

Title	準周期的非線形振動を解く Galerkin法 (数値計算のアルゴリズムの研究)
Author(s)	三井, 斌友
Citation	数理解析研究所講究録 (1977), 310: 57-71
Issue Date	1977-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/103885
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

準周期的非線形振動を解く GALERKIN 法

京大 数理研 三井 誠友

§1. 序

周期的非線形微分方程式の同期解を近似する GALERKIN-URABE の方法は、この方面の数値解析で大きな成功を収めた([2])。ここでは上記の方法を準周期的(quasiperiodic)な場合に拡張することを試みる。

周期 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ の準周期函数 $f(t)$ とは、或る連続函数 $f_0(u_1, u_2, \dots, u_m)$ が存在して、変数 u_1, u_2, \dots, u_m について各々周期 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ の周期函数であり、

$$(1.1) \quad f(t) = f_0(t, t, \dots, t)$$

が成り立つことである。ここで、 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ は正、かつその逆数は rationally linearly independent と仮定してよい。

周期 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ の (ベクトル値) 準周期的 (線形) 微分作用素 L とは、周期 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ の準周期行列 $A(t)$ によって

$$(1.2) \quad Lx = \frac{dx}{dt} - A(t)x$$

とあらわされるものをいう。準周期の概念は概同期の概念に

含まれることに注意し, 同じように概周期的微分作用素

$$(1.3) \quad \mathcal{L}y = \frac{dy}{dt} - \mathcal{A}(t)y$$

を考える。\$\mathcal{L}\$は, 方程式

$$(1.4) \quad \mathcal{L}y = \psi(t)$$

が任意の概周期函数 \$\psi(t)\$ に対して, 少なくとも一つの有界な解をもつとき regular という。

Proposition 1. ([1]) \$\mathcal{L}\$ が regular である必要十分条件は, 正方形行列 \$P\$ の次の性質をみたすものが存在することである。

$$(i) \quad P^2 = P,$$

$$(ii) \quad \|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\| \leq C e^{-\sigma(t-s)} \quad \text{for } t \geq s,$$

$$(iii) \quad \|\Phi(t)(E-P)\Phi^{-1}(s)\| \leq C e^{-\sigma(s-t)} \quad \text{for } t \leq s$$

ここで \$\Phi(t)\$ は齊次方程式

$$(1.5) \quad \mathcal{L}y = 0$$

の解で \$\Phi(0) = E\$ をみたすもの (以下: のような行列を *matrizant* と呼ぶ), \$C\$ と \$\sigma\$ は正定数である。

Proposition 2. ([3]) (1.2) で定義される準周期的微分作用素が, 概周期的微分作用素として regular ならば, 方程式

$$(1.6) \quad \mathcal{L}x = f(t)$$

は, 周期 \$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\$ の任意の準周期函数 \$f(t)\$ に対して, 同じ周期の唯一の準周期解 \$x = x(t)\$ をもち, \$x\$ の解は

$$(1.7) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f(s) ds$$

と表わされる。但

$$(1.8) \quad G(t, \Delta) = \begin{cases} \Phi(t)P\Phi^{-1}(\Delta) & \text{for } t \geq \Delta, \\ -\Phi(t)(E-P)\Phi^{-1}(\Delta) & \text{for } t \leq \Delta. \end{cases}$$

この函数 $G(t, \Delta)$ は L に対する GREEN 函数と呼ばれ、

$$(1.9) \quad \|G(t, \Delta)\| \leq C e^{-\sigma|t-\Delta|}$$

をみたす。上の Proposition を用いて、非線形方程式に対する近似定理がえられる。

Theorem (C3) 非線形方程式

$$(1.10) \quad \frac{dx}{dt} = X(t, x)$$

を考える。ここで x, X はベクトル、 $X(t, x)$ は t について周期 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ の準周期函数、 x 空間の領域 \mathcal{D} において x について連続的微分可能とする。

