Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

En komparativ studie av direkte instruksjon og undersøkende undervisning

En kvasieksperimentell studie om elevers læring i emnet likninger

—

Eirin Utsigt Stenberg

Lærerutdanningen 5.-10.trinn- Masteroppgave i matematikkdidaktikk (LRU-3903)

Mai 2019

Forord

Med denne mastergradsavhandlingen avslutter jeg min femårige lærerutdanning for 5.-10. trinn ved Universitetet i Tromsø- Norges arktiske universitet. Gjennom arbeidet med masteren har jeg fått ny innsikt i sammenhengen mellom undervisning og elevers læring i emnet likninger, og dette er kunnskap jeg i aller høyeste grad vil bringe med meg i min fremtidige yrkesutøvelse.

Jeg vil med dette takke min veileder Per Øystein Haavold for hans engasjement i og veiledning av både det praktiske prosjektet og oppgaven, samt Ove Gunnar Dragset for gode råd og innspill. Jeg vil ikke minst takke elever og lærere for deltakelse; uten dere hadde ikke dette vært mulig. Jeg vil takke mine medstudenter for konstruktive diskusjoner og tilbakemeldinger. Jeg vil spesielt takke min kjære samboer for all støtte han har gitt meg gjennom hele prosessen; du er gull verdt. Sist, men ikke minst, ønsker jeg å dedisere denne avhandlingen til min bestefar Rolf Stener Utsigt som uventet forlot oss for snart ett år siden.

Tromsø, mai 2019
Eirin Utsigt Stenberg

Sammendrag

I mitt mastergradsprosjekt har jeg sammenliknet undervisningsformene direkte instruksjon og undersøkende undervisning, som ofte anses som to motsetninger. Bakgrunnen var den sammensatte og varierte matematikkundervisningen i norske skoler og dårlige resultater i algebra på internasjonale undersøkelser som TIMSS. Jeg la til grunn et pragmatisk syn, som førte frem til et mixed methods design, hvor jeg la størst vekt på den kvantitative delen. Den kvantitative undersøkelsen bestod av en førtest, et toukers undervisningsopplegg i likninger og en ettertest. De kvalitative undersøkelsene innebar å undersøke hvordan elevene opplevde undervisningen og kartlegging av ikke-faglige aspekter.

Den kvantitative undersøkelsen fremviste *signifikante forskjeller* (p=0,045) med moderat effekt (0,51 d) mellom de to gruppenes endring av likningskompetanse, i favør til den undersøkende gruppen. Dette indikerer at undersøkende undervisning kan påvirke elevers læring i emnet likninger *i større grad* enn direkte instruksjon. De kvalitative undersøkelsene indikerer at den undersøkende gruppen sammenliknet med den direkte gruppen hadde en mer positiv opplevelse av undervisningen og et mer positivt syn på matematikk. Funnene indikerer likeledes at den direkte gruppen sammenliknet med den undersøkende gruppen hadde en mer negativ opplevelse av undervisningen og et mer negativt syn på matematikk. Det var imidlertid vanskelig å si hvorvidt elevenes syn på matematikk hadde *endret* seg i løpet av studien, men det kan ha blitt *forsterket*. Funnene indikerer følgelig en sammenheng *innad i hver av gruppene* mellom opplevelse av undervisningen i studien og syn på matematikk. Sett i lys av resultatet på t-testen fremstår det videre som at det finnes en forbindelse mellom disse (syn og opplevelse) og forskjellene mellom gruppenes endringsskår målt via t-testen. *På denne måten* kan undervisningsformene påvirke elevers læring i emnet likninger, og dersom undervisningsformene vedvarer kan de potensielt påvirke fremtidig læring. De ikke-faglige aspektene kjønn og sosioøkonomisk bakgrunn var relativt like for de to gruppene, og det som hovedsakelig skilte de var at undersøkende gruppe hadde høyere terminkarakter i matematikk. Generelt indikerer disse funnene at ikke-faglige aspekter utgjorde en svak alternativ forklaring på elevers læring i emnet likninger, men at terminkarakter i matematikk kan ha hatt en effekt. De kvantitative og kvalitative funnene indikerer samlet at undervisningsform påvirket elevers læring i emnet likninger ved å gi ulike muligheter for å lære. I praksis medfører dette at lærere bør ha et bevisst forhold til undervisningsform.

Innholdsfortegnelse

Figurer

Tabeller

1 Innledning

Denne mastergradsavhandlingen er basert på en kvasieksperimentell studie, hvor jeg sammenliknet undersøkende undervisning og direkte instruksjon med mål om å kunne si noe om sammenhengen mellom undervisning og elevers læring i emnet likninger. I denne avhandlingen gjør jeg rede for hvordan eksperimentet ble utformet, gjennomført og analysert, og drøfter resultatene med utgangspunkt i relevant teori og tidligere forskning.

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Ifølge Alseth, Breiteig og Brekke (2003) undervises norske elever i matematikk ved at læreren starter timen med å gjennomgå hjemmelekser og presentere nytt lærestoff. Hovedfokuset er å vise elevene hvordan en bestemt type oppgave skal løses, etterfulgt av at de selv løser slike oppgaver. Lærestoffet kan i liten grad relateres til elevenes liv, og målet med undervisningen er hovedsakelig at elevene skal tilegne seg spesifikke ferdigheter (Alseth mfl., 2003, s. 115). Bruk av lærebøker har dessuten vært veiledende for den tradisjonelle, lærerstyrte undervisningen i norske skoler (Alseth mfl., 2003, s. 74). Denne beskrivelsen av matematikkundervisning i norske skoler får ytterligere støtte av data innhentet fra TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study), hvor Bergem og Grønmo (2009) fant at norsk matematikkundervisning begrenser seg til teoretisk gjennomgang av lærestoff og individuell oppgaveløsning (s. 124). Bergem og Grønmo (2009) hevder at dette synes å gå på bekostning av klasseromsdiskusjoner og samarbeid, og at undervisningen i mindre grad knyttes til elevenes dagligliv sammenliknet med andre land (s. 127-128,137). TALIS (Teaching and Learning International Survey) 2013 viser imidlertid at selv om tradisjonell, lærerstyrt undervisning er vanlig i Norge, benyttes også mer elevsentrert undervisning (Caspersen, Aamodt, Vibe & Carlsten, 2014, s. 117). Matematikkundervisningen i norske skoler fremstår følgelig som noe variert og sammensatt.

Resultater fra TIMSS 2011 viser at norske elever presterte betydelig dårligere enn elever fra andre deltakerland på områdene algebra og geometri. Internasjonalt utmerker norske elevers resultater i algebra seg som spesielt svake, og kun typiske utviklingsland med en helt annen ressurssituasjon enn Norge presterte svakere enn norske elever i emnet algebra på TIMSS 2011 (Grønmo, Onstad, Nilsen, Hole, Aslaksen & Borge, 2012, s. 25). Fra 2011 til 2015 var det ifølge Grønmo, Hole og Onstad (2017) en generell framgang i 8.-trinnselevenes prestasjoner, dog i emnet algebra var det derimot en signifikant tilbakegang. Med tanke på algebras grunnleggende rolle i matematikk er det problematisk at elevenes prestasjoner i dette emnet er synkende (Grønmo mfl., 2017, s. 40).

Med bakgrunn i skisseringen av den sammensatte og varierte matematikkundervisningen i Norge og norske elevers prestasjoner i algebra i internasjonale studier som TIMSS, stiller jeg i likhet med Hiebert og Grouws (2007) spørsmål ved hva som gjør matematikkundervisningen effektiv og hvordan undervisning påvirker elevers læring. Til tross for forskning på denne sammenhengen finnes det lite kunnskap om temaet (Hiebert & Grouws, 2007, s. 371). Det fremstår følgelig både aktuelt og interessant å undersøke sammenhengen mellom undervisning og læring i algebra nærmere i mitt masterprosjekt.

1.2 Formål, problemstilling og struktur

Formålet med studien er å fremskaffe ytterligere kunnskap om sammenhengen mellom elevers læring og lærerens undervisning i det algebraiske emnet lineære likninger med én ukjent. Fra nå av omtales dette emnet for enkelthetsskyld som «likninger». Studien gjennomføres med 9.- og 10.klasseelever og undervisningsformene undersøkende undervisning og direkte instruksjon sammenliknes. Elevers læring i emnet likninger undersøkes ved å *måle* elevenes endring av likningskompetanse og ved å undersøke deres opplevelse av undervisningen. Ikke-faglige aspekter kartlegges for å undersøke om disse kan være en alternativ forklaring til eventuelle forskjeller mellom de to gruppenes læring i emnet likninger. Undersøkelse av elevenes opplevelse og ikke-faglige aspekter er ikke et hovedfokus i studien, men kan derimot være nyttig for å gi et mer nyansert bilde av elevers læring i emnet likninger, samt for å kunne reflektere over hvorfor utfallet av den kvantitative undersøkelsen ble som det ble.

Studiens formål og avgrensing førte frem til følgende problemstilling og forskningsspørsmål:

I hvilken grad og på hvilken måte kan undersøkende undervisning og direkte instruksjon påvirke elevers læring i emnet likninger?

1) *I hvilken grad skiller den undersøkende gruppens og den direkte gruppens endring av likningskompetanse seg fra hverandre?*

2) *Hvordan opplever den direkte og den undersøkende gruppen undervisningen sin?*

3) *Hvilke ikke-faglige aspekter kjennetegner den undersøkende og den direkte gruppen?*

Den overordnede problemstillingen har som hensikt å sette søkelys på sammenhengen mellom elevers læring og lærerens undervisning i emnet likninger. Det første forskningsspørsmålet utgjør den kvantitative hovedundersøkelsen i studien, og undersøkes ved å *måle* elevers læring emnet likninger gjennom å måle endring av «likningskompetanse» (se kap. 2.5.2). Det andre forskningsspørsmålet har til hensikt å undersøke *på hvilken måte* undervisningsform har en påvirkning på elevers opplevelse av matematikkundervisning og *på hvilken måte* denne kan påvirke elevers læring i emnet likninger og deres syn på matematikk. Det tredje forskningsspørsmålet har til hensikt å undersøke hvorvidt ikke-faglige aspekter (se kap. 2.5.2) kan utgjøre en alternativ forklaring til undervisningsform på eventuelle forskjeller mellom gruppenes læring i emnet likninger.

I kapittel 2 gjør jeg rede for relevant teori og rammeverket for studien. I kapittel 3 gjør jeg rede for og begrunner mine metodiske valg. I kapittel 4 presenterer jeg resultatene av t-testen, innholdsanalysen og resultatene av analysen av ikke-faglige aspekter. I kapittel 5 drøfter jeg hvilke sammenhenger som kan finnes mellom de ulike funnene mine og hvordan disse funnene forholder seg til tidligere forskning og den nye læreplanen. Avslutningsvis i kapittel 6 oppsummerer jeg funnene og fremmer forslag for videre forskning.

2 Teori

Ifølge Lester (2005) kan konseptuelle rammeverk betraktes som et argument for hva som er relevant å undersøke og hvorfor, sett i lys av problemstillingen som skal besvares. Slike rammeverk er basert på tidligere forskning og kan være sammensatt av flere ulike teorier og synspunkter, avhengig av hva som er relevant for problemstillingen. Teoretiske rammeverk er i motsetning til konseptuelle rammeverk mer rigide og mindre anvendelig i forbindelse med forskning (Lester, 2005, s. 459-460). For at studien skal kunne integrere ulike aspekter ved elevers læring i emnet likninger fremstår et konseptuelt rammeverk som et nyttig verktøy i denne studien. Rammeverket for studien består av a) definisjoner av undervisningsformene som benyttes i studien og b) definisjon av matematisk kompetanse i emnet likninger. Førstnevnte gjøres rede for i kapittel 2.1 og 2.2, og utgjør en konseptualisering av det eksperimentelle designet i studien. Sistnevnte gjøres rede for i kapittel 2.3 og 2.4, og utgjør en konseptualisering av læring i emnet likninger. I kapittel 2.5 sammenfattes det helhetlige konseptuelle rammeverket for studien, og begrepene «opplevelse» og «ikke-faglige aspekter» gjøres rede for og begrunnes. Disse aspektene er ikke viet mye plass i teorien fordi de utgjør en liten del av studien og fordi jeg har begrenset plass i denne oppgaven.

2.1 Undervisning og læring i matematikk

En av de mest anerkjente og generelle sammenhengene mellom undervisning og læring kalles *opportunity to learn*, som på norsk kan oversettes til *læringsmuligheter* eller *mulighet for å lære* (Hiebert & Grouws, 2007, s. 378). Sammenhengen innebærer at elever lærer best det de får mulighet til å lære (Hiebert & Grouws, 2007, s. 378), og ifølge Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) har læringsmuligheter blitt etablert som den enkeltfaktoren som spiller sterkest inn på elevers læring (s. 334). Læringsmuligheter anses imidlertid som noe mer enn å bli eksponert for innhold (Hiebert & Grouws, 2007, s. 379). Eksempelvis kan man undervise 5. klassinger i differensiallikninger, men fordi elevene ikke har den forkunnskapen som trengs vil de ikke kunne delta i aktiviteter som støtter læring av differensiallikninger. Ifølge Hiebert og Grouws (2007) inkluderer derfor læringsmuligheter også betraktninger rundt den kunnskapen elevene har i forkant av undervisning og sjansen for at de vil delta, og handler dermed om noe mer enn å bli lært noe (s. 379). Læringsmuligheter kan være et nyttig verktøy som kan hjelpe oss å forklare effekten spesifikke undervisningsformer har på læring (Hiebert & Grouws, 2007, s. 379), og sammenhengen har stått sentralt i internasjonale komparative studier av læring (Floden, 2002, s. 231; McDonnell, 1995, s. 306). Ifølge Floden (2002) viser hovedvekten av disse studiene en positiv korrelasjon mellom læringsmuligheter og elevprestasjoner (s. 231).

Undervisning spiller ifølge Hiebert og Grouws (2007) en sentral rolle for hva elevene får mulighet til å lære, og de identifiserer to tilfeller av læringsmuligheter knyttet til undervisning i matematikk (s. 379-380). Det ene tilfellet omhandler *mulighet til å utvikle prosedyreflyt* (skill efficiency), og ved gjennomgang av flere studier av undervisning har Hiebert og Grouws (2007) funnet noen sentrale kjennetegn ved slik undervisning. De fant at undervisning som gir mulighet for å utvikle prosedyreflyt foregår i et raskt tempo og inkluderer lærerinstruksjon med bruk av modellering og eksempler, etterfulgt av mengdetrening (Hiebert & Grouws, 2007, s. 382). Det andre tilfellet av læringsmuligheter omhandler *mulighet til å utvikle begrepsforståelse* (conceptual understanding). Hiebert og Grouws (2007) identifiserer to hovedtrekk ved slik undervisning. Det første trekket innebærer at dersom undervisningen er rettet mot sammenhenger mellom matematiske fakta, prosedyrer og idéer, vil elevene ha mulighet til å utvikle begrepsforståelse. Å rette undervisning mot begreper innebærer at elevene får delta i sammenhengende og strukturerte diskusjoner omkring nøkkelidéene i matematikk. Dette kan eksempelvis innebære å diskutere hvorfor en prosedyre fungerer og hvordan ulike løsningsstrategier er like eller forskjellige fra hverandre (Hiebert & Grouws, 2007, s. 383). Det andre trekket innebærer at elevene får mulighet til å streve med sentrale matematiske idéer. Med begrepet «streve» mener Hiebert og Grouws (2007) at elevene skal legge ned en innsats for å forstå noe som ikke umiddelbart er innlysende, men uten å oppleve frustrasjon (s. 387).

Ifølge Stein, Remillard og Smith (2007) er *læreplanen* en ytterligere faktor som påvirker elevers læringsmuligheter. Stein mfl. (2007) anser læreplanen som utfoldet i ulike faser fra læreplanen som et faktisk skrevet dokument (*the written curriculum*), til lærerens plan for undervisningen (*intended curriculum*), til det som faktisk gjennomføres i klasserommet (*enacted curriculum*). Selv om alle fasene har innvirkning på elevers læring er det særlig gjennomføringsfasen som har en direkte innvirkning på hva elevene får mulighet til å lære (Stein mfl., 2007, s. 321). Denne fasen er nært relatert til de to mulighetene for å lære gjort rede for i forrige avsnitt. To klasser vil slik kunne oppnå ulike læringsresultater, til tross for at undervisningen gjennomføres med utgangspunkt i den samme læreplanen (Stein mfl., 2007, s. 360).

2.2 Undervisningsformer i matematikk

En direkte konsekvens av læringsmuligheter er ifølge Hiebert og Grouws (2007) at ulike undervisningsformer støtter ulike muligheter for å lære (s. 380). Undervisningsformene undersøkende undervisning og direkte instruksjon er henholdsvis knyttet til mulighet for å lære begrepsforståelse og mulighet for å lære prosedyreflyt. I det følgende delkapittelet *gjør jeg rede for* hver av undervisningsformene, og i kapittel 2.5.1 forklarer jeg *hvorfor* jeg mener det finnes en forbindelsene mellom dem og læringsmulighetene.

