Title	A Solution of a Nonlinear Stefan Problem in the Theory of Subdifferential Operators (Nonlinear Functional Analysis)
Author(s)	KENMOCHI, NOBUYUKI
Citation	数理解析研究所講究録 (1981), 428: 135-151
Issue Date	1981-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/102640
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
428巻 1981年 135-151

非線型Stefan問題の劣微分作用素論からの解法

千葉大 教育 剱持信幸

0. 序

本小論において次のようなStefan型の問題を考えよう．これは次の系(0.1), (0.2)を満たす曲線 $x=\ell(t)$ と関数 $u=u(t,x)$ をもめる問題である；

$$
(0.1)\quad \begin{cases}
u_t-\beta(u)_{xx}=f & (0<t<T,\ 0<x<\ell(t)\ \text{or}\ \ell(t)<x<L)\\
u(0,x)=u_0(x) & (0<x<L)\\
\beta(u)_x(t,0+)=g_1(t) & (0<t<T)\\
\beta(u)_x(t,L-)=-g_2(t) & (0<t<T)\\
\beta(u)(t,\ell(t))=0 & (0<t<T)
\end{cases}
$$

$$
(0.2)\quad \begin{cases}
\dfrac{d\ell(t)}{dt}=\Gamma(t,\ell(t),\beta(u)_x(t,\ell(t)-),\beta(u)_x(t,\ell(t)+)) & (0<t<T)\\
\ell(0)=\ell_0
\end{cases}
$$

ここで，$0<T<\infty$，$0<L<\infty$，$0<\ell_0<L$ は与えられた数，f，u_0，g_1，g_2 は与えられた関数．また，$\beta:R\to R$，

$\Gamma : [0,T]\times[0,L]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ も与えられた関数である。

この種の問題はさまざまな観点から多くの研究者によって研究された。例えば，[2－5，9，12，13 及びそれらの引用文献]を参照．また，[8]において，系(0.1)および

$$(0.2)'\quad \begin{cases} \dfrac{d\ell(t)}{dt} = -\beta(u)_x(t,\ell(t)-) + \beta(u)_x(t,\ell(t)+) & (0<t<T) \\ \ell(0)=\ell_0 \end{cases}$$

は，非線型発展方程式 $u'(t)+\partial\varphi^t(Bu(t))\ni f(t)$ の立場から論じられたが，このアプローチは上記引用文献のそれとは全く異なる。本小論の目的は，一般の形で与えられた自由境界条件(0.2)の下で系(0.1)の局所解の存在を，[8]と同じ方法により示すことである。

空間に関する記号その他について，ここでは Lions [10] に従う。また，劣微分作用素の定義・基本的な性質については Brézis [1] を参照．記号 "$\longrightarrow$" は強収束を，"$\rightharpoonup$" は弱収束を意味するものとする．

1. Quasi-Variational 問題

本小論を通じ，T，L は固定された正の数とし，

$\beta : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，単調増加，bi-Lipschitz，$\beta(0)=0$；

$\Gamma : [0,T]\times[0,L]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, 連続,

$|\Gamma(t,x,r,r')|\leq C(1+|r|+|r'|)$, $\forall(t,x,r,r')$

（Cは定数）

と仮定する．以下，簡単のため，

$$H = L^2(0,L) \quad , \quad X = W^{1,2}(0,L)$$

とおく。

さて，$g_1, g_2 \in C([0,T])$, $\ell \in C([0,T])$, $0<\ell<L$，に対し，次の様にH上の関数 φ^t_{ℓ,g_1,g_2} を定義する：

(1.1)
$$\varphi^t_{\ell,g_1,g_2}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^L |z_x|^2 dx + g_1(t)\,z(0) + g_2(t)\,z(L), \\ \qquad\qquad (z\in X,\ z(\ell(t))=0), \\ \infty, \quad (その他). \end{cases}$$

明らかに，各 $t\in[0,T]$ に対し，φ^t_{ℓ,g_1,g_2} は H上の proper l.s.c. 凸関数であり，$D(\varphi^t_{\ell,g_1,g_2}) = \{z\in X\ ;\ z(\ell(t))=0\}$．

次に，与えられた $f\in L^2(0,T;H)$, $u_0\in H$ に対し，Cauchy問題

$$CP(\varphi^t_{\ell,g_1,g_2}, B; f, u_0) \begin{cases} u'(t) + \partial\varphi^t_{\ell,g_1,g_2}(Bu(t)) \ni f(t), \quad 0<t<T', \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

