Title	Milnor Fiberの連続性とSingularityの次元 (特異点の位相幾何学)
Author(s)	加藤, 十吉; 松本, 幸夫
Citation	数理解析研究所講究録 (1973), 170: 113-127
Issue Date	1973-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/107007
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
170巻 1973年 113-127

Milnor fiber の連結性と Singularity の次元

東大 教養　加藤十吉
東大 理　松本幸夫

§1. 序

$\mathbb{C}^{(n+1)}$ の中の algebraic hypersurface の，局所的な性質を調べるための有力な道具に，Milnor の導入した fibering の構造がある。$f : \mathbb{C}^{(n+1)} \longrightarrow \mathbb{C}$ を $f(0)=0$, $(\mathrm{grad}\, f)_0 = 0$ をみたす多項式とする。(もっと一般に正則函数としてよい。) $V^{(n)} = f^{-1}(0)$ と書く。S_ε^{2n+1} で原点 0 を中心とし半径 $\varepsilon > 0$ の球面を表わし，$K = S_\varepsilon^{2n+1} \cap V^{(n)}$ とおく。

$\varepsilon > 0$ を充分小にとると

$$\varphi = \frac{f}{\|f\|} : (S_\varepsilon^{2n+1} - K) \longrightarrow S^1$$

は fiber bundle の構造を持つというのが Milnor の主要定理であった。以後 F で φ の fiber を表わす。

f の critical points set を $\Sigma(f)$ としよう。

$$\Sigma(f) = \{ z \in \mathbb{C}^{(n+1)} \mid (\mathrm{grad}\, f)_z = 0 \}.$$

$\Sigma(f)$ の原点 0 に於ける germ の複素次元を s とするとき，我

々の主な定理は次のように述べられる。

定理 1. $\pi_i(F)=0$ for $i \leqq n-s-1$ である.

とくに $s=0$ の場合 (i.e. isolated critical point), F は $n-1$-connected となり、Milnor の結果 [2] に一致する。上の定理の最初の形は K. Saito によって予想された。

系: $M^{(n+1)}$ を complex manifold, $T \subset \mathbb{C}^{(1)}$ を原点を含む領域, $p: M^{(n+1)} \to T$ を proper holomorphic map とする. p の critical value は原点だけとする。$F_t = p^{-1}(t)$ と書く. そのときもし $t \neq 0$ が 0 に充分近ければ, $(n-s)$-connected map $F_t \to F_0$ が存在する。ただし $s = \dim_{\mathbb{C}}\{z \in F_0 \mid (\mathrm{grad}\, p)_0 = 0\}$.

Hypersurface の Whitney stratification の構造を利用して n に関する induction を行うことが証明の方針である。

§2. Whitney stratification. (Cf. Mather [3].)

N 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ (又は C^∞-manifold M^N) の subset W が Whitney-stratified set であるとは

1) W は smooth submanifolds の族 $\mathscr{S}=\{X_i\}$ によって cover される: $W=\bigcup_i X_i$, 但し $X_i \cap X_j = \phi$ $(i \neq j)$.

各X_iはconnectedと仮定する。各々のX_iはstratumと呼ばれる。

2) $\mathscr{S}$はlocally finite familyである。

3) frontier condition : $\forall X \in \mathscr{S}$について，$\overline{X}-X$はstrataの和集合として表わせる．$Y \in \mathscr{S}$が$\overline{X}-X$に含まれることを記号で $Y < X$と書く．

4) Whitney conditions : (a) $Y < X$とする。Xの点列$\{p_i\}$がYの点pに収束し，p_iに於るXの tangent space $T_{p_i}X$がGrass$(N, \dim X)$の中である plane τに収束したとする．そのとき $\tau \supset T_pY$でなければならぬ．

(b) $Y < X$とする．Xの点列$\{p_i\}$と，Yの点列$\{q_i\}$がともにYの点qに収束したとする．$T_{p_i}(X)$が plane τに収束し、直線$\overline{p_iq_i}$が直線lに収束すれば，$l \subset \tau$でなければならぬ。