2.2.1 Undersøkende undervisning

Undersøkende undervisning kan forstås som en måte å undervise på, hvor elever får mulighet til å arbeide slik som matematikere og forskere gjør (Artigue & Blomhøj, 2013, s. 797). Ifølge Artigue og Blomhøj (2013) er det overenstemmelse mellom John Deweys (1859- 1952) utdanningsfilosofi og undersøkende undervisning. Dewey er særlig kjent for sitt slagord «learning by doing». Med dette mente han ikke at man lærer utelukkende ved å gjøre, men at læring skjer gjennom refleksjon over handlinger. Dette betegner Dewey som *refleksiv undersøkelse,* hvor eleven beveger fra å gjøre til å forstå. Undersøkelse er mulig fordi aspekter ved det som er kjent fra før av kan benyttes for å undersøke det som er ukjent og utfordrende. Lærerens rolle i Deweys filosofi er å velge ut passende undersøkelsesaktiviteter, samt veilede og organisere elevenes arbeid med disse. Sentralt i Deweys utdanningsfilosofi er også sammenhengen mellom skoleaktiviteter og virkelighetsnære situasjoner tilknyttet elevenes liv (Artigue & Blomhøj, 2013, s. 798-799). Blomhøj (2016) sin *tredelte* modell for undersøkende undervisning kan anses som en måte å strukturere undersøkende undervisning på, og består av fasene *iscenesettelse, elevenes undersøkende arbeid og felles refleksjon og faglig læring. Iscenesettelse* innebærer å gjøre elevene kjent med problemet, sørge for at de forstår oppgaven og avklare hvordan arbeidet skal organiseres. *Elevenes undersøkende arbeid* innebærer at elevene samarbeider om å løse ulike problemer, der læreren støtter og veileder dem gjennom dialog. *Felles refleksjon og faglig læring* innebærer at klassen gjennom dialog bygger opp felles kunnskap ved å dele løsningene sine med hverandre, samt stiller spørsmål til videre undersøkelse (Blomhøj, 2016, s. 156).

Opprinnelig oppstod undersøkende undervisning i naturfag, men flere undervisningsformer forsøker å konseptualisere undersøkende undervisning i matematikk, hvor problemløsning, modellering og realistisk matematikkundervisning (RME) er noen eksempler (Artigue & Blomhøj, 2013, s. 802). Ifølge Lesh og Zawojewski (2007) innebærer *problemløsning* å tolke, beskrive og forklare situasjoner ved hjelp av matematikk. Matematikk læres gjennom å løse problemer og problemløsningsevner utvikles gjennom å skape matematikk. Å skape matematikk knytter Lesh og Zawojewski (2007) til *modellering*, hvor representasjon av virkelighetsnære situasjoner står sentralt (Lesh & Zawojewski, 2007, s. 782-783). Ifølge Van den Heuvel-Panhuizen og Drijvers (2014) er RME kjennetegnet ved bruk av virkelighetsnære situasjoner i undervisning. I RME anses elevene som aktive deltakere i egen læring, samarbeidslæring og klasseromsdiskusjoner står sentralt, de ulike innholdsdimensjonene i matematikk anses som relaterte til hverandre og læreren har en veiledende rolle (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014, s. 521-523).

2.2.2 Direkte instruksjon

Begrepet direkte instruksjon benyttes ofte som et samlebegrep for ulike undervisningsformer som kjennetegnes av systematisk og eksplisitt instruksjon (Stockard, Wood, Coughlin & Khoury, 2018, s. 479-480). Lærere legger ulike betydninger til grunn for begrepet. Ifølge Adams og Engelmann (1996) er en vanlig misoppfatning at direkte instruksjon er likestilt med all lærerstyrt undervisning, og at det settes likhetstegn mellom den bokstavelige betydningen av direkte instruksjon og den faktiske *modellen* for direkte instruksjon (s. 1).

Til grunn for modellen ligger antakelsen om at alle elever kan tilegne seg ny kunnskap dersom de mestrer foregående kunnskap og ferdigheter, gitt at instruksjonen er presis og entydig. En sentral antakelse er at elever vil trekke slutninger basert på eksempler. Eksemplene må være entydige og satt sammen på en hensiktsmessig måte, slik at de støtter elevenes forståelse av innholdet de blir eksponert for (Stockard mfl., 2018, s. 480). Ifølge Stockard mfl. (2018) legger modellen for direkte instruksjon stor vekt på at elevene skal mestre det de instrueres i, noe som innebærer at de skal mestre ferdighetene så godt at de blir en del av deres repertoar. Dette skal legge et kunnskapsgrunnlag som gjør det lettere for elevene å tilegne seg ny kunnskap senere. Et kriteria som ligger til grunn for direkte instruksjon er dessuten at elevene skal lære mye på kort tid, og i den forbindelse er det viktig at elevene får tilbakemelding på læringen sin (Stockard mfl., 2018, s. 480). Gjennom bruk av høyt strukturerte opplegg skal direkte instruksjon avverge misoppfatninger. I oppleggene er det forklart hvordan læreren skal ordlegge seg og i hvilken rekkefølge instruksjon skal foregå. Spesifikke ferdigheter og konsepter undervises i denne undervisningsformen isolert fra hverandre (Stockard mfl., 2018, s. 481). Kjennetegnene ved direkte instruksjon kan sammenfattes gjennom Engelmann, Becker, Carnine og Gersten (1988) sin identifikasjon av to hovedregler som ligger til grunn for direkte instruksjon; (1) undervis mye på kort tid og (2) sørg for å ha kontroll over detaljene (s. 303).

2.2.3 Tidligere forskning

Ifølge Hiebert og Grouws (2007) påvirker undervisningsformen som benyttes i matematikk elevers læring i betydelig grad. Til tross for at en slik påstand virker innlysende har det vist seg å være utfordrende å dokumentere typiske trekk ved undervisning som er effektiv for læring (Hiebert & Grouws, 2007, s. 371).

I en studie gjennomført av Cobb, Wood, Yackel, Nicholls, Wheatley, Trigatti og Perlwitz (1991) ble ti klasser som mottok problembasert undervisning sammenliknet med en kontrollgruppe bestående av åtte klasser som ikke mottok problembasert undervisning. Cobb mfl. (1991) konkluderer med at de to gruppene presterte likt i utførelsen av grunnleggende regneferdigheter, men at prosjektgruppen hadde bedre begrepsforståelse og dessuten i større grad anså forståelse som viktig sammenliknet med kontrollgruppen (Cobb mfl., 1991, s. 3). Wood og Sellers (1997) sin studie har sammenfallende resultater. De sammenliknet tre grupper, hvor gruppe A deltok i problembasert undervisning i to år, gruppe B deltok i problembasert undervisning i ett år og gruppe C deltok i tradisjonell, lærebokinspirert undervisning i to år. Resultatene av studien viste at etter to år presterte gruppen som deltok i problembasert undervisning blant annet bedre på de standardiserte testene av læringsutbytte og viste bedre begrepsforståelse sammenliknet med gruppen som deltok på tradisjonell, lærebokinspirert undervisning. Wood og Sellers (1997) fant at disse forskjellene vedvarte etter at elevene returnerte til lærebokinspirert undervisning. For gruppen som deltok i problembasert undervisning i ett år vedvarte forskjellene imidlertid ikke (Wood & Sellers, 1997, s. 163).

Gjennom en 3-årig studie sammenliknet Boaler (1998) to skoler som mottok ulik undervisning. Den ene skolen benyttet en tradisjonell, lærebokinspirert undervisning, der den andre benyttet problembasert undervisning. Boaler (1998) fant at elever som mottok problembasert undervisning utviklet begrepsforståelse som var nyttig for dem i mange ulike situasjoner. Disse elevene hadde tilegnet seg en måte å tenke om og bruke matematikk på som gjorde at de fikk benyttet kunnskapen sin i både skolerelaterte og ikke-skolerelaterte situasjoner. Elevene som ble undervist tradisjonelt utviklet ferdighetskunnskap som i begrenset grad kom til nytte i ukjente situasjoner (Boaler, 1998, s. 41). Jonsson, Norqvist, Liljekvist og Lithner (2014) adresserte i sin studie, på samme måte som Boaler (1998), en vedvarende debatt i matematikkundervisning, og sammenliknet en undervisningsmodell som fokuserte på elevers egen konstruksjon av kunnskap (CMR) med en prosedyrefokusert undervisningsmodell (AR). De fant at elever i CMR- gruppen presterte signifikant bedre på alle tre testoppgavene enn de som deltok i AR-gruppen (Jonsson mfl., 2014, s. 20). En metastudie av Lazonder og Harmsen (2016) viser at undersøkende undervisning kan være mer effektiv enn direkte instruksjon, så lenge det gis tilstrekkelig veiledning. De fant gjennom en syntese av 72 studier at elever som mottok en form for veiledning i forbindelse med undersøkende undervisning presterte bedre enn de som ikke fikk det, men at det ikke var noen spesifikk form for veiledning som medførte suksess (Lazonder & Harmsen, 2016, s. 681,708).

I motsetning til studiene skissert ovenfor støtter andre studier direkte instruksjon. Effekten av worked-examples har blant annet blitt demonstrert av Sweller og Cooper (1985), som fant at worked-examples krever betydelig mindre tid å prosessere enn konvensjonelle problemer. De fant også at lignende problemer ble løst raskere dersom worked-examples ble studert først (Sweller & Cooper, 1985, s. 59). Cooper og Sweller (1987) sin studie har sammenfallende resultater og viser at elever som studerte worked-examples var bedre problemløsere enn de som lærte ved å løse konvensjonelle problemer (s. 347). Schauble (1990) har gjennomført en studie av 22 elever på 5. og 6.-trinn over en tidsperiode på 8 uker, hvor hun observerte overbevisninger elevene hadde og resonneringsstrategier de brukte i forbindelse med problemløsningsoppgaver. Elevene planla, gjennomførte og evaluerte eksperimenter som omhandlet sammenhengen mellom farten og utformingen til virtuelle biler. Elevene gjorde framgang, men det viste seg at de ikke fullt ut forstod de utformingsegenskapene som avkreftet overbevisningene deres. Studien indikerer at feilaktige overbevisninger forut for problemløsningssituasjoner kan føre til lite effektiv læring (Schauble, 1990, s. 31).

I en studie gjennomført av Tuovinen og Sweller (1999) ble *exploration practice* og *worked-examples practice* sammenliknet. Førstnevnte er ifølge forfatterne en form for undersøkende undervisning og sistnevnte er basert på cognitive load theory og er sammenfallende med direkte instruksjon. Studien viste at elever som ikke hadde relevante forkunnskaper presterte bedre gjennom *worked-examples practice* enn gjennom *exploration practice*. Dersom elevene hadde relevante forkunnskaper hadde ikke undervisningsform signifikant innvirkning på læringsutbytte (Tuovinen & Sweller, 1999, s. 334). Renkl (2017) drøfter relevansen av worked-examples i matematikkundervisning, og argumenterer for at en av hovedårsakene til at worked-examples er så effektive er fordi de gir elevene mulighet til å trekke linjer mellom ulike matematiske prinsipper og ulike problemsituasjoner (s. 571). Stockard mfl. (2018) har gjennomført en metaanalyse over tidligere studier om effekten av direkte instruksjon. Til sammen gjennomgikk de 549 forskningsrapporter, hvor samtlige kunne vise til en positiv læringseffekt. Resultatet av metaanalysen var i tråd med tidligere funn, og støtter metoden direkte instruksjon som effektivt for læring (Stockard mfl., 2018, s. 479,490,502).

Det er også en pågående teoretisk debatt om de to undervisningsformene. Kirschner, Sweller og Clark (2006) kritiserer undersøkende undervisning med utgangspunkt i *cognitive load theory*. De hevder at undersøkende undervisning utsetter arbeidsminnet for stor belastning gjennom søket etter løsninger på problemer, og at arbeidsminnet derfor ikke vil være tilgjengelig for overføring av kunnskap til langtidsminnet (Kirschner mfl., 2006, s. 76-77). Ifølge Kirschner mfl. (2006) kjennetegnes læring ved endringer i langtidsminnet, og dersom endringer ikke har forekommet, har heller ikke læring forekommet (s. 77). Direkte instruksjon kjennetegnes særlig ved bruk av eksempler i undervisningen, og gjennom å ta utgangspunkt i slike eksempler vil belastningen på arbeidsminne avta. Dette er et av hovedargumentene for hvorfor direkte instruksjon medfører mer læring enn undersøkende undervisning (Kirschner mfl., 2006, s. 80). Kirschner mfl. (2006) konkluderer med at det ikke finnes forskningsbaserte bevis som støtter undersøkende undervisning, og hevder dessuten at funnene av kontrollerte eksperimenter nesten utelukkende støtter direkte instruksjon (s. 83).

Hmelo-Silver, Duncan og Chinn (2007) har særlig to innvendinger mot på Kirschner mfl. (2006) sine argumenter. For det første hevder de at Kirschner mfl. (2006) feilaktig kategoriserer enkelte undervisningsformer som minimalt veiledet. De trekker særlig frem *inquiry learning (IL)* og *problem-based learning (PBL),* som kjennetegnes ved blant annet støttende veiledning fra lærer (Hmelo-Silver mfl., 2007, s. 100). For det andre hevder Hmelo-Silver mfl. (2007) at Kirschner mfl. (2006) har valgt å overse studier som taler for at undervisningsformer som IL og PBL faktisk er effektive. Slike studier antyder at disse undervisningsformene støtter dyp og meningsfull læring (Hmelo-Silver mfl., 2007, s. 99). Hmelo-Silver mfl. (2007) konkluderer med at IL og PBL sørger for aktiv deltakelse i egen læring og gjennom hensiktsmessig støtte medfører slik undervisning konstruksjon av kunnskap, som forfatterne anser som læring (s. 105).

For å oppsummere finnes det noen forskningsstudier som støtter undersøkende undervisning, der annen forskning støtter direkte instruksjon. Det fremstår som en enten/eller debatt, hvor det finnes et skille mellom tilhengerne av undersøkende undervisning og direkte instruksjon. Dette er argumentet for å sammenlikne nettopp direkte instruksjon og undersøkende undervisning i denne masterstudien. Flere av studiene som har blitt presentert har imidlertid mottatt kritikk. Stein mfl. (2007) hevder blant annet at mange forskere benytter egenproduserte instrumenter som ikke har blitt psykometrisk validert (s. 336). En annen utfordring er vanskeligheten med å sette sammen en kontrollgruppe. Både elevgruppen og lærerne som underviser må være sammenliknbare for å kunne gi troverdige resultater. En tredje utfordring er at dersom man skal kunne sammenlikne læringen til elever med bakgrunn i undervisningsform, så må man være sikker på at den undervisningsformen som skulle implementeres faktisk var den som ble implementert. Å benytte observasjon for å undersøke dette krever mye ressurser, og det er vanskelig å oppnå fullstendig pålitelighet gjennom slik selvrapportering (Stein mfl., 2007, s. 337). Med andre ord har studiene mottatt utbredt kritikk på bakgrunn av metodene som har blitt benyttet og kvaliteten ved forskningen har blitt kritisert. Likevel fremstår det plausibelt å hevde at en sammenlikning av de to undervisningsformene kan hjelpe oss å forstå læring bedre, gitt at resultatene tolkes i kontekst og med varsomhet.

2.3 Matematisk kompetanse

Det overordnende målet med matematikkundervisning er at elever skal utvikle matematisk kompetanse (Jonsson mfl., 2014, s. 20), men det finnes ulike syn på hva det vil si å kunne matematikk (se Hiebert & Lefevre, 1986; Kieran, 2013; Kilpatrick mfl., 2001; Niss & Højgaard Jensen, 2002; Radu, 2002; Skemp, 2006; Wu, 1999). På den ene siden kan matematisk kunnskap forstås som mestring av en samling fakta og prosedyrer. På den andre siden kan matematisk kunnskap sies å omhandle undersøkelse og forståelse av mønster og sammenhenger (Radu, 2002, s. 93; Schoenfeld, 1992, s. 3). Wu (1999) og Kieran (2013) hevder dog at et skille mellom to slike ytterpunkter er lite meningsfylt, og mener ferdigheter og begreper er nært relatert til hverandre. Med utgangspunkt i det som fremstår som en uenighet om hvorvidt matematisk kompetanse er todelt eller multidimensjonal gjør jeg i de følgende delkapitlene rede for Kilpatrick mfl. (2001) sin multidimensjonale modell og Hiebert og Lefevre (1986) sin dikotomiske modell for matematisk kompetanse. Disse gjøres rede for fordi de utgjør rammeverket for elevers læring i emnet likninger i studien, noe som begrunnes og forklares i kapittel 2.5.2.

