ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.977
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-283-287

Поступила в редакцию 24.05.2019
Received 24.05.2019

Л. И. Минченко, О. Ф. Борисенко

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПСЕВДОЛИПШИЦЕВОСТИ СИСТЕМЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РАВЕНСТВ И НЕРАВЕНСТВ

Аннотация. Исследуются липшицевы свойства многозначных отображений, заданных в виде системы параметрических равенств и неравенств. Доказываются достаточные условия псевдолипшицевости (pseudo-Lipschitzian continuity or Aubin property) на основе ослабленного условия регулярности постоянства положительно-линейной зависимости (RCPLD). За счет использования более слабых условий регулярности полученные результаты обобщают некоторые известные ранее достаточные условия псевдолипшицевости для многозначных отображений, заданных системой функциональных равенств и неравенств

Ключевые слова: многозначные отображения, условия регулярности, псевдолипшицевость

Для цитирования. Минченко, Л. И. Достаточное условие псевдолипшицевости системы параметрических равенств и неравенств / Л. И. Минченко, О. Ф. Борисенко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 283–287. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-283-287

L. I. Minchenko, O. F. Borisenko

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

SUFFICIENT CONDITION FOR PSEUDO-LIPSCHITZIAN CONTINUITY OF A FAMILY OF EQUALITIES AND INEQUALITIES

Abstract. We study the Lipschitz-like properties of multivalued mappings defined by functional parametric equalities and inequalities. Sufficient conditions of pseudo-Lipschitzian continuity are obtained on the base of the regularity condition of the relaxed constant positive linear dependence (RCPLD) by Andreani et al. The results of the article generalize some known sufficient conditions for pseudo-Lipschitzian continuity of the systems of parametric equalities and inequalities.

Keywords: multivalued mappings, constraint qualifications, pseudo-Lipschitzian continuity

For citation. Minchenko L. I., Borisenko O. F. Sufficient condition for pseudo-Lipschitzian continuity of a family of equalities and inequalities. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 3, pp. 283–287 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-283-287

Введение. Понятие псевдолипшицевости (pseudo-Lipschitzian continuity) многозначных отображений введено Ж.-П. Обеном в работе [1]. В англоязычной литературе наряду с псевдолипшицевостью употребляется термин «свойство Обена» (Aubin property) [2]. Интерес к псевдолипшицевости многозначных отображений стимулируется многочисленными приложениями данного свойства [1–5]. В настоящей статье доказываются достаточные условия псевдолипшицевости многозначных отображений, заданных семейством функциональных равенств и неравенств на основе условия регулярности RCPLD (relaxed constant positive linear dependence) [6]. Полученные достаточные условия обобщают результаты [3–5].

Пусть $x \in R^n, y \in R^m$. Рассмотрим многозначное отображение $F : x \mapsto F(x) \subset R^m$, заданное условием

$$F(x) = \{y \in R^m \mid h_i(x,y) \le 0,\ i \in I, h_i(x,y) = 0,\ i \in I_0\},$$

где $I = \{1,...,s\}$, $I_0 = \{s+1,..., p\}$, функции $h_i(x,y)$ непрерывны вместе с производными $\nabla_y h_i(x,y)$.

Введем область допустимых значений и график многозначного отображения F:

$$\mathrm{dom}F = \{x \in R^n \mid F(x) \ne \varnothing\},\ \ \mathrm{gr}F = \{(x,y) \mid y \in F(x),\ x \in R^n\}.$$

© Минченко Л. И., Борисенко О. Ф., 2019

Обозначим $I(x,y)=\{i\in I \mid h_i(x,y)=0\}$, $V(x)$ и $V(y)$ – окрестности точек x и y, $|v|$ – евклидова норма вектора v, $d(v,C)$ – расстояние от точки $v\in R^m$ до множества $C\subset R^m$. В случае конечного множества J число его элементов будет обозначаться $|J|$.

Основные определения и вспомогательные результаты. Ниже, следуя [1, 2, 7, 8], приводим основные определения.

Определение 1. Отображение F называется полунепрерывным снизу (п.н.сн.) в точке $(x^0,y^0)\in grF$ (относительно $X\subset R^n$), если для любой окрестности $V(y^0)$ существует окрестность $V(x^0)$ такая, что $F(x)\cap V(y^0)\neq\varnothing$ для всех $x\in V(x^0)$ (для $x\in V(x^0)\cap X$).

