

Title	ゆるやかに断面の変化するみぞの中の粘性流体の流れ (流体力学における混合境界値問題)
Author(s)	MATSUNOBU, YASOO
Citation	数理解析研究所講究録 (1978), 335: 14-32
Issue Date	1978-10
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/104206">http://hdl.handle.net/2433/104206</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

ゆるやかに断面の変化する  
みぞの中の粘性流体の流れ

慶大物理 松信八十男

§1 序 断面が一様である直管内の定常流は, Poiseuille 流に代表されるように, さわめて単純であり完全に理解されていると見てよい。これに反して, 断面が一様でない管の中の流れを解析的に調べることは非常に困難であり, 慣性の効果と正しく評価することは事実上不可能に近い。

本報告では, 壁面が中心軸に関して対称であり, しかも空間的にゆるやかに変化するが, その形状が任意に与えられた場合のみぞの中の2次元定常流を解析することを試みる。方法として注目すべき点は, 流れの諸量を適当な超球多項式(または Gegenbauer の多項式)を用いて展開することにある。2次元定常流の場合, この展開により, 対称条件, 境界条件, および流量が場所によらず一定であるという条件をはじめにすべて満足させることができる。以下, 断面変化が十分ゆるやかであるが, Reynolds 数が有限である管内流れを, この方

法によって決定する。

## §2. 解析の方法

みぞの断面は、たとえば図1に示すように $x$ 軸に関して対称であって、 $y = \pm Hh(kx)$  与えられるものとする。ここで $H$ は流路の半幅の代表値、 $k$ は断面が非一様である領域の特性的長さの逆数である。また $h(kx)$ は $x$ について任意回微分できる関数である。以下の解析では無次元パラメータ

$$\kappa = kH \quad (2.1)$$

を微小量と考える。 $\kappa \rightarrow 0$ の極限では流れは平面 Poiseuille 流に帰すものとする。

さて、変換  $\xi = kx, \quad \eta = y/Hh(kx) \quad (2.2)$

によって、空間座標 $(x, y)$ を無次元化しよう。そうすれば、流れの領域は $-1 \leq \eta \leq 1$ に写像される。これから

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\kappa}{H} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{h'}{h} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{Hh} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

となることを用いて、流体の Navier-Stokes

方程式を書きかえる

( ' は  $\xi$  微分を表わす):

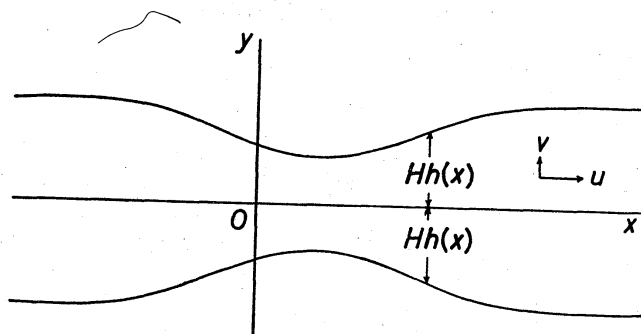


図1. 定義図。みぞの形は1例を示す。

$$\frac{\kappa}{h} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) = \frac{\nu}{h^2} \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \kappa^2 h^2 \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{h'}{h} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 \omega \right] \quad (2.4)$$

$$\omega = -\frac{1}{H^2 h^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \kappa^2 h^2 \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{h'}{h} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 \psi \right] \quad (2.5)$$

ただし、 $\psi$  は流れの関数、 $\omega$  は渦度である。境界条件として粘着および流量一定の条件

$$\eta = \pm 1 \quad \psi = \pm Q, \quad \partial \psi / \partial \eta = 0 \quad (2.6)$$

$$\text{および対称の条件} \quad \psi(\xi, -\eta) = -\psi(\xi, \eta) \quad (2.7)$$

を満足しなければならない。 $Q$  は流量の半分である。

これらの条件は、 $\psi$  をつぎのように超球多項式  $C_n^{\lambda}(\eta)$  で展開することにより、すべて都合よく満たされる：

$$\psi = -\frac{1}{3} HU \sum_{n=1}^{\infty} h(\xi) A_{2n}(\xi) C_{2n+1}^{-3/2}(\eta) \quad (2.8)$$

ここで  $U$  は代表的な速度である。このような展開は超球多項式の直交性のためつねに可能である。 $\eta = 1$  では

$$\psi(\xi, 1) = \frac{1}{3} HU h(\xi) A_2(\xi) = Q \quad (2.9)$$

$$\text{となり,} \quad A_2(\xi) = \frac{3Q}{HU} \frac{1}{h(\xi)}$$

となって、(2.8) の展開の1項はただちに決定できる。とくに  $U$  として、流量  $2Q$ 、幅  $2H$  の二次元 Poiseuille 流の中心速度をとれば、 $Q = 2HU/3$  となるので上式は簡単に

$$A_2(\xi) = 2/h(\xi) \quad (2.10)$$

と書くことができる。

式 (2.8) を  $\eta$  について微分すれば,

$$(d/d\eta) C_n^q(\eta) = 2q C_{n-1}^{q+1}(\eta)$$

の関係が成立するから\*

$$\partial\psi/\partial\eta = HU \sum_{n=1}^{\infty} h(\xi) A_{2n}(\xi) C_{2n}^{-1/2}(\eta)$$

が得られる。  $C_{2n}^{-1/2}(\eta)$  は  $\eta$  の偶関数であり、  $n \geq 2$  に対して、  
つねに  $C_{2n}^{-1/2}(\pm 1) = 0$  となるから、 (2.6) の後の条件も自動的に満たされる。 そればかりでなく、

$$u = \partial\psi/\partial y = U \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n}(\xi) C_{2n}^{-1/2}(\eta) \quad (2.11)$$

における展開の1項は、  $C_2^{-1/2}(\eta) = \frac{1}{2}(1-\eta^2)$  となること、すなわち2次元 Poiseuille の速度分布であることとを考慮すると、  
2項以下はそれに対する補正と見てよいことがわかる。

速度の  $y$  成分  $v$ 、および渦度  $\omega$  なども、超球多項式の諸公式を用いることにより以下のように求めることができる。  
結果をまとめて示すと、

$$v = xU \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n+1}(\xi) C_{2n+1}^{-1/2}(\eta) \quad (2.12)$$

$$\omega = \frac{U}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n}(\xi) C_{2n-1}^{1/2}(\eta) \quad (2.13)$$

$$\nabla^2 \omega = \frac{3U}{H^3} \sum_{n=1}^{\infty} N_{2n-1}(\xi) C_{2n-1}^{5/2}(\eta) \quad (2.14)$$

ただし、 
$$B_{2n+1}(\xi) = \frac{2nh'A_{2n} - hA_{2n}'}{4n-1} + \frac{(2n+1)h'A_{2n+2} + hA_{2n+2}'}{4n+3} \quad (2.15)$$

\*超球多項式に関する諸公式は、たとえば文献 1), 2) に参照。

$$\Omega_{2n}(\xi) = \frac{1}{h} (A_{2n} + \kappa^2 D_{2n}) \quad (2.16)$$

$$D_{2n}(\xi) = \frac{(2n-1)h'B_{2n-1} - hB'_{2n-1}}{4n-3} + \frac{2nh'B_{2n+1} + hB'_{2n+1}}{4n+1} \quad (2.17)$$

$$N_{2n-1}(\xi) = \frac{1}{h^2} \Omega_{2n+2}(\xi) + \kappa^2 \Sigma_{2n+2}(\xi) \quad (2.18)$$

$$\Sigma_{2n+2}(\xi) = \frac{h\Phi'_{2n+1} - (2n-1)h'\Phi_{2n+1}}{(4n+1)h} - \frac{h\Phi'_{2n+3} + (2n+4)h'\Phi_{2n+3}}{(4n+5)h} \quad (2.19)$$

$$\Phi_{2n+1}(\xi) = \frac{h\Omega'_{2n} - (2n-1)h'\Omega_{2n}}{(4n-1)h} - \frac{h\Omega'_{2n+2} + (2n+2)h'\Omega_{2n+2}}{(4n+3)h} \quad (2.20)$$

これらの関係式 (2.4) に代入する。このとき Reynolds 数  $R$  と

$$R = \frac{HU}{\nu} = \frac{3}{2} \frac{Q}{\nu} \quad (2.21)$$

によって定義すると,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} N_{2n-1} C_{2n-1}^{5/2}(\eta) &= \frac{1}{3} \kappa R \left[ \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Omega'_{2n} C_{2n-1}^{1/2}(\eta) \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} C_{2n}^{-1/2}(\eta) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3h} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} (hA_{2n})' C_{2n+1}^{-3/2}(\eta) \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n} C_{2n-2}^{3/2}(\eta) \right\} \right] \quad (2.22) \end{aligned}$$

が得られる。ただし, 右辺方 2 項で (2.10) が考慮されている。(2.22) の左辺は粘性項を, 右辺は慣性項を表わす。注目すべきことは,  $R$  は断面変化のゆるやかさを表わすパラメータ  $\kappa$  との積の形で現われている点である。このことから,  $R$  が十分大きくても,  $\kappa$  が適当に小さければ,  $\kappa R$  についての摂動近似が可能であることを意味する。

そこで,  $h$  以外の  $\xi$  の関数をすべて

$$F(\xi) = F^{(0)}(\xi) + \kappa R F^{(1)}(\xi) + (\kappa R)^2 F^{(2)}(\xi) + \dots \quad (2.23)$$

のように展開できるものと仮定しよう。そして、次数  $n$  が増すにつれて展開係数  $A_{2n}, \Omega_{2n}$  は十分速かに小さくなることを期待する。そうすれば、(2.22) の右辺にある各級数を適当に打ち切り、 $C_{2n-1}^{5/2}(\eta)$  を使って展開し直すことにより、係数間の関係式を導くことが可能となる。

### §3 非ゼロ近似的 (Stokes の解)

まず、 $R=0$  のときの解、すなわち Stokes 流を求めておこう。解くべき方程式は

$$N_{2n-1}^{(0)} = \frac{1}{h^2} \Omega_{2n+2}^{(0)} + \kappa^2 \Sigma_{2n+2}^{(0)} = 0 \quad (n \geq 1) \quad (3.1)$$

および (2.15) ~ (2.20) の対応する方程式である。  $\kappa$  が小さいとして

$$\left. \begin{aligned} A_2^{(0)} &= a_0^{(2,0)} \\ A_4^{(0)} &= \kappa^2 a_2^{(4,0)} + \kappa^4 a_4^{(4,0)} + \dots \\ A_6^{(0)} &= \kappa^4 a_4^{(6,0)} + \dots \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega_2^{(0)} &= \omega_0^{(2,0)} + \kappa^2 \omega_2^{(2,0)} + \kappa^4 \omega_4^{(2,0)} + \dots \\ \Omega_4^{(0)} &= \kappa^2 \omega_2^{(4,0)} + \kappa^4 \omega_4^{(4,0)} + \dots \\ \Omega_6^{(0)} &= \kappa^4 \omega_4^{(6,0)} + \dots \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