2.3.1 En multidimensjonal modell for matematisk kompetanse

Kilpatrick mfl. (2001) beskriver gjennom sitt begrep *mathematical proficiency,* forstått som *matematisk kompetanse,* hva det vil si å kunne matematikk. Matematisk kompetanse beskrives som sammensatt av fem komponenter som er flettet sammen og er gjensidig avhengig av hverandre (Kilpatrick mfl., 2001, s. 116). Ifølge Kilpatrick mfl. (2001) er ikke matematisk kompetanse et enten/ eller fenomen, noe som medfører at det finnes ulike grader av kompetanse som utvikler seg over tid (s. 135).

Conceptual understanding, forstått som *begrepsforståelse*, beskriver Kilpatrick mfl. (2001) som forståelse av matematiske idéer og sammenhenger mellom disse. Elever med slik forståelse har kunnskap om mer enn isolerte fakta og metoder, og forstår hvorfor en matematisk idé er viktig og når den kan brukes. Begrepsforståelse minker dessuten sannsynligheten for å huske feil, og evne til å gjenskape det som eventuelt er glemt er høy (Kilpatrick mfl., 2001, s. 118). Eksempelvis vil en elev som multipliserer 7,65 med 9,83 og får svaret 7519,95 forstå at svaret hans må være feil. Han vet at 10 multiplisert med 8 er 80 og at svaret derfor må være lavere enn det. Eleven vil mistenkte at komma er plassert feil og undersøker denne muligheten (Kilpatrick mfl., 2001, s. 120).

Procedural fluency, forstått som *prosedyreflyt,* innebærer å kunne velge passende prosedyrer for utregning og bruke disse effektivt, korrekt og fleksibelt. Prosedyreflyt innebærer isolert sett at elevene kan bruke en aktuell prosedyre, der elever som har begrepsforståelse kan tilpasse prosedyren for å gjøre den enklere. Eksempelvis vil en elev som har prosedyreflyt i addisjonsalgoritmen mestre å legge sammen 598 og 647 på papir. Dersom eleven hadde lært algoritmen med forståelse ville han benyttet at 598 er 2 mindre enn 600 og at 647 er 3 mindre enn 650, lagt sammen 600 og 650 og trukket fra 5. Forståelse vil gjøre innlæring av prosedyrer lettere, mindre utsatt for feil og mindre utsatt for forglemmelse. På samme måte krever læring av flere matematiske konsepter at man har et visst ferdighetsnivå (Kilpatrick mfl., 2001, s. 121-124).

Strategic competence, forstått som *strategisk kompetanse*, omhandler ifølge Kilpatrick mfl. (2001) evne til å formulere, representere og løse matematiske problemer. Denne kompetansen er tilsvarende det som i andre teorier ofte kalles problemløsingskompetanse (Kilpatrick mfl., 2001, s. 124). En elev som innehar strategisk kompetanse vil kunne komme frem til flere måter å løse et ikke-standardisert problem på, samtidig som han evner å velge fleksibelt mellom dem. En del av strategisk kompetanse innebærer å lære seg å erstatte tungvinne med mer effektive og egnede metoder. Eksempelvis kan en elev som skal lære subtraksjonsalgoritmen først brukte konkreter for å løse oppgaver, før han senere lærer å regne på papir. Det er en forbindelse mellom strategisk kompetanse og konseptuell forståelse og prosedyreflyt, da utvikling av strategier krever forståelse for kvantitetene i problemet og relasjonene mellom dem, samt flyt ved løsning av rutineproblemer. På samme måte gir arbeid med ikke-standardiserte problemer kontekst til å utvikle prosedyreflyt og begrepsforståelse (Kilpatrick mfl., 2001, s. 127).

Adaptive reasoning, forstått som *resonneringsevne*, forklares som evne til å reflektere og tenke logisk, samt kunne forklare og rettferdiggjøre tankegangen sin. Resonneringsevne brukes for å avgjøre hvordan fakta, prosedyrer, konsepter og løsningsstrategier passer sammen. Særlig i forbindelse med problemløsning er resonneringsevne en sentral kompetanse, da denne kompetansen blant annet brukes for å rettferdiggjøre den valgte strategien (Kilpatrick mfl., 2001, s. 129-131). Et eksempel Kilpatrick mfl. (2001) trekker frem omhandler en elev som skal dele et 12 meter langt sløyfebånd opp i individuelle sløyfer. Han undersøker først hvor mange sløyfer han får ved å dele opp båndet i sløyfer som hver utgjør $\frac{1}{3}$ meter, og kommer frem til at han vil ende opp med 36 sløyfer. Han undersøker deretter hvor mange sløyfer han får ved å la sløyfene være $\frac{2}{3}$ meter lange og kommer frem til 72 stykker. Ved å bruke resonneringsevnene sine forstår han at han ikke kan ende opp med flere sløyfer i sistnevnte tilfelle enn i det førstnevnte fordi hver individuelle sløyfe nå er lenger (Kilpatrick mfl., 2001, s. 130).

Productive disposition, forstått som *syn på matematikk*, omhandler tilbøyelighet til å betrakte matematikk som fornuftig, nyttig og meningsfullt. Det innebærer tro på at innsats lønner seg og evne til å se seg selv som effektiv i læring og bruk av matematikk. Dersom elever skal kunne utvikle de fire andre komponentene av matematisk kompetanse må de oppleve at matematikk er mulig å forstå, at det ikke består av tilfeldigheter, at flittig innsats fører til læring og ha tro på at de kan klare å gi mening til matematikk (Kilpatrick mfl., 2001, s. 131). Ifølge Schoenfeld (2007) er productive disposition knyttet til det som i litteraturen kalles *beliefs* (s. 68) og som av Philipp (2007) beskrives som «[...] lenses that affect one's view of some aspect of the world or as dispositions toward action» (s. 259).

2.3.2 En dikotomisk modell for matematisk kompetanse

Ifølge Hiebert og Lefevre (1986) er det mest anerkjente skillet mellom former for matematisk kunnskap skillet mellom ferdigheter og forståelse. De betegner skillet med begrepene *conceptual* og *procedural knowledge*, som på norsk kan forstås som henholdsvis begrepsforståelse og prosedyreflyt (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 1). Selv om Hiebert og

Lefevre (1986) hevder at det i realiteten er vanskelig å kategorisere all kunnskap som enten forståelsesrelatert eller prosedyrerelatert, argumenterer de for nytteverdien av å operere med et slikt skille når man skal snakke om læring i matematikk (s. 3).

Begrepsforståelse beskrives av Hiebert og Lefevre (1986) som kunnskap som er rik på sammenhenger og relasjoner, og betraktes som en del av et kunnskapsnettverk. Kjennskap til enkeltelementer av informasjon anses ikke som begrepsforståelse. Både gjennom dannelse av sammenhenger mellom ulike deler av informasjon og gjennom å oppdage sammenhenger mellom eksiterende kunnskap og ny informasjon, vil begrepsforståelsen utvikle seg. Eksempelvis vil en elev som forstår sammenhengen mellom algoritmen for subtraksjon av flersifrede tall og titallsystemet ha utviklet begrepsforståelse i subtraksjon med flersifrede tall (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3-4).

Prosedyreflyt kan ifølge Hiebert og Lefevre (1986) deles i to. Den ene delen består av det formelle språket i matematikk. Dette innebærer kjennskap til bruk av symboler for å representere matematiske idéer, samt kjennskap til syntaktiske regler for hvordan ulike symboler benyttes i matematikk. Eksempelvis vil en elev som oppfyller denne formen for prosedyreflyt vite at $3{,}5 \div \square = 2{,}71$ er en syntaktisk rett fremstilling, og at $6{+}{=}\ \square 2$ er en syntaktisk gal fremstilling. Den andre delen består av algoritmer, som ofte betegnes som regler, for hvordan matematiske oppgaver skal utføres. Reglene kan ses på som lineære oppskrifter som forteller hvordan en kan løse en matematisk oppgave steg for steg. Denne formen for prosedyreflyt krever at eleven har kunnskap om rekkefølgen for operasjonene i en algoritme (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 6).

2.4 Elevers læring i emnet likninger

I Encyclopædia Britannica defineres en likning som “Statement of equality between two expressions consisting of variables and/or numbers ("Equation," 2019). Ifølge Rystedt, Helenius og Kilhamn (2016) kan likninger forstås som en inngangsport til algebra, og er et sentralt konsept elever lærer om i begynnelsen av algebraundervisningen (s. 50,52). Rystedt mfl. (2016) hevder likninger er spesielt interessante å benytte som utgangspunkt for forskning på undervisning, da de på den ene siden er tett forbundet med hverdagslige situasjoner og på den andre siden er knyttet til symbolsk abstrakt matematikk (s. 50). Ifølge Sfard og Linchevski (1994) gir algebra først mening for elevene når de forstår de abstrakte idéene som ligger bak de algebraiske symbolene (s. 224). Grunnleggende for elevers læring i algebra generelt og likninger spesielt er forståelse for likhetstegnets betydning og algebraiske bokstavers mening, men både Rystedt mfl. (2016) og Booth, McGinn, Barbieri og Young (2017) trekker frem disse aspektene som særlige utfordringer elevene har i sin læring (Booth mfl., 2017, s. 64-65; Rystedt mfl., 2016, s. 52).

Ifølge Kieran (1981) forstår ofte elever likhetstegnet som et «do something signal», hvor tegnet skiller problemet fra svaret, fremfor å forstå likhetstegnet som et utrykk for likhet (s. 324-325). Ifølge Knuth, Stephens, McNeil og Alibali (2006) er misoppfatninger om likhetstegnet ofte vedvarende og vanskelig å avlære. På bakgrunn av sin studie av sammenhengen mellom elevers forståelse for likhetstegnet og deres evne til å løse likninger, argumenterer Knuth mfl. (2006) for at det finnes en forbindelse mellom elevers misoppfatning av betydningen til likhetstegnet og deres besvær i arbeidet med likninger og symboluttrykk (Knuth mfl., 2006, s. 299). Likeledes setter Carpenter, Franke, Levi, Bass og Ball (2003) spørsmålstegn ved hvordan prosedyrene for å løse likninger som $5x + 32 = 97$ i det hele tatt kan gi mening for elever dersom de ikke forstår hva likhetstegnet betyr. Første steg i løsning av likningen er å trekke fra 32 på hver side, men uten en forståelse av likhetstegnet som et uttrykk for likhet vil ikke en elev kunne forstå prosedyren. Eleven må forstå at likhetstegnet beskriver en relasjon fremfor å anse det som en operator for å kunne forstå prosedyren for løsning av likninger (Carpenter mfl., 2003, s. 9,22).

Küchemann (1981) gjennomførte en studie for å undersøke elevers forståelse av algebraiske bokstaver, og identifiserte seks ulike måter elever bruker og forstår bokstaver i algebra på. *Letter evaluated* omfattet elevsvar hvor bokstaven var tildelt en spesifikk verdi; *Letter not used* omfattet elevsvar hvor bokstaven ble sett bort fra; *Letter used as an object* omfattet elevsvar hvor bokstaven ble ansett som et konkret objekt; *Letter used as a specific unknown* omfattet elevsvar hvor bokstaven ble ansett som et spesifikt, ukjent tall; *Letter used as a generalized number* omfattet elevsvar hvor det kom til uttrykk at bokstaven kan innta flere mulige verdier; *Letter used as variable* omfattet elevsvar der bokstaven ble betraktet som representant for flere uspesifiserte verdier, hvor det eksisterer en sammenheng mellom to sett med slike verdier (Küchemann, 1981, s. 104). Küchemann (1981) fant at de fleste elevene hadde en av tre førstnevnte forståelsene av bokstaver, og at få hadde forståelse for bokstaver som generelle og variable størrelser (s. 105).

2.5 Konseptuelt rammeverk

I det følgende begrunner jeg sammenhengene mellom de foregående teoretiske redegjørelsene og forklarer hvordan de utgjør det konseptuelle rammeverket for studien.

2.5.1 Konseptualisering av det eksperimentelle designet

I Hiebert og Grouws (2007) sin beskrivelse av undervisning der elevene får mulighet til å utvikle begrepsforståelse står forståelse av sammenhenger i matematikk sentralt. På samme måte legges det vekt på at elevene skal forstå det de gjør i Artigue og Blomhøj (2013) sin beskrivelse av kjennetegn ved undersøkende undervisning. Matematiske diskusjoner er fremtredende i undervisning der elevene får mulighet til å utvikle begrepsforståelse, der dialog og samarbeid er sentralt i undersøkende undervisning. Undervisning der elevene får mulighet til å utvikle begrepsforståelse kjennetegnes ved at elevene får mulighet til å streve med matematikk, og i undersøkende undervisning stilles elevene overfor utfordringer. Kjennetegnene ved undersøkende undervisning og undervisning som støtter utvikling av begrepsforståelse fremstår følgelig som sammenfallende. Dette er argumentet for at mulighet til å lære begrepsforståelse er knyttet til undervisningsformen undersøkende undervisning. Ytterligere kjennetegn ved undersøkende undervisning er en tredeling av undervisningen, lærerens veiledende og støttende rolle, og tilknytning av undervisningen til elevenes liv (se kap. 2.2.1). Med utgangspunkt i dette definerer jeg undersøkende undervisning slik: *Undersøkende undervisning er delt i tre faser, hvor utvikling av elevenes begrepsforståelse står sentralt. Lærerens rolle kjennetegnes ved at den er veiledende og støttende, og elevenes arbeid kjennetegnes ved samarbeid og diskusjoner i arbeidet med utfordrende matematiske problemer som er relevante for deres liv.*

Direkte instruksjon er kjennetegnet ved lærerstyrt instruksjon gjennom utbredt bruk av eksempler. Elevene skal lære mye på kort tid og skal mestre ferdighetene de instrueres i så godt at de blir en del av deres repertoar. På samme måte innebærer Hiebert og Grouws (2007) sin beskrivelse av undervisning som støtter prosedyreflyt at undervisningen skal foregå i et raskt tempo, skal være preget av lærerinstruksjon og bruk av modellering og eksempler, og at elevene får mengdetrening i de aktuelle prosedyrene. Kjennetegnene ved direkte instruksjon og undervisning som støtter utvikling av prosedyreflyt fremstår følgelig som sammenfallende. Dette er argumentet for at mulighet til å lære prosedyreflyt er knyttet til undervisningsformen direkte instruksjon. Et ytterligere kjennetegn ved direkte instruksjon er at den skal være strukturert for å avverge misoppfatninger (se kap. 2.2.2). Med utgangspunkt i dette definerer jeg direkte instruksjon slik: *Direkte instruksjon innebærer høyt strukturert instruksjon, som innebærer at læreren presenterer lærestoff og eksempler for elevene. Læring skal foregå i et raskt tempo, og elevene skal gjennom mengdetrening oppnå mestring av ulike matematiske prosedyrer, slik at disse blir en del av deres repertoar.*

2.5.2 Konseptualisering av læring i emnet likninger

Med bakgrunn i Hiebert og Grouws (2007) sin inndeling i to tilfeller av læringsmuligheter i matematikk (se kap. 2.1), samt disse mulighetenes relasjon til de to undervisningsformene, fremstår det umiddelbart naturlig å benytte en todelt teori for matematisk kompetanse for å undersøke elevers læring i emnet likninger. I likhet med Hiebert og Lefevre (1986) anser jeg en slik todeling som nyttig når man skal snakke om matematikkundervisning, men skillet er i realiteten vanskelig å forsvare, ifølge blant annet Kieran (2013) og Wu (1999). Det fremstår således ønskelig å benytte en form for syntese av en dikotomisk og multidimensjonal modell. Modellene til Kilpatrick mfl. (2001) og Hiebert og Lefevre (1986) fremstår, slik det argumenteres for i det følgende, som sammenfallende gjennom liknende kjennetegn. Dermed fremstår disse som egnet som en sammensatt modell for elevers læring i emnet likninger. Et ytterligere argument er at Kilpatrick mfl. (2001) sin modell er basert på gjennomgang av forskningslitteratur om matematikkundervisning og læring i matematikk (s. 3).

Både Hiebert og Lefevre (1986) og Kilpatrick mfl. (2001) benytter henholdsvis conceptual knowledge og conceptual understanding for å beskrive matematisk kompetanse som er rik på sammenhenger og relasjoner. De anvender henholdsvis begrepene procedural knowledge og procedural fluency for å beskrive mestring av prosedyrene i matematikk på en korrekt og effektiv måte. Essensen i conceptual knowledge fremstår sammenfallende med conceptual understanding, og essensen i procedural knowledge fremstår sammenfallende med procedural fluency. Dette er argumentet for at begrepsparene innebærer det samme i de to modellene. Schoenfeld (2006) knytter conceptual understanding til begreper og procedural fluency til ferdigheter (s. 17). Følgelig fremstår begrepsparene som konseptualiseringer av henholdsvis *begrepsforståelse* og *ferdigheter*. Kilpatrick mfl. (2001) sin modell består ytterligere av komponentene strategic competence og adaptive reasoning. Både Kilpatrick mfl. (2001) og Schoenfeld (2006) knytter strategic competence til problemløsning (s. 124; s. 17). Ifølge Kilpatrick mfl. (2001) er også adaptive reasoning sentral i problemløsning (s. 130). Således utgjør strategic competence og adaptive reasoning en konseptualisering av *problemløsningsevner*. Til sammen består den sammensatte modellen følgelig av aspektene ferdigheter, begrepsforståelse og problemløsningsevner.