周期 $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m$ の準周期函数 $x_0(t)$ で

$$(1.11) \quad \begin{cases} x_0(t) \in \mathcal{D} \\ \left\| \frac{dx_0(t)}{dt} - X[t, x_0(t)] \right\| \leq r \end{cases} \quad \text{for all } t$$

をみたすものが存在するとする。更に定数 $\delta > 0$ と $0 < \kappa < 1$ および準周期行列 $A(t)$ があって、次の性質をみたすとする。

(i) 準周期的作用素

$$Ly = \frac{dy}{dt} - A(t)y$$

は概周期的作用素として regular.

$$(ii) \quad \mathcal{D}_\delta \equiv \{x; \|x - x_0(t)\| \leq \delta \text{ for some } t\} \subset \mathcal{D},$$

$$\begin{cases} \|\Psi(t, x) - A(t)\| \leq \frac{\kappa}{M} & \text{whenever } \|x - x_0(t)\| \leq \delta, \\ \frac{M\kappa}{1-\kappa} \leq \delta. \end{cases}$$

ここで $\Psi(t, x)$ は $X(t, x)$ の x に関する Jacobian 行列であり, M は (1.9) 式にいう C と σ によつて

$$(1.12) \quad M = 2C/\sigma.$$

すると, 方程式 (1.10) は周期 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ の準周期解 $x = \hat{x}(t)$ をもち

$$(1.13) \quad \|x_0(t) - \hat{x}(t)\| \leq \frac{M\kappa}{1-\kappa}$$

がなりたつ。えして $\hat{x}(t)$ に対しては, 作用素

$$(1.14) \quad \hat{L}y = \frac{dy}{dt} - \Psi[t, \hat{x}(t)]y$$

が概周期作用素として regular であり, また (1.10) は D_S の内では他に解をもたないという意味で $\hat{x}(t)$ は孤立解である。

§2. 2階線形方程式.

以下では準周期函数の同期は ω_1 と ω_2 のみである場合に限つて考える。 ω_1/ω_2 は非有理数である。

準周期的微分方程式

$$(2.1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + \nu^2 x = a \cos \nu_1 t + b \cos \nu_2 t$$

を考える。ここで ν, μ は定数で, $\nu > 0, 0 < |\mu| < \nu$, また $\nu_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}, \nu_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$. (2.1) をベクトルの形に書き直すと

$$(2.2) \quad \frac{dx}{dt} - Ax = \mathcal{P}(t)$$

但 $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^2 & -2\mu \end{bmatrix}$, $\varphi(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a \cos \nu_1 t + b \cos \nu_2 t \end{bmatrix}$.

$$(2.3) \quad Lx = \frac{dx}{dt} - Ax$$

とすれば, L による齊次方程式の matrizant は簡単に分る.

$$(2.4) \quad \Phi(t) = e^{-\mu t} \begin{bmatrix} \cos \theta t + \frac{\mu}{\theta} \sin \theta t & \frac{1}{\theta} \sin \theta t \\ -\frac{\nu^2}{\theta} \sin \theta t & \cos \theta t - \frac{\mu}{\theta} \sin \theta t \end{bmatrix}$$

但 $\theta = \sqrt{\nu^2 - \mu^2}$. ベクトルと行列のノルムを

$$\|V\| = \max_i |v_i| \quad \text{for } V = (v_i)$$

$$\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}| \quad \text{for } A = (a_{ij})$$

とすれば

$$(2.5) \quad \|\Phi(t)\| \leq C e^{-\mu t}$$

$$\text{但 } C = \frac{\nu+1}{\theta} \cdot \max(1, \nu)$$

がなりたつ. 従って

Proposition 3. $0 < |\mu| < \nu$ ならば, L は周期 ω_1, ω_2 の準周期

的作用素とし L 2 regular であり, GREEN 函数は

$$\mu > 0 \text{ のときは } G(t, \Delta) = \begin{cases} \Phi(t-\Delta) & \text{for } t \geq \Delta \\ 0 & \text{for } t < \Delta \end{cases},$$

$$\mu < 0 \text{ のときは } G(t, \Delta) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \geq \Delta \\ -\Phi(t-\Delta) & \text{for } t < \Delta \end{cases}$$

