UiT
NORGES
ARKTISKE
UNIVERSITET

Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

Ungdomsskoleelevers generaliseringsprosess

En kvalitativ studie om hva som kjennetegner ungdomsskoleelevers generalisering av figurmønsteroppgaver.

—

Susan Madeleine Kalseth

Masteroppgave i matematikkdidaktikk – lærerutdanning 5.-10. trinn. (LRU-3903)

Mai 2019

Sammendrag

I denne masteroppgaven har jeg undersøkt hva som kjennetegner ungdomsskoleelevers generaliseringsprosess i arbeid med figurmønster. Resultater fra TIMSS 2015 viser at norske elever på 9. trinn presterer middels godt i matematikk med særlig svake prestasjoner i emnet algebra (Bergem, 2016, s. 22). Tidligere forskning viser at få elever klarer å bruke algebra for å uttrykke sammenhenger eller å generalisere til en fullstendig formel (Rivera & Becker, 2005, s. 198). Hensikten med prosjektet var å få en oversikt over hvilke strategier elevene brukte og hvilke argumentasjoner de hadde for løsningene sine i generalisering av et figurmønster.

Studiet har en kvalitativ tilnærming og med utgangspunkt i seks oppgavebaserte intervju har jeg gjennom en induktiv, tematisk analyse utarbeidet fem kategorier som beskriver løsningsstrategier elevene brukte i løsningsprosessen. Kategoriene er presentert hierarkisk basert på grad av generalitet som inngår i hver kategori. De presenteres som tre hovedkategorier; 1) *visualisering*, 2) *argumentasjon basert på tallrekke* og 3) *algebraisk argumentasjon*. Under kategori 1 finner vi underkategoriene *illustrasjon* og *beskrivende visualisering*, mens under kategori 3 er *algebraisk argumentasjon uten notasjon* og *algebraisk argumentasjon med notasjon* plassert. Underkategoriene viser til ulike tilnærminger av hovedkategorien. Hovedkategori 1 og 2 viser til løsningsstrategier som er empirisk basert, mens i hovedkategori 3 er strategien basert på generaliteten i figurfølgen. Funnene viser til at de fleste elevene bruker empirisk baserte strategier for å svare på oppgaver som ikke krever generalisering av dem. Likevel klarer over halvparten å bruke algebraisk notasjon til å lage et fullstendig uttrykk når de blir bedt om å lage et uttrykk i oppgaven.

Funnene viser at de fleste elevene klarer å generalisere på et høyt nivå med å inkludere algebraisk notasjon i løsningene sine, men at de ikke gjør det før det står spesifikt i oppgaven. På bakgrunn av at de velger empirisk baserte strategier for å løse oppgaver som ikke eksplisitt ber om generalisering, viser det til at de ikke ser behovet for et mer generelt argument for hvorfor svaret er riktig. Dette er aktuelle funn da et av kjerneelementene i den nye læreplanen som trer i kraft i 2020 sier spesifikt: elevene skal forstå at matematiske resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser (Kunnskapsdepartementet, 2018b). Siden utvalget er begrenset i min undersøkelse er det naturlig å oppfordre til videre undersøkelse om dette også gjelder for et større utvalg elever eller med andre generaliseringsoppgaver.

Forord

Denne avhandlingen markerer slutten på tiden som student ved lærerutdanningen på UiT – Norges arktiske universitet. Arbeidet med denne oppgaven har vært interessant, lærerik og til tider krevende. Jeg har fått muligheten til å gå dypere i temaer som interesserer meg og erfaringene ser jeg fram til å videreføre i egen praksis.

Først og fremst vil jeg takke alle mine medstudenter som har bidratt til en fantastisk studietid, særlig for godt samhold og motivasjon i et intenst siste semester. Jeg vil også takke veileder Ove Gunnar Drageset for støtte og veiledning i prosessen. Til slutt vil jeg takke læreren og de flotte elevene som har bidratt til dette prosjektet.

Innholdsfortegnelse

Figurliste

Tabelliste

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for prosjektet

I løpet av det andre året på videregående skole var det som om jeg kom over en kneik og plutselig forstod det som hadde vært utfordrende i matematikken. Algebra hadde alltid vært vanskelig og plutselig forstod jeg hvorfor regneregler og formler fungerte. Jeg så en kreativ side av matematikken som ikke bare bestod av håndfaste regler og jeg tok meg selv i å løse oppgaver jeg ikke hadde kjennskap til, på bakgrunn av logikk og forståelse. Kreativ matematikk har inspirert meg, særlig gjennom dette studiet har forståelse for matematikk vært noe jeg interesserer meg veldig for, da det var den som banet vei til den kreative siden. I høst fordypet vi oss i matematikkdidaktikk og i en forelesning ble vi presentert for et matematisk spill som ga rom for å være kreativ i løsningsmetodene. Praksisperiodene i løpet av studiet har gitt meg gode erfaringer og et innblikk i hvordan den fremtidige hverdagen kommer til å være. Selv om erfaringene er gode har de likevel ikke gitt meg et innblikk i hvordan man som lærer kan få innsyn i elevenes tankeprosess i arbeid med problemløsningsoppgaver. De er heller preget av å være der for å hjelpe elevene inn på riktig spor dersom de ikke kommer seg videre i oppgaveløsning. Dette er noe svært interessant, da jeg tror det er mye av elevenes kompetanse man går glipp av ved å ikke få ta del i hele resonneringssekvensen til elevene. Kombinasjonene av dette og erfaringen med spillet fra i høst var med på å danne et grunnlag for hva vårens prosjekt skulle dreie seg om.

I 2010 gikk regjeringen inn for å satse på realfag på bakgrunn av blant annet svake resultater fra TIMSS og PISA (Kunnskapsdepartementet, 2010). Rapportene fra undersøkelsene pekte på at valg av arbeidsmåter er en mulig forklaring på de svake resultatene (ibid). I PISA-undersøkelsen blir elevene presentert for problemløsningsoppgaver som tar utgangspunkt i reelle og konkrete situasjoner fra ulike kontekster, og de må ta i bruk matematikkfaglig kunnskap for å kunne kjenne igjen og løse problemene (Nortvedt & Pettersen, 2016, s. 108). Dette krever en helhetlig matematisk kompetanse, og elevene får ikke ferdig oppstilte regnestykker slik de får på for eksempel eksamen i grunnskolen og videregående skole (ibid). Fra PISA-undersøkelsen i 2015 viste resultatene at norske 15-åringer presterer bedre i matematikk enn de gjorde i 2012 (ibid, s. 131), men resultatene fra TIMSS 2015 viste at norske elever på 9. trinn presterte middels godt der særlig svake prestasjoner i algebra trekker gjennomsnittsskåren ned (Bergem, 2016, s. 22). Resultatene viser til en jevn forbedring fra

2007 i de andre emneområdene tall, geometri og statistikk, men ikke i algebra (ibid, s. 41). Jeg syntes derfor det kunne vært interessant å undersøke hvorvidt elevene tar i bruk algebra i oppgaver der ikke algebra er nødvendig for å løse oppgaven. Slike oppgaver bør være åpne for å gi mulighet til ulike løsningsmetoder og på den måten legge opp til at elevene må være kreative.

Silver (1997) sier at skolen gir elever få muligheter til å oppleve det kreative aspektet ved matematikken. De fleste elever ser på matematikk som det skolefaget som er minst assosiert med kreativitet, til tross for at matematikk er nær eller på toppen av enhver hierarkisk liste over intellektuelle domener sortert etter hvor utstrakt kreativitet er tydelig i den disiplinens aktivitet (Silver, 1997, s. 75). Fascinasjonen av spillet fra høstens forelesning gjorde meg motivert til å undersøke hvordan elever går fram i en løsningsprosess, der jeg ønsket å få muligheten til å observere elevene i løsningsprosessen og få innsyn i hvilke argumentasjoner elevene har for de valgte strategiene. Målet med spillet var å generalisere den vinnende strategi og det var derfor hensiktsmessig at prosjektet skulle dreie seg om temaet generalisering. Radford (2010) sier at generalisering gjennom mønster er en av de beste metodene for å introdusere elever til algebra, noe også Mason (1996) antyder ved å si at generalisering er nøkkelen i prosessen mot en underliggende dyp forståelse av algebra. Rivera og Becker (2005) forsket på 8. klassingers generalisering av mønster tidlig på 2000-tallet med minst 30 000 deltagere. Resultatet viste at mindre enn en femtedel kunne bruke algebra for å uttrykke sammenhenger eller å generalisere til en fullstendig formel.

Det ble i 2016 lagt fram i Stortingsmelding 28 at Kunnskapsløftet skulle fornyes (Kunnskapsdepartementet, 2016, s. 6), og i 2020 trer denne i kraft. Målet for det nye læreplanverket er å styrke elevenes faglige forståelse og legge bedre til rette for dybdelæring (Kunnskapsdepartementet, 2018a). Det er utarbeidet kjerneelementer i hvert fag som skal beskrive det viktigste og mest sentrale elevene skal lære og kjernen i hvert enkelt fag. Disse kjerneelementene kan være kunnskapsområder, metoder, begreper, tenkemåter og uttrykksformer. I matematikk er det utarbeidet seks kjerneelementer, der det i fem av de beskrives arbeidsmåter, metoder og tenkemåter og i det sjette beskrives de sentrale kunnskapsområdene. Det er gjennom de fem arbeidsmåtene, metodene og tenkemåtene elevene skal møte det sjette kjerneelementet (Kunnskapsdepartementet, 2018b). Av de seks kjerneelementene i matematikk er resonnering og argumentasjon et av dem som blant annet sier at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. De skal kunne utforme egne resonnementer både for å løse problemer og for å argumentere for fremgangsmåter og løsninger. Abstraksjon og generalisering er også et kjerneelement der elevene skal forstå representasjoner og fremgangsmåter av økende abstraksjonsgrad. De skal også oppdage sammenhenger og strukturer selv gjennom å utforske med tall, utregninger og figurer for å finne sammenhenger og deretter formalisere ved bruk av algebra og hensiktsmessige representasjoner (Kunnskapsdepartementet, 2018b).

Resonnering og generalisering er gjennom kjerneelementene sett på som noe av det mest sentrale elevene skal lære i matematikk på skolen. På bakgrunn av dette fikk jeg enda større motivasjon til å undersøke disse sentrale elementene som kommer til å bli implementert i skoleverket kort tid etter min endte studietid. Jeg ønsket at prosjektet skulle gi meg innsikt og kunnskap om disse elementene, og ved å ta utgangspunkt i spillet ville det gi meg mulighet til å starte et forskningsprosjekt som kunne gi meg nettopp dette.

1.2 Studiens forskningsspørsmål

Formålet med studien er å få innsyn i elevenes resonneringer og argumentasjoner i løsningsprosessen på vei mot en generalisering for å kunne beskrive kjennetegn ved den. I startfasen av prosjektet hadde jeg problemstillingen: «Hva kjennetegner ungdomsskoleelevers generaliseringsprosess?». Dette på bakgrunn av Thagaard (2018) som sier at problemstillingen bør være åpen slik at interessante temaer som viser seg i løpet av prosjektet kan inkluderes. Problemstillingen gir rom for å være fleksibel på utvalget og mulighet til å avgrense tema for generalisering. Thagaard (2018) sier også at problemstillingen gjerne ikke får sin endelige utforming før presentasjon av resultatene i prosjektet. Jeg ønsket at forskningsspørsmålet skulle rette seg mot ungdomsskoleelever da generalisering har stor tilknytning til algebra og algebraisk tankegang. Algebra inkluderes for første gang i kompetansemål etter 7. årstrinn (Utdanningsdirektoratet, 2013) og det ville derfor være størst sannsynlighet for at elevene hadde forkunnskaper om algebra ved å rette seg mot elever på ungdomstrinnet. I tillegg er studiet rettet mot elever på 5.-10. trinn, og det vil derfor være naturlig å forholde seg innenfor disse klassetrinnene, og prosjektet ville da bidra til nyttige erfaringer i arbeidslivet. I en omfattende analyseprosess viste det seg at deler av intervjuguiden ga lite innholdsrike data, slik at det i denne prosessen ble gjort avgrensninger for å bedre kunne besvare problemstillingen (begrunnelse i kapittel 3.4).

På bakgrunn av dette ble det endelige forskningsspørsmålet utformet, og forskningsprosjektet vil søke svar på:

Hva kjennetegner generaliseringsprosessen til ungdomsskoleelever i arbeid med figurmønster?

1.3 Oppgavens struktur

I denne avhandlingen vil det først bli redegjort for teori som er relevant for problemstillingen. Videre vil jeg i kapittel 3 beskrive de metodiske og analytiske valgene gjort i forskningsprosessen. Kapittel 4 inneholder en presentasjon og analyse av funn der de også blir sett opp mot teori. I kapittel 5 vil funnene bli sett på som en helhet og videre drøftes opp mot tidligere presentert teori, og deretter vil forskningsspørsmålet bli besvart i kapittel 6. Her vil det også bli beskrevet hva jeg ser på som veien videre for dette forskningsprosjektet.

2 Teori

2.1 Resonnering og bevis

Botten (2016) sier matematikk handler om å formulere hypoteser, finne strategier for å løse problemer og å argumentere for sine løsninger. For å inneha matematisk kompetanse sier Niss og Jensen (2002) at man har kunnskap om, forstår, utøver, anvender og kan ta stilling til matematikk og matematisk virksomhet i flere ulike sammenhenger, både der matematikk kan være og er inkludert. De sier også at matematisk kompetanse ikke er en selvstendig kompetanse og at enhver kompetanse ikke kan besittes i isolasjon fra andre kompetanser. Av Utdanningsdirektoratet (2013) er matematisk kompetanse beskrevet under formålet for faget som sier at matematisk kompetanse er nødvendig for å forstå og kunne påvirke prosesser i samfunnet. For å inneha denne kompetansen sier de at man må kunne bruke problemløsning og modellering til å analysere og omforme et problem til matematisk form, løse det og vurdere gyldigheten av løsningen. Det har også et språklig aspekt, og i følge Botten (2016) er det å kommunisere matematikk et læringsmål i seg selv. I denne kommunikasjonen utvikler elevene en forståelse for hva som kjennetegner og er styrken til matematiske symboler, og utvikler en forståelse for hvordan man argumenterer og resonnerer i matematikken.

I Niss og Jensen (2002) er bevisførsel en del av det å inneha resonnementskompetanse. For en matematiker er et bevis et konkluderende argument som kan overbevise hvem som helst som forstår de involverte konseptene og ingen motbevis kan gis (Hersh, 2009, s. 18). Niss og Jensen (2002) sier det er grenser for hvor detaljert man kan arbeide med matematisk bevisførsel i grunnskolen, og det er ikke alltid aktuelt å føre formelle bevis. I stedet forklares, illustreres og sannsynliggjøres påstander for elevene. Harel og Sowder (1998) ser behovet for et mer omfattende perspektiv på hva som inkluderes i begrepet *bevis*. De inkluderer et samhandlingsaspekt ved begrepet, og sier bevis er noe subjektivt som etablerer en sannhet for en person eller et samfunn. I dette legger de at bare den som beviser og den som skal overbevises avgjør hva som utgjør et bevis. Denne tolkningen av begrepet støtter opp om inkludering av bevis i hele utdanningsløpet tilpasset ethvert alderstrinn. Ellis (2007) sier utvikling av elevers forståelse av behovet for argumentasjon kan gi en bedre overgang til mer avanserte aspekter av bevisførsel senere i skoleforløpet.

I egen forskning har Balacheff (1988) sett på bevisprosessen til elevene ved å undersøke hvordan de overbevises om at den foreslåtte løsningen er gyldig. Dette inkluderer Niss og

Jensen (2002) i en av sine åtte kompetanser: resonnementskompetanse. Kompetansen handler om å kunne følge og bedømme et matematisk resonnement for å støtte opp om en påstand. På denne måten kan man se på resonnering som et aspekt av bevisprosessen. Chapin, O'Connor og Anderson (2009) sier at resonnering er i sentrum av matematisk læring – vi resonnerer når vi undersøker mønstre, finner regelmessigheter, generaliserer forhold, gjør antagelser og evaluerer og konstruerer et argument. I skolen er begrepet resonnering brukt i formålet til matematikkfaget som forklarer at matematisk kompetanse har et språklig aspekt som det å formidle, samtale om og resonnere omkring idéer (Utdanningsdirektoratet, 2013).

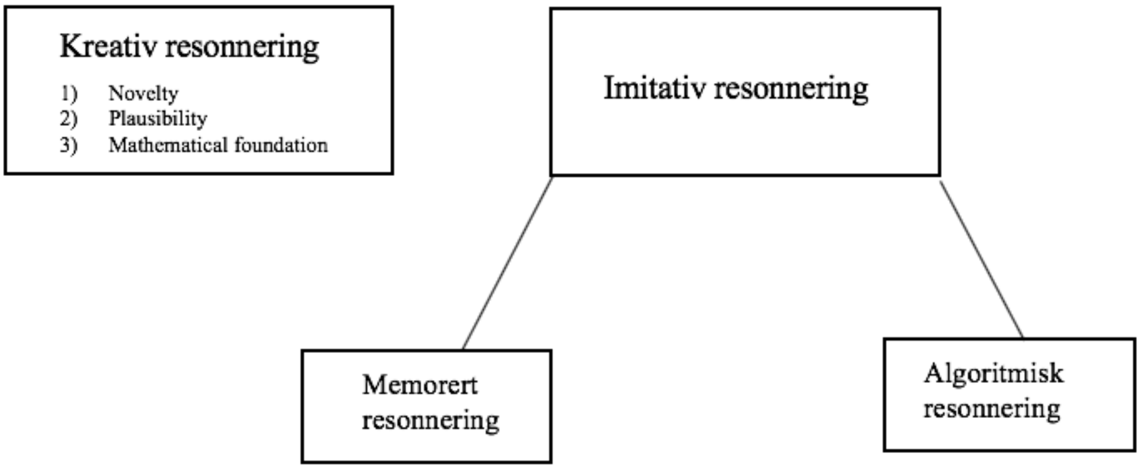
Schoenfeld (1992), Silver (1997) og Koichu (2014) uttrykker at problemløsning er noe av det mest sentrale i matematikken. Lesh og Zawojewski (2007) definerer problemløsningsoppgaver på denne måten: en oppgave eller en målrettet aktivitet blir et problem eller problematisk når problemløseren trenger å utvikle en mer produktiv måte å tenke på den gitte situasjonen. Med en mer produktiv måte mener de at problemløseren må engasjere seg i en prosess som tolker situasjonen, som i matematikk betyr å modellere. Det er altså prosessen der man tolker en situasjon matematisk som involverer gjentakende sykluser av å uttrykke, teste og revidere matematiske tolkninger og sortere ut, integrere, modifisere, revidere eller avgrense grupper med matematiske konsepter fra ulike emner i og utenfor matematikken.

I følge Schoenfeld (1992) har problemløsning historisk sett ofte blitt identifisert med matematiske oppgaver som skal utføres. Han trekker fram at det er viktig i problemløsning at løsningsmetoden ikke allerede er kjent for problemløseren. Lesh og Zawojewski (2007) sier problemløsningsoppgaver handler om å kunne se matematiske situasjoner ved å tolke, beskrive og forklare disse og ikke bare utføre prosedyrer eller ha faglige ferdigheter. Niss og Jensen (2002) har inkludert problemløsning i én av de åtte kompetansene de mener man bør besitte for å kunne inneha matematisk kompetanse. De sier at for å kunne formulere og løse et problem må man inneha problemløsningskompetanse, og for å rettferdiggjøre fortolkningene og argumentere for gyldigheten av en slik løsning må man ha resonnementskompetanse. I lys av dette ser vi at resonnering og problemløsning er aspekter av hverandre og kan ses i en sammenheng der resonnering kan være inkludert i problemløsning.

Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) har beskrevet fem kompetanser de mener man må inneha for å kunne lykkes med å lære matematikk. Av disse fem har de brukt begrepet adaptiv resonnering som én av kompetansene. Adaptiv resonnering handler om evnen til logisk tenking, refleksjon, forklaring og begrunnelse. Begrepet inkluderer også formelle bevis, uformelle forklaringer og argumentasjoner, og intuitive og induktive resonneringer basert på mønstre, analogier og metaforer. Bakgrunnen for at begrepet er så vidt er fordi de mener det tidligere har vært mange forestillinger om at matematisk resonnement er for begrenset til formelle bevis og andre former for deduktive resonnement. Lithner (2008) definerer resonnement som tankegangen brukt for å produsere påstander og til å nå konklusjoner i oppgaveløsning. Resonneringen er ikke nødvendigvis basert på formell logikk og han mener derfor, i likhet med Kilpatrick, m.fl. (2001) at resonnering ikke kan begrenses til formelle bevis. I tillegg mener Lithner (2008) at resonneringen til og med kan være feil, og at resonnering er en slags fornuft for den som argumenterer som støtter opp mot resonnementet.

Resonneringer som gjøres er i ulik grad selvstendig, noe Lithner (2008) peker på ved å se på forskjellen mellom imitative og kreative resonnement. Imitativ resonnering, eller oppskriftslærd resonnering, er resonnering der eleven følger en oppskrift, enten en lært prosedyre eller algoritme for å komme til et svar. Resonneringen er basert på at man kan alt utenat. Lithner (2008) skiller mellom to typer imitative resonneringer: memorert resonnering og algoritmisk resonnering. Memorert resonnement oppfyller to krav: strategien blir valgt på grunnlag av å huske et komplett svar, og strategien består bare av å skrive den ned. Når man løser oppgaver med memorert resonnement er det alltid med bakgrunn i å huske noe. Algoritmisk resonnement oppfyller også to krav: strategien er å huske algoritmen for å løse oppgaven og å argumentere for valg av strategi har ikke betydning; husker man en liten feil kan man oppleve å ikke få riktig svar. Algoritmisk resonnement kan brukes både om man forstår algoritmen og om man bare husker den.

Motsetningen til imitativ resonnering er kreativ resonnering, og Lithner (2008) sier at en slik resonnering er sjelden der imitativ oftest er dominerende. I kreativ resonnering kan resonneringen gjenkjennes ved at tre kriterier skal være oppfylt: 1) Novelty: Strategien som velges skal være ny for den som resonnerer. Dette kriteriet er også oppfylt dersom det er en glemt strategi som blir gjenskapt. 2) Plausibility: Argumentene som støtter opp om valgt strategi blir begrunnet med hvorfor konklusjonene er sann eller sannsynlig. 3) Mathematical foundation: Resonneringen har opphav fra matematikken eller er basert på matematiske egenskaper. Elever som resonnerer kreativt trenger ikke en fast fremgangsmåte, men gjennom en fleksibel anvendelse av matematikken utvikle egne strategier for å løse oppgaver og problemer. Det essensielle i kreativ resonnering vises gjennom elevens tolkning av gyldigheten i argumentene sine og logikken den benytter. De som resonnerer og tenker analytisk har tendenser til å legge merke til mønster, strukturer og sammenhenger i både realistiske situasjoner og i symbolske objekter. Figuren under illustrerer Lithners (2008) inndeling av resonnering.



Figur 1 - Illustrasjon av Lithners (2008) resonneringskategorier

2.2 Algebra og algebraiske aktiviteter

Lee (1996) ser på algebra som en liten kultur integrert som en del av den mer omfattende kulturen matematikk. Ved å se på det som en egen liten kultur gir det rom for å se på samspillet mellom algebra og andre matematiske småkulturer som for eksempel aritmetikk. Mason, Graham og Johnston-Wilder (2014) mener å tenke algebraisk er vitalt for alle som skal ta del i samfunnet. Algebraens kjerne er i følge dem evnen til å generalisere og abstrahere fra enkelttilfeller. Det å uttrykke generelle ting er en naturlig og givende del av hvordan vi som mennesker gir mening til verden rundt oss, og algebraen gir oss mulighet til å uttrykke og behandle det generelle ved å gi oss et forråd av symboler og et språk (Mason, m.fl., 2014, s. 15). Å generalisere og argumentere for svarene sine er i følge Ellis (2007) sett på som essensielle komponenter i algebraiske aktiviteter. Forskning viser at elever tidlig bør utvikle en forståelse for generalitet som grunnlag for senere å få algebraisk forståelse (Ellis, 2007, s. 194).