Med utgangspunkt i innholdet i komponentene i de to modellene (se kap. 2.3), som utgjør den sammensatte modellen og dens tre aspekter, og med utgangspunkt i sentrale aspekter ved elevers læring i emnet likninger (se kap. 2.4), har jeg utarbeidet en mulig konseptualisering av likningskompetanse: Å ha kompetanse i emnet likninger innebærer å ha *ferdigheter*, *begrepsforståelse* og *problemløsningsevner*. ***Ferdigheter*** innebærer evne til å behandle likhetstegnet og regne med ukjente verdier på en effektiv og korrekt måte. En elev med ferdigheter har kjennskap til reglene for regning med likninger og vet at de samme operasjonene skal utføres på begge sider av likhetstegnet. En elev med ferdigheter i likninger evner å identifisere hvilke verdier og bokstaver som skal opereres på for å få den ukjente alene på den ene siden av likhetstegnet og verdien til den ukjente på den andre siden av likhetstegnet. ***Begrepsforståelse*** innebærer å forstå hva likhetstegnet betyr og hva algebraiske bokstaver representerer. En elev med begrepsforståelse vet at likhetstegnet betyr at det skal være lik verdi på begge sider av tegnet og at de algebraiske bokstavene representerer ukjente verdier som man skal finne. En elev som har begrepsforståelse vet når det er hensiktsmessig å benytte likninger. ***Problemløsningsevner*** innebærer evne til å løse matematiske problemer ved hjelp av likninger. En elev med problemløsningsevner er i stand til å formulere hva problemet omhandler og representere det og løse det ved hjelp av likninger. En elev med problemløsningsevner er dessuten i stand til å reflektere over sine egne svar og rettferdiggjøre tankegangen sin.

Innledningsvis forklarte jeg at jeg også ønsker å undersøke elevers læring i emnet likninger gjennom (1) elevenes opplevelse av undervisningen og (2) ikke-faglige aspekter. Ifølge Cai, Ni og Hwang (2015) er det nyttig å undersøke et utvalg av faktorer som kan påvirke elevers læring (s. 305). Samtidig hevder Hiebert og Grouws (2007) at læringsmuligheter blant annet handler om de forutsetningene elever bringer med seg i form av tidligere kunnskap og sjansen for at de vil delta i undervisningen (s. 379). Elevenes forutsetninger kan knyttes til de ikke-faglige aspektene som gjøres rede for i det følgende, og sjansen for at elevene vil delta kan knyttes til elevenes opplevelse av undervisningen. Med «opplevelse av undervisning» mener jeg elevenes subjektive oppfatning av undervisningen. Jeg knytter opplevelse til productive disposition (syn på matematikk) fordi hvordan en elev opplever matematikkundervisning vil naturligvis kunne påvirke synet eleven har på matematikk. Kilpatrick mfl. (2001) hevder productive disposition er en del av matematisk kompetanse som er nødvendig for utvikling av de øvrige aspektene ved matematisk kompetanse (s. 131). Sammenhengen mellom synet på matematikk og de andre komponentene av kompetanse, samt dets relasjon til begrepet opplevelse, er argumentet for å undersøke elevenes opplevelse av undervisningen. Årsaken til at jeg undersøker det mer trivielle begrepet opplevelse fremfor det matematikkfaglige begrepet beliefs (se kap. 2.3.1) i denne studien er begrunnet i tidsmangel fra elevene og lærerne sin side og ressurs- og plassmangel fra min side.

Ikke- faglige aspekter omfatter i denne studien *kjønn*, *sosioøkonomisk bakgrunn* og *terminkarakter i matematikk*. Ifølge Bakken og Elstad (2012) og Grøgaard og Arnesen (2016) er det dokumentert at jenter i gjennomsnitt presterer bedre enn gutter i skolen (s. 25; s. 42). Dette er argumentet for at det vil være interessant å undersøke hvorvidt fysisk kjønn kan påvirke elevers læring i emnet likninger. Sosioøkonomisk bakgrunn omhandler ifølge Bakken og Elstad (2012) ressurser i elevenes familier, slik som foreldrenes utdanningsnivå, inntekt og yrke, og det er bred enighet om at sosioøkonomisk bakgrunn påvirker elevers skoleprestasjoner (s. 89). Dette er argumentet for å undersøke dette aspektet. Terminkarakter i matematikk er omfavnet av begrepet ikke-faglige aspekter i denne sammenheng fordi elevenes karakter i matematikk ikke sier noe om elevenes kompetanse i likninger isolert sett. Terminkarakter forstås slik som elevenes matematikkfaglige utgangspunkt forut for studien, og argumentet for å undersøke dette er å finne ut om elevenes matematikkfaglige utgangspunkt forut for studien kan påvirke deres læring i emnet likninger.

For å oppsummere undersøkes elevers læring i emnet likninger i denne studien gjennom to aspekter; (1) likningskompetanse (conceptual knowledge + conceptual understanding (begrepsforståelse), procedural knowledge + procedural fluency (ferdigheter), strategic competence + adaptive reasoning (problemløsningsevner)) og (2) opplevelse, som kan si noe om elevers læring i emner likninger spesielt og elevers syn på matematikk generelt (productive disposition). Til sammen utgjør disse to aspektene i denne studien hva det vil si å kunne likninger**.** I tillegg nyanseres elevers læring i emnet likninger av ikke-faglige aspekter.

3 Metode

I dette kapittelet gjør jeg rede for og begrunner mine metodiske valg. Avslutningsvis drøfter jeg studiens validitet og reliabilitet og etikk.

3.1 Forskningsmetode

Jeg har lagt et pragmatisk kunnskapssyn til grunn for min studie, noe som innebærer at jeg ikke relaterte til ett spesifikt syn på virkelighet eller sannhet. Jeg hadde en «what works»-tilnærming, hvor jeg opererte med valgfrihet blant metoder, teknikker og prosedyrer, og fokuserte på de tilnærmingene som i størst grad hjalp meg å forstå problemstillingen. En pragmatisk tilnærming er forenlig med et *mixed methods* forskningsdesign, hvor forskere fritt benytter både kvantitative og kvalitative metoder (Creswell, 2014, s. 10-11). Jeg benyttet en slik kombinasjon med mål om å fremskaffe en mer fullstendig og grundig studie. De kvalitative funnene ble benyttet for å tilføre «mer kjøtt på beinet» til de kvantitative. Kombinasjonen av metoder var knyttet til et ønske om å øke integriteten og troverdigheten til funnene. Disse argumentene er sammenfallende med argumenter for mixed methods som Bryman (2006) kaller henholdsvis *completness, illustration og credibility* (s. 106).

Den kvantitative delen av studien ble vektlagt, og de kvalitative aspektene hadde som formål å utdype de kvantitative. Dette er sammenfallende med det Creswell og Plano Clark (2011) kaller *embedded mixed methods design*, med hovedvekt på den kvantitative delen (*quantitative priority)* (s. 65,67-68). Kvalitative og kvantitative data ble samlet inn ved hjelp av samme måleinstrument, og interagerte med hverandre før den endelige tolkningen av dataene. Det var ikke et tidsmessig skille mellom implementeringen av den kvantitative og den kvalitative delen av studien. Dette er sammenfallende med det Creswell og Plano Clark (2011) kaller *interactive level of interaction between strand* og *concurrent timing* (s. 64-66).

3.2 Forskningsstrategi

Studien har et *kvasieksperimentelt design*, som innebærer at jeg trakk utvalget på bakgrunn av egnethet og tilgjengelighet, kjent som *convenience sample* (Creswell, 2014, s. 158). I studien sammenliknet jeg elevers læring i emnet likninger mellom en gruppe som deltok på undersøkende undervisning og en gruppe som deltok på direkte instruksjon, og jeg gjennomførte før- og ettertester i de to gruppene. Overgangen fra barneskole til ungdomsskole utgjør det Bronfenbrenner (1981) kaller en økologisk overgang fra et miljø til et annet (s. 26), og for å unngå at denne overgangen skulle påvirke resultatene valgte jeg å gjennomføre studien med elever fra 9.- og 10. klasse. Forskningsstrategien for studien var følgelig et *ikke-ekvivalent (førtest og ettertest) kontrollgruppe design* (Creswell, 2014, s. 172). En viktig bemerkning i det henseende er at begge gruppene mottok en form for behandling fordi begge mottok en form for undervisning. Heretter betegner jeg de to gruppene som undersøkende gruppe og direkte gruppe.

3.2.1 Utvalgsbeskrivelse

I tabell 3.1 gis det en utvalgsbeskrivelse.

Tabell 3.1: *Utvalgsbeskrivelse.*

Gruppe	Antall	Organisering	Klassetrinn	Lærer	Undervisning
Undersøkende	31	Baseskole med klasseromsundervisning	9. og 10.	*Tilgjengelig via:* SUM-prosjektet	*Antall økter:* 5
				Egnet fordi: Deltakelse i SUM	
				Alder: 34	
				Utdanning: Adjunkt med tilleggsutdanning (60 sp matematikk)	*Antall minutter per økt:* 55
				Yrkesaktiv: 7 år	*Total undervisningstid:* 275 minutter
Direkte	34	«Vanlig» klasseromsorganisering	10.	*Tilgjengelig via:* Bekjentskap via praksis.	*Antall økter:* 4
				Egnet fordi: Uttrykker favorisert holdning til direkte instruksjon	
				Alder: 46	
				Utdanning: 5,5 år lærerutdanning med astronomi som hovedfag (25 vekttall matematikk) + 1 år PPU	*Antall minutter per økt:* 60
				Yrkesaktiv: 20 år	*Total undervisningstid:* 240 min

I **Tabell 3.1** trekker jeg frem SUM- prosjektet som grunn til at læreren i den undersøkende gruppen var egnet til å delta i studien. SUM (Sammenheng gjennom undersøkende undervisning) er navnet på et forskningsprosjekt ved UiT Norges arktiske universitet som arbeider med å utvikle læreres kompetanse i å utvikle, undervise og evaluere undersøkende undervisning, med mål om øke elevers motivasjon for og læring av matematikk i overgangene mellom barne-,ungdom og videregående skole (Blomhøj & Haavold, Akseptert).

Utvalgsstørrelsen min var totalt 65 elever, og ifølge Borg og Gall (1979) er en utvalgsstørrelse på 15 tilstrekkelig i eksperimentelle design (s. 194-195).

3.2.2 Utforming av eksperimentet

Temaet for undervisningsoppleggene var, slik det ble argumentert for i kap. 1.1, algebra, og oppleggene ble utarbeidet i samråd med lærerne for de to gruppene. Med bakgrunn i elevers utfordringer med læring i det algebraiske emnet likninger (se kap. 2.4), samt at likninger ifølge Rystedt mfl. (2016) egner seg til forskning på undervisning, var dette emnet utgangspunkt for undervisningen. Lærerne og jeg ble enig om at lineære likninger med én ukjent var et passende omfang for den toukersperioden studien skulle gjennomføres på og med tanke på hva elevene kunne fra før. Videre tok vi utgangspunkt i læreplanen, og la følgende kompetansemål til grunn for undervisningen: «løyse likningar og ulikskapar av første grad og likningssystem med to ukjende og bruke dette til å løyse praktiske og teoretiske problem» (Utdanningsdirektoratet, 2013). Vi ble enig om at jeg skulle lage et forslag til undervisningsopplegg for de to gruppene.

Jeg begynte med undervisningsoppleggene for den undersøkende gruppen og tok utgangspunkt i MAP (Mathematics Assessment Project) sine undervisningsopplegg. Begrunnelsen for dette utgangspunktet er todelt; (1) det er sammenfallende kjennetegn mellom undersøkende undervisning og MAP sine opplegg og (2) oppleggene i MAP er utviklet av forskere og testet ut i en rekke klasser på tvers av land. Den første begrunnelsen må utdypes. Definisjonen jeg gir på undersøkende undervisning i kapittel 2.5.1 innebærer kort oppsummert en tredelt undervisning med fokus på utvikling av begrepsforståelse, hvor elevene gjennom samarbeid og diskusjon skal løse utfordrende matematiske problemer med støtte og veiledning fra lærer. Ifølge skaperne av oppleggene i MAP er undervisningsoppleggene deres relevante for enhver undervisning som ønsker å fokusere på elevenes begrepsforståelse og utvikle deres evne til å løse ikke-standardiserte problemer (Mathematics Assessment Resource Service, 2007-2015). Således står begrepsforståelse og arbeid med utfordrende matematiske problemer sentralt både i undersøkende undervisning og MAP. I oppleggene til MAP går hovedsakelig tre former for aktivitet igjen; felles introduksjon, elevsamarbeid, og felles klassediskusjon. Dette er liknende den tredelte organiseringen av undersøkende undervisning. I lærerveiledningene til MAP er det foreslått spesifikke spørsmål læreren kan stille for å hjelpe elevene å tenke og komme videre i sitt undersøkende arbeid. Dette er liknende den rollen læreren har som veileder i undersøkende undervisning. De sammenfallende kjennetegnene mellom undersøkende undervisning og MAP, samt at MAP har velutprøvde opplegg, er argumentene for å ta utgangspunkt i MAP for å utvikle undervisningsoppleggene for den undersøkende gruppen.

Jeg benyttet tre av MAP sine undervisningsopplegg om likninger som utgangspunkt for undervisningen i studien, da disse (1) dekte læreplanmålet som var lagt til grunn, og (2) dekte den teoretiske definisjonen på likningskompetanse gitt i kapittel 2.5.2. Læreplanmålet ble dekt fordi oppleggene til MAP omhandlet hvordan man skal tolke en lineær likning med én ukjent, hvordan man skal regne med lineære likninger med én ukjent og hvordan man kan sette opp lineære likninger med én ukjent, som også var essensen i læreplanmålet. Likningskompetanse-definisjonen ble, kort fortalt, dekt fordi: gjennom å lære hvordan man skal tolke likninger lærte elevene om hvordan de skulle forstå likhetstegnet og ukjente størrelser (begrepsforståelse); gjennom å lære hvordan de skulle regne med likninger lærte de hvordan de skulle behandle likhetstegnet og algebraiske bokstaver på en korrekt og effektiv måte (ferdigheter); og gjennom å lære hvordan man kan sette opp likninger lærte elevene hvordan de kunne bruke likninger til å formulere, representere og løse matematiske problemer (problemløsning). Jeg benyttet deler av disse tre øktene til å utarbeide undervisningsopplegget for studien og delte opp i tre økter med tilhørende læringsmål. En viktig bemerkning er at selv om øktene og læringsmålene presenteres som adskilte enheter, så er overgangene mellom dem flytende. Øktene finnes i vedlegg 5-7.

Med utgangspunkt i de tre temaene og læringsmålene jeg la til grunn for øktene i den undersøkende gruppen utviklet jeg undervisningsoppleggene for den direkte gruppen. Dette skulle sørge for at innholdet i undervisningen i de to gruppene ble så likt som mulig og dermed sammenliknbart. For at øktene skulle passe inn i undervisningsformen direkte instruksjon tok jeg utgangspunkt i definisjonen på direkte instruksjon som jeg presenterte i kapittel 2.5.1, som innebærer hurtig og strukturert lærerinstruksjon ved bruk av eksempler, hvor elevene gjennom mengdetrening skal oppnå mestring av prosedyrer. Lærebøker i matematikk kan bidra med eksempler, mengdetrening og struktur. Dette var argumentet for å ta utgangspunkt i lærebøker i utformingen av undervisningen til den direkte gruppen. Gjennom mailkorrespondanse med markedsansvarlig i Gyldendal Norsk forlag fikk jeg oppgitt at Maximum og Faktor er blant de mest brukte lærebokverkene i matematikkundervisning i Tromsø og jeg tok derfor utgangspunkt i disse ved utforming av undervisningen. Spesifikt så jeg på hvordan kapitlene som omhandlet likninger var oppbygd, og disse var kjennetegnet ved eksempler og mange øvingsoppgaver, samt rubrikker eller snakkebobler med påminnelser om regneregler. Disse kjennetegnene ble avgjørende for utformingen av øktene, som er organisert i arbeidshefter som elevene skulle regne gjennom i hver time, som finnes i vedlegg 8-10. I oppgaveheftet til økt 2 får elevene i oppgave å spille fyrstikkeskespillet. I definisjonen på undersøkende undervisning (se kap. 2.5.1) står det sentralt at elevene skal arbeide med utfordrende matematiske problemer, men det er ikke krav om at dette skal foregå gjennom praktiske aktiviteter. Derfor anser jeg ikke at matematikk gjøres praktisk som tilstrekkelig for at det skal kunne kalles undersøkende undervisning. Dette er argumentet for at fyrstikkeskespillet kan benyttes i direkte instruksjon.

