

Title	状態空間バンドルにおける接続の概念(Mathematical Theory of Control and Systems)
Author(s)	公文, 雅之; 甘利, 俊一
Citation	数理解析研究所講究録 (1985), 562: 167-186
Issue Date	1985-05
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/99050">http://hdl.handle.net/2433/99050</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 状態空間バンドルにおける接続の概念

東大工 公文 雅之 (Masayuki Kumon)

東大工 甘利 俊一 (Shun-ichi Amari)

### 1. はじめに

本稿では線形システムのある族から成る principal bundle とそれに同伴する state bundle と呼ばれる vector bundle を考察の対象とする。これらの bundle は線形システムの状態ベクトル空間の基底変換に対して定義されるものであり、その直空間はいつでも入出力関係から識別される線形システムの族となる。次に state bundle にシステム論的立場から幾つかの接続を導入する。これによって状態ベクトルの平行移動という概念が定義され、異なる入出力関係をもつシステムに従う2つの状態ベクトルの意味のある比較が可能になる。また次節以下で与える接続のうち幾つかは、システムパラメータに不定性がある場合の制御や状態観測、即ち adaptive regulator や adaptive observer の構成に際しても役立つ概念である。

本稿は線形システムのある族のもつ幾何学的構造にもとづき、システムの同定、推定、適応制御等の問題を取り扱うものであるが、このようなアプローチは外国のシステム論研究者の間で精力的に行なわれているものである。Brockett [1] は 1 入力 1 出力系のシステムの伝達関数のある族の位相的な性質について調べた。state bundle に同伴する principal bundle の構造については、Delchamps [4], Hazewinkel [6], Hazewinkel & Kalman [7], Kalman [8] 等の研究がある。さらにこれらにもとづき同定や制御の問題を扱ったものに Byrnes [2], Clark [11], Delchamps [3], Glover [5], Kamen & Khargonekar [9] がある。

## 2. 定数係数線形システム空間

本節では考察対象である線形システムのある族を定義し、その幾何学的構造について既知の結果を説明する。詳しくは Hazewinkel [6], Hazewinkel & Kalman [7] を参照されたい。

定数係数線形システムのふるまいは例えば deterministic な離散系の場合、状態ベクトル表現を用いると

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, \quad y_t = Cx_t \quad (1)$$

と表わされる。ここで  $x_t \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_t \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_t \in \mathbb{R}^p$  はそれぞれの次元をもつ状態ベクトル、入力ベクトル、出力ベクトル、従って  $A, B, C$  は  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $p \times n$  の行列である。一つの線形システムの動作は一組の  $(A, B, C)$  を与えれば決まる。その意味で  $\tilde{\theta} := (A, B, C)$  と記し、 $\tilde{\theta}$  を一つの線形システムと呼ぶことにする。以上は deterministic な離散系を例にしたが、stochastic であろうと連続系であろうと  $\tilde{\theta}$  が一つの線形システムを決定することには変わりはない。次に  $\tilde{\theta}$  に対して可制御性、可観測性の判定条件として使われる2つの行列を定義する。

$$Q_c(\tilde{\theta}) := [B, AB, \dots, A^{n-1}B], \quad (2)$$

$$Q_o(\tilde{\theta})^T := [C^T, (CA)^T, \dots, (CA^{n-1})^T]. \quad (3)$$

本稿の対象である線形システムの族は次式で定義される。

$$\tilde{\Sigma}_{m,p}^n := \{ \tilde{\theta} \mid \text{rank } Q_c(\tilde{\theta}) = \text{rank } Q_o(\tilde{\theta}) = n \} \quad (4)$$

$\tilde{\Sigma}_{m,p}^n$  には  $\mathbb{R}^{(m+p+n)n}$  の open set としての位相を与える。

次に集合  $\tilde{\Sigma}_{m,p}^n$  に対して同値関係  $\sim$  を次のように導入する。

$$\tilde{\theta} = (A, B, C), \quad \tilde{\theta}' = (A', B', C') \in \tilde{\Sigma}_{m,p}^n$$