Radford (2010) sier det er en naturlig sammenheng mellom algebraisk tenking og generalisering, og å lære algebra gjennom arbeid med generalisering av mønstre hviler på denne idéen. Ellis (2007) sier også at elevenes evne til å begrunne deres generalisering er koblet til hva det betyr å resonnere algebraisk. I følge Mason (1996) handler algebraisk tenking om å påvise forskjeller og likheter, gjøre antakelser, klassifisere, organisere, merke seg mønster og sammenhenger. Noen av disse stegene er også beskrevet av Silver og Stylianides (2009) innen resonnering-og-bevis-aktiviteter, som å identifisere mønster. Radford (2010) mener generalisering gjennom mønster er ansett som en av de beste metodene for å introdusere elevene til algebra.

Kilpatrick, m.fl. (2001) mener algebra er den mest systematiske måten å uttrykke generalitet på og generalisering er slik nært knyttet til algebra. Elever som ikke kan algebra og bare har aritmetiske referanser å holde seg til, vil i følge Kieran (2004) ikke klare å se sammenhenger mellom ulike måter å løse oppgaver på. For at elevene skal utvikle en mer algebraisk tankegang i tillegg til den aritmetiske mener Kieran (2004) man må ta grep, og presenterer fem fremgangsmåter som kan få elevene til å utvikle sin algebraiske tankegang. Den første er at man må ha et større fokus på sammenkoblinger og sammenhenger i stedet for bare beregninger og numeriske svar. Det andre er et større fokus på ulike operasjoner, både inverse operasjoner og hva som er idéen bak operasjonene. Det tredje er å ha et større fokus på å både representere og løse et problem, i stedet for å bare løse det. Det fjerde er at man må ha fokusere på både tall og symboler, og ikke bare tall alene. Man må inkludere arbeid med symboler som ukjente, variabler og parametere. Det femte er å ha fokus på hva likhetstegnet faktisk betyr. Til sammen viser disse fem ulike sider ved det å lære seg algebraisk tenking med utgangspunkt i aritmetiske oppgaver, der man fokuserer på ulike aspekter av aritmetiske oppgaver og knytter det til det algebraiske.

Innen skolealgebra mener Kieran (2004) at hovedelementene er problemløsning, modellering og generalisering av numeriske og figurative mønster. Med utgangspunkt i algebra som en aktivitet har Kieran (2004) utarbeidet en modell som kategoriserer skolealgebraiske aktiviteter ut fra hvilke typer aktiviteter elevene deltar i. Modellen består av tre ulike kategorier som til sammen utgjør GTG-modellen. De ulike kategoriene er genererende aktiviteter, transformerende aktiviteter og aktiviteter på global/meta-nivå. Petersen (2015) har i samråd med Kieran fått oversette kategorien aktiviteter på global/meta-nivå til resonnerende aktiviteter.

Genererende aktiviteter er arbeid med likninger og variabler som representerer en situasjon eller et problem, samt arbeid med å generalisere uttrykk fra numeriske eller geometriske mønstre. Disse er bare eksempler på genererende aktiviteter og gjennom disse aktivitetene bygger elevene opp en forståelse for algebraiske objekter. Transformerende aktiviteter er regelbaserte aktiviteter som faktorisering, forkorting av uttrykk og lignende. Man arbeider altså her med de algebraiske verktøyene som variabler, potenser, parenteser og matematisk språk. I hovedsak handler aktivitetene om å manipulere algebraiske uttrykk og ligninger basert på algebraiske regler. I kategorien resonnerende aktiviteter inkluderes arbeid med generalisering, problemløsning, modellering, finne strukturer, argumentasjon og bevis. Her er ikke algebra nødvendig for å mestre oppgaven, men kan brukes som et verktøy. Kieran (2004) presiserer at det er en flytende overgang mellom de ulike kategoriene og det er ikke slik at en oppgave må kategoriseres som én av tre i modellen.

English og Warren (1998) sier variabler er grunnleggende for å uttrykke generalitet. Forståelse for konseptet variabler er nødvendig for at elever skal lære seg algebra. Elever arbeider med figurmønsteraktiviteter der de skal undersøke ulike mønstres form og verdi for å kunne formulere en generell beskrivelse. Mønstrene består som regel av en følge av geometriske figurer som er stilt opp på rekke og har en utvikling som elevene skal kunne beskrive. Silver og Stylianides (2009) bruker begrepet resonnerings-og-bevis-aktiviteter om disse typer aktiviteter, og mener det å kunne identifisere mønster er en essensiell komponent i disse aktivitetene. Oppgavene har også blitt mer synlig og utbredt i rammeverket til matematikken. De beskriver også at et viktig mål i matematikkutdanningen er at elevene skal kunne se hvorfor generaliseringen holder og ikke bare utforme et generelt uttrykk. English og Warren (1998) deler figurmønster i to ulike kategorier; bestemte mønster som er mønstre det er mulig matematisk for en som jobber med oppgaven å komme frem til et avgjørende bevis for det utvalget av et spesifikt mønster. Den andre kategorien er sannsynlige (plausible) mønstre der det ikke er mulig å komme frem til et avgjørende bevis for det utvalgte mønsteret. I følge English og Warren (1998) baner disse uformelle aktivitetene vei for introduksjonen av variabler og også ideen om ekvivalens og forenkling algebraisk.

2.3 Elevers generalisering og bevisproduksjon

2.3.1 Generaliseringsstrategier

Radford (2010) forklarer generalisering med å fortelle om den tenkte sekvensen S. I generalisering av mønster hviler det algebraiske på evnen til å forstå det som er felles i enkelte elementer i en sekvens S. Radford (2010) viser til Kieran (1989) som peker på at man må kunne se det generelle i det spesielle for å kunne uttrykke det algebraisk. For å forstå Kierans innvendinger må man i følge Radford (2010) tenke på arbeid med generalisering av mønstre som en vei til å lære algebra, og det hviler på idéen om at det er en naturlig sammenheng mellom algebraisk tenkning og generalisering. Kieran (1989) i Radford (2010) mener å tenke algebraisk er mer enn å tenke på det generelle; det er å tenke på det generelle på en måte som gjør det særegent algebraisk i resonnementet så vel som i uttrykket. Mason (1996) beskriver tre ulike fremgangsmåter elever bruker i søken etter en formel for en tallrekke. Elevene 1) manipulerer figuren for å kunne telle den enklere, 2) finner en gjentakelse som viser hvordan man kommer seg videre fra den første til den andre og 3) finner et mønster som leder til en direkte formel. Alle disse er metoder for å generere en antagelse.

I sekvensen S, som Radford (2010) beskriver, må man kunne lage et direkte uttrykk for hva som helst i S når man er klar over at sammenhengen gjelder for alle i sekvensen. Han beskriver to ulike løsningsstrategier for algebraisk generalisering med en karakteristisk nivådeling. Disse to er aritmetisk generalisering og algebraisk generalisering (Radford, 2010, s. 47). I aritmetisk generalisering evner elevene å oppdage sammenhengen i et mønster, men kan ikke bruke denne sammenhengen til å lage et generelt uttrykk for hvilken som helst figur i sekvensen. Elevene bruker her andre metoder som gjett-og-prøv og andre gjettemetoder. I algebraisk generalisering klarer elevene å utarbeide generelle regler for hvilket som helst tall i et tallmønster. Radford (2010) deler videre algebraisk generalisering inn i tre nivåer: faktabasert-, kontekstuell- og symbolsk generalisering.

I faktabasert generalisering blir de generelle mønstrene ikke anerkjent eller navngitt, men uttrykt gjennom kroppsspråk, gestikulering, ord eller andre fakter. Her blir det bare beregnet konkrete tilfeller av en variabel. I dette nivået av algebraisk generalisering dannes det et grunnlag for en grunnleggende algebraisk forståelse hos elevene, og kan bidra til at det skjer algebraisk generalisering på et høyere nivå senere. I kontekstuell- og symbolsk generalisering blir generaliseringen uttrykt eksplisitt gjennom språk. I kontekstuell generalisering refererer man bare kontekstuelt til variablene i mønsteret og det generelle og algebraiske i mønsteret blir navngitt gjennom naturlig språk, uten inkludering av matematiske ord og begreper. I symbolsk generalisering derimot brukes matematiske ord, begreper og notasjoner. Her klarer elevene å komme frem til et fullstendig matematisk uttrykk der bruk av symboler inkluderes, i tillegg til å kunne beskrive løsningen for hvilken som helst figur gjennom naturlig språk.

Radford (2010) sier at generalisering gjennom mønster anses å være en av de beste metodene for å introdusere elevene til algebra. Dette er Lannin (2005) enig i, og sier at for å introdusere elever til algebra er figurmønster blitt anbefalt på bakgrunn av deres dynamiske representasjon av variabler. Lannin (2005) poengterer at ofte er elevenes generalisering basert på feilaktig resonnering, der elevene bl.a. bruker multiplikasjon og forhold mellom tallene for å komme frem til et svar. Elevene bruker også gjett-og-sjekk-strategier for å konstruere en generalisering. Mason (1996) beskriver slike gjett-og-sjekk-strategier som lokale teknikker som elevene bruker for å finne en regel som kan brukes i nøyaktig dette mønsteret i stedet for å prøve å forstå det generelle i en problemsituasjon. Basert på tidligere forskning utarbeidet Lannin (2005) et rammeverk som beskrev elevenes strategier i generalisering av mønster. Dette rammeverket delte han inn i to kategorier; ikke-eksplisitte og eksplisitte strategier. De ikke-eksplisitte strategiene beskriver hvordan man ser på en bestemt figur for å bestemme verdien på neste, mens de eksplisitte beskriver hvordan man kan finne verdien for hvilken som helst figur i følgen.

Tilhørende den første kategorien er det to strategier som beskrives som ikke-eksplisitt; telling og rekursiv. Telling går ut på at brukeren tegner eller konstruerer en modell som representerer situasjonen for deretter å telle seg frem til svaret. Rekursiv strategi er når man bygger på de forrige leddene for å bestemme neste ledd. Det trenger ikke å være flere ledd man bygger på i denne strategien, og brukerne kan også bruke bare ett ledd. I kategorien eksplisitte strategier presenterer Lannin (2005) tre ulike strategier; hel-objekt, gjett-og-sjekk og kontekstuell. I hel-objekt bruker man forholdet mellom ledd og verdi for å komme frem til et ledd mye lengre frem ved å multiplisere. For eksempel kan brukeren begrunne svaret sitt med: siden det i figur 2 er fire ruter må det i figur 4 være åtte ruter, siden forholdet er det samme. Med bakgrunn i egen forskning sier Lannin (2005) at elevene ikke bruker denne strategien riktig, tilsynelatende på grunn av deres mangel på forståelse. Gjett-og-sjekk går ut på at brukeren gjetter seg fram til en regel eller formel som kan fungere. Dette gjøres vanligvis gjennom å eksperimentere med ulike operasjoner og tall som gis i oppgaven, men man tar ikke hensyn til hvorfor denne regelen kan fungere. I tillegg baserer svaret til brukeren seg ofte på empiri på hva som har fungert tidligere. Kontekstuell går derimot ut på at man konstruerer en regel basert på informasjon som er gitt i oppgaven og kobler regelen til en telle-teknikk. Et eksempel på dette er når man skal sette opp bord og det kan sitte fire rundt hvert bord, samt to på enden og man beregner seg frem til svaret ved å tenke at på hvert bord sitter det fire personer og til slutt legger til to som er personene på endene.

English og Warren (1998) beskriver tre ulike strategier elevene bruker når de utarbeider generaliseringer fra mønsteraktiviteter og tallrekker. Disse tre strategiene er forholdsstrategi, additiv strategi (rekursiv tilnærming) og søk etter et funksjonelt forhold. I forholdsstrategi tar elevene utgangspunkt i et steg fra et figurmønster og generaliserer konklusjonen sin basert på verdien i det steget. For eksempel kan elevene argumentere for: siden steg 3 har verdi 10 vil steg 30 ha verdi 100. I den additive strategien vil elevene se på verdiene i tallrekken og se et mønster i økningen til tallrekken og at verdien øker med den samme mengden for hvert steg. Et typisk elevsvar er her «den blir 4, 7, 10, 13» og elevene formulerer generaliseringen sin med en serie av aritmetiske følger som 4+3=7, 7+3=10, 10+3=13, osv. I den siste strategien prøver elevene å utforme en funksjon eller et uttrykk som forbinder figurtallet med verdien i figuren og ender gjerne opp med et uttrykk som inkluderer algebraisk notasjon.

Ved å se Lannin (2005) sitt rammeverk opp mot Radford (2010) sine nivåer kan man se både fellestrekk og ulikheter. Både Lannin og Radford deler generaliseringsstrategiene sine inn i 2, men de skiller på to ulike nivåer i forhold til hverandre. Lannin deler strategiene i ikke-eksplisitte og eksplisitte, mens Radford deler de inn i aritmetisk generalisering og algebraisk generalisering. Under aritmetisk generalisering beskriver Radford at elevene har beskrevet det generelle basert på det de har sett på noen få figurer og er ikke kapabel til å bruke den informasjonen for å lage et uttrykk for enhver figur. I Lannins (2005) ikke-eksplisitte strategier telling og rekursiv, bruker elevene tidligere ledd/figurer for å komme frem til svaret de er ute etter. Derimot presiserer Radford (2010) at elevene i aritmetisk generalisering bruker ulike gjettemetoder, noe Lannin beskriver som en eksplisitt strategi. Av Lannins (2005) eksplisitte strategier kan både hel-objekt og gjett-og sjekk bli sett på som aritmetisk generalisering ut fra Radfords (2010) beskrivelser, da gjetting, prøve-og-feile er nøkkelord i begge beskrivelsene.

I kontekstuell generaliseringsstrategi fra Lannin (2005) konstruerer elevene eksplisitte formler eller regler, og i algebraisk generalisering fra Radford (2010) utarbeider man generelle regler for hvilket som helst tall. Forskjellen på disse er at Radford deler algebraisk generalisering inn i tre nivå basert på grad av generalisering. Dette tyder på at Radford viser til at elevene kan vise ulike grader av algebraisk tankegang, mens Lannin ikke har inkludert dette.

English og Warren (1998) beskriver ulike strategier som også kan sammenlignes med Lannin (2005) og Radford (2010). Forholdsstrategi har en tilnærmet identisk beskrivelse av Lannins (2005) hel-objekt der elevene i begge strategiene bruker forholdet mellom figurnummer og verdi til å begrunne sin generalisering for de videre figurene. Innholdet i additiv strategi har likheter med det Radford definerer som faktabasert generalisering der det bare blir beregnet konkrete tilfeller av en variabel. Additiv strategi kan også relateres til kontekstuell generalisering siden man der refererer kontekstuelt til variablene i mønsteret, og i additiv strategi refererer man til den generelle økningen i tallrekken som vil være konteksten i oppgaven. Lannin inkluderer ikke algebraisk notasjon i sin mest avanserte kategori, men det gjør Radford og English og Warren. I søk etter et funksjonelt forhold og symbolsk generalisering er et fullstendig matematisk uttrykk med bruk av symboler inkludert, men forskjellen er at Radford presiserer at elevene også kan beskrive løsningen gjennom naturlig språk. Hvordan uttrykket formidles er ikke nevnt hos English og Warren.

2.3.2 Bevisproduksjon

Russell, Schifter og Bastable (2011) sier matematiske bevis er viktig fordi de gir innsikt i matematiske forhold som underligger i generalisering. Å oppdage, uttrykke og bevise innen generalisering beskriver de som sentralt i matematikk som disiplin. I egen undersøkelse har Russell, m.fl. (2011) undersøkt typiske tilnærminger til hvordan elever argumenterer for eller beviser generaliseringer, og kommet frem til fire typiske tilnærminger som i Hovik og Solem (2016) presenteres som nivåer. På nivå 1 argumenterer elevene ved å referere til en autoritet, som en lærer, lærebok, foresatte eller lignende. Her sier de at ved å akseptere en påstand fra en autoritet, får ikke elevene mulighet til å selv se at argumentasjonen holder og kan indikere på at eleven ikke vet at å bevise en påstand er en mulighet.

Argumentasjoner på nivå 2 er når elevene argumenterer for påstanden ved å henvise til eksempler. Dette er en svært utpreget strategi for argumentering, særlig når elevene arbeider med hvorfor en påstand alltid er sann. Her ender de gjerne opp med å vise til eksempler der det fungerer og konkluderer med «derfor bare er det sånn». Dreyfus (1999) sier at for mange elever er matematisk kunnskap erfaringsbasert og Russell, m.fl. (2011) sier at dette kan være et steg i riktig retning mot å utarbeide et matematisk argument. Ved å se på matematiske eksempler kan man se matematiske forhold, mønstre og strukturer som kan lede til innsikt i hvorfor regelmessigheten inntreffer. Selv om det er et steg i riktig retning er ikke flere eksempler et holdbart argument for at det gjelder i alle tilfeller.

På det tredje nivået er den matematiske resonneringen fram mot et argument og bevis basert på en visuell representasjon med konkreter eller tegning, eller gjennom tekst. Et matematisk argument eller bevis gir innsikt i det matematiske forholdet som underligger i en generalisering, og viser til det logiske aspektet av hvorfor påstanden er sann. Enkelteksempler visuelt representert kan vise til det spesielle i det generelle og på den måten kan argumentasjonen være holdbart som bevis. Ifølge Russell, m.fl. (2011) utvikler elevene her en forventning til at det er mening i matematikken og gir dem en dypere forståelse av betydningen og egenskapene til matematiske operasjoner. På det siste nivået er argumentene basert på aritmetiske lover og algebraisk notasjon. Bevis og argumentasjoner gjort på dette nivået tar utgangspunkt i grunnleggende aritmetikk, og elevene bruker forutinntatte sannheter om dette for å bygge opp argumentene sine for generaliseringene.

I likhet med Russell, m.fl. (2011) presenterer Knuth, Choppin og Bieda (2009) et rammeverk som omfatter elevers bevisproduksjon, og har revidert et rammeverk av Waring (2000) om elevenes produksjon av matematiske argumenter. De sier forskning viser til at elevers kompetanse i argumentasjon følger en stegvis progresjon fra induktiv mot deduktiv og videre mot en bedre generalitet. Basert på resultater i egen forskning har de presentert det utvidede rammeverket med fire hierarkiske nivåer fra 0-3 som skal beskrive denne stegvise progresjonen av elevers kompetanse. Elever på nivå 0 er ikke klar over at de må gi matematiske argumenter for å bevise sannhet i uttalelsene sine og kan enkelt akseptere forslag som sannhet fordi en lærer, tekst eller foresatt sier det er sant. På dette nivået er ikke begrunnelsen matematisk, og elever kan argumentere uten henvisning og gjerne med «det bare er sånn». På nivå 1 er elevene bevisste på at de må gi en matematisk begrunnelse, men argumentasjonen er ofte empirisk basert og ikke generell. Ofte er argumentasjonen basert på å sjekke få tilfeller eller ekstreme tilfeller.

Nivå 2 preges av at elever er bevisst om behovet for et matematisk argument og prøver å argumentere selv. Argumentene derimot *fall short* til å være aksepterte bevis. At argumentasjonen «fall short» kan gjøres på to måter: 1) elevene uttrykker behovet for et generelt argument, men argumentet er ikke levedyktig. Enten fordi det er ukorrekt matematisk eller ikke akseptert som bevis. 2) elevene uttrykker at de trenger å lage et generelt argument og prøver å lage et slikt argument, men det er ufullstendig i den grad at de ikke blir ferdig og hadde de blitt ferdig ville det vært et akseptert bevis. I begge disse situasjonene prøver elevene å finne en generell begrunnelse, men på den andre måten inkluderes også responsen fra elevene som viser til en bevissthet om at empiriske bevis ikke er tilstrekkelig. Enten ved å uttrykke anerkjennelse av behovet for å håndtere alle tilfeller eller ved å anerkjenne begrensningene av eksempler som bevis. På nivå 3 er elevene klar over behovet for et generelt argument og er i stand til å produsere slike argumenter selv. Argumentene elevene produserer er akseptable bevis. Med akseptable bevis menes det at argumentene deres er sanne i alle typer scenarioer. Argumentene på dette nivået innebærer vanligvis en referanse til noen antagelser eller noe gitt, en kjede av argumentasjoner som brukes til å bygge opp om antagelsen sin og avslutter med en eksplisitt konklusjon. Argumentene til elevene kan gjerne mangle formaliteter som typisk er knyttet til et bevis, men argumentene deres viser likevel til det generelle i tilfellet.

I både Knuth, m.fl. (2009) og Russell, m.fl. (2011) sitt første nivå uttrykker ikke elevene et behov for å gi en matematisk begrunnelse, men godkjenner argumentasjonen ved å henvise til autoriteter. På begges andre nivå presiserer Russell, m.fl. (2011) at elevene argumenterer ved å bruke konkrete eksempler, mens Knuth, m.fl. (2009) bruker ordene empirisk basert eller sjekk av ekstreme tilfeller. Dette er også bruk av eksempler og nivåene viser seg dermed med å representere den samme argumentasjonen hos elevene. Det tredje nivået til begge skiller seg derimot fra hverandre. Knuth, m.fl. (2009) beskriver at her gir elevene uttrykk for at de trenger en matematisk begrunnelse, men den er enten ukorrekt matematisk eller ufullstendig i den grad at den hadde vært riktig dersom den var fullført. Russell, m.fl. (2011) beskriver derimot at elevene bruker en visuell representasjon med konkreter, tegninger, tekst eller regnefortelling som argumentasjon. I begges siste nivå er de også forskjellige; mens Russell, m.fl. (2011) presiserer at her er det bruk av algebraisk notasjon og regnelover beskriver Knuth, m.fl. (2009) at argumentasjonen til elevene kan mangle formaliteter, men viser likevel til det generelle i tilfellet.

3 Metode

I dette kapitlet vil jeg gjøre rede for de forskningsmetodiske valgene gjort i forbindelse med mitt forskningsprosjekt for å besvare forskningsspørsmålet:

«*Hva kjennetegner generaliseringsprosessen til ungdomsskoleelever i arbeid med figurmønster?*»

Forskningsspørsmålet impliserer visse krav til forskningsprosjektet. Utvalget jeg undersøker må være ungdomsskoleelever samt at det matematiske innholdet elevene møter må være figurmønster. I tillegg må datamaterialet gi innsikt i generaliseringsprosessen til elevene. Dette gjør at det legges føringer for metodiske valg som sikrer hensiktsmessig datamateriale. Her vil det komme fram en beskrivelse av valgt kunnskapssyn, forskningsmetode og forskningsstrategi. Jeg gir også en beskrivelse av hvordan forløpet til prosjektet har vært som inkluderer valg av informanter, datainnsamlingsstrategier, analyseringsmetode og en vurdering av studiets kvalitet.