を考えよう．ただし，$0<T'\leq T$, $u'(t) = (d/dt)u(t)$, B : $D(B) = H \longrightarrow H$ は

(1.2) $\quad [Bz](x) = \beta(z(x)) \quad , \ z\in H,\ 0<x<L$

で与えられる作用素とする．ここで，$u : [0,T'] \longrightarrow H$ が

$CP(\varphi^t_{\ell,g_1,g_2}, B; f, u_0)$ の強解であるとは，次の (i), (ii), (iii) が満足されることをいう：

(i) $u \in W^{1,2}(0,T';H)$, $u(0)=u_0$;

(ii) $t \to \varphi^t_{\ell,g_1,g_2}(Bu(t))$ は $[0,T']$ 上で有界；

(iii) $f(t)-u'(t) \in \partial\varphi^t_{\ell,g_1,g_2}(Bu(t))$ a.e. $t\in[0,T']$.

このとき，我々の問題は次の形で与えられる．

定義 1.1. $0<\ell_0<L$, $g_1,g_2\in C([0,T])$, $f\in L^2(0,T;H)$, $u_0\in H$ とする．このとき，$QVP(\ell_0, g_1, g_2, f, u_0)$ on $[0,T']$ ($\subset[0,T]$) によって，次の性質 (a), (b) を満たす組 $\{\ell, u\}\in W^{1,2}(0,T')\times W^{1,2}(0,T';H)$ (ただし $0<\ell<L$ on $[0,T']$) を見つける問題を意味する：

(a) u は $CP(\varphi^t_{\ell,g_1,g_2}; B; f, u_0)$ の強解である；

(b) $\ell(0)=\ell_0$ および

$$\frac{d\ell(t)}{dt}=\Gamma(t,\ell(t), \beta(u)_x(t,\ell(t)-), \beta(u)_x(t,\ell(t)+)) \quad \text{a.e. } t\in[0,T'].$$

容易にわかるように，$CP(\varphi^t_{\ell,g_1,g_2}, B; f, u_0)$ (on $[0,T']$) の強解 u は次の (1.3) ～ (1.6) をみたす：

$$(1.3)\quad \begin{cases} \text{a.e. } t\in[0,T'] \text{ に対し，} x \text{ についての超関数の意味で} \\ u_t(t,\cdot)-\beta(u)_{xx}(t,\cdot)=f(t,\cdot) \text{ on } (0,\ell(t)), \text{ on } (\ell(t),L), \end{cases}$$

(1.4) $u(0,x)=u_0(x)$ a.e. $x\in(0,L)$,

(1.5) $\beta(u)_x(t, 0+) = g_1(t)$, $\beta(u)_x(t, L-) = -g_2(t)$, a.e. $t \in [0, T']$,

(1.6) $\beta(u)(t, l(t)) = 0$, $\forall t \in [0, T']$.

従って，$QVP(l_0, g_1, g_2, f, u_0)$は系(0.1)，(0.2)に対応する quasi-variational 問題とみなすことができる。

定理1.1. $0 < l_0 < L$, $g_1, g_2 \in W^{1,1}(0, T)$, $f \in L^2(0, T; H)$, $u_0 \in X$, $u_0(l_0) = 0$ とする。このとき，$QVP(l_0, g_1, g_2, f, u_0)$はある区間$[0, T']$ $(0 < T' \leq T)$上で少なくとも一組の解をもつ。

注意. (1) $QVP(l_0, g_1, g_2, f, u_0)$の解の一意性はまだ示されていない。しかし，少なくとも，β，Γが滑らかな関数であるなら，その一意性は得られるべきであろう。

(2) 特に，$f \equiv 0$, $g_2 \equiv 0$, $u_0 = 0$ on $[l_0, L]$の場合を考える。このとき，$\{l, u\}$を$[0, T']$上$QVP(l_0, g_1, 0, 0, u_0)$の解とすると，よく知られた $u_t - \beta(u)_{xx} = 0$ に対する比較定理より，

$$u = 0 \quad \text{on } \{(t, x);\ 0 \leq t \leq T',\ l(t) \leq x \leq L\}$$

である．即ち，この場合，$\{l, u\}$ は1相 Stefan 問題の解と考えられる．

2. 抽象論からの結果

本節では，Hを抽象ヒルベルト空間とし，$B: D(B)=H \to H$を次の性質をもつ作用素とする：

$$(2.1)\quad \begin{cases} (Bz-Bz_1, z-z_1)_H \geq C_1 |Bz-Bz_1|_H^2, \\ |z-z_1|_H \leq C_2 |Bz-Bz_1|_H, \quad \forall z, z_1 \in H, \ (C_1, C_2 > 0), \end{cases}$$

また，BはH上の有限連続凸関数jの劣微分作用素，i.e. $B=\partial j$とする．$\{\varphi^t; 0 \leq t \leq T\}$を$H$上のproper l.s.c. 凸関数の族で次の仮定(h.1), (h.2)を満たすものとする：

(h.1) 次の性質(*)を満たす非負関数$a \in W^{1,2}(0,T)$と$b \in W^{1,1}(0,T)$が存在する：

$$(*)\quad \begin{cases} \forall\, 0 \leq s \leq t \leq T,\ \forall z \in D(\varphi^s),\ \tilde{z} \in D(\varphi^t) \text{ such that} \\ |\tilde{z}-z|_H \leq |a(t)-a(s)| \left(|\varphi^s(z)|^{1/2} + 1 \right), \\ \varphi^t(\tilde{z}) - \varphi^s(z) \leq |b(t)-b(s)| \left(|\varphi^s(z)| + 1 \right). \end{cases}$$

(h.2) 各々の$t \in [0,T]$, $r \geq 0$に対し，集合$\{z \in H;\ |\varphi^t(z)| + |z|_H \leq r\}$は$H$で相対コンパクトである．

__定理 2.1__ (cf. [7; Th.1.1], [8; Th.1.1]). B及び$\{\varphi^t; 0 \leq t \leq T\}$を上述と同じもの，$f \in L^2(0,T;H)$，$u_0 \in H$, $Bu_0 \in D(\varphi^0)$とする．このとき，Cauchy 問題

$$\mathrm{CP}(\varphi^t, B; f, u_0) \quad \begin{cases} u'(t) + \partial\varphi^t(Bu(t)) \ni f(t), & 0 < t < T, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

は少なくとも一つの強解uを有する；すなわち，uは

$u \in W^{1,2}(0,T;H)$，$u(0)=u_0$，$t \to \varphi^t(Bu(t))$は$[0,T]$上有界，

$f(t) - u'(t) \in \partial\varphi^t(Bu(t))$ a. e. $t \in [0,T]$

を満たす。

次に，Wを$H \hookrightarrow W$なるバナッハ空間とし，σをW上の連続凸関数で

(2.2) $\quad c_3|z|_W \le \sigma(z) + \sigma(-z) \le c_4|z|_W,\ \forall z \in W$ （$c_3, c_4 > 0$は定数）

を満たすとする。このとき，$\mathrm{CP}(\varphi^t, B; f, u_0)$の解の一意性について次の定理が成立する。

<u>定理2.2</u>(cf. [8; Th. 1.3])。B, $\{\varphi^t; 0 \le t \le T\}$, f, u_0を定理2.1と同じものとする，さらに，$\forall t \in [0,T]$に対し，$\partial\varphi^t \circ B$は$\sigma$-accretiveである（i.e. $z^* \in \partial\varphi^t(Bz)$, $z_1^* \in \partial\varphi^t(Bz_1)$ $\Rightarrow$ $(z^* - z_1^*, w)_H \ge 0$ for some $w \in \partial\sigma(z - z_1)$，ただし，$\partial\sigma$は$\sigma$の$H$上での劣微分作用素）とする。このとき，$\mathrm{CP}(\varphi^t, B; f, u_0)$の強解は一意的である。

最後に，$\mathrm{CP}(\varphi^t, B; f, u_0)$に対する解の安定性についての結

果を述べるために次の族 $\mathcal{G}_\sigma(\varphi, M)$ を導入する：$M>0$，φ を H 上の proper l. s. c. 凸関数とし，次の性質 (a)～(e) をもつ $\{\varphi^t ; 0 \leq t \leq T\}$ の全体を $\mathcal{G}_\sigma(\varphi, M)$ で表わす。

(a) $\varphi^0 = \varphi$;

(b) $a(0) + |a'|_{L^2(0,T)} \leq M$，$b(0) + |b'|_{L^1(0,T)} \leq M$ となる非負関数 $a \in W^{1,2}(0,T)$，$b \in W^{1,1}(0,T)$ が存在し，(φ1) が成立する；

(c) (φ2) が成立する；

(d) $\varphi^t(z) + M(|z|_H + 1) \geq 0$，$\forall z \in H$，$\forall t \in [0,T]$;

(e) $\forall t \in [0,T]$，$\partial\varphi^t \circ B$ は σ-accretive.