$$\text{に対して} \quad \tilde{\theta} \sim \tilde{\theta}'$$

$$\iff \exists g \in GL(n, \mathbb{R}) \text{ s.t.}$$

$$A' = g^{-1} A g, \quad B' = g^{-1} B, \quad C' = C g$$

この同値関係で  $\tilde{\Sigma}_{m,p}^n$  を同値類に分割した集合を  $\Sigma_{m,p}^n :=$

$\tilde{\Sigma}_{m,p}^n / \sim$  と記し、 $\tilde{\Theta}$  に対してその同値類  $\theta := [\tilde{\Theta}]$  を対応させる写像を  $\pi: \tilde{\Sigma}_{m,p}^n \rightarrow \Sigma_{m,p}^n$  とする。  $\pi(\tilde{\Theta}) = \theta$ 。  $\Sigma_{m,p}^n$  は線形システムの族を入出力の点から識別したものであり、 $\pi$  による商位相を与えることにより  $n(m+p)$  次元多様体の構造をもつ。さらに3つ組  $\{\tilde{\Sigma}, \pi, \Sigma\}$  は  $\tilde{\Sigma}$  を全空間、 $\Sigma$  を底空間、 $\pi$  を射影、 $GL(n, R)$  を構造群とする principal bundle となる。この主束に同伴する  $n$  次元 vector bundle を  $\{X, \rho, \Sigma\}$  と記す。 $\theta \in \Sigma$  上のファイバー  $X_\theta := \rho^{-1}(\theta)$  は入出力が  $\theta$  で指定されるシステムの状態ベクトルが属する  $n$  次元ベクトル空間である。以上の2つの fibre bundle  $\tilde{\Sigma} \xrightarrow{\pi} \Sigma, X \xrightarrow{\rho} \Sigma$  が考察対象となる。

### 3. state bundle における種々の接続

$\Sigma$  の局所座標系を  $\theta = (\theta^\mu), \mu = 1, \dots, n(m+p)$  とする。Vector bundle  $X$  における接続は近接するファイバー  $X_\theta, X_{\theta+d\theta}$  間の対応を与える幾何学的概念である。 $x \in X_{\theta+d\theta}$  を  $X_\theta$  に写像したものを  $x + \delta x$  とし、 $\delta x$  は  $x$  及び  $d\theta$  に関して線形であるとする (線形接続の仮定)、 $\delta x = \Gamma_\mu d\theta^\mu \times x$  と表わされる。 $\Gamma_\mu = \Gamma_\mu(\theta)$  は  $\theta$  に依存した  $n \times n$  の行列であり、接続係数と呼ばれる。線形接続を与えることはこの接続係数  $\Gamma_\mu$  を与えることに帰着する。以下システム論

的妥請から4種類の接続、即ち  $\Gamma_\mu$  を導入する。

Ex1. a) (1) で特に  $u_t \equiv 0$  の場合

$$x_{t+1} = A x_t, \quad y_t = C x_t$$

を考える。このとき  $n$  個の出力ベクトルの列  $\tilde{y}_t^T := (y_t^T, \dots, y_{t+n-1}^T)$  は、状態ベクトル  $x_t$  と  $\tilde{y}_t = Q_0 x_t$  なる関係にある。  $\tilde{Y} := \Sigma \times \mathbb{R}^{np}$  とおけば、この関係は bundle 準同型  $Q_0: X \rightarrow \tilde{Y}$ ,  $Q_0 = \{Q_0(\theta) \mid \theta \in \Sigma\}$  を導く。  $\tilde{Y}$  の計量を  $\|\cdot\|_{\tilde{Y}} := \tilde{y}^T \tilde{y}$  で定義し、接続に対して次の妥請を課す。

$$\|Q_0(\theta+d\theta)x - Q_0(\theta)(x+\delta x)\|_{\tilde{Y}} \rightarrow \min \quad (5)$$

これより導ひかれる接続係数を  $\Gamma_\mu^0$  とすると

$$\Gamma_\mu^0 = Q_0^+ \partial_\mu Q_0 \quad (6)$$

であることがわかる。ここで  $Q_0^+ := (Q_0^T Q_0)^{-1} Q_0^T$ 。

Ex1. b) (1) で状態ベクトル部分のみに注目し  $x_0 = 0$  とする。このとき  $n$  個の入力ベクトルの列  $\tilde{u}_n^T := (u_n^T, \dots, u_1^T)$  は  $x_n$  と  $x_n = Q_c \tilde{u}_n$  なる関係にある。  $\tilde{U} := \Sigma \times \mathbb{R}^{nm}$  とおけば、  $Q_0$  の場合と同様  $Q_c$  は bundle 準同型  $Q_c: \tilde{U} \rightarrow X$ ,  $Q_c = \{Q_c(\theta) \mid \theta \in \Sigma\}$  を導く。いま  $x = Q_c(\theta + d\theta) \tilde{u} \in X_{\theta+d\theta}$  とし、接続に対して妥請

$$\|x + \delta x - Q_c(\theta) \tilde{u}\|_X \rightarrow \min \quad (7)$$

を課す。ここで  $\|\cdot\|_X$  は  $X$  の適当な計量。

これより導ひかれる接続係数を  $\Gamma_\mu^c$  とおくと

$$\Gamma_\mu^c = -\partial_\mu Q_c Q_c^+ \quad (8)$$

であることがわかる。ここで  $Q_c^+ := Q_c^T (Q_c Q_c^T)^{-1}$ 。

Ex 2. a) Product bundle  $U := \Sigma \times \mathbb{R}^m$  を入力 bundle と呼ぶ。  $F: X \rightarrow U$  をある bundle 準同型とする。  $F$  は  $F = \{F_\theta \mid \theta \in \Sigma\}$  で構成され、各  $F_\theta$  は state feedback  $F_\theta: X_\theta \rightarrow \mathbb{R}^m$  を与える。  $\text{rk } F_\theta := \dim F(X_\theta)$  とおき、  $F$  に対して次の仮定をおく。

