 \le t_1 \le \cdots \le t_k$ とする．このときサイクル $(1\ 2\ \cdots\ k{+}1)$ が，ある $s_1, s_2, \ldots, s_k$（ただし全ての i で $s_i < t_i$）が存在して

$$(1\ 2\ \cdots\ k+1) = (s_1\ t_1)(s_2\ t_2)\cdots(s_k\ t_k) \tag{4.2}$$

と表されるための必要十分条件は，

$$t_i \ge i+1\ (i = 1, 2, \ldots, k-1), \qquad t_k = k+1 \tag{4.3}$$

が成り立つことである．さらに，$(t_1, \ldots, t_k)$ が (4.3) を満たすとき，表示 (4.2) は一意的に決まる．すなわち，$s_1, \ldots, s_k$ の選び方はちょうど一通りしかない． □

例 7. $k = 9$ とする．列 $(t_1, \ldots, t_9) = (3, 5, 5, 5, 8, 8, 8, 9, 10)$ は条件 (4.3) を満たしている．このとき補題の主張によると，

$$(1\ 2 \cdots\ 10) = (s_1\ 3)(s_2\ 5)(s_3\ 5)(s_4\ 5)(s_5\ 8)(s_6\ 8)(s_7\ 8)(s_8\ 9)(s_9\ 10)$$

を満たす $s_1, \ldots, s_9$（ただし $s_i < t_i$）が一意的にとれる．実際，

$$(1\ 2 \cdots\ 10) = (2\ 3)(4\ 5)(3\ 5)(1\ 5)(7\ 8)(6\ 8)(5\ 8)(8\ 9)(9\ 10)$$

となる．

これら二つの補題から，$A_{(k)}(m_\lambda, n)$ は，型 λ で非減少でなおかつ (4.3) を満たす列 $(t_1, \ldots, t_k)$ の個数に等しいことが分かる．ところが，非減少で (4.3) を満たす列 $(t_1, \ldots, t_k)$ は，明らかに §3.4 で定義した集合 $\mathfrak{C}(k)$ の元と 1 対 1 対応している．(列 $(t_i - 1)_{1 \le i \le k}$ が $\mathfrak{C}(k)$ の定義を満たす.）一方 $\mathfrak{C}(k)$ の元の中で，型 λ であるものの個数が $\mathrm{RC}(\lambda)$ であった．したがって，$A_{(k)}(m_\lambda, n) = \mathrm{RC}(\lambda)$ を得る．

5 最後に

5.1 まとめ

対称関数 F の変数に Jucys–Murphy 元を代入したもの $F(J_1, \ldots, J_n)$ は，対称群の群環の中心元となる．特に F として完全対称関数を考えた場合，ユニタリ群上の積分と密接に関連している．変形サイクルタイプが μ となる共役類の上での値 $A_\mu(F, n)$ についての結果をまとめてきた．カタラン数や central factorial number など，組合せ論的に興味深い量も登場した．

主要係数 $A_\mu(F, n)$ $(|\mu| = \deg F)$ に関する研究は，定理 11 で一つの区切りがついた．一般の係数，例えば $A_{(0)}(h_{2k}, n)$ の具体的な値を求めるといった問題など，まだ多く研究す

る余地がありそうだ．また $A_\mu(s_\lambda, n)$ （s_λ はシューア関数）は何か面白い量なのか，ということも謎である．

さらに以下で述べるようなジャック関数を土台とした α-類似や，shifted symmetric function や partial permutation algebra との関連性を見ていくことも今後の研究課題である．

5.2 直交群への類似

中心元 $h_k(J_1, \ldots, J_n) \in Z(\mathbb{Q}[S_n])$ は，ユニタリ群 $U(N)$ 上の積分の，$N \to \infty$ における漸近挙動と密接に関連していた．次に直交群 $O(N)$ の場合を考えることは自然である．$F(J_1, \ldots, J_n)$ に対応するモノは，次のような量である．