定理 2.3 (cf. [8: Th. 1.2]). $\mathcal{G}_\sigma(\varphi, M)$ を上述と同じもの，$f \in L^2(0,T;H)$，$u_0 \in H$，$Bu_0 \in D(\varphi)$ とする。このとき，次の性質 (**) をもつ正の定数 M_0 が存在する：

(**) $\{\varphi^t ; 0 \leq t \leq T\} \in \mathcal{G}_\sigma(\varphi, M)$ である限り，$CP(\varphi^t, B ; f, u_0)$ の強解 u に対し，

$$|u|_{W^{1,2}(0,T;H)} \leq M_0, \quad |\varphi^t(Bu(t))| \leq M_0 \quad (\forall t \in [0,T])$$

が成立する。

3. 問題 $CP(\varphi^t_{\ell, g_1, g_2}, B ; f, u_0)$

$CP(\varphi^t_{\ell,g_1,g_2}, B; f, u_0)$ に前節の結果を適用するために次の補題をみよう．

<u>補題 3.1.</u> $g_1, g_2 \in C([0,T])$, $\ell \in C([0,T])$, $\delta_0 \le \ell \le L-\delta_0$ (δ_0 は正の定数) とする。このとき，定数 $C_1 = C_1(|g_1|_{C([0,T])}, |g_2|_{C([0,T])})$, $C_2 = C_2(|g_1|_{C([0,T])}, |g_2|_{C([0,T])})$, $C_3 = C_3(|g_1|_{C([0,T])}, |g_2|_{C([0,T])}, 1/\delta_0)$ が存在し，次の (a), (b) が成立する：

(a) $\varphi^t_{\ell,g_1,g_2}(z) \ge C_1 \int_0^L |z_x|^2 dx - C_2$, $\forall z \in D(\varphi^t_{\ell,g_1,g_2})$, $\forall t \in [0,T]$;

(b) $\forall s, t \in [0,T]$, $\forall z \in D(\varphi^s_{\ell,g_1,g_2})$, $\exists \tilde{z} \in D(\varphi^t_{\ell,g_1,g_2})$ such that

$$|\tilde{z} - z|_H \le C_3 |\ell(t) - \ell(s)| (|\varphi^s_{\ell,g_1,g_2}(z)|^{1/2} + 1),$$

$$\varphi^t_{\ell,g_1,g_2}(\tilde{z}) - \varphi^s_{\ell,g_1,g_2}(z) \le C_3 \{|\ell(t) - \ell(s)| + |g_1(t) - g_1(s)| + |g_2(t) - g_2(s)|\} (|\varphi^s_{\ell,g_1,g_2}(z)| + 1).$$

次に，(1.2) によって与えられる作用素 B は条件 (2.1) をみたし，$W = L^1(0,L)$ 上の連続凸関数 $z \longmapsto \sigma(z) = \int_0^L z^+ dx$ は明らかに (2.2) を満たす。さらに次の補題が成立する．

補題 3.2. g_1, g_2, ℓ は補題3.1と同じものとするなら，$\forall t\in[0,T]$ に対し，$\partial\varphi^t_{\ell,g_1,g_2}\circ B$ は m-accretive である．

これらの補題の詳しい証明は [8; section 2] を参照．

さて，$R>0$, $0<\delta_0<L$, $0<\ell_0<L$ $(\delta_0<\ell_0<L-\delta_0)$ に対し，

$$\mathcal{L}(\ell_0,\delta_0,R)=\left\{\ell\in W^{1,2}(0,T)\,;\ \begin{array}{l}\ell(0)=\ell_0,\ \delta_0\le\ell\le L-\delta_0\\ |\ell'|_{L^2(0,T)}\le R\end{array}\right\}$$