Whitney-stratified set を以後 W.S. set とよぶ．

補題1．$W \subset \mathbb{R}^N$をW.S. setとし，$p \in W$をWの1点とする。pを中心とし，半径εの充分小さいsphere S_ε^{N-1}をとると、

$$K = W \cap S_\varepsilon^{N-1}$$

は再たびW.S. setの構造を持つ．

証明：XをWの任意のstratumとするとき，$X \cap S_\varepsilon^{N-1}$は．

smooth manifold になることを示そう．$p \in X$ なら明白だから $p \in Y < X$ として示せばよい．もし ε をどんなに小さくとっても，X と S_ε^{N-1} とが transverse でない点 p_ε が存在したとすれば，$\exists v_\varepsilon \in \tau_{p_\varepsilon}(\mathbb{R}^N)$ s.t. $v_\varepsilon \perp \tau_{p_\varepsilon}(S_\varepsilon^{N-1})$ かつ $v_\varepsilon \perp \tau_{p_\varepsilon}(X)$．点 p と p_ε を結ぶ直線 l_ε は，v_ε を含むこと，は明らかである。ゆえに $l_\varepsilon \perp \tau_{p_\varepsilon}(X)$．このような点列 $\{p_\varepsilon\}$ から部分列をえらんで $\{p_i\}$ と名付け，$l_{p_i} \longrightarrow {}^\exists l$，$\tau_{p_i}(X) \longrightarrow {}^\exists \tau$ となるようにできる。すると，$l \perp \tau$ であるから，Whitney condition (b) に反する．結局 $\varepsilon > 0$ を充分小にとれば，S_ε^{N-1} と X は transverse に交わる．smooth manifold $K_X = X \cap S_\varepsilon^{N-1}$ 達が K の strata になるのである。W.S. set の他の条件も同様に示される．

<u>Tubular neighbourhood system.</u>

W.S. set $W \subset \mathbb{R}^N$ に対して次の条件を満足する tubular neighbourhood system が構成される．(Mather [3].)

1) $\mathcal{J} = \{ \{T_X\}, \{\pi_X\}, \{\rho_X\} \}$.

$\pi_X : |T_X| \longrightarrow X$ は closed disk bundle.

$\rho_X : |T_X| \longrightarrow \mathbb{R}_+$ は Tubular function．$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \geqq 0\}$.

2) $\pi_X \cdot \pi_Y = \pi_X$，$\rho_X \cdot \pi_Y = \rho_X$ $\quad (\forall X < Y.)$

3) Compact sets の family $\{C_X\}$ を，$C_X \subset X$ となるように任意に与えると，$T_X | C_X \rightarrow C_X$ は $\mathbb{R}^N$ の Riemann metric に関す

る X の orthogonal bundle にとることができる。i.e. $\forall x \in C_X$ に対し $|T_X| \to X$ の x 上の fiber disk は，Riemann metric に対して $T_x(X)$ に直交する。

（性質 3) は Mather には無いが，tubular neighbourhood system を構成するとき，3) がみたされるように inductive に構成してゆくことができる。)

4) $|T_X| \cap |T_Y| \neq \phi \Rightarrow X < Y$ or $X = Y$ or $X > Y$.

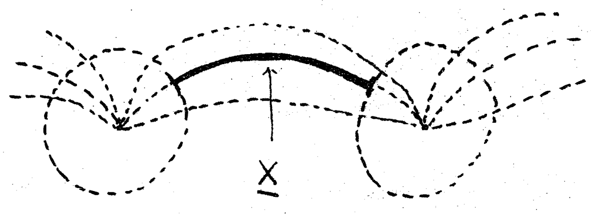
以下の議論に便利なように，いくつかの記号を導入する。

"<u>total space</u>" ; $T = \bigcup_{X \in \mathcal{S}} |T_X|$.

X の <u>frontier</u> ; $\partial X = \{ Y \in \mathcal{S} \mid Y < X \}$, $|\partial X| = \bigcup_{Y \in \partial X} Y$
$= \bar{X} - X$.

X の "<u>co-frontier</u>" ; $\delta X = \{ Z \in \mathcal{S} \mid X < Z \}$, $|\delta X| = \bigcup_{Y \in \delta X} Y$.