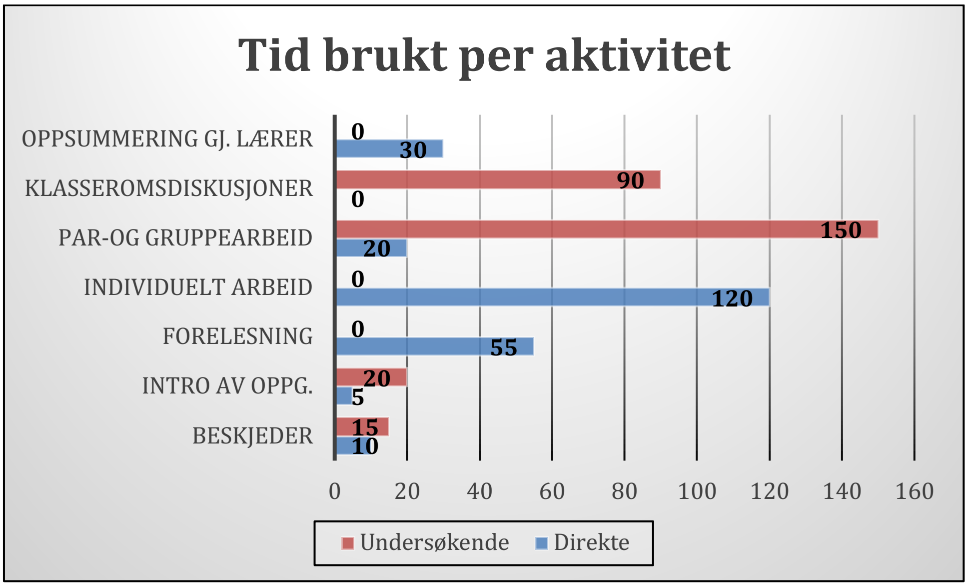
Jeg regnet til slutt gjennom heftene for begge gruppene og lagde løsningsforslag (vedlegg 11 og 12), samt lagde lærerveiledninger til hver av øktene (vedlegg 13-18).

3.2.3 Implementering av eksperimentet

Implementeringen av undervisningen kan knyttes til det som i kapittel 2.1 ble omtalt som *enacted curriculum*, og omhandler hva som ble gjort i undervisningen. Implementeringen bestod i at lærerne underviste oppleggene over en toukersperiode, samtidig som jeg observerte. Observasjon er begrunnet i at jeg ønsket å dokumentere at de undervisningsformene som *skulle* implementeres, faktisk var de som *ble* implementert. I forkant av observasjonen utarbeidet jeg et observasjonsskjema som bestod av to deler. Den ene delen ble utarbeidet som ustrukturert, da jeg i denne delen av skjemaet ønsket å beskrive aktivitetene så detaljert som mulig for å være åpen for ulike scenarioer og hendelser. Den andre delen av skjemaet var utarbeidet med mål om strukturert observasjon, da jeg både benyttet lukkede kategorier og gjorde minuttobservasjon (Bjørndal, 2017, s. 54-55). Kategoriene ble utarbeidet med bakgrunn i Schoenfeld (2013), som har utformet forslag til observasjonsskjemaer for klasseromsobservasjoner (s. 612). Hovedkategorien kalte jeg *type aktivitet* og de ulike typene aktiviteter kalte jeg for *beskjeder*; *forelesning*; *introduksjon av oppgave*; *individuelt arbeid*; *par- og gruppearbeid*; *oppsummering gjennom lærer*; og *klasseromsdiskusjoner*. Innholdet i hver av disse kategoriene er forklart i vedlegg 2, hvor også selve observasjonsskjemaet er vedlagt.

Da jeg besøkte skolene for å observere fortalte jeg elevene at jeg skulle observere undervisningen, men at de skulle «late som» at jeg ikke var der. Således opererte jeg med høy grad av åpenhet og lav grad av deltakelse. Denne graden av åpenhet og deltakelse er sammenfallende med det Bjørndal (2017) kategoriserer som observasjon av første orden (s. 47).

I figur 3.1 oppsummerer jeg den strukturerte observasjonen.



Figur 3.1: *Total tidsbruk i minutter på de ulike aktivitetstypene.*

Figuren viser at den undersøkende gruppen hadde totalt 275 minutter undervisning og brukte mest tid på par- og gruppearbeid og klasseromsdiskusjoner. Den direkte gruppen hadde totalt 240 minutter undervisning og brukte mest tid på individuelt arbeid og forelesninger. Den undersøkende gruppen hadde 35 minutter mer undervisning enn den direkte. Dette skyldtes anliggender i den undersøkende gruppen, som gjorde at læreren ikke ønsket å dele opp en dobbelttime. De strukturerte observasjonene ble støttet av de ustrukturerte observasjonene, som viste at undervisningen i den direkte gruppen var kjennetegnet ved presentasjon av fakta og bruk av eksempler i lærerens forelesning. Elevenes arbeid var kjennetegnet ved at de individuelt regnet mange oppgaver og det var høyt fokus på å få rett svar og på å huske regneregler. Undervisningen i den undersøkende gruppen var kjennetegnet ved høyt fokus på elevaktivitet, hvor elevene fikk anledning til å streve med sentrale aspekter ved likninger, arbeidet i grupper med læreren som støtte og veileder, og deltok i felles diskusjoner. Observasjonene er i overenstemmelse med konseptualiseringen som ble gjort av eksperimentets design i kapittel 2.5.1, og dette er argumentet for at det var undersøkende undervisning og direkte instruksjon som ble sammenliknet, slik intensjonen var.

3.3 Datainnsamling

Måleinstrumentet består av to deler, hvor den ene delen er før- og ettertestene og den andre delen er spørreskjemaene. Spørreskjemaene var vedlagt hver av testene for å lette tidsbruken (se vedlegg 3 og 4).

3.3.1 Før- og ettertestene

Det overordnede formålet med før- og ettertestene var å måle elevenes endring av likningskompetanse (se kap. 2.5.2). Hensikten med førtesten var å måle utgangspunktet til elevene, noe som er sammenfallende med det Cohen, Manion og Morrison (2011) omtaler som *baseline assessment*. Baseline assessment er nyttig for å kunne si noe hvor mye verdi undervisning har tilført til elevenes startpunkt. Ettertesten var en *summativ test*, og ble gitt etter endt undervisning for å måle læringen til elevene i emnet som hadde vært fokus i undervisningen (Cohen mfl., 2011, s. 481). Begge testene kan kategoriseres som det Cohen mfl. (2011) betegner som *domain-referenced tests*, da det var et spesifikt *innhold* elevene skulle testes i, som i denne studien var likninger (s. 478). Elevene fikk 60 minutter på hver av testene. Førtesten ble gjennomført én uke før undervisningsoppstart, og ettertesten ble gitt én uke etter undervisningsslutt. Ifølge Brown, Irving og Keegan (2008) er 3 uker tilstrekkelig med tid mellom før- og ettertest for å unngå at elevene husker oppgavene og hva de svarte på førtesten (s. 82). I denne studien foregikk undervisningen over en toukersperiode, og det var 4 uker mellom før- og ettertesten.

Før- og ettertestene var identiske, noe som skulle sørge for en rettferdig sammenlikning av utgangspunktet og sluttresultatet til elevene. Testene bestod av tre oppgaver, hvor hver av dem hovedsakelig testet henholdsvis enten begrepsforståelse, ferdigheter eller problemløsningsevner. Disse aspektene utgjør til sammen definisjonen på likningskompetanse. Ifølge Schoenfeld (2007) er det vanskelig å utarbeide måleinstrumenter som tester elevers begrepsforståelse og problemløsningsevner, men derimot enklere å teste deres ferdigheter (s. 72). Dette var tilfellet også i denne studien, da det var vanskelig å trekke et tydelig skille mellom begrepsforståelse og problemløsningsevner. Både problemløsning og begrepsforståelse inngår i oppgave 2 og 3, selv om oppgavene hver for seg hovedsakelig er rettet mot ett av aspektene. Oppgave 2 skal gi en indikasjon på elevenes *begrepsforståelse* og oppgave 3 skal gi en indikasjon på elevenes *problemløsningsevner.* Oppgave 1, som tester ferdigheter, er tydeligere adskilt fra de to andre. Ferdigheter kreves for å løse oppgave 2 og 3, men begrepsforståelse og problemløsningsevner kreves i liten grad i oppgave 1. Oppgave 1 skal gi en indikasjon på elevenes *ferdigheter*.

Oppgave 1 bestod av tre deloppgaver, og alle var fremstilt som rene regneoppgaver og krevde ingen forklaring av elevenes tankegang. Oppgavene er inspirert av de samme lærebøkene som ble benyttet til å utarbeide undervisningen i den direkte gruppen. Oppgave 1 skulle teste om elevene kjente til reglene for regning med likninger og om de mestret prosedyren. Oppgavene testet om elevene visste at de skulle utføre samme operasjon på begge sider av likhetstegnet og om de visste hvilke algebraiske bokstaver/ukjente størrelser de skulle operere på for å få den ukjente alene på den ene siden og verdien alene på den andre siden av likhetstegnet. Utformingen av oppgavene er følgelig forankret i den delen av definisjonen på likningskompetanse som omhandler *ferdigheter*.

Oppgave 2 bestod av tre deloppgaver og alle krevde at elevene gjorde rede for sin tankegang. Oppgavene ble hentet fra frigitte oppgave fra TIMSS (2011) for 8. trinn, hvor likninger var et sentralt emne innenfor algebra. Oppgave 2 skulle teste om elevene hadde forståelse for likhetstegnet og for hva algebraiske symboler representerer. For å løse oppgavene måtte elevene ha forståelse for at likhetstegnet betyr at skal være lik verdi på begge sider av tegnet og forstå at de algebraiske bokstavene representerer ukjente størrelser som de kan bruke til å finne det som er ukjent i oppgavene. Oppgaveteksten krevde ikke at elevene brukte likninger, men elevene skulle selv vurdere om det var hensiktsmessig. Utformingen av oppgavene er følgelig forankret i den delen av definisjonen på likningskompetanse som omhandler *begrepsforståelse*.

Oppgave 3 bestod av to deloppgaver og krevde at elevene forklarte hvordan de hadde tenkt. Oppgaven er hentet fra intervjuguiden til Swafford og Langrall (2000), som i sin studie gjennom oppgavebasert intervju undersøkte hvorvidt elever benyttet likninger til å løse matematiske problemer etter undervisning i emnet. Kun tall og navn i oppgaven ble endret. Til sammen skulle oppgave 3 teste om elevene forstod hva problemet gikk ut på, om de klarte å representere det matematisk med en likning og om de klarte å bruke likningen til å løse problemet. Gjennom at oppgaven etterspurte forklaring av elevenes tankegang ble også evnen deres til å rettferdiggjøre og reflektere over egne svar testet. Utformingen av oppgavene er følgelig forankret i den delen av definisjonen på likningskompetanse som omhandler *problemløsning*.

3.3.2 Spørreskjemaene

Med **spørreskjema A** undersøkte jeg ikke-faglige aspekter som potensielt kunne påvirke elevenes læring i emnet likninger. Bakken og Elstad (2012) forklarer ***sosioøkonomisk bakgrunn*** som ressurser i elevenes familier, slik som foreldrenes utdanningsnivå, inntekt og yrke (s. 89). Med bakgrunn i denne redegjørelsen stilte jeg spørsmålene: «Hvor mange ganger var du på ferietur til utlandet i fjor?»; «Har moren og/eller faren din studert ved universitetet?» og «Hvor mange bøker har dere hjemme?» for å få et inntrykk av hva slags yrke, utdannelse og inntekt foreldrene til elevene hadde. ***Terminkarakter*** undersøkte jeg gjennom spørsmålet «Hvilken terminkarakter har du i matematikk?», og dette ble dobbeltsjekket med læreren. Med bakgrunn i bred enighet om forskjeller mellom jenter og gutters prestasjonsforskjeller i skolen stilte jeg spørsmål om elevenes fysiske ***kjønn***; «Er du gutt eller jente?». Til hvert av spørsmålene ga jeg elevene alternativer de skulle krysse av for, som er det Ringdal (2018) kaller *lukkede spørsmål* og *spørreskjema for selvutfylling* (s. 195,198). Denne teknikken ble benyttet for lettere å kunne samle inn og analysere elevsvarene og sammenlikne de to gruppene.

Med **spørreskjema B** undersøkte jeg elevenes opplevelse av undervisningen, og stilte følgende spørsmål: a) «Hvordan synes du det har vært å arbeide med matematikk slik dere har gjort de to siste ukene?»; b) «Har matematikkundervisningen i studien vært annerledes enn slik den pleier å være?»; og c) «Synes du slik dere pleier å arbeide med matematikk er bedre, dårligere eller likt som slik dere har jobbet med matematikk de siste to ukene?». ***Spørsmål a*** skulle gi meg innblikk i hvordan elevene opplevde undervisningen i studien, og ***spørsmål b*** og ***c*** skulle undersøke hvordan elevene opplevde undervisningen de er vant med sammenliknet med undervisningen i studien. Ifølge Bjørndal (2017) er språket man benytter viktig å tilpasse til aldersgruppen som skal respondere (s. 115-116), noe jeg forholdt meg til ved utformingen av de tre spørsmålene. ***Spørsmål a*** ble formulert som et åpent spørsmål, hvor elevene fritt kunne formulere svarene sine uten å bli påvirket av ledetråder (Ringdal, 2018, s. 198,204). Jeg vurderte det til at dette spørsmålet, til tross for at det var åpent, ville være overkommelig for elevene å svare på med tanke på deres alder. ***Spørsmål b og c*** var per Ringdal (2018) sin definisjon åpne fordi de ikke hadde faste svaralternativer elevene kunne krysse av for, men måten spørsmålene er formulert på medfører en begrensning for hva elevene kunne svare. Derfor definerer jeg spørsmål b og c som lukkede. Spørsmålene ble formulert slik for at elevene skulle få hjelp til å formulere svarene sine.

3.4 Analyseprosedyrer

I det følgende gjør jeg rede for analyseprosedyrene for før- og ettertestene og spørreskjemaene.

3.4.1 Før- og ettertestene

Det er stor debatt om ANCOVA (Analysis of Covariance) eller t-tester for endringsskår skal benyttes for å analysere forskjeller mellom grupper (Dimitrov & Rumrill, 2003; van Breukelen, 2013). I ekte randomiserte eksperimenter er ANCOVA foretrukket fordi det gir økt statistisk styrke, men i forbindelse med kvasieksperimentelle design er det større debatt om ANCOVA er å foretrekke fremfor t-tester. Dersom det hadde vært store forskjeller mellom gruppene kunne *regression to the mean* ført til systematisk skjevhet ved kvasieksperimentelle design med preeksisterende grupper (van Breukelen, 2013, s. 914). I min studie var det små forskjeller mellom gruppene på førtesten, og gruppene viste seg dessuten å være relativt like. t-test fremstod dermed som bedre egnet enn ANCOVA i denne sammenheng. Det er dessuten vanskelig å ta hensyn til alle forskjeller mellom preeksisterende grupper som kan påvirke den avhengige variabelen i statistiske analyser. I deler av litteraturen anbefales derfor t-tester, da den kan redusere systematisk skjevhet og dessuten er enklere å tolke (van Breukelen, 2006, s. 924-925). van Breukelen (2006) og van Breukelen (2013) hevder at gjennom å sammenlikne resultatene på t-testen med resultatene på ANCOVA vil troverdigheten til resultatene styrkes i en ikke- randomisert studie med én kontrollgruppe og én førtest (s. 925; s. 916). Jeg gjennomførte derfor også en ANCOVA med førtest som kovariat og ettertest som avhengig variabel for å undersøke om den ga liknende resultater som t-testen.