によつてえられ, 結局 (2.1) の準周期解は

$$(2.6) \quad x(t) = \frac{a}{(\nu^2 - \nu_1^2)^2 + 4\mu^2 \nu_1^2} [(\nu^2 - \nu_1^2) \cos \nu_1 t + 2\mu \nu_1 \sin \nu_1 t] \\ + \frac{b}{(\nu^2 - \nu_2^2)^2 + 4\mu^2 \nu_2^2} [(\nu^2 - \nu_2^2) \cos \nu_2 t + 2\mu \nu_2 \sin \nu_2 t]$$

となる。

§3. DUFFING 型方程式

3.1 この節では準周期的強制項をもつ DUFFING 型の方程式

$$(3.1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\sigma \frac{dx}{dt} + \nu^2 x = \varepsilon x^3 + a \cos \omega_1 t + b \cos \omega_2 t$$

を考える。但し $0 < \sigma < \nu$, ε は正のパラメータ, $\nu_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, $\nu_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$.

(3.1) はベクトル形

$$(3.2) \quad \frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon \zeta(x) + \varphi(t)$$

$$\text{但し } x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^2 & -2\sigma \end{bmatrix}, \zeta(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x^3 \end{bmatrix}, \varphi(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a \cos \omega_1 t + b \cos \omega_2 t \end{bmatrix}$$

にして考えれば, 前節の結果から

$$Ly = \frac{dy}{dt} - Ay$$

は regular である, 従って, §1 の Theorem を用いれば ε が十分

小さければ $x = x_0(t) = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{bmatrix}$,

$$(3.3) \quad x_0(t) = \frac{a}{(\nu^2 - \nu_1^2) + 4\sigma^2 \nu_1^2} [(\nu^2 - \nu_1^2) \cos \nu_1 t + 2\sigma \nu_1 \sin \nu_1 t] \\ + \frac{b}{(\nu^2 - \nu_2^2) + 4\sigma^2 \nu_2^2} [(\nu^2 - \nu_2^2) \cos \nu_2 t + 2\sigma \nu_2 \sin \nu_2 t]$$

の近傍に真の準周期解が存在する ([3]).

3.2 GALERKIN scheme.

準周期性の定義から, 対応する二重周期函数と偏微分方程式を導入する。すなわち

$$(3.4) \quad D\tilde{x} = A\tilde{x} + \tilde{\varphi}(u_1, u_2) + \varepsilon \tilde{\zeta}(\tilde{x})$$

$$\text{但し } D = \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2}, \tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}(u_1, u_2) \\ \tilde{y}(u_1, u_2) \end{bmatrix}, \tilde{\varphi}(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ a \cos \nu_1 u_1 + b \cos \nu_2 u_2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\zeta}(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{x}^3 \end{bmatrix}.$$

(3.4) に u_1 について周期 ω_1 , u_2 について周期 ω_2 の二重周期解 \tilde{x}

$= \tilde{x}(u_1, u_2)$ が存在したとすれば, $x(t) = \tilde{x}(t, t)$ は (3.1) の準周期解である。これを (3.4) を近似的に解く。これには有限重 Fourier 級数に展開する方法を用いる。近似解を

$$(3.5) \quad \begin{cases} x_m(u_1, u_2) = \alpha(0,0) + \sum_{r=1}^m \sum_{|p|=r} \{ \alpha_p \cos(p, \nu, u) + \beta_p \sin(p, \nu, u) \}, \\ y_m(u_1, u_2) = \alpha'(0,0) + \sum_{r=1}^m \sum_{|p|=r} \{ \alpha'_p \cos(p, \nu, u) + \beta'_p \sin(p, \nu, u) \} \end{cases}$$