3.1 Forskningsmetode og kunnskapssyn

Det er vanlig å skille mellom kvalitative og kvantitative metoder i samfunnsforskning (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 17). I kvalitativ forskningsmetode søker man ofte en forståelse av sosiale fenomener, enten ved nær kontakt med deltakere i felten gjennom intervju eller observasjon, eller ved en analyse av tekster og visuelle uttrykksformer (Thagaard, 2018, s. 15). Kvantitative forskningsmetoder preges av en større distanse mellom forsker og deltaker, og deltakeren bidrar ofte ved å svare på spørreskjema (ibid, s. 16). Ifølge Christoffersen og Johannessen (2012) er hovedforskjellene mellom kvalitativ og kvantitativ metode grad av fleksibilitet der kvalitativ metode gir rom for å være mer fleksibel, noe som er vanskelig når man ikke har kontakt med deltakerne ute i feltet. De sier at kvantitativ metode krever en større presisjon i utforming av spørreskjema enn kvalitative gjør i for eksempel intervjuguide nettopp på grunn av denne fleksibiliteten. Forskningsspørsmålet mitt legger føringer for at forskningsmetoden må gi innblikk i generaliseringsprosessen til elevene. Det er ikke bare løsningene som er relevante, men også veien fram mot en løsning. I kvalitativ forskning er målet i følge Cohen, Manion og Morrison (2018) å studere meninger, handlinger, holdninger, intensjoner og oppførsel i detalj. For å kunne svare på mitt forskningsspørsmål så jeg kvalitativ metode som egnet, da jeg ville få mulighet til å studere deltakerne i dybden og få frem aspekter ved løsningsprosessen som ikke kan måles i kvantitet.

Postholm (2010) presenterer tre paradigmer som alle uttrykker ideer om hvordan alt henger sammen, og tanker om hvordan man kan oppdage eller skape kunnskap. Hun sier også at all tradisjonell kvalitativ forskning utføres innenfor et av disse; konstruktivistisk paradigme. Her blir mennesket betraktet som aktivt handlende og ansvarlig, der kunnskap er en konstruksjon av forståelse og mening skapt i møte mellom mennesker i sosial samhandling og er dermed dynamisk, altså stadig i endring og fornyelse. Ved å bruke en kvalitativ tilnærming i et konstruktivistisk perspektiv ville jeg få muligheten til å gå i dybden hos deltakere i feltet og fremheve prosesser og meninger. Jeg ville også få muligheten til å rette fokuset mot et mindre utvalg som kunne bidra til et dypere innblikk i deltakernes tankeprosess og handlinger i generaliseringsprosessen.

3.1.1 Metodologi

Ulike tilnærminger innenfor kvalitativ metode representerer egne særtrekk, og Postholm (2010) presenterer fenomenologi, etnografi og kasusstudier som de vanligste, tradisjonelle metodiske tilnærmingene. Det kan virke som om fenomenologisk tilnærming er implisitt for denne studien, da denne handler om å utforske prosesser og aktiviteter, med hensikten å gi grundige beskrivelser av fenomenet som undersøkes, og fange opp individuelle erfaringer og perspektiver (Thagaard, 2018, s. 36). Deltakernes meninger omkring erfaringen de har fått eller følelsen de har i arbeid med figurmønster er ikke relevant. Fokuset i prosjektet er hvordan generaliseringsprosessen ser ut og hva dette kan bety, og er dermed rettet mot de kognitive prosessene til deltakerne i arbeid med figurmønster. Elevene ble også tatt ut av sin naturlige setting som bryter med fenomenologien slik den er beskrevet av Postholm (2010). En annen tilnærming var derfor nødvendig, og generisk kvalitativ metode ga meg mulighet til å gjennomføre prosjektet med hensikt til å innhente relevant informasjon.

Generisk kvalitativ metode, slik den er beskrevet av Caelli, Ray og Mill (2003), er en retning innen kvalitativ metode som har kvalitative kjennetegn, men ikke er strukturert etter en tradisjonell metode som fenomenologi, etnografi eller kasusstudie. Percy, Kostere og Kostere (2015) sier at generisk kvalitativ metode kan brukes når andre tradisjonelle tilnærminger ikke er tilstrekkelig på grunn av fokuset i studien, og når forskeren har forhåndsforståelser om emnet man ønsker å kunne beskrive nærmere fra deltakernes perspektiv. Generisk kvalitativ metode gir forskeren mulighet til å i større grad velge de prosedyrer som er mest hensiktsmessig for å besvare forskningsspørsmålet. En konsekvens av denne friheten forskeren får ved å benytte seg av generisk kvalitativ metode blir beskrevet av Caelli, m.fl. (2003). De mener fire områder må redegjøres for slik at forskningen skal være troverdig; den teoretiske posisjoneringen til forskeren; kongruens mellom metodologi og metode; strategier som tas i bruk for å beholde presisjon; og det analytiske synet data tolkes gjennom. Redegjørelsen for min teoretiske posisjonering er beskrevet i kapittel 2, samt i kapittel 3.1 der mitt kunnskapssyn kommer frem. Kongruens mellom metode og metodologi er bevart ved at jeg har valgt datainnsamlingsmetode som er innenfor generisk kvalitativ tilnærming, og fordi intervjuguiden skulle fremme de kognitive prosessene om generalisering la dette føringer for innholdet i intervjuguiden. Presisjon er bevart gjennom å ha nøye transkribert intervjuene, samt gitt en tydelig beskrivelse av analyseprosessen. Resultatene er også fremstilt på en måte som gjør dem synlig for leseren på samme måte som de kom fram i intervjusekvensene. Til slutt er det analytiske synet redegjort for ved å beskrive den induktive, tematiske analysen i kapittel 3.4.

3.2 Utvalg

Thagaard (2018) sier at kvalitative studier kjennetegnes som oftest ved et begrenset utvalg, og det er da viktig at utvalget er hensiktsmessig for problemstillingen. Hvor stort utvalget bør være sier Christoffersen og Johannessen (2012) avhenger av problemstilling og måten data samles inn på, og det er i teorien ingen øvre eller nedre grense for antall informanter. Derimot er det et spørsmål om hvor mange det er praktisk mulig å gjennomføre. Thagaard (2018) beskriver en retningslinje for kvalitative utvalg der antall informanter ikke bør være større enn at det er mulig å gjennomføre en omfattende analyse av datamaterialet. I kvalitative intervjuer velges informantene ut ved strategisk utvelgelse, der forskeren må finne ut hvilken målgruppe som må delta for at man skal få samlet inn nødvendige data (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 50). Ifølge Grønmo (2016) må utvalget være deltakere som har egenskaper og kvalifikasjoner som er strategisk i forhold til forskningsspørsmålet.

Min studieretning retter seg mot elever på 5.-10. trinn og det var dermed naturlig at forskningen rettet seg mot informanter på dette alderstrinnet. Jeg ønsket også at elevene skulle ha kjennskap til algebraisk notasjon da generalisering står i nær relasjon til bevis og algebra, og bestemte meg derfor for å ta sikte på å få informanter innen ungdomstrinnet. At utvalget er ungdomsskoleelever kommer også fram i forskningsspørsmålet. På bakgrunn av det Thagaard (2018) og Christoffersen og Johannesen (2012) sier om størrelse på utvalg hadde jeg satt meg en minimumsgrense på åtte informanter og maksimum 16 informanter. Ved å ta utgangspunkt i dette ville prosjektet være gjennomførbart, både med tanke på datainnsamling og en omfattende analyse av dem.

Selve gjennomføringen av intervjuene ønsket jeg å ha i nærområdet da dette var mest praktisk for meg, både tidsmessig og økonomisk. Jeg sendte derfor mail til ungdomsskoler i området, men da Tromsø-skolene har stor pågang av studenter i denne tiden var det vanskelig å komme gjennom. Etterhvert kom jeg i kontakt med en lærer med elever som kunne bidra til dette prosjektet. Jeg satte i gang med å utarbeide et informasjonsskriv med krav om samtykke (se vedlegg 1). For å sikre meg innholdsrike data ba jeg læreren om å se ut elever som den mente kunne bidra til nettopp dette, og læreren endte opp med 14 elever som kunne tenke seg å være med på intervjuet. Læreren delte så ut informasjonsskrivet og vi avtalte dato til gjennomføring av intervju. Jeg ba også læreren om å sette sammen elevene i par med hensyn til samarbeid, kjennskap til hverandre og med ønske om at de skulle være muntlig aktiv. Å sette elevene i par var noe jeg anså som kunne bidra til at elevene opplevde at en muntlig formulering av resonneringen ble mer naturlig enn dersom de var alene. På intervjudagen var det en elev som ønsket å trekke seg, og jeg bestemte meg i samråd med lærer om å da inkludere en gruppe med tre elever og resten i par da de øvrige elevene hadde et sterkt ønske om å være med.

3.3 Datainnsamlingsmetode

I følge Postholm (2010) og Thagaard (2018) er intervju den mest anvendte metoden innen kvalitativ forskning. Den gir godt grunnlag for å få innsikt i erfaringer, tanker og følelser hos deltakeren (Thagaard, 2018, s. 89) og man søker etter å forstå verden sett fra informantenes side (Kvale & Brinkmann, 2015). Et forskningsintervju kan utformes på ulike måter med ulik grad av struktur slik at det for eksempel kan være rom for tilpasning av spørsmål fra forsker underveis eller ikke. For å undersøke generaliseringsprosessen til elevene i arbeid med figurmønster var det hensiktsmessig å ta utgangspunkt i oppgaver som inkluderte figurmønster og videre undersøke elevers egne utsagn om hvordan de tenkte i løsningsprosessen som datamateriale. Med dette i grunn valgte jeg å bruke oppgavebasert intervju som metode.

3.3.1 Oppgavebasert intervju

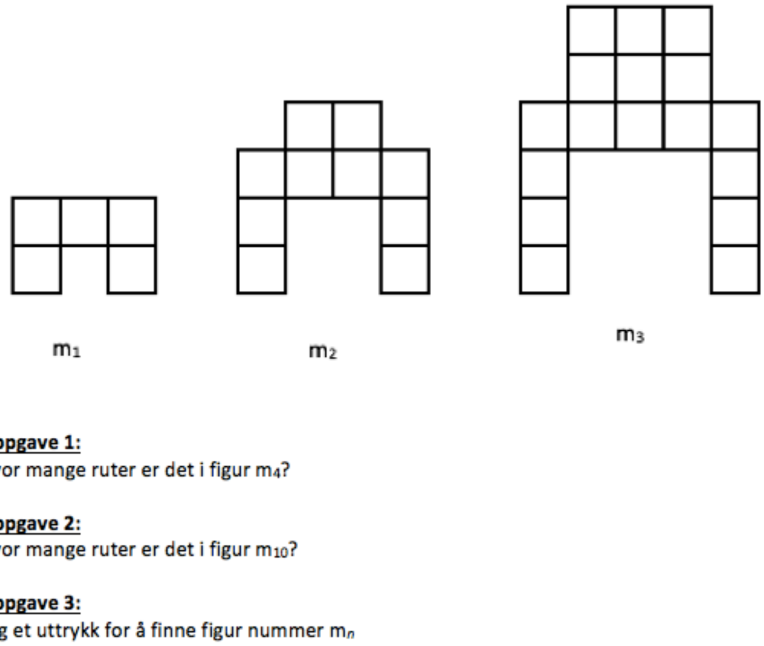
Forskningsspørsmålet setter krav til innsikt i elevenes kognitive prosesser for å kunne besvares. Goldin (1997) hevder at oppgavebaserte intervjuer kan benyttes for å kartlegge elevers tankemønstre, løsningsstrategier, utbytte av undervisning og elevenes kognitive og matematiske utvikling. Disse kognitive prosessene er ikke observerbare for enhver, men kan gjøres til gjenstand for observasjon og tolkning ved å bruke oppgavebasert intervju. I følge Schoenfeld (1992) observerer man mennesker som driver med problemløsning for å forstå deres mentale problemløsningsstrategier. På bakgrunn av forskningsspørsmålet ville bruk av oppgavebasert intervju være den mest hensiktsmessige innsamlingsmetoden for å gi meg best innsikt i elevenes kognitive prosesser.

Goldin (1997) presenterer fem karakteristiske trekk som oppgavebaserte intervju bør inneha for å etablere et sterkt vitenskapelig grunnlag og for at intervjuet skal nå sitt maksimale potensiale for innhenting av informasjon. For det første bør intervjuene være basert på matematiske idéer tilpasset aldersgruppen informantene er i, og innholdet skal være basert på emner som kan studeres i dybden, samt at de er fleksible slik at den kan tillate bevis i ulike former basert på evnene informantene har. Det andre er at oppgavene bør legemliggjøre meningsfulle semantiske strukturer som kan representeres på flere ulike måter både kognitivt og konkret, og med symbolske strukturer som kan representeres med notasjon. Det tredje er at informantene engasjeres i fri problemløsning som gir mulighet til å observere spontane avgjørelser og fremgangsmåter, der veiledning og hint ikke skal bli gitt før de har hatt mulighet til å løse problemet på egne premisser. For det fjerde skal det ikke legges føringer for riktige og feile svar, men med strukturerte spørsmål som er utformet for å gi mulighet til selvkorrigering i hvilken som helst situasjon. Det femte er at ulike eksterne representasjonsredskaper bør gis og skal gi mulighet til å observere forståelsen og en konkretisering av informantens interne representasjoner. Dette kan være penn og papir, kort, chips eller andre konkreter, samt en kalkulator.

3.3.2 Utforming av oppgave og intervjuguide

Hovedidéen bak hele prosjektet var et spill presentert i en forelesning der vi studenter skulle generalisere en vinnende strategi der man på hver sin tur skulle trekke 1-3 sjetonger fra et visst antall sjetonger. Denne oppgaven var på forhånd bestemt at skulle inkluderes i prosjektet, og det var viktig at oppgaven hadde en struktur for å fremme generaliseringsprosessen slik Goldin (1997) har beskrevet oppgavebasert intervju. Jeg startet derfor å designe oppgaven med å først presentere spillereglene slik de ofte er presentert i vanlige spill og spill i fagbøkene. Dette er i tråd med Goldin (1997) sitt første trekk der innholdet i oppgaven er basert på matematiske idéer tilpasset aldersgruppen siden formålet med matematikkfaget sier at opplæringen skal veksle mellom utforskende, lekende, kreative og problemløsende aktiviteter (Utdanningsdirektoratet, 2013). Deretter utformet jeg deloppgaver som skulle ha en økende vanskelighetsgrad som også er et kjennetegn fra intervjuene til Goldin (1997) fra egen forskning. Denne delen av utforming av oppgave var utfordrende, både å finne ut hvilken rekkefølge oppgavene skulle komme i og hva deloppgavene skulle bestå av. Til slutt endte jeg opp med en rekkefølge bestemt av grad av generalitet der de første oppgavene ikke impliserer generalisering, men skulle få elevene til å tenke over aspekter ved spillet som var viktig i generaliseringsprosessen. Generaliseringen av spillestrategien vurderte jeg til å ha en høy vanskelighetsgrad og var derfor veldig usikker på om intervjuene jeg hadde planlagt å gjennomføre kom til å bidra med brukbar data. Jeg bestemte meg derfor for å lage en ekstra oppgave for å sikre innholdsrik data.

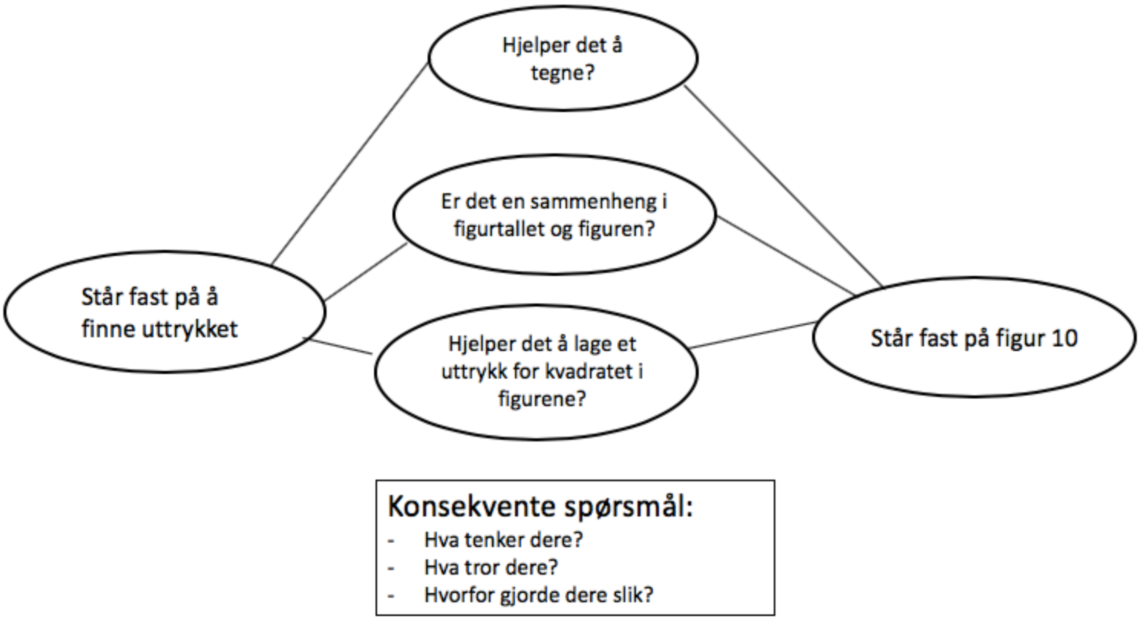
Jeg ønsket at den ekstra oppgaven også skulle inkludere generalisering for å beholde samme tema gjennom hele prosjektet. Lannin (2005) og Radford (2010) sier også at generalisering gjennom mønster anses å være en av de beste metodene for å introdusere elevene til algebra på grunn av dens dynamiske representasjon av variabler. Figurmønster har jeg erfaring med fra praksis og egen skolegang, og bestemte meg derfor for å utforme en oppgave basert på generalisering av figurmønster. I utarbeiding av oppgaven ønsket jeg at den i tråd med Kieran (2004) sin GTG-modell skulle ha kjennetegn fra både genererende og resonnerende aktiviteter, da oppgaven i hovedsak skulle dreie seg om å generalisere et figurmønster, men at det likevel ikke skulle være nødvendig å inkludere algebra for å mestre den. Det var også viktig at oppgaven ga rom for elevene å utforske figurmønsteret på egne premisser, uten at det var lagt føringer for prosessen og at generaliseringen kunne presenteres på ulike måter, i tråd med Goldin (1997) sitt andre trekk. Denne oppgaven endte opp med å bli del 1 av intervjuguiden og spillet ble del 2. Del 1 av oppgaven informantene ble presentert så slik ut (se vedlegg 2 for hele intervjuguiden).



Figur 2 – Figurmønsteroppgave

I likhet med spillet skulle denne oppgaven ha flere delspørsmål som hadde en økende vanskelighetsgrad og rekkefølgen ble her også bestemt på bakgrunn av grad av generalitet. Jeg bestemte meg for at denne oppgaven skulle være før spillet på grunn av ulik vanskelighetsgrad. Det var bare denne oppgaven om figurmønster som ble brukt i analysen (se begrunnelse i kapittel 3.4).

Denne oppgaven legger ingen føringer for hvordan informantene skal løse oppgaven som Goldin (1997) påpeker er viktig i form av fri problemløsning. Her skal det være mulighet for informantene å observere og trekke slutninger selv uten å bli ledet i ulike retninger. Hint og veiledende spørsmål må i oppgavebaserte intervju være bestemt på forhånd. Jeg så for meg ulike utfall som bestod av at elevene stod fast og ikke kom seg videre i løsningsprosessen, i hovedsak for å finne uttrykket eller for å finne figur m_{10}. På bakgrunn av dette utformet jeg på forhånd spørsmål jeg kunne stille elevene dersom dette var tilfelle, og har på den måten ivaretatt dette prinsippet. Jeg hadde også noen generelle spørsmål som kunne stilles konsekvent for å minne elevene på om å formulere høyt sine kognitive tankeprosesser. Figur 3 viser de forhåndsbestemte spørsmålene (se vedlegg 3 for forhåndsbestemte spørsmål til hele intervjusekvensen).



Figur 3 - Planlagte spørsmål under intervju

Disse spørsmålene var ikke nødvendig å stille i kronologisk rekkefølge, og jeg kunne dermed tilpasse spørsmålene etter retningen intervjuet gikk i og hva som allerede hadde kommet fram blant informantene. Spørsmålene var utarbeidet slik at de ikke sa noe om svarene og resonnementet til elevene var «riktig» eller «feil», men ga mulighet til selvkorrigering hos elevene, som er iboende i Goldin (1997) sitt fjerde trekk. Det siste trekket til Goldin (1997) er bevart ved at elevene fikk utdelt penn, papir, oppgaveark og fargetusjer.

Jeg ønsket å prøve intervjuet før selve datainnsamlingen for å teste intervjuformen og for å se om det var behov for tilpasninger, både i utformingen og i spørsmålene. Jeg gjennomførte to pilotintervju med mine medstudenter, ett med og ett uten matematikk i fagkretsen, som informanter da det ikke var det matematiske innholdet i oppgaven som skulle revideres, men strukturen av oppgaven og de planlagte spørsmålene. Intervjuet med studentene uten matematikk i fagkretsen ga et bilde av hvordan informantene kom til å løse oppgaven ute i feltet. Til slutt diskuterte vi oppgaveformuleringen og de forutbestemte spørsmålene og konkluderte med at disse ville føre til at relevant informasjon ville fremkomme hos informantene i intervjuet.

3.3.3 Gjennomføring av intervju

På bakgrunn av at oppgavene skulle gi informantene mulighet til fri problemløsning var det vanskelig å forutsi hvilke løsningsstrategier informantene kom til å bruke. Jeg valgte derfor å filme intervjuene for å sikre at tolkningen av generaliseringsprosessen til elevene var representativ for hvordan den faktisk var. Bruk av video gir flere muligheter for hva man kan registrere, og registrerer både verbale og nonverbale signaler – og samspillet mellom det verbale og nonverbale (Bjørndal, 2011, s. 82). Lydopptak ville ikke fange opp peking, tegning, gangen i spillet i del 2 og andre lignende hendelser som var avhengig av observasjoner gjort under intervjusekvensen. Ved å gjøre dette fikk jeg mulighet til å inkludere handlinger og andre fakter i transkriberingen som kunne være med på å tolke informantenes utsagn på en bedre måte i analyseprosessen.

For at informantene skulle føle seg mest mulig trygg valgte jeg å gjennomføre intervjuene parvis med to og to informanter, der ett intervju bestod av tre informanter (se hvorfor i kapittel 3.2). Hensikten med dette var også at jeg som forsker skulle være minst mulig involvert og det ble mer naturlig for informantene å snakke høyt sammen om løsningsprosessen dersom de var flere. Jeg gjennomførte intervjuene på et grupperom ved den respektive skolen i skoletiden som varte i cirka 40 minutter hver. Før jeg satte i gang intervjuene og gav dem oppgavene, informerte jeg dem om hvorfor jeg hadde valgt å bruke videoopptak, hvordan opptakene kom til å bli behandlet i etterkant og hvordan de skulle bli destruert. Jeg presiserte også at jeg ikke kom til å delta i deres løsningsprosess og at jeg ikke kom til å gi uttrykk for om svarene deres var riktige eller gal, fordi det var selve prosessen fram mot et svar jeg var ute etter. I tillegg oppfordret jeg elevene til «å tenke høyt» i løsningsprosessen. De fikk utdelt notatark, skrivesaker og fargetusjer og satte i gang med oppgavene. Til slutt samlet jeg inn notatarkene dersom de hadde brukt disse.

3.4 Analyseprosessen

Caelli, m.fl. (2003) og Percy, m.fl. (2015) er enige om at den analysemetoden som er særlig egnet for generisk kvalitativ forskning, er tematisk analyse. I følge Thagaard (2018) er formålet med denne typen analyse å gå i dybden på enkelte tema og man sammenligner data fra alle deltakere for å få en dypere forståelse av hvert enkelt tema. Percy, m.fl. (2015) skiller mellom tre ulike typer tematisk analyse; induktiv, teoretisk og konstant sammenligning. Induktive tematiske analyser er drevet av den innsamlede dataen og man prøver ikke å passe dataene inn i noen tidligere eksisterende kategorier. Dataene samlet fra hver deltaker analyseres individuelt, og når alle er analysert syntetiseres de gjentatte mønstrene fra alle deltakerne sammen til en sammensatt syntese, der man forsøker å tolke mønstrene. Jeg var ute etter å beskrive kjennetegn ved generaliseringsprosessen til informantene ved å undersøke typiske og særegne strategier som kom fram i intervjusekvensene, og på bakgrunn av dette valgte jeg en induktiv, tematisk analyse. Percy, m.fl. (2015) viser til en stegvis analyseprosess av tematiske, induktive forskningsprosjekter bestående av 12 steg. Disse var med på å legge føringer for hvordan jeg skulle gå fram i selve analyseringen.