仮定: 各  $\theta_0 \in \Sigma$  に対して  $\theta_0$  のある近傍  $V(\theta_0) \ni \theta_0$  が存在し、任意の  $\theta \in V(\theta_0)$  に対して  $\text{rk } F_\theta = \text{const.}$  なる条件を満たす。

このとき  $\text{Ker } F := \{x \in X \mid F(x) = 0\}$  とおくと、  $\text{Ker } F$  は  $X$  の sub-bundle となり、  $X / \text{Ker } F$  は sub-bundle  $\text{Ker } F$  から導ひかれる quotient bundle である。  $F: X \rightarrow U$  は  $\tilde{F}[x] := Fx$  により ( $[x] \in X / \text{Ker } F$ ) 自然に bundle 準同型  $\tilde{F}: X / \text{Ker } F \rightarrow U$  を導ひく。ここで vector bundle  $X / \text{Ker } F$  における接続  $\delta[x]$  に対して

$$\| \tilde{F}(\theta + d\theta)[x] - \tilde{F}(\theta)([x] + \delta[x]) \|_U \rightarrow \min \quad (9)$$

なる要請を課す。これより得られる接続係数を  $\Gamma_\mu^F$  とおくと

$$\Gamma_\mu^F = \tilde{F}^+ \partial_\mu \tilde{F} \quad (10)$$

であることがわかる。ここで  $\tilde{F}^+ := (\tilde{F}^T \tilde{F})^{-1} \tilde{F}^T$  であり、

$\tilde{F}$  を  $m \times (\text{rk } F)$  とすると  $\Gamma_\mu^F$  は  $(\text{rk } F) \times (\text{rk } F)$  である。

Ex 2. b) Product bundle  $Y := \Sigma \times R^p$  を出力 bundle と呼ぶ。  $K: Y \rightarrow X$  をある bundle 準同型とする。  $K$  は  $K = \{K_\theta \mid \theta \in \Sigma\}$  で構成され、各  $K_\theta$  は output observer  $K_\theta: R^p \rightarrow X_\theta$  を与える。  $K$  に対して  $F$  の場合と同じ仮定をおく。 このとき  $\text{Im } K (= K(Y))$  は  $X$  の sub-bundle となり、  $K$  は自然に bundle 準同型  $\tilde{K}: Y \rightarrow \text{Im } K \subset X$  を導く。  $\text{Im } K$  の元を  $\bar{x}$  で表わし  $\bar{x} = \tilde{K}(\theta + d\theta)y$  に対して  $\text{Im } K$  における接続  $\delta \bar{x}$  に対して

$$\| \bar{x} + \delta \bar{x} - \tilde{K}(\theta)y \|_{\text{Im } K} \rightarrow \min \quad (11)$$

と要請する。 これより得られる接続係数を  $\Gamma_\mu^K$  とおくと

$$\Gamma_\mu^K = -\partial_\mu \tilde{K} \tilde{K}^+ \quad (12)$$

であることがわかる。 ここで  $\tilde{K}^+ := \tilde{K}^T (\tilde{K} \tilde{K}^T)^{-1}$  であり、  $\tilde{K}$  を  $(\text{rk } K) \times p$  とすると  $\Gamma_\mu^K$  は  $(\text{rk } K) \times (\text{rk } K)$  である。

Ex 1. a, b), Ex 2. a, b) の接続の意味はそれらを導く各要請から明らかである。 尚 Ex 1. a, b) の接続は, De-  
lchamps [4] がそれぞれ observability connection, controllability connection として導入したものに一致する。



## 4. state bundle における曲率と平行移動

Vector bundle  $X$  に接続  $\Gamma_\mu$  及び  $\Sigma$  上の曲線  $C(s)$  が与えられているとする。このとき曲線上の fibre  $X_{C(0)}$  から  $X_{C(s)}$  への写像が微分方程式

$$\frac{dx}{ds} + \Gamma_\mu(C(s)) \frac{dC^m}{ds} x = 0$$

の解として得られる。この写像を  $P_C(s) : X_{C(0)} \rightarrow X_{C(s)}$  とおくと、 $P_C(s)$  は  $X_{C(0)}$  から  $X_{C(s)}$  への線形同形を与え、 $C$  に沿う平行移動と呼ばれる。このように平行移動は曲線  $C$  に依存した概念であるため、 $\Sigma$  上の 2 点を結ぶ 2 つの曲線に沿う平行移動の結果が一致するとは限らない。平行移動の結果が選んだ曲線に依るかどうかは曲率と呼ばれる量によって判定される。接続係数  $\Gamma_\mu$  から定義される一次微分形式  $\omega := \Gamma_\mu d\theta^m$  を接続形式と呼び、曲率は曲率形式という二次微分形式  $\Omega := d\omega + \omega \wedge \omega$  によって計算される。