Определение 2. Отображение F называется R-регулярным в точке $(x^0,y^0)\in \mathrm{gr}F$ относительно $\mathrm{dom}F$, если существует число $\alpha>0$ и окрестности $V(x^0)$ и $V(y^0)$ такие, что $d(y,F(x))\le\alpha\max\{0,h_i(x,y):i\in I,|h_i(x,y)|:i\in I_0\}$ для всех $y\in V(y^0)$ и $x\in V(x^0)\cap\mathrm{dom}F$.

Определение 3. Отображение F называется псевдолипшицевым (относительно $X\subset R^n$) в точке $(x^0,y^0)\in\mathrm{gr}F$ (где $x^0\in X$), если существуют число $l_F>0$ и окрестности $V(x^0)$ и $V(y^0)$ такие, что $F(x^1)\cap V(y^0)\subset F(x^2)+l_F|x^2-x^1|B$ для всех $x^1,x^2\in V(x^0)$ (всех $x^1,x^2\in V(x^0)\cap X$).

В [6] для задачи нелинейного программирования введено ослабленное условие регулярности постоянной положительно-линейной зависимости (RCPLD).

Пусть $J\subset I_0$, $K\subset I(x^0,y^0)$. Будем говорить, что система векторов $\{\nabla_y h_i(x^0,y^0),\ i\in J\cup K\}$ положительно-линейно зависима, если существуют не все равные нулю числа λ_i, где $i\in J\cup K$, такие, что $\lambda_i\ge 0$ при $i\in K$ и $\sum\limits_{i\in J\cup K}\lambda_i\nabla_y h_i(x^0,y^0)=0$.

Следующее определение распространяет условие RCPLD на параметрические системы равенств и неравенств.

Определение 4. Многозначное отображение F удовлетворяет условию RCPLD в точке $(x^0,y^0)\in\mathrm{gr}F$, если существует окрестность V точки (x^0,y^0) такая, что:

1) $\mathrm{rank}\{\nabla_y h_i(x,y),\ i\in I_0\}=\mathrm{const}$ при $(x,y)\in V$;

2) для любого множества индексов $K\subset I(x,^0 y^0)$ из положительно-линейной зависимости системы векторов $\{\nabla_y h_i(x^0,y^0),\ i\in I_0\cup K\}$ следует линейная зависимость системы $\{\nabla_y h_i(x,y),\ i\in I_0\cup K\}$ при всех $(x,y)\in V$.

Отметим, что из определения 4 следует, что если отображение F удовлетворяет RCPLD в точке $(x^0,y^0)\in\mathrm{gr}F$, то оно удовлетворяет данному условию в любой точке $(x,y)\in\mathrm{gr}F$ из некоторой окрестности (x^0,y^0). В работе [6] доказано, что RCPLD является условием регулярности, причем более слабым по сравнению с введенным в [9] ослабленным условием регулярности постоянного ранга (RCRCQ), а также по сравнению с рядом других известных условий регулярности. Таким образом, из RCPLD вытекает справедливость условия Куна – Таккера [10].

Лемма Каратеодори ([5, 6]). Пусть $y\neq 0$ и $y=\sum\limits_{i=1}^{r+t}\alpha_i v^i$, где векторы $v^1,\ldots,v^r$ линейно независимы, $\alpha_i\in R$, $i=1,\ldots,r$, $\alpha_i>0$, $i=r+1,\ldots,r+t$. Тогда существует $J\subset\{r+1,\ldots,r+t\}$ и числа $\bar\alpha_i$, $i\in\{1,\ldots,r\}\cup J$ такие, что $y=\sum\limits_{i\in\{1,\ldots,r\}\cup J}\bar\alpha_i v^i$, $\bar\alpha_i>0$, для всех $i\in J$ и векторы v^i, $i\in\{1,\ldots,r\}\cup J$, линейно независимы.

Основные результаты. Пусть $v\in R^m$. Обозначим $\Pi_{F(x)}(v)$ множество ближайших к v точек множества $F(x)$. То есть, $\Pi_{F(x)}(v)$ является множеством решений задачи

$$\Phi_v(y)=|y-v|\to\min,\ \ y\in F(x). \tag{1}$$

Рассмотрим множество множителей Лагранжа в точке $y\in F(x)$, являющейся решением задачи (1):

$$\Lambda_v(x,y,F)=\left\{\lambda\in\mathrm{R}^p \mid \frac{y-v}{|y-v|}+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\nabla_y h_i(x,y)=0, \lambda_i\ge 0,\ \lambda_i h_i(x,y)=0\ \ \forall i\in I\right\},$$

и введем множество ограниченных множителей Лагранжа

$$\Lambda_v^M(x,y,F)=\left\{\lambda\in\Lambda_v(x,y,F)\mid\sum_{i=1}^{p}|\lambda_i|\le M\right\}.$$

Нам понадобится следующее утверждение (теорема 3.1 [5]).