を考える．

定理3.1. $\mathcal{L}=\mathcal{L}(\ell_0,\delta_0,R)$ を上記のもの，$g_1,g_2\in W^{1,1}(0,T)$, $f\in L^2(0,T;H)$, $u_0\in X$, $u_0(\ell_0)=0$ とする．このとき，$\forall\ell\in\mathcal{L}$ に対し $CP(\varphi^t_{\ell,g_1,g_2}, B; f, u_0)$ は一意解 (on $[0,T]$) を有し，その解 u^ℓ は

$$|u^\ell|_{W^{1,2}(0,T;H)}\le M_0,\quad |\beta(u^\ell)(t,\cdot)|_X\le M_0\quad(\forall t\in[0,T])$$

なる評価式をみたす．ここで，M_0 は $\ell\in\mathcal{L}$ に無関係な定数である．

(証)
$$\varphi(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^L |z_x|^2dx+g_1(0)z(0)+g_2(0)z(L), & (z\in X,\ z(\ell_0)=0),\\ \infty, & (その他)\end{cases}$$

とおけば，十分大きい $M>0$ をとることによって，

$$\ell\in\mathcal{L}\Longrightarrow\{\varphi^t_{\ell,g_1,g_2}\,;\,0\le t\le T\}\in\Phi_\sigma(\varphi,M)$$

がわかる（補題3.1, 3.2を用いる）。従って，前節の結果より定理の結論が得られる．

4. $CP(\varphi^t_{\ell,g_1,g_2}, B; f, u_0)$ の解の収束

本節では，族 $\mathcal{L}=\mathcal{L}(\ell_0, \delta_0, R)$，$g_1, g_2 \in W^{1,1}(0,T)$，$f \in L^2(0,T;H)$，$u_0 \in X$，$u_0(\ell_0)=0$ を固定する．簡単のため，φ^t_{ℓ,g_1,g_2} は φ^t_ℓ と書く．

<u>定理4.1.</u>　$\ell_n \in \mathcal{L}$，$n=1,2,\cdots$，$\ell \in \mathcal{L}$，$\ell_n \to \ell$ in $C([0,T])$ とする。このとき，$CP(\varphi^t_{\ell_n}, B; f, u_0)$ の強解 u_n は $CP(\varphi^t_\ell, B; f, u_0)$ の強解 u に次の意味で収束する：

$$u_n \to u \text{ in } C([0,T];H),\quad u_n' \to u' \text{ in } L^2(0,T;H),$$

$$\beta(u_n)_x \to \beta(u)_x \text{ in } L^2(0,T;H).$$

この定理の証明は，Mosco [11] の凸関数の収束，変分不等式の解の収束に関する結果，及び，[6; Prop. 1.1]，定理 3.1 を用いてなされる．詳しい証明は [8] を参照．

<u>定理4.1の系.</u>　定理 4.1 と同じ仮定と記号の下で，次のことが成立する：

$$(4.1)\qquad \beta(u_n)_x(\cdot, l_n(\cdot)-) \longrightarrow \beta(u)_x(\cdot, l(\cdot)-) \quad \text{in } L^2(0,T),$$

$$(4.2)\qquad \beta(u_n)_x(\cdot, l_n(\cdot)+) \longrightarrow \beta(u)_x(\cdot, l(\cdot)+) \quad \text{in } L^2(0,T).$$

(証) $\varepsilon>0$ を任意の数，この ε に対し，$0<l_n-\hat{l}\leq\varepsilon$（十分大なるすべての n）となる $[0,T]$ 上の滑らかな関数 $\hat{l}$ をとる．このとき，

$$|\beta(u_n)_x(t,l_n(t)-)-\beta(u_n)_x(t,\hat{l}(t))| \leq \int_{\hat{l}(t)}^{l_n(t)} |\beta(u_n)_{xx}(t,x)|dx$$

$$\leq |l_n(t)-\hat{l}(t)|^{1/2}\left\{\int_{\hat{l}(t)}^{l_n(t)} |\beta(u_n)_{xx}(t,x)|^2dx\right\}^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{\varepsilon}\,|u_n'(t)-f(t)|_H, \qquad a.e.\ t\in[0,T].$$

同様に，

$$|\beta(u)_x(t,l(t)-)-\beta(u)_x(t,\hat{l}(t))| \leq \sqrt{\varepsilon}\,|u'(t)-f(t)|_H \quad a.e.\ t\in[0,T].$$

