

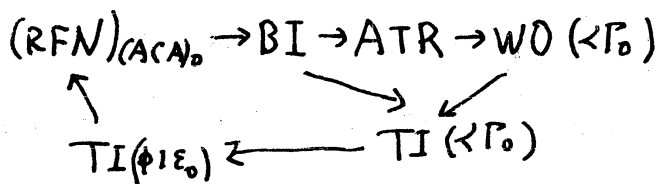
Title	Reflexion Principle on Second order Arithmetic(Logic and the Foundations of Mathematics)
Author(s)	倉田, 令二郎
Citation	数理解析研究所講究録 (1986), 588: 25-28
Issue Date	1986-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/99423
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Reflexion Principle on Second order Arithmetic

(九大工) 倉田令二朗

I 発表した内容は間違... [新井氏の注意]

昨年11月19日 シンポジウムにおいて



と云ふ、これより Friedman-Simpson の結果

$$(ACA)_0 \vdash BI \leftrightarrow RFN_{(ACA)_0}$$

が示せるとしたが、これは間違... (少し少しばかりの間違
いではなく全般的な間違) であることが 新井敏康氏の注意

— 詳細な説明とて述べた — に付してあきらかとなった。

破綻の根源は次の真にある。 Friedman の $RFN_{(ACA)_0}$ とは

ω - $RFN_{(ACA)_0}$ のことである

$$\varphi(X) \rightarrow \exists \text{ countable } \omega\text{-model } M \text{ of } (ACA)_0 \text{ s.t. } X \in X \rightarrow M \models \varphi(X)$$

であるが 筆者は Henkin-completeness の証明法に付して

$$(ACA)_0 \vdash \omega\text{-}RFN_{(ACA)_0} \leftrightarrow RFN_{(ACA)_0}$$

が成立すると誤って思ってしまったのである。

1) $\vdash RFN_{(ACA)_0}$ は大いに弱く

$$(ACA)_0 \vdash Ind \leftrightarrow RFN_{PC} \leftrightarrow RFN(ACA)_0.$$

が成立する。ここで $Ind := \varphi\text{-Ind}$ for all formula φ

$PC :=$ second order logic with equality

実際 $RFN(ACA)_0 \vdash Ind$ は自明, $Ind \rightarrow RFN_{PC}$ は cut elimination と partial truth definition による. $RFN_{PC} \rightarrow RFN(ACA)_0$ は $(ACA)_0$ が finitely axiomatizable であることから出る.

2) $(ACA)_0 \vdash (RFN(ACA)_0 \rightarrow BI)$ の証明を稱してその間は通い. 上記の思ひ込みにより自己暗示にかかりウソの証明を「ツウ上げ」皆様に多大な迷惑をかけた (一時肉とわらわってすまじりウソの話を聞かされた「~~ウソ~~」の「~~ウソ~~」)

$$3) (ACA)_0 \vdash \omega\text{-}RFN(ACA)_0 \leftrightarrow BI$$

は正し. 左か ← の部分については新井 A 自身の証明がある.

4) $BI \rightarrow WO(\langle P_0 \rangle)$ のせよ. $BI \rightarrow WO(P_0)$ (in $(ACA)_0$) により新井の証明がある.

$$5) \text{上のことより } BI \rightarrow Con(ACA) \text{ (in } (ACA)_0)$$

である. $RFN(ACA)_0 \rightarrow BI$ (in $(ACA)_0$) については「~~ウソ~~」.

以上の真に度し新井 A に感謝する

II Reflection Principle on $(ATR)_0$.

以下では PA 上の Reflection-Principle に関する結果の $\rho + \omega$ と ω と ω Friedman McAloon Simpson の結果 (PATRAS Logic Symposium 1982) (FMS と「~~ウソ~~」) を拡張する.