Предложение 1. *Пусть* $(x^0,y^0)\in\mathrm{gr}F$ *и отображение* F *п.н.сн. в данной точке относительно* $\mathrm{dom}F$*. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(a) *отображение* F *R-регулярно в точке* (x^0, y^0) *относительно* $\mathrm{dom}F$*;*

(b) *существует число* $M>0$ *такое, что для любых последовательностей* $x^k\to x^0$, $x^k\in\mathrm{dom}F$, $v^k\to y^0$, $v^k\notin F(x^k)$, *справедливо неравенство* $\Lambda_{v^k}^M(x^k,y^k,F)\ne\varnothing$ *при всех* $y^k=y(x^k,v^k)\in\Pi_{F(x^k)}(v^k)$ *и всех достаточно больших* k*.*

Теорема 1. *Пусть отображение* F *п.н.сн. в точке* $(x^0,y^0)\in\mathrm{gr}F$ *относительно* $\mathrm{dom}F$ *и удовлетворяет в данной точке условию RCPLD. Тогда* F *R-регулярно в* (x^0, y^0) *относительно* $\mathrm{dom}F$*.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. F не R-регулярно в (x^0, y^0) относительно $\mathrm{dom}F$. Тогда в силу предложения 1 найдутся последовательности $x^k\to x^0$, $x^k\in\mathrm{dom}F$, $v^k\to y^0$, $v^k\notin F(x^k)$, $y^k=y(x^k,v^k)\in\Pi_{F(x^k)}(v^k)$ такие, что либо $\Lambda_{v^k}(x^k,y^k,F)=\varnothing$, либо $d(0,\Lambda_{v^k}(x^k,y^k,F)\to+\infty$. При этом $y^k\to y^0$ вследствие полунепрерывности снизу отображения F в точке(x^0, y^0).

В таком случае, не убавив общности, можно положить, что RCPLD выполняется в точках (x^k, y^k) для всех $k=1,\ldots$. Следовательно, $\Lambda_{v^k}(x^k,y^k,F)\ne\varnothing$. Это значит, что $d(0,\Lambda\quad(x^k,y^k,F)\to+\infty$ и существуют векторы $\mu^k\in\Lambda_{v^k}(x^k,y^k,F)$. Последнее равносильно

$$\frac{v^k-y^k}{\left|v^k-y^k\right|}=\sum_{i\in I_0\cup I(x^k,y^k)}\mu_i^k\nabla_y h_i(x^k,y^k),\quad k=1,2,\ldots,\tag{2}$$

где $\mu_i^k\in R$, $i\in I_0$, $\mu_i^k\ge 0$, $i\in I(x^k,y^k)$, $k=1,2,\ldots$.

Вследствие RCPLD в точке (x^0, y^0) найдутся окрестность $V(x^0, y^0)$ и множество индексов $I_0'\subset I_0$, $|I_0'|=\mathrm{rank}\left\{\nabla_y h_i(x^0,y^0),\ i\in I_0\right\}$ такие, что для всех $(x,y)\in V(x^0,y^0)$ векторы $\{\nabla_y h_i(x,y),\ i\in I_0'\}$ линейно независимы, в то время как векторы $\nabla_y h_i(x,y)$, $i\in I_0\setminus I_0'$, линейно зависят от $\{\nabla_y h_i(x,y),\ i\in I_0'\}$.

Без потери общности можно считать, что $(x^k,y^k)\in V(x^0,y^0)$ и, следовательно, $\sum_{i\in I_0}\mu_i^k\nabla_y h_i(x^k,y^k)=\sum_{i\in I_0'}\tilde{\mu}_i^k\nabla_y h_i(x^k,y^k)$ для некоторых $\tilde{\mu}_i^k\in R$, $i\in I_0'$.