Ex1.a) の接続形式を  $\omega_0$ 、曲率形式を  $\Omega_0$  とすると、簡単な計算により

$$\Omega_0 \equiv 0 \iff p = 1 \quad (13)$$

であることがわかる。また Ex1.b) の接続形式を  $\omega_c$ 、曲率形式を  $\Omega_c$  とおくと同様に

$$\Omega_c \equiv 0 \iff m = 1 \quad (14)$$

Ex2.a) の接続形式を  $\omega_F$ 、曲率形式を  $\Omega_F$  とすると、

$$\Omega_F \equiv 0 \Leftrightarrow \text{rk } F = m, \text{ i.e. } F \text{ が全射.} \quad (15)$$

また Ex 2. b) の連続形式を  $\omega_K$ , 曲率形式を  $\Omega_K$  とすると

$$\Omega_K \equiv 0 \Leftrightarrow \text{rk } K = p, \text{ i.e. } K \text{ が単射.} \quad (16)$$

いづれの場合でも  $\Omega \equiv 0$  が、平行移動が曲線に依らないための条件である。さらにこれは連続に対する各要請が正確に成り立つための条件でもある。

曲率の直接の意味は上述の通りであるが、これを state bundle に同値する principal bundle  $\tilde{\Sigma}$  において考えることもできる。実際  $\Omega \equiv 0$  は  $\tilde{\Sigma}$  における fibre 方向に横断的なあるベクトル場の積分可能条件に他ならない。さらに Ex 2. a, b) に対応して得られる積分多様体は次節以下で述べるように適応制御や適応観測の問題を考える際に役立つ。

## 5. Adaptive regulator と F- 連続

State feedback  $F: X \rightarrow U$  として特に LQ problem の定常最適解として得られるものを考える。これは連続系では

$$F = -B^T P, \quad (17)$$

離散系では

$$F = -(B^T P B + I)^{-1} B^T P A \quad (18)$$

で与えられる。ここで  $P$  はそれぞれ algebraic Riccati

equation (ARE)

$$A^T P + PA - P B B^T P + C^T C = 0 \quad (19)$$

$$P = A^T P (A - BF) + C^T C \quad (20)$$

の正定値 (unique) な解である。(17) 或いは (18) の  $F$  が前節の仮定を満たすことは容易にわかる。従って quotient bundle  $X / \text{Ker} F$  に (10) の接続が導入される。曲率  $\Omega_F$  に対する条件 (15) は  $\text{rk } F_\theta = m$  なる  $\theta \in \Sigma$  の領域で満たされるか。これは (17) の場合  $\text{rk } B = m$  の領域、また (18) の場合  $\text{rk } B = m$ , かつ  $A$ : regular なる領域である。これらはいづれも  $\Sigma$  における dense な open set を成す。この意味で  $\Omega_F \equiv 0$  は  $\Sigma$  の殆どいたるところで満たされているといってよい。ところで前節で触れたように  $\Omega_F \equiv 0$  は principal bundle  $\tilde{\Sigma}$  におけるある積分多様体の存在を保証する。接続  $\Gamma_F$  に対する要請 (10) からわかるように、この積分多様体は同じ feed back gain  $F$  の値を与える  $\theta$  の集合に他ならない。 $\tilde{\Sigma}$  の要素を同じ  $F$  の値を与えるものは同値であると思做すと、ファイバーに横断的な積分多様体の族に同値分割されることになる。 $\tilde{\Sigma}$  の要素を入出力の点から座標つけるのが  $\Sigma$  であるのに対して、上記の積分多様体の族を座標つけるのは  $\tilde{\Sigma}$  のファイバー、即ち  $GL(n, R)$  の元である。

このことを用いてシステムパラメータに不定性がある場合

の adaptive regulator の構成について考えよう。システム方程式は stochastic な離散系で、さらに状態ベクトルに正規誤差が加わり、観測されるものとする

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + w_t, \quad y_t = x_t$$

ここで  $w_t$ ,  $t=1, 2, \dots$  は互いに独立で、 $N(0, I_n)$  に従うものとする。この場合 (18) を用いた state feedback

$u_t = Kx_t$  は criterion

$$J_1 := \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} (y_{t+1}^T y_{t+1} + u_t^T u_t) \right] \quad (21)$$

或いは

$$J_2 := \lim_{t \rightarrow \infty} E [ y_{t+1}^T y_{t+1} + u_t^T u_t ] \quad (22)$$

を最小にするという点で最適なものである。問題はシステムパラメータ行列  $A$ ,  $B$  が未知の場合でもこの最適性を保持する regulator を構成することである。