X の "<u>compact part</u>" ; $\underline{X} = X - \bigcup_{Y \in \partial X} \mathrm{Int}\, |T_Y|$



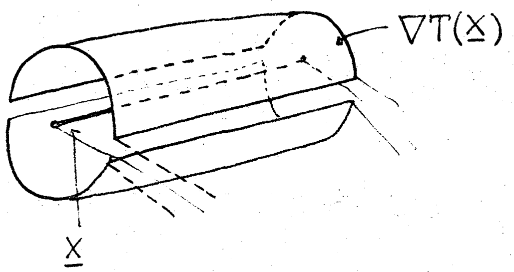
T_X の $\underline{X}$ への制限 : $T(\underline{X}) = T_X | \underline{X}$.

$T(\underline{X})$ の sphere bundle ; $\partial T(\underline{X})$

最後に，$\nabla T(\underline{X})$ を

$$\nabla T(\underline{X}) = \text{closure}\,\Big(\,\partial T(\underline{X}) - \bigcup_{\substack{Y \in \delta X \\ (\text{i.e. } X<Y)}} |T_Y|\,\Big)$$

と定義する。



Total space T は角をもった smooth manifold であり，∂T で，その boundary を表わす．次の補題は明らかである．

<u>補題</u>2. $\partial T = \bigcup_{X \in \mathcal{S}} \nabla T(\underline{X})$.

次に

<u>補題</u>3. (1) $\pi_X : \partial T(\underline{X}) - |\delta X| \longrightarrow \underline{X}$ は fiber bundle.

(2). inclusion $\nabla T(\underline{X}) \longrightarrow \partial T(\underline{X}) - |\delta X|$ は deformation retract であり，その deformation は $\underline{X}$ 上の fiber を保つ．

<u>証明</u>(1). $\partial T(X)$ は $\{\partial T(X) \cap Z\}_{X<Z}$ を strata の system とする W.S. set である。各 stratum $\partial T(X) \cap Z$ から X への写像 π_X の制限が full-rank を言えば(1)は Thom の isotopy lemma から従う．$p \in \partial T(X) \cap Z$ を任意にとる．$\partial T(X) \to X$ は fiber bundle ゆえ．$s : U_{\pi_X(p)} \longrightarrow \partial T(X)$ なる local cross section で $s(\pi_X(p)) = p$ なるものがある。Tubular nbd system の条件(2)により，$q = \pi_X s(\ q\ ) = \pi_X \pi_Z s(\ q\ )$ となり．$\pi_Z s : U_{\pi_X(p)} \longrightarrow \partial T(X) \cap Z$ は $\partial T(X) \cap Z \longrightarrow X$ の cross-section となる．

従がって $\partial T(X)\cap Z \to X$ は full rank となり, (1)が言えた。

(2)の証明：$\# \delta X < \infty$ と仮定して証明する。あとで必要なのもこの時だけ。δX の strata に番号をつけ $Z_1, Z_2, \cdots, Z_r$ とする。但し，$Z_i < Z_j \Rightarrow i < j$ としておく。

記号：　$Q_i = \mathrm{closure}\left(\partial|T(X)| - \bigcup_{\nu=1}^{i} |T_{Z_\nu}|\right)$ とおく。

$Q_i \cap |T_{Z_{i+1}}|$ は $Q_i \cap Z_{i+1}$ の disk bundle であるから，$Q_{i+1} = \mathrm{closure}(Q_i - Q_i \cap |T_{Z_{i+1}}|)$ は $Q_i - Z_{i+1}$ の deformation retr. であり，X に関する fiber を保つ。(Tub. nbd の条件 (2).) 従がって induction (w.r.t. i) により $Q_r = \nabla T(X)$ は $Q_0 - \bigcup_{\nu=1}^{r} Z_\nu = \partial T(X) - |\delta X|$ の deformation retract である。　　Q.E.D.

§3．定理1の証明.

3.1．特別な場合の証明：$s = \dim_{\mathbb{C}} \Sigma(f) = 0$ のときは O.K.（Milnor）．$s = n$ のときは証明すべきことなし。$s = n-1$ のとき，Milnor fiber が connected を示そう。$s < n$ ゆえ，$K = S_\varepsilon^{2n+1} \cap V^{(n)}$ の点 p で $p \notin \Sigma(f)$ なるものをとる。p において $V^{(n)}$ の top dim. stratum (i.e. non-singular stratum) と直交する complex line L をとると，$f|L : L \to \mathbb{C}$ は non-singular であり，これを利用して，$\varphi : S_\varepsilon^{2n+1} - K \to S^1$ の cross section $s : S^1 \to S_\varepsilon^{2n+1} - K$ をとることができる。従がって次の homotopy exact seq に於て φ_* は onto である：

$$\pi_1(S_\varepsilon^{2n+1}-K) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(S^1) \longrightarrow \pi_0(F) \longrightarrow \pi_1(S_\varepsilon^{2n+1}-K) \cong 0.$$

