

Title	球面上のSpherical Fibre Spaceの連結和について(非安定ホモトピー論の研究)
Author(s)	山口, 耕平
Citation	数理解析研究所講究録 (1983), 505: 92-106
Issue Date	1983-12
URL	http://hdl.handle.net/2433/103727
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

球面上の Spherical Fibre Space の連結和について

東京工大(理) 山口耕平 (K. Yamaguchi)

§1 Introduction

Poincaré duality の成立する有限複体は Poincaré complex と言われる。たとえば、多様体はさうであり、その点においても、Poincaré complex のホモトピー型を分類することは、大変興味ある問題と思われる。ここでは、十分連結性の高い Poincaré complex について考える。

今、単連結な Poincaré complex M で、その homology 群が、次の形のものをとる。

$$H_i(M; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (i=0, n+m) \\ \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{r \text{ 個}} = r\mathbb{Z} & (i=n, m) \\ 0 & (\text{その他の } i) \end{cases}$$

(ただし $n < m-1$)

とくに、 M が滑らかな閉多様体の場合には、Wall,

田村, 石本により、適当な条件のもとで、 M は r 個の m 次元球面 S^m 上の n 次元球面バンドルの、連結和に微分同相になる。したがって、この場合には、 M のホモトピー型の分類は、球面上の球面バンドルの連結和の分類に帰着する。そこで、その一般化として、球面上の spherical fibre space の連結和のホモトピー型を分類することを、本論の目的とする。

§2 定義と結果

M_1, M_2 を p 次元 Poincaré complex とするとき、disk theorem より、 $M_i \simeq K_i \cup_{\alpha_i} e^p$ --- (*)

(ただし $\alpha_i \in \pi_{p-1}(K_i)$, K_i は $(p-1)$ 次元以下の次元の有限複体; $i=1, 2$) の形に (up to homotopy) で

かける。このとき、Poincaré complex M_1, M_2 の連結和

$$M_1 \# M_2 \text{ を、 } M_1 \# M_2 = (K_1 \vee K_2) \cup_{\alpha_1 \# \alpha_2} e^p$$

と定義する。(この定義は (*) の形によらず、up to homotopy で well-defined である; Wall [12])

$$\text{今、 } SG_{nt} = \{ f: S^n \rightarrow S^n \text{ 連続写像} \mid \text{degree } 1\text{-map} \}$$

$$F_n = \{ f \in SG_{nt} \mid f \text{ は based map} \}$$

$$j_n: F_n \hookrightarrow SG_{nt}: \text{inclusion map}$$

とする。

X を m 次元球面 S^m 上の orientable n -spherical fibration space,
 その characteristic element を $\chi(X) \in \pi_{m-1}(SO(n))$ とする。

今、 X が cross-section を持つと仮定すると、

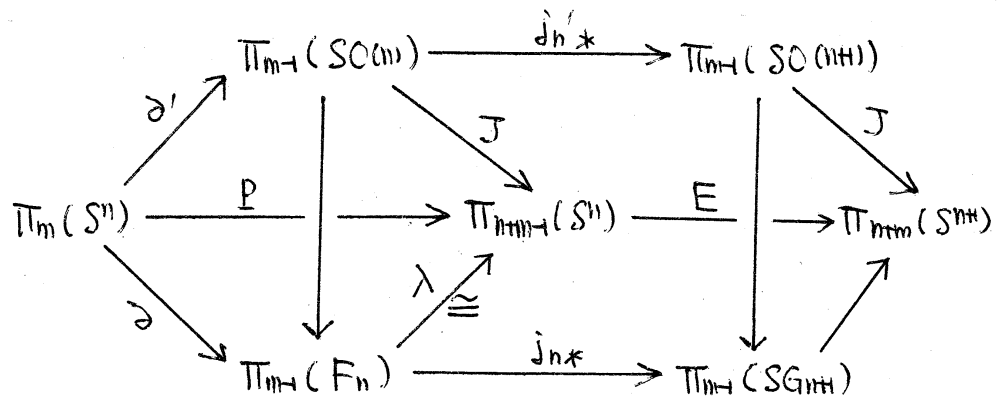
$$(2.1) \quad \chi(X) = j_{n*}(\xi) \quad (\exists \xi \in \pi_{m-1}(F_n))$$