とおく。ここで p は整数の組 $p = (p_1, p_2)$ であり

$$(p, \nu, u) = p_1 \nu_1 u_1 + p_2 \nu_2 u_2$$

$$|p| = |p_1| + |p_2|$$

$\sum_{|p|=r}$ は $|p|=r$ なるすべての p についての和である。正弦・余弦関数の性質から

$$(3.6) \quad \alpha_{-p} = \alpha_p, \quad \beta_{-p} = -\beta_p \quad (-p = (-p_1, -p_2))$$

が成り立たねばならない。 α'_p, β'_p についても同様である。上の未定係数 $\alpha_p, \beta_p, \alpha'_p, \beta'_p$ を, x_m, y_m を (3.4) に代入したときこの残差が Fourier basis と直交するように決める。

$$(3.7) \quad \mathcal{F}\{f(u_1, u_2)\} = \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} f(u_1, u_2) du_1 du_2$$

なる記法を導入すると, まず

$$(3.8) \quad \begin{cases} \mathcal{F}\left[\{Dx_m(u) - y_m(u)\} \begin{Bmatrix} \cos(p, \nu, u) \\ \sin(p, \nu, u) \end{Bmatrix}\right] = 0 \\ \mathcal{F}[Dx_m(u) - y_m(u)] = 0 \end{cases}$$

より

$$(3.9) \quad \begin{cases} \alpha'(0,0) = 0 \\ \alpha'_p = (p_1 \nu_1 + p_2 \nu_2) \beta_p & \beta'_p = -(p_1 \nu_1 + p_2 \nu_2) \alpha_p \end{cases}$$

これを適用すると，決定方程式として次のものがえられる。

$$(3.10)_1 \quad f^{(m)}(0,0) \equiv \nu^2 \alpha(0,0) - \varepsilon \mathcal{F}\{x_m^3(u)\} = 0$$

$$(3.10)_2 \quad f^{(m)}(1,0) \equiv (\nu^2 - \nu_1^2) \alpha(1,0) + 2\sigma\nu_1 \beta(1,0) - \frac{a}{2} - 2\varepsilon \mathcal{F}\{x_m^3(u) \cos \nu_1 u\} = 0$$

$$(3.10)_3 \quad f^{(m)}(0,1) \equiv (\nu^2 - \nu_2^2) \alpha(0,1) + 2\sigma\nu_2 \beta(0,1) - \frac{b}{2} - 2\varepsilon \mathcal{F}\{x_m^3(u) \cos \nu_2 u\} = 0$$

$$(3.10)_4 \quad f^{(m)}(p_1, p_2) \equiv \{\nu^2 - (p_1\nu_1 + p_2\nu_2)^2\} \alpha_p + 2\sigma(p_1\nu_1 + p_2\nu_2) \beta_p \\ - 2\varepsilon \mathcal{F}\{x_m^3(u) \cos(p, \nu, u)\} = 0 \quad \text{for } |p| \geq 2$$

$$(3.10)_5 \quad g^{(m)}(p_1, p_2) \equiv \{\nu^2 - (p_1\nu_1 + p_2\nu_2)^2\} \beta_p - 2\sigma(p_1\nu_1 + p_2\nu_2) \alpha_p \\ - 2\varepsilon \mathcal{F}\{x_m^3(u) \sin(p, \nu, u)\} = 0 \quad \text{for } |p| \geq 1$$

(3.6) から未定係数のベクトル $\alpha^{(m)} = (\alpha(0,0), \dots, \alpha_p, \beta_p, \dots)_{|p| \leq m, p \geq 0}$

とすると，(3.10) はまとめ $F_m(\alpha^{(m)}) = 0$ とし， $2m(m+1)+1$ 個の未知数に対する $2m(m+1)+1$ 個の方程式である。