Independent samples t-test ble valgt fordi den er egnet til å sammenlikne gjennomsnittet mellom to uavhengige grupper på den samme, kontinuerlige, avhengige variabelen (Pallant, 2010, s. 239). Før selve t-testen kunne gjennomføres måtte jeg for det første rette alle 130 prøvene og registrere poengene i SPSS. Jeg ga 0 poeng for helt feil, 1 poeng for delvis rett og 2 poeng for helt rett svar. Delvis rett innebar elevsvar med delvis korrekt utregning og argumentasjon. Totalpoengsum på hver av testene var 16 poeng. Jeg måtte også undersøke antakelsene som ligger til grunn for testen:(1) den avhengige variabelen bør måles på en kontinuerlig skala;(2) den uavhengige variabelen bør bestå av to kategoriske og uavhengige grupper;(3) observasjonene bør være uavhengige av hverandre;(4) det bør ikke foreligge noen signifikante outliers (uteliggere);(5) den avhengige variabelen bør være tilnærmet lik normalfordelt; og (6) det bør være homogen varians mellom gruppene (Cohen mfl., 2011, s. 703; Pallant, 2010, s. 64,205-206). De tre første av disse ble vurdert uten bruk av noen form for dataprogram, der de tre siste ble undersøkt i dataprogrammet SPSS. Forekomsten av uteliggere ble testet ved å genere et boxplot, hvor uteliggere lett lot seg identifisere (Field, 2018, s. 240). Normalfordeling ble undersøkt ved bruk av Shapiro-Wilk test, hvor normalitet ble antatt dersom p> 0,05 (Field, 2018, s. 249). Også QQ-plot og histogram ble generert for å vurdere om det forelå en normalfordeling av den avhengige variabelen. Homogen varians ble testet gjennom bruk av Levenes test, hvor en p >0,05 indikerer at det ikke finnes forskjeller i varians mellom gruppene (Field, 2018, s. 257-258). Etter antakelsene var vurdert gjennomførte jeg selve t-testen i SPSS. t-tester kritiseres ofte for å fokusere for mye på signifikans og flere forskere vurderer forskjeller mellom grupper dikotomisk; enten finnes det signifikante forskjeller eller så gjør det ikke det (Shadish, Cook & Campbell, 2002, s. 43). Jeg foretok derfor også en vurdering av effektstørrelsen til forskjellen som ble observert. Effektstørrelse ble estimert gjennom Cohen's d med bruk av et «pooled» standardavvik (Field, 2018, s. 115), hvor 0,2 standardavvik klassifiseres som liten effekt, 0,5 standardavvik som medium effekt og 0,8 standardavvik som stor effekt (Aarø, 2005, s. 99).

3.4.2 Spørreskjema A

Terminkarakter er en kontinuerlig variabel fordi den angir mengde og det er lik avstand mellom tallverdiene. Kjønn og sosioøkonomisk bakgrunn er kategoriske variabler som ikke direkte kan rangeres på en logisk måte (Johannessen, 2009, s. 46). For å kunne tallfeste de kategoriske variablene tildelte jeg elevenes svar poengene 0, 1 eller 2. Hensikten med dette var å kunne sammenlikne variablene mellom de to gruppene i studien. Denne måten å kode på er det Aarø (2005) kaller for dummy-koding og variablene som kodes slik kalles dummy-variabler (s. 43). *Kjønn* ble delt inn i alternativene jente og gutt, og ble tildelt de tilfeldige verdiene 0 og 1. Variabelen *sosioøkonomisk bakgrunn* er en samlevariabel som ble satt sammen av de tre spørsmålene gjort rede for i kapittel 3.3.2 Spørsmålene ble poenggitt på følgende måte; ingen ferietur= 0 poeng,én ferietur= 1 poeng,to eller flere ferieturer= 2 poeng; ingen av foreldre har universitetsutdanning=0 poeng,én av foreldrene har universitetsutdanning= 1 poeng,begge foreldrene hadde universitetsutdanning= 2 poeng; ingen bøker= 0 poeng,færre enn 50 bøker= 1 poeng,flere enn 50 bøker= 2 poeng. Variabelen *terminkarakter* ble gitt en av de mulige verdiene 1-6. Etter dummy-kodingen forelå alle variablene som kontinuerlige variabler og jeg beregnet gjennomsnitt for hver av variablene.

3.4.3 Spørreskjema B

Spørreskjema B ble analysert ved hjelp av kvalitativ induktiv innholdsanalyse, som innebærer systematisk og regelbasert kategoridannelse med utgangspunkt i empiriske data. Mayring (2015) gjør rede for hvordan induktiv kvalitativ innholdsanalyse bør foregå: (1) definere *formålet* med innholdsanalysen og gjøre rede for den *teoretiske bakgrunnen* dette; (2) *definere tema for kategoriene* med utgangspunkt i formålet og den teoretiske bakgrunnen *og bestemme abstraksjonsnivå*. Disse skal fungere som seleksjonskriterier i den senere kategoridannelsen; (3) *gjøre seg kjent med datamaterialet* ved å jobbe gjennom 10-15 % av materialet og *danne beskrivende kategorier* som passer inn i kategoridefinisjonene og abstraksjonsnivået; (4) *revidere kategorisystem* ved å undersøke om man har laget overlappende kategorier og vurdere om abstraksjonsnivået er tilstrekkelig for formålet med innholdsanalysen; (5) *gå gjennom tekstmaterialet på nytt linje for linje* og plassere data i kategorisystemet; (6) *trekke ut overordnede kategorier*; og (7) foreta en *kvantitativ registrering* av kategoriene (Mayring, 2015, s. 374-375).

Det samlede formålet med analysen av de tre spørsmålene i spørreskjema B var å undersøke opplevelsen elevene hadde av undervisningen. Formålet er knyttet til Kilpatrick mfl. (2001) sitt begrep productive disposition og dets relasjon til «opplevelse» forklart i kap. 2.5.2 (steg 1). Steg (2) omhandlet å legge ned seleksjonskriterier. Temaet for kategoriene var elevenes opplevelse av undervisningen i studien både isolert sett (*spørsmål a*) og sammenliknet med den de var vant med (*spørsmål b og c*). Jeg valgte et medium abstraksjonsnivå, da den kvalitative undersøkelsen ikke var hovedfokus i studien. Dette innebar analyse av data med et middels høyt fokus på detaljer, og ble fullbyrdet ved først å danne ett sett med detaljerte kategorier og deretter danne ett sett med overordnede kategorier for hvert spørsmål. I steg (3) ble kategoriseringen gjort ved å benytte Excel til å legge inn elevsvarene og markere svarene med fargekoder for hver av kategoriene. En presentasjon av hvilke kategorier jeg kom fram til finnes i resultatdelen. Kategoriene er, i henhold til steg (3), *beskrivende* for innholdet i dem, og av plasshensyn er definisjonene derfor utdypet i vedlegg 1 og ikke her. Prosessen var ikke-lineær og jeg måtte gå gjennom materialet flere ganger og revidere for å finne passende kategorier (steg 4 og 5). Kategoriene ble laget som et felles sett for den undersøkende gruppen og den direkte gruppen for lettere å kunne sammenlikne svarene mellom gruppene. Etter jeg hadde utarbeidet kategoriformuleringer som passet for hele materialet utarbeidet jeg overordnede kategorier (steg 6), før jeg registrerte andelen i hver kategori (steg 7).

3.5 Validitet og reliabilitet

I dette kapittelet drøfter jeg kvaliteten ved studien gjennom begrepene validitet og reliabilitet. Hovedfokus er den kvantitative delen, da dette utgjorde studiens hovedundersøkelse.

3.5.1 Validitet i de kvantitative analysene

Ifølge Shadish mfl. (2002) er ***statistisk konklusjonsvaliditet*** knyttet til hvorvidt de statistiske metodene som benyttes er egnede for å trekke gyldige slutninger om samvariasjonen mellom den uavhengige og avhengige variabelen (s. 37). Det finnes flere faktorer som utgjør en trussel mot statistisk konklusjonsvaliditet; *lav statistisk styrke*; *brudd med antakelser*; og *antall signifikanstester. Statistisk styrke* referer til evnen en test har til å avdekke sammenhenger som finnes i en populasjon. Flere faktorer kan øke den statistiske styrken, blant annet homogene utvalg og oppfyllelse av antakelsene som ligger til grunn for den statistiske testen (Shadish mfl., 2002, s. 45-47). De to gruppene i studien var homogene gjennom at de var omtrent like store med henholdsvis 31 og 34 deltakere, samt at elevene i de to gruppene var på lik alder og hadde hatt omtrent like mye undervisning i emnet likninger fra før av. Shadish mfl. (2002) forklarer at *brudd med antakelsene* som ligger til grunn for den statistiske testen som benyttes vil kunne gi feilaktige slutninger om samvariasjon (s. 48). Jeg benyttet independent samples t-test og som jeg gjør rede for i kapittel 4.1 ble antakelsene som ligger til grunn for denne testen møtt. Ifølge Shadish mfl. (2002) vil gjennomføring av et høyt *antall signifikanstester* på det samme datasettet øke sjansen for type I feil (s. 48-49). Jeg gjennomføre derfor kun én t-test og gjennomførte i tillegg en kovariansanalyse, hvor jeg undersøkte om t-testen og kovariansanalysen gav lignende resultater.

Intern validitet omhandler ifølge Shadish mfl. (2002) med hvor stor gyldighet årsakssammenhenger kan underbygges i en bestemt studie (s. 53). Trusler mot den interne validiteten er ifølge Ringdal (2018) forbundet med blant annet *seleksjon* og *historie* (s. 136). Utfordringer knyttet til *seleksjon* er særlig fremtredende i kvasieksperimenter fordi utvalgene ikke selekteres tilfeldig. Effekten av behandlingen som blir gitt kan forvirres med allerede eksisterende forskjeller mellom populasjonene utvalgene er trukket fra (Shadish mfl., 2002, s. 56). Slike forskjeller omfatter i denne studien blant annet ulikt læringsmiljø i de to gruppene, ulik kvalitet på lærerne, ulik undervisningslengde og ulikt antall av og alder på elever i hver gruppe. De to gruppene var fra forskjellige skoler, hvor den ene skolen praktiserte baseorganisering og den andre praktiserte «vanlig» klasseromsorganisering. Læringsmiljøet ved de to skolene var forskjellig, da ulike aldersgrupper hadde undervisning sammen på baseskolen, der det ikke var slik ved den andre skolen. Blandede aldersgrupper kan tenkes å medføre et slags hierarki, hvor de yngste elevene ikke ønsker å delta fordi de føler seg underordnet de eldste. Med utgangspunkt i dette og det Bronfenbrenner (1981) kaller økologiske overganger ekskluderte jeg 8. klasse fra gruppen ved at de fikk undervisning av en annen lærer på et annet rom. Læreren i den direkte gruppen var eldre, hadde mer erfaring og mer utdanning enn læreren i den undersøkende gruppen, noe som kan ha bidratt til ulike læringsmuligheter i de to gruppene. Den undersøkende gruppen hadde 35 minutter mer undervisning enn den direkte gruppen. Dette er såpass liten forskjell at det vanskelig kan tenkes at det har hatt noen innvirkning på resultatet. Samtidig var studien kort og 35 minutter utgjorde en relativt stor andel av tiden. Antall elever i hver gruppe var relativt likt, hvor henholdsvis 34 og 31 elever var fordelt over to ulike undervisningsgrupper i både den undersøkende og den direkte gruppen. Den undersøkende gruppen bestod av 9. og 10. klasseelever, der den direkte gruppen bestod av kun 10. klasseelever. Det kan derfor være at den direkte gruppen samlet hadde et større matematikkfaglig grunnlag enn den undersøkende gruppen forut for studien. Imidlertid har elevene ved baseskolen til vanlig, uavhengig av klassetrinn, den samme undervisningen, og det er ikke noe 10. trinn undervises i som ikke 9. trinn undervises i.

Historie referer ifølge Shadish mfl. (2002) til alt som foregår mellom oppstarten av behandlingen og ettertesten og som kunne ha ført til den målte endringen selv uten behandlingen (s. 56). Jeg var kun tilstede i matematikkundervisningen til de to gruppene, og ikke i øvrig undervisning. Jeg hadde heller ikke kontroll på hva elevene gjorde på fritiden. Det kan ha forekommet hendelser mellom før- og ettertesten som jeg ikke har fått innsikt i som har påvirket resultatet av eksperimentet. Det jeg imidlertid visste var at de ikke hadde noen annen form for matematikkundervisning enn den de mottok i studien. Oppsummert er alltid intern validitet en utfordring i kvasieksperimenter og i utdanningsforskning, og resultatene må derfor tolkes med varsomhet.

Begrepsvaliditet omhandler ifølge Shadish mfl. (2002) hvorvidt man har undersøkt det man hadde til hensikt å undersøke (s. 65). En relatert form for validitet er ***innholdsvaliditet***, som Ringdal (2018) forklarer som sammenhengen mellom den teoretiske og den operasjonelle definisjonen av et begrep (s. 104-105). Jeg anser disse to som gjensidig knyttet til hverandre fordi begge omhandler forholdet mellom begreper og operasjonalisering. Truslene mot begrepsvaliditet som Shadish mfl. (2002) lister opp fremstår dermed også som trusler mot innholdsvaliditeten. Truslene omhandler blant annet *sviktende forklaring av begreper* og *manglende forklaring av alle begrepene* (Shadish mfl., 2002, s. 73). Disse truslene er knyttet til utfordringen Stein mfl. (2007) hevder finnes ved bruk av egenproduserte måleinstrumenter (se kap. 2.2.3). Jeg har forsøkt å imøtekomme dette ved å utarbeide definisjoner på både undervisningsformene og likningskompetanse med utgangspunkt i etablert teori. Det kan likevel være ulike meninger om hvorvidt mine definisjoner er egnede, og andre ville kanskje benyttet annen teori eller hatt en annen forståelse som ville medført andre definisjoner. Jeg har imidlertid forsøkt å gi en transparent beskrivelse og begrunnelse for definisjonene (se kap. 2.5).

Shadish mfl. (2002) forklarer ***ekstern validitet*** som hvorvidt slutninger foretatt i en setting kan overføres til andre lignende settinger. Trusler mot den eksterne validiteten omfatter blant annet *årsakssammenhengers relasjon til enhetene som undersøkes* og *årsakssammenhengers relasjon til settingen* (Shadish mfl., 2002, s. 83,87). *Årsakssammenhengers relasjon til enhetene som undersøkes* innebærer muligheten for at årsakssammenhengen som blir funnet ved undersøkelse av én type enheter ikke kan overføres til å gjelde andre typer enheter (Shadish mfl., 2002, s. 87-88). I studien studerte jeg ungdomsskoleelever i Tromsø, men resultatene av undersøkelsen er ikke nødvendigvis overførbare til elever i eksempelvis Oslo. Dette kan f.eks. skyldes ulike skoleorganisering, ulike lokale læreplaner, ulike lokale kulturer og ulike sosioøkonomiske forhold mellom ungdomsskoleelevene i Tromsø og Oslo. Likevel er alle skoler i Norge underlagt den samme nasjonale læreplanen, alle elever har like mye grunnskoleutdanning og klassene er satt sammen uten inndeling etter evner eller bakgrunn. *Årsakssammenhengers relasjon til settingen* innebærer at man kan finne årsakssammenhenger mellom to variabler i én setting, men dersom undersøkelsen hadde blitt gjennomført i en annen setting kunne resultatene blitt annerledes (Shadish mfl., 2002, s. 89). Eksempelvis kan det være at dersom jeg hadde byttet om på hvilke av gruppene som mottok hver av de to undervisningsformene så kunne resultatet sett annerledes ut.

3.5.2 Reliabilitet i de kvantitative analysene

Cohen mfl. (2011) skiller i kvantitativ forskning mellom *reliabilitet som stabilitet* og *reliabilitet som ekvivalens* (s. 200).

Reliabilitet som stabilitet kan betraktes som et mål på overenstemmelse over tid og over flere tilfeller, og et reliabelt måleinstrument vil gi liknende resultater for liknende respondenter over tid (Cohen mfl., 2011, s. 200). I den aktuelle studien er dette knyttet til testene, og det Cohen mfl. (2011) kaller test-retest-reliabilitet. Christoffersen og Johannessen (2012) beskriver dette som at den samme undersøkelsen gjennomføres i samme gruppe på to forskjellige tidspunkt, og dersom resultatet blir det samme er det et tegn på høy reliabilitet (s. 23). I den aktuelle studien kan dette for det første knyttes til pilotering av testene for å undersøke hvor stabile resultater de ga over tid for de samme deltakerne. Dette var ikke mulig å gjennomføre i mitt arbeid, da jeg hadde begrenset tilgang til informantene i en begrenset tidsperiode. En av de største svakheten ved studien er nok at en slik pilotering ikke ble gjennomført. For det andre kan test-retest-reliabilitet knyttes til retting av testene i de to ulike gruppene. Jeg rettet alle testene for de to gruppene flere ganger og fordelt over en tidsperiode på omtrent to måneder. Dette ble gjort for å rette så likt som mulig mellom de to gruppene. Dersom jeg fant tvilstilfeller for hvordan jeg skulle rette en oppgave fant jeg et tilsvarende tilfelle og rettet på samme måte for den den aktuelle besvarelsen. Jeg rettet testene frem til jeg ikke lenger klarte å minske antall tvilstilfeller.