とかける。 $\lambda: \pi_{m-1}(F_n) \xrightarrow{\cong} \pi_{m+n-1}(S^n)$ を自然な同型とし、2つの fibration とその間の maps

$$\begin{array}{ccccc} SO(n) & \xrightarrow{j'_n} & SO(n+1) & \longrightarrow & SO(n+1)/SO(n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ F_n & \xrightarrow{j_n} & S^{n+1} & \xrightarrow{ev} & S^n \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ただし、} \quad ev(f) = f(*) \quad f \in S^{n+1} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad * \in S^n: \text{基点} \end{array} \right)$$

を考えると、次の (up to sign \pm) 可換な図式を得る。



$$\left\{ \begin{array}{l} P(\xi) = [\xi, \zeta_n] \quad \text{for } \xi \in \pi_m(S^n) \\ J: \text{classical } J\text{-homomorphism} \end{array} \right.$$

(よくて, $J \circ \partial' = -P$, $E \circ J = -J \circ \partial'_*$)

今, $\chi(X) = \partial_{h*}(\xi) = \partial_{h*}(\xi')$ ($\xi, \xi' \in \pi_{m+1}(F_n)$) と,

(2.1) か, 2 通りに書けたと仮定すると Fig. Q.2) より,

$$\xi - \xi' = \partial(x) \quad (\exists x \in \pi_m(S^n)) \text{ とおける。}$$

$$\text{よって, } \lambda(\xi) - \lambda(\xi') = \lambda(\xi - \xi')$$

$$= P(x) = [x, L_n]$$

したがって, $\lambda(\xi)$ は $\text{mod } P\pi_m(S^n)$ で一意的に

決まる。そこで, James-Whitehead invariant $\lambda(X)$ を,

$$(2.3) \quad \lambda(X) = [\lambda(\xi)] \in \pi_{m+1}(S^n) / P\pi_m(S^n)$$

と定義できる。

この不変量 $\lambda(X)$ について, 次はよく知られる。

定理 2.4. (I.M. James - J.H.C. Whitehead [3], S. Sasao [5])

$2n \geq m+2$ とし, X_1, X_2 を cross-section を持つ, S^m 上

の orientable n -spherical fibre space とする。

このとき,

$X_1 \simeq X_2$: same homotopy type

$$\Leftrightarrow \lambda(X_2) = \pm \lambda(X_1)$$

この定理の一般化として, 我々は次の定理を得る。

定理 A

$$2n \geq m+2 \text{ とし, } \left. \begin{array}{l} X_1, X_2, \dots, X_r \\ X'_1, X'_2, \dots, X'_r \end{array} \right\} \text{ \varepsilon, cross-section}$$

を持つ, $2r$ 個の S^m 上の orientable n -spherical fibre space とする。

このとき,

$$\#_{i=1}^r X'_i \simeq \#_{i=1}^r X_i \quad ; \text{ same homotopy type}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda(X'_1) \\ \lambda(X'_2) \\ \vdots \\ \lambda(X'_r) \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \lambda(X_1) \\ \lambda(X_2) \\ \vdots \\ \lambda(X_r) \end{bmatrix} \quad \exists A \in GL(r, \mathbb{Z})$$

(ただし, $\pi_{m+1}(S^m)/p\pi_m(S^m)$ を左 \mathbb{Z} -module と考える)

とくに, 球面上の球面バンドルの場合を考えると,

定理 B (H. Ishimoto [2], K. Yamaguchi [14])

$$2n \geq m+2 \text{ とし, } \left. \begin{array}{l} X_1, X_2, \dots, X_r \\ X'_1, X'_2, \dots, X'_r \end{array} \right\} \text{ \varepsilon, cross-section を持つ}$$

$2r$ 個の S^m 上の n 次元球面バンドルとする

このとき,

$$\#_{i=1}^r X'_i \simeq \#_{i=1}^r X_i \quad ; \text{ same homotopy type}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{bmatrix} \lambda(x_1') \\ \lambda(x_2') \\ \vdots \\ \lambda(x_r') \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \lambda(x_1) \\ \vdots \\ \lambda(x_r) \end{bmatrix} \quad (\exists A \in GL_r(\mathbb{Z}))$$

(ただし、 $\mathbb{Z}\pi_m(SO(m))/\mathbb{Z}\pi_m(S^n)$ を左 \mathbb{Z} -module と考える)

§3 The group of self-homotopy equivalences $\mathcal{E}(X)$

基点付きの位相空間 $X=(X, x_0)$, $Y=(Y, y_0)$ に對して、ホモトピー集合 $[X, Y]$ を

$$[X, Y] = \{ f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0) \} / \sim \quad (\sim: \text{homotopy})$$