Intervjusekvensene foregikk over to dager og jeg gikk deretter rett over på å analysere dataen. Jeg startet prosessen med å transkribere hvert intervju der deltakerne ble anonymisert. Det ble brukt god tid på hvert intervju og jeg la merke til nye sider av generaliseringsprosessen som jeg ikke hadde registrert under observasjonen. Transkriberingen ble gjort grundig for å sikre alt som kom fram under intervjuene, inkludert alle nonverbale fakter da de også kunne ha betydning for prosessen. Nonverbale fakter ble vist til ved å beskrive det som skjedde i en parentes, pauser beskrevet som to punktum, og da det var vanskelig å tolke hva informantene sa brukte jeg parentes med to punktum inni (..). Dette skjedde da informantene avbrøt hverandre, vendte seg vekk fra kamera eller snakket veldig utydelig. Lange pauser ble beskrevet slik: (varighet på pausene). Det var også susing fra ventilasjonsanlegget som ble plukket opp på videosekvensene, som bidro til at det i kombinasjon med å vende seg vekk og avbrytning gjorde det vanskelig å til tider høre hva informantene sa. Etter første gjennomgang av intervjuene satte jeg videosekvensen på igjen og gikk gjennom transkriberingene for å sikre at alt var riktig fremstilt. Her fikk jeg plukket opp en del som jeg ikke klarte å tolke første gang der jeg hadde registrert (..) i transkriberingen. Denne delen av analyseprosessen er i tråd med det første steget til Percy, m.fl. (2015) som omhandler å bli kjent med innsamlet data.

Etter transkripsjonsprosessen brukte jeg transkriberingene for å lese gjennom og notere ned i korte trekk hvordan generaliseringsprosessen var i et eget dokument. Percy, m.fl. (2015) beskriver også dette i første steget i analyseringsprosessen, der man også gjennomgår innsamlet data og merker intuitivt det som synes å være meningsfullt. I denne delen av analyseringen innså jeg at innsamlet data på del 2 ikke ga innholdsrike beskrivelser av selve generaliseringsprosessen til elevene. Det var ingen distinkte forskjeller i innholdet fra de ulike intervjusekvensene og oppgaven genererte lite informasjon om generaliseringsprosessen.

Percy, m.fl. (2015) beskriver i andre steg at man gjennomgår dataene og avgjør hva som kan bidra til å besvare forskningsspørsmålet, og i tredje steg eliminerer de dataene som ikke bidrar til dette. Jeg bestemte meg derfor for å bare fokusere på den første oppgaven med figurmønster, som hadde større variasjon i generaliseringsprosessene og mer innholdsrike data.

3.4.1 Analyse av del 1 - Figurmønster

Det neste steget i følge Percy, m.fl. (2015) er å kode hver del av den innsamlede dataen. Da jeg var ferdig å beskrive prosessen i korte trekk, gikk jeg tilbake til transkripsjonene og markerte alle utsagn og beskrivelser av nonverbale fakter med koder som beskrev hva informantene gjorde i de spesifikke delene av transkripsjonene. Jeg var ikke konsekvent med å bruke samme koder dersom det var likheter i løsningsprosessen mellom ulike intervjusekvenser, men det var viktig at koden beskrev hva nettopp denne gruppen gjorde uavhengig av hva jeg visste de andre gjorde. Videre skrev jeg inn alle kodene inn i en tabell med tilhørende beskrivelser om hva som kom fram i intervjuet. Jeg satt da igjen med 13 koder som beskrev hva som kom fram i intervjusekvensene (se vedlegg 4).

Med utgangspunkt i de 13 kodene jeg satt igjen med skulle jeg nå for å fortsette analysestegene til Percy, m.fl. (2015), se etter sammenhenger og ulikheter og på en eller annen måte knytte de sammen og utvikle et mønster. Fordi jeg var opptatt av å analysere intervjuene individuelt representerte flere koder de samme strategiene i generaliseringsprosessen og ved å slå sammen disse endte jeg opp med fem koder: *visuell framstilling*, *beskrivende framstilling av visuell utvikling*, *beskrivende argumentasjon basert på antall ruter*, *beskrivende argumentasjon basert på det generelle* og *algebraisk argumentasjon*. I tillegg til dette hadde jeg en kode der jeg plasserte all data jeg opplevde som irrelevante, som for eksempel digresjoner. Disse er ikke inkludert i den videre analysen.

Videre så jeg at flere kategorier egentlig illustrerte det samme, men med ulike tilnærminger. I steg syv og åtte skal man i følge Percy, m.fl. (2015) se etter fremveksten av overordnede temaer, og utarbeide navn på kategoriene som beskriver innholdet og kan brukes i senere diskusjon. Jeg bestemte meg derfor for å gjøre de fem kategoriene om til tre overordnede, der to av dem inneholdt to underkategorier. De videre stegene i Percy, m.fl. (2015) sin analyseprosess handlet om å skrive en avsluttende analyse som beskriver hver deltakers prosess innen hvert tema, og til slutt syntetisere disse for å danne en sammensatt syntese av dataene som skal besvare forskningsspørsmålet. Dette blir presentert i analysekapittelet (kapittel 4) og i drøftingskapittelet (kapittel 5).

3.5 Kvalitet i studien

Cohen, m.fl. (2018) betegner reliabilitet og validitet som sentralt i forskning. Dersom man ikke redegjør for disse kan forskningen ende opp med å ha dårlig kvalitet. De sier også at forskningsdesignet, og forskningen selv, har en etisk plikt til å vise til kvaliteten av studien. Jamfør begrepene til Tjora (2017) sier reliabilitet noe om påliteligheten til forskningen og validitet noe om gyldigheten. Han bruker også begrepet generaliserbarhet som sier noe om forskningens relevans utover de enheter som faktisk er undersøkt. Jeg vil videre her redegjøre for kvaliteten av forskningsprosjektet i lys av begrepene reliabilitet, validitet og generaliserbarhet.

3.5.1 Reliabilitet

Reliabilitet er i følge Cohen, m.fl. (2018) paraplybegrepet for begrepene pålitelighet, sammenheng og repliserbarhet, som alle ender opp med å stille samme spørsmål til forskningen; kan man tro på resultatene? Reliabilitet er opptatt av presisjon og nøyaktighet og for at forskningen skal være pålitelig må den demonstrere at dersom samme forskning blir gjort på en tilsvarende gruppe informanter i en lignende sammenheng vil man kunne få nærstående resultater. Thagaard (2018) sier dette er et utdatert prinsipp for kvalitativ metode, og i kvalitativ forskning er ikke repliserbarhet relevant. Dette fordi forskeren utvikler forståelsen sin i løpet av feltarbeidet i interaksjon med deltakere i feltet, og like studier vil dermed ikke nødvendigvis gi like resultater. Thagaard (2018) forklarer at forskeren må være konkret og spesifikk i beskrivelsene av fremgangsmåtene man har benyttet for å utvikle data, og for å styrke reliabiliteten kan å være flere forskere som samarbeider og diskuterer være en fordel. Generelt sier hun at argumentasjon for reliabilitet innebærer at man reflekterer over konteksten for utvikling av data.

Metodedelen gir en grundig beskrivelse av hele forskningsprosessen nettopp for å styrke grad av pålitelighet ved å gi god innsikt. Intervjuene har blitt tatt opp med video og lyd, og videre blitt nøye transkribert gjennom flere runder. En svakhet i reliabiliteten er at jeg bare har vært én person omkring tolkningene av dataen. Tolkningene har derfor blitt presentert for veileder for å sikre at de var riktige i forhold til hva som kom fram i intervjusekvensene, og i kapittel 4 presenteres konkrete utdrag fra transkriberingen slik leseren selv kan se hvor mine tolkninger kommer fra. En styrke i å være én forsker er at intervjuene ble gjort tilnærmet likt og dette er også bevart ved at bare planlagte spørsmål kunne benyttes under intervjusekvensene. Oppgavebaserte intervju er repliserbare fordi oppgavene vil være det samme dersom en forsker vil bringe prosjektet videre. Derimot vil ikke resultatene bli like nøyaktig fordi jeg som forsker, informantene, sted, tidspunkt og rammene rundt intervjuet har alle påvirket den innsamlede dataen.

3.5.2 Validitet og generaliserbarhet

Validitet, eller gyldighet, handler om hvorvidt svarene vi finner i forskningen faktisk er et svar på de spørsmålene vi forsøker å stille (Tjora, 2017, s. 232). Cohen, m.fl. (2018) skiller mellom indre og ytre validitet, der indre validitet omhandler hvorvidt funnene i prosjektet samsvarer med datamaterialet og ytre validitet handler om resultatene kan generaliseres. Tjora (2017) sier at generalisering er å knytte forskningens relevans utover de enheter som faktisk er undersøkt. På bakgrunn av dette vil generaliserbarheten til funnene bli redegjort for i dette kapitlet, med utgangspunkt i begrepet ytre validitet.

Kvale og Brinkmann (2015) legger vekt på at valideringen av et forskningsprosjekt ikke er en egen undersøkelsesfase, men er gjennomsyret i hele forskningsprosessen. De viser til syv stadier som viser en oversikt over validitetsaspektet gjennom et helt forskningsprosjekt der man har intervju som datainnsamlingsmetode. Det første stadiet er tematisering, som omhandler forankringen prosjektet har i teori og hvorvidt dette samsvarer med problemstillingen. I tidsperioden jeg har arbeidet med prosjektet har jeg satt meg inn i ulik teori knyttet til algebra og algebraiske aktiviteter, med fokus på figurmønster og problemløsning. Jeg har også sett på tidligere forskning som beskriver generaliseringsstrategier og bevisprosesser. Teori om resonnering og matematiske samtaler har også en logisk sammenheng til problemstillingen fordi generaliseringsprosessen er en kognitiv prosess som må gjøres til gjenstand for observasjon av forskeren for å kunne beskrive den.

Det neste stadiet handler om planlegging der gyldigheten av kunnskapen produsert avhenger av metodene som brukes (Kvale & Brinkmann, 2015). Som beskrevet i kapittel 3.1.1 har jeg valgt å bruke generisk kvalitativ metode til tross for at en fenomenologisk tilnærming kunne tenkes til å være mest relevant for dette prosjektet. Refleksjonen omkring hvilken metodologisk tilnærming som var hensiktsmessig for prosjektet har vært med på å styrke gyldigheten, fordi metodologien ble bestemt på bakgrunn av egnethet for besvarelse av problemstillingen. Generisk kvalitativ metode er egnet for å se på kognitive strategier (Percy, m.fl., 2015) som var utgangspunktet for prosjektets problemstilling. Intervjuing er det tredje stadiet til Kvale og Brinkmann (2015) og sier noe om intervjupersonens troverdighet og intervjuingens kvalitet. De sier at intervjuingen bør omfatte en grundig utspørring om meningen bak det som blir sakt i form av en kontroll som blir gjort under selve intervjusekvensen. Tjora (2017) sier vi kan styrke gyldigheten ved å tydeliggjøre hvordan vi praktiserer forskningen ut fra spørsmålene vi stiller. Figur 3 inkluderer ulike spørsmål jeg konsekvent spurte for å sikre at observasjonene som skulle tolkes var i samsvar med det informantene faktisk prøvde å formidle.

Transkribering er det fjerde stadiet til Kvale og Brinkmann (2015) og omhandler gyldigheten ved overføring fra muntlig til skriftlig språk. To av prinsippene til Cohen, m.fl. (2018) for validitet i kvalitativ forskning er at datamaterialet må presenteres med utgangspunkt i informantene, og beskriver situasjonene fra deres perspektiv. Det var derfor viktig å transkribere alt som kom fram i videofilmene og inkludere nonverbale fakter. I transkripsjonen bevarte jeg også dialekten til informantene ved å skrive ordrett det som ble sagt og først i presentasjonen av funn (se kapittel 4) ble dialekten omgjort til bokmål. En nøye gjennomgang ble også gjort ved at jeg gikk gjennom transkripsjonene om igjen samtidig med videoavspilling. En del av transkripsjonsprosessen som kan føre til tap av mening er der det ikke var mulig å registrere hva informantene sa.

Det femte stadiet analysering fra Kvale og Brinkmann (2015) har å gjøre med hvorvidt spørsmålene som blir stilt i intervjuet er gyldige og om tolkningene er logiske. Ved å bruke en induktiv tilnærming til analysen styrker man validiteten ifølge ett av Cohen, m.fl. (2018) sine prinsipper for validitet i kvalitativ forskning. Den teoretiske analysen er med støtte i tidligere forskning som er med på å styrke validiteten i mine fortolkninger. De siste stadiene fra Kvale og Brinkmann (2015) er validering og rapportering og omhandler studiets ytre validitet. Cohen, m.fl. (2018) sier at i kvalitativ forskning er hovedvekten på indre validitet og i mange tilfeller er den ytre validiteten irrelevant fordi målet ikke er å generalisere, men å utelukkende representere det som blir undersøkt. Utvalget her er ikke representativt og resultatene kan dermed ikke generaliseres, men det er lagt til rette for å selv kunne ta en vurdering om hvorvidt resultatene vil kunne brukes i videre forskning som tar sikte mot en generalisering.

3.6 Etiske betraktninger

For alle studier som innebærer direkte kontakt med de personer vi studerer er det utarbeidet særskilte etiske retningslinjer (Thagaard, 2018, s. 20). Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) har i oppgave å sørge for at det til enhver tid er forskningsetiske retningslinjer som gode verktøy for å fremme god og ansvarlig forskning (NESH, 2016). Retningslinjene er forpliktende for både individer og institusjoner, og man har et selvstendig ansvar for å sikre at forskningen man utfører er god og ansvarlig.

Som forsker eller student ved UiT er man lovpålagt å melde inn prosjektet sitt til NSD dersom man skal behandle personvernopplysninger (Norsk senter for forskningsdata, u.å.). Jeg meldte inn prosjektet tidlig i prosessen og utarbeidet et informasjonsskriv og samtykkeskjema i tillegg til intervjuguiden som inkluderes i meldeskjema. Prosjektet ble godkjent under forutsetning at det skulle gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet (se vedlegg 5). Informasjonsskrivet inneholdt informasjon om hva det innebar å delta i studien slik at informantene visste hva de samtykket til å delta på. Samtykke skal innhentes basert på prinsippet om fritt informert samtykke, som i tråd med NESH (2016) inkluderer forskningsdeltakernes frihet og selvbestemmelse og deltakerne skal kunne samtykke basert på informasjon om prosjektets formål, metode, risiko, mulig ubehag og andre konsekvenser. Jeg informerte om studiens formål, hva det innebar å delta i studien, frivillig deltakelse, hvordan personopplysninger og informasjon skulle bli behandlet og om deltakernes rettigheter i forskningsprosjektet i informasjonsskrivet. Elevene var i alderen 14-16 år og jeg hentet derfor samtykke fra foresatte i tillegg til eleven selv for å etterkomme retningslinjene til NESH (2016). Før intervjuet informerte jeg igjen om hvordan opplysningene kom til å bli behandlet etter gjennomføringen og hvorfor jeg brukte videokamera.

Konfidensialitet er et grunnprinsipp for en etisk forsvarlig forskningspraksis som i følge Thagaard (2018) innebærer at opplysninger om identifiserbare enkeltpersoner lagres på en forsvarlig måte og anonymiseres i presentasjon av resultat. For å ivareta dette prinsippet overførte jeg videomaterialet direkte til en minnepinne etter endt datainnsamling og da dataene ikke ble bearbeidet gjennom transkribering var minnepinnen innelåst og adskilt fra samtykkeerklæringene. I transkripsjonsprosessen ble navnene anonymisert ved å bruke E1 og E2, og det ble ikke nevnt noe om personlige forhold som kunne føre til identifisering av informantene. I resultatene ble dialekten til informantene oversatt til bokmål og jeg gav dem fiktive navn. Det var også en gruppe med tre informanter som har blitt presentert som et par for å bevare deres anonymitet, men fremdeles inkludere dem i forskningen.

3.7 Kritikk av metode

Det er flere kritikkverdige aspekter ved forskningen gjort i dette studiet. Noe jeg ønsker å nevne er at utvalget er lite, og som tidligere nevnt i kapittel 3.5.2 bidrar til at resultatene ikke er generaliserbare. Dersom forskningen hadde blitt gjennomført med en kvantitativ tilnærming ville omfanget av utvalget vært større og gitt et bedre grunnlag for generalisering. På bakgrunn av tidsperspektivet for prosessen var dette ikke mulig. I tillegg ville ikke en kvantitativ metode kunne gi et dypdykk i informantenes tankeprosesser som en kvalitativ gjør, og på den måten ikke bidra til å besvare forskningsspørsmålet på en grundig måte. Dette aspektet gir forskningen en svakere ytre validitet (Cohen, m.fl., 2018).

Utvalget var styrt av det jeg fikk tilgang på, på grunn av stor pågang av studenter i nærmiljøskolene. Økonomiske og tidsmessige begrensninger la føringer for hvor langt man kunne strekke seg for å få tak i informanter. Læreren var med på å velge ut informanter som kan ha både positiv og negativ innvirkning på forskningen. Fordi læreren har kjennskap til elevene og deres kunnskapsnivå, var det eneste kravet læreren fikk av meg at den selv kunne tenke seg at eleven kunne bidra med relevant data. Dette kravet ble satt fordi tidsperspektivet for oppgaven ikke ga rom for å sette høye krav til innhenting av informanter, og jeg kunne dermed ikke være kresen. Informantene ble tatt ut av sine naturlige omgivelser og intervjuet ble gjennomført på et grupperom på skolen. Det å skulle løse en oppgave foran en fremmed person i uvante omgivelser kan oppleves som skremmende og det kan tenkes at det foreligger et naturlig press om å prestere, selv om det ikke ble lagt føringer for det.

I analyseprosessen, beskrevet i kapittel 3.4, avgrenset jeg datamaterialet ved å bare ta utgangspunkt i én av oppgavene i den videre analysen. Dette kan ha ført til tap av relevant informasjon som kunne bidratt til å kunne gi en grundigere beskrivelse av generaliseringsprosessen til informantene. Et siste, men nevneverdig, aspekt ved forskningen er at jeg bare har vært én som har analysert og tolket innsamlet data og dermed kan andre tolkninger ha gått tapt.

4 Analyse og funn

Her vil jeg redegjøre for de tre hovedkategoriene og fire underkategorier jeg har utviklet som skal beskrive strategiene til elevene i generaliseringsprosessen. Kategoriene er hierarkiske og beskriver en økende grad av generalitet i strategiene. Figuren under viser til inndelingen av kategoriene.

Kategori 1 – Visualisering

Illustrasjon

Beskrivende visualisering

Kategori 2 – Argumentasjon basert på tallrekke

Kategori 3 – Algebraisk argumentasjon

Algebraisk argumentasjon uten notasjon

Algebraisk argumentasjon med notasjon

Figur 4 - Kategorisering

Hovedkategoriene er *visualisering*, *argumentasjon basert på tallrekke* og *algebraisk argumentasjon.* Visualisering og algebraisk argumentasjon har to underkategorier hver, der under visualisering finner vi underkategoriene *illustrasjon* og *beskrivende visualisering*. Under kategorien algebraisk argumentasjon finner vi underkategoriene *algebraisk argumentasjon uten notasjon* og *algebraisk argumentasjon med notasjon.* Videre i dette kapitlet vil hver kategori bli presentert med utdrag fra intervjuene og til slutt med en beskrivelse av kjennetegn som inkluderes i kategorien og hvordan dette kan ses i sammenheng med tidligere presentert teori.

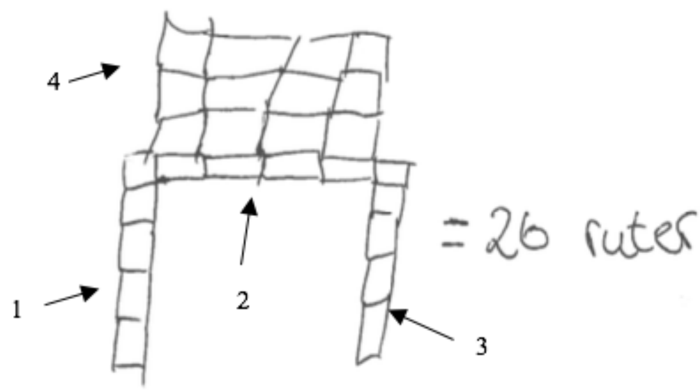
4.1 Kategori 1 – Visualisering

Her vil de to underkategoriene illustrasjon og beskrivende visualisering bli presentert. Disse viser til de ulike variasjoner av argumentasjonene innen visualisering elevene brukte for å løse oppgavene.

4.1.1 Kategori 1.1 – Illustrasjon

Eksempel 1: Per og Siri

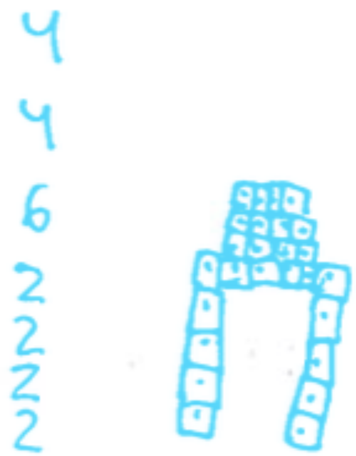
Per: Det blir liksom fem (Tegner fem ruter loddrett, pil 1) Per: Det blir fem nedover. Også blir det seks bortover (Tegner seks ruter vannrett, pil 2) Siri: Ja Per: også blir det fem nedover her (Tegner fem ruter loddrett, pil 3) Siri: også blir det tre til Per: Som blir hvor? De blir (Tegner tre rader oppover og bortover slik at «kvadratet» blir 4x4, pil 4) Per: Det blir sånn.



Per og Siri klarte å tegne neste figur ved å utvide alle sider med 1. På denne måten viser de at de har klart å se mønsteret i de foregående figurene og brukte dette til å tegne den neste. De brukte ingen andre metoder for å sjekke eller argumentere for å vise at dette var riktig, de bare talte og tegnet. De tok utgangspunkt i side for side da de tegnet og snakket samtidig rundt det.

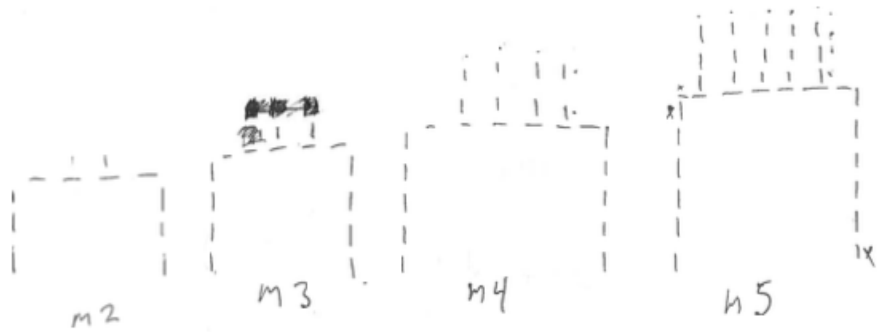
Eksempel 2: Marie og William

William: Hva har du gjort der? Marie: Jeg tror det er fire øverst, fire på nummer.. på den neste, også seks, også to, to, to



Marie og William illustrerte neste figur ved å først skrive antall ruter i hver rad i den neste figuren. De har basert svaret sitt på det mønsteret de har sett i de foregående figurene, men fordi William stilte spørsmål til hva Marie hadde skrevet bestemte Marie seg for å tegne figuren visuelt med ruter i tillegg. På denne måten brukte de enda en metode for å sjekke om det de har prøvd å illustrere er riktig. Til forskjell fra Per og Siri (eksempel 1) startet Marie og William med å skrive opp antall ruter i hver rad før de visualiserte hvordan figuren faktisk så ut. Per og Siri tegnet en illustrasjon av figuren med en gang. Det ser ut til at Marie og William bruker flere visualiseringer for å være sikre på at argumentasjonen de brukte i begynnelsen er riktig.