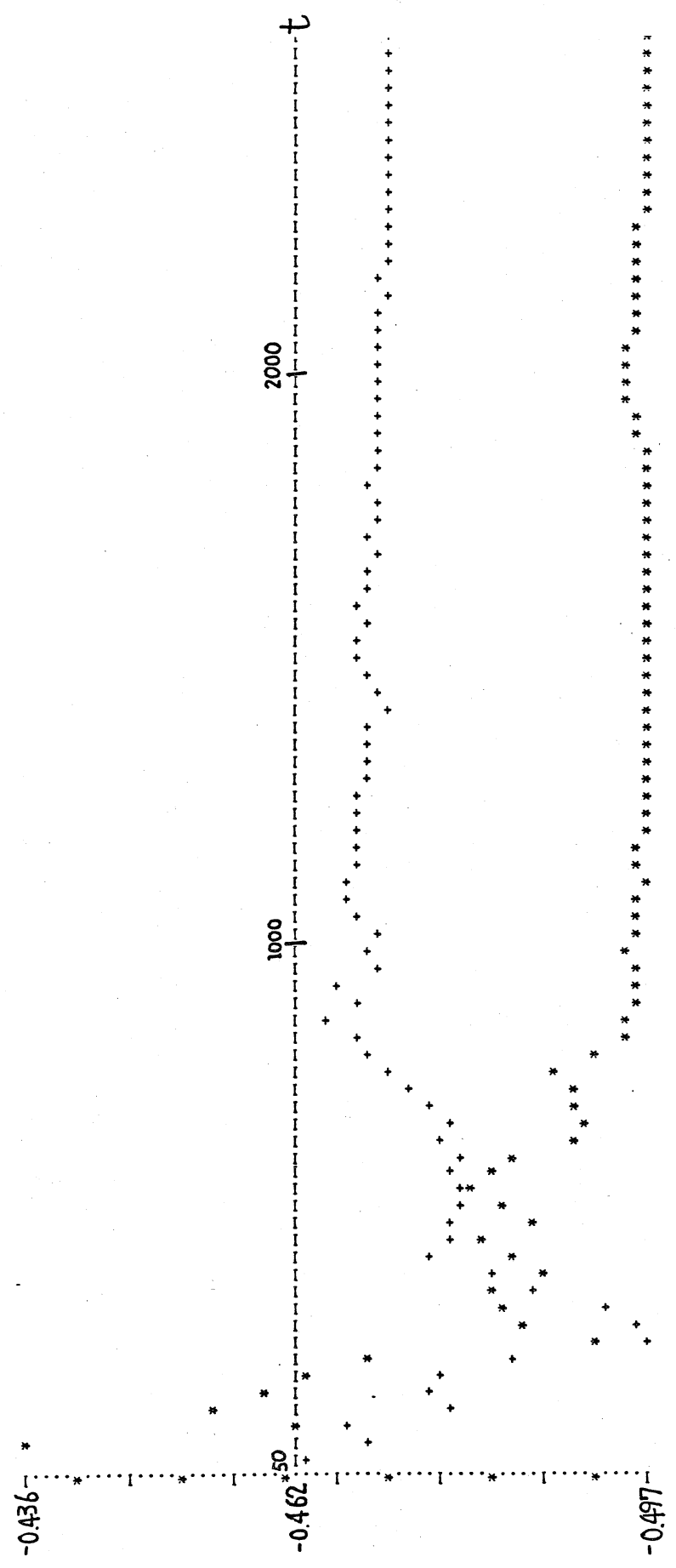
通常この問題に対しては  $A$ ,  $B$  を逐次最尤法等によって、 $\hat{A}_t, \hat{B}_t$ ,  $t=1, 2, \dots$  と推定し、これらの推定値を用いて RE (20) を解きその解  $P_t$  にもとづき (18) から feedback gain  $K_t$  を求め、入力  $u_t = K_t x_t$  としてシステムに戻すという操作の繰り返しが行なわれる。この algorithm の安定性や漸近的最適性に関しては Mandl [10] 等の解析があるが、ここでは違ったアプローチを試みる。いま真のシステム行列を  $A^*$ ,  $B^*$  とし、これより得られる最適な