H_n を S_{2n} の部分群として実現される超八面体群とする．(S_{2n}, H_n) はゲルファント対になっている．例えば，[Mac, VII.2] で詳しく議論されているが，両側剰余類 $H_n \sigma H_n$ $(\sigma \in S_{2n})$ は n の分割でパラメトライズされる．これは対称群 S_n の共役類の類似に当たる．$\mathbb{Q}[S_{2n}]$ の群環の元

$$F(J_1, J_3, \ldots, J_{2n-1}) \cdot P_n, \qquad P_n = \sum_{\zeta \in H_n} \zeta$$

を考えると，実はこれがゲルファント対 (S_{2n}, H_n) のヘッケ環に属する．$Z(\mathbb{Q}[S_n])$ が $\mathcal{C}_\mu(n)$ たちを基底として持つように，このヘッケ環は両側剰余類上の総和 $\mathcal{C}'_\mu(n)$ $(|\mu| + \ell(\mu) \leq n)$ を基底に持つ．そこで，$F(J_1, J_2, \ldots, J_n)$ のときと全く同様に，等式

$$F(J_1, J_3, \ldots, J_{2n-1}) \cdot P_n = \sum_\mu B_\mu(F, n) \mathcal{C}'_\mu(n)$$

で係数 $B_\mu(F, n)$ が定義される．これはまさに $A_\mu(F, n)$ の類似である．

さらに，$F = h_k$ のとき，係数 $B_\mu(h_k, n)$ が直交群上の積分と密接に関連している．

この係数 $B_\mu(F, n)$ についても本稿で述べたような議論を平行して構築していくことが可能である．それは [Mat] で初めておこなわれ，[F] でさらに深く研究されている．

5.3 Jack 指標への拡張

$A_\mu(F, n)$ の，ジャック関数を土台とした α-類似を定義することができる．α を正の実数とする．ジャック関数 $J_\lambda^{(\alpha)}$ のべき和関数 p_ρ での展開

$$J_\lambda^{(\alpha)} = \sum_{\rho : |\rho| = |\lambda|} \theta_\rho^\lambda(\alpha) p_\rho$$

により，係数 $\theta_\rho^\lambda(\alpha)$ が定まる．ここでジャック関数の定義は [Mac] に従う．$\alpha = 1$ のときは

$$J_\lambda^{(1)} = H_\lambda s_\lambda, \qquad \theta_\rho^\lambda(1) = \frac{H_\lambda}{z_\rho} \chi_\rho^\lambda, \qquad (|\lambda| = |\rho| = n)$$

である．ここで，H_λ は λ の鉤の長さの積であり，$z_\rho = \prod_{i\geq 1} i^{m_i(\rho)} m_i(\rho)!$. 関数 $\rho \mapsto \theta_\rho^\lambda(\alpha)$ は実際に表現の指標になるわけではないが，ジャック指標と呼ばれることもある．分割 λ に対し，α 容量の集合を

$$\mathrm{Cont}^{(\alpha)}(\lambda) = \{(j-1) - (i-1)/\alpha \mid (i,j) \in \lambda\}$$

と定義する．もちろん $\mathrm{Cont}^{(1)}(\lambda) = \mathrm{Cont}(\lambda)$ である．

さて天下り的ではあるが，次のように定義する: 対称関数 F，分割 μ，そして $n \geq |\mu| + \ell(\mu)$ なる自然数 n に対し

$$A_\mu^{(\alpha)}(F,n) = \alpha^{\deg F + n - |\mu|} z_{\mu+(1^{n-|\mu|})} \sum_{\lambda \vdash n} F(\mathrm{Cont}^{(\alpha)}(\lambda)) \frac{\theta^\lambda_{\mu+(1^{n-|\mu|})}(\alpha)}{c_\lambda(\alpha) c'_\lambda(\alpha)}$$

と定義する．ここで，$c_\lambda(\alpha), c'_\lambda(\alpha)$ は共に H_λ の α 類似で，[Mac, VI.(10.21)] で定義される．

このとき (2.3) より，$A_\mu^{(1)}(F,n) = A_\mu(F,n)$ である．さらに §5.2 で定義した係数 $B_\mu(F,n)$ は，実は $A_\mu^{(2)}(F,n) = B_\mu(F,n)$ となる．

一般の α においては，$F(J_1, J_2, \ldots, J_n)$ や $F(J_1, J_3, \ldots, J_{2n-1})P_n$ のようなものの係数として $A_\mu^{(\alpha)}(F,n)$ を定義する—というような解釈は未だ得られていない．定理 5 の第 3 の主張は，そのまま $A_\mu^{(\alpha)}(F,n)$ でも成り立つが，他の多くの性質は未解明である．現時点では [F, L, Mat] で少し取り扱われているが，さらなる研究が必要である．

参考文献

[C] B. Collins, *Moments and cumulants of polynomial random variables on unitary groups, the Itzykson-Zuber integral, and free probability*, Int. Math. Res. Not. 2003, no. 17, 953–982.

[CST] T. Ceccherini-Silberstein, F. Scarabotti, and F. Tolli, *Representation theory of the symmetric groups. The Okounkov-Vershik approach, character formulas, and partition algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 121. Cambridge University Press, 2010.

[F] V. Féray, *On complete functions in Jucys-Murphy elements*, To appear in Annals of Combinatorics, arXiv:1009.0144v3.

[FKMO] S. Fujii, H. Kanno, S. Moriyama, and S. Okada, *Instanton calculus and chiral one-point functions in supersymmetric gauge theories*, Adv. Theor. Math. Phys., 12 (6), 2008, 1401–1428.

[IK] V. Ivanov and S. Kerov, *The algebra of conjugacy classes in symmetric groups, and partial permutations*, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 256 (1999), Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody. 3, 95–120, 265; translation in J. Math. Sci. (New York) 107 (2001), no. 5, 4212–4230.

[J] A. Jucys, *Symmetric polynomials and the center of the symmetric group ring*, Rep. Mathematical Phys. 5 (1974), no. 1, 107–112.

[LT] A. Lascoux and J.-Y. Thibon, *Vertex operators and the class algebras of symmetric groups,* J. Math. Sci., 121 (3), 2004, 2380–2392.

[L] M. Lassalle, *Class expansion of some symmetric functions of Jucys-Murphy elements*, arXiv:1005.2346v1.

[Mac] I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Second edition. With contributions by A. Zelevinsky. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, 1995.

[Mat] S. Matsumoto, *Jucys-Murphy elements, orthogonal matrix integrals, and Jack measures*, Ramanujan J., 26 (2011), 69–107.

[MN] S. Matsumoto and J. Novak, *Jucys–Murphy elements and unitary matrix integrals*, arXiv:0905.1992v2.

[Mu] J. Murray, *Generators for the centre of the group algebra of a symmetric group,* J. Algebra, 271(2), 2004, 725–748.

[N] J. Novak, *Jucys-Murphy elements and the unitary Weingarten function*, Noncommutative harmonic analysis with applications to probability II, 231–235, Banach Center Publ., 89, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2010.

[OO] A. Okounkov and G. Olshanski, *Shifted Schur functions*, St. Petersburg Math. J., 9, 1998, 239–300.

[OV] A. Okounkov and A. Vershik, *A new approach to representation theory of symmetric groups*, Selecta Math. (N.S.) 2 (1996), no. 4, 581–605.

[Ol] G. Olshanski, *Plancherel averages: remarks on a paper by Stanley*, Electron. J. Combin. 17 (2010), no. 1, Research Paper 43, 16 pp.

[S1] R. P. Stanley, *Parking functions and noncrossing partitions,* Electron. J. Combin., 4 (2), 1997, R20.

[S2] R.P. Stanley, *Some combinatorial properties of hook lengths, contents, and parts of partitions*, Ramanujan J. 23 (2010), no. 1-3, 91–105,