Eksempel 3: Lisa og Andreas



Lisa og Andreas valgte å tegne noen av figurene fra oppgaveteksten på en annen måte enn de ble framstilt der, og deretter tegnet de neste figurene i rekka. De bruker loddrette streker for å symbolisere «beina» på figuren og den delen av figuren som er et kvadrat, og vannrette streker for å symbolisere sammenkoblingen til kvadrat og bein. Man kan likevel se at Lisa og Andreas har tegnet feil fordi de har tegnet rutene i hjørnene både som vannrett og loddrett strek, og ender derfor opp med en strek for mye på hver side. Lisa og Andreas sin framstilling kan sammenlignes med tegningen til både Per og Siri (eksempel 1) og Marie og William (eksempel 2) fordi figurene har samme form som de har i oppgaveteksten, selv om de i de tidligere eksemplene fortsatt bruker ruter. Felles for alle er at figurene skal representere de neste figurene i figurmønsteret.

Analyse av kategori 1.1 – Illustrasjon

I denne kategorien formidlet elevene sine idéer i form av todimensjonale framstillinger med tegn, symboler eller illustrasjoner. Kategorien preges av ulike framstillinger av elevenes løsninger, særlig i oppgave 1 og 2, der elevene tegnet seg fram til en løsning på neste figur og figur 10. Typisk for denne strategien er at elevene brukte det de tolket som den generelle utviklingen til det visuelle i figuren for å tegne seg fram til neste figur. De tok utgangspunkt i hvordan hver side utvidet seg når de lager illustrasjonen. I denne kategorien viste elevene en viss forståelse for det generelle i figurmønsteret, men uttrykket det ikke eksplisitt med matematiske begreper eller notasjoner. Typisk for denne kategorien er at de ikke uttrykker noen algebraisk tankegang og at illustrasjonene elevene viser til er aritmetiske. I tillegg var argumentasjonen for løsningene empirisk basert, da de baserte seg på det de hadde observert i de tidligere figurene.

I alle tre eksemplene visualiserte elevene de neste figurene ved å lage en illustrasjon, og gjorde det uten å argumentere for det eller ved å snakke om generelle sammenhenger. Dette er i tråd med Radford (2010) sitt første generaliseringsnivå, aritmetisk generalisering, fordi elevene innehar evnen til å oppdage sammenhengen i et mønster. Det de generaliserer er lokalt felles i noen få figurer og de brukte denne observasjonen til å lage en framstilling av de videre figurene i figurmønsteret. Elevene beskrev særlig hvordan sidene i figuren utvidet seg fra figur til figur og tok utgangspunkt i dette da de laget illustrasjonen. Marie og William (eksempel 3) argumenterte for å vise at det de har visualisert er riktig, men det gjorde de ved å lage en annen type visualisering av figuren som også er en illustrasjon.

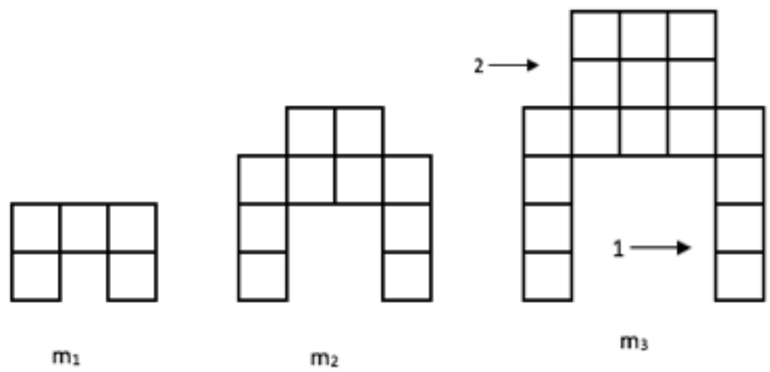
Elevene tegnet en representasjon av de neste figurene og talte seg fram til svaret som tilsvarer Lannin (2005) sin beskrivelse av de ikke-eksplisitte strategiene telling og rekursiv. Elevene brukte mønsteret fra de tidligere figurene som utgangspunkt da de skulle bestemme neste ledd. Radford (2010) beskriver i nivået aritmetisk generalisering at elevene ikke kan bruke sammenhengen de oppdager til å lage et generelt uttrykk, noe elevene heller ikke gjorde her.

Siden resonneringen var basert på en visuell representasjon, i dette tilfellet en illustrasjon av de neste figurene, kunne man sagt at det tilsvarer nivå 3 hos Russell, m.fl. (2011) der de sier at enkelteksempler representerer det spesielle til det generelle og dermed kan være holdbart som bevis. I denne sammenhengen vil ikke illustrasjonen vise det spesielle til det generelle, i følge Kieran (1989) i Radford (2010), fordi elevene ikke uttrykte det algebraisk. Dersom illustrasjonen hadde vist hvordan figurtallet hadde sammenheng med mønsteret i figuren ville den kunne representert dette, men i denne kategorien gjør den ikke det. Derimot er dette en begrunnelse gjennom konkrete eksempler som Russell, m.fl. (2011) har beskrevet som nivå 2 av elevers begrunnelse i arbeid med bevis. Elevene brukte konkrete eksempler, som i dette tilfellet er tegninger for å gjøre rede for sine svar på oppgaven. Russell, m.fl. (2011) beskriver derimot at eksemplene gjerne er med tall, men dette er ikke et krav innen dette nivået og man kan derfor argumentere for at i her kan elevenes svar plasseres her. Elevene argumenterte for illustrasjonen basert på mønsteret de så i de tidligere figurene og på denne måten er argumentasjonen empirisk basert. Dette er et kjennetegn på Knuth, m.fl. (2009) sitt nivå 1 der argumentasjonen er empirisk basert og ikke basert på generalitet. William og Marie (eksempel 2) viste at de ser behovet for en matematisk begrunnelse, men endte opp med å lage en ny illustrasjon som på lik linje med den første er empirisk basert. Det å være bevisst på å gi en matematisk begrunnelse er også i beskrivelsen av nivå 1 hos Knuth, m.fl. (2009).

4.1.2 Kategori 1.2 – Beskrivende visualisering

Eksempel 4: Per og Siri

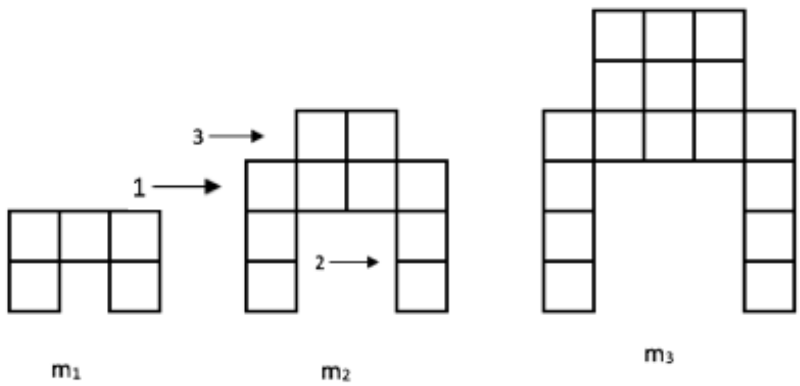
Per: Den øker med en i lengden her
(Peker på «beina», pil 1)
Siri: Ja, og en i høyden også
Per: Den øker med en i lengden og en i høyden
Siri: Også blir det en rad til her oppe
(Peker øverst på figur m_3, pil 2)



Per og Siri brukte ord for å beskrive den visuelle utviklingen til figurene og for å lage et bilde for hvordan figurene utviklet seg. De pekte og henviste til de ulike delene av figuren med et hverdagslig språk.

Eksempel 5: Sara og Ida

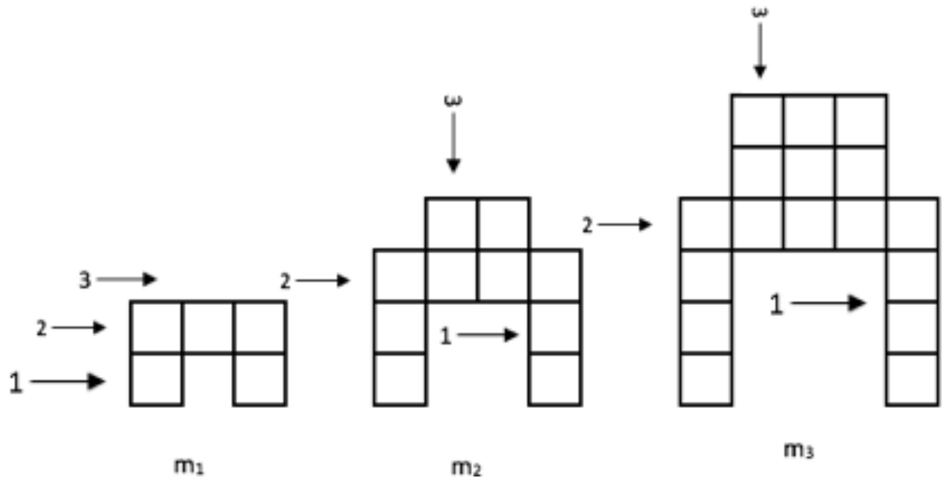
Sara: Så her ser du at det er fem ruter på en måte (Viser til figur m_1) Ida: Ja. Her er det ti. (Viser til figur m_2) Sara: Ja, og du ser det blir en lengre i bredden på en måte, her (Viser til nederste raden i «kvadratet» på figur m_2, pil 1) Sara: Så det blir en ganger lengre ned (Viser til «beina» på figur m_2, pil 2) Sara: Også legges det til to på midten (Viser til «kvadratet» på figur m_2, pil 3) Ida: Ja Sara: Samme blir det her, der øker det med én fra den her, en ned (Viser til at det øker med én rute på «beina» på figuren fra figur m_2 til figur m_3)



Sara og Ida gjorde som Per og Siri (eksempel 4); de brukte ord for å beskrive den visuelle utviklingen og brukte et hverdagslig språk. De henviste også til de ulike delene av figurene. I tillegg beskrev Sara og Ida først hvor mange ruter det var i figur m_1 og m_3.

Eksempel 6: Marie og William

Marie: Ikke sant, på liksom «beina» her kan du si, her er det to, tre, fire.
Da blir det fem som er neste
(Viser til «beina på figurene, pil 1)
William: Ja det tenkte jeg og
Marie: Og her e det tre, fire, fem. Da blir det seks på neste.
(Viser til nederste raden i «kvadratet»/øverst på «beina», pil 2)
Marie: Og her er det null, én og to. Da blir det tre på denne.
(Mener radene i «kvadratet», pil 3)
Marie: Også siden det er to, tre, så blir det fire der
(Mener antall ruter i bredden i «kvadratet»)



Til forskjell fra Per og Siri (eksempel 4) og Sara og Ida (eksempel 5), tok Marie og William for seg del for del i figuren og beskrev utviklingen i hver del og argumenterte slik for hvor mange ruter det var i den spesifikke delen i neste figur. De viste til utviklingen med hverdagslige ord og er dermed lik de tidligere eksemplene siden de også brukte et hverdagslig språk.

Analyse av kategori 1.2 – Beskrivende visualisering

Denne kategorien skiller seg fra illustrasjon ved at elevene konstruerte en tenkt modell av neste figur istedenfor å illustrere den med bruk av tegning, og brukte heller ord for å beskrive den utviklingen de så. Jeg har derfor valgt å kalle denne kategorien *beskrivende visualisering*.

Kategorien preges av at elevene brukte et hverdagslig språk og henviste til tidligere figurer da de beskrev mønsterutviklingen de så. Dette gjorde de ved å peke og lage ord som skulle representere de ulike delene av figurene. Særlig ord som «her», «på beina», «oppover», «nedover» ble brukt for å beskrive utviklingen. Det kan tyde på at elevene har en forståelse for det generelle i figurmønsteret, men bruker ikke matematiske begreper eller notasjoner.

Denne strategien har fellestrekk med det Radford (2010) beskriver som faktabasert generalisering der elevene ikke anerkjenner eller navngir de generelle mønstrene, men uttrykker de gjennom kroppsspråk, ord og gestikulering. Dette er det laveste nivået av algebraisk generalisering i følge han, der elevene skal kunne utarbeide generelle regler for hvilket som helst tall i tallmønsteret. Elevene kan i utgangspunktet bruke den beskrivelsen av figurmønsteret som vises i eksemplene for å komme frem til hvilken som helst figur og man kan dermed si at elevene viser en grad av algebraisk tankegang. Likevel er denne strategien lite hensiktsmessig. Elevene konstruerte en tenkt modell av neste figur uten å lage en konkret illustrasjon, men ved å beskrive den generelle utviklingen fra de tidligere figurene. Dette involveres også i generaliseringsstrategien telling fra Lannin (2005) sitt rammeverk som sier at elevene tegner en eller konstruerer en modell som representerer situasjon. I likhet med forrige kategori var elevenes argumentasjon basert på de tidligere figurene som vises i figurmønsteret i oppgaven, og er dermed empirisk basert. På bakgrunn av dette kan argumentasjonen til elevene plasseres i Knuth, m.fl. (2009) sitt nivå 1 der argumentasjonen er empirisk basert og ikke generell. Dette gjelder også i Russell, m.fl. (2011) sitt nivå 2 der begrunnelsen er gjennom konkrete eksempler som også er i empirisk basert.

4.2 Kategori 2 – Argumentasjon basert på tallrekke

Eksempel 7: Frode og Kaja

Kaja: Hva hvis det der blir pluss fem?
(Viser til forskjellen i antall ruter fra figur m_1 til figur m_2)
Frode: Ja
Kaja: Og der er det pluss syv. Og da er det to pluss igjen, pluss ni.
Frode: Men hvordan kom du fram til det?
Kaja: Fordi det starter med fem, og fem pluss fem er ti.
Frode: Ja jeg er klar over det
Kaja: Ja, og da øker det med to med det du plusser
Frode: Ja
Kaja: Så kanskje det blir ni der man plusser
Frode: Ja
Kaja: Så 17 pluss (…) så da blir det 26.

Frode og Kaja gikk vekk fra hvordan figuren visuelt utviklet seg og tok heller for seg hvor mange ruter figuren økte med fra ledd til ledd. De manipulerte figurmønsteret til å heller bli en tallrekke av antall ruter og prøvde videre å finne den generelle utviklingen til tallrekken fremfor det generelle i det visuelle.

Eksempel 8: Per og Siri

Per: Den er 16, og den øker med ti, var den ikke?
Siri: Da blir den jo, den neste å øke med 12 igjen, også 13.
Per: Ja
Siri: Du må øke med ti, nei du må øke med på en måte det samme som forrige og pluss én.

Per og Siri gjorde det samme som Frode og Kaja (eksempel 7); de gikk vekk fra den visuelle utviklingen til figurmønsteret og så heller på antall ruter i figurene som en tallrekke og prøvde å finne den generelle utviklingen til tallrekken. I utdraget ser vi også at de har en feil i antall ruter fra figur 3, da de sier det er 16 ruter når det egentlig er 17.

Eksempel 9: Tommy og Mari

Tommy: Fordi det er først med fem, også
Mari: Med syv
Tommy: Også med ni? Fem, syv, ni, elleve?
Mari: Ja det blir det jo. Så den utvider seg med.. Det går fem, syv også blir det ni.
Tommy: Også 11, 13, 15

Tommy og Mari, i likhet med Frode og Kaja (eksempel 7) og Per og Siri (eksempel 8), gikk vekk fra den visuelle utviklingen og så heller på antall ruter i figurene som en tallrekke og fant den generelle utviklingen til tallrekken fremfor mønsteret. I dette utdraget beskriver Tommy og Mari hvordan utviklingen i tallrekken er og hvordan den utvikler seg videre.

Analyse kategori 2 – Argumentasjon basert på tallrekke

I denne kategorien argumenterer elevene for idéene sine basert på utviklingen i antall ruter i figurmønsteret. Ulikt de tidligere kategoriene gikk elevene bort fra den visuelle framstillingen og så heller på figurmønsteret som en tallrekke av antall ruter. Selv om elevene løsrev seg fra det visuelle var de fortsatt avhengig av en type visualisering som her bestod av tall fremfor en illustrasjon av en figur. Det kan likevel tyde på at elevene ser det generelle i tallrekken i og med at de beskriver at differansen mellom tallene øker jevnt fra et tall i tallrekken til neste. Svakheten med denne strategien ser vi i eksempelet til Per og Siri (eksempel 8) der de har talt feil i antall ruter i figur m_3, og ender derfor opp med et feil svar i resonneringen sin. Strategien kan likevel fungere dersom den blir gjort riktig. Enda en svakhet med denne strategien er at elevene er avhengig av å vite de to forrige figurene for å kunne beregne seg frem til neste figur. Dette kravet gjør strategien komplisert når man skal finne et tall langt opp i tallrekken. Mason (1996) beskriver at elevene ofte i søken etter en formel for en tallrekke kan manipulere figuren for å kunne telle den enklere, samt finne en gjentakelse som viser hvordan man kommer seg videre fra den første til den andre. Han sier også at elevene kan finne en gjentakelse som viser hvordan man kommer seg videre fra den første til den andre, noe elevene også viser her.

Strategien beskrivende visualisering kan sammenlignes med Radford (2010) sitt andre nivå av algebraisk generalisering; kontekstuell generalisering. I dette nivået refererer elevene kontekstuelt til variablene i mønsteret og det generelle og algebraiske i mønsteret blir navngitt gjennom naturlig språk uten inkludering av matematiske ord, begreper og notasjoner. Elevene baserte resonneringen sin på å referere til de tallene i tallrekken de har manipulert fra figurene, og man kan dermed si at elevene refererte kontekstuelt til variablene i mønsteret. De brukte ord som «øker med» og «utvider seg», og disse uttrykkene kan beskrives som matematiske. I denne sammenhengen er disse ordene brukt for å beskrive noe som skjer med tallrekken og det kan virke som om elevene bruker disse ordene fordi de også er vanlige å bruke i et hverdagslig språk, ikke for å spesifikt bruke matematiske begreper. I algebraisk generalisering skal elevene, i følge Radford (2010), klare å utarbeide generelle regler for hvilket som helst tall i et tallmønster. Ved å bruke denne strategien klarer elevene det, men strategien er ikke optimal for å beregne seg fram til et tall langt frem i tallrekken.

Lannin (2005) beskriver i den eksplisitte generaliseringsstrategi gjett-og-sjekk at man lager en regel ved å eksperimentere med ulike operasjoner og tall som gis i oppgaven. Denne beskrivelsen kan relateres til det elevene gjør i denne kategorien. Elevene som brukte denne strategien validerte svaret sitt med utgangspunkt i empiri uten å sette spørsmålstegn til hvorfor eller om den fungerer. Eksemplene viser til at elevene ser en jevn økning i differansen mellom tallene i tallrekken, og at den fungerer for de figurene som vises i oppgaveteksten. De stilte dermed ingen spørsmål for hvorfor det fungerte eller om det faktisk fungerer i det lange løp. I tillegg til strategien gjett-og-sjekk er også Lannin (2005) sin strategi rekursiv representativ for det elevene gjorde i denne kategorien. Han beskriver at man bygger på de forrige leddene for å bestemme neste ledd, noe elevene, som tidligere nevnt, er helt avhengig av for å kunne bestemme de senere leddene i tallrekken når de bruker denne strategien.

Elevene så en konsekvent økning i antall ruter fra figur til figur og laget dermed en rekke aritmetiske følger som er et rekursivt uttrykk for tallfølgen. Dette er en additiv strategi beskrevet English og Warren (1998) der elevene ser på verdiene i tallrekken og formulerer generaliseringen basert på rekursjonen i tallfølgen. At argumentasjonen deres er rekursiv ses tydelig i eksempelet fra Per og Siri (eksempel 8) der Siri sier «*du må øke med på en måte det samme som forrige og pluss 1*». Fra kategori 1.1 og 1.2 er argumentasjonene til elevene plassert under Russell, m.fl. (2011) sitt nivå 2 med begrunnelser gjennom konkrete eksempler. Her er også begrunnelsen gjennom konkrete eksempler og først her er argumentasjonen basert på tall som de presiserer at argumentasjonen gjerne er.

4.3 Kategori 3 – Algebraisk argumentasjon

Her presenteres underkategoriene algebraisk argumentasjon uten notasjon og algebraisk argumentasjon med notasjon, som viser ulike argumentasjonsmetoder der algebraisk tankegang er inkludert, men på to ulike nivå.

4.3.1 Kategori 3.1 – Algebraisk argumentasjon uten notasjon

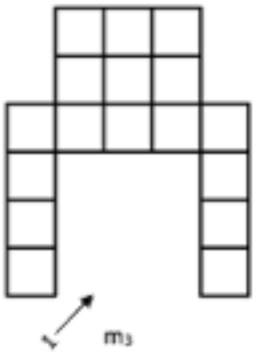
Eksempel 10: Per og Siri

Siri: Du må, nummeret liksom
Per: Bak
Siri: På en måte tallet bak m liksom. Det kommer jo an på
hvilket nummer i rekka. Så må du jo
Per: Gange det med
Siri: Seg selv, også må du ta, liksom. Hva heter det? De to rekkene der
Per: Og
Siri: Ett høyere
Per: Tall enn tallet på liksom
Siri: Nummeret
Per: Ja, plusse det
Siri: Sammen
Per: Eller gange det med to

Per og Siri beskriver her et uttrykk for hvordan man kan finne figur m_n. De tok utgangspunkt i figurtallet som de selv beskriver som «tallet bak m» og «nummeret», og brukte sammenhengen mellom figuren og figurtallet for å beskrive et uttrykk. Sammen resonnerte de seg fram til et uttrykk ved å beskrive steg for steg.

Eksempel 11: Lisa og Andreas

Lisa: Ser du det er figurnummeret ganger figurnummeret
her og her, den biten her. Liksom det mellomrommet
(Peker på hulrommet under kvadratet i figur m_3, pil 1)
Andreas: Ja, fordi liksom. Jeg ser hva du skal fram til.
Så det blir liksom, i det «kvadratet», så blir det jo
figurnummer ganger figurnummer for da har du liksom arealet på den.
Også blir de her «beina» da, det blir liksom figurnummer pluss en.



Til sammenligning med Per og Siri (eksempel 10) brukte Lisa og Andreas matematiske begreper som «figurnummeret» og «arealet» i stedet for «nummeret» og «nummeret bak m» som Per og Siri brukte. De bruker derimot i likhet med Per og Siri (eksempel 10) sammenhengen mellom figuren og figurtallet for å beskrive et uttrykk for å finne ut antall ruter i figur m_n.

Analyse av kategori 3.1 – Algebraisk argumentasjon uten notasjon

I begge eksemplene beskriver elevene et generelt uttrykk for hvordan man kan finne figur m_n. Elevene bruker et naturlig språk med et innslag av matematiske begreper. Som vi så hos Per og Siri (eksempel 10) setter de et hverdagslig preg på matematiske begreper med å beskrive figurtallet som «nummeret» og «nummeret bak m_n». Til forskjell fra kategori 2 (argumentasjon basert på tallrekke), er elevene tilbake på det visuelle og bruker sammenhengen mellom figur og figurtall for å beskrive utviklingen til de ulike delene av figuren. Videre brukte de denne utviklingen for å vise til hvordan man kan finne antall ruter i hvilken som helst figur. Et fellestrekk i denne kategorien er at elevene beskriver figuren som 2 deler der «beina» og «kvadratet» er de ulike delene. Elevene tar for seg det generelle i figurmønsteret og beskriver det med ord, men bruker ikke i denne kategorien algebraisk notasjon for å beskrive generaliteten.

Elevene refererte kontekstuelt til variablene i mønsteret ved å henvise til de ulike delene av figuren og hvordan disse er i sammenheng med figurtallet. De beskrev det generelle og algebraiske i mønsteret gjennom naturlig språk med innslag av matematiske ord og begreper. I Radford (2010) sin beskrivelse av kontekstuell generalisering beskriver elevene det generelle og algebraiske i mønsteret uten bruk av matematiske ord og begreper. Symbolsk generalisering forutsetter bruk av symboler i tillegg til bruk av naturlig språk for å beskrive løsningen. Dermed er ikke elevenes resonneringer kompatibel til å passe inn under dette nivået og plasseres derfor under kontekstuell generalisering. Som tidligere nevnt setter elevene et hverdagslig preg på de matematiske begrepene og når de bruker begrepene er det samtidig som de bruker hverdagslige ord og «sleng». Det er derfor vanskelig å vite om de bruker ordene fordi de er matematiske eller fordi de er vanlige i hverdagen.

Elevene konstruerte en eksplisitt formel basert på informasjon i oppgaven som ikke inkluderer algebra i form av bruk av algebraisk notasjon, men er likevel en formel som kan brukes for å finne hvilken som helst figur. På denne måten er også argumentasjonen og resonneringen til elevene under kategorien kontekstuell generaliseringsstrategi slik den er beskrevet av Lannin (2005). Ut fra elevenes beskrivelser av uttrykket viser de til en forståelse for hvordan figurens utvikling har en sammenheng med figurtallet. På den måten kan de bestemme verdien for hvilken som helst figur, som er et kriteria for de ikke-eksplisitte strategiene til Lannin som kontekstuell strategi tilhører. English og Warren (1998) sin tredje strategi forbinder man figurtallet med verdien i figuren og utformer en funksjon eller et uttrykk. I beskrivelsen sier de at man *gjerne* ender opp med et uttrykk som inkluderer algebraisk notasjon, men siden det ikke er presisert at man *må*, kan denne kategorien knyttes til denne strategien. Elevene viser at de er i stand til å argumentere generelt for figurmønsteret ved å henvise til ulike deler av figurene og knytte de til figurtallet. Dette er et kjennetegn hos Knuth, m.fl. (2009) sitt høyeste nivå i deres rammeverk, nivå 3.

4.3.2 Kategori 3.2 – Algebraisk argumentasjon med notasjon

Eksempel 12: Sara og Ida

Sara: M_n er lik n ganger n, går det?
Ida: Ja
Sara: Pluss n ganger to pluss to.. Eller nei, det går ikke
Ida: Det står jo m_3 der, også er det én mer enn tre på
Sara: Hver side
Ida: Så på m_4 vil det være fem, m_5 vil være seks. Det vil alltid være en mer
Sara: Så regelen kan være, liksom, ganger n, som er.. Hvis vi bruker m_3 som eksempel så er treeren n, og da er det tre ganger tre som er n ganger n, pluss tre ganger tre pluss to.
Ida: Ja det er det jo. Så pluss tre ganger to pluss to.

Sara og Ida resonnerte seg i eksempelet fram til hvordan de skulle beskrive uttrykket for figur m_n. De resonnerte sammen og brukte figur m_3 som eksempel for å argumentere for sine resonneringer. De bruker algebraisk notasjon ved å bruke n om figurtallet og bruker matematiske ord som «gange» og «pluss» når de refererer til multiplikasjon og addisjon.

Eksempel 13: Tommy og Mari

Mari: Det blir jo figurnummeret opphøyd i andre fordi det er ganger med seg selv
Tommy: Mhm
Mari: Det blir jo, n, eller det blir først.. Jeg tror vi må ha parentes også, n pluss en ganger to, også utfor der blir det n.
Tommy: Eller sånn.. Ja det blir det.
Mari: Også blir det pluss sånn, fordi vi plusser den, ikke ganger den.
Tommy: Jo jeg tror det, men
Mari: Jeg vet ikke, fordi det blir jo, hvis vi er på denne da
(Viser til figur m_3)
Mari: Så er det jo tre pluss én ganger to, så det blir fire, det blir åtte. Også blir det ganger med seg selv som blir ni.
Tommy: Jaa
Mari: Som blir riktig. Tror det i hvert fall.
Tommy: Ja tror det.
(Skriver $F_n = (n + 1 * 2) + n^2$)

Her resonnerte Tommy og Mari omkring hvordan uttrykket til figur m_n skulle bli. De brukte algebraisk notasjon ved å bruke «n» om figurnummeret og matematiske begreper som «pluss» og «gange». Mari viste til figur m_3 og beregnet seg fram til antall ruter ved å bruke forslaget på uttrykket, og konkluderte med at det blir riktig. De endte opp med å skrive et uttrykk med algebraisk notasjon, og brukte F_n istedenfor m_n som er betegnelsen i oppgaven.

Analyse av kategori 3.2 – Algebraisk argumentasjon med notasjon

Elevene brukte her algebraisk notasjon for å beskrive den generelle utviklingen til figurmønsteret. De brukte fortsatt sammenhengen mellom figur og figurtall, som de også gjorde i kategori 3.1, men klarer her å uttrykke et algebraisk resonnement med å bruke algebraisk notasjon og matematiske begreper. Dette vises i samtalene mellom elevene. Ingen av de tidligere kategoriene har vært særlig preget av at elevene bruker matematiske begreper, og når de har brukt det har dette vært i sammenheng med naturlig språk. Det er bare i denne kategorien elevene bruker algebraisk notasjon og bruker «n» om figurnummeret. Den ene fremgangsmåten til Kieran (2004) som kan få elevene til å utvikle sin algebraiske tankegang er å ha et fokus på både tall og symboler, og ikke bare tall. Elevene viser dermed i denne kategorien en grad av algebraisk tankegang. Med bakgrunn i hvorvidt algebraisk tankegang kommer fram i de tidligere kategoriene og i beskrivelsen av denne kategorien, kan man si at fra min studie er det her elevene viser høyeste nivå av algebraisk tankegang.

I eksemplene presentert ovenfor tar elevene utgangspunkt i sammenhengen mellom figurtall og figurmønster, og beskriver hvordan sammenhengen er mellom de ulike delene av figuren. De klarer å uttrykke de generelle objektene i figurmønsteret muntlig med algebraisk notasjon, som er et kjennetegn innen symbolsk generalisering fra Radford (2010). Dette ser vi blant annet når Sara sier «*m_n er lik n gange n, går det ant?*» (fra eksempel 12) der hun prøver å beskrive den delen av figuren som er et kvadrat ved å bruke algebraisk notasjon. I symbolsk generalisering klarer elevene å komme frem til et fullstendig matematisk uttrykk inkludert bruk av symboler og beskriver løsningen for hvilken som helst figur gjennom naturlig språk.

I denne kategorien klarte elevene å uttrykke en eksplisitt formel som skulle beskrive utviklingen i figurmønsteret og de bruker sammenhengen mellom figur og figurtall for å uttrykke formelen. Å konstruere en eksplisitt formel basert på informasjon i oppgaven er et kjennetegn i Lannin (2005) sin generaliseringsstrategi kontekstuell. I denne strategien knytter man formelen opp mot en telle-teknikk, men dette skjer ikke hos elevene i denne kategorien, og man kan dermed ikke si at elevenes strategi kan sammenlignes med kontekstuell generaliseringsstrategi på alle områder. Elevene forbinder figurtallet med verdien i figuren og konkluderer med et generelt uttrykk som inkluderer algebraisk notasjon som beskriver figurmønsteret. Dette samsvarer med English og Warren (1998) sin strategi «søk etter et funksjonelt forhold» og også Russell, m.fl. (2011) sitt nivå 4. I begge disse er algebraisk notasjon et kriteria, noe som elevene bruker i denne strategien. Knuth, m.fl. (2009) sier om nivå 3 at argumentasjonen kan mangle formaliteter, men viser likevel til det generelle i tilfellet. I eksemplene fra elevene brukes det generelle, figurtallet og figur, som argumentasjon for uttrykket elevene konkluderer med, og dermed havner denne argumentasjonen under dette nivået.

5 Drøfting

Jeg har beskrevet i kapittel 4 funn av typiske generaliseringsstrategier som fremkom i intervjuene og sett de opp mot tidligere forsknings rammeverk og beskrivelser av løsningsstrategier. Her vil det bli tatt et steg tilbake for å se helheten i generaliseringsprosessen og videre besvare forskningsspørsmålet.

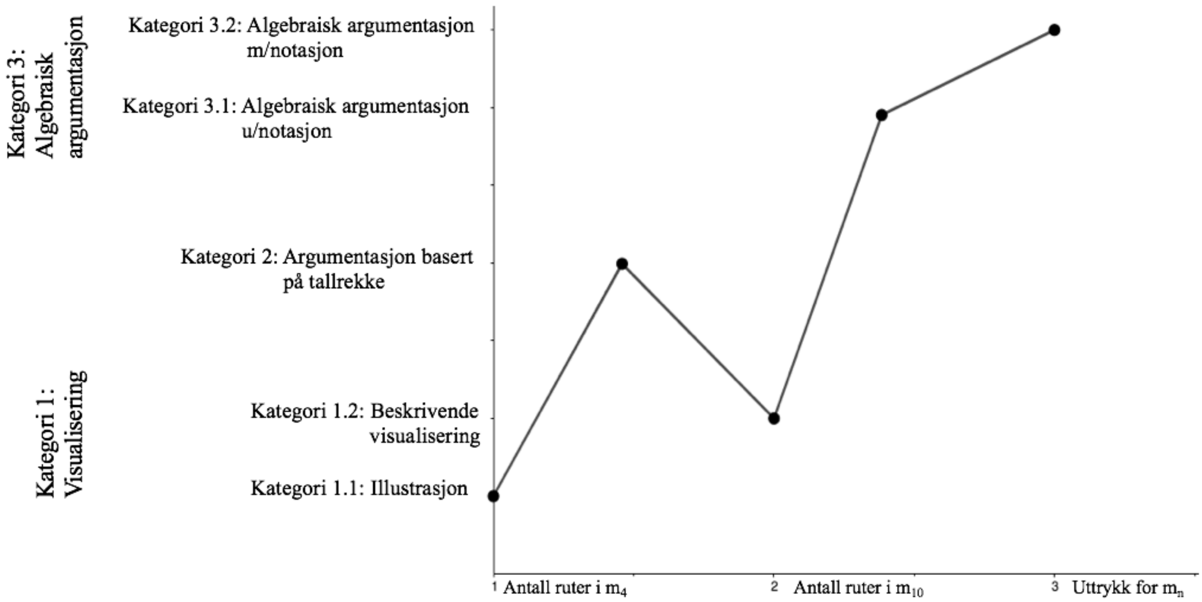
5.1 Fremstilling av generaliseringsprosessen

Utviklingen av kategoriene viste til sammenhenger mellom informantenes løsningsstrategier. Informantene valgte i stor grad de samme strategiene uten særlige avvik, og det kom fram at det var aldri bare én gruppe som var innom en spesifikk kategori. Kategoriene er utarbeidet og presentert hierarkisk basert på grad av generalitet. En kort beskrivelse av kategoriene viser til at strategiene går fra å være empirisk basert til å i større omfang inkludere generalisering i utarbeiding av løsninger. Tabellen under viser hvilke kategorier hver enkelt gruppe var innom i sin løsningsprosess.

Kategorisering		Marie og William	Frode og Kaja	Tommy og Mari	Lisa og Andreas	Sara og Ida	Per og Siri
Kategori 1 – Visualisering							
	1.1 – Illustrasjon	X	X	X	X	X	X
	1.2 – Beskrivende visualisering	X	X		X	X	X
Kategori 2 – Argumentasjon basert på tallrekke			X	X	X	X	X
Kategori 3 – Algebraisk argumentasjon							
	3.1 – Algebraisk argumentasjon u/notasjon	X		X	X	X	X
	3.2 – Algebraisk argumentasjon m/notasjon	X		X	X	X	

Tabell 1 - Oversikt over valgte strategier for hvert par

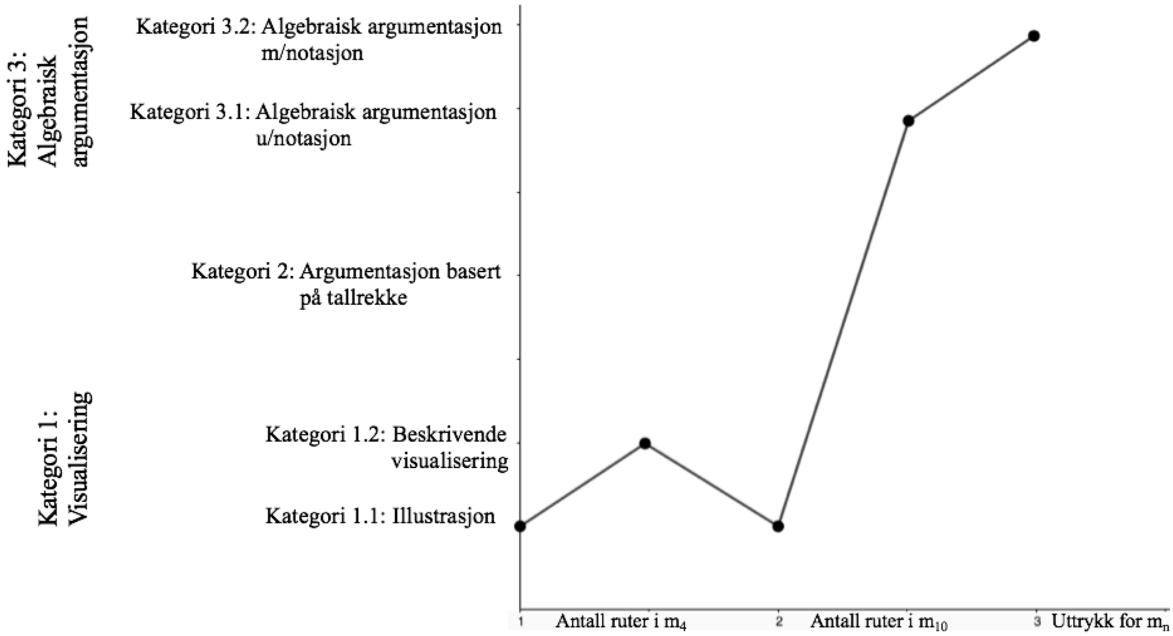
Det fremkommer i tabellen at de fleste gruppene var innom nesten alle kategoriene. Frode og Kaja var de eneste som ikke brukte strategier på kategori 3, men ellers benyttet de fleste gruppene seg av alle strategiene som er kategoriserte. Selv om de fleste gruppene benyttet seg av de samme løsningsstrategiene skiller generaliseringsprosessen seg fra hverandre. Prosessen beskriver alle de valgte strategiene i hele oppgaveløsningen, fra oppgave 1 til oppgave 3. Den skal gi et bilde av hvilke strategier elevene benyttet seg av til hver enkelt oppgave. For å fremstille generaliseringsprosessen til elevene har jeg valgt å bruke en graf. I grafen viser y-aksen til hvilken strategi som ble valgt, og x-aksen viser til hvilken oppgave den gitte strategien ble brukt. Figur 5 viser et eksempel på en graf slik den blir fremstilt for informantene.



Figur 5 - Eksempel på generaliseringsprosess

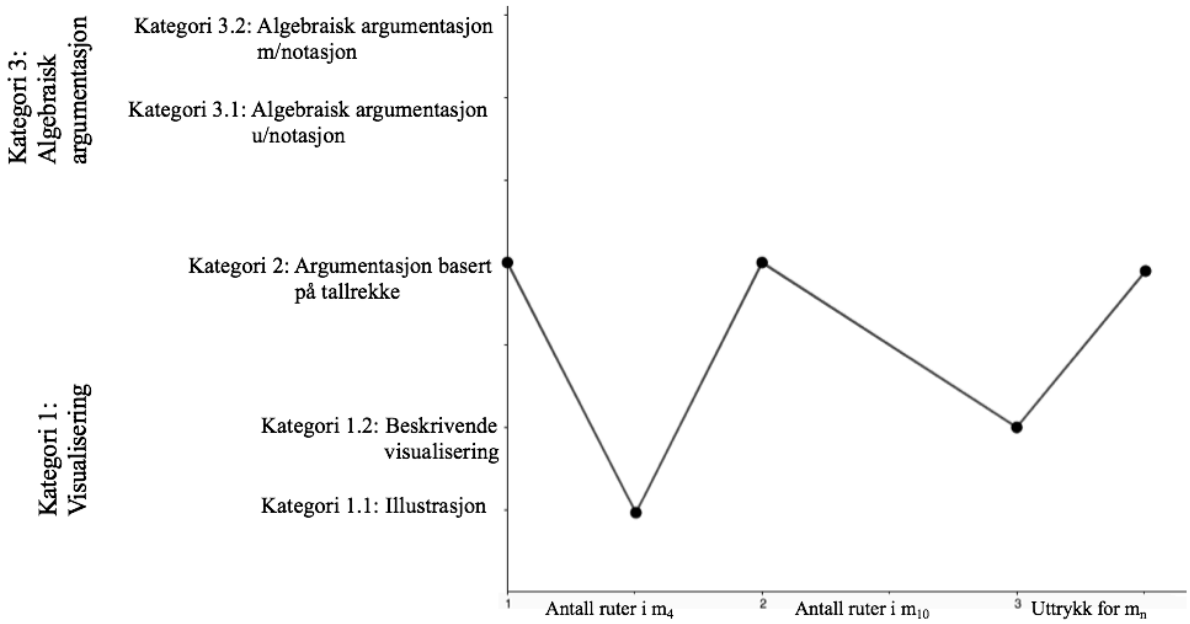
Dersom denne grafen hadde beskrevet et av informantparenes generaliseringsprosess ville det bety at de først benyttet seg av strategien illustrasjon. Videre ble argumentasjon basert på tallrekke benyttet for å besvare første oppgave, som er antall ruter i neste figur (m_4). Dette betyr at gjennom prosessen for å besvare første oppgave benyttet de seg først av illustrasjon, og deretter argumentasjon basert på tallrekke som endelig strategi for løsningen I andre oppgave ville de først ha benyttet beskrivende visualisering og deretter algebraisk argumentasjon uten notasjon, igjen sistnevnte strategi for å besvare oppgaven. I den tredje og siste oppgaven ville de ha benyttet seg av strategien kategorisert som algebraisk argumentasjon med notasjon for å løse oppgaven. Videre i dette kapittelet vil informantparenes faktiske generaliseringsprosess bli presentert.

5.1.1 Marie og William



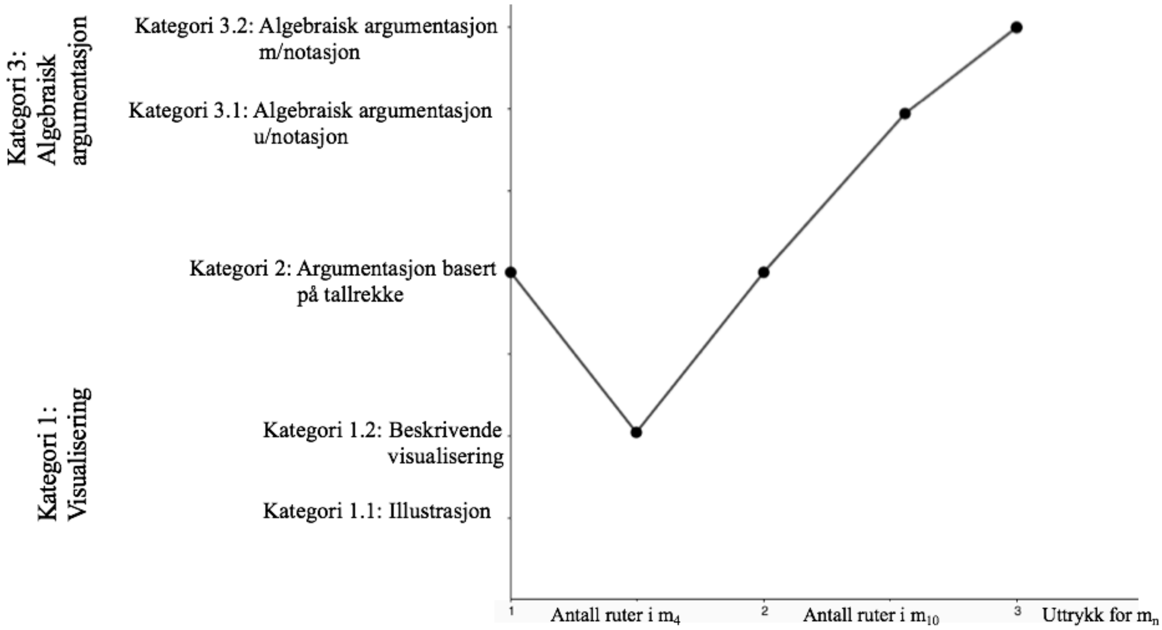
Figur 6 - Marie og Williams valgte strategier i løsningsprosessen

5.1.2 Frode og Kaja



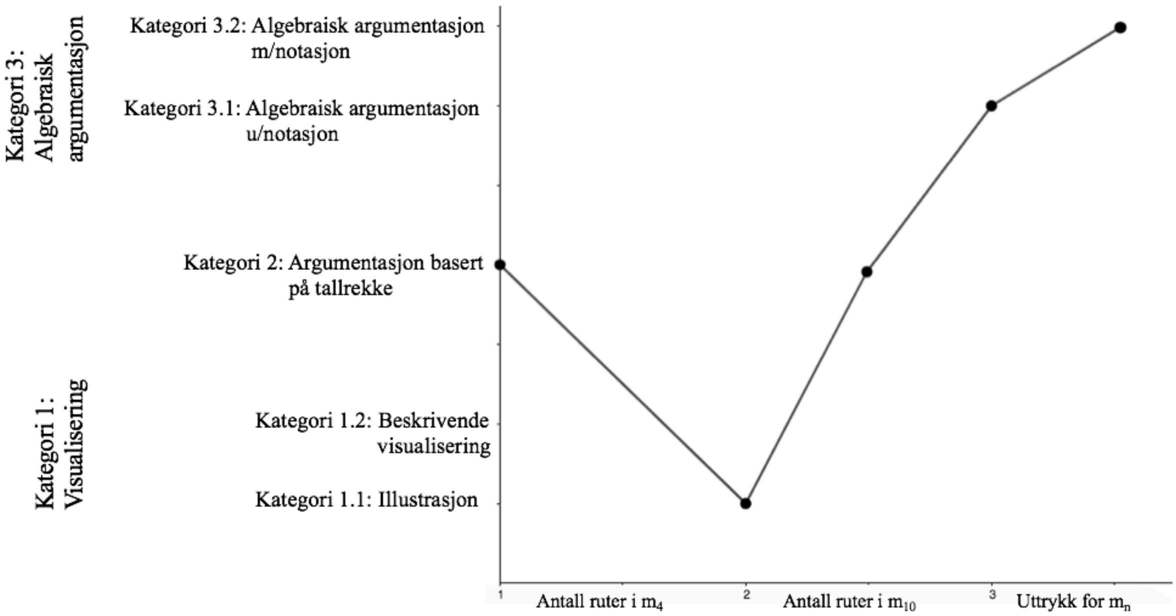
Figur 7 - Frode og Kajas valgte strategier i løsningsprosessen

5.1.3 Tommy og Mari



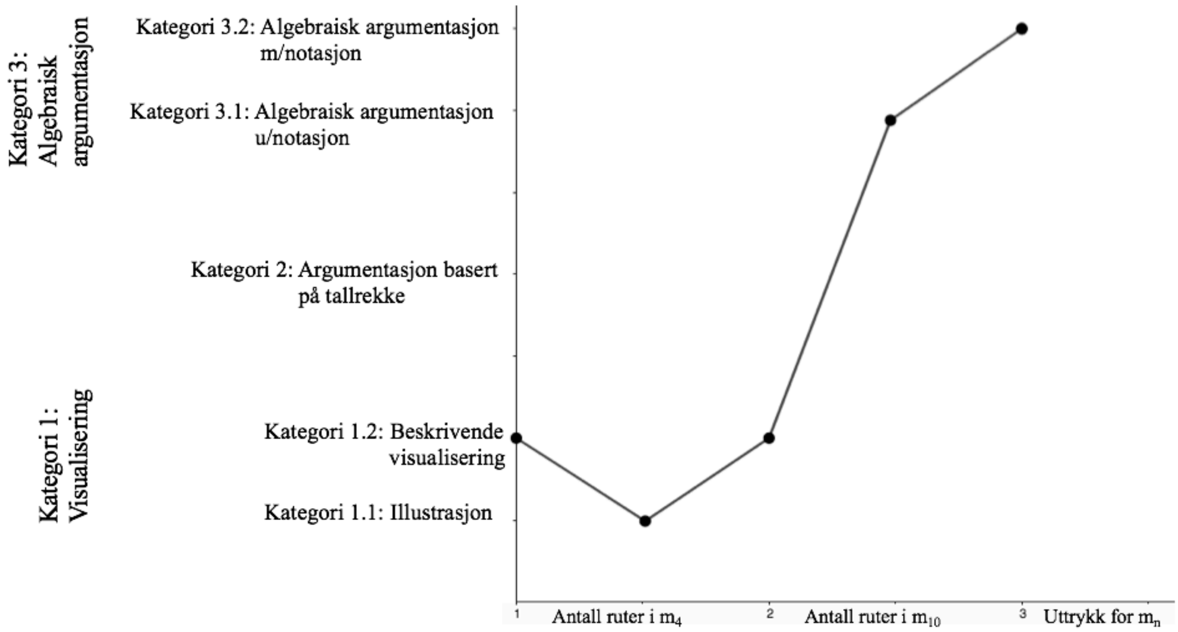
Figur 8 - Tommy og Maris valgte strategier i løsningsprosessen

5.1.4 Lisa og Andreas



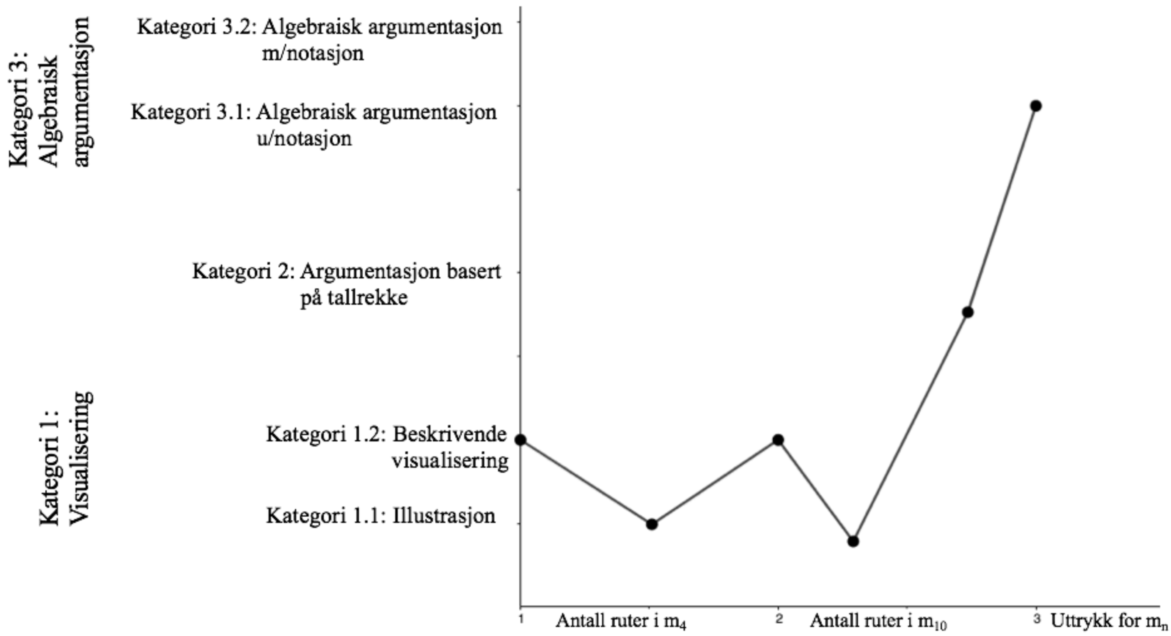
Figur 9 - Lisa og Andreas´ valgte strategier i løsningsprosessen

5.1.5 Sara og Ida



Figur 10 - Sara og Idas valgte strategier i løsningsprosessen

5.1.6 Per og Siri



Figur 11 - Per og Siris valgte strategier i løsningsprosessen

5.2 Elevenes generaliseringsprosess

Det er store forskjeller i generaliseringsprosessen til informantene, men det er en tydelig tendens til at gruppene går fram og tilbake mellom strategiene i arbeid med oppgavene. Ingen grupper går tilbake til å bruke samme strategi i samme oppgave, men noen velger å gå tilbake i en annen oppgave å benytte seg av samme strategi.

Halvparten av parene starter sine resonneringer med å bruke en strategi som havner i kategori 1, men ingen på kategori 3. Dette kan være naturlig da de første oppgavene ikke krever spesifikt bruk av generalitet for å besvares, og gruppene velger kanskje derfor å bruke den visuelle utviklingen til figurene til å besvare disse fremfor å generalisere først. Denne tendensen er beskrevet av Harel og Sowder (1998) som sier at elevenes bevisførsel er i stor grad empirisk basert. Oppgaveformen er i tråd med det Silver og Stylianides (2009) beskriver som resonnerings-og-bevis-aktiviteter, og det å kunne identifisere et mønster er en essensiell komponent i denne aktiviteten. Det var derfor forventet at informantenes resonnering fram mot en løsning, særlig i de første to oppgavene, skulle være basert på observasjoner av mønsteret.

Frode og Kaja (se tabell 1) var de eneste som ikke var innom strategier fra kategori 3. De sa seg fornøyd med resonneringen sin ved å gjøre om antall ruter til en tallrekke som utgangspunkt og beskrev en følgeformel for å besvare oppgave 3. Dette henger sammen med det Radford (2010) beskriver om aritmetisk generalisering der de klarer å oppdage sammenhengen i en sekvens, men ikke bruke den til å lage et generelt uttrykk for hvilken som helst figur i sekvensen.

Fordi elevenes kognitive prosesser ikke er som en åpen bok er det vanskelig å definere hvilken type resonnering de bruker. I følge Lithner (2008) er imitative resonneringer er dominerende og kreative en sjeldenhet, og det kan derfor være naturlig å tenke at resonneringen må være basert på imitativ resonnering. Elevene viser i intervjusekvensen ingen tegn til at deres strategi er valgt ut fra noe de har kjennskap til fra før. Likevel starter alle med å enten se på utviklingen av figurenes utseende eller utviklingen av antall ruter i hver figur. Uten å ha kjennskap til figurmønster vil det være naturlig å angripe oppgaven ved å se på den generelle utviklingen for å i første omgang finne neste figur, som er tilfellet i denne oppgaven. Det er derfor vanskelig å si om dette er på bakgrunn av kjennskap til figurmønster, eller fordi det er en naturlig del av oss som mennesker å uttrykke generalitet (Mason, m.fl., 2014).

Oppgave 3 krever et spesifikt uttrykk for generaliseringen, og elevene som brukte strategien beskrevet som kategori 3.1 og 3.2 viser ingen tegn til imitativ resonnering. Elevene som kom til kategori 3.1 klarte ikke å bruke algebraisk notasjon da de beskrev det generelle uttrykket, mens de som er kategorisert til 3.2 brukte algebraisk notasjon. Det er likevel et fellestrekk i disse strategiene, der det i denne delen av løsningsprosessen gjenkjennes alle tre kriterier som Lithner (2008) sier skal være oppfylt for at resonneringen skal kunne klassifiseres som kreativ. *Novelty* er det første kriteriet som handler om at strategiene valgt er ny for den som resonnerer, som i dette tilfellet er elevene, og det så ut til at det å bruke figurnummeret som utgangspunkt var ukjent for elevene i en generalisering av et visuelt figurmønster. Alle uttrykkene elevene presenterte var i form av uttrykk for de ulike delene av figuren og representerte sammenhengen med figurnummeret, enten med bruk av algebraisk notasjon eller en muntlig beskrivelse med bruk av de matematiske begrepene. Fordi elevene argumenterte for uttrykket ved å henvise til sammenhengen mellom figurnummeret og de ulike delene av figuren oppfylles det andre kriteriet *plausibility*, som handler om at argumentene blir begrunnet med hvorfor konklusjonen er sann eller sannsynlig. Det siste kriteriet er *mathematical foundation*, som krever at resonneringen er basert på matematiske egenskaper. For at resonneringen ikke skal være basert på matematiske egenskaper må den slik Knuth, m.fl. (2009) og Russell, m.fl. (2011) beskriver i sitt nivå 0 og 1 være basert på henvisning til en autoritet, noe som ikke er tilfellet her. Som tidligere beskrevet virket det som om det var nytt for elevene å bruke sammenhengen mellom visuell figur og figurtall for å lage et generelt uttrykk. Dette tyder på at imitativ resonnering ikke var mulig, og dermed kan klassifiseres som kreativ..

Både English og Warren (1998), Lannin (2005) og Radford (2010) beskriver sine funn fra egen forskning som en hierarkisk kategorisering av elevers generaliseringsstrategier. Inndelingen er basert på grad av generalitet som inkluderes i den valgte strategien, men ingen av de sier noe om at helheten i prosessen kan vise til at valg av strategi er mer flytende enn slik den blir framstilt. I denne studien kommer det tydelig fram at elevene veksler fram og tilbake mellom valg av strategi. Dette kan forklares ved kravet om verbalitet fra elevene. Botten (2016) sier at å kommunisere matematikk er et læringsmål i seg selv og ved å kommunisere utvikler man en forståelse for hvordan man argumenterer og resonnerer i matematikken. I mine funn tyder det på at kommunikasjonen det ble lagt føringer for gjorde elevene bevisste over egen argumentasjon slik at de var avhengig av å gå fram og tilbake i generaliseringsprosessen for å kunne forbedre argumentene og slik gi en grundigere argumentasjon for sine løsninger.

Matematisk kompetanse, slik den er beskrevet av Utdanningsdirektoratet (2013), innehas blant annet ved å kunne bruke problemløsning, omforme et problem til matematisk form, løse det og vurdere gyldigheten ved det. I denne oppgaven ble elevene presentert for en problemløsningsoppgave der de var avhengig av å omforme figurene til matematisk form for å kunne løse oppgaven, og videre har de argumentert for gyldigheten ved løsningen sin. Ellis (2007) sier at elever som tidlig utvikler en forståelse for generalitet vil få et sterkere grunnlag for å senere få algebraisk forståelse. Alle gruppene viser til en forståelse av generaliteten i mønsteret, men har ulike forutsetninger når det kommer til å kunne uttrykke denne generaliteten. Radford (2010) viser til Kieran (1989) som sier at arbeid med generalisering av mønster er en vei til å lære algebra. På denne måten kan man si at de fleste elevene viser matematisk kompetanse med algebraisk forståelse, og at arbeid med oppgaver som denne kan legge føringer for en mer omfattende og grundigere forståelse i senere arbeid med matematikk.

Det viktigste som fremkommer i mine funn er generaliseringen elevene gjør. Tabell 1 viser at fem av seks grupper klarer å generalisere med hensyn på det generelle i det spesielle og argumenterer for algebraiske uttrykk som gjør at de kan finne hvilken som helst figur i et uendelig figurmønster. Likevel gjør ikke flere av gruppene dette før de blir bedt om det i oppgave 3, noe som tyder på at elevene ikke alltid klarer eller prioriterer å vise hele forståelsen sin med mindre det spesifikt stilles krav til dem. I de tidligere oppgavene viser de til at de forstår det generelle i figurmønsteret, men så stopper det der og de bruker ikke denne kunnskapen de åpenbart sitter inne med for å besvare disse oppgavene. Jeg vil derfor si at det er viktig å stille seg selv noen spørsmål, ikke bare til lignende oppgaver, men også generelt i undervisningssituasjoner: Er dette elevenes fulle potensial? Innehar de kompetanse og forståelse som er dypere enn det de klarer å vise? Hva kan gjøres for at de skal få vist sin fulle forståelse? Dette er noe som ikke belyses i tidligere presentert teori, og kan være viktig å tenke på i en eventuell videre undersøkelse og særlig noe jeg selv vil ha i bakhodet senere i arbeidslivet.

6 Avslutning

6.1 Oppsummering

I denne masteroppgaven har formålet vært å besvare forskningsspørsmålet: «Hva kjennetegner generaliseringsprosessen til ungdomsskoleelever i arbeid med figurmønster?». For å gjøre dette har jeg gjennomført et oppgavebasert intervju med et utvalg ungdomsskoleelever der de ble presentert for en figurmønsteroppgave utformet etter English og Warren (1998) sin beskrivelse av typiske figurmønsteroppgaver. De skulle også arbeide med et spill som har en vinnende strategi, der spillestrategien er generaliserbar. Jeg tok videoopptak av intervjusekvensene for å sikre riktig fremstilling av informantenes løsningsprosess, og de ble oppfordret til å «tenke høyt» gjennom hele intervjuet. Arbeidet foregikk også parvis for å gjøre situasjonen mest mulig komfortabel for informantene og for at det skulle bli mer naturlig å resonnere høyt omkring arbeidet. Jeg gikk i etterkant av intervjuene nøye gjennom dem og transkriberte både verbale og nonverbale signaler. I gjennomgangen av transkripsjonene innså jeg at dataen innsamlet fra spillet ikke ga innholdsrik informasjon. Figurmønsteroppgaven hadde større variasjon og sa mer om løsningsprosessen til informantene, og jeg avgrenset dermed datamaterialet til å videre i analysen bare fokusere på dette.

Videre startet en tematisk, induktiv analyse der jeg først gjorde en beskrivelse av hva hver enkelt gruppe gjorde gjennom hele prosessen, før jeg til slutt markerte alle utsagn fra transkripsjonene med en generell beskrivelse av hva som ble gjort. Jeg satte disse beskrivelsene inn i et skjema og så flere beskrivelser representerte den samme argumentasjonen. Ved å sammenfatte de like beskrivelsene endte jeg opp med fem koder som representerte kjennetegn på ulike løsningsstrategier informantene brukte gjennom løsningsprosessen. Samtlige grupper brukte de samme strategiene, der ingen hadde særegne strategier som bare ble brukt i deres løsningsprosess. To og to av disse fem kodene antydet å representere det samme, men med ulike tilnærminger. Den endelige kategoriseringen ble tre hovedkategorier, der to av dem hadde to underkategorier.

Kategoriene viste til fem typiske løsningsstrategier informantene brukte; *illustrasjon*, *beskrivende visualisering*, *argumentasjon basert på tallrekke*, *algebraisk argumentasjon uten notasjon* og *algebraisk argumentasjon med notasjon*. Illustrasjon og beskrivende visualisering tilhører hovedkategorien visualisering, mens algebraisk argumentasjon uten og med notasjon tilhører hovedkategorien algebraisk argumentasjon. Illustrasjon, beskrivende visualisering og argumentasjon basert på tallrekke var løsningsstrategier informantene brukte som var empirisk basert. Med dette menes at argumentasjonen bak strategiene var basert på informasjon fra figurene presentert i oppgaven, med ingen tilhørende gyldig argumentasjon.

Under kategorien *illustrasjon* ble det tegnet en figur som representerte en senere figur i figurmønsteret, og argumentasjonen var basert på den visuelle utviklingen figurene presentert i oppgaven hadde. I *beskrivende visualisering* argumenterte de for løsningen ved å henvise til den visuelle utviklingen i figurmønsteret i oppgaven uten å tegne den. De pekte og beskrev utviklingen, for eksempel «utvider seg med en her» og «øker med en her». Den siste empirisk baserte løsningsstrategien var *argumentasjon basert på tallrekke*. Her manipulerte de figurene til en tallrekke, der hvert ledd beskrev antall ruter i hver figur. Mønsteret i tallrekken ble brukt for å beregne seg fram til senere figurer. I *algebraisk argumentasjon uten notasjon* og *algebraisk argumentasjon med notasjon* ble forholdet mellom figuren og figurtallet brukt som argumentasjon. Forskjellen på disse er enten en beskrivelse av en algebraisk argumentasjon, eller et fullstendig algebraisk uttrykk med notasjon. Algebraisk argumentasjon uten notasjon ble av halvparten brukt for å finne figur m_{10} eller argumentere for løsningen av figur m_{10}, mens med notasjon ble begrenset til oppgave 3. Disse kategoriene beskriver i hovedsak hvilke strategier elevene brukte i generaliseringsprosessen, og ble videre sett opp mot tidligere forsknings rammeverk og beskrivelser av løsningsstrategier.

Kjennetegn i den sammensatte løsningsprosessen til elevene på vei mot en generalisering viste at samtlige, med ett unntak, viste til generalisering på algebraisk nivå. Likevel var argumentasjonen for løsningen på den første oppgaven empirisk basert av alle, og halvparten fortsatte med empirisk baserte på neste oppgave. Tidligere forskning sier at elevers bevisførsel i stor grad er empirisk basert, så det var derfor forventet at dette skulle forekomme. Først på siste oppgave ble algebraisk argumentasjon benyttet av alle de som brukte det i prosessen. Det var også bare denne oppgaven som spesifikt ba om et generelt uttrykk. De fleste benyttet samme løsningsstrategi flere ganger. I følge Lithner (2008) er kreative resonneringer sjeldne, men i denne løsningsprosessen viste elevene til dette da de oppfylte kravene han har satt for å kunne karakterisere resonneringen som kreativ.

Generaliseringsprosessen viste også til noe jeg anså som svært viktig; halvparten av elevene brukte ikke generaliteten i figurmønsteret før oppgaven krevde det, og de halvparten som gjorde det viste det ikke før i sluttfasen på oppgave 2. Åpenbart hadde nesten samtlige kompetansen til å kunne beskrive generaliteten i figurmønsteret algebraisk, og hva som gjør at de ikke bruker gyldige argumentasjoner fra dette for å besvare oppgavene fra starten av er uvisst.

6.2 Hva kjennetegner generaliseringsprosessen?

Forskningsspørsmålet mitt er «Hva kjennetegner generaliseringsprosessen til ungdomsskoleelever i arbeid med figurmønster?». I denne studien kom det fram at elevenes resonneringer i løsningsprosessen var kreative, slik den er beskrevet av Lithner (2008). Ingen av gruppene hadde felles generaliseringsprosess og de fleste var innom flere ulike strategier i arbeid med en oppgave. Likevel var det fellestrekk mellom strategiene de har valgt, der ingen grupper hadde en særegen strategi for sin generaliseringsprosess. Prosessen var også varierende og parene gikk fram og tilbake mellom ulike empirisk baserte strategier i oppgaveløsningen, før de i den avsluttende oppgaven benyttet seg av strategier som argumenterte mer generelt.

Et kjennetegn i generaliseringsprosessen er at parene brukte for det meste empirisk baserte argumentasjoner og resonneringer i ulike variasjoner, med mindre det ble spesifisert større grad av generalitet i oppgaven. Først da tok de steget videre for å undersøke det mer generelle i figurmønsteret og de fleste klarte å ende opp med et fullstendig algebraisk uttrykk. De viste da til argumentasjoner som tar for seg det generelle i et spesielt figurmønster, og på den måten viser algebraisk tankegang og matematisk kompetanse.

For å besvare forskningsspørsmålet kan man si at for utvalget forskningen er gjort på kjennetegner generaliseringsprosessen til elevene at de klarer å generalisere på et høyt nivå. De fleste bruker algebraisk notasjon eller gir en beskrivelse av det algebraiske uttrykket uten å spesifikt bruke notasjoner, men heller gjennom et muntlig språk. Dette gjør de ikke før det står spesifikt i oppgaven, som viser til at de ikke viser kompetansen de sitter inne med, eller ikke orker, når det finnes en enklere måte å gjøre det på. I oppgaver som ikke spesifikt krever argumentasjon av generaliteten i figurmønsteret tegnet de illustrasjoner eller beskrev en illustrasjon ved å peke eller lignende for å finne utvalgte figurer. I tillegg manipulerte de figurene til en tallrekke, og bruke videre mønsteret i denne til å argumentere for svaret på oppgaven. Siden de bruker empirisk baserte argumentasjoner for å finne antall ruter i utvalgte figurer kan man si; et annet kjennetegn er at de ikke ser behovet for et mer generelt argument for hvorfor svaret er riktig der det ikke blir bedt om det i oppgaven.

Det jeg har funnet ut er viktig fordi i et av kjerneelementene i den nye læreplanen, som trer i kraft i 2020, står det spesifikt at elevene skal forstå at matematiske resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. Den sier også at elever bør oppdage sammenhenger og strukturer selv for å forstå representasjon og fremgangsmåter. I tråd med dette og med mine funn er det tydelig at dette ikke er gjennomgående, og det er altså et behov for et større fokus på at elever må argumentere for gyldigheten av svarene sine. Det er også viktig å få fram at resultatene er for et lite utvalg ungdomsskoleelever, slik at disse funnene trenger ikke å være representativ for hele gruppen ungdomsskoleelever. Det trengs derfor videre forskning på temaet for å bedre kunne si noe mer generelt.

6.3 Veien videre

I denne studien har jeg satt lys på hvilke løsningsstrategier ungdomsskoleelever velger i arbeid med generalisering av et figurmønster. Jeg har vist at for et lite utvalg velger de ikke å bruke argumentasjoner som støttes av generaliteten i mønsteret, men viser at de vet hvordan de generaliserer når oppgaven først ber om generalisering. Kjennetegn for generaliseringsprosessen er altså at empirisk baserte strategier er dominerende med mindre det spesifiseres krav i oppgaven om mer gyldig argumentasjon av generaliteten i mønsteret. Utvalget i prosjektet er begrenset, og det trengs en mer omfattende forskning for å si om dette gjelder for et større utvalg. En videre forskning bør inkludere et større antall elever for å finne ut om kategoriene og generaliseringsprosessen denne studien viser til også kan beskrive et større omfang. I tillegg kan man inkludere ulike variasjoner av mønsteroppgaver eller andre generaliseringsoppgaver for å se om empirisk baserte argumentasjoner fortsatt er dominerende. Prosjektet har lært meg at det kan være et behov for elevene å bli bevisst på hvorfor ulike argumentasjoner ikke er gyldige, og hvordan de kan argumentere for svarene sine slik at de er mer håndfaste. Dette er noe jeg ser på som nyttig for meg som lærer og noe jeg vil ta med meg i arbeidslivet nå etter endt studietid.

Litteraturliste

Balacheff, N. (1988). Aspects of Proof in Pupils' Practice of School Mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216-235). London: Hodder & Stoughton.

Bergem, O., K. (2016) Hovedresultater i matematikk. I O. K, Bergem, H. Kaarstein, & T. Nilsen (Red.), *Vi kan lykkes i realfag: Resultater og analyser fra TIMSS 2015* (s. 22-43). Universitetsforlaget.

Bjørndal, C., R., P. (2011). *Det vurderende øyet: observasjon, vurdering og utvikling i undervisning og veiledning* (2. utg., 3. opplag). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Botten, G. (2016). *Matematikk med mening – mening for alle*. Bergen: Caspar Forlag.

Caelli, K., Ray, L. & Mill, J. (2003). 'Clear as mud': Toward Greater Clarity in Generic Qualitative Research. *International journal of qualitative methods, 2*(2), 1-13.

Chapin, S., H., O'Connor, C. & Anderson, N., C. (2009). *Classroom Discussions: Using math talk to help students learn, Grades K-6.* Sausalito, California: Math Solutions.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8. utg.). London: Routledge.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny Can't Prove. *Educational Studies in Mathematics, 38*(1), 85-109. Hentet 10.05.2019 fra https://doi.org/10.1023/A:1003660018579

Ellis, A., B. (2007). Connections Between Generalizing and Justifying: Students' Reasoning with Linear Relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 194-229.

English, L., D., & Warren, E., A. (1998). Introducing the Variable through Pattern Exploration. *Mathematics Teacher*, *91*(2), 166-170.

Goldin, G., A. (1997). Chapter 4: Observing mathematical problem solving through task-based interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *9*, 40-177.

Grønmo, S. (2016). *Samfunnsvitenskapelige metoder*. (2. utg.) Bergen: Fagbokforlaget.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. I A. H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Red.), *Research on Collegiate Mathematics Education. Vol. 3* (s. 234-283). Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.

Hersh, R. (2009). What I Would Like My Students to Already Know About Proof. I D., A. Stylianou, M., L. Blanton, & E., J. Knuth (Red.), *Teaching and learning proof across the grades: a K-16 perspective* (17-20). London og New York: Routledge.

Hovik, E., K. & Solem, I., H. (2016). Bevis og generalisering i skolen - utfordringer og muligheter. I E., K. Hovik & B. Kleve (Red.) *Undervisningskunnskap i matematikk*. (s. 46-60). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It. *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Koichu, B. (2014). Reflections on Problem-Solving. I M., N. Fried (Red.), *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground* (s. 113-135). Dordrecht: Springer.

Knuth, E., J., Choppin, J., M. & Bieda, K., N. (2009). Middle School Students' Production of Mathematical Justifications. I D., A., Stylianou, M., L. Blanton & E., Knuth (Red.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 Perspective* (s. 153-170). London og New York: Routledge.

Kunnskapsdepartementet. (2010). *Realfag for framtida. Strategi for styrking av realfag og teknologi 2010-2014* [Strategi]. Hentet 03.05.2019 fra https://www.regjeringen.no/globalassets/upload/kd/realfagstrategi.pdf

Kunnskapsdepartementet. (2016) *Fag – Fordypning – Forståelse: En fornyelse av Kunnskapsløftet.* (Meld. St. 28 2015-2016). Hentet 01.05.2019 fra https://www.regjeringen.no/contentassets/e8e1f41732ca4a64b003fca213ae663b/no/pdfs/stm201520160028000dddpdfs.pdf

Kunnskapsdepartementet. (2018a, 26. juni). *Fornyer innholdet i skolen* [Pressemelding]. Hentet 01.05.2019 fra https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/fornyer-innholdet-i-skolen/id2606028/?expand=factbox2606058

Kunnskapsdepartementet. (2018b, 26. juni). *Kjerneelementer i fag*. Hentet 02.05.2019 fra https://www.regjeringen.no/contentassets/3d659278ae55449f9d8373fff5de4f65/kjerneelementer-i-fag-for-utforming-av-lareplaner-for-fag-i-lk20-og-lk20s-fastsatt-av-kd.pdf

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Lannin, J., K. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258. DOI: https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3

Lee, L. (1996). An Initiation into Algebraic Culture Through Generalization Activities. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching. Vol. 18* (s. 87-106). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem Solving and Modeling. I F., K. Lester (Red.), *Second handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Vol.* 2 (763-804). Charlotte, North Carolina: Information Age Publishing.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 255-276.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2014). *Å lære algebraisk tenkning*. Bergen: Caspar forlag. Oversatt til norsk av Johan Lie.

NESH. (2016). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi. Hentet 10.05.2019 fra https://www.etikkom.no/globalassets/documents/publikasjoner-som-pdf/60125_fek_retningslinjer_nesh_digital.pdf

Niss, M. & Jensen, T., H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18 – 2002). København: Undervisningsministeriet.

Norsk senter for forskningsdata. (u.å.) *Våre brukere.* Hentet 11.05.2019 fra https://nsd.no/personvernombud/brukere.html

Nortvedt, G., A. & Pettersen, A. (2016). Matematikk. I M. Kjærnsli & F. Jensen (Red.), *Stø kurs: Norske elevers kompetanse i naturfag, matematikk og lesing i PISA 2015* (s. 107-133). Universitetsforlaget.

Percy, W., Kostere, K. & Kostere, S. (2015). Generic Qualitative Research in Psychology. *The Qualitative Report, 20*(2), 76-85.

Petersen, I. J. (2015). *Hvordan kan elevers ferdigheter i algebra måles detaljert? En kvalitativ kartlegging av 215 elever på tiende trinns ferdigheter i algebra* (Masteravhandling). Hentet 11.05.2019 fra http://hdl.handle.net/10037/8120

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Radford, L. (2010). Layers of Generality and Types of Generalization in Pattern Activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Rivera, F., D. & Becker, J., R. (2005). Teacher to Teacher: Figural and Numerical Modes of Generalizing in Algebra*. Mathematics Teaching in the Middle School, 11*(4), 198-203.

Russell, S., J., Schifter, D. & Bastable, V. (2011). *Connecting Arithmetic to Algebra: Strategies for Building Algebraic Thinking in the Elementary Grades*. Portsmouth, New Hampshire: Heinemann.

Schoenfeld, A., H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. I D. Grouws (Red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (s. 334-370). New York: MacMillan.

Silver, E., A. (1997). Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *ZDM, 29*(3), 75-80.

Silver, E., A. & Stylianides, G., J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics. The case of pattern identification. I D., A., Stylianou, M., L. Blanton & E., Knuth (Red.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 Perspective* (s. 235-248). London og New York: Routledge.

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse: En innføring i kvalitative metoder* (5. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Tjora, A. (2017). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (3. utg.). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag* (MAT1-04). Hentet 01.05.2019 fra http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf

Waring, S. (2000). *Can you prove it? Developing Concepts of Proof in Primary and Secondary Schools*. Leicester: The Mathematical Association.

Vedlegg 1 – Informasjonsskriv og samtykkeskjema

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet Matematisk generalisering og bevisproduksjon

I forbindelse med min avsluttende studietid på lærerstudiet ved Universitetet i Tromsø, Institutt for lærerutdanning og pedagogikk, skal jeg skrive en mastergradsoppgave.
I denne mastergradsoppgaven vil jeg undersøke elevers tenking i arbeid med generalisering og bevisproduksjon.

Skolen som studien gjennomføres på er tilfeldig valgt. Elever som blir forespurt om å delta i studien er valgt ut i samarbeid med den aktuelle skolen.

Hva innebærer deltakelse i studien?
Deltakelse i studien innebærer at elevene parvis deltar i et oppgavebasert intervju, med en varighet på 45-60 minutter. Elevene vil bli presentert for en oppgave og et spill, som de skal jobbe med sammen. Elevene blir bedt om å «tenke høyt» i løsningsprosessen, altså fra oppgaven og spillet blir presentert til en eventuell løsning blir gitt.

Det gjøres filmopptak av intervjusekvensen, for å registrere elevenes respons. Dette gjøres for å lette mitt arbeid i etterkant. Innsyn i opptakene vil være forbeholdt undertegnede og veileder på masterprosjektet.

Dersom foreldre ønsker, kan intervjuguide forevises ved forespørsel pr. mail, før eventuelt samtykke om elevens deltakelse i studien gis.

Frivillig deltakelse
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke, uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg vil alle opplysninger om deg bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det er bare jeg og veileder som vil ha tilgang på opplysninger. Videoopptak og personopplysninger vil bli innelåst. Du vil heller ikke kunne gjenkjennes i publikasjonen.

Hva skjer med informasjonen om deg?
Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Filmopptakene vil oppbevares innelåst og adskilt fra andre personopplysninger (alder, skole).

De eneste personopplysningene som er relevant for prosjektet, er elevens alder. Informasjon som brukes i min masteravhandling, vil være anonymisert, og deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjonen.
Prosjektet skal avsluttes 15.05.2019, og all data vil da bli destruert.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- Innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg
- Å få rettet personopplysninger om deg
- Få slettet personopplysninger om deg
- Få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet)
- Å sende en klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler personopplysninger om deg basert på ditt samtykke.

Spørsmål om studien kan rettes til

Susan Madeleine Kalseth
(masterstudent)
Telefon: 45807164
E-post: skr065@uit.no

Ove Gunnar Drageset
(veileder)
Telefon: 77660274
E-post: ove.gunnar.drageset@uit.no

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Matematisk generalisering og bevisproduksjon*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ å delta i gruppeintervju
☐ at lærer kan gi opplysninger om meg til prosjektet

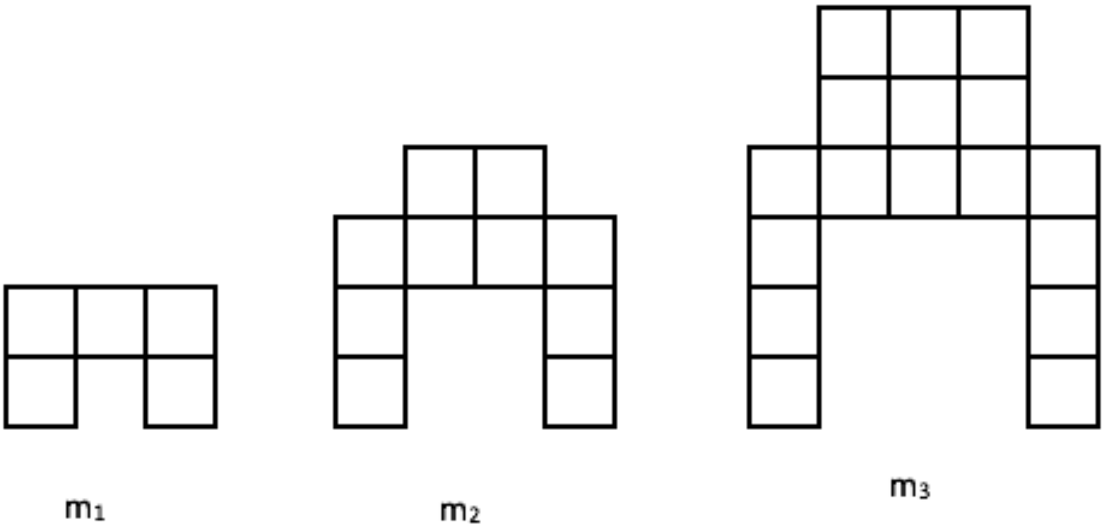
Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, 15.05.2019

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

(Signert av prosjektdeltakers foresatte, dato)

Vedlegg 2 - Oppgaver

DEL 1 - FIGURMØNSTER



Oppgave 1:

Hvor mange ruter er det i figur m_4?

Oppgave 2:

Hvor mange ruter er det i figur m_{10}?

Oppgave 3:

Lag et uttrykk for å finne figur nummer m_n

DEL 2 - SJETONGSPILLET

Spillets regler:

Vi har 13 sjetonger, det er annenhver sin tur å trekke 1-3 brikker. Den som trekker den siste sjetongen vinner.

Oppgave 1:

Hvem vil begynne spillet? Hvorfor?

Har det noe å si?

Oppgave 2:

Hvilken strategi bruker dere for å vinne spillet?

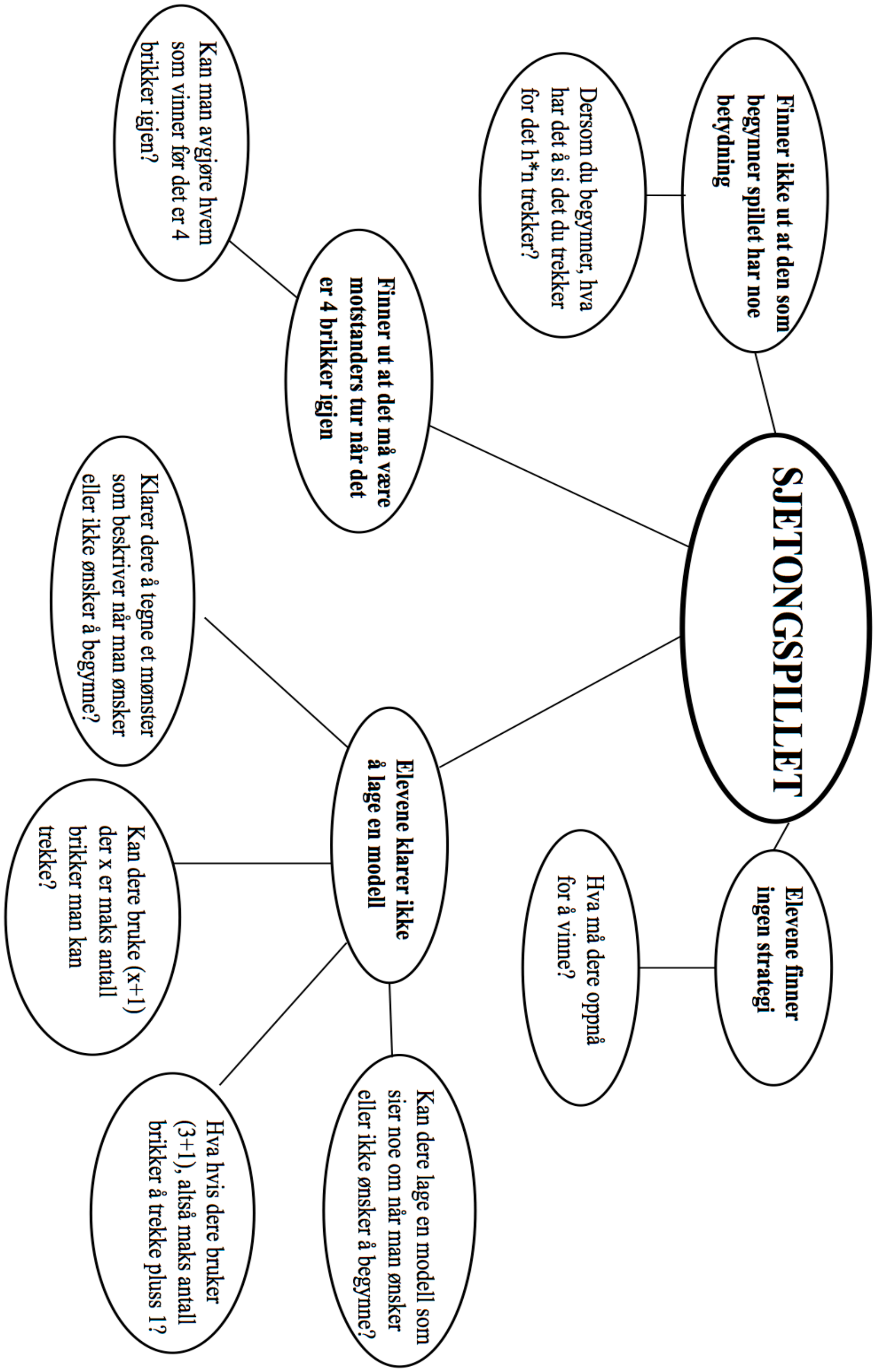
Oppgave 3:

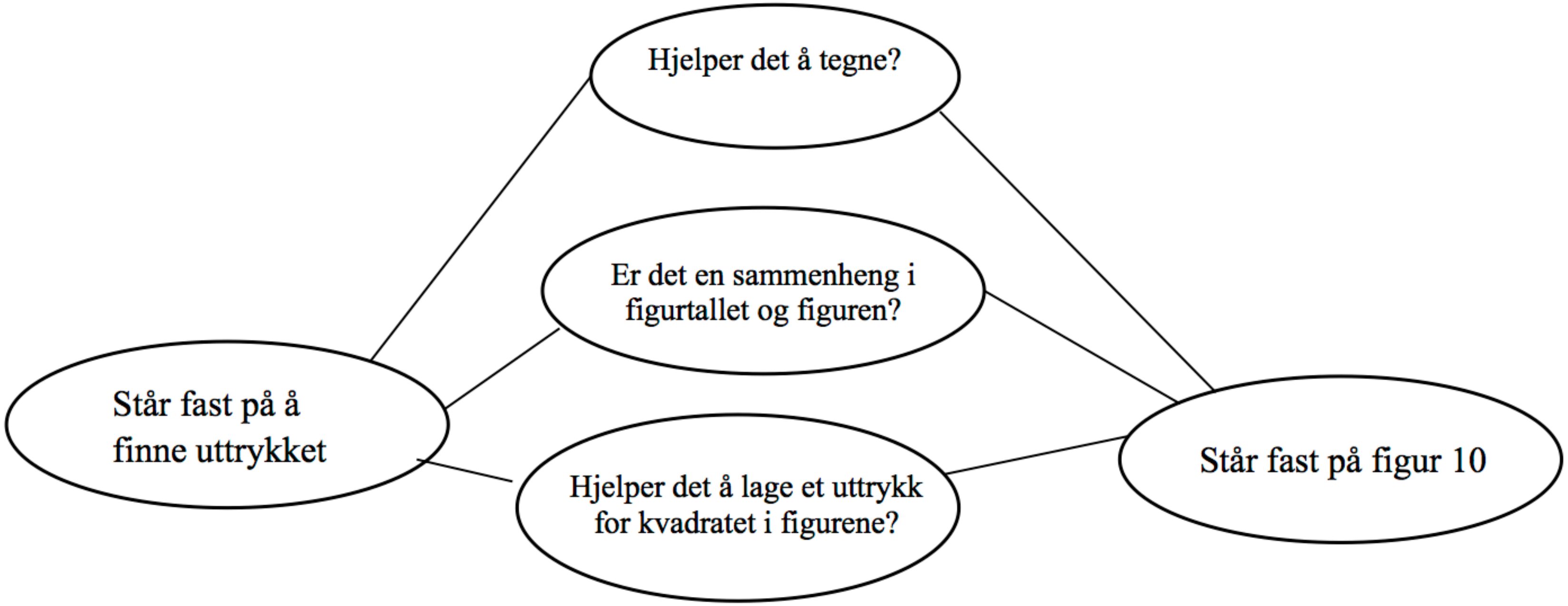
Kan dere lage en modell som viser hvordan man vinner hver gang?

Oppgave 4:

Kan dere lage en modell som viser hvordan man vinner hver gang, uavhengig av hvor mange brikker man trekker?

Vedlegg 3 – Forhåndsbestemte spørsmål til intervju





Konsekvente spørsmål:

- Hva tenker dere?
- Hva tror dere?
- Hvorfor gjorde dere slik?

FIGURMØNSTER

Vedlegg 4 – 1. utkast av kategorisering

Kategori	**Hva gjorde elevene?**
Visuell framstilling	Tegner neste figur Tegner figur 10 Tegner for å vise det de prøver å beskrive En elev tegner figurene under individuelt arbeid
Beskrivende framstilling	 Beskriver den generelle utviklingen til den visuelle figuren (Det øke med en nedover, en i bredden og en oppover bort, liksom hvis det gir mening, på hver) Beskriver den generelle utviklingen til den visuelle figuren (Det blir en lengre i bredden, der øke det med 1, legges 3 oppå i høyden)
Beskrivende framstilling av visuell utvikling	Beskriver utviklingen i den visuelle figuren med ord (bruker ord som øker i lengden, en rad til her oppe) Beskriver utviklingen til den visuelle figuren med ord (bruker ord som øke med 1 her og der, rundt sånn) Beskriver utviklingen til den visuelle figuren med ord (bruker ord som en høyere)
Argumentasjon basert på det generelle	Beskriver med ord det som er den algebraiske notasjonen for uttrykket, bruker ikke algebraiske begreper, men bruker heller «nummeret» om figurtallet
Algebraisk framstilling (argumentasjon) av det generelle	Beskriver sammenhengen mellom figurtall og kvadrat med å bruke algebraisk notasjon Beskriver sammenhengen mellom figurtall og «beina» på figuren med å bruke algebraisk notasjon Beskriver hvordan figurtallet og figuren henger sammen, og gir et algebraisk uttrykk for figur n Bruker algebraisk notasjon for å beskrive sammenhengen mellom figurtall og figur, og ender da opp med et algebraisk uttrykk

Argumentasjon basert på det generelle i det visuelle	Beskriver sammenhengen mellom figurtall og kvadrat Beskriver sammenhengen mellom figurtall og kvadrat Bruker det visuelle (tidligere figurer) for å argumentere for sin teori om at uttrykket for «beina» på figuren er en mer enn figurtallet Beskriver sammenhengen mellom figurnummeret og figuren, både kvadratet og beina Beskriver kvadratet, men uvisst om det er med bakgrunn i figurtall. Beskriver senere kvadratet med bakgrunn i figurtall, og bruker også figurtall-figur-sammenheng for å beskrive beina på figuren Beskriver kvadratet med utgangspunkt i en tidligere figur og figurtallet
Irrelevant/ikke-kategorisert	
Ufullstendig argumentasjon/resonnering	Avbrytes eller avslutter en løsningsprosess fordi den ikke gir tilfredsstillende svar eller kommer noen vei
Argumentasjon basert på antall ruter	Beskriver utviklingen i antall ruter, uten å henvise til figur Argumenterer for svar på oppgave 1 ved å beskrive utviklingen i antall ruter uten å henvise til figur Argumenterer for svar på oppgave 2 ved å ha beregnet seg fram til svaret ved å bruke mønsteret i økningen av antall ruter Teller ruter i figurene, og ser mønsteret i økningen av antall ruter. Beskriver utviklingen i antall ruter fra figur til figur, og bruker denne utviklingen for å argumentere sitt svar på oppgave 1 Baserer svaret sitt i oppgave 3 på at figuren øker med 2 fra forrige figur

Beregning	Beregner seg frem til figur 10 ved bruk av deres tidligere funn av utvikling av antall ruter Beregner figur 10 for å sjekke teorien sin om sammenheng mellom figurtall og figur (oppdager her feil) Beregner seg frem til figur 10 ved bruk av deres tidligere funn av utvikling av antall ruter og vet at teorien stemmer fordi de har sjekket med visuell argumentasjon
Sjekke svar	Har en teori n*5, men innser på figur 3 at det er ikke holder
Visuell argumentasjon	Baserer svaret sitt i oppgave 1 ved å telle ruter i tegningen sin Sjekker sin teori fra argumentasjon basert på antall ruter ved å tegne neste figur. Beskriver en måte å finne neste figur på ved å peke til hvordan figuren utvikler seg og ønsker å uttrykke seg slik på oppgave 3 Skriver opp som en pyramide tallene som neste figur skal bestå av, eksempel 4 4 4 6 2 2 2 2 Argumenterer for at svaret er riktig ved å henvise til tidligere lik utvikling i de tidligere figurene Beskriver figur 10 med utgangspunkt i mønsteret til de tidligere figurene for å argumentere for svaret sitt
Visuell argumentasjon med algebraisk notasjon	Lager et algebraisk uttrykk basert på figurtallet i figuren og viser til tidligere figurer for å støtte opp om sitt svar

Vedlegg 5 – Godkjenning fra NSD

NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

NSD sin vurdering

Prosjekttittel

Forskningsprosjekt om matematisk generalisering og bevisproduksjon

Referansenummer

597048

Registrert

08.01.2019 av Susan Madeleine Kalseth - skr065@post.uit.no

Behandlingsansvarlig institusjon

UiT Norges arktiske universitet / Fakultet for humaniora, samfunnsvitenskap og lærerutdanning / Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Ove Gunnar Drageset, ove.gunnar.drageset@uit.no, tlf: 77660274

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Susan Madeleine Kalseth, susanmk@live.no, tlf: 45807164

Prosjektperiode

01.01.2019 - 15.05.2019

Status

07.02.2019 - Vurdert

Vurdering (1)

07.02.2019 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 07.02.2019, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

MELD ENDRINGER
Dersom behandlingen av personopplysninger endrer seg, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. På våre nettsider informerer vi om hvilke endringer som må meldes. Vent på svar før endringer gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 15.05.2019.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20).

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Kajsa Amundsen
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)