Title	Edwards-Anderson modelにおけるオーバーラップ分布関数の性質について
Author(s)	野末, 大樹
Citation	物性研究 (1998), 69(4): 624-652
Issue Date	1998-01-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/96245
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

物性研究　69－4（1998－1）

修士論文　(1996年度)

Edwards-Anderson modelにおける オーバーラップ分布関数の性質について

東京工業大学大学院
理工学研究科 応用物理学専攻
野末 大樹

概要

スピングラスのモデルであるEdwards-Anderson model（EA model）のオーバーラップ分布関数の性質を調べる。特に最近、Newman と Stein によって示されたオーバーラップ分布関数の自己平均性に注目した。彼らの証明はボンド配列の平行移動エルゴード性を用いた非常にシンプルなものであるが、その結果は大きな意味を持つ。彼らの結果が正しければ、EA model に関して従来予想されていた相転移描像のひとつであるParisi picture（SK modelの相転移描像がEA modelでも成り立つとするもの）が否定されるからである。

そこで、今回我々はNewman-Steinの議論を詳細に検討してみた。その結果、彼らの定理の前提条件はかならずしも自明ではないという結論に達した。特にParisi pictureの成立を仮定したときのオーバーラップ分布関数の性質を調べ、この関数がNewman-Steinの定理が適用できないものになっている可能性を指摘する。

目次

1 序論

Edwards-Anderson model (EA model) は最近接格子対におけるスピン間にランダムな相互作用が働いているスピングラスのモデルである。EA model の相転移描像、すなわち Gibbs 測度の pure state への分解(エルゴード分解)がどのような特徴を持つかは、多くの研究者達の努力にもかかわらず、いまだに不明である。実は、同じスピングラスでも平均場モデルとして知られる Sherrington-Kirkpatrick model (SK model) の相転移描像は Parisi 達によって解明されている。これを Parisi 解という。(もっとも彼らはレプリカ法と呼ばれる、数学的には確立されていない手法を用いていた。しかし、最近 Parisi 達の結果は数学的に証明され始めている。[17],[18] などを参照。) Parisi 達によると、SK model は低温相で無限個の pure state を持ち、それら全体は超計量構造と呼ばれる特異な構造をなしている。

ではこの SK model における相転移描像は EA model でも成り立っているのだろうか? Parisi 等は成り立つと信じている。このように EA model の相転移描像が SK model における Parisi 解と一致するという主張を Parisi picture と呼ぶ。これに対して、EA model の相転移描像は SK model のそれとは全く異なるという主張もある。Fisher と Huse は pure state は高々2つしかないと主張しており、これを Fisher-Huse picture という。現在ではこれら2つの描像が EA model に関して予想されている相転移描像の代表的なものである。これらのうちどちらが正しいのか、あるいはどちらでもないのかは今のところ分かっていない。

相転移描像を解明するための鍵は本論文で論じるオーバーラップ分布関数にある。オーバーラップ分布関数はスピングラスにおける相転移のオーダーパラメーターの役割を果たしているのである。例えば Ising model におけるオーダーパラメーターは良く知られているように磁化である。ところがスピングラスで磁化を計算すると温度にかかわらず、常に0になってしまう。そもそもスピングラスにおける相転移描像は Parisi picture のように複雑な構造をもっている可能性もあるので、磁化のような量は単純すぎてオーダーパラメーターとしては適切でない。そこでオーバーラップ分布関数なる関数がオーダーパラメーターとして用いられているのである。

先に述べた EA model における2つの相転移描像はオーバーラップ分布関数の性質に反映される。すなわち、Fisher-Huse picture によればオーバーラップ分布関数はボンドの配列によらない(自己平均的であるという)が、Parisi picture によればそれは非自己平均的である。したがってオーバーラップ分布関数のボンド配列への依存性を調べることが課題になる。

これに対して最近、Newman と Stein は数学的な手法によって EA model のオーバーラップ分布関数の自己平均性を証明した。彼らの証明法はボンド配列の平行移動エルゴード性とオーバーラップ分布関数の平行移動不変性を用いた非常に簡潔なものである。彼らの結果が正しければ、Parisi picture は否定されることになる。

我々はこの結果におおいに興味を持ち、Newman-Stein の議論を詳細に検討してみた。その結果、彼らの議論そのものは正しいものの、以下の2点について疑問を抱いた。

1. 彼らの議論は一般性のあるものなのかどうか。

2. 彼らの議論にはある仮定が入っているが、この仮定は自明ではないのではないか。

オーバーラップ分布関数はGibbs測度に対して定義されるが、彼らの議論はどのGibbs測度に対しても成り立つのかどうか、というのが1の趣旨である。2については、Newman-Steinはオーバーラップ分布関数が“性質の良い”関数であると仮定しているが、この点に疑問を投げかける。特に今回我々はParisi pictureの成立を仮定したときのオーバーラップ分布関数を具体的に推定してみた。我々の議論には仮定が入っており、その妥当性を確かめねばならないが、とりあえずそれによるとParisi pictureにもとづくオーバーラップ分布関数は非常に“性質の悪い”ものであることが分かった。特にこの関数はどんなに多くのボンドの値を指定しても関数形の定まらない、非常に特異なものになっている。（初期条件をどんなに精密に測定しても軌道が予測できないカオスに似ている。）我々の結果が正しければ、もしEA modelの正しい相転移描像がParisi pictureであったとしてもNewman-Steinの議論によってこれを否定することはできないのである。また我々の得たオーバーラップ分布関数はSK model（Parisi解が正しい相転移描像になっている）にも適用できるので、SK modelの性質を調べる上でも役に立つのではないかと考えている。

この論文の構成は以下の通りである。

まず、2章でEA modelとはどのようなモデルかを紹介し、その後で3章以降で必要になるGibbs測度やエルゴード分解などの基本的な知識について準備する。3章ではオーバーラップ分布関数の定義を行なう。オーバーラップ分布関数の定義は従来あいまいにされてきたように思われるので、やや詳しく論じる。ここではParisiによって与えられたオーバーラップ分布関数の物理的意味（Parisiの統計力学的解釈）に即して定義する。4章では前半部でNewman-Steinの議論を紹介する。なるべく数学的なところは詳しくしておいたつもりである。後半部ではNewman-Steinの議論を批判的に検証する。特にParisi pictureにもとづくオーバーラップ分布関数の性質を調べ、Newman-Steinの議論の仮定と比較してみた。なお、Parisi pictureにもとづくオーバーラップ分布関数の考察そのものは計算が長いこともあって付録にまわした。

2　EA modelの定式化

2.1　EA modelのハミルトニアン

d次元正方格子Z^dの各格子点にスピンが存在するとする。もし、隣合うスピンどうしに強磁性相互作用が働いているならそれは強磁性体であり、次のハミルトニアンで表される：

$$H = -\sum_{<i,j>} J\sigma_i\sigma_j \tag{1}$$

ここでi, jは格子点、σ_iは格子点iにおけるIsingスピン（$\sigma_i = \pm 1$の値をとり得る）、$J > 0$はボンドである。$<i, j>$はiとjが最近接格子対であることを表し、$\sum_{<i,j>}$は全ての最近接格子対に関する和である。

また、隣合うスピンどうしに反強磁性相互作用が働いているならそれは反強磁性体であり、ハミルトニアンは次のようになる：

$$H = \sum_{<i,j>} J\sigma_i\sigma_j \tag{2}$$

(1) とは符号が違うことに注意して欲しい。

さて、この論文で扱う Edwards-Anderson model はスピングラスをモデル化したものである。スピングラスとはスピン間の相互作用が、あるスピン対では強磁性、別のスピン対では反強磁性といった具合に空間的に不均質な物質である。具体的には AuFe、CuMn などの希薄磁性合金がこれに相当する。希薄磁性合金は非磁性原子（Au、Cu）の中に磁性原子（Fe、Mn）が十分低い濃度で入り混じった物質で、磁性原子は空間的にランダムに配置されている。磁性原子のスピン間には非磁性原子からの自由電子を媒介にして RKKY (Ruderman-Kittel -Kasuya-Yoshida) 相互作用と呼ばれる相互作用が働く。それは i, j の位置にあるスピン間の交換相互作用（ボンド）が

$$J_{ij} = J_{ji} \propto \frac{1}{r_{ij}^3} \cos(2k_F\, r_{ij}) \tag{3}$$

で表されるようなものである。r_{ij} は i と j の間の距離、k_F はフェルミ波数と呼ばれ、ほぼ格子間隔の逆数に等しい。(3) に cos が入っていることから分かる通り、RKKY 相互作用はスピン間の距離に応じて強磁性的にも反強磁性的にもなる。

スピングラスの不均一性は

1. スピンが空間的にランダムに配置されている。（サイトランダム性）

2. スピン間に RKKY 相互作用が働いている。

の 2 点に由来する。RKKY 相互作用に基づくスピングラスのハミルトニアンは

$$H = -\sum_{<i,j>} J_{ij}\, \sigma_i \delta_i \sigma_j \delta_j \tag{4}$$

となるだろう。ここで δ_i は確率 c で 1 になり、$1-c$ で 0 になる独立確率変数である。c は磁性原子の濃度に相当する。

さて (4) のハミルトニアンは RKKY 相互作用のような複雑な相互作用を含んでおり、その扱いは容易ではない。そこで Edwards と Anderson はスピングラスの本質的な特徴は強磁性と反強磁性とが入り混じっている点にあるとし、スピンのサイトランダム性を捨て、代わりにボンドがランダムであるようなモデルを考えた。すなわち、スピンは立方格子上に整然と並んでいる代わりに最近接格子対にランダムな相互作用が働くとしたのである（ボンドランダム性）。そのハミルトニアンは

$$H = -\sum_{<i,j>} J_{ij}\, \sigma_i \sigma_j \tag{5}$$

となる。最近接格子対しかとっていないのは RKKY 相互作用が十分近距離相互作用とみなせるからである。ここで J_{ij} は適当な確率分布に従う、格子対ごとに独立な確率変数である。その分布は次の式で与えられている。

$$\nu\,(J_{ij}) = \frac{1}{2}\,\delta(J_{ij} - J) + \frac{1}{2}\,\delta(J_{ij} + J) \tag{6}$$

これに従うボンドを持つハミルトニアン (5) で記述されるモデルを Edwards-Anderson model (EA model) というのである（参考文献 [1]）。

2.2 Gibbs 測度

この論文では EA model の相転移を扱うが、相転移を記述するためには系の体積が無限大になる熱力学的極限を考えなければならない。相転移は無限系特有の現象だからである。特に重要なのは（極限） Gibbs 測度という概念である。これを説明しよう。

まず、有限領域 Λ $(\subset Z^d)$ におけるハミルトニアンを H_Λ と書くと、Λ における物理量 X の熱力学的期待値は

$$\frac{\mathrm{Tr}Xe^{-\beta H_\Lambda}}{\mathrm{Tr}e^{-\beta H_\Lambda}} \tag{7}$$

と書かれる。ここで Tr はスピンの状態和を、$\beta = 1/k_BT$ は逆温度を表している。(7) を

$$\langle X \rangle_{\rho_\Lambda} = \frac{\mathrm{Tr}Xe^{-\beta H_\Lambda}}{\mathrm{Tr}e^{-\beta H_\Lambda}} \tag{8}$$

と書く。左辺の ρ_Λ は Λ における（有限） Gibbs 測度と呼ばれ、$\langle \cdots \rangle_{\rho_\Lambda}$ は ρ_Λ による期待値を表す。(8) は ρ_Λ の定義式である。極限 Gibbs 測度とは Λ を無限大にとったもの、すなわち "$\lim_{\Lambda \nearrow Z^d} \rho_\Lambda$" のことである。より正確に言うと、任意の物理量 X に対して

$$\langle X \rangle_\rho \equiv \lim_{\Lambda \nearrow Z^d} \langle X \rangle_{\rho_\Lambda} \tag{9}$$

によって極限 Gibbs 測度 ρ を定義するのである。ただし、この極限操作には次の 2 つの点で問題がある。

1. ρ_Λ はハミルトニアン H_Λ によって決まる。H_Λ の境界条件の取り方によって異なる極限 Gibbs 測度が得られないか？また、境界条件が同じでもボンド配列（格子対ごとのボンドの値の配列）の違いによってやはり異なる極限 Gibbs 測度が得られないか？

2. EA model はランダムなボンドから成る不均一な系である。このような系ではそもそも $\Lambda \nearrow Z^d$ としたときに極限が存在しないかもしれない。つまり、ボンドのランダムさのために Gibbs 測度が $\Lambda \nearrow Z^d$ とする過程で変動を示し、一意的な極限に収束しないかもしれないのである。

特に 2 は問題である。そこで、ただ単に極限をとるという立場を改めて、集積点をとることにすればよい。つまり、任意の $\Lambda \nearrow Z^d$ 極限をとるのではなく、(9) が収束するような Λ の増大列（部分列）だけをとり、そのときの極限（集積点）を極限 Gibbs 測度とするのである。この極限は H_Λ の境界条件の取り方や、系のボンド配列によって違ったものになることに注意されたい。上の 1 で指摘した通りである。

今後は特に有限系と区別する必要がない限り、極限 Gibbs 測度を単に Gibbs 測度と呼ぶことにする。

2.3 相転移描像

2.3.1 エルゴード分解

よく知られているように強磁性体は十分高温（高温相）では磁化を持たないが、低温（低温相）になると磁化が現れる。高温相から低温相へ、あるいはその逆の状態変化を相転移という。磁化のように高温相と低温相を区別する量をオーダーパラメーターと呼ぶ。

相転移はエルゴード性の破れという観点から捉えることができる。しばらくの間、（強磁性） Ising model を例にとってエルゴード性の破れについて説明しよう。エルゴード性の破れとは高温相では一つしか存在しなかった Gibbs 測度が相転移点を境に複数の Gibbs 測度に分かれることを意味する。 Ising model では高温相では磁化は 0 であるが、低温相では絶対値の等しい 2 つの磁化のどちらかをとることが知られている。そして、 Gibbs 測度は高温相では磁化 0 を与えるものがただ一つだけ存在していたのに対し、低温相では正の磁化を与えるものと負の磁化を与えるものとに分かれるのである。ただし、正・負の磁化のどちらを取るのかは確率的に決まることで、その確率は Gibbs 測度ごとに違う。例えば周期的境界条件を課した系の極限として得られる Gibbs 測度 ρ^p の場合、正・負の磁化が現れる確率はともに 1/2 である。これに対し、＋（プラス）境界条件における Gibbs 測度 ρ^+ では正の磁化が確率 1 で現れ、－（マイナス）境界条件における Gibbs 測度 ρ^- では負の磁化が確率 1 で現れる。（正確に言うとこれは 2 次元 Ising model での話である。例えば 3 次元の場合は分かっていないことが多い。）

一般に（低温相における） Gibbs 測度 ρ は別の、互いに異なる Gibbs 測度 ρ' と ρ'' によって

$$\rho = \lambda\,\rho' + (1-\lambda)\,\rho'' \quad (0<\lambda<1) \tag{10}$$

などと書かれたりする。この式の意味は、任意の物理量 X について

$$\langle X\rangle_\rho = \lambda\,\langle X\rangle_{\rho'} + (1-\lambda)\,\langle X\rangle_{\rho''} \tag{11}$$

が成り立つということである。こういう書き方を ρ の ρ' と ρ'' による分解という。ところがどうやっても他の Gibbs 測度によって (10) のように分解されない Gibbs 測度がある。こういう測度を pure state と呼ぶ。任意の Gibbs 測度は pure state の凸結合で書かれる。すなわち

$$\begin{aligned}\rho &= \lambda_1\,\rho_1 + \lambda_2\,\rho_2 + \cdots + \lambda_n\,\rho_n \\ &\quad(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1)\end{aligned} \tag{12}$$

ここで $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ は pure state である。このような Gibbs 測度の pure state による分解をエルゴード分解という。先ほどの Ising model の例に戻れば、 pure state は ρ^+ と ρ^- であり、 ρ^p は

$$\rho^p = \frac{1}{2}\rho^+ + \frac{1}{2}\rho^- \tag{13}$$

とエルゴード分解される。スピンの磁化について見れば、 ρ^+ に従うスピン（要するに＋境界条件におけるスピン）は確率 1 で

$$\langle\sigma\rangle_{\rho^+} = m > 0 \tag{14}$$

になり、 ρ^- の場合には

$$\langle\sigma\rangle_{\rho^-} = -m < 0 \tag{15}$$

となる。 ρ^p については確率 1/2 で m になり、確率 1/2 で $-m$ になる。この 1/2 という数は ρ^p のエルゴード分解における係数である。

2.3.2 EA model の相転移描像

では EA model における相転移に目を転じよう。 EA model の相転移については不明な点が多い。そもそも相転移が存在するかどうかについてさえ確定的な答えは得られていない。しか

し、モンテカルロ法を中心とした計算機シミュレーションをはじめとする様々な研究の蓄積から、相転移の存在について厳密な結果はないものの、次のような予想が支持されるようになっている。

1. 2次元以下では相転移は生じない。

2. 十分高い次元（おそらく3ないし4次元以上）では相転移が存在する。

そこでこの論文では相転移の存在そのものは議論せず、上の予想にもとづき、EA model では十分高い次元では相転移が存在することを前提とし、その次元におけるモデルの振舞いを議論の対象とする。主な興味はその相転移描像、特にエルゴード性の破れがどのような形で起こるかにある。この点に関しては現在2つの有力な描像が存在する。

ひとつは Parisi picture（[7] 他参照）と呼ばれているもので、臨界点以下で無数の pure state が存在し、それらの間には超計量構造と呼ばれる非常に特異な相関関係が成り立っているというものである。超計量構造とは、2つの pure state α と β の間に Hamming distance と呼ばれるある種の「距離」を定義してやると、任意の3つの pure state α, β, γ の間に

$$d_{\alpha\beta} \leq d_{\beta\gamma} = d_{\gamma\alpha} \quad \text{（あるいは添字の入れ換え）} \tag{16}$$

が成り立つことをいう。（16）は通常の距離が満たす三角不等式よりも強い制限を与えている。（超計量構造については [9] 参照。）このような超計量構造を特徴とする Parisi picture はもともと Parisi が Sherrington-Kirkpatrick model (SK model) に対して与えた解（[2] 参照）にもとづく。SK model は EA model と違い、全てのスピンどうしが相互作用するモデルで、そのハミルトニアンは

$$H = -\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{(i,j)} J_{ij}\, \sigma_i \sigma_j \tag{17}$$

で与えられる。N は全スピンの数であり、(i, j) は全てのスピン対を表す。EA model と SK model は別のモデルだが、それにもかかわらず両者の相転移描像は一致するという主張が Parisi picture である。

一方、Fisher-Huse picture と呼ばれる別の描像がある（[4],[5],[6]）。この描像は Parisi picture とは全く異なり、pure state は高々2つしかないというものである。しかもこの2つは互いのスピンの全反転で関係付けられるため、pure state は本質的には一つしかない。このような性質は強磁性体に似ているだろう。

以上2つの相転移描像を紹介したが、どちらにもそれぞれ支持者があり、どちらが正しいか（あるいは全く違う描像にたどり着くのか）について決定的な議論はまだない。この議論の鍵を握っているのは次章で導入するオーバーラップ分布関数である。というのも両相転移描像の違いはオーバーラップ分布関数に現れるからである。すなわち、Fisher-Huse picture によればオーバーラップ分布関数はボンド配列にはよらない（自己平均的）であるのに対し、Parisi picture では非自己平均的になることが分かっている。そこで、次章以下ではオーバーラップ分布関数について調べる。

3　オーバーラップ分布関数の導入

3.1　Ising model における例

2 次元 Ising model における pure state は ρ^+ と ρ^- である。ρ^+ とは有限領域 Λ における +（プラス）境界条件をもつ有限 Gibbs 測度 ρ^+_Λ について $\Lambda \nearrow Z^2$ としたときの極限 Gibbs 測度であり、ρ^- は −（マイナス）境界条件の Gibbs 測度である。ρ^+ における各格子点 i のスピンの磁化は

$$\langle \sigma_i \rangle_{\rho^+} = m > 0 \tag{18}$$

となる。そして、ρ^+ に従うスピンの空間平均は

$$\lim_{\Lambda \nearrow Z^2} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i = m \qquad \rho^+\text{-}a.s. \tag{19}$$

（$a.s.$ = almost surely. 確率 1 で、という意味）となる。ρ^- の場合、

$$\langle \sigma_i \rangle_{\rho^-} = -m < 0 \tag{20}$$

$$\lim_{\Lambda \nearrow Z^2} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i = -m \qquad \rho^-\text{-}a.s. \tag{21}$$

となる。次に周期的境界条件について考えよう。Gibbs 測度を ρ^p と書くことにする。ρ^p は ρ^+ と ρ^- を用いて

$$\rho^p = \frac{1}{2}\rho^+ + \frac{1}{2}\rho^- \tag{22}$$

と書けることが知られている。このとき

$$\langle \sigma_i \rangle_{\rho^p} = 0 \tag{23}$$

となるが、空間平均は

$$\lim_{\Lambda \nearrow Z^2} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i = \begin{cases} m & (w.p.\, 1/2) \\ -m & (w.p.\, 1/2) \end{cases}$$

となる。（ $w.p.$ = with probability ）これらの事実を踏まえた上で 2 次元 Ising model におけるオーバーラップについて述べることにしよう。

オーバーラップは同じ Gibbs 測度 ρ に従う 2 つの独立なスピン（レプリカスピンと呼ばれる）$\sigma^1 = \{\sigma^1_i\}_{i \in Z^d}$, $\sigma^2 = \{\sigma^2_i\}_{i \in Z^d}$ について

$$Q(\sigma^1, \sigma^2) \equiv \lim_{\Lambda \nearrow Z^2} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \sigma^1_i \sigma^2_i \tag{24}$$

によって定義される。例えば Gibbs 測度として ρ^+ をとると、

$$Q(\sigma^1, \sigma^2) = m^2 \qquad \rho^+\text{-}a.s. \tag{25}$$

が成り立つ。ρ^- の場合も同じになる。しかし、ρ^p の場合は

$$Q(\sigma^1, \sigma^2) = \begin{cases} m^2 & (w.p.\, 1/2) \\ -m^2 & (w.p.\, 1/2) \end{cases}$$

となる。

次にオーバーラップ分布関数 $P(q)$ を定義しよう。オーバーラップ $Q(\sigma^1, \sigma^2)$ は明らかに

$$-1 \leq Q(\sigma^1, \sigma^2) \leq 1 \tag{26}$$

を満たす。オーバーラップ分布関数とはある Gibbs 測度におけるオーバーラップの区間 $[-1, 1]$ における分布を表す。例えば ρ^+, ρ^- の場合は

$$P(q) = \delta(q - m^2) \tag{27}$$

となるし、ρ^p の場合は

$$P(q) = \frac{1}{2}\delta(q + m^2) + \frac{1}{2}\delta(q - m^2) \tag{28}$$

となる。また、オーバーラップ累積分布関数 $\hat{P}(q)$ は

$$\hat{P}(q) \equiv \int^{q+0} P(q')\,dq' \tag{29}$$

によって定義される。例えば、ρ^+, ρ^- の場合は

$$\hat{P}(q) = \begin{cases} 0 & (q < m^2) \\ 1 & (q \geq m^2) \end{cases}$$

また ρ^p の場合は

$$\hat{P}(q) = \begin{cases} 0 & (q < -m^2) \\ 1/2 & (-m^2 \leq q < m^2) \\ 1 & (m^2 \leq q) \end{cases}$$

となる。

3.2 オーバーラップ分布関数の定義

では、EA model におけるオーバーラップ分布関数について考えよう。ボンド配列 $\mathcal{J}$（各格子対ごとのボンドの値の配列）における Gibbs 測度を $\rho_{\mathcal{J}}$ と書こう。$\rho_{\mathcal{J}}$ のエルゴード分解（pure state による分解）を

$$\rho_{\mathcal{J}} = \sum_{\alpha} W_{\mathcal{J}}^{\alpha} \rho_{\mathcal{J}}^{\alpha} \tag{30}$$

$$\sum_{\alpha} W_{\mathcal{J}}^{\alpha} = 1$$

と書く。$\rho_{\mathcal{J}}^{\alpha}$ はボンド配列 $\mathcal{J}$ における pure state である。

同じ Gibbs 測度 $\rho_{\mathcal{J}}$ に従う 2 つの独立なスピン σ^1, σ^2 についてオーバーラップ $Q(\sigma^1, \sigma^2)$ を

$$Q(\sigma^1, \sigma^2) \equiv \lim_{\Lambda \nearrow Z^d} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i^1 \sigma_i^2 \tag{31}$$

によって定義する。すると、Ising model のときと同様に

$$Q(\sigma^1, \sigma^2) = q_{\mathcal{J}}^{\alpha\beta} \qquad w.p.\, W_{\mathcal{J}}^{\alpha} W_{\mathcal{J}}^{\beta} \tag{32}$$

$$q_{\mathcal{J}}^{\alpha\beta} \equiv \lim_{\Lambda \nearrow Z^d} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \langle \sigma_i \rangle_{\rho_{\mathcal{J}}^{\alpha}} \langle \sigma_i \rangle_{\rho_{\mathcal{J}}^{\beta}} \tag{33}$$

となるだろう。従ってボンド配列 $\mathcal{J}$ に対するオーバーラップ分布関数 $P_{\mathcal{J}}(q)$ は

$$P_{\mathcal{J}}(q) = \sum_{\alpha,\beta} W_{\mathcal{J}}^{\alpha} W_{\mathcal{J}}^{\beta} \delta(q - q_{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}) \tag{34}$$

とならなければいけない。これは Parisi がオーバーラップ分布関数に与えた統計力学的解釈である（参考文献 [3]）。注意して欲しいのは、この式自体から何らかの情報を引き出せる訳ではないということである。むしろ、この式に一致するようにオーバーラップ分布関数を定義しなければならないのである。

さて、Newman-Stein [12] は次のような 2 つのオーバーラップ分布関数の定義を与えている。

1.

$$P_{\mathcal{J}}(q) = \lim_{\Lambda \nearrow Z^d} \left\langle \delta\left(q - \frac{1}{|\Lambda|}\sum_{i\in\Lambda} \sigma_i^1 \sigma_i^2\right)\right\rangle_{\rho^{12}_{\mathcal{J},\Lambda}} \tag{35}$$

$$\rho^{12}_{\mathcal{J},\Lambda}(\sigma^1, \sigma^2) \equiv \rho_{\mathcal{J},\Lambda}(\sigma^1)\rho_{\mathcal{J},\Lambda}(\sigma^2) \tag{36}$$

2.

$$P_{\mathcal{J}}(q) = \lim_{\Lambda \nearrow Z^d} \lim_{L \nearrow Z^d} \left\langle \delta\left(q - \frac{1}{|\Lambda|}\sum_{i\in\Lambda} \sigma_i^1 \sigma_i^2\right)\right\rangle_{\rho^{12}_{\mathcal{J},L}} \tag{37}$$

$$\rho^{12}_{\mathcal{J},L}(\sigma^1, \sigma^2) \equiv \rho_{\mathcal{J},L}(\sigma^1)\rho_{\mathcal{J},L}(\sigma^2) \tag{38}$$

（注意 ： Newman-Stein のもともとの定義では条件付き確率を用いて定義しているが、これは遠回りであると思われたので若干変更した。しかし、上の定義は本質的に Newman-Stein が与えたものと等価である。）1 では有限領域 Λ における有限 Gibbs 測度 $\rho_{\mathcal{J},\Lambda}$ と、これに従うスピンのオーバーラップをとり、$\Lambda \nearrow Z^d$ としている。（Gibbs 測度とオーバーラップの両方を同時に極限をとっている。）これに対して 2 では $\Lambda \subset L$ なる有限領域 Λ と L を考え、有限 Gibbs 測度 $\rho_{\mathcal{J},L}$ に従うスピンのオーバーラップを Λ でとっている。そして、$L \nearrow Z^d, \Lambda \nearrow Z^d$ の順で極限をとっている。（先に Gibbs 測度の極限をとり、後からオーバーラップの極限をとっている。）

これまでオーバーラップ分布関数の定義としては 1 の形のものが多くの場合に用いられてきたように思われる。しかし、我々は 2 をオーバーラップ分布関数の定義として採用する。なぜなら、この定義は Parisi の統計力学的解釈による形に一致するからである。このことを確かめておこう。

まず、$\rho_{\mathcal{J},L}$ において $L \nearrow Z^d$ としたときの極限 Gibbs 測度を $\rho_{\mathcal{J}}$ とする。$\rho_{\mathcal{J}}$ のエルゴード分解は

$$\rho_{\mathcal{J}} = \sum_{\alpha} W_{\mathcal{J}}^{\alpha} \rho_{\mathcal{J}}^{\alpha} \tag{39}$$

従って、$\rho_{\mathcal{J}}^{12}$ のエルゴード分解は

$$\rho_{\mathcal{J}}^{12} = \sum_{\alpha,\beta} W_{\mathcal{J}}^{\alpha} W_{\mathcal{J}}^{\beta} \rho_{\mathcal{J}}^{\alpha\beta} \tag{40}$$

$$\rho_{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\sigma^1, \sigma^2) \equiv \rho_{\mathcal{J}}^{\alpha}(\sigma^1)\rho_{\mathcal{J}}^{\beta}(\sigma^2) \tag{41}$$

すると、

$$P_{\mathcal{J}}(q) = \lim_{\Lambda \nearrow Z^d} \lim_{L \nearrow Z^d} \Big\langle \delta\,(q - \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i^1 \sigma_i^2) \Big\rangle_{\rho^{12}_{\mathcal{J},L}} \tag{42}$$

$$= \lim_{\Lambda \nearrow Z^d} \Big\langle \delta\,(q - \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i^1 \sigma_i^2) \Big\rangle_{\rho^{12}_{\mathcal{J}}} \tag{43}$$

$$= \lim_{\Lambda \nearrow Z^d} \sum_{\alpha,\beta} W^\alpha_{\mathcal{J}} W^\beta_{\mathcal{J}} \Big\langle \delta\,(q - \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i^1 \sigma_i^2) \Big\rangle_{\rho^{\alpha\beta}_{\mathcal{J}}} \tag{44}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} W^\alpha_{\mathcal{J}} W^\beta_{\mathcal{J}} \Big\langle \delta\,(q - \lim_{\Lambda \nearrow Z^d} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i^1 \sigma_i^2) \Big\rangle_{\rho^{\alpha\beta}_{\mathcal{J}}} \tag{45}$$

すなわち、

$$P_{\mathcal{J}}(q) = \sum_{\alpha,\beta} W^\alpha_{\mathcal{J}} W^\beta_{\mathcal{J}} \Big\langle \delta\,(q - \lim_{\Lambda \nearrow Z^d} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i^1 \sigma_i^2) \Big\rangle_{\rho^{\alpha\beta}_{\mathcal{J}}} \tag{46}$$

となることが分かった。σ^1, σ^2 がそれぞれ pure state $\rho^\alpha_{\mathcal{J}}, \rho^\beta_{\mathcal{J}}$ に従うとき、

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \Big[\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \{ \sigma_i^1 \sigma_i^2 - \langle \sigma_i \rangle_{\rho^\alpha_{\mathcal{J}}} \langle \sigma_i \rangle_{\rho^\beta_{\mathcal{J}}} \} \Big]^2 \Big\rangle_{\rho^{\alpha\beta}_{\mathcal{J}}} \\
&= \frac{1}{|\Lambda|^2} \sum_{i,j \in \Lambda} \Big\langle \{ \sigma_i^1 \sigma_i^2 - \langle \sigma_i \rangle_{\rho^\alpha_{\mathcal{J}}} \langle \sigma_i \rangle_{\rho^\beta_{\mathcal{J}}} \} \{ \sigma_j^1 \sigma_j^2 - \langle \sigma_j \rangle_{\rho^\alpha_{\mathcal{J}}} \langle \sigma_j \rangle_{\rho^\beta_{\mathcal{J}}} \} \Big\rangle_{\rho^{\alpha\beta}_{\mathcal{J}}} \\
&= \frac{1}{|\Lambda|^2} \sum_{i,j \in \Lambda} \{ \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\rho^\alpha_{\mathcal{J}}} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\rho^\beta_{\mathcal{J}}} - \langle \sigma_i \rangle_{\rho^\alpha_{\mathcal{J}}} \langle \sigma_j \rangle_{\rho^\alpha_{\mathcal{J}}} \langle \sigma_i \rangle_{\rho^\beta_{\mathcal{J}}} \langle \sigma_j \rangle_{\rho^\beta_{\mathcal{J}}} \} \\
&\leq \frac{1}{|\Lambda|^2} \sum_{i,j \in \Lambda} | \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\rho^\alpha_{\mathcal{J}}} - \langle \sigma_i \rangle_{\rho^\alpha_{\mathcal{J}}} \langle \sigma_j \rangle_{\rho^\alpha_{\mathcal{J}}} | | \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\rho^\beta_{\mathcal{J}}} | \\
&+ \frac{1}{|\Lambda|^2} \sum_{i,j \in \Lambda} | \langle \sigma_i \rangle_{\rho^\alpha_{\mathcal{J}}} \langle \sigma_j \rangle_{\rho^\alpha_{\mathcal{J}}} | | \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\rho^\beta_{\mathcal{J}}} - \langle \sigma_i \rangle_{\rho^\beta_{\mathcal{J}}} \langle \sigma_j \rangle_{\rho^\beta_{\mathcal{J}}} | \\
&\leq \frac{1}{|\Lambda|^2} \sum_{i,j \in \Lambda} \Big\{ | \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\rho^\alpha_{\mathcal{J}}} - \langle \sigma_i \rangle_{\rho^\alpha_{\mathcal{J}}} \langle \sigma_j \rangle_{\rho^\alpha_{\mathcal{J}}} | + | \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\rho^\beta_{\mathcal{J}}} - \langle \sigma_i \rangle_{\rho^\beta_{\mathcal{J}}} \langle \sigma_j \rangle_{\rho^\beta_{\mathcal{J}}} | \Big\}
\end{aligned} \tag{47}$$

pure state にはクラスター性と呼ばれる次の性質がある。任意の $\epsilon > 0$ について $|\Lambda|$ を十分大きくとれば

$$\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} | \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\rho^\alpha_{\mathcal{J}}} - \langle \sigma_i \rangle_{\rho^\alpha_{\mathcal{J}}} \langle \sigma_j \rangle_{\rho^\alpha_{\mathcal{J}}} | < \epsilon \tag{48}$$

（クラスター性については [20] 参照。）これを用いると

$$\frac{1}{|\Lambda|^2} \sum_{i,j \in \Lambda} | \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\rho^\alpha_{\mathcal{J}}} - \langle \sigma_i \rangle_{\rho^\alpha_{\mathcal{J}}} \langle \sigma_j \rangle_{\rho^\alpha_{\mathcal{J}}} | < \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{j \in \Lambda} \epsilon = \epsilon \tag{49}$$

ϵ は任意だったので、結局

$$\lim_{\Lambda \nearrow Z^d} \Big\langle \Big[\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \{ \sigma_i^1 \sigma_i^2 - \langle \sigma_i \rangle_{\rho^\alpha_{\mathcal{J}}} \langle \sigma_i \rangle_{\rho^\beta_{\mathcal{J}}} \} \Big]^2 \Big\rangle_{\rho^{\alpha\beta}_{\mathcal{J}}} = 0 \tag{50}$$

チェビシェフの不等式から、任意の $\epsilon > 0$ について

$$\begin{aligned}&\mathrm{Prob}\Big\{\,\Big|\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{i\in\Lambda}\{\sigma_i^1\sigma_i^2-\langle\sigma_i\rangle_{\rho_{\mathcal{J}}^\alpha}\langle\sigma_i\rangle_{\rho_{\mathcal{J}}^\beta}\}\Big|>\epsilon\,\Big\}\\ <\;&\frac{1}{\epsilon^2}\Big\langle\Big[\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{i\in\Lambda}\{\sigma_i^1\sigma_i^2-\langle\sigma_i\rangle_{\rho_{\mathcal{J}}^\alpha}\langle\sigma_i\rangle_{\rho_{\mathcal{J}}^\beta}\}\Big]^2\Big\rangle_{\rho_{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}}\end{aligned} \tag{51}$$

（Prob は probability の略。）$\Lambda\nearrow Z^d$ とすれば（50）より、

$$\lim_{\Lambda\nearrow Z^d}\mathrm{Prob}\Big\{\,\Big|\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{i\in\Lambda}\{\sigma_i^1\sigma_i^2-\langle\sigma_i\rangle_{\rho_{\mathcal{J}}^\alpha}\langle\sigma_i\rangle_{\rho_{\mathcal{J}}^\beta}\}\Big|>\epsilon\,\Big\}=0 \tag{52}$$

ゆえに

$$\lim_{\Lambda\nearrow Z^d}\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{i\in\Lambda}\{\sigma_i^1\sigma_i^2-\langle\sigma_i\rangle_{\rho_{\mathcal{J}}^\alpha}\langle\sigma_i\rangle_{\rho_{\mathcal{J}}^\beta}\}=0 \qquad i.p. \tag{53}$$

（ $i.p.$ = in probability ）すなわち

$$\lim_{\Lambda\nearrow Z^d}\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{i\in\Lambda}\sigma_i^1\sigma_i^2=\lim_{\Lambda\nearrow Z^d}\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{i\in\Lambda}\langle\sigma_i\rangle_{\rho_{\mathcal{J}}^\alpha}\langle\sigma_i\rangle_{\rho_{\mathcal{J}}^\beta}=q_{\mathcal{J}}^{\alpha\beta} \tag{54}$$

が確率収束の意味で成り立つ。すると

$$\Big\langle\delta\,(q-\lim_{\Lambda\nearrow Z^d}\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{i\in\Lambda}\sigma_i^1\sigma_i^2)\Big\rangle_{\rho_{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}}=\delta\,(q-q_{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}) \tag{55}$$

よって確かに

$$P_{\mathcal{J}}\,(q)=\sum_{\alpha,\beta}W_{\mathcal{J}}^\alpha W_{\mathcal{J}}^\beta\delta\,(q-q_{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}) \tag{56}$$

が成り立つことが示された。

4　オーバーラップ分布関数の自己平均性と相転移描像

本論に入る前にボンド配列について若干数学的な説明をしておこう。

ボンド配列とは各格子対のボンドの値の組合せである。全ての格子対の集合 $B^d=\{<i,j>\,|\,i,j\in Z^d\}$ に対して $\Xi=\{-J,+J\}^{B^d}$ をボンド配列空間という。Ξ の σ- 加法族 $\mathcal{G}$ は筒集合とその（可算）無限和を要素とする集合族（集合を要素とする集合）である。筒集合とは、有限個の格子対におけるボンドの値を指定したボンド配列の集合である。具体的には $\{\,\mathcal{J}\in\Xi\,|\,J_{ij}=+J,\,J_{kl}=-J,\cdots,J_{yz}=+J\,\}$ のような形で書ける。また、$(\Xi,\mathcal{G})$ 上の確率測度としてボンド配列分布 ν をとる。ν は各格子対のボンドの値を確率 1/2 で $+J$ 、確率 1/2 で $-J$ で独立に定める。

ボンド配列分布 ν に関しては次の平行移動エルゴード性が成り立つ。

$$\begin{aligned}&A\in\mathcal{G}\text{ が }T_xA=A\ \ (\text{for }\forall x\in Z^d)\text{ であるとき、}\\ \Longrightarrow\ \ &\nu\,(A)=0\,\text{or}\,1\end{aligned} \tag{57}$$

ボンド配列の平行移動エルゴード性については付録を参照。

4.1 オーバーラップ分布関数の自己平均性

Newman-Stein [12] は周期的境界条件を課した系におけるオーバーラップ分布関数がボンド配列には依存しない（自己平均性という）ことを証明している。我々の採用した定義：

$$P_{\mathcal{J}}(q)=\lim_{\Lambda\nearrow Z^d}\lim_{L\nearrow Z^d}\left\langle\delta\left(q-\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{i\in\Lambda}\sigma_i^1\sigma_i^2\right)\right\rangle_{\rho^{12}_{\mathcal{J},L}} \tag{58}$$

では L に周期的境界条件を課してやればよい。ただ、ここで問題が生じる。有限 Gibbs 測度 $\rho_{\mathcal{J},L}$ について $L\nearrow Z^d$ 極限をとりたいのだが、1.2 節（Gibbs 測度）でふれた通り、一般には Gibbs 測度は極限そのものではなく集積点を考えなければならない。つまり、$L\nearrow Z^d$ として適当な部分列をとり、そこでの極限を考えるのだが、同じボンド配列でも 2 つ以上の異なる部分列があって、それぞれが違う極限 Gibbs 測度を与えるかもしれない。すると同じボンド配列に対し、2 つ以上の異なるオーバーラップ分布関数が得られることになる。このとき、オーバーラップ分布関数が自己平均的（ボンド配列によらない関数）になることはあり得ない。（既に同じボンド配列で、異なるオーバーラップ分布関数が存在しているのだから。）

そこで周期的境界条件を課した Gibbs 測度に代わって Aizenman-Wehr（参考文献 [15]）が構成した Gibbs 測度を用いる。この Gibbs 測度は次のように書ける。

$$\rho_{\mathcal{J}}=\lim_{W\nearrow Z^d}\lim_{L\nearrow Z^d}\int_{\Xi(W^c)}d\nu\,\rho_{\mathcal{J},L} \tag{59}$$

正確に表せば、任意の物理量 X について

$$\langle X\rangle_{\rho_{\mathcal{J}}}=\lim_{W\nearrow Z^d}\lim_{L\nearrow Z^d}\int_{\Xi(W^c)}d\nu\,\langle X\rangle_{\rho_{\mathcal{J},L}} \tag{60}$$

で定義される。ここで $\rho_{\mathcal{J},L}$ は L における周期的境界条件のもとでの有限 Gibbs 測度である。$\lim_{L\nearrow Z^d}$ は適当な部分列に沿ってとられる。また $\Xi(W^c)$ は $W^c=Z^d\backslash W$ におけるボンドである。$\lim_{W\nearrow Z^d}\int_{\Xi(W^c)}d\nu$ は無限遠方のボンド配列について平均をとることを意味する。この Gibbs 測度の詳細については [15]Appendix 1 を参照されたい。

Aizenman-Wehr の Gibbs 測度は先程のものとは違って、ボンド配列ごとに一意的に定まることが証明されている。また、この Gibbs 測度は次の性質を持つ：

$$\text{任意の物理量 } X \text{ に対し、}\quad \langle X\rangle_{\rho_{T_x\mathcal{J}}}=\langle T_{-x}X\rangle_{\rho_{\mathcal{J}}}\qquad \text{for }\forall x\in Z^d \tag{61}$$

ここで T_x とは x だけ平行移動させる変換であり、例えば

$$T_xJ_{ij}=J_{i+x\,j+x} \tag{62}$$

などとなる。（61）のような性質を平行移動共変性という。これは要するにボンド配列を x だけずらしたときの X の熱力学的期待値は X を $-x$ だけずらしたときの熱力学的期待値に等しい、ということを表している。

この Gibbs 測度を用いてオーバーラップ分布関数を

$$\begin{aligned}P_{\mathcal{J}}(q)&=\lim_{\Lambda\nearrow Z^d}\lim_{W\nearrow Z^d}\lim_{L\nearrow Z^d}\int_{\Xi(W^c)}d\nu\left\langle\delta\left(q-\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{i\in\Lambda}\sigma_i^1\sigma_i^2\right)\right\rangle_{\rho^{12}_{\mathcal{J},L}}\\&=\left\langle\delta\left(q-\lim_{\Lambda\nearrow Z^d}\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{i\in\Lambda}\sigma_i^1\sigma_i^2\right)\right\rangle_{\rho^{12}_{\mathcal{J}}}\end{aligned} \tag{63}$$

と定義する。このオーバーラップ分布関数も、Parisi の統計力学的解釈に一致している。

では、オーバーラップ分布関数の自己平均性の証明のための準備に入ろう。まず、Gibbs 測度 $\rho_{\mathcal{J}}$ の平行移動共変性からオーバーラップ分布関数が平行移動不変であることがいえる。実際、

$$\begin{aligned}
P_{T_x\mathcal{J}}(q) &= \left\langle \delta\left(q - \lim_{\Lambda \nearrow Z^d} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i^1 \sigma_i^2\right)\right\rangle_{\rho^{12}_{T_x\mathcal{J}}} \\
&= \left\langle T_{-x}\delta\left(q - \lim_{\Lambda \nearrow Z^d} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i^1 \sigma_i^2\right)\right\rangle_{\rho^{12}_{\mathcal{J}}} \\
&= \left\langle \delta\left(q - \lim_{\Lambda \nearrow Z^d} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \sigma_{i-x}^1 \sigma_{i-x}^2\right)\right\rangle_{\rho^{12}_{\mathcal{J}}} \\
&= \left\langle \delta\left(q - \lim_{\Lambda \nearrow Z^d} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in T_x\Lambda} \sigma_i^1 \sigma_i^2\right)\right\rangle_{\rho^{12}_{\mathcal{J}}} \\
&= \left\langle \delta\left(q - \lim_{\Lambda \nearrow Z^d} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i^1 \sigma_i^2\right)\right\rangle_{\rho^{12}_{\mathcal{J}}} \\
&= P_{\mathcal{J}}(q) \qquad (64)
\end{aligned}$$

となるからである。

また、オーバーラップ分布関数 $P_{\mathcal{J}}(q)$ は $\mathcal{G}$- 可測であると仮定する。すなわち $[-1, 1]$ 上の任意の（連続関数などの）性質のよい関数 f に対して、

$$\hat{f}(\mathcal{J}) \equiv \int_{-1}^{1} f(q) P_{\mathcal{J}}(q)\, dq \qquad (65)$$

によって $\mathcal{J}$ の関数 $\hat{f}$ を定めたとき、任意の実数 a に対して Ξ 上の集合

$$A(\hat{f}, a) \equiv \{\mathcal{J} \mid \hat{f}(\mathcal{J}) < a\} \qquad (66)$$

が $A(\hat{f}, a) \in \mathcal{G}$ となると仮定するのである。この仮定は Newman-Stein の議論にとって大事な役割を果たす。彼らの議論では平行移動エルゴード性を用いるが、もし $\mathcal{G}$- 可測でなければ、エルゴード性の議論は使えない。

以上で準備が整ったので、オーバーラップ分布関数が自己平均的であることの Newman-Stein による証明を紹介する。

定理 (**Newman-Stein**)

オーバーラップ分布関数が平行移動不変かつ $\mathcal{G}$- 可測なとき、この関数は自己平均的である。

（証明）

$[-1, 1]$ 上の性質のよい任意の関数 f と任意の実数 a に対して (66) によって集合 $A(\hat{f}, a)$ を定める。仮定によって

$$A(\hat{f}, a) \in \mathcal{G} \qquad (67)$$

である。ところで、$P_{\mathcal{J}}(q)$ が平行移動不変であったから、$\hat{f}$ も平行移動不変。よって

$$
\begin{aligned}
T_x A(\hat{f}, a) &= \{T_x\mathcal{J} \mid \hat{f}(\mathcal{J}) < a\} \\
&= \{\mathcal{J} \mid \hat{f}(T_{-x}\mathcal{J}) < a\} \\
&= \{\mathcal{J} \mid \hat{f}(\mathcal{J}) < a\} \\
&= A(\hat{f}, a) \qquad \text{for } \forall x \in Z^d
\end{aligned} \tag{68}
$$

となって $A(\hat{f}, a)$ も平行移動不変。ボンド配列の平行移動エルゴード性 (57) から

$$
\nu(A(\hat{f}, a)) = 0 \text{ or } 1 \tag{69}
$$

ゆえに $\hat{f}(\mathcal{J})$ は ν-$a.s.$ で $\mathcal{J}$ によらない定数である。実際 $\hat{f}(\mathcal{J}) = \sup\{a \mid \nu(A(\hat{f}, a)) = 1\}$ であり、これは $\mathcal{J}$ にはよらない。f は任意だったので、結局 $P_{\mathcal{J}}(q)$ は自己平均的である。

（証明終り）

ここで除外集合に関する補足をしておこう。すなわち、$\hat{f}(\mathcal{J})$ は ν-$a.s.$ で $\mathcal{J}$ によらないが、このとき ν-$a.s.$ の除外集合が関数 f ごとに異なっていて、全体として除外集合が測度 0 でなくなるという可能性が考えられる。だが、関数 f としては可算個の関数（例えば $\{q^k\}_{k=1}^{\infty}$ など）を考えればよく、（性質の良い関数はテイラー展開できることを思い起こせば分かりやすい）測度 0 の集合の可算和は測度 0 なので問題は生じない。

では、この結果を EA model に関して予想されている相転移描像と比較してみよう。1 章でも述べた通り、次の 2 つの説が有力である。

1. Parisi picture

   SK model の Parisi 解が EA model でもあてはまるとするもの。すなわち、（可算）無限個の pure state が超計量構造をなす。また、オーバーラップ分布関数は可算個の δ 関数の和から成り、そのボンド平均は連続関数になっている。（[2] 参照）そしてオーバーラップ分布関数は非自己平均的である。

2. Fisher-Huse picture

   Ising model のように、スピンの反転によって対称な 2 つの pure state しか存在しない。このとき、オーバーラップ分布関数は 2 つの δ 関数の和で書かれ、それは自己平均的である。

まず、Fisher-Huse picture と比較してみると両者は整合していることが分かる。どちらもオーバーラップ分布関数は自己平均的だからである。Newman-Stein の議論からはオーバーラップ分布関数の関数形については何も情報が得られないので、これ以上は何も言えない。しかし、とりあえず両者の間には矛盾がないことが分かった。これに対し、Parisi picture は Newman-Stein の結果とは相容れないことが分かる。なぜなら Parisi picture によるオーバーラップ分布関数は非自己平均的だからである。従って Newman-Stein の議論にもとづけば Parisi picture は成り立たないことが分かる。しかし、彼らの議論には前提条件があったことを思い起こして欲しい。そこで次の節ではこの点について詳細に吟味したい。

4.2 Newman-Stein の議論の検討

この節の目的は Newman-Stein の議論を詳細に検討することである。特に彼らの定理の前提となっているオーバーラップ分布関数の平行移動不変性と $\mathcal{G}$- 可測性について調べる。

まず平行移動不変性だが、これは Gibbs 測度として平行移動共変なものをとったことによる。確かに Aizenman-Wehr による Gibbs 測度は平行移動共変になっているが、これが Gibbs 測度の一般的な性質なのかどうかは不明である。というのも、有限領域 Λ における（有限） Gibbs 測度 $\rho_{\mathcal{J},\Lambda}$ は Λ におけるボンド配列に依存し、$\rho_{T_x\mathcal{J},\Lambda}$ は $T_{-x}\Lambda$ （Λ を $-x$ だけ平行移動させたもの）におけるボンド配列に依存しており、一般には

$$\langle X\rangle_{\rho_{T_x\mathcal{J},\Lambda}} \neq \langle T_{-x}X\rangle_{\rho_{\mathcal{J},\Lambda}} \tag{70}$$

である。ここで X はスピンやスピンの積などを想定しており、上の式は明らかだろう。（極限） Gibbs 測度が平行移動共変になるためには $\Lambda \nearrow Z^d$ としたときに、上の式が等号に変わらなければならないが、これは決して自明なことではない。

一般に Gibbs 測度は極限の取り方や境界条件に依存しており、平行移動した Gibbs 測度と、もとの Gibbs 測度の間には何の関係もなくなってもおかしくはない。従って Newman-Stein の結果は一般性のある結果なのかどうか、今のところは不明である。

次にオーバーラップ分布関数の $\mathcal{G}$- 可測性について考えてみる。$\mathcal{G}$- 可測性とは (66) で定義された集合 $A(\hat{f},a)$ に対して $A(\hat{f},a)\in\mathcal{G}$ となることであった。$\mathcal{G}$ は筒集合（有限個の格子対におけるボンドの値を指定したときのボンド配列）の可算和からなる集合を元とする集合族であった。オーバーラップ分布関数が $\mathcal{G}$- 可測でない場合としては、例えば $A(\hat{f},a)$ が Ξ から元をランダムに非可算個集めてできている場合などがある。大雑把にいうと $\mathcal{G}$- 可測性は連続関数などの性質の良い関数に対して成り立つ。ところが、 Parisi picture によるとオーバーラップ分布関数は無限個の δ 関数の和からなり、性質の悪い関数ではないかと考えられる。実際、後でみるように Parisi picture にもとづくオーバーラップ分布関数は、どんなに多くのボンドの値を指定しても関数形の定まらない、カオス的なものになっている可能性さえあるのである。Newman-Stein の定理では、はじめから $\mathcal{G}$- 可測を仮定しているが、これは決して自明なことではない。つまり、現実のオーバーラップ分布関数が Parisi picture のようなものであったとしたら、彼らの定理は使えないかもしれないのである。

以下では $\mathcal{G}$- 可測ではない関数の例をひとつ挙げる。この例は Parisi picture にもとづくオーバーラップ分布関数と関係しており、興味深い。具体的には次の関係式：

$$\int d\nu R_{\mathcal{J}}(q_1)\,R_{\mathcal{J}}(q_2) = \frac{1}{3}R(q_1)\,\delta(q_1-q_2) + \frac{2}{3}R(q_1)R(q_2) \tag{71}$$

$$R(q) = \int d\nu R_{\mathcal{J}}(q) \tag{72}$$

を満たす $R_{\mathcal{J}}(q)$ に $\mathcal{G}$- 可測でないものがあるのである。この式は Parisi 解のオーバーラップ分布関数が満たしている関係式である（参考文献 [10] の (20) 式）。この $R_{\mathcal{J}}(q)$ は非自己平均的であることに注意しておく。なぜならば、もし自己平均的ならば (71) の右辺は単に $R(q_1)R(q_2)$ となるはずだからである。

表記上の理由から、ボンド配列を [0, 1] 区間上の実数に置き換える。具体的にはつぎのようにする。

格子対全体の集合 $B^d = \{<i, j> | i, j \in Z^d\}$ は高々可算個の要素から成るので、全ての格子対に番号（1, 2, 3 ⋯）を付ける。いま、あるボンド配列のもとで k 番目の格子対におけるボンドが $+J$ のとき $C_k = 1$ 、$-J$ のとき $C_k = 0$ というふうにして数列 $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$ を決める。

一方、[0, 1] 区間上の実数 r を 2 進数展開する。

$$r = 0.C_1 C_2 C_3 \cdots C_k \cdots \tag{73}$$

によって [0, 1] 区間上の実数とボンド配列を 1 対 1 に対応させてやることができる。ただし、次のような例外もある。例えば

$$0.011111 \cdots = 0.100000 \cdots \tag{74}$$

だが、左辺は殆んど全てが $+J$ のボンド、右辺は殆んど全てが $-J$ のボンドの場合に対応している。この場合は 2 つのボンド配列が一つの実数に対応している。しかし、こういった数は測度 0 でしか存在せず、無視して差し支えない。

このようにして $r = r(\mathcal{J})$ によってボンド配列と [0, 1] 区間上の実数を対応させることができる。

このとき（71）式は $R_{\mathcal{J}}(q)$ を $R_r(q) = R_{r(\mathcal{J})}(q)$ に置き換えて

$$\int_0^1 dr R_r^{\cdot}(q_1) R_r(q_2) = \frac{1}{3} R(q_1) \delta(q_1 - q_2) + \frac{2}{3} R(q_1) R(q_2) \tag{75}$$

$$R(q) = \int_0^1 dr R_r(q) \tag{76}$$

となる。この関係式を満たすものとして次の式がとれる：

$$\begin{aligned} R_r(q) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{2^n} \delta(q - x_r^{S_N(n)}) && (77) \\ x_r^{S_N(n)} &= \hat{R}^{-1}(a_r^{S_N(n)}) && (78) \\ a_r^{S_N(n)} &= \{2^{S_N(n)} r \text{ の小数点以下の部分}\} && (79) \\ S_N &: n = n_0 + n_1 \cdot 2 + n_2 \cdot 2^2 + \cdots + n_N \cdot 2^N && (80) \\ &\to S_N(n) = n_0 \cdot 2^N + n_1 \cdot 2^{N-1} + n_2 \cdot 2^{N-2} + \cdots + n_N && (81) \end{aligned}$$

この式については付録で詳細に論じる。いくつかの説明をしておこう。a_r^n は [0, 1] 区間上の実数 r （2 進数表示されている）を 2^n 倍したときの小数点以下の部分、つまり r の小数点以下 $n+1$ 桁以下を取り出して新しい小数を作ったものである。r が無理数ならば（実数の大半は無理数である）、$\{a_r^n\}_{n=1}^{\infty}$ は [0, 1] 区間上の一様分布に従う。つまり、各 a_r^n （$n = 1, 2, \cdots$）は [0, 1] 区間上に均等にばらまかれるのである。（この事実を Weyl の一様分布定理という。）このとき $x_r^n = \hat{R}^{-1}(a_r^n)$ は [0, 1] 区間上で R に従って分布する。つまり $\{x_r^n\}_{n=1}^{\infty}$ のうち任意の区間 (q_1, q_2) に属するものの割合は $\hat{R}(q_2) - \hat{R}(q_1)$ である。ここで $\hat{R}$ は R の累積関数：$\hat{R}(q) = \int^q dq' \hat{R}(q')$ のことである。

また S_N は（2 進数表示で）$N+1$ 桁以下の自然数全体をそれ自身に写す自己同型写像である。2 進数表示で $a\ (<N)$ 桁の自然数 n は

$$n = n_0 + n_1 \cdot 2 + \cdots + n_{a-1} \cdot 2^{a-1} \tag{82}$$

と書けるから

$$S_N(n) = n_0 \cdot 2^N + n_1 \cdot 2^{N-1} + \cdots + n_{a-1} \cdot 2^{N-a+1} \tag{83}$$

となるのである。特に $N \to \infty$ で $S_N(n) \to \infty$ となっている。

$\{a_r^{S_N(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\{a_r^n\}_{n=1}^{\infty}$ を S_N によって並べかえたものである。$a_r^{S_N(n)}$ は $N \to \infty$ において、r の有限個の桁における値を変えても不変である。なぜなら $r = 0.C_1C_2C_3\cdots$ として、$a_r^{S_N(n)} = 0.C_{S_N(n)+1}C_{S_N(n)+2}\cdots$ となるから、r の $S_N(n)$ 桁以前の桁の値が何であっても $a_r^{S_N(n)}$ の値は変わらないのである。$\lim_{N\to\infty} S_N(n) = \infty$ なので結局 $a_r^{S_N(n)}$ の値は r のどんな有限個の桁における値にも依存しないことが分かる。このことから $x_r^{S_N(n)} = \hat{R}^{-1}(a_r^{S_N(n)})$ も $N \to \infty$ で r の有限個の桁の値には依存しないことが分かる。(77) 式を見れば、$R_r(q)$ は r の有限個の桁の値には依存しないことが言える。

ボンド配列の言葉に置き換えると、これは $R_{\mathcal{J}}(q) = R_{r(\mathcal{J})}(q)$ が有限個の格子対のボンドの値には依存しない、ということである。しかし $R_{\mathcal{J}}(q)$ 自身は非自己平均的であったから、無限個のボンドの値を変化させれば $R_{\mathcal{J}}(q)$ の関数形は変わらねばならない。それゆえ $R_{\mathcal{J}}(q)$ の関数形を決定するには無限個のボンドの値を指定しなければならない。この関数は、値を指定するボンドの個数を増やすにつれて関数形が一つの形に収束していくようなものではなく、どんなに多くの（有限個の）ボンドの値を指定しても関数形が定まらない、という意味でカオス的な関数になっているのである。（初期条件をどんなに精密に測定しても軌道が予測不可能なカオス系に似ている。）

では、ここで (77) 式で与えられる $R_{\mathcal{J}}(q) = R_{r(\mathcal{J})}(q)$ が $\mathcal{G}$- 可測であると仮定しよう。すなわち (65) で $P_{\mathcal{J}}(q)$ の代わりに $R_{\mathcal{J}}(q)$ を用いたものを $\hat{f}$ とし、(66) によって集合 $A(\hat{f}, a)$ を定めると $A(\hat{f}, a) \in \mathcal{G}$ となると仮定するのである。$R_{\mathcal{J}}(q)$ は有限個のボンドには依存しない。つまり有限領域のボンド $\bigcup_{\Lambda:\text{finite}} \Xi(\Lambda)$ には依存せず、無限遠方のボンド $\bigcap_{\Lambda:\text{finite}} \Xi(\Lambda^c)$ にのみ依存する。（$\Xi(\Lambda), \Xi(\Lambda^c)$ はそれぞれ Λ, Λ^c におけるボンド配列。）よってこれは $\bigcap_{\Lambda:\text{finite}} \mathcal{G}(\Lambda^c)$- 可測な関数になる。（$\mathcal{G}(\Lambda^c)$ は $\Xi(\Lambda^c)$ における σ- 加法族。）つまり、$A(\hat{f}, a) \in \bigcap_{\Lambda:\text{finite}} \mathcal{G}(\Lambda^c)$ となる。このとき、Kolmogorov の 0-1 法則（[19] 参照）から $\nu(A(\hat{f}, a)) = 0 \text{ or } 1$ となることが言える。すると $\hat{f}(\mathcal{J}) = \sup\{a | \nu(A(\hat{f}, a)) = 1\}$ となって $\hat{f}(\mathcal{J})$ は $\mathcal{J}$ によらない。f は任意だったから、これは $R_{\mathcal{J}}(q)$ が $\mathcal{J}$ によらないことを意味する。しかるにこれは (71) を満たす関数が非自己平均的なことに反する。よってこの関数は $\mathcal{G}$- 可測ではない。

さて今まで見てきた $R_{\mathcal{J}}(q) = R_{r(\mathcal{J})}(q)$ は $\mathcal{G}$- 可測でない関数の一つの例に過ぎない。しかし、先にも述べた通りこの関数は Parisi 解と関係しているのである。それは $R_{\mathcal{J}}(q)$ が (71) を満たしていることによる。ここで、さらに Parisi 解に近付いてみよう。$R_{\mathcal{J}}(q)$ の代わりに

$$P^*_{\mathcal{J}}(q) = P^*_{r(\mathcal{J})}(q) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2^{N+1}-1} V_n \delta\left(q - \hat{P}^{-1}(a_r^{S_N(n)})\right) \tag{84}$$

なる $P^*_{\mathcal{J}}(q)$ をとる。$\hat{P}$ は $\hat{P}_{\mathcal{J}}$ のボンド配列による平均である。$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ は付録 A.2 節の (144) 式を満たすとする。(144) を満たす $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ はまだ求まってなく、実際に存在するかどうかも分からないが、もし存在するなら (84) は Parisi picture にもとづくオーバーラップ分布関数（の一つ）である。（この式の詳細は付録 A.2 節参照。）

$P^*_{\mathcal{J}}(q)$ も $R_{\mathcal{J}}(q)$ 同様に無限遠方のボンドの値に依存するカオス的な関数である。従って $\mathcal{G}$- 可測でない。このことが意味するのは、Newman-Stein の議論によっては $P^*_{\mathcal{J}}(q)$ のような関数

の存在を否定することはできないということである。（ $P^*_{\mathcal{J}}(q)$ が存在すれば Newman-Stein の議論は Parisi picture を否定できなくなってしまう。）従ってオーバーラップ分布関数 $P_{\mathcal{J}}(q)$ が $\mathcal{G}$- 可測かどうかを確かめることは重要である。

なお、我々がこれまで扱ってきたオーバーラップ分布関数は Aizenman-Wehr の Gibbs 測度を用いたものであったが、この関数だけならば $\mathcal{G}$- 可測性を確かめずとも $P^*_{\mathcal{J}}(q)$ のような無限遠のボンドに依存する関数にはならないことが言える。というのも Aizenman-Wehr の測度を用いたオーバーラップ分布関数は (63) を見れば分かる通り、無限遠方のボンドについて平均をとっていた。だからこの関数は無限遠方のボンドにはよらないのである。ただしこれは Aizenman-Wehr の系に固有の事情であり、一般的に言えることではない。従って他の Gibbs 測度について調べることが必要なのである。

5　まとめと今後の課題

これまでの議論を簡単に整理すると次のようになる。

1. オーバーラップ分布関数を Parisi による統計力学的解釈に一致するように定義した。
2. オーバーラップ分布関数における Gibbs 測度として平行移動共変であり、かつボンド配列ごとに一意的に定まるものをとる。
（具体的には Aizenman-Wehr による Gibbs 測度など。）
3. オーバーラップ分布関数が $\mathcal{G}$- 可測ならば、Gibbs 測度の平行移動共変性からエルゴード性を使って自己平均性が証明される。(Newman-Stein の議論。）この結果は Parisi picture と相容れない。
4. ただし、
   (a) Gibbs 測度の平行移動共変性は一般的な性質なのかどうかは不明である。
   (b) オーバーラップ分布関数の $\mathcal{G}$- 可測性を確かめねばならない。
   (c) （Aizenman-Wehr の測度以外の）他の Gibbs 測度にもとづくオーバーラップ分布関数についても考える必要がある。

現段階では Newman-Stein の議論から直ちに Parisi picture は成り立たないと結論することはできないだろう。従って今後は Newman-Stein の議論において欠落していた部分（上記の 4 で指摘した点）について考察を進める必要がある。

一方、付録において論じた Parisi picture にもとづくオーバーラップ分布関数 $P^*_{\mathcal{J}}(q)$ についてさらに調べる必要がある。特に (144) を満たす $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在するのかどうか、また $P^*_{\mathcal{J}}(q)$ の性質（無限遠方のボンドに依存し、$\mathcal{G}$- 非可測）が Parisi picture においてどの程度一般的なのかにも興味がある。また、序論でもふれた通り、この関数は SK model に対しても有効である。（最近接格子対を全スピン対に置き換えれば同じ議論ができる。）従って、この関数を調べることで SK model の性質も調べることができるかもしれない。SK model のオーバーラップ分布関数が、無限個のボンドの値を指定しなければ関数形の定まらないカオス的な関数なのかどうかは特に興味のある点である。このあたりも今後の課題であろう。

最後に、適切な助言を下さり、また粘り強く議論に応じて下さった指導教官の原 隆先生と、学部生在学時の指導教官で大学院進学後もお世話になった西森 秀稔先生に感謝の意を表して、この論文を終える。

A 付録

A.1 ボンド配列の平行移動エルゴード性

ボンド配列の分布 ν が平行移動エルゴード的であることを示す。平行移動エルゴード性とは

$$\begin{aligned}&A \in \mathcal{G} \text{ が任意の } x \in Z^d \text{ に対して、} T_x A = A \\ &\Longrightarrow \nu(A) = 0 \,\text{or}\, 1\,. \end{aligned} \tag{85}$$

であることを意味する。ここで T_x は x だけ平行移動させる変換を表す。例えば

$$T_x J_{ij} = J_{i+x\; j+x} \tag{86}$$

などのことである。では証明に移る。この証明は [21] からの引用である。

（証明）

まず、$A, B \subset \Xi$ に対して

$$T_x(A \triangle B) = (T_x A) \triangle (T_x B) \tag{87}$$

が成り立つことを示す。ただし、$\triangle$ は対称差（ $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ ）を表す。

$$\begin{aligned} T_x(A \cup B) &= \{T_x \mathcal{J} \mid \mathcal{J} \in A \text{ or } \mathcal{J} \in B\} \\ &= \{T_x \mathcal{J} \mid \mathcal{J} \in A\} \cup \{T_x \mathcal{J} \mid \mathcal{J} \in B\} \\ &= (T_x A) \cup (T_x B) \end{aligned} \tag{88}$$

同様に

$$T_x(A \cap B) = (T_x A) \cap (T_x B) \tag{89}$$

また

$$\begin{aligned} \mathcal{J} \in T_x A^c &\iff T_{-x}\mathcal{J} \in A^c \\ &\iff T_{-x}\mathcal{J} \notin A \\ &\iff \mathcal{J} \in (T_x A)^c \end{aligned} \tag{90}$$

すなわち $T_x A^c = (T_x A)^c$ 。これらを用いると

$$\begin{aligned} T_x(A \triangle B) &= T_x(A \cap B^c) \cup T_x(A^c \cap B) \\ &= ((T_x A) \cap (T_x B)^c) \cup ((T_x A)^c \cap (T_x B)) \\ &= (T_x A) \triangle (T_x B) \end{aligned} \tag{91}$$

さて、$A \in \mathcal{G}$ が任意の $x \in Z^d$ に対して $T_x A = A$ を満たしているとしよう。「近似定理」によれば、Ξ の σ- 加法族 $\mathcal{G}$ の元 A は任意の $\epsilon > 0$ に対し、Ξ 上の有限個の筒集合の和 B を適当にとることで

$$\nu(A \triangle B) < \epsilon \tag{92}$$

と近似できる。（この「近似定理」については例えば [19] の p 41 参照。）このとき、任意の $x \in Z^d$ に対して

$$\begin{aligned} \nu(A \triangle (B \cap T_x B)) &= \nu((A \cap T_x A) \triangle (B \cap T_x B)) \\ &\leq \nu(A \triangle B) + \nu(T_x(A \triangle B)) \\ &< 2\epsilon \end{aligned} \tag{93}$$

ここで ν の平行移動不変性を用いた。従って

$$\begin{aligned} & |\nu(A) - \nu(B \cap T_x B)| \\ = & \left|\int [I_A - I_{B\cap T_x B}]\, d\nu\right| \\ = & \left|\int [I_{A\setminus(B\cap T_x B)} + I_{A\cap(B\cap T_x B)} - I_{(B\cap T_x B)\cap A} - I_{(B\cap T_x B)\setminus A}]\, d\nu\right| \\ = & \left|\int [I_{A\setminus(B\cap T_x B)} - I_{(B\cap T_x B)\setminus A}]\, d\nu\right| \\ \leq & \int [I_{A\setminus(B\cap T_x B)} + I_{(B\cap T_x B)\setminus A}]\, d\nu \\ = & \nu(A \triangle (B \cap T_x B)) \\ < & 2\epsilon \end{aligned} \tag{94}$$

ここで B は有限個の筒集合の和なので、有限個のボンドにしか依存しない。そのボンド全体を Γ と書くと、$T_x B$ が依存するボンドは $T_{-x}\Gamma$ である。$|x|$ を十分大きくとって $\Gamma \cap T_{-x}\Gamma = \phi$ となるようにすれば、B と $T_x B$ は互いに独立。すなわち

$$\nu(B \cap T_x B) = \nu(B)\,\nu(T_x B) = \{\nu(B)\}^2 \tag{95}$$

従って

$$|\nu(A) - \{\nu(B)\}^2| < 2\epsilon \tag{96}$$

また

$$\begin{aligned} & |\nu(A) - \nu(B)| \\ = & \left|\int [I_A - I_B]\, d\nu\right| \\ = & \left|\int [I_{A\setminus B} + I_{A\cap B} - I_{B\cap A} - I_{B\setminus A}]\, d\nu\right| \\ = & \left|\int [I_{A\setminus B} - I_{B\setminus A}]\, d\nu\right| \\ \leq & \int [I_{A\setminus B} + I_{B\setminus A}]\, d\nu \\ = & \nu(A \triangle B) \\ < & \epsilon \end{aligned} \tag{97}$$

だから

$$\begin{aligned} & |\nu(A) - \{\nu(A)\}^2| \\ \leq & |\nu(A) - \{\nu(B)\}^2| + |\{\nu(B)\}^2 - \{\nu(A)\}^2| \\ < & 2\epsilon + 2\epsilon = 4\epsilon \end{aligned} \tag{98}$$

ϵ は任意だったから

$$\nu(A) = \{\nu(A)\}^2 \tag{99}$$

すなわち $\nu(A) = 0 \,\mathrm{or}\, 1$ 。

（証明終り）

A.2 Parisi picture にもとづくオーバーラップ分布関数について

ここでは Parisi picture にもとづくオーバーラップ分布関数について考える。ただし予め断っておくが、Parisi picture そのものは EA model の正しい相転移描像なのかどうか不明である。ここでやるのは Parisi picture の成立を仮定したときのオーバーラップ分布関数がどのようなものになるかを調べることである。具体的には Parisi picture のオーバーラップ分布関数が満たす条件からオーバーラップ分布関数を推定するのである。（なお、以下の議論は SK model に対しても使える。SK model の場合は Parisi picture は仮定ではなく、正しい相転移描像である。）

さて Parisi picture とは SK model における相転移描像（Parisi 解）が EA model でも成り立つとするものである。Parisi 解によればオーバーラップ分布関数 $P_{\mathcal{J}}(q)$ は次の性質を持つ：

$$\int d\nu P_{\mathcal{J}}(q_1)\, P_{\mathcal{J}}(q_2) = \frac{1}{3} P(q_1)\, \delta(q_1 - q_2) + \frac{2}{3} P(q_1) P(q_2) \tag{100}$$

$$P(q) = \int d\nu P_{\mathcal{J}}(q) \tag{101}$$

$P(q)$ はボンド配列に関する平均をとったオーバーラップ分布関数である。$P(q)$ については既知であるとして（ $P(q)$ の関数形については例えば [2] を参照）、ここでは $P_{\mathcal{J}}(q)$ について考える。

さてオーバーラップ分布関数は

$$P_{\mathcal{J}}(q) = \sum_{\alpha,\beta} W_{\mathcal{J}}^{\alpha} W_{\mathcal{J}}^{\beta} \delta(q - q_{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}) \tag{102}$$

と書かれる。累積分布関数に直すと

$$\hat{P}_{\mathcal{J}}(q) = \sum_{\alpha,\beta} W_{\mathcal{J}}^{\alpha} W_{\mathcal{J}}^{\beta} I(q > q_{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}) \tag{103}$$

ただし I は

$$I(x > a) = \begin{cases} 1 & (x > a \text{のとき}) \\ 0 & (x \le a \text{のとき}) \end{cases}$$

なる関数である。以下では計算上の利便性から（分布関数ではなく）累積分布関数を考察の対象とする。(103) を次のように書き直す。

$$\hat{P}_{\mathcal{J}}(q) = \sum_{n=1}^{\infty} V_{\mathcal{J}}^{n} I(q > x_{\mathcal{J}}^{n}) \tag{104}$$

ここで $V_{\mathcal{J}}^{n}$ が $\mathcal{J}$ によらないと仮定しよう。$V_{\mathcal{J}}^{n}$ を V_n と書く。この仮定が妥当なのかどうかは $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ として後で述べる条件 (144) を満たすものが存在するかどうかにかかっている。

ボンド配列平均をとると

$$\hat{P}(q) = \int d\nu\, \hat{P}_{\mathcal{J}}(q) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \int d\nu\, I(q > x_{\mathcal{J}}^n) \tag{105}$$

この式を満たすためには $x_{\mathcal{J}}^n$ が分布 P に従って分布すればよい。P に従うとは $x_{\mathcal{J}}^n$ を Ξ 上の確率変数とみて、任意の実数 q に対して集合 $A(q)$ を

$$A(q) \equiv \{\, \mathcal{J} \mid x_{\mathcal{J}}^n < q \,\} \tag{106}$$

で定義してやれば

$$\nu(A(q)) = \int^{q} P(q')\, dq' = \hat{P}(q) \tag{107}$$

が成り立つことをいう。このとき

$$\int d\nu\, I(q > x_{\mathcal{J}}^n) = \nu(A(q)) = \hat{P}(q) \tag{108}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = 1$ とあわせると確かに（105）が成り立つ。

さて（100）式を累積分布関数に関する式に書き直すと

$$\int d\nu \hat{P}_{\mathcal{J}}(q_1)\, \hat{P}_{\mathcal{J}}(q_2) = \frac{1}{3} \min_{i=1,2} \hat{P}(q_i) + \frac{2}{3} \hat{P}(q_1) \hat{P}(q_2) \tag{109}$$

この式の左辺に、$\hat{P}_{\mathcal{J}}(q) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n I(q > x_{\mathcal{J}}^n)$ を代入すると

$$\begin{aligned}\int d\nu \hat{P}_{\mathcal{J}}(q_1)\, \hat{P}_{\mathcal{J}}(q_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} {V_n}^2 \int d\nu I(q_1 > x_{\mathcal{J}}^n) I(q_2 > x_{\mathcal{J}}^n) \\ &+ \sum_{m \neq n}^{\infty} V_m V_n \int d\nu I(q_1 > x_{\mathcal{J}}^m) I(q_2 > x_{\mathcal{J}}^n)\end{aligned} \tag{110}$$

$$\begin{aligned}(\text{第一項}) &= \sum_{n=1}^{\infty} {V_n}^2 \cdot \min_{i=1,2} \int d\nu\, I(q_i > x_{\mathcal{J}}^n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} {V_n}^2 \cdot \min_{i=1,2} \hat{P}(q_i)\end{aligned} \tag{111}$$

（109）と比較してやると、$\sum_{n=1}^{\infty} {V_n}^2 = 1/3$ だろう。すると第二項は $\frac{2}{3}\hat{P}(q_1)\hat{P}(q_2)$ となるはずである。もし $x_{\mathcal{J}}^m$ と $x_{\mathcal{J}}^n$ （$m \neq n$）が互いに独立に振舞うならば、第二項について

$$\begin{aligned}&\int d\nu I(q_1 > x_{\mathcal{J}}^m) I(q_2 > x_{\mathcal{J}}^n) \\ &= \nu\Big(\{\, \mathcal{J} \mid x_{\mathcal{J}}^m < q_1 \,\} \cap \{\, \mathcal{J} \mid x_{\mathcal{J}}^n < q_2 \,\}\Big) \\ &= \nu\{\, \mathcal{J} \mid x_{\mathcal{J}}^m < q_1 \,\}\, \nu\{\, \mathcal{J} \mid x_{\mathcal{J}}^n < q_2 \,\} \\ &= \hat{P}(q_1)\hat{P}(q_2)\end{aligned} \tag{112}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = 1$ に注意すれば、$\sum_{m \neq n}^{\infty} V_m V_n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} {V_n}^2 = 2/3$ だから、（110）の第二項は確かに $\frac{2}{3}\hat{P}(q_1)\hat{P}(q_2)$ になっている。以上から $x_{\mathcal{J}}^n, V_n$ について次のことが分かった：

1. $\{x^n_{\mathcal{J}}\}_{n=1}^{\infty}$ は P に従って分布する互いに独立な確率変数列である。

2. V_n は $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} {V_n}^2 = 1/3$ を満たす。

では次に上の条件を満たす $x^n_{\mathcal{J}}$ の具体的な表式を一つ与えよう。ボンド配列そのものは扱いにくいので、これを [0, 1] 区間上の実数に置き換える。すなわちボンド配列 $\mathcal{J}$ を [0, 1] 区間上の実数 $r = r(\mathcal{J})$ に置き換える。その方法は既に 4.2 節で与えた。$x^n_{\mathcal{J}}$ は $r = r(\mathcal{J})$ を使えば x^n_r と書き換えられる。x^n_r は P に従うが、これは一様分布に従う a^n_r を用いて $x^n_r = \hat{P}^{-1}(a^n_r)$ ととればよい。a^n_r としては

$$a^n_r = \{\, 2^n r \text{ の小数点以下の部分} \,\} \tag{113}$$

（ただし r は 2 進数で表記されていることに注意。a^n_r は r を 2 進小数で書いたとき、小数点以下 n 桁目までは捨てて $n+1$ 桁目を 1 桁目にもってきた数である。）この $\{a^n_r\}_{n=1}^{\infty}$ は一様分布に従うことが知られている。（Weyl の一様分布定理。）これを用いて $x^n_r = \hat{P}^{-1}(a^n_r)$ ととれば確かに x^n_r が P に従うことを示すことができる。だが、このままでは $\{x^n_r\}_{n=1}^{\infty}$ は互いに独立ではない。つまり (112) を $\mathcal{J}$ から r に置き換えた式：

$$\int dr\, I(q_1 > x^m_r) I(q_2 > x^n_r) = \hat{P}(q_1)\hat{P}(q_2) \tag{114}$$

が満たされないのである。そこで $\{a^n_r\}_{n=1}^{\infty}$ の順番を並べ変えて以下で述べるように x^n_r を新たに取り直す。（番号の近い a^m_r と a^n_r は独立ではないのでこれらを互いに引き離すのである。）

まず、（2 進数の意味で）$N+1$ 桁までの自然数全体の自己同型写像 S_N を次のように作る。

n を a 桁（$a \le N+1$）の自然数として

$$n = n_0 + n_1 \cdot 2 + n_2 \cdot 2^2 + \cdots + n_N \cdot 2^N \tag{115}$$

ただし、$n_0, n_1, n_2, \cdots$ は 0 か 1 であり、また $n_a = n_{a+1} = \cdots = n_N = 0$ である。この n に対し、

$$S_N(n) = n_0 \cdot 2^N + n_1 \cdot 2^{N-1} + n_2 \cdot 2^{N-2} + \cdots + n_N \tag{116}$$

このようにして S_N を定めるのである。明らかに S_N は $N+1$ 桁までの自然数の自己同型写像になっている。これを用いて $x^n_r = \hat{P}^{-1}(a^{S_N(n)}_r)$ とすれば、$N \to \infty$ で x^m_r と x^n_r（$m \neq n$）は互いに独立になる。これは要するに任意の $m \neq n$ について、$\lim_{N\to\infty} |S_N(m) - S_N(n)| = \infty$ となることを利用して

$$r = 0.C_1 C_2 \cdots C_{S_N(m)} C_{S_N(m)+1} \cdots C_{S_N(n)} C_{S_N(n)+1} \cdots \tag{117}$$

に対して、

$$a^{S_N(m)}_r = 0.C_{S_N(m)+1} C_{S_N(m)+2} \cdots C_{S_N(n)} C_{S_N(n)+1} \cdots \tag{118}$$

$$a^{S_N(n)}_r = 0.C_{S_N(n)+1} C_{S_N(n)+2} \cdots \tag{119}$$

が $N \to \infty$ で互いに独立に振舞うことを利用するのである。（単に a^n_r をとると、例えば $m < n$ のとき $a^m_r < 2^{m-n-1}$ ならば $a^n_r < 1/2$ とならねばならず、a^m_r と a^n_r は独立ではない。）なお、上の条件さえ満たせば S_N の形は何でもよい。

こうして Parisi picture にもとづくオーバーラップ分布関数として

$$\hat{P}_r^*(q) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2^{N+1}-1} V_n I\left(q > \hat{P}^{-1}\left(a_r^{S_N(n)}\right)\right) \tag{120}$$

がとれる。この式は（109）をボンド配列 $\mathcal{J}$ に関する平均から、r に関する平均に置き換えた式：

$$\int_0^1 dr\, \hat{P}_r(q_1)\, \hat{P}_r(q_2) = \frac{1}{3}\min_{i=1,2} \hat{P}(q_i) + \frac{2}{3}\hat{P}(q_1)\hat{P}(q_2) \tag{121}$$

$$\hat{P}_r(q) = \int_0^1 \hat{P}_r(q)\, dr \tag{122}$$

を満たしている。このことを計算によって確かめよう。ただし、計算に興味がなければ（142）式の下まで読み飛ばして差し支えない。

$$\begin{aligned} \hat{P}_r^*(q) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2^{N+1}-1} V_n I\left(q > \hat{P}^{-1}\left(a_r^{S_N(n)}\right)\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2^{N+1}-1} V_n I\left(\hat{P}(q) > a_r^{S_N(n)}\right) \end{aligned} \tag{123}$$

を（121）の左辺に代入して

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \hat{P}_r^*(q_1)\, \hat{P}_r^*(q_2)\, dr \\ =\ & \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2^{N+1}-1} {V_n}^2 \int_0^1 I\left(\hat{P}(q_1) > a_r^{S_N(n)}\right) I\left(\hat{P}(q_2) > a_r^{S_N(n)}\right) dr \\ +\ & \lim_{N\to\infty} \sum_{m\neq n}^{2^{N+1}-1} V_m V_n \int_0^1 I\left(\hat{P}(q_1) > a_r^{S_N(m)}\right) I\left(\hat{P}(q_2) > a_r^{S_N(n)}\right) dr \end{aligned} \tag{124}$$

$$\begin{aligned} (\text{第 1 項}) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2^{N+1}-1} {V_n}^2 \\ & \quad \sum_{k=1}^{2^{S_N(n)}} \int_{(k-1)\cdot 2^{-S_N(n)}}^{k\cdot 2^{-S_N(n)}} I\left(\hat{P}(q_1) > 2^{S_N(n)} r - k + 1\right) I\left(\hat{P}(q_2) > 2^{S_N(n)} r - k + 1\right) dr \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2^{N+1}-1} {V_n}^2 \int_0^1 I\left(\hat{P}(q_1) \geq r\right) I\left(\hat{P}(q_2) \geq r\right) dr \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} {V_n}^2 \min_{i=1,2} \hat{P}(q_i) \\ &= \frac{1}{3} \min_{i=1,2} \hat{P}(q_i) \end{aligned} \tag{125}$$

次に第 2 項の計算だが、少し準備をしよう。m, n を

$$m = m_0 + m_1 \cdot 2 + m_2 \cdot 2^2 + \cdots + m_N \cdot 2^N \tag{126}$$

$$n = n_0 + n_1 \cdot 2 + n_2 \cdot 2^2 + \cdots + n_N \cdot 2^N \tag{127}$$

と書く。m, n が $b+2$ 桁より後で一致しているとき、すなわち

$$m_j = n_j \qquad (j \geq b+1) \tag{128}$$

であるとき

$$\begin{aligned} |S_N(m) - S_N(n)| &= |(m_0 - n_0) \cdot 2^N + (m_1 - n_1) \cdot 2^{N-1} + \cdots + (m_N - m_N)| \\ &= |(m_0 - n_0) \cdot 2^N + (m_1 - n_1) \cdot 2^{N-1} + \cdots + (m_l - m_l) \cdot 2^{N-b}| \\ &\geq 2^{N-b} \end{aligned} \tag{129}$$

さて、

$$S_N(m) = m' \tag{130}$$
$$S_N(n) = n' \tag{131}$$
$$\hat{P}(q_1) = Q_1 \tag{132}$$
$$\hat{P}(q_2) = Q_2 \tag{133}$$

などとおく。以下では $m' > n'$ とする。

$$\begin{aligned} & \left|\int_0^1 I(\hat{P}(q_1) > a_r^{S_N(m)}) I(\hat{P}(q_2) > a_r^{S_N(n)})\, dr - \hat{P}(q_1)\hat{P}(q_2)\right| \\ = & \left|\int_0^1 I(Q_1 > a_r^{m'}) I(Q_2 > a_r^{n'})\, dr - Q_1 Q_2\right| \\ = & \left|\sum_{k=1}^{2^{n'}} \int_{(k-1)\cdot 2^{-n'}}^{k\cdot 2^{-n'}} I(Q_1 > a_r^{m'}) I(Q_2 > 2^{n'} r - k + 1)\, dr - Q_1 Q_2\right| \\ = & \left|2^{n'} \int_0^{2^{-n'}} I(Q_1 > a_r^{m'}) I(Q_2 > 2^{n'} r)\, dr - Q_1 Q_2\right| \\ = & \left|2^{n'} \sum_{l=1}^{2^{m'-n'}} \int_{(l-1)\cdot 2^{-m'}}^{l\cdot 2^{-m'}} I(Q_1 > 2^{m'} r - l + 1) I(Q_2 > 2^{n'} r)\, dr - Q_1 Q_2\right| \end{aligned} \tag{134}$$

ここで

$$l \cdot 2^{-m'} < Q_2 \cdot 2^{-n'} \tag{135}$$

を満たす最大の l を l^* と書くと

$$\begin{aligned} (134) \ &\leq \left|2^{n'} \sum_{l=1}^{l^*} \int_{(l-1)\cdot 2^{-m'}}^{l\cdot 2^{-m'}} I(Q_1 > 2^{m'} r - l + 1)\, dr - Q_1 Q_2\right| + 2^{n'-m'} \\ &= \left|2^{n'} l^* \int_0^{2^{-m'}} I(Q_1 > 2^{m'} r)\, dr - Q_1 Q_2\right| + 2^{n'-m'} \\ &= |2^{n'} l^* 2^{-m'} Q_1 - Q_1 Q_2| + 2^{n'-m'} \end{aligned} \tag{136}$$

ここで

$$l^* 2^{-m'} < Q_2 \cdot 2^{-n'} \leq (l^* + 1) 2^{-m'} \tag{137}$$

より、

$$|2^{n'}l^*2^{-m'}Q_1 - Q_1Q_2| \leq Q_1 2^{n'-m'} \tag{138}$$

従って

$$(136) \leq (Q_1+1)2^{n'-m'} \tag{139}$$

（129）より

$$(139) \leq (Q_1+1)2^{-2^{N-b}} \longrightarrow 0 \qquad (N \to \infty) \tag{140}$$

ゆえに

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^1 I\left(\hat{P}\left(q_1\right) > a_r^{S_N(m)}\right) I\left(\hat{P}\left(q_2\right) > a_r^{S_N(n)}\right) dr = \hat{P}\left(q_1\right)\hat{P}\left(q_2\right) \tag{141}$$

よって（124）の第２項は

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}\sum_{m\neq n}^{2^{N+1}-1} V_m V_n \int_0^1 I\left(\hat{P}\left(q_1\right) > a_r^{S_N(m)}\right) I\left(\hat{P}\left(q_2\right) > a_r^{S_N(n)}\right) dr \\
= &\lim_{N\to\infty}\sum_{m\neq n}^{2^{N+1}-1} V_m V_n \hat{P}\left(q_1\right)\hat{P}\left(q_2\right) \\
= &\lim_{N\to\infty}(1 - \sum_{n=1}^{2^{N+1}-1} {V_n}^2)\hat{P}\left(q_1\right)\hat{P}\left(q_2\right) \\
= &\frac{2}{3}\hat{P}\left(q_1\right)\hat{P}\left(q_2\right)
\end{aligned} \tag{142}$$

以上で（121）が証明された。

次に係数 $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ について考える。実はオーバーラップ累積分布関数について次の関係式が成り立つことが分かっている（参考文献 [10] の（26）式）：

$$\begin{aligned}
\int d\nu\, \hat{P}_{\mathcal{J}}\left(q\right)^2 &= \frac{1}{3}\hat{P}\left(q\right) + \frac{2}{3}\hat{P}\left(q\right)^2 \\
\int d\nu\, \hat{P}_{\mathcal{J}}\left(q\right)^3 &= \frac{1}{5}\hat{P}\left(q\right) + \frac{7}{15}\hat{P}\left(q\right)^2 + \frac{1}{3}\hat{P}\left(q\right)^3 \\
\int d\nu\, \hat{P}_{\mathcal{J}}\left(q\right)^4 &= \frac{1}{7}\hat{P}\left(q\right) + \frac{13}{35}\hat{P}\left(q\right)^2 + \frac{37}{105}\hat{P}\left(q\right)^3 + \frac{2}{15}\hat{P}\left(q\right)^4 \\
&\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{143}$$

（一番上の式は（109）で $q_1 = q_2$ としたものである。なお、一般の n 次の場合に通用する公式は得られていない。しかし、任意の次数について計算することは可能である。[10] 参照。）よって

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} V_n = 1 \\
&\sum_{n=1}^{\infty} {V_n}^2 = \frac{1}{3} \quad , \quad \sum_{m\neq n}^{\infty} V_m V_n = \frac{2}{3} \\
&\sum_{n=1}^{\infty} {V_n}^3 = \frac{1}{5} \quad , \quad \sum_{m\neq n}^{\infty} V_m {V_n}^2 = \frac{7}{15} \quad , \quad \sum_{\{l,m,n,\}}^{\infty} V_l V_m V_n = \frac{1}{3} \\
&\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{144}$$

$\{l, m, n\}$ は l, m, n が互いに異なることを表す。もし (144) 式を満たす $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実際に存在するならば、Parisi picture にもとづくオーバーラップ分布関数が一つ求まったことになる。すなわち、

$$P^*_{\mathcal{J}}(q) = P^*_{r(\mathcal{J})}(q) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2^{N+1}-1} V_n \delta\left(q - \hat{P}^{-1}\left(a_{r(\mathcal{J})}^{S_N(n)}\right)\right) \tag{145}$$

である。なお、4.2 節で与えた $R_{r(\mathcal{J})}(q)$ は (145) で $V_n = 1/2^n$ としたものである。$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1, \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^n})^2 = \frac{1}{3}$ なので、確かに (109) を満たしている。しかしこれは (144) の3段目以降は満たさない。先にも述べた通り、(144) を満たす $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ は見つかっておらず、存在するかどうかも分からないのである。

なお、$a_r^{S_N(n)}$ のような取り方は一つの例に過ぎず、一般的なものではない。従って $P^*_{\mathcal{J}}(q)$ は Parisi 解の一つの候補というべきだろう。$a_r^{S_N(n)}$ のような複雑な取り方をしたのは、既に確立している Weyl の一様分布定理を活用するためであった。しかし、他にどのような取り方をしても $P^*_{\mathcal{J}}(q)$ の最も重要な性質である「無限遠方のボンドに依存し、$\mathcal{G}$- 可測でない」は変わらないように思われる。数学的な考察は省くが、$a_r^{S_N(n)}$ の代わりに次のような取り方もあるだろう。

$r = 0.C_1 C_2 C_3 \cdots$ に対して、$b_r^n = 0.C_n C_{N+n} C_{2N+n} \cdots$ ととる。$\{b_r^n\}_{n=1}^{\infty}$ は一様分布に従い、$N \to \infty$ で互いに独立に振舞うだろう。(実数の各桁の値は独立にきまるから。) b_r^n の一桁目の値 C_n は有限領域のボンドに対応するから、このときのオーバーラップ分布関数は有限領域のボンドにも依存している。だが、2桁目以降の全ての桁は $N \to \infty$ で、無限遠方のボンドに対応する。従って、オーバーラップ分布関数の有限領域のボンドへの依存性は弱く、殆んど無限遠方のボンドに依存していて $P^*_{\mathcal{J}}(q)$ 同様 $\mathcal{G}$- 非可測な関数になるだろう。

あるいは $c_r^n = 0.C_{(n-1)N+1} C_{(n-1)N+2} C_{(n-1)N+3} \cdots$ という取り方もある。この場合は c_r^1 は $C_1, C_2, \cdots$ など有限領域のボンドに対応する桁に依存するが、c_r^2 以降は $C_{(n-1)N+1}, C_{(n-1)N+2}, \cdots$ ($n \neq 1$) など $N \to \infty$ で無限遠方のボンドに対応する桁にしか依存しない。よって c_r^1 以外は全て無限遠方のボンドに依存し、やはりオーバーラップ分布関数は $\mathcal{G}$- 非可測になるだろう。

まだ他の取り方も考えられるだろうが、本質的には b_r^n のような取り方 (十分離れた桁をとびとびにひろう) と c_r^n のような取り方 (十分離れた連続する桁をひろう) とでつくされているように思われる。

なお、今までは EA model を考えてきたが、ボンドとして最近接格子対の代わりに全スピン対をとれば、上の議論は SK model に対してそのまま使える。全スピンの対は最近接格子対同様、可算無限個あるので 4.2 節のように $r = r(\mathcal{J})$ なる対応によってボンド配列を $[0, 1]$ 上の実数に置き換えられるからである。

参考文献

[1] Edwards, Anderson : J.Phys.F5, 965 (1975)

[2] Mezard, Parisi, Virasoro : *Spin Glass Theory and Beyond*, World Scientiffic, Singapore (1987)

[3] Parisi : Phys.Rev.Lett.50, 1946 (1983)

[4] Fisher, Huse : Phys.Rev.Lett.56, 1601 (1986)

[5] Huse, Fisher : J.Phys.A20, L997 (1987)

[6] Fisher, Huse : J.Phys.A20, L1005 (1987)

[7] Parisi : Physica A 194, 28 (1993)

[8] Fisher, Sompolinsky : Phys.Rev.Lett.54, 1063 (1985)

[9] Rammal, Toulouse, Virasoro : Rev.Mod.Phys.58, 765 (1986)

[10] Mezard, Parisi, Sourlas, Toulouse, Virasoro : J.Physique.45, 843 (1984)

[11] Mezard, Virasoro : J.Physique.46, 1293 (1985)

[12] Newman, Stein : Phys.Rev.Lett.76, 515 (1996)

[13] Newman, Stein : Phys.Rev.Lett.76, 4821 (1996)

[14] Newman, Stein : *The Metastate Approach to Thermodynamic Chaoce*, preprint (1996)

[15] Aizenman, Wehr : Comm.Math.Phys.130, 489 (1990)

[16] Newman, Stein : Phys.Rev.B.46, 973 (1992)

[17] Pastur, Shcherbina : J.Stat.Phys.62, 1 (1991)

[18] Guerra : About the Overlap Distribution in Mean Field Spin Glass Models, preprint (1995)

[19] 西尾 真喜子 : 確率論 実教出版社 (1978)

[20] 荒木 不二洋 : 統計物理の数理 岩波書店 (1994)

[21] 樋口 保成 : パーコレーション 遊星社 (1992)