Тогда (2) можно переписать в виде

$$\frac{v^k-y^k}{\left|v^k-y^k\right|}=\sum_{i\in I_0'}\tilde{\mu}_i^k\nabla_y h_i(x^k,y^k)+\sum_{i\in I(x^k,y^k)}\mu_i^k\nabla_y h_i(x^k,y^k),\quad k=1,2,\ldots,\tag{3}$$

где $\nabla_y h_i(x^k,y^k)$, $i\in I_0'$, линейно независимы.

Поскольку $I(x^k,y^k)\subset I$, множество $I(x^k,y^k)$ может принимать только конечное множество значений. Следовательно, (переходя к подпоследовательности, если необходимо) можно полагать, что $I(x^k,y^k)$ не меняется для всех k, т. е. $I(x^k,y^k)=I^0$.

Применяя лемму Каратеодори, получим, что для любого $k=1,2,\ldots$ существует множество индексов $I(k)\subset I^0$ такое, что

$$\sum_{i\in I_0'}\tilde{\mu}_i^k\nabla_y h_i(x^k,y^k)+\sum_{i\in I^0}\mu_i^k\nabla_y h_i(x^k,y^k)=\sum_{i\in I_0'}\tilde{\lambda}_i^k\nabla_y h_i(x^k,y^k)-\sum_{i\in I(k)}\tilde{\lambda}_i^k\nabla_y h_i(x^k,y^k),$$

где $\tilde{\lambda}_i^k\ge 0,\ i\in I(k)$, и векторы $\nabla_y h_i(x^k,y^k),\ i\in I_0'\cup I(k)$, линейно независимы.

Следовательно, (3) можно переписать в виде

$$\frac{v^k-y^k}{\left|v^k-y^k\right|}=\sum_{i\in I_0'\cup I(k)}\tilde{\lambda}_i^k\nabla_y h_i(x^k,y^k). \tag{4}$$

Опять переходя к подпоследовательности, если необходимо, можно положить $I(k)=I^{\#}$, где $I^{\#}$ – не зависящее от k множество. Тогда из (4) следует

$$\frac{v^k-y^k}{\left|v^k-y^k\right|}=\sum_{i\in I_0'\cup I^{\#}}\tilde{\lambda}_i^k\nabla_y h_i(x^k,y^k), \tag{5}$$

где $\tilde{\lambda}_i^k\ge 0$ для всех $i\in I^{\#}$ и векторы $\nabla_y h_i(x^k,y^k),\ i\in I_0'\cup I^{\#}$, линейно независимы.

Положим $\lambda_i^k=\tilde{\lambda}_i^k$ для $i\in I_0'\cup I^{\#}$ и $\lambda_i^k=0$ для $i\in(I_0\setminus I_0')\cup(I\setminus I^{\#})$. Тогда из (5) получим

$$\frac{v^k-y^k}{\left|v^k-y^k\right|}=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^k\nabla_y h_i(x^k,y^k), \tag{6}$$

где $\lambda^k=(\lambda_1^k,\dots,\lambda_p^k)^T\in\Lambda_{v^k}(x^k,y^k,F)$ и, значит, $\left|\lambda^k\right|\to+\infty$. Без потери общности можно предположить, что $\lambda^k\left|\lambda^k\right|^{-1}\to\lambda$. Тогда, разделив (6) на $\left|\lambda^k\right|$, получим после перехода к пределу, что

$$0=\sum_{i\in I_0'\cup I^{\#}}\lambda_i\nabla_y h_i(x^0,y^0),\ \ \lambda\ne 0,\ \lambda_i\ge 0,\ i\in I^{\#}, \tag{7}$$

т. е. векторы $\nabla_y h_i(x^0,y^0),\ i\in I_0'\cup I^{\#}$, положительно-линейно зависимы. В таком случае в силу RCPLD векторы $\nabla_y h_i(x^k,y^k),\ i\in I_0'\cup I^{\#}$, должны быть линейно зависимы, что противоречит их линейной независимости, полученной в (5). Это противоречие говорит о том, что F R-регулярно в точке (x^0, y^0) относительно dom$F$.

Теорема 2. *Пусть отображение F п.н.сн. в точке $(x^0,y^0)\in$*gr$F$ *относительно* dom$F$ *и удовлетворяет в данной точке условию RCPLD. Тогда отображение F – псевдолипшицево в точке (x^0,y^0) относительно* dom$F$.

Доказательство. Согласно теореме 1 отображение F является R-регулярным в точке (x^0,y^0) относительно dom$F$. Тогда отображение F псевдолипшицево в данной точке относительно dom$F$.

Полученное в теореме 2 достаточное условие псевдолипшицевости является более общим по сравнению с условиями [3–5] и, таким образом, в случае конечномерных пространств обобщает результаты [3–5].

Список использованных источников

1. Aubin, J.-P. Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems / J.-P. Aubin // Math. Oper. Res. – 1984. – Vol. 9, № 1. – P. 97–111. https://doi.org/10.1287/moor.9.1.87

2. Rockafellar, R. T. Variational Analysis / R. T. Rockafellar, R. J.-B. Wets. – Berlin: Springer, 1998. https://doi.org/10.1007/978-3-642-02431-3

3. Minchenko, L. Parametric nonlinear programming problems under the relaxed constant rank condition / L. Minchenko, S. Stakhovski // SIAM J. Optimiz. – 2011. – Vol. 21, № 1. – P. 314–332. https://doi.org/10.1137/090761318

4. Lu, S. Relation between the constant rank and the relaxed constant rank constraint qualifications / S. Lu // Optimization. – 2012. – Vol. 61, № 5. – P. 555–566. https://doi.org/10.1080/02331934.2010.527972

5. Bednarczuk, E. On Lipschitz-like property to polyhedral moving sets / E. Bednarczuk, K. E. Rutkowski // SIAM J. Optimiz. – 2019. – Vol. 29. – P. 3197–3207.

6. A relaxed constant positive linear dependence constraint qualification and applications / R. Andreani [et al.] // Math. Program. – 2012. – Vol. 135, № 1/2. – P. 255–273. https://doi.org/10.1007/s10107-011-0456-0

7. Федоров, В. В. Численные методы максимина / В. В. Федоров. – М.: Наука, 1979. – 280 с.

8. Luderer, B. Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations / B. Luderer, L. Minchenko, T. Satsura. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3468-3

9. Minchenko, L. I. On relaxed constant rank regularity condition in mathematical programming / L. I. Minchenko, S. M. Stakhovski // Optimization. – 2011. – Vol. 60, № 4. – P. 429–440. https://doi.org/10.1080/02331930902971377

10. Kuhn, H. W. Nonlinear Programming / H. W. Kuhn, A. W. Tucker/ / Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. – Berkeley: University of California Press, 1951. – P. 481–492.

References

1. Aubin J.-P. Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems/J.-P. *Mathematics of Operations Research*, 1984, vol. 9, no. 1, pp. 97–111. https://doi.org/10.1287/moor.9.1.87

2. Rockafellar R. T., Wets R. J.-B. *Variational Analysis*. Berlin, Springer, 1998. https://doi.org/10.1007/978-3-642-02431-3

3. Minchenko L., Stakhovski S. Parametric nonlinear programming problems under the relaxed constant rank condition. *SIAM Journal on Optimization*, 2011, vol. 21, no. 1, pp. 314–332. https://doi.org/10.1137/090761318

4. Lu S. Relation between the constant rank and the relaxed constant rank constraint qualifications. *Optimization*, 2012, vol. 61, no. 5, pp. 555–566. https://doi.org/10.1080/02331934.2010.527972

5. Bednarczuk E., Rutkowski K. E. On Lipschitz-like property to polyhedral moving sets. *SIAM Journal on Optimization*, 2019, vol. 29, pp. 3197–3207.

6. Andreani R., Haeser G., Schuverdt M. L., Silva P. J. S. A relaxed constant positive linear dependence constraint qualification and applications. *Mathematical Programming*, 2012, vol. 135, no. 1–2, pp. 255–273. https://doi.org/10.1007/s10107-011-0456-0

7. Fedorov V. V. *Numerical Maximilian Methods*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 280 p. (in Russian).

8. Luderer B., Minchenko L., Satsura T. *Multivalued Analysis and Nonlinear Programming Problems with Perturbations*. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2002. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3468-3

9. Minchenko L. I., Stakhovski S. M. On relaxed constant rank regularity condition in mathematical programming. *Optimization*, 2011, vol. 60, no. 4, pp. 429–440. https://doi.org/10.1080/02331930902971377

10. Kuhn H. W., Tucker A. W. Nonlinear Programming. *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Berkeley, University of California Press, 1951, pp. 481–492.

Информация об авторах

Минченко Леонид Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информатики, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: inform@bsuir.by

Борисенко Олег Федорович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: kafvm@bsuir.by

Information about the authors

Leonid I. Minchenko – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Informatics, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: inform@bsuir.by

Oleg F. Borisenko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kafvm@bsuir.by