また，$a.e.\ t\in[0,T]$ に対し，

$$|\beta(u_n)_x(t,\hat{l}(t))-\beta(u)_x(t,\hat{l}(t))|^2$$

$$=\int_0^{\hat{l}(t)} \frac{\partial}{\partial x}\{\beta(u_n)_x(t,x)-\beta(u)_x(t,x)\}^2dx$$

$$=2\int_0^{\hat{l}(t)} \{\beta(u_n)_x(t,x)-\beta(u)_x(t,x)\}\{\beta(u_n)_{xx}(t,x)-\beta(u)_{xx}(t,x)\}dx$$

$$\leq 2|\beta(u_n)_x(t,\cdot)-\beta(u)_x(t,\cdot)|_H\,|u_n'(t)-u'(t)|_H.$$

従って，

$$|\beta(u_n)_x(\cdot,l_n(\cdot)-)-\beta(u)_x(\cdot,l(\cdot)-)|_{L^2(0,T)}$$

$$\leq\sqrt{\varepsilon}\left\{|u_n'-f|_{L^2(0,T;H)}+|u'-f|_{L^2(0,T;H)}\right\}$$

$$+\sqrt{2}\,|\beta(u_n)_x-\beta(u)_x|^{1/2}_{L^2(0,T;H)}\,|u_n'-u'|^{1/2}_{L^2(0,T;H)}.$$

ここで，定理4.1の事実を使うと，

$$\limsup_{n\to\infty}|\beta(u_n)_x(\cdot,l_n(\cdot)-)-\beta(u)_x(\cdot,l(\cdot)-)|_{L^2(0,T)}\le\sqrt{\varepsilon}\,K$$

（ただし，Kはn，εに無関係な定数），

εは任意だから，結局(4.1)が得られる．(4.2)も同様．

5. 定理1.1の証明

本節を通じ，$g_1, g_2\in W^{1,1}(0,T)$，$f\in L^2(0,T;H)$，$0<l_0<L$，$u_0\in X$，$u_0(l_0)=0$とする．また，$R>0$と$2\delta_0<l_0<L-2\delta_0$なる正数$\delta_0$を固定し，族$\mathcal{L}=\mathcal{L}(l_0,\delta_0,R)$を考える．簡単のため，以下，$l\in\mathcal{L}$に対し，$CP(\varphi^t_l, g_1, g_2, B; f, u_0)$の強解を$u^l$で表わす．

このとき，定理3.1より，ある定数$M_0>0$が存在し，

(5.1) $|u^l|_{W^{1,2}(0,T;H)}\le M_0$，$|\beta(u^l)(t,\cdot)|_X\le M_0\ (0\le t\le T)$, $\forall l\in\mathcal{L}$

となることに注意する．

補題5.1. 各$\rho>0$に対し，$T_\rho\in(0,T]$が存在し，

$$(5.2)\quad \left(\int_0^{T_\rho} |\beta(u^\ell)_x(r, \ell(r)-)|^2 dr\right)^{1/2} + \left(\int_0^{T_\rho} |\beta(u^\ell)_x(r, \ell(r)+)|^2 dr\right)^{1/2} \le \rho, \quad \forall \ell \in \mathcal{L}$$

となる．

（証）（5.1）を用いて，

$$\int_0^t |\beta(u^\ell)_x(r, \ell(r)-)|^2 dr = \int_0^t \int_0^{\ell(r)} \frac{\partial}{\partial x} |\beta(u^\ell)_x(r, x)|^2 dx dr + \int_0^t g_1^2 dr$$

$$= 2\int_0^t \int_0^{\ell(r)} \beta(u^\ell)_x(r, x)\beta(u^\ell)_{xx}(r, x) dx dr + \int_0^t g_1(r)^2 dr$$

$$\le \varepsilon M_0^2 + C(\varepsilon) M_0^2 t + 2M_0 \int_0^t |f(r)|_H dr + \int_0^t g_1(r)^2 dr$$

が $\forall t \in [0, T]$, $\forall \ell \in \mathcal{L}$ に対し成立することがわかる．ただし，ε は任意の正数で，$C(\varepsilon)$ は ε にのみ依存する正数である．これより，与えられた $\rho > 0$ に対し，$T_1 \in (0, T]$ を適当にとると，

$$\left(\int_0^{T_1} |\beta(u^\ell)_x(t, \ell(t)-)|^2 dt\right)^{1/2} \le \frac{\rho}{2}, \quad \forall \ell \in \mathcal{L}$$