のように展開する (他の係数  $B_{2n+1}, D_{2n}, \dots$  はとも同様)。

そうすれば  $\kappa^2$  について低次の項から順次決定される。結果  
 は以下に示す:

$$\left. \begin{aligned} a_0^{(2,0)} &= \frac{2}{h}, & a_2^{(4,0)} &= \frac{4}{5} \left( h'' - 4 \frac{h'^2}{h} \right), \\ a_4^{(4,0)} &= \frac{2}{75} (h^2 h^{iv} - 12 h h' h''' - 15 h h''^2 + 6 h'^2 h'' + 72 h'^4/h) \\ a_4^{(6,0)} &= -\frac{2}{105} (h^2 h^{iv} - 16 h h' h''' - 12 h h''^2 + 120 h'^2 h'' - 120 h'^4/h) \end{aligned} \right\} (3.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_0^{(2,0)} &= \frac{2}{h^2}, & \omega_2^{(2,0)} &= \frac{2}{5} \left( \frac{h''}{h} + \frac{h'^2}{h^2} \right), & \omega_2^{(4,0)} &= \frac{2}{5} \left( \frac{h''}{h} - \frac{4h'^2}{h^2} \right) \\ \omega_4^{(2,0)} &= \frac{4}{175} (h h^{iv} - 2 h' h''' - 5 h''^2 - 34 h'^2 h''/h - 8 h'^4/h^2) \\ \omega_4^{(4,0)} &= -\frac{2}{225} (h h^{iv} + 8 h' h''' + 15 h''^2 - 24 h'^2 h''/h - 48 h'^4/h^2) \\ \omega_4^{(6,0)} &= a_4^{(6,0)}/3h \end{aligned} \right\} (3.5)$$

ここで  $h^{iv}$  は  $\xi$  についての 4 階微分を表わす。

とくに中心軸上 ( $\eta=0$ ) における軸速度および壁面 ( $\eta=1$ )  
 における渦度は

$$\frac{u(\xi, 0)}{U} = \frac{1}{h} - \frac{\kappa^2}{10} \left( h'' - 4 \frac{h'^2}{h} \right) - \frac{\kappa^4}{4200} (19 h^2 h^{iv} - 248 h h' h''' - 270 h h''^2 + 684 h'^2 h'' + 408 h'^4/h) + O(\kappa^6) \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{H}{2U} \omega(\xi, 1) &= \frac{1}{h^2} + \frac{\kappa^2}{5} \left( 2 \frac{h''}{h} - 3 \frac{h'^2}{h^2} \right) \\ &+ \frac{\kappa^4}{525} (2 h h^{iv} - 4 h' h''' - 45 h''^2 - 348 h'^2 h''/h + 264 h'^4/h^2) + O(\kappa^6) \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる。圧力勾配  $\partial p/\partial x$  は Stokes の運動方程式からつき  
 のように求まる:



$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\mu \frac{U}{H^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h} \Omega_{2n} C_{2n-2}^{3/2}(\eta) \quad (3.8)$$

これから、中心軸上の圧力勾配は

$$\begin{aligned} -\frac{H^2}{\mu U} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{\eta=0} &= \frac{2}{h^3} - \frac{\kappa^2}{5} \left( \frac{h''}{h^2} - 14 \frac{h'^2}{h^3} \right) \\ &+ \frac{\kappa^4}{700} \left( 17h^{iv} + 176 \frac{h'h'''}{h} + 160 \frac{h''^2}{h} - 1768 \frac{h'^2 h''}{h^2} - 424 \frac{h'^4}{h^3} \right) \\ &+ O(\kappa^6) \end{aligned} \quad (3.9)$$

となる。圧力そのものの値は (3.9) を数値積分すれば得られる。注意すべき点は、管断面にわたって圧力が一定と見なせるのは (3.8) の展開式の第1項まで、すなわち  $O(\kappa)$  の範囲までである。

上記の  $\kappa^2$  展開による Stokes の解の精度を見るために、 $h = \xi$  で表わされるくさび型領域内の発散流に対する Stokes の厳密解<sup>3)</sup>と比較してみよう。くさびの半頂角を  $\theta_0$  とすると、 $\kappa = \tan \theta_0$  である。図2は中心軸上の速度を、図3は壁面上の速度を明示したもので、実線は Stokes の厳密解、破線は  $\kappa^2$  展開の第2次近似解、鎖線は第0次近似解、すなわち滑 Poiseuille の解を表わす。これらの図から、第2次近似解は  $\theta_0 = 45^\circ$  のあたり ( $\kappa \approx 1$ ) までかなりの精度を保っているが、第0次近似解はそれよりずっと小さい  $\theta_0$  の値で厳密解からはずれ始めることがわかる。

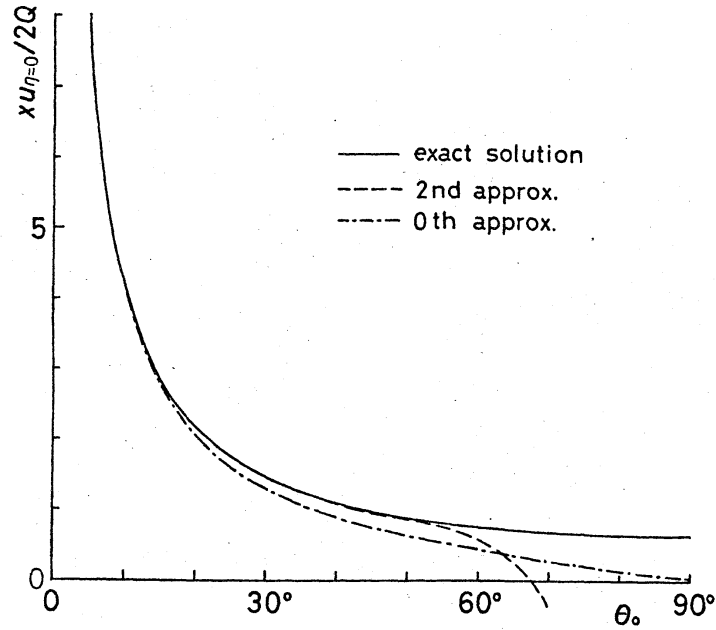


図2 くさび型領域内の Stokes 流の中心速度。x は頂点から測った距離。

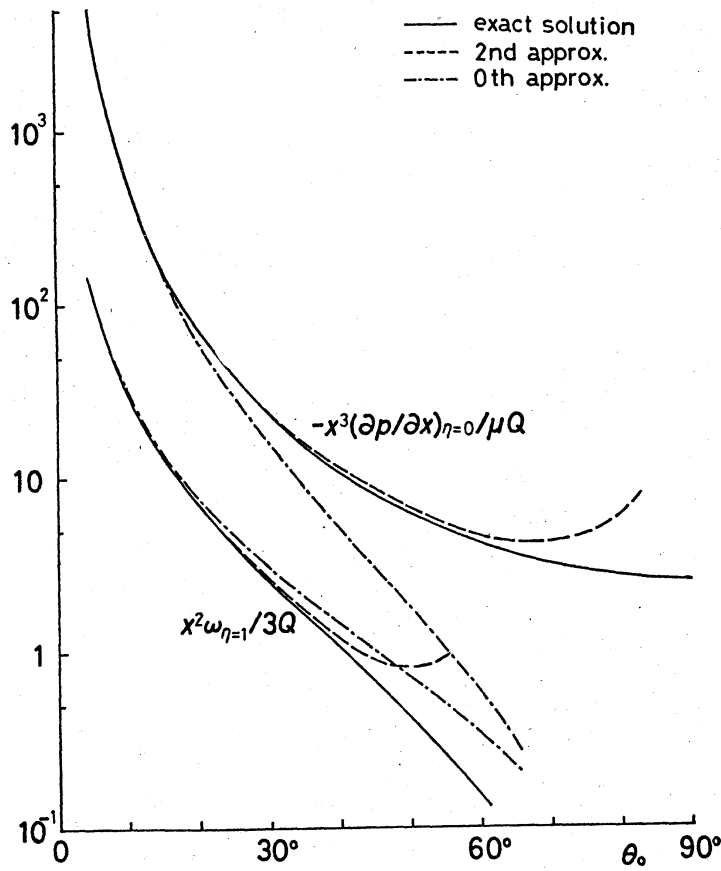


図3. くさび型領域内の Stokes 流に対する中心軸上の圧力勾配と壁面上の渦度。

もう一つの例として、壁面の形状が

$$h(\xi) = 1 - \beta e^{-\xi^2/2} \quad (3.10)$$

で与えられる場合を考える。  $\beta$  は定数で、  $0 < \beta < 1$  はくびれのある溝を、  $\beta < 0$  は部分的に膨みのある溝を表わす。簡単のため、前者を狭窄管、後者を膨脹管とよぶことにする。

(3.10) が  $\psi$  の微係数と (3.4) が  $\psi$  (3.5) に入れ、溝のくびれおよび膨みの効果を評価する。  $\beta = 0.5$  の狭窄管に対する結果を図4に示す。この場合、 $\epsilon$  の近似が十分大きく、また狭窄部の効果は  $|\xi| \geq 3$  以上にはほとんど伝わらないことがわかる。事実、 $\epsilon$  の近似と  $\epsilon^2$  近似の間には、中心軸上の速度と壁面上の渦度に関する限り、それ程目立った差はない(図5参照)。

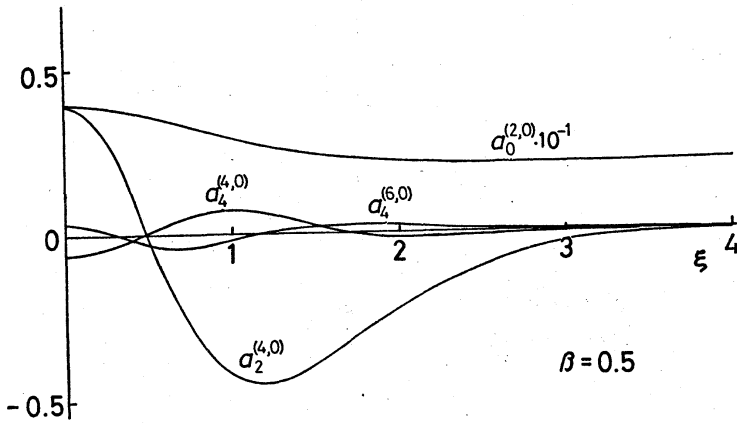
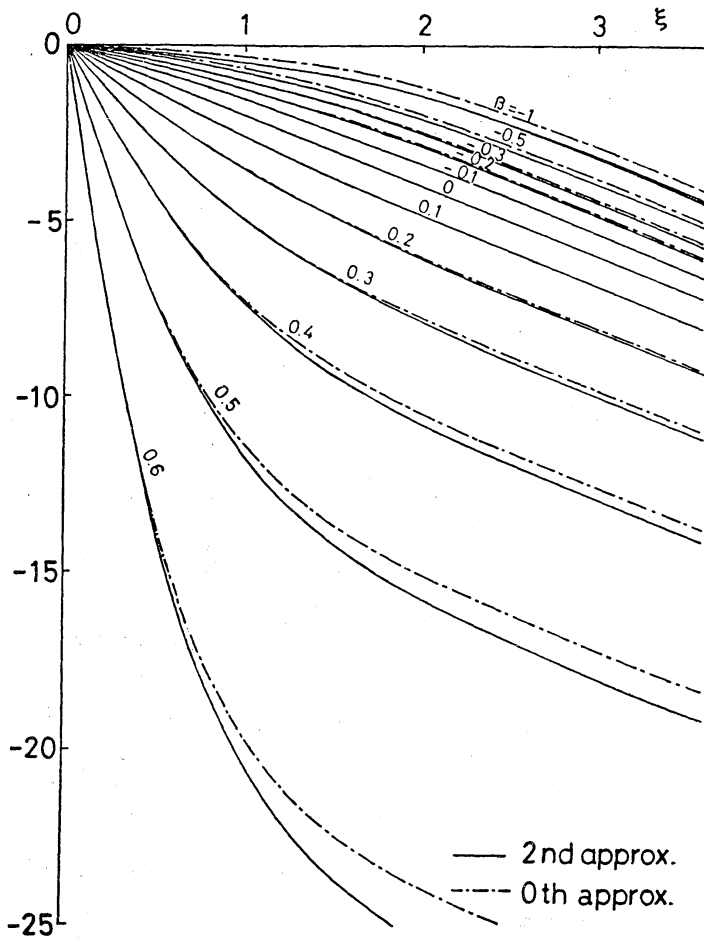


図4. 狭窄管の中の Stokes 流の解。  $\beta = 0.5$  のときの  $\epsilon^2$  展開の係数を示す。  $a_0^{(2,0)} = 2/h$  は軸方向に  $1/10$  に縮めてある。

する結果を図4に示す。この場合、 $\epsilon$  の近似が十分大きく、また狭窄部の効果は  $|\xi| \geq 3$  以上にはほとんど伝わらないことがわかる。事実、 $\epsilon$  の近似と  $\epsilon^2$  近似の間には、中心軸上の速度と壁面上の渦度に関する限り、それ程目立った差はない(図5参照)。

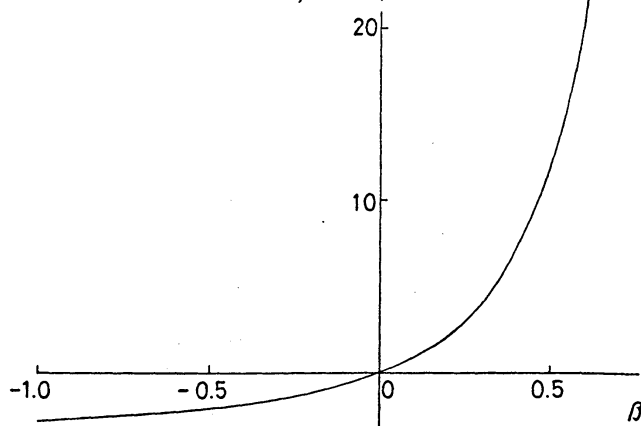
図5は、軸上の圧力降下と (3.9) と数値積分して求めた結果である。縦軸は  $(\rho H^2 / \mu U) p(\xi, 0)$  であり、 $\xi = 0$  で  $p = 0$  とするよう積分定数を選んだ。この図から、局所的に狭窄



また膨張部が存在するために生じる余分の圧力損失を  $\beta$  の関数として求めることができる。それを図13に示す。この付加的圧力損失は膨張管 ( $\beta < 0$ ) では  $\beta$  の変化に対して鈍感であるが、狭窄管 ( $\beta > 0$ ) では  $\beta$  の増加とともに急速に増加することになる。

図5. 狭窄流または膨張流における中心軸上の圧力降下  $(kH^2/\mu U) p(\xi, 0)$ .  $\xi = 0$  で  $p = 0$  としてある。

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} [2\xi - \frac{kH^2}{\mu U} p_{\eta=0}]$$



← 図6. 同じく狭窄度  $\beta$  に対する付加的圧力損失の変化。  $\beta < 0$  は膨張流に対応する。

## §4. Reynolds 数の大きいときの漸近解

前節までの結果では,  $R=0$  の Stokes 流をくわしく議論した。そして超球多項式による展開が, 任意に与えられた境界壁をもつ 2次元流の解析に対して有効であることを知った。

この節では, 粘性の効果を加わったときの溝の中の流れを調べてみよう。

流れの量をすべて (2.23) のように  $\varepsilon = \kappa R$  のべき級数に展開し, (2.22) の  $\varepsilon$  展開の式を逐次に解いてゆけば望みは達せられる。その方法は前節のと同質的に異なることはないが, 計算は飛躍的に面倒となる。そこで, 本節では  $\kappa \ll 1$  であるとして  $O(\kappa^2)$  を無視するが,  $\varepsilon$  が 0 ではない有限な値にとどまるような十分大きな Reynolds 数の流れを考えよう。

さて,  $\kappa \equiv 0$  のとき, (2.16) と (2.18) から

$$A_{2n} = h\Omega_{2n}, \quad N_{2n-1} = \Omega_{2n+2}/h^2 \quad (4.1)$$

を得る。とくに (2.10) から  $A_2 = 2/h$  であるから  $\Omega_2 = 2/h^2$  である。さらに, 簡単のため

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} C_{2n}^{-1/2}(\eta) &\equiv A_2 C_2^{-1/2}(\eta) = (1-\eta^2)/h \\ \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n} C_{2n-2}^{3/2} &\equiv \Omega_2 = 2/h^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

を仮定する。このような仮定の当否は結果から判断されるであろう。

これらの関係を (2.22) に入れ, 両辺に  $h^2$  を乗ずると,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n+2} C_{2n-1}^{5/2}(\eta) = \varepsilon \left[ \frac{h}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n}' \cdot (1-\eta^2) C_{2n-1}^{1/2}(\eta) + \frac{2}{9h} \sum_{n=2}^{\infty} (h^2 \Omega_{2n})' C_{2n+1}^{-3/2}(\eta) \right] \quad (4.3)$$

が得られる。\$(1-\eta^2)C\_{2n-1}^{1/2}\$, \$C\_{2n+1}^{-3/2}\$ は超球多項式の降階化式を用いれば \$C\_{2m+1}^{5/2}(\eta)\$ で表わすことができるので、これを(4.3)に入れ、\$C\_{2n-1}^{5/2}\$ の係数を等しいと置くと、

$$\Omega_4 = \varepsilon h \left[ \frac{2}{45} \Omega_2' - \frac{2}{495} \left\{ 9\Omega_4' - \frac{2}{h^2} (h^2 \Omega_4)' \right\} + \frac{2}{6435} \left\{ 45\Omega_6' - \frac{4}{h^2} (h^2 \Omega_6)' \right\} + \dots \right]$$

$$\Omega_6 = \varepsilon h \left[ -\frac{2}{315} \Omega_2' + \frac{2}{4095} \left\{ 27\Omega_4' - \frac{4}{h^2} (h^2 \Omega_4)' \right\} - \frac{2}{4095} \left\{ 27\Omega_6' - \frac{2}{h^2} (h^2 \Omega_6)' \right\} + \dots \right]$$

.....

となる。初項 \$\Omega\_2\$ は \$\varepsilon^0\$ の \$\eta\$-\$\eta\$-の既知関数であるから、上式から逐次に \$\Omega\_4, \Omega\_6, \dots\$ と決定することができる。\$O(\varepsilon^2)\$

までの結果は

$$\Omega_4 = -\frac{8\varepsilon}{45} \frac{h'}{h^2} + \frac{32\varepsilon^2}{675675} \left( 113 \frac{h''}{h} - 288 \frac{h'^2}{h^2} \right) - \dots \quad (4.4)$$

$$\Omega_6 = \frac{8\varepsilon}{315} \frac{h'}{h^2} - \frac{32\varepsilon^2}{429975} \left( 31 \frac{h''}{h} - 72 \frac{h'^2}{h^2} \right) + \dots \quad (4.5)$$

$$\Omega_8 = \frac{32\varepsilon^2}{2297295} \left( 36 \frac{h''}{h} - 79 \frac{h'^2}{h^2} \right) - \dots \quad (4.6)$$

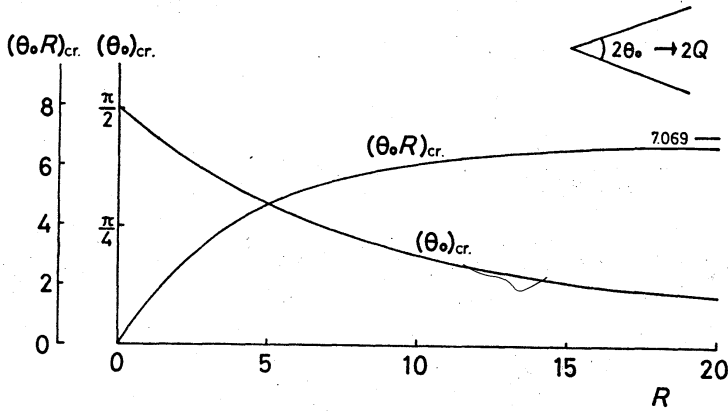
$$\Omega_{10} = \frac{-32\varepsilon^2}{11486475} \left( 10 \frac{h''}{h} - 21 \frac{h'^2}{h^2} \right) + \dots \quad (4.7)$$

### §5. 剥離の生ずる条件

前述の結果を用いて、壁面で流れが剥離する条件および剥

離点の位置を求めることが出来る。この種の研究はかなり古く、1910年の Blasius<sup>4)</sup>まで遡ることが出来る。Blasiusは境界の形を指数曲線で表わし、それを1次曲線で近似して逆流の生ずる  $\kappa R$  の臨界値を13.1と評価した。指数曲線といっても、実質的には直線壁で囲まれたくさび型の発散流と同じである。

このくさび型の2次元発散流(または収束流)の研究は、その後まもなく Jeffrey (1915)<sup>5)</sup> および Hamel (1917)<sup>6)</sup> によって Navier-Stokes 方程式が厳密に解かれたことにより、活発になった。くさびの半頂角を前と同じく  $\theta_0$  とすると、逆流が生ずるときの  $\theta_0 R$  の臨界値は図7に示すように、 $R \rightarrow \infty$  で7.069となる\*。



Blasiusの求めた値はこれに比べて大きすぎる。

図7. くさび型の発散流で逆流が生ずるための  $\theta_0$  および  $\theta_0 R$  の臨界値.\*  $\theta_0 > (\theta_0)_{cr}$  で逆流が生じる。

\* 図7 およびこの値は、Rosenhead (1963, p.144)<sup>7)</sup>の解説を参考にして筆者が Jeffrey-Hamel の厳密解から計算したおしりものである。

その後, Abramowitz (1949)<sup>8)</sup> は Blasius の方法を改良して, 逆流の生ずる  $\varepsilon$  の漸近値を 9.24 と求めた。Blasius は  $O(\varepsilon)$  まで考慮したのに対し, Abramowitz の値は  $O(\varepsilon^2)$  の項まで含めた結果である。しかし, これらの研究は直線的な発散流を対象としているので, 剥離点の位置を決定する目的にそぐわない。

さて, 境界の形が任意であるとして剥離の有無を調べるには, 壁面温度の符号が変化するところ, すなわち, (2.13)より

$$\omega(\xi, 1) = \frac{U}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n}(\xi) C_{2n-1}^{1/2}(1) = \frac{U}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n}(\xi) = 0 \quad (5.1)$$

となる  $\xi$  の値  $\xi_s$  が存在するかどうかを調べればよい。前節の結果 (4.4) ~ (4.7), および同様にして求めた  $O(\varepsilon^3)$  の結果を (5.1) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{H}{2U} h^2 \omega(\xi, 1) &= 1 - \frac{8\varepsilon}{105} h' + \frac{16\varepsilon^2}{363825} (40hh'' - 106h'^2) \\ &\quad - \frac{128\varepsilon^3}{165540375} (221h^2h''' - 1474hh'h'' + 1464h'^3) = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

とくに,  $h = \xi$  の小さな型発散流では

$$1 - \frac{8\varepsilon}{105} - \frac{1696}{363825} \varepsilon^2 - \frac{124928}{165540375} \varepsilon^3 = 0 \quad (5.3)$$

となる。  $O(\varepsilon^2)$  を無視すると  $\varepsilon = 105/8 \approx 13.1$  となり, Blasius の結果となり,  $O(\varepsilon^3)$  を無視すると,  $\varepsilon = 8.600$  となり, これは Abramowitz の結果 9.24 よりも厳密な値 7.069 に近い。さらに  $O(\varepsilon^3)$  まで考慮すると,  $\varepsilon = 6.918$  となり, 近似の精度はさ



らに改善されることわかる。

以下 (5.2) を用いて 2, 3 の例につき剥離または再付着の有無を調べてみよう。まず, §3 で論じた狭窄 (または膨張) 部のあるみぞ, すなわち (3.10) と考えよう。図 8 は  $\beta = 0.5$ ,  $\varepsilon = 5, 10$  に対する壁面渦度  $(H/2U)\omega(\xi, 1)$  と  $\xi$  の関係を示す。

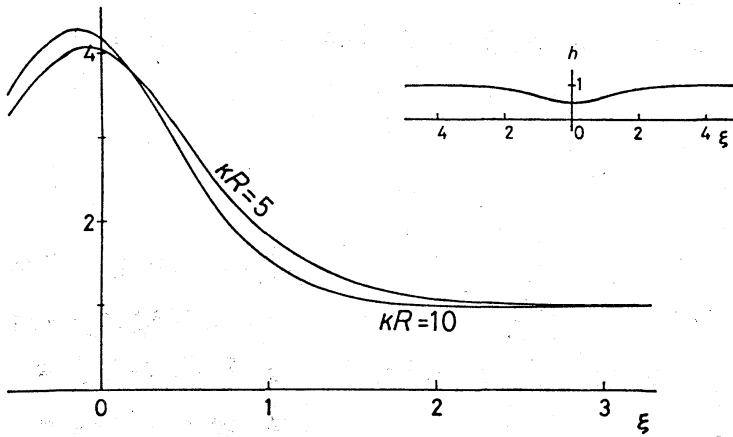


図 8.  $\beta = 0.5$  の狭窄流に対する壁面渦度分布。挿入図はみぞの上半分の形を示す。

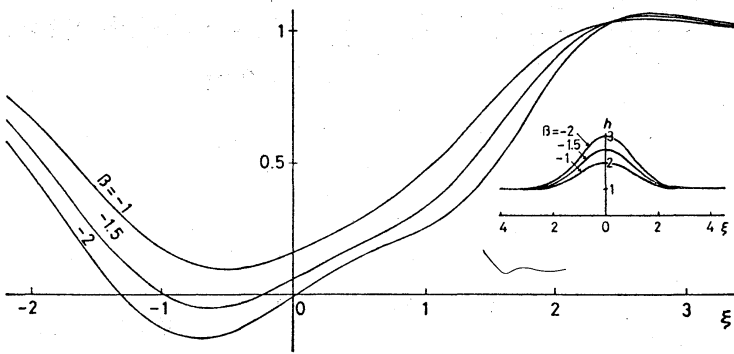


図 9.  $\beta = -1, -1.5, -2$ ;  $\kappa R = 10$  の膨張流に対する壁面渦度分布。 $\beta = -1.5, -2$  で剥離と再付着が生ずる。

この場合,  $\varepsilon = \kappa R = 10$  程度では逆流は全く起こりそうもない。狭窄部と過ぎたあたり ( $\xi \approx 1.5$ ) で無限遠における値 (=1) より幾分小さくなる程度である。Stokes 流の場合と著しく異なるのは, 壁面渦度が最大になる位置が中心 ( $\xi = 0$ ) より上流側に寄ることである。これらの傾向は  $\beta$  を増してもそれほど変

化しない。

ところが、図9が示すように、 $\beta < 0$  の膨張管では、 $|\beta|$  がある値以上になると剥離と再付着が生じる。すなわち、局所的な逆流領域が現われる。また、膨張部の終わりのあたりで、渦度は無限遠における値よりも幾分増加すること、および、対称性が図8よりもさらに大きく破れることに注目する必要がある。

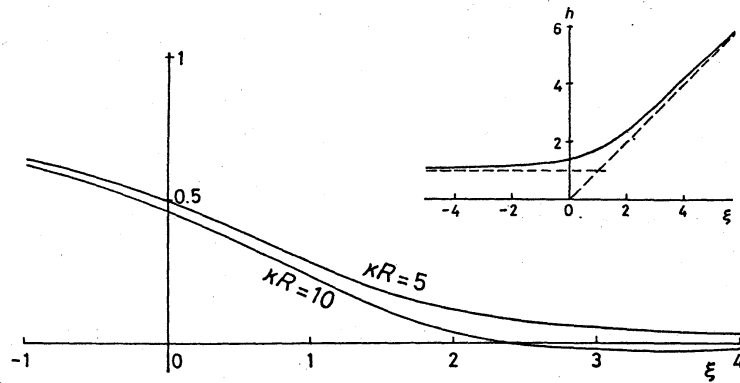


図10. 双曲型の壁面をともつ発散流に対する壁面渦度分布。剥離点が1つだけ存在する。挿入図の破線は漸近線である。

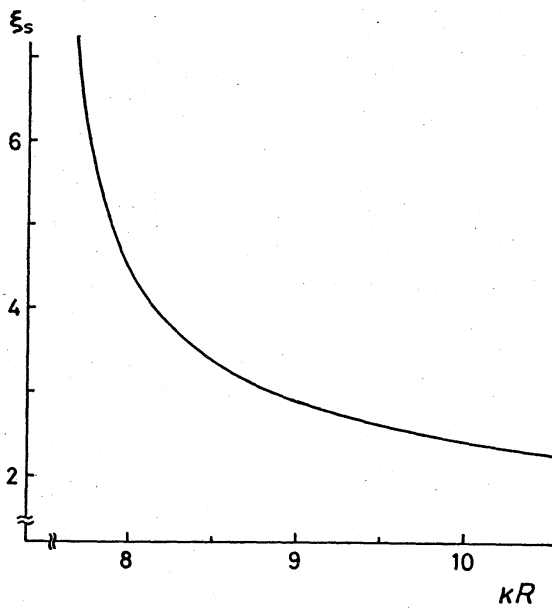


図11. 図10の流れに対する剥離点の位置  $\xi_s$  と  $KR$  との関係。

もう一つの例として曲線壁で囲まれた発散流を考えよう。

境界の形は、双曲線

$$h(\xi) = \frac{1}{2} [\sqrt{\xi^2 - 2\xi + 3} + \xi + 1]$$

で与えられるものとする。結果は図 10 に示される。壁面渦度は下流にゆくにつれて単調に減少し、ある点  $\xi_s$  で剥離を生じる。 $\xi_s$  は  $R$  の増加とともに上流側に移動することから図 11 からわかる。

本報告では、 $R=0$ ,  $\kappa \neq 0$  の Stokes の極限の解と、 $\kappa=0$  で  $\kappa R \neq 0$  の漸近解の両極端について、<sup>その中の</sup> 2次元定常流を議論した。実際にはその中間の状態について議論しなければならぬことの方が多いためであろうが、壁面の非一様性が流れにおよぼす効果の、およその傾向を知るにはこの両極端の解析で十分であろう。

解析の手段として超球多項式による展開を利用したが、これは 2次元定常流に対しては有効である。なぜなら、初めに対称条件、すべりなしの条件、流量一定の条件をすべて都合よく考慮することができ、しかも Poiseuille の解からのずれを摂動近似によって逐次に決定することが可能だからである。

本研究を行うに当たって、慶応義塾大学川口老年教授に貴重な助言を頂いた。また、昭和 52 年度文部省科学研究費（一般

研究 B および総合研究 A) から資金の援助を受けた。ここに感謝の意を表す。また、口頭発表の機会を与えて下さった京都大学数理解析研究所にも御礼申し上げます。

### 文 献

- 1) Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (eds.) (1972). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publ. Inc., N. Y.
- 2) 森口・宇田川・一松 (1964). 数学公式 III, 岩波全書.
- 3) 今井 功 (1973). 流体力学, 前編, 裳華房, p. 44.
- 4) Blasius, H. (1910). *Zeit für Math. u. Phys.* 58, 225.
- 5) Jeffrey, G. B. (1915). *Phil. Mag.* (6), 29, 455.
- 6) Hamel, G. (1917). *Jber. dtsh. Matver.* 25, 34.
- 7) Rosenhead, L. (ed.) (1963). *Laminar Boundary Layers*, Oxford Univ. Press, Oxford.
- 8) Abramowitz, M. (1949). *J. Math. Phys.* 28, 1.