gain 行列を  $K^*$  とする。漸近的に最適な regulator を得るには、 $\lim_{t \rightarrow \infty} K_t = K^*$  なる gain 行列の推定系列  $K_t$ ,  $t=1, 2, \dots$  を構成することが必要十分であって、システム行列の推定値に関する一致性  $\hat{A}_t \rightarrow A^*$ ,  $\hat{B}_t \rightarrow B^*$  は必ずしも必要ではない。必要なことは  $\Sigma$  における真の  $\tilde{\theta}^* = (A^*, B^*)$  を含む積分多様体を推定することである。積分多様体の族は fibre  $GL(n, R)$  で座標つけられるから、任意の gain 行列  $F_0$  に対して唯一の  $g^* \in GL(n, R)$  が存在して、 $F^* = F_0 g^*$  となるはずである。そこで  $g_t \rightarrow g^*$  となる  $g_t \in GL(n, R)$  の系列、或いは  $g_t = e^{M_t}$  として  $M_t \in M(n, n; R)$  の系列を構成すればよい。これには確率近似法にもとづき criterion  $J_2$  の期待値を取った  $I_t := y_{t+1}^T y_{t+1} + u_t^T u_t$  の減少する方向に  $M_t$  を更新していく。但し問題の性質上、 $I_t$  の勾配、或いは差分によるその近似値を使えないので、確率的な探索法によつて  $M_t$  を変更していく。

図 1, 2 に  $n=m=1$  の場合のシミュレーションの結果を示す。図 1 は  $A^* = 0.8$ ,  $B^* = 1.0$  の場合で、このとき  $F^* = -0.462$ 。図 2 は  $A^* = 1.0$ ,  $B^* = 0.5$  の場合で  $F^* = -0.781$  である。図において  $\square$  が最適な  $F^*$  を表わし、 $*$  が通常の逐次最小 2 乗法による  $A, B$  の推定にもとづく gain の推定値の系列、 $+$  がここで提案した方法による gain

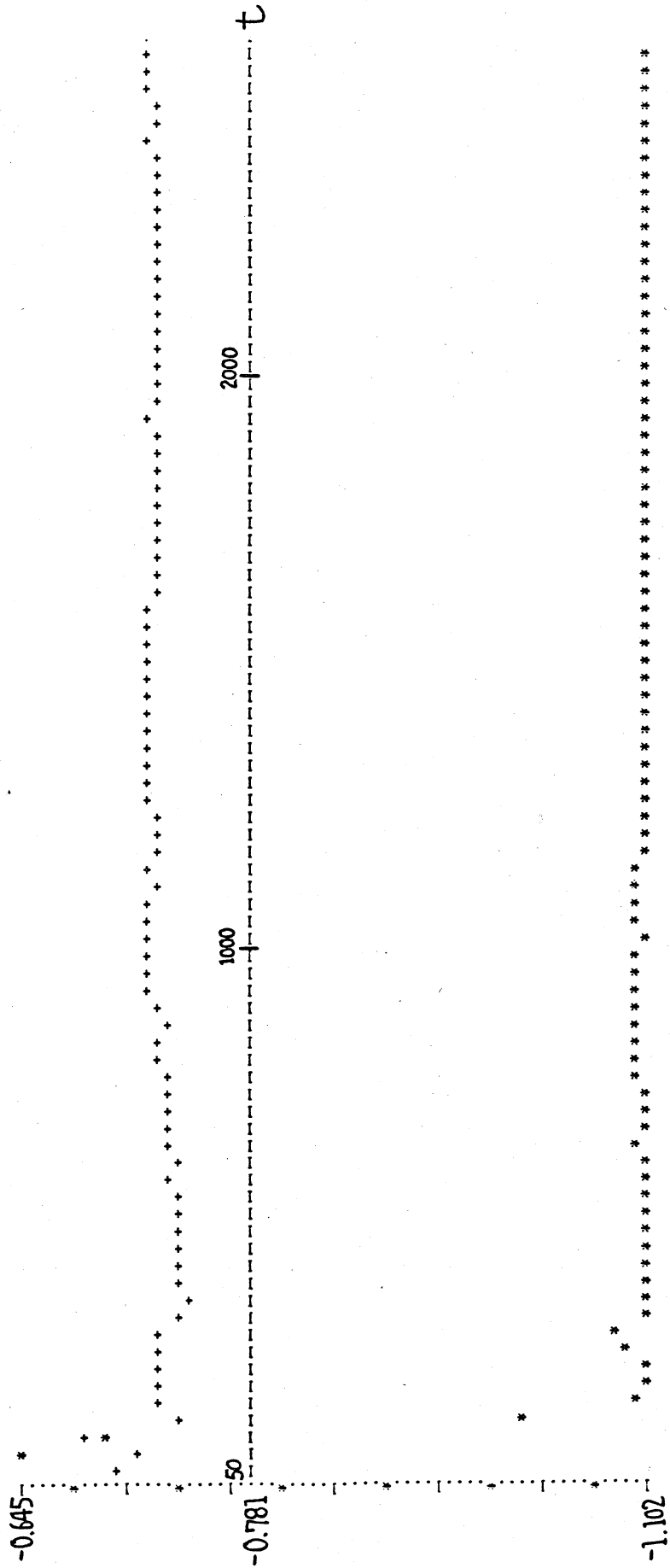
图 1.

$A^* = 0.8, B^* = 1.0, F^* = -0.462$



例 2.

$$A^* = 1.0, B^* = 0.5, F^* = -0.781$$



の推定値の系列である。 $\hat{A}_t, \hat{B}_t$  の初期値は図1では、 $\hat{A}_0 = 1.0, \hat{B}_0 = 0.5$ , 図2では  $\hat{A}_0 = 0.5, \hat{B}_0 = 1.0$  とした。また+法の gain の初期値は、 $t=50$  における\*法の gain の推定値を用いた。図1, 2ではいずれも+法の方が最適な $\mu$ に近いが、一般的には真のシステムが安定で入力の影響が強い場合、即ち  $|A^*| < 1$  で  $|B^*| \gg 0$  の場合には+法の方が優れた適応性を示すが、不安定なシステム  $|A^*| > 1$  では+法の初期時刻(図1, 2の場合は  $t=50$ )が早すぎると gain が発散してしまうことかしばしば起こる。いずれにしても+法には algorithm 上まだ改良の余地がある。

## 6. Adaptive observer と K-接続

### Stochastic な離散系

$$x_{t+1} = Ax_t + Bw_t, \quad y_t = Cx_t + v_t$$

を考える。ここで  $w_t, v_t$  は互いに独立な確率変数で、共に  $N(0, I_n)$  に従うものとする。このシステムの状態ベクトル  $x_t$  を推定するには周知の Kalman filter

$$\hat{x}_{t+1} = A \hat{x}_t + K[y_t - C \hat{x}_t] \quad (23)$$

を構成すればよい。ここで gain  $K$  は

$$K = AQC^T(CQC^T + I)^{-1} \quad (24)$$

で与えられ、 $Q$  は ARE  $Q = (A - KC)QA^T + BB^T$  の正定



値解 (unique) である。(23)は criterion

$$J_3 := \lim_{t \rightarrow \infty} E[(x_t - \hat{x}_t)^T S (x_t - \hat{x}_t)] \quad (25)$$

を最小にするという意味で最適である。(Sは任意の正定値行列) ここでシステム行列  $A \sim C$  が未知の場合にもこの最適性を保持するような状態推定量を構成する問題を考えよう。

この問題に対しては通常  $A \sim C$  に対して  $A(\eta) \sim C(\eta)$  のように identifiable なパラメータ依存性を人為的に仮定し、 $\eta$  の推定量  $\hat{\eta}_t$  を用いた  $A(\hat{\eta}_t) \sim C(\hat{\eta}_t)$  から ARE を解いて  $Q_t$  を求め (24) より  $K_t$  を計算し、

$$\tilde{x}_{t+1} = A(\hat{\eta}_t) \tilde{x}_t + K_t [y_t - C(\hat{\eta}_t) \tilde{x}_t]$$

によって推定量  $\tilde{x}_t$  を構成するという手順で行なわれる。しかしこの方法ではある  $\eta^*$  に対して  $A(\eta^*) = A^* \sim C(\eta^*) = C^*$ 、即ち始めに仮定した  $A(\eta) \sim C(\eta)$  が真の  $A^* \sim C^*$  を含むことが保証されていないと都合が悪い。ここでは真の  $A^* \sim C^*$  が  $\Sigma$  に属すること以外の仮定を置かずに状態を推定する algorithm を考えよう。まず  $A \sim C$  に対して observer (local) canonical form を仮定する。勿論真の  $A^* \sim C^*$  がこの canonical form に含まれているとは仮定しない。次に逐次最小2乗法等によって canonical form 上で  $A \sim C$  の推定値  $\hat{A}_t \sim \hat{C}_t$  を構成する。これらと (24) を用いて filter

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{A}_t \hat{x}_t + K_t [y_t - \hat{C}_t \hat{x}_t]$$

を作る。さらに  $g_t \in GL(n, R)$  なる系列を用いて  $\hat{x}_t = g_t \cdot x_t$  とおく。  $g_t, t=1, 2, \dots$  の選び方は次の通りである。  
 $\hat{A}_t, \hat{C}_t$  より計算される (3) の行列を  $\hat{Q}_{0t}$  とおく。そして  $\hat{y}_t := \hat{Q}_{0t} \hat{x}_t$  とおき、  $\tilde{y}_t^T = (y_t^T, \dots, y_{t+n-1}^T)$  と  $\tilde{\hat{y}}_t^T = (\hat{y}_t^T, \dots, \hat{y}_{t+n-1}^T)$  との差、即ち  $I_3 := (\tilde{y}_t - \tilde{\hat{y}}_t)^T \times (\tilde{y}_t - \tilde{\hat{y}}_t)$  を criterion として、確率近似法にもとづき  $I_3$  の減少する方向に逐次的に  $g_t$  を更新する。この  $I_3$  は (25) において丁度  $S = Q_0^*{}^T Q_0 > 0$  と選んだことに対応する。前節の regulator の場合と違って、 $I_3$  の勾配は差分による近似値を用いて計算できる。以上の algorithm は canonical form 上の推定値  $\hat{A}_t \sim \hat{C}_t$  によって真の  $A^* \sim C^*$  を含むファイバーを推定すると同時に、ファイバー方向に  $x_t$  の推定値  $\hat{x}_t = g_t x_t$  を更新するという手順にもとづいている。

以上の議論は持続の概念とは関係ないが、 $p=1$  の場合にはこれを利用した algorithm も可能である。Regulator の場合と同様に漸近的に最適な  $x_t$  の推定値を得るには最適な gain  $K^*$  に収束する gain の系列  $K_t, t=1, 2, \dots$  を構成することか必要十分であって、システム行列の推定値に関する一貫性は必ずしも必要ではない。言い換えると真の  $A^* \sim C^*$  を通る持続  $\Gamma_{\mu}^K$  に関する積分多様体を推定することか条件

である。積分多様体の族を座標づけるファイバー  $GL(n, R)$  の元  $g_{1t} \in GL(n, R)$  を取って gain の系列を  $K_t := g_{1t}^{-1} \times K_0$  と推定する。(  $K_0$  は初期値)  $g_{1t}$  を更新するには  $I_3$  のような測定可能な criterion を用いる。そこで更に真の  $Q_0^*$  に収束する系列  $Q_{0t}$  を作る必要がある。これは真の  $A^*, C^*$  を通る持続  $I_\mu^0$  に関する積分多様体を推定することを意味する。そこでファイバー  $GL(n, R)$  の別の元  $g_{2t} \in GL(n, R)$  を取って  $Q_{0t} := Q_{00} g_{2t}$  と推定する。以上は次の手順にまとめられる。

$$\hat{x}_{t+1} = \tilde{A}_t \hat{x}_t + K_t [y_t - \tilde{C}_t \hat{x}_t],$$

$$\tilde{A}_t := g_{2t}^{-1} A_0 g_{2t}, \quad \tilde{C}_t := C_0 g_{2t},$$

$$K_t := g_{1t}^{-1} K_0, \quad Q_{0t} := Q_{00} g_{2t},$$

$I_J := (\tilde{y}_t - Q_{0t} \hat{x}_t)^T (\tilde{y}_t - Q_{0t} \hat{x}_t)$  が減少する方向に逐次的に  $g_{1t}, g_{2t} \in GL(n, R)$  を変更する。

$p=1$  ならば (13) より、それぞれ唯一の  $g_1^*, g_2^* \in GL(n, R)$  が存在して、 $Q_{00} g_2^* = Q_0^*$ ,  $g_1^{*-1} K_0 = K^*$  となり上記の algorithm は漸近的に最適な  $x_t$  の推定値を与えるはずである。

### 参考文献

[1] R. W. Brockett, "Some geometric questions in

- the theory of linear systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-21, pp 449-455, 1976.
- [2] C.I. Byrnes, "On the stabilizability of linear control systems depending on parameters", Proc. 18th IEEE Conf. Decision and Contr., Ft. Lauderdale, FL, Dec. 1979, pp 233-236.
- [3] D.F. Delchamps, "Analytic stabilization and the algebraic Riccati equation", in Proc. 22nd IEEE Conf. Decision and Contr., San Antonio, TX, 1983.
- [4] D.F. Delchamps, "The geometry of spaces of linear systems with an application to the identification problem," Ph.D. dissertation, Harvard Univ., Cambridge, MA, 1982.
- [5] K. Glover, "Structural aspects of system identification", Ph. D. dissertation, Elect. Eng., Electron. Syst. Lab., Mass. Inst. Technol., Cambridge, MA, Rep. ESL-R-516.
- [6] M. Hazewinkel, "Moduli and canonical forms of linear dynamical systems II: The topological case", Math. Syst. Theory, vol 10, pp 363-385, 1977.

- [7] M. Hazewinkel and R. E. Kalman, "On invariants, canonical forms and moduli for linear constant, finite-dimensional dynamical systems," in *Lecture Notes in Econ. Mathematical System Theory*, vol 131, New York: Springer-Verlag, 1976, pp 48 - 60.
- [8] R. E. Kalman, "Global structure of classes of linear dynamical systems", in *Proc. NATO Advanced Study Inst. on Geometric and Algebraic Methods for Nonlinear Syst.*, 1973.
- [9] E. Kamen and P.P. Khargonekar, "On the control of linear systems depending on parameters," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-29, pp 25-33, 1984.
- [10] P. Mandl, "The use of optimal stationary policies in the adaptive control of linear systems," *Proc. Symposium to honour Jerzy Neyman, Warsaw*, pp. 223-242, 1974.
- [11] J.M.C. Clark, "The consistent selection of local coordinates in linear systems identification," in *Proc. Joint Automat. Contr. Conf.*, 1976, pp 576-580.