とおく。とくに $X=Y$ のとき、 $[X, X]$ は写像の合成により、 $1_X = [\text{id}_X]$ を単位元とする monoid となる。そこで、 $[X, X]$ の元で可逆元全体のつくる群を $\mathcal{E}(X)$ とする:

$$\mathcal{E}(X) = \{ [f] \in [X, X] \mid f \text{ は homotopy equivalence} \}$$

次のことに注意する。

命題 3.1 (Homotopy theory)

$$X = K \cup_{\alpha} e^p$$

$$Y = K \cup_{\beta} e^p$$

$$\left(\begin{array}{l} \alpha, \beta \in \pi_{p-1}(K) \\ K \text{ は } \dim K \leq p-2 \text{ の CW-complex} \\ K: 1\text{-connected} \end{array} \right)$$

このとき

$$X \simeq Y: \text{homotopy 同値} \iff \exists \theta \in \mathcal{E}(K); \theta \circ \alpha = \pm \beta$$

したがって、定理 A (または定理 B) を証明するには、ある適当な複体 K の $\mathcal{E}(K)$ を求め、その homotopy 群 $\pi_{p-1}(K)$ への作用

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{E}(K) \times \pi_{p-1}(K) & \longrightarrow & \pi_{p-1}(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\theta, \alpha) & \longmapsto & \theta \cdot \alpha \end{array}$$

を調べることに必要となる。我々の場合必要となる K は、次の形のものを十分である (See §4)

$$(3.3) \quad K = \bigvee_{i=1}^r K_i = \bigvee^r (S^n \vee S^m) \\ (\text{ただし } K_i = S^n \vee S^m \quad (1 \leq i \leq r))$$

そこで、各 $1 \leq i \leq r$ に対し、

$$\left\{ \begin{array}{l} i_i: S^n \longrightarrow S^n \vee S^m = K_i \quad : \text{inclusion map} \\ \xi_i: S^m \longrightarrow S^n \vee S^m = K_i \quad : \quad // \\ p_i: K_i = S^n \vee S^m \longrightarrow S^m \quad : \text{retraction map} \end{array} \right.$$

とおく。同様に、各 $1 \leq i, s \leq r$ に対し、

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{is}: K_i \longrightarrow K_s \\ \lambda_{is}: K_i \longrightarrow K_s \end{array} \right\} \xi.$$

$$\sigma_{is} = \text{identity}, \quad \lambda_{is} = \xi_s \circ p_i \quad \text{とおく。}$$

とくに、各空間 K_i は double suspension space であり、ホモトピー集合 $[K_i, K_s]$ は (track addition による) abelian group となり、 $2n \geq m+2$ とすると、 $[K, K]$ は (和は track

addition, 積は、写像の合成で定義すること) 非可換環となる。今、次のことに注意する。

命題 3.4 ([14] §, [4])

$$[K_A, K_S] \cong \mathbb{Z}\{\sigma_{AS}\} \oplus \mathbb{Z}\{\lambda_{AS}\} \oplus G_{AS}$$

$$\text{ただし } G_{AS} = \text{im} \pi_m(S^n) \circ P_A \cong \pi_m(S^n)$$

命題 3.5 ([14])

$$2n \geq m+2 \text{ のとき } [K, K] \cong \text{Mat}(r, [K_A, K_S])$$

よって、各元 $\Theta \in [K, K]$ は、次の形に一意的に書ける。

$$(3.6) \quad \Theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \dots & \theta_{1r} \\ \theta_{21} & & & \vdots \\ \vdots & \theta_{As} & & \vdots \\ \theta_{r1} & \dots & \dots & \theta_{rr} \end{bmatrix}$$

$$\text{(ただし } \theta_{As} \in [K_A, K_S])$$

$$\theta_{As} = a_{As} \sigma_{As} + b_{As} \lambda_{As} + g_{As}$$

$$(a_{As}, b_{As} \in \mathbb{Z}; g_{As} \in G_{As})$$

そこで、このとき、 $(3r \times 3r)$ -行列 $F(\Theta)$ を、

$$(3.7) \quad F(\Theta) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A+B & \Gamma \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \quad \text{とおく}$$

ただし、

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1r} \\ \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{rr} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{1r} \\ \vdots & \vdots \\ b_{r1} & b_{rr} \end{bmatrix} \in \text{Mat}(r, \mathbb{Z}) \\ \Gamma = \begin{bmatrix} g'_{11} & g'_{1r} \\ \vdots & \vdots \\ g'_{r1} & g'_{rr} \end{bmatrix} \in \text{Mat}(r, \Pi_m(S^n)) \end{array} \right.$$

一般に.

$$\begin{bmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & A'+B' & \Gamma' \\ 0 & 0 & A' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A+B & \Gamma \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'A & 0 & 0 \\ 0 & A'A+(B'A+AB'+B'B) & \tilde{\Gamma} \\ 0 & 0 & A'A \end{bmatrix}$$

$$(\text{ただし } \tilde{\Gamma} = (A'+B')\Gamma' + \Gamma'A')$$

に注意すると, 各 abelian group G に對し, 次の $(3r \times 3r)$ -
行列

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A+B & \Gamma \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{ただし} \\ \left. \begin{array}{l} A, B \in \text{Mat}(r, \mathbb{Z}) \\ \Gamma \in \text{Mat}(r, G) \end{array} \right\} \end{array}$$

全体のなる matrix ring $M(r; G)$ が定義できる。

とくに, 命題 (3.5) と (3.7) に注意すると, $2n \geq m+2$ なる
group isomorphism

$$F: [k; k] \xrightarrow{\cong} M(r; \Pi_m(S^n))$$

が定義できる。実は, もっと強く, 次のことも言える。

定理 3.8 ([14])

$2n \geq m+2$ のとき、 F は、環の同型

$$F: [K, K] \xrightarrow{\cong} M(r; \pi_m(S^n)) \quad \text{を与える.}$$

とくに、各非可換環 R に對して、その可逆元全体の
つくる群を $\text{Inv}(R)$ とおく:

$$\text{Inv}(R) = \{x \in R \mid \exists x^{-1} \in R\}$$

このとき、

系 3.9 ([14])

$2n \geq m+2$ のとき、 $\mathcal{E}(K) \cong \text{Inv}(M(r; \pi_m(S^n)))$

§4 定理の証明

今、 $X_1, \dots, X_r, X_1', \dots, X_r'$ を定理 A の仮定を満足する
ように与える。まず次のことに注意する。

補題 4.1 (S. Sasao, [5])

各 $X_{\mathbb{R}}, X_{\mathbb{R}}'$ は、次の形の cell 分解を持つ。

$$X_{\mathbb{R}} = K_{\mathbb{R}} \cup P_{\mathbb{R}} e^{n+m}$$

$$X_{\mathbb{R}}' = K_{\mathbb{R}} \cup P_{\mathbb{R}}' e^{n+m}$$

$$\text{ただし, } \left\{ \begin{array}{l} p_n = i_n * \lambda(\delta_n) + [\xi_n, i_n] \in \Pi_{n+m-1}(K_n) \\ p'_n = i_n * \lambda(\delta'_n) + [\xi_n, i_n] \in \Pi_{n+m-1}(K_n) \\ \lambda(X_n) = [\lambda(\delta_n)], \lambda(X'_n) = [\lambda(\delta'_n)] \\ (1 \leq n \leq r) \end{array} \right.$$

したがって, $X = \#_{i=1}^r X_i$, $X' = \#_{i=1}^r X'_i$ とおくと,

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = K \cup_p e^{n+m} \\ X' = K \cup_p e^{n+m} \end{array} \right.$$

ただし,

$$p = \sum_{n=1}^r j_n * p_n, \quad p' = \sum_{n=1}^r j_n * p'_n \in \Pi_{n+m-1}(K)$$

($j_n: K_n \hookrightarrow K$: n -th factor \wedge の inclusion map)

今, $\Theta = [K, K]$ を (3.6) の形の元とすると, 容易な計算により

$$(4.3) \quad \Theta \circ p = \sum_{s=1}^r j_{s*} \left(\sum_{n=1}^r a_{ns} i_{s*} \lambda(\delta_n) + \sum_{n=1}^r a_{ns} (a_{ns} + b_{ns}) [\xi_s, i_s] + \sum_{n=1}^r i_{s*} [g'_{ns}, L_n] \right)$$

(ただし $g_{ns} = i_s \circ g'_{ns} \circ p_n$, $g'_{ns} \in \Pi_m(S^n)$)

以上の準備のもとに, 定理 A を示す。

⇒: まず、 X と X' が、本モト \mathbb{C} - 同値であると仮定する。

命題 3.1 より、 $\exists \Theta \in \mathcal{E}(K)$; $\Theta \circ \rho = \pm \rho'$

よって、このとき、(4.2), (4.3) から、

$$-\lambda(\delta'_s) \equiv \pm \sum_{\mu=1}^r a_{\mu s} \lambda_{\pm}(\delta_{\mu}) \pmod{P \Pi_m(S^n)} \quad (1 \leq \forall s \leq r)$$

そこで、 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix} \in \text{Mat}(r, \mathbb{Z})$ とおくと、

$$\tau(\lambda(X'_1), \dots, \lambda(X'_r)) = A \cdot \tau(\lambda(X_1), \dots, \lambda(X_r))$$

よって、 $\Theta \in \mathcal{E}(K)$ より、系 3.9 を用いると $A \in \text{GL}(r, \mathbb{Z})$

したがって前半は示された。

⇐: 逆に、 $\tau(\lambda(X'_1), \dots, \lambda(X'_r)) = A \cdot \tau(\lambda(X_1), \dots, \lambda(X_r))$

を満足する $A \in \text{GL}(r, \mathbb{Z})$ が、与えられたと仮定する。

今、 $A = (a_{\mu s})$ とおく。一般性を失うことなく、

$$(4.4) \quad \lambda(\delta'_s) = \sum_{\mu=1}^r a_{\mu s} \lambda(\delta_{\mu}) \quad (1 \leq s \leq r)$$

と仮定してよい。

各 $(r \times r)$ -行列 $B = [b_{\mu s}] \in \text{Mat}(r, \mathbb{Z})$ を取ると、

$$\Theta_B = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \theta_{r1} & & \theta_{rr} \end{bmatrix} \in [K, K] \quad \text{とおく.}$$

(ただし、 $\theta_{hs} = a_{hs} + b_{hs} \lambda_{hs} \in [K_A, K_S]$)

このとき、(4.3) により、

$$(4.5) \quad \theta_B \circ \rho = \rho' \iff \sum_{h=1}^r a_{hs} (a_{hs} + b_{hs}) = 1 \quad (1 \leq \forall s \leq r)$$

$$\iff {}^t A \cdot (A+B) = \begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix}$$

また、系 3.9 により、

$$(4.6) \quad \theta_B \in \Sigma(K) \iff A+B \in GL(r, \mathbb{Z})$$

そこで、 $A \in GL(r, \mathbb{Z})$ に注意して、 $B = ({}^t A)^{-1} - A$ とおくと、

$$\begin{cases} A+B \in GL(r, \mathbb{Z}) \quad \text{かつ、} \\ {}^t A(A+B) = E_r = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

したがって、(4.5)、(4.6) により、 X と X' はホモトピー同値となる。

以上で定理 A は示された。

定理 B の証明は、むしろ、定理 A の系にすぎない。

References.

- 1 P.Hilton and J.Roitberg : Note on quasifibrations and fibre bundles, Illinois J. Math., 15 (1971), 1-8.
- 2 H.Ishimoto : Homotopy classification of connected sums of sphere bundles over spheres I, II, Nagoya Math. J., 83 (1981), 15-36; Publ. RIMS. Kyoto Univ., 18 (1982), 307-324.
- 3 I.M.James and J.H.C.Whitehead : The homotopy theory of sphere bundles over spheres I, II, Proc. London Math. Soc., 4 (1954), 196-218; *ibid.*, 5 (1955), 148-166.
- 4 S.Oka : Groups of self-equivalences of certain complexes, Hiroshima Math. J., 2 (1972), 285-298.
- 5 S.Sasao : Homotopy types of spherical fibre spaces over spheres, Pacific J. Math., 52 (1974), 207-219.
- 6 L.Smith : Manifolds with few cells and the stable homotopy of spheres, Proc. A.M.S., 31 (1972), 279-284.
- 7 M.Spivak : Spaces satisfying Poincaré duality, Topology, 6 (1967), 77-101.
- 8 J.D.Stasheff : A classification theorem for fibre spaces, Topology, 2 (1963), 239-246.
- 9 B.Steer : Extensions of mapping into H-spaces, Proc. London Math. Soc., 13 (1963), 219-272.
- 10 R.Stöcker : Note on quasifibrations and manifolds, Proc. A.M.S., 43 (1974), 219-225.

- 11 I. Tamura : On the classification of sufficiently connected manifolds, J. Math. Soc. Japan, 20 (1968), 371-389.
- 12 C.T.C. Wall : Poincaré complexes I, Annals of Math., 86 (1967), 213-245.
- 13 C. Wisse mann Hartmann : Spherical fibrations and manifolds, Math. Z., 177 (1981), 187-192.
- 14 K. Yamaguchi : On the self-homotopy equivalences of the wedge of certain complexes, to appear in Kodai Math. J. (1983).
- 15 _____: Homotopy types of connected sums of spherical fibre spaces over spheres, preprint.