3.3 逐次近似

決定方程式は勿論非線形であり，未知数の数も多いから近似解法を考えた方がよい。 $F_m(\alpha^{(m)}) = 0$ を

$$(3.11) \quad A_m \alpha^{(m)} - a = \varepsilon \cdot C_m(\alpha^{(m)})$$

と同値であることを着目する。ここで A_m は

$$A_m = \begin{bmatrix} \nu^2 & & & & & & & & 0 \\ \nu^2 - \nu_1^2 & 2\sigma\nu_1 & & & & & & & \\ -2\sigma\nu_1 & \nu^2 - \nu_1^2 & & & & & & & \\ & & \nu^2 - \nu_2^2 & 2\sigma\nu_2 & & & & & \\ & & -2\sigma\nu_2 & \nu^2 - \nu_2^2 & & & & & \\ & & & & \dots & & & & \\ & & & & & \nu^2 - (p_1\nu_1 + p_2\nu_2)^2 & 2\sigma(p_1\nu_1 + p_2\nu_2) & & \\ & & & & & -2\sigma(p_1\nu_1 + p_2\nu_2) & \nu^2 - (p_1\nu_1 + p_2\nu_2)^2 & & \end{bmatrix}$$

$$a = {}^t(0, a/2, 0, b/2, 0, \dots, 0)$$

$$C_m(\alpha^{(m)}) = {}^t(c_0, \dots, c_p, d_p, \dots) \quad |p| \leq m, p_1 \geq 0$$

$$c_p = 2 \int \{x_m^3(u) \cos(p, \nu, u)\}, \quad d_p = 2 \int \{x_m^3(u) \sin(p, \nu, u)\}, \quad c_0 = \int \{x_m^3(u)\}$$

A_m はブロック対角行列であるから

$$(3.12) \quad \det A_m = \nu^2 \prod_{\substack{1 \leq |p| \leq m \\ p_1 \geq 0}} [\{\nu^2 - (p_1 \nu_1 + p_2 \nu_2)^2\}^2 + 4\sigma^2 (p_1 \nu_1 + p_2 \nu_2)^2]$$

であり

$$(3.13) \quad \{\nu^2 - (p_1 \nu_1 + p_2 \nu_2)^2\}^2 + 4\sigma^2 (p_1 \nu_1 + p_2 \nu_2)^2 \geq 4\sigma^2 (\nu^2 - \sigma^2)$$

がすべての (p_1, p_2) について成り立つから, A_m は $0 < \sigma < \nu$ のとき non-singular である。 $\varepsilon = \varepsilon$ 逐次近似として次のものを考える:

適当な出発値 $\alpha_0^{(m)}$ から, ベクトル列 $\{\alpha_k^{(m)}\}$ を

$$(3.14) \quad \alpha_k^{(m)} = \varepsilon A_m^{-1} C_m(\alpha_{k-1}^{(m)}) + A_m^{-1} a$$

によって作る。すると

Proposition 4. 次の (i) (ii) を決定する。

(i) $F_m(\alpha^{(m)}) = 0$ には, 解 $\hat{\alpha}^{(m)}$ が存在する。

(ii) $\hat{\alpha}^{(m)}$ の近傍では, C_m に対して局所 LIPSCHITZ 条件が成り立つ:

$$(3.15) \quad \|C_m(\alpha^{(m)'}) - C_m(\alpha^{(m)''})\| \leq L \|\alpha^{(m)'} - \alpha^{(m)''}\|.$$

$\alpha_0^{(m)}$ が $\hat{\alpha}^{(m)}$ の近傍に入り, かつ

$$(3.16) \quad \varepsilon C_0 L < 1$$

が成り立つならば, 上の逐次近似列は $\hat{\alpha}^{(m)}$ に収束する。但

$$C_0 = \|A_m^{-1}\|.$$

§4. VAN DER POL 型方程式.

4.1 ここでは

$$(4.1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 2\lambda(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = a\cos\nu_1 t + b\cos\nu_2 t$$

を考える。但し λ は正のベラ x - 夕, $\nu_1 = 2\pi/\omega_1$, $\nu_2 = 2\pi/\omega_2$. ν_1 と ν_2 は 1 に等しくないとは定しておく。DUFFING 型の場合と違って, この型に対しては準周期解が存在しないものがある。つまりしてないので, まずそれを示そう。

ベクトル形に書き直して,

$$(4.2) \quad \frac{dx}{dt} = A(\lambda)x + \varphi(t) + \lambda\eta(x)$$

但し $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\lambda \end{bmatrix}$, $\varphi(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a\cos\nu_1 t + b\cos\nu_2 t \end{bmatrix}$, $\eta(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2x^2y \end{bmatrix}$.
 λ に依存する作用素

$$(4.3) \quad L(\lambda)y = \frac{dy}{dt} - A(\lambda)y$$

については, $\mu = -\lambda$, $\nu = 1$ として Proposition 3 を適用すれば, $\lambda < 1$ のとき regular であり, 対応する GREEN 函数は

$$(4.4) \quad G_\lambda(t, \sigma) = \begin{cases} 0 & \text{for } t > \sigma, \\ -e^{+\lambda t} \begin{bmatrix} \cos \theta t - \frac{\lambda}{\theta} \sin \theta t & \frac{1}{\theta} \sin \theta t \\ -\frac{1}{\theta} \sin \theta t & \cos \theta t + \frac{\lambda}{\theta} \sin \theta t \end{bmatrix} & \text{for } t \leq \sigma \end{cases}$$

但し $\theta = \sqrt{1-\lambda^2}$. 不等式

$$(4.5) \quad \|G_\lambda(t, \sigma)\| \leq \frac{2-\lambda^2}{\theta} e^{-\lambda|t-\sigma|}$$

が成り立つ。従って方程式

$$(4.6) \quad L(\lambda)y = \varphi(t)$$

の準周期解 $y = y_0(t; \lambda) = \begin{bmatrix} x_0(t; \lambda) \\ y_0(t; \lambda) \end{bmatrix}$ は

$$(4.7) \quad \begin{cases} x_0(t; \lambda) = \frac{a}{(1-\nu_1^2)^2 + 4\lambda^2\nu_1^2} \{ (1-\nu_1^2)\cos\nu_1 t - 2\lambda\nu_1 \sin\nu_1 t \} \\ \quad + \frac{b}{(1-\nu_2^2)^2 + 4\lambda^2\nu_2^2} \{ (1-\nu_2^2)\cos\nu_2 t - 2\lambda\nu_2 \sin\nu_2 t \}, \\ y_0(t; \lambda) = \frac{a\nu_1}{(1-\nu_1^2)^2 + 4\lambda^2\nu_1^2} \{ -(1-\nu_1^2)\sin\nu_1 t - 2\lambda\nu_1 \cos\nu_1 t \} \\ \quad + \frac{b\nu_2}{(1-\nu_2^2)^2 + 4\lambda^2\nu_2^2} \{ -(1-\nu_2^2)\sin\nu_2 t - 2\lambda\nu_2 \cos\nu_2 t \}. \end{cases}$$

(4.1) の準周期解 $y_0(t; \lambda)$ の近傍に存在することから、以下の
ようにして示される。定数 K を

$$(4.8) \quad K = \max \left(\frac{|a|}{|1-\nu_1^2|} + \frac{|b|}{|1-\nu_2^2|}, \frac{|a|\nu_1}{|1-\nu_1^2|} + \frac{|b|\nu_2}{|1-\nu_2^2|} \right)$$

と定める。すると

$$(4.9) \quad |x_0(t; \lambda)|, |y_0(t; \lambda)| < K \quad \text{for all } t \text{ and } 0 < \lambda < 1.$$

次に $y_0(t; \lambda)$ を (4.1) に代入したときの残差は

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{dy_0(t; \lambda)}{dt} - A(\lambda)y_0(t; \lambda) - \varphi(t) - \lambda\eta(y_0(t; \lambda)) \right\| \\ &= \left\| -\lambda\eta(y_0(t; \lambda)) \right\| \\ &\leq 2\lambda K^3 \end{aligned}$$

と評価できるから、Theorem 1 の r として

$$(4.8) \quad r = 2\lambda K^3$$

とする。 \mathbb{R}^2 の領域として \mathcal{D}_K , \mathcal{D}' を

$$\mathcal{D}_K = \{x; \|x\| \leq 2K\},$$

$$\mathcal{D}' = \bigcup_t \{x; \|x - y_0(t; \lambda)\| \leq K\}$$

とすれば, $y_0(t; \lambda) \in \mathcal{D}_K$ for all t かつ $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}_K$ が成り立つ。

(4.2)式の右辺の x についての Jacobian 行列を $\Psi(x; \lambda)$ とする
と $x \in \mathcal{D}'$ ならば

$$(4.9) \quad \|\Psi(x; \lambda) - A(\lambda)\| \leq 24\lambda K^2$$

が成り立つ。(4.9)式から Theorem にいう定数 M として

$$(4.10) \quad M = \frac{2(2-\lambda^2)}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}$$

となる。以上の考察から, 次の二つの不等式を同時に満足する $\kappa < 1$ がとれば真の準周期解が存在することになる:

$$24\lambda K^2 \leq \frac{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{2(2-\lambda^2)} \kappa, \quad \frac{2(2-\lambda^2)}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \cdot 2\lambda K^3 \leq (1-\kappa)K$$

これは可能である。存在する

$$(4.11) \quad K < \sqrt{\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{52(2-\lambda^2)}}$$

とすれば (すなわち $|a|, |b|$ の値を小さくして),

$$\begin{cases} \frac{2(2-\lambda^2)}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \cdot 24\lambda K^2 < \frac{48}{52} \\ \frac{2(2-\lambda^2)}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \cdot 2\lambda K^3 < \frac{4}{52} \end{cases}$$

となるからである。

4.2 従って, (4.1)の準周期解の近似を行うことは意味がある問題になる。GALERKIN scheme の構成の仕方は §3 と全く同様である。結果だけを記述すると, 決定方程式系は

$$(4.12) \quad G_m(\alpha^{(m)}) = {}^t(f_0^{(m)}, \dots, f_p^{(m)}, g_p^{(m)}, \dots)_{|p| \leq m, p_1 \geq 0}$$

$$(4.13)_1 \quad f_0^{(m)}(0,0) \equiv \alpha(0,0) + \lambda \int \{x_m^2(u) y_m(u)\}$$

$$(4.13)_2 \quad f_1^{(m)}(1,0) \equiv (1-\nu^2)\alpha(1,0) - 2\lambda\nu\beta(1,0) - \frac{a}{2} + 2\lambda \int \{x_m^2(u) y_m(u) \cos \nu u_1\}$$

$$\begin{aligned}
 (5.1) \quad \bar{x}_8(t) = & 2 \{ 0.0589905 \cos \nu_1 t + 0.014706 \sin \nu_1 t \\
 & - 0.0804708 \cos \nu_2 t + 0.0150072 \sin \nu_2 t \\
 & - 0.0000016 \cos 3\nu_1 t + 0.0000015 \sin 3\nu_1 t \\
 & + 0.0000069 \cos(2\nu_1 + \nu_2)t - 0.0000026 \sin(2\nu_1 + \nu_2)t \\
 & - 0.0000468 \cos(2\nu_1 - \nu_2)t + 0.0000376 \sin(2\nu_1 - \nu_2)t \\
 & - 0.0000054 \cos(\nu_1 + 2\nu_2)t - 0.0000004 \sin(\nu_1 + 2\nu_2)t \\
 & - 0.0000116 \cos(\nu_1 - 2\nu_2)t + 0.0000076 \sin(\nu_1 - 2\nu_2)t \\
 & + 0.0000007 \cos 3\nu_2 t + 0.0000004 \sin 3\nu_2 t \\
 & + 0.0000001 \cos(4\nu_1 - \nu_2)t \\
 & - 0.0000003 \cos(3\nu_1 - 2\nu_2)t - 0.0000005 \sin(3\nu_1 - 2\nu_2)t \}
 \end{aligned}$$

がえられる。(上に書かれていない係数はすべて絶対値 10^{-7} より小。以下同じ)

$$(5.2) \quad |\bar{x}_8(t)| \leq 0.3385969 \quad \text{for all } t$$

と評価され、また $\bar{x}_8(t)$ を系に代入したときの残差としては

$$(5.3) \quad r = 1.378 \times 10^{-9}$$

である。 $\epsilon = \epsilon$ Theorem にいう δ , κ とし $\delta = 0.125$, $\kappa = 0.78136$

とすれば条件が満足され、真の解の評価

$$(5.4) \quad |\bar{x}_8(t) - \hat{x}(t)| \leq 2.445 \times 10^{-7} \quad \text{for all } t$$

がえられる。

VAN DER POL 型の場合。定数 $\lambda, \nu_1, \nu_2, a, b$ は

$$\lambda = 0.0625, \quad \nu_1 = \sqrt{2}, \quad a = 0.0625, \quad \nu_2 = \sqrt{5}, \quad b = 0.125$$

とする。 $m = 7$ とし、収束判定を 10^{-8} とすると、(4.7) に対応する値を出発値として、3回の反復で収束し、近似解

$$\begin{aligned}
 (5.5) \quad \bar{x}_7(t) = & 2 \{ -0.0303083 \cos \nu_1 t - 0.0053722 \sin \nu_1 t \\
 & - 0.0155497 \cos \nu_2 t - 0.0010912 \sin \nu_2 t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -0.0000003 \cos 3\nu_1 t - 0.0000005 \sin 3\nu_1 t \\
& -0.0000007 \cos(2\nu_1 + \nu_2)t - 0.0000014 \sin(2\nu_1 + \nu_2)t \\
& + 0.0000011 \cos(2\nu_1 - \nu_2)t + 0.0000062 \sin(2\nu_1 - \nu_2)t \\
& - 0.0000002 \cos(\nu_1 + 2\nu_2)t - 0.0000006 \sin(\nu_1 + 2\nu_2)t \\
& \quad + 0.0000014 \sin(\nu_1 - 2\nu_2)t \}
\end{aligned}$$

がえられる。

$$(5.6) \quad |\bar{x}_7(t)| \leq 0.1046678, \quad \left| \frac{d}{dt} \bar{x}_7(t) \right| \leq 0.1753960 \quad \text{for all } t$$

と評価され、また $\bar{x}_7(t)$ を系に代入した残差として

$$(5.7) \quad r = 1.094 \times 10^{-10}$$

である。 $\epsilon = \delta$ Theorem にいう δ , κ として $\delta = 0.0625$, $\kappa = 0.86 \epsilon$

とすれば条件が満足され、真の解の評価

$$(5.8) \quad |\bar{x}_7(t) - \hat{x}(t)| \leq 6.252 \times 10^{-8}$$

がえられる。

R e f e r e n c e s

- [1] Бурд, В.Ш., Колесов, Ш.С. и Красносельский, М.А.: Исследование функции Грина дифференциальных операторов с почти периодическими коэффициентами, Изв. АН СССР, Сер. мат., 33(1969), 1089-1119.
- [2] Urabe, M.: Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems, Arch. Rational Mech. Anal., 20(1965), 120-152.
- [3] ———: On the existence of quasiperiodic solutions to nonlinear quasiperiodic differential equations, Nonlinear Vibration Problems, 1974, 85-93.
- [4] 三井 誠友: 非線型振動の準周期解の近似, 1975年日本数学会秋季総合分科会応用数学科会予稿集, 72-77.
- [5] ———: 同上(II), 1976年日本数学会秋季総合分科会応用数学科会予稿集, 31-36.