PA 上の Reflection Principle に 対し (次 の 成 立)

$$(1) \text{ PA } \vdash \Sigma_n\text{-RFN}_{(\text{PA})} \leftrightarrow \text{PH}_n \leftrightarrow \Delta_n\text{-WFP}(\varepsilon_0) \leftrightarrow \Pi_n\text{-TI}(\varepsilon_0)$$

PH_n は Paris Harrington Principle, ε_0 は ε_0 (vonder Troer (1979), Kurata (1984-Saitama))

$\Delta_n\text{-WFP}$ (well-founded Principle): \mathbb{N} 上の \prec_{ε_0} 上の 降下 Δ_n -function に 対し (成 立)

Arithmetical transfinite recursion

$$\text{ATR} := \text{WO}(\prec) \rightarrow \exists X ((y, n) \in X \leftrightarrow \varphi(y, X \upharpoonright^n))$$

$$= = = X \upharpoonright^n = \{(y, m) \in X; m < n\}, \varphi(y, X) \text{ is arithmetical,}$$

$$\text{ATR} \text{ is " } \varphi \in \mathcal{O}^X \rightarrow H_{\varphi}^X \text{ exist" (成 立).}$$

$$(\text{ATR})_0 := (\text{ACA})_0 + \text{ATR}$$

$$\text{PA-}\Sigma_n\text{-RFN}_{(\text{ATR})_0} := \text{Pr}_{(\text{ATR})_0}(\ulcorner \varphi(x) \urcorner) \rightarrow \varphi(x) \text{ for } \Sigma_n\text{-formula}$$

φ of PA.

$$[X]^{<\omega} := \text{set of all finite subset of } X$$

$C \subseteq [X]^{<\omega}$ is d-closed \times is $t \in C$ for initial segment of t (set t is 増加列 \times \varnothing) $\times C = \mathbb{R}$ $\times \mathbb{Z}$.

d-closed partition of $[X]^{<\omega}$ \times is $\lambda^0 \gamma (C_0, C_1)$ \times $C_i \subseteq [X]^{<\omega}$, C_i is d-closed ($i=0,1$), $C_0 \cup C_1 = [X]^{<\omega}$, $C_0 \cap C_1 = \varnothing$ \times \varnothing \times \varnothing .

$\text{RT}(\mathbb{Z}, <\omega)$ Ramsey theorem for $(\mathbb{Z}, <\omega)$

\Leftrightarrow For all d-closed partition of $[w]^{<\omega}$, \exists infinite set $X \subseteq w$ such that $[X]^{<\omega} \subseteq C_0$ or $[X]^{<\omega} \subseteq C_1$ (X is homo for (C_0, C_1))

(2) $(ACA)_0 \vdash ATR \leftrightarrow RT(2, <\omega) \leftrightarrow$ open set of $[<\omega]^\omega$ is Ramsey
 \leftrightarrow open set of $[<\omega]^\omega$ is Ramsey (FMS)
 $\equiv \equiv [<\omega]^\omega$ is ω -dense subset of ω -dense, ω -dense; Baire topology $\in \lambda^{\omega}$
 $X \subseteq [<\omega]^\omega$ is Ramsey $\iff \exists A \in [<\omega]^\omega$ s.t. $[A]^\omega \subseteq X$ or $[A]^\omega \cap X = \emptyset$

Minimization of $RT(2, <\omega)$

M : finite set $\neq \emptyset$

d -closed partition of $P(M) \iff (C_0, C_1) \ C_i \subseteq P(M), C_i$ is d -closed
 $(i=0,1)$ and $C_0 \cup C_1 = P(M)$

$X \subseteq M$ is homogeneous d -closed partition (C_0, C_1) of $P(M) \iff$
 $P(X) \subseteq C_0$ or $P(X) \subseteq C_1$ \iff τ

$P(X) \subseteq C_0$ or $P(X) \subseteq C_1$ $\iff \tau$

n -dense set

finite set X is 0 -dense $\iff |X| \geq 2, |X| \geq \min X$

X is $(n+1)$ -dense $\iff P(X)$ is n -dense d -closed partition $\iff \tau$

X is n -dense homogeneous d -closed partition $\iff \tau$

$D := \forall n \exists n$ -dense d -closed partition

(3) $PA-\Sigma_1-RFN_{(ATR)_0} \leftrightarrow D$ (in PA) (FMS)

f -large set $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \iff \exists \tau \subseteq \mathbb{N}$ finite set X is f -large \iff

$f(\min X) \leq |X| \iff \tau$

$D_n \iff \forall n \exists \Delta_n$ -function $f \exists (n$ -dense and f -large set)

$PA \vdash PA-\Sigma_n-RFN_{(ATR)_0} \leftrightarrow D_n \leftrightarrow \Delta_n$ -WFP(P_0) $\leftrightarrow \Pi_n$ -TI(P_0)