Reliabilitet som ekvivalens omfatter to aspekter. Det første omhandler bruken av like måleinstrument for datainnsamling (Cohen mfl., 2011, s. 200). Dette aspektet ved reliabilitet som ekvivalens ble styrket gjennom bruk av identiske før- og ettertester. Det andre aspektet omfatter det Cohen mfl. (2011) kaller *inter-rater reliability*, som skal sikre at ulike forskere registrer data på samme måte (s. 200). Jeg fikk derfor en medstudent til å rette prøvene. Ifølge Cohen mfl. (2011) kan inter-rater reliability beregnes ved følgende formel (s. 201):

$$\frac{Antall\ enigheter}{Antall\ mulige\ enigheter} \cdot 100$$

Inter-rater reliability ble estimert ved å beregne antall enigheter mellom meg og medstudenten og dele på antall mulige enigheter ($antall\ besvarelser \cdot antall\ deloppgaver$). For førtesten ble inter-rater reliability beregnet til:

$$\frac{Antall\ enigheter}{Antall\ mulige\ enigheter} = \frac{519}{520} \cdot 100\ \% = 99{,}8\%$$

For ettertesten ble inter-rater reliability beregnet til:

$$\frac{Antall\ enigheter}{Antall\ mulige\ enigheter} = \frac{515}{520} \cdot 100\ \% = 99{,}0\%$$

Tvilstilfellene som ble avdekket oppstod også når jeg rettet testene alene, og den konstante vurderingen av disse utgjør en svakhet i studien. Samtidig var tvilstilfellene få, slik det fremkommer av den høye graden av enighet mellom meg og medstudenten min.

3.5.3 Validitet og reliabilitet i de kvalitative analysene

Ifølge LeCompte og Goetz (1982) er truslene mot den ***interne validiteten*** i eksperimenter (se kap. 3.5.1) overførbare til kvalitative studier (s. 44). De samme vurderingene som er gjort for intern validitet for de kvantitative analysene, gjelder dermed også for de kvalitative analysene. Trusler mot den ***eksterne validiteten*** i kvalitative studier er ifølge LeCompte og Goetz (1982) knyttet til effekter som reduserer eller forstyrrer en studies sammenliknbarhet og oversettbarhet. Det er dermed knyttet til utfordringer med å operasjonalisere typiske trekk ved et fenomen og til i hvilken grad og utstrekning det er sammenliknbart med andre fenomener. Ekstern validitet i kvalitative studier avhenger av tydelige beskrivelser av karakterstistikkene ved det som skal undersøkes for at det skal være mulig å overføre til andre, liknende fenomener (LeCompte & Goetz, 1982, s. 51). Den eksterne validiteten i studien var derfor avhengig av at jeg ga tydelige beskrivelser av gruppene. Dette etterstrebet jeg gjennom kartlegging av elevenes bakgrunn gjennom spørreskjema A og gjennom nøye beskrivelse av utvalget (**Tabell 3.1**).

Den ***interne reliabiliteten*** er relatert til om ulike forskere innen den samme studien vil gjøre de samme vurderingene av de samme dataene (LeCompte & Goetz, 1982, s. 41). Ifølge LeCompte og Goetz (1982) kan strategien *low-inference descriptors* benyttes for å øke den interne reliabiliteten, og strategien innebærer i lav grad å la subjektive tolkninger virke inn på analysen av datamaterialet (s. 41). Denne strategien ble benyttet i studien, noe som betyr at jeg i størst mulig grad forsøkte å beskrive fremfor å tolke dataene. Jeg var nøye med å vurdere elevenes svar utfra det som faktisk stod, fremfor det jeg trodde de kanskje kunne ha ment. Den interne reliabiliteten kan også ifølge LeCompte og Goetz (1982) økes gjennom bruk av *flere forskere* (s. 41). Dette ble gjort ved at en medstudent kategoriserte og telte opp antall i hver kategori for innholdsanalysen av spørreskjema B. ***Ekstern reliabilitet*** omhandler repliserbarheten til en studie (LeCompte & Goetz, 1982, s. 40). Ifølge LeCompte og Goetz (1982) vil blant annet en så detaljert som mulig beskrivelse av data- og analyseprosedyrene som har blitt benyttet øke den eksterne reliabiliteten (s. 40). Dette forsøkte jeg å imøtekomme gjennom redegjørelsene i kap. 3.3 og 3.4.

3.6 Etikk

Før studiens oppstart søkte jeg til Norsk senter for forskningsdata (NSD) om å få gjennomføre studien min (vedlegg 19). Etiske betraktninger ble gjort med utgangspunkt i *Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH)* sine retningslinjer, hvor del B «Hensyn til personer» (punkt 5-18) var særlig sentral for studien fordi jeg forsket tett på mennesker. Jeg trekker i det følgende frem spesielt sentrale punkter i forbindelse med min forskning, men av plasshensyn kan jeg ikke gå inn på alle. Punkt 7 og 8 omhandler henholdsvis plikt til å informere og hente inn samtykke fra deltakerne (NESH, 2016, s. 13-14). Jeg imøtekom dette ved å dele ut informasjonsskriv med vedlagt samtykkeerklæring til både lærerne og elevene. Informantene mine var barn og det var nødvendig å sørge for å ivareta deres krav på beskyttelse, slik det står skrevet i punkt 11 (NESH, 2016, s. 20). Jeg lagde derfor egne informasjonsskriv til elevene som hadde et språk som var mer rettet mot aldersgruppen. Særlig viktig når man forsker på barn er kravet om konfidensialitet (punkt 9). Dette innebærer at opplysninger om personlige forhold skal behandles fortrolig, og gjerne avidentifiseres, samt at man ved publisering anonymiserer informantene (NESH, 2016, s. 16). Jeg ga derfor hver elev en kode i stedet for å benytte navnene deres ved innsamling og analysering av data. Informasjonsskrivene med vedlagte samtykkeerklæringer finnes i vedlegg 20- 23.

En potensiell innvending mot studien kan være at enkelte kan mene at det er etisk uforsvarlig å gi en elevgruppe «bedre» undervisning enn en annen. Det er imidlertid uklart gjennom forskningen (se kap. 2.2.3) hvilken av de to undervisningsformene i studien som er «best». Det er dermed etter mitt syn ikke mulig å si at en gruppe fikk bedre behandling enn den andre.

4 Resultater

I dette kapittelet presenterer jeg resultatene av før- og ettertestene og spørreundersøkelsene.

4.1 Før- og ettertestene

Tabell 4.1 viser den gjennomsnittlige poengskåren hver av de to gruppene oppnådde på hver av de tre oppgavene på før- og ettertestene.

Tabell 4.1: *Resultater på før- og ettertest.*

		Resultater førtest				*Resultater ettertest*			
Gruppe	*N*	*Oppg. 1*	*Oppg. 2*	*Oppg. 3*	*Sum*	*Oppg. 1*	*Oppg. 2*	*Oppg. 3*	*Sum*
Direkte	34	3,41	3,21	2,00	8,62	3,09	3,85	2,09	9,03
Undersøkende	31	2,87	3,71	1,77	8,35	3,48	4,55	2,06	10,1

Tabellen viser at den direkte gruppen skåret høyere enn den undersøkende gruppen på oppgave 1 og 3 på førtesten, der den undersøkende gruppen skåret høyere på oppgave 2. Totalt skåret den direkte gruppen høyere enn den undersøkende gruppen på førtesten. På ettertesten skåret den undersøkende gruppen høyere enn den direkte gruppen på oppgave 1 og 2, og de to gruppene skåret relativt lik på oppgave 3. Totalt sett skåret den undersøkende gruppen høyere enn den direkte på ettertesten. Tabellen viser at den direkte gruppen skåret lavere på oppgave 1 på ettertesten enn førtesten, at gruppen hadde størst utvikling på oppgave 2 og en liten utvikling på oppgave 3. Den undersøkende gruppen utviklet seg på alle oppgavene, og størst framgang hadde gruppen på oppgave 2.

Tabell 4.2 viser gruppenes gjennomsnittlige skår og endringsskår på testene.

Tabell 4.2: *Oversikt over gruppenes gjennomsnittlige poengskår og endring på testene.*

Gruppe	*N*	*Gj.snitt førtest*	*Gj.snitt ettertest*	*Gj.snitt endringsskår*
Direkte	34	8,62 (3,85)	9,03 (3,77)	0,41 (2,34)
Undersøkende	31	8,35 (4,46)	10,1 (3,94)	1,74 (2,89)

Merk: Standardavvik er angitt i parentes.

I gjennomsnitt viste den undersøkende gruppen større endring (M=1,74, SD=2,89) enn den direkte gruppen (M=0,41, SD=2,34).

Innledende undersøkelser ble gjennomført for å forsikre om at det ikke forelå brudd på antakelsene som lå til grunn for t-testen. *Antakelse om kontinuerlig måleskala for den avhengige variabelen* ble møtt gjennom at elevenes prestasjon på ettertesten ble målt på en poengskala. *Antakelse om uavhengige og kategoriske grupper* ble møtt gjennom at den uavhengige variabelen bestod av en gruppe som fikk undersøkende undervisning og en som fikk direkte instruksjon. *Antakelse om uavhengige observasjoner* ble møtt ved at samtlige deltakere var medlem i *enten* den ene *eller* den andre gruppen. *Antakelsen om ingen signifikante uteliggere* ble undersøkt gjennom å utføre et boxplot for endringsskåren til hver av gruppene, som viste at det ikke fantes noen uteliggere overhodet i noen av de to gruppene. *Antakelse om normalitet* ble undersøkt gjennom vurdering av histogramfremstilling og QQ-plot for de to gruppene, samt gjennom Shapiro-Wilk-test. Sistnevnte viste at endringsskåren i den undersøkende gruppen var normalfordelt, W(31)= 0,947,p=0,127, og at endringsskåren i den direkte gruppen var normalfordelt, W(34)=0,980,p=0,763. Dette var også reflektert i histogramfremstillingen og QQ-plot for endringsskåren i de to gruppene. *Antakelse om homogen varians* ble undersøkt ved Levenes test, som viste at antakelsen var oppfylt, F(63)= 1,935,p= 0,169. Tabell 4.3 viser resultatet av t-testen.

Tabell 4.3: *Resultatet av t-testen.*

						95 % konfidensinter-vall	
	t	*df*	*p*	*Effektstørrelse*	*Gj.snitt forskjell*	*Nedre*	*Øvre*
Endringsskår	-2,05	63	0,045*	0,51	-1,33	-2,63	-0,33

*p < 0,05

Forskjellen mellom gruppenes endringsskår var signifikant, t(63)= -2,05,p=0,045. Effektstørrelsen ble beregnet til 0,51 som betyr at gjennomsnittlig endringsskår i den undersøkende gruppen er ca. et halvt standardavvik høyere enn gjennomsnittlig endringsskår i den direkte gruppen. Dette tilsvarer en medium effekt. Resultatene av ANCOVA ga lignende resultater; F(1,62)= 4,53,p= 0,037.

4.2 Spørreskjema A

Resultatene av analyse av spørreskjema A er presentert i tabell 4.4.

Tabell 4.4: *Oversikt over gruppenes ikke-faglige kjennetegn.*

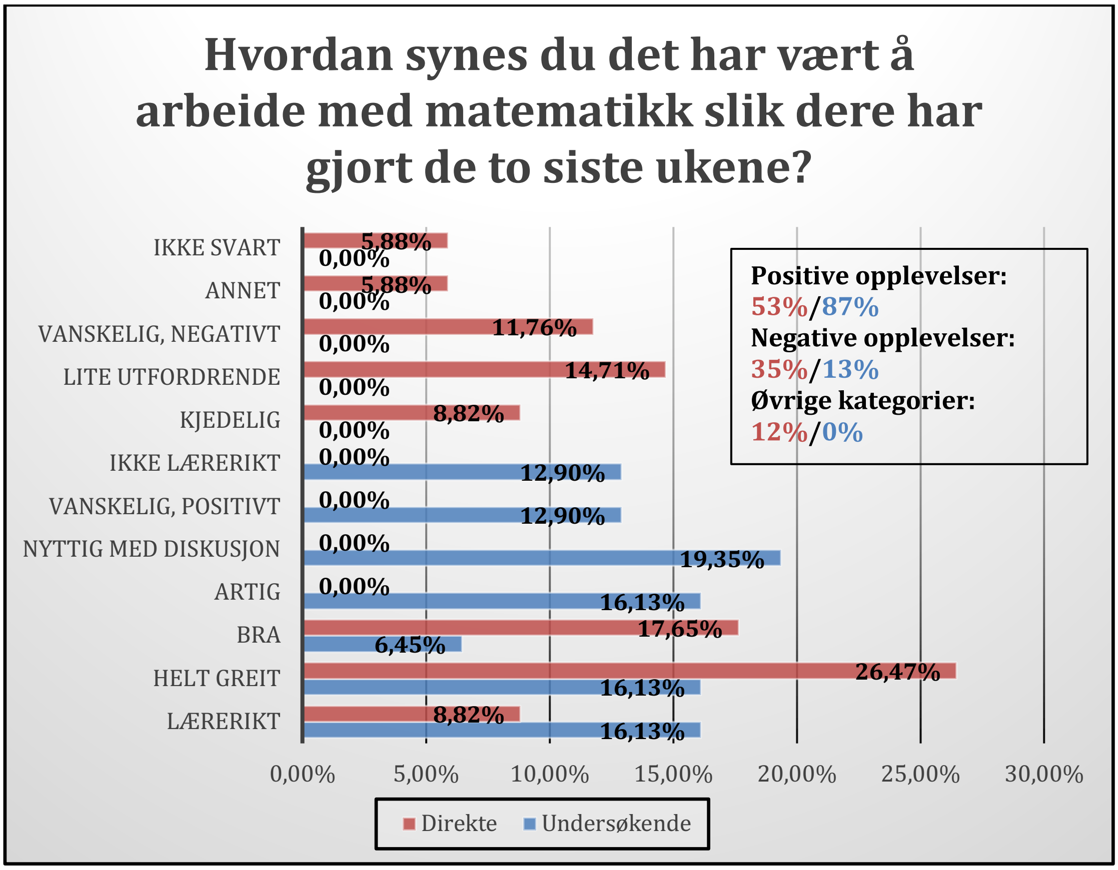
Gruppe	*N*	*Kjønn*	*Terminkarakter*	*Sos.øk.*
Direkte	34	0,38	3,35	4,44
Undersøkende	31	0,52	4,10	4,61

Tabellen viser at 65 elever deltok i studien, hvor 31 deltok i den undersøkende gruppen og 34 i den direkte gruppen. Av tabellen fremkommer det at det var en noe høyere andel jenter enn gutter i den direkte gruppen ($\bar{x}$=0,38), der det var omtrent lik andel jenter og gutter i den undersøkende gruppen ($\bar{x}$=0,52). Terminkarakteren i den undersøkende gruppen var 0,75 høyere enn hos elevene i den direkte gruppen, og den undersøkende gruppen hadde noe høyere sosioøkonomisk bakgrunn enn den direkte gruppen.

4.3 Spørreskjema B

Figur 4.1-4.3 angir funnene på spørreskjema B. De detaljerte kategoriene foreligger som en del av selve diagrammet, der de overordnede er oppsummert i en tekstboks til høyre.

Figur 4.1 viser kategoriseringen av elevsvarene på spørsmål a.