従がって，$\pi_0(F)=0$ を示すことができた。

3.2．前節により，$s=0, n-1, n$ の場合は示せたから，以後 $1 \leqq s \leqq n-2$ の場合について証明する。

Whitney の定理[4]によれば $V^{(n)}$ は W.S. set の構造をもつ。よって補題1により，$K=S_\varepsilon^{2n+1}\cap V^{(n)}$ もW.S. set となる。但し，$\varepsilon>0$ は充分小：$K=\bigcup_{X\in\mathcal{S}} X$．我々は，K の，$S_\varepsilon^{2n+1}$ のsub set としての tubular nbd system $\{T_X, \pi_X, \rho_X\}$ を考えることにする。§2 の記号はそのまま用いる。更に次の記号を追加する：$f:\partial T \to S^1$ による ∂T の $\mathbb{Z}$-covering を $\widetilde{\partial T}$ とする．また $f:\nabla T(X) \to S^1$ による $\nabla T(X)$ の $\mathbb{Z}$-covering を $\widetilde{\nabla T}(X)$ とする。勿論 $\widetilde{\partial T}=\bigcup_{X\in\mathcal{S}}\widetilde{\nabla T}(X)$．(Cf. 補題2.)．

$p:\widetilde{\nabla T}(X)\to\nabla T(X)$ を $\mathbb{Z}$-covering の projection．$j:\nabla T(X) \longrightarrow T(X)$ を inclusion とする。$p:\widetilde{\partial T}\to\partial T$, $j:\partial T\to T$ も同様．

補題4．我々は n に関する帰納法で定理1を示すのだが，帰納法の仮定を正しいとすれば，§2 補題3(1)の fiber bundle の fiber の $\mathbb{Z}$-covering は $n-s-1$ connected である。

この補題4は次の§で示す。この§では補題4を仮定した上で定理を示す。

補題5．$j\cdot p:\widetilde{\partial T}\to T$ は map として $n-s$-connected．すなわち，$\pi_i(j\circ p)=0$, $i\leqq n-s$．$(1\leqq s\leqq n-2,\ n\geqq 3.)$

証明. K の strata $\mathscr{S}$ をならべて $X_1, X_2, \cdots, X_r$ とする。但し各 X_i は connected かつ $X_i < X_j \Rightarrow i < j$ となるように。

$\partial\widetilde{T}_i = \bigcup_{\nu \le i} \hat{\partial}\widetilde{T}(\underline{X}_\nu)$, $T_i = \bigcup_{\nu \le i} T(\underline{X}_\nu)$ とおく. 自然数 l に関する induction で 1) $\pi_1(\partial\widetilde{T}_l) \xrightarrow{\sim} \pi_1(T_l)$, 2) $H_i(\partial\widetilde{T}_l) \longrightarrow H_i(T_l)$ は iso ($i \leqq n-s-1$), onto ($i \leqq n-s$) を示そう.

1). $\partial\widetilde{T}_l = \partial\widetilde{T}_{l-1} \cup \hat{\partial}\widetilde{T}(\underline{X}_l)$, $T_l = T_{l-1} \cup T(\underline{X}_l)$ である.

Van Kampen の定理によって

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \pi_1(\partial\widetilde{T}_l) \arrow[rrr, "h"] & & & \pi_1(T_l) & \\
\pi_1(\partial\widetilde{T}_{l-1}) \arrow[ur] \arrow[rrr, bend left, "a"] & & \pi_1(\hat{\partial}\widetilde{T}(\underline{X}_l)) \arrow[ul] \arrow[rrr, bend right, "b"'] & \pi_1(T_{l-1}) \arrow[ur] & & \pi_1(T(\underline{X}_l)) \arrow[ul] \\
 & \pi_1(\partial\widetilde{T}_l \cap \hat{\partial}\widetilde{T}(\underline{X}_l)) \arrow[ul] \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rrr, "c"] & & & \pi_1(T_{l-1} \cap T(\underline{X}_l)) \arrow[ul] \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

a が同型なことは l に関する induction から。b と c との同型は、それらが $n-s-1$ connected な fiber をもつ bundle と同じ homotopy type をもつ maps $\hat{\partial}\widetilde{T}(\underline{X}_l) \to T(\underline{X}_l) \simeq \underline{X}_l$, と $\partial\widetilde{T}_l \cap \hat{\partial}\widetilde{T}(\underline{X}_l) \longrightarrow T_{l-1} \cap T(\underline{X}_l) \simeq \partial\underline{X}_l$ とから導びかれ、補題5の仮定から $n-s-1 \geqq 1$ となるからである. こうして a, b, c, は同型となり h も同型となる。

2). $n-s-1$ - connected な fiber をもつ bundle に関する Serre の exact sequence 及び l に関する帰納法の仮定を次の diagram に応用する：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\to H_i(\partial\widetilde{T}_{l-1} \cap \hat{\partial}\widetilde{T}(\underline{X}_l)) \arrow[r] \arrow[d] & H_i(\partial\widetilde{T}_{l-1}) \oplus H_i(\hat{\partial}\widetilde{T}(\underline{X}_l)) \arrow[r] \arrow[d] & H_i(\partial\widetilde{T}_l) \to \arrow[d] \\
\to H_i(T_{l-1} \cap T(\underline{X}_l)) \arrow[r] & H_i(T_{l-1}) \oplus H_i(T(\underline{X}_l)) \arrow[r] & H_i(T_l) \to
\end{tikzcd}$$

(Mayer-Vietoris)

five lemma を使って(2)が示せる。$l=\Sigma$ とおけば結局，$\pi_1(\partial\tilde{T}) \cong \pi_1(T)$，$H_i(\partial\tilde{T}) \to H_i(T)$ は iso ($i \leqq n-s-1$)，onto ($i \leqq n-s$)．

ここで次の Milnor の定理[2]を思い出す．

補題6．$K = S_\varepsilon^{2n+1} \cap V^{(n)}$ は $n-2$-connected である。

いま，補題5では $n \geqq 3$ を仮定しているから，$\pi_1(K)=0$．ゆえ $\pi_1(T) \cong \pi_1(K) \cong 0$ となり，上に示したことから $\pi_1(\partial\tilde{T})=0$．故に J.H.C. Whitehead の定理により $\partial\tilde{T} \to T$ は $n-s$-connected．

補題5の証明終．

補題5の系(1)．$\pi_i(\partial\tilde{T})=0$　$i \leqq n-s-1$．である．

さて $\mathbb{C}$ の原点を中心とする充分小さな円周 S_δ^1 をとる。δ が充分小なら $f: S_\varepsilon^{2n+1}-K \longrightarrow \mathbb{C}-\{0\}$ は S_δ^1 に関して t-regular となり、そのひきもどし $M_\delta \subset S_\varepsilon^{2n+1}-K$ を考えることができる。M_δ は 2n-manifold である．$M_\delta \subset \mathrm{Int}\, T$ としてよい。K の S_ε^{2n+1} における tubular nbd system の各 disk bundle を充分細くとることにより，total space T' をつくると，

$$M_\delta \subset \mathrm{Int}(T-T')$$

とすることができる。また更に δ' を充分小にとると，$\partial T'$ を，M_δ と $M_{\delta'}$ の間の，S_ε^{2n+1} 内の cobordism W に含まれるようにすることができる。W は明らかに product であり，$T-\mathrm{Int}\,T'$ も product のことが示せる．(Cf. 加藤[1]．) 従がって，S_ε^{2n+1} の

中の、M_δ と ∂T との間の cobordism は "invertible cobordism" であり、従がって h-cobordism である。故に $M_\delta \simeq \partial T$. とくに

補題5の系(ii)　$\pi_i(\tilde{M}_\delta) = 0 \quad i \leq n-s-1$.

δ を充分小さくとれば、$S_\varepsilon^{2n+1} \cap f^{-1}(\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \delta\}) = F_\delta$ が Milnor-fiber F と同じ homotopy type をもつことが知られている。(cf. Milnor [2]). 更に Milnor [2] によれば

補題7：　$\pi_i(F_\delta, \partial F_\delta) = 0 \quad i \leq n-1$.

我々の定理1は次のように示される：

$\tilde{M}_\delta = \partial F_\delta \times \mathbb{R}$ に注意する。補題5の系(ii)より $\pi_i(\partial F_\delta) = 0$ $i \leq n-s-1$, よって補題7より $\pi_i(F) \cong \pi_i(F_\delta) = 0,\ i \leq n-s-1$.

定理1の証明終.

§4. 補題4の証明.

C_X を Tubular neighbourhood System の性質(3) (cf. §2) でとった compact set とする。$p \in C_X$ をとると、p の近傍で $T_X \to X$ は real analytic としてよい。$T_{X,p}$ なる fiber は、S_ε^{2n+1} の natural metric に関して X と直交している。X を含む、$V^{(m)}$ の stratum を $\mathfrak{X}$ とする。$\mathfrak{X}$ は $\mathbb{C}^{(n+1)}$ の complex submanifold である。$\mathbb{C}^{(n+1)}$ の Hermitian metric に関して、$p \in \mathfrak{X}$ に於て $\tau_p \mathfrak{X}$ に直交する $\mathbb{C}$-linear subspace L_p をとる。$\dim_{\mathbb{C}} L_p = (n+1-\dim \mathfrak{X})$ である。

補題8. p の近傍において，$\Sigma(f|L_p) = \Sigma(f) \cap L_p$ である.

証明：Curve selection lemma [2] によって，$f|L_p$ の critical value は p の近傍では 0 しかないことがわかり，p の近傍で $\Sigma(f|L_p) \subset V^{(n)} \cap L_p$ を知る．$\Sigma(f|L_p) \supset \Sigma(f) \cap L_p$ は明らかゆえ，p の近傍では $\Sigma(f|L_p) \cap R = \phi$ を示せばよい。ただし R は $R = V^{(n)} - \Sigma(f)$ である．もし $\Sigma(f|L_p) \cap R$ が p に収束する点列 $\{p_i\}$ を含むとすれば，$(\mathrm{grad}\, f)_{p_i} \neq 0$，$(\mathrm{grad}\, f)_{p_i} \perp L_p$ となる。但 $\mathrm{grad}\, f = \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z_1}}, \cdots, \overline{\frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}}\right)$．$\{p_i\}$ の部分列を適当に選んで，$(\mathrm{grad}\, f)_{p_i} \longrightarrow l$，$\tau_{p_i}(R) \longrightarrow \tau$ とできる。$p_i \in R$ ゆえ $(\mathrm{grad}\, f)_{p_i} \perp \tau_{p_i}(R)$ よって $l \perp \tau$．一方 $l \perp L_p$．ゆえ $l \in \tau_p(X)$．これは $\tau_p(X) \not\subset \tau$ を意味し，Whitney condition (a) に矛盾．ゆえ p の近傍で $\Sigma(f|L_p) \cap R = \phi$ が示せた．　Q.E.D.

補題8により，$\dim_{\mathbb{C}} \Sigma(f|L_p) = s + (n+1-\dim \mathfrak{X}) - (n+1) = s - \dim \mathfrak{X}$ となる。故に §3 の n に関する帰納法の仮定が正しければ，$f|L_p : L_p \to \mathbb{C}$ の Milnor fiber の connectivity は，$(\dim L_p - 1) - \dim_{\mathbb{C}} \Sigma(f|L_p) - 1 = (n - \dim \mathfrak{X}) - (s - \dim \mathfrak{X}) - 1 = n - s - 1$ -connected となる．

補題4を示すには，$f|L_p : L_p \to \mathbb{C}$ の Milnor fiber と，§2 の補題3(1) の fiber の $\mathbb{Z}$-covering が homotopy equivalence を言えばよい．

"Local bundle" at p.

点 $p \in C_x \subset X \subset K$ を上述のようにとる。p を通る real dim. $2(n+1-\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{X})$ の $\mathbb{R}$-linear subspace M と $T_p(\mathfrak{X})$ とのなす角をはかる目やすとして次の量 θ を導入する。

$$(1 \geq)\ \theta(M, T_p(\mathfrak{X})) = 1 - \max_{\substack{(v,w) \\ \in (M, T_p(\mathfrak{X}))}} \{ |(v, w)| / |v| \cdot |w| \}. \geq 0$$

$\theta(M, T_p(\mathfrak{X})) = 0 \iff M$ と $T_p(\mathfrak{X})$ は transverse でない。また $\theta(M, T_p(\mathfrak{X})) = 1 \iff M \perp T_p(\mathfrak{X})$ である。

M の中の p を中心とし半径 ε' の球 $S_{p,\varepsilon',M}$ をとる。$\delta > 0$ に対し $U_\delta = \{ M \in \mathrm{Grass}(2(n+1), 2(n+1-\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{X})) \mid \theta(M, T_p(\mathfrak{X})) > \delta \}$ とおく。$E = \{ (v, M) \mid M \in U_\delta,\ v \in S_{p,\varepsilon',M} - |\delta \mathfrak{X}| \}$, $\pi : E \to U_\delta$ を $\pi(v, M) = M$ と定義する。U_δ は Grass. の open set である。

<u>補題9</u> $\delta > 0$ に対し $\varepsilon' > 0$ を充分小に選べば、$\pi : E \to U_\delta$ は U_δ 上の fiber bundle の構造をもつ。

証明は Whitney conditions (a), (b), と Thom の isotopy lemma とを使ってなされる。詳細は省略する。

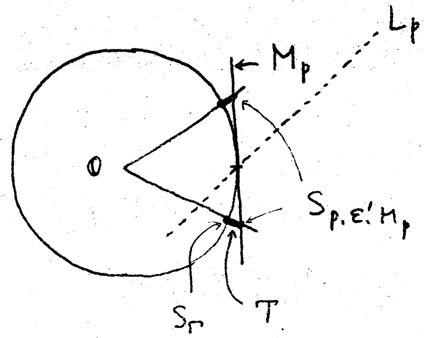
p に於て球面 S_ε^{2n+1} (原点中心, 半径 $\varepsilon > 0$, Milnor fiber の定義に現われたもの) に接し, $T_p(X)$ に直交する $\mathbb{R}$-linear space を M_p とする。$\dim_{\mathbb{R}} M_p = 2(n+1-\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{X}) = \dim_{\mathbb{R}} L_p$.

$\delta > 0$ を充分小にとれば $L_p, M_p \in U_\delta$ となることに注意する。
すると補題9により次を得る。

<u>補題</u> 10. $S_{p,\varepsilon',L_p} - |\delta \not\in| \cong S_{p,\varepsilon',M_p} - |\delta \not\in|$ (diffeo.)

$\mathbb{C}^{(n+1)}$ の原点0を頂点とする S_{p,ε',M_p} 上の cone Γ を考え，それと S_ε^{2n+1} の交わりを S_Γ とする。Γ 上 S_Γ と S_{p,ε',M_p} の間の部分を T とする。r を原点0からの距離関数とし，$r(S_{p,\varepsilon',M_p}) = r_0$, $r(S_\Gamma) = r_1$ とすれば，$r : T \longrightarrow [r_1, r_0]$ は線分上の fiber bundle である。更に

<u>補題</u> 11. $r : T - |\delta \not\in| \longrightarrow [r_1, r_0]$ も fiber bundle である。



補題11により $S_{p,\varepsilon',M_p} - |\delta \not\in| \cong S_\Gamma - |\delta \not\in|$. (diffeo.)
§2 補題(3)の(1)の bundle の fiber は $S_\Gamma - |\delta \not\in|$ と一致するとしてよい。(Tubular nbd system の性質 3))。よってその $\mathbb{Z}$-covering は $S_{p,\varepsilon',L_p} - |\delta \not\in|$ の $\mathbb{Z}$-covering に diffeo である。(補題10を使った)。$S_{p,\varepsilon',L_p} - |\delta \not\in|$ の $\mathbb{Z}$-covering は $f|L_p : L_p \to \mathbb{C}$

の Milnor fiber × $\mathbb{R}$ に diffeo ゆえ. 補題8の次に述べた注意によって $n-s-1$ -connected である。こうして補題4は完全に示されたことになる。 Q.E.D.

References

[1] 加藤十吉：解析的集合の初等位相幾何学（to appear in「数学」）

[2] J. Milnor : Singular points of complex hypersurfaces annals of Math. studies N° 61. (Princeton)

[3] J. Mather : Notes on topological stability (Lecture note. Harvard Univ. 1970.)

[4] H. Whitney : Local properties of analytic varieties Differential and Combinatorial Topology