とできる．同様に，$T_2 \in (0, T]$ を適当にとれば，

$$\left(\int_0^{T_2} |\beta(u^\ell)_x(t, \ell(t)+)|^2 dt\right)^{1/2} \le \frac{\rho}{2}, \quad \forall \ell \in \mathcal{L}$$

となることもわかる．$T_\rho = \min\{T_1, T_2\}$ とおけば，明らかに，(5.2) が成立する．

（定理 1.1 の証明）： まず，$\rho > 0$，$T_\rho \in (0, T]$ を (5.2) 及び，

$$C(\sqrt{T_\rho} + \rho) \le R, \quad \sqrt{T_\rho}\, R \le \delta_0$$

を満たすように選び固定する．そして次の様な写像 Q：$\mathcal{L} \to C([0,T])$ を考える：

$$[Q\ell](t) = \begin{cases} \ell_0 + \int_0^t \Gamma(r, \ell(r), \beta(u^\ell)_x(r, \ell(r)-), \beta(u^\ell)_x(r, \ell(r)+))dr, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (0 \le t \le T_\rho), \\ [Q\ell](T_\rho), \ (T_\rho \le t \le T). \end{cases}$$

明らかに，$Q\ell \in W^{1,2}(0,T)$，$[Q\ell](0) = \ell_0$ である．さらに，

$$\int_0^T \left|\frac{d}{dt}[Q\ell](t)\right|^2 dt = \int_0^{T_\rho} |\Gamma(t, \ell(t), \beta(u^\ell)_x(t, \ell(t)-), \beta(u^\ell)_x(t, \ell(t)+))|^2 dt$$
$$\le C^2 \int_0^{T_\rho} (1 + |\beta(u^\ell)_x(t, \ell(t)-)| + |\beta(u^\ell)_x(t, \ell(t)+)|)^2 dt.$$

従って，

$$\left|\frac{d}{dt}[Q\ell]\right|_{L^2(0,T)} \le C(\sqrt{T_\rho} + \rho) \le R,$$
$$|[Q\ell](t) - \ell_0| \le \sqrt{T_\rho}\left|\frac{d}{dt}[Q\ell]\right|_{L^2(0,T)} \le \sqrt{T_\rho}\, R \le \delta_0$$
$$(\text{i.e. } \delta_0 \le \ell_0 - \delta_0 \le [Q\ell](t) \le \ell_0 + \delta_0 \le L - \delta_0).$$

これは，Q は $\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}$ の中に写すことを意味する．さらに，定理4.1の系によると，Q は $C([0,T])$ の位相に関し連続である．$\mathcal{L}$ が空でない $C([0,T])$ のコンパクトな凸集合であることに注意すれば，よく知られた不動点定理により，

$$\ell \in \mathcal{L}, \quad Q\ell = \ell$$

なる ℓ が存在する．このとき，$\{\ell, u^\ell\}$ は，容易にわかる様に，区間 $[0, T_\rho]$ 上で $QVP(\ell_0, g_1, g_2, f, u_0)$ の解を与える．

引用文献

[1] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Math. Studies 5, North-Holland, 1973.

[2] A. Damlamian, *Some results on the multi-phase Stefan problem*, Comm. P.D.E., 2(1977), 1017–1044.

[3] J. Douglas, Jr., *A uniqueness theorem for the solution of a Stefan problem*, Proc. Amer. Math. Soc., 8(1957), 402–408

[4] L. C. Evans and D.B. Kotlow, *One-dimensional Stefan problems with quasi-linear heat equation*, preprint.

[5] A. Fasano and M. Primicerio, *Free boundary problems for nonlinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl., 72(1979), 247–273.

[6] N. Kenmochi, *Some nonlinear parabolic variational inequalities*, Israel J. Math., 22(1975), 304–331.

[7] N. Kenmochi, *On the quasi-linear heat equation with time-dependent obstacles*, to appear in J. Nonlinear Anal, T.M.A., (1980).

[8] N. Kenmochi, *Nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications to free boundary problems*, preprint.

[9] W. T. Kyner, *An existence and uniqueness theorem for a nonlinear Stefan problem*, J. Math. Mech., 8 (1959), 483–498.

[10] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[11] U. Mosco, Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, Advances Math., 3(1969), 510-585.

[12] L.I. Rubinstein, The Stefan problem, Transl. Math. Monographs 27, Amer. Math. Soc., Providence R.I., 1971.

[13] M. Yamaguchi and T. Nogi, Stefan problem (日本語), Sangyo-Tosho, Tokyo, 1977.