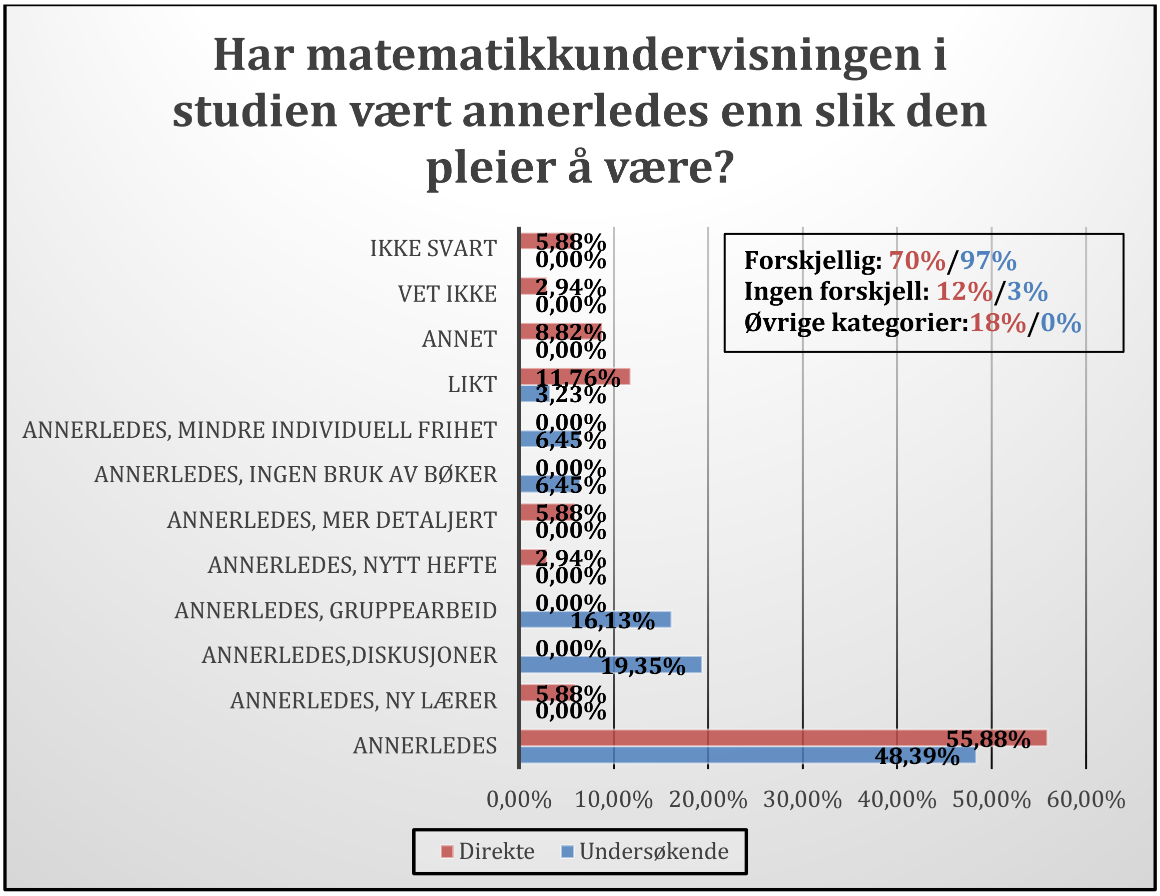


Figur 4.1: *Elevenes opplevelse av undervisningen i studien.*

Figuren viser at størst andel i *den direkte gruppen* svarte at de hadde positive opplevelser, hvor til sammen omtrent 53% svarte i kategoriene «helt greit», «bra» og «lærerikt». Til sammen svarte omtrent 35% at de hadde negative opplevelser gjennom å svare i kategoriene «kjedelig», «lite utfordrende» og «vanskelig,negativt». I de øvrige kategoriene «annet» og «ikke svart» var det omtrent 12% som svarte. Kategorien «helt greit» utgjorde generelt den største kategorien i den direkte gruppen. I *den undersøkende gruppen* var det størst andel som hadde positive opplevelser, hvor til sammen omtrent 87% svarte i kategoriene «nyttig med diskusjon», «artig», «helt greit», «bra», «lærerik» og «vanskelig,positivt». Til sammen omtrent 13% svarte at de hadde negative opplevelser gjennom å svare i kategorien «ikke lærerikt». Det var ingen som svarte i de øvrige kategoriene «ikke svart» eller «annet».

Kategorien «nyttig med diskusjon» var generelt den største kategorien i den undersøkende gruppen.

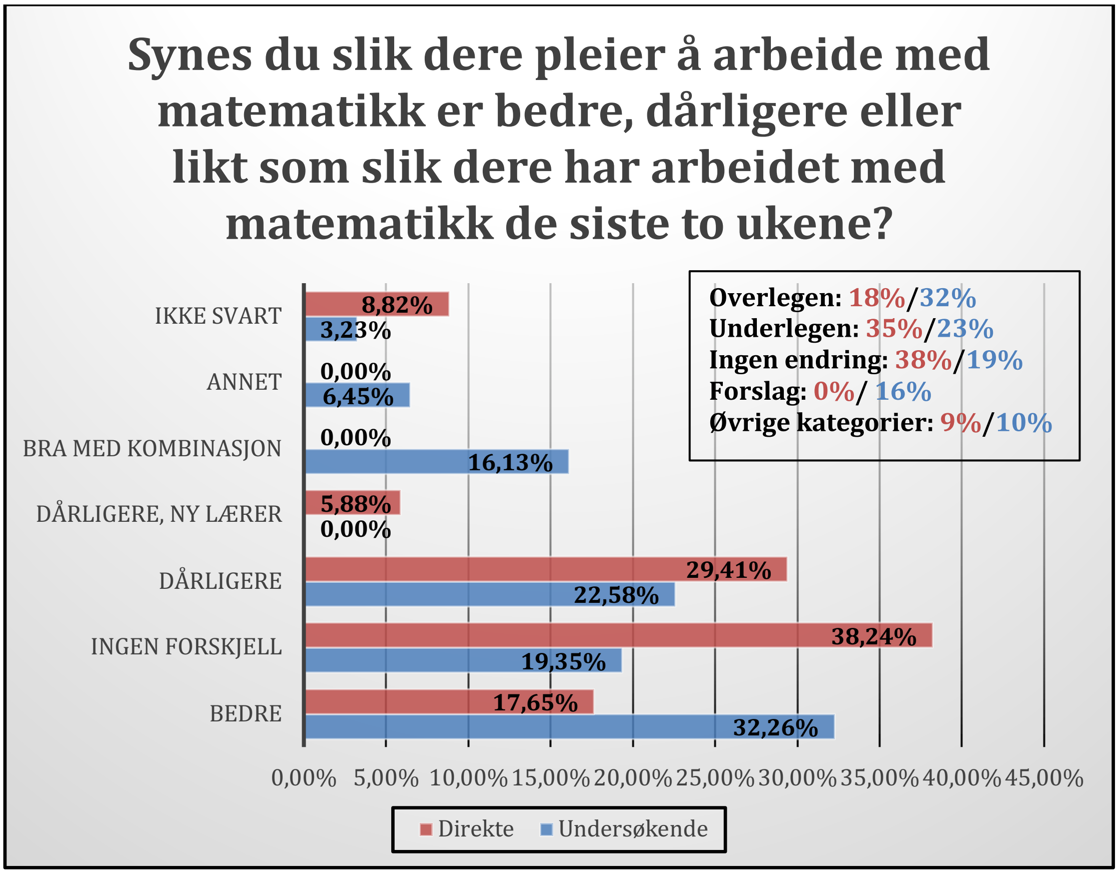
Figur 4.2 viser kategoriseringen av elevsvarene på spørsmål b.



Figur 4.2: *Elevenes opplevelse av annerledeshet mellom undervisningen de var vant med og undervisningen i studien.*

Figuren viser at størst andel, omtrent 70%, i *den direkte gruppen* svarte at de opplevde undervisningen i studien som forskjellig fra den undervisningen de var vant med ved at de svarte i kategoriene «annerledes», «annerledes,ny lærer», «annerledes,nytt hefte» og «annerledes, mer detaljert». Omtrent 12% svarte at de ikke opplevde noen forskjell ved å svare i den detaljerte kategorien «likt». Omtrent 18% svarte i de øvrige kategoriene «ikke svart», «annet» og «vet ikke». I *den undersøkende gruppen* svarte størst andel, omtrent 97%, at de opplevde undervisningen i studien som forskjellig fra den undervisningen de var vant med ved at de svarte i de detaljerte kategoriene «annerledes», «annerledes,diskusjoner», «annerledes,gruppearbeid», «annerledes,ingen bruk av bøker» og «annerledes,mindre individuell frihet». Omtrent 3% svarte at de ikke opplevde noen forskjell gjennom å svare i den detaljerte kategorien «likt». Ingen av elevene i den undersøkende gruppen svarte i de øvrige kategoriene. Kategorien «annerledes» var generelt den største kategorien i begge gruppene.

Figur 4.3 viser kategoriseringen av elevsvarene på spørsmål c.



Figur 4.3: *Elevenes opplevelse av undervisningen de er vant med sammenliknet med undervisningen i studien.*

Figuren viser at størst andel, omtrent 38%, av *den direkte gruppen* ikke opplevde noen endring mellom undervisningen de er vant med og undervisningen i studien ved å svare i kategorien «ingen forskjell». Omtrent 35% opplevde undervisningen de er vant med som underlegen den i studien ved at de enten svarte i kategorien «dårligere» eller «dårligere,ny lærer». Omtrent 18% opplevde undervisningen de er vant med som overlegen den i studien ved at de svarte i kategorien «bedre». Omtrent 9% svarte i den øvrige kategorien «ikke svart». Kategorien «ingen forskjell» var størst for den direkte gruppen. I *den undersøkende gruppen* svarte størst andel, omtrent 32%, at de synes undervisningen de er vant med er overlegen den i studien ved å svare i kategorien «bedre». Omtrent 23% opplevde undervisningen de er vant med som underlegen den i studien ved å svare i kategorien «dårligere». Omtrent 19% opplevde ingen endring og svarte i kategorien «ingen forskjell». Til sammen omtrent 10% svarte i de øvrige kategoriene «annet» og «ikke svart». Omtrent 16% kom med forslag til en kombinasjon av undervisningen de var vant med og undervisningen i studien. Kategorien «bedre» var størst for den undersøkende gruppen.

5 Drøfting

I dette kapittelet drøfter jeg funnene presentert i forrige kapittel og knytter de kvantitative og kvalitative funnene sammen. I tillegg forklarer jeg funnene med tidligere forskning og ser de i relasjon til den nye læreplanen.

5.1 Elevenes læring i emnet likninger målt gjennom likningskompetanse

Resultatet av testene viser at begge gruppene forbedret sin likningskompetanse fra førtest til ettertest (se **Tabell 4.2**). Hovedfunnet i studien er at den undersøkende gruppen endret sin likningskompetanse i *signifikant grad* (p=0,045) sammenliknet med den direkte gruppen, med en effektstørrelse på 0,51 standardavvik (se **Tabell 4.3**). Dette indikerer at undersøkende undervisning påvirket elevers læring i emnet likninger i større grad enn direkte instruksjon. Funnet er i tråd med blant annet Cobb mfl. (1991) og Wood og Sellers (1997) sine studier, noe som utdypes i kapittel 5.4. Generelt var det forventet at begge gruppene skulle gjøre en viss fremgang, fordi de to testene var identiske og fordi undervisningen var rettet spesifikt inn mot det elevene ble testet i. Det var imidlertid overraskende at t-testen viste *signifikante forskjeller* mellom gruppenes utvikling, først og fremst fordi studien foregikk over relativt kort tid. Dette reiser naturligvis spørsmål ved hvilke mulige forklaringer som finnes på disse forskjellene, noe som drøftes i det følgende.

Stein mfl. (2007) hevder at utfordringer i forbindelse med sammenlikningsstudier blant annet dreier seg om vanskeligheten om å sette sammen to sammenliknbare grupper (s. 337). Jeg knytter særlig tre forskjeller mellom gruppene til denne utfordringen. For det første hadde læreren i den direkte gruppen mer yrkeserfaring, høyere utdannelse og var eldre enn læreren i den undersøkende gruppen (se **Tabell 3.1**). På den ene siden kunne det ført til at den direkte gruppen gjennom sin lærer hadde bedre forutsetninger til å utvikle sin likningskompetanse enn den undersøkende gruppen. På den andre siden kunne det at læreren i den undersøkende gruppen var relativt nyutdannet, sammenliknet med læreren i den direkte gruppen, ha bidratt til et sterkt og ungdommelig engasjement og pågangsmot. Læreren i den undersøkende gruppen hadde dessuten 7 års yrkeserfaring og var utdannet adjunkt med tilleggsutdanning, så selv om læreren i den direkte gruppen hadde både mer erfaring og utdannelse, så skortet det ikke på dette hos læreren i den undersøkende gruppen heller.

For det andre mottok de to gruppene ulik tid med undervisning (se **Figur 3.1** og **Tabell 3.1**). Den undersøkende gruppen hadde 35 minutter mer undervisning enn den direkte gruppen. På den ene siden kan 35 minutter anses som en stor tidsforskjell fordi studien var relativt kort i tid totalt sett. På den andre siden er 35 minutter mindre enn én skoletime, og det er lite sannsynlig at kompetanse utvikler seg i betydelig grad på så kort tid. I og med at de to gruppene hadde ulik lengde på undervisningsøktene (55 og 60 minutter) var det uansett umulig å oppnå lik total undervisningstid i løpet av de to ukene.

For det tredje bestod den undersøkende gruppen av 9.- og 10. klasseelever, der den direkte gruppen kun bestod av 10. klasseelever (se **Tabell 3.1**). På den ene siden kan dette ha medført at den direkte gruppen hadde høyere matematikkfaglig grunnlag enn den undersøkende gruppen forut for studien. På den andre siden fungerte baseorganiseringen i den undersøkende gruppen slik at alle elevene fulgte den samme matematikkundervisningen. Således lærte 9. klasseelevene også det man som elev gjerne lærer i 10. klasse.

Ytterligere nyansering av funnene på t-testen kan gjøres ved å se på forskjellene mellom gruppenes poengskår på hver av de tre oppgavene på før- og ettertestene. I og med at jeg ikke gjennomførte statistiske tester for hver av oppgavene kan forskjellene være tilfeldige, men endringene på de ulike oppgavene vil likevel være interessante fordi de kan være med på å gi en ytterligere forståelse for elevenes læring i emnet likninger. Jeg vil i forkant av denne drøftingen minne om at de tre oppgavene i realiteten var vanskelig å skille helt fra hverandre, men at hver oppgave *hovedsakelig* var knyttet til ett av de tre aspektene ved definisjonen på likningskompetanse. **Tabell 4.1** viser at elevene i den undersøkende gruppen forbedret sine ferdigheter (oppg.1), begrepsforståelse (oppg.2) og problemløsningsevner (oppg.3) fra førtesten til ettertesten. Elevene i den direkte gruppen forbedret seg på begrepsforståelse (oppg.2) og problemløsningsevner (oppg.3), men hadde imidlertid en negativ utvikling i ferdigheter (oppg.1). Den direkte gruppen hadde en høyere poengsum enn den undersøkende gruppen på problemløsning på ettertesten, men den undersøkende gruppen hadde imidlertid utviklet seg mest fra førtesten til ettertesten på dette området. Det er særlig fire spørsmål som reiser seg i lys av disse funnene, og jeg presenterer og drøfter disse i det følgende.

(1) «Hvordan kan en gruppe som ble undervist med mulighet for å utvikle prosedyreflyt ha utviklet sin begrepsforståelse?» Den direkte gruppen deltok på direkte instruksjon, og i kapittel 2.5.1 knytter jeg direkte instruksjon til mulighet til å utvikle prosedyreflyt. Schoenfeld (2006) knytter prosedyreflyt til ferdigheter (s. 17), og ifølge Kilpatrick mfl.

(2001) kan et visst nivå av ferdigheter sørge for utvikling av begrepsforståelse (s. 122). Den direkte gruppen hadde en høyere poengsum på ferdigheter (oppg.1) på førtesten enn den undersøkende gruppen. Dette initiale nivået av ferdigheter kan i henhold til den sammenhengen Kilpatrick mfl. (2001) hevder finnes mellom ferdigheter og begrepsforståelse indikere hvorfor elevene i den direkte gruppen utviklet sin begrepsforståelse, til tross for at de hovedsakelig fikk mulighet til å utvikle prosedyreflyt.

(2) «Hvordan kan en gruppe som ble undervist med mulighet for å utvikle prosedyreflyt ha gått tilbake i sin prestasjon på en oppgave som tester ferdigheter?» Det at den direkte gruppen presterte dårligere på ferdigheter på ettertesten sammenliknet med førtesten kan vanskelig forklares gjennom undervisningsformen de mottok, da direkte instruksjon i henhold til sammenhengen argumentert for i kapittel 2.5.1 skulle gi mulighet til å utvikle prosedyreflyt, og ifølge Schoenfeld (2006) er prosedyreflyt knyttet til ferdigheter (s. 17). I henhold til observasjonen som ble gjennomført var det direkte instruksjon som ble implementert i den direkte gruppen, og tilbakegangen kan derfor vanskelig forklares gjennom feilimplementering av undervisningsform. Eksperimentet foregikk imidlertid kun over 2 uker og den potensielle fremgangen i et emne på såpass kort tid vil sannsynligvis være relativt liten. Menneskelige faktorer som stress og dagsform kan spille inn på elevenes prestasjon, og med tanke på at elevene hadde kort tid på å utvikle sine ferdigheter, kan disse menneskelige faktorene hatt mer å si i et kortvarig eksperiment enn i et langvarig. Dessuten er en viktig bemerkning at den direkte gruppen, til tross for tilbakegang, kun gikk tilbake 0,32 poeng.

(3) «Hvordan kan en gruppe som ble undervist med mulighet for å utvikle begrepsforståelse ha utviklet sine ferdigheter i større grad enn en gruppe som ble undervist med mulighet for å utvikle prosedyreflyt?» Det at den undersøkende gruppen forbedret sine ferdigheter mer enn den direkte gruppen var uventet, da den undersøkende gruppen deltok på undervisning som hovedsakelig skulle gi de mulighet til å lære begrepsforståelse, som jeg i kapittel 2.5.1 knytter til undervisningsformen undersøkende undervisning. Kilpatrick mfl. (2001) forklarer at begrepsforståelse vil gjøre innlæring av prosedyreflyt lettere, mindre utsatt for feil og mindre utsatt for forglemmelse (s. 122). I og med at resultatene viser at elevene i den undersøkende gruppen utviklet sin begrepsforståelse mer enn den direkte gruppen, så kan en mulig forklaring på deres større utvikling av ferdigheter knyttes til den sammenhengen Kilpatrick mfl. (2001) hevder finnes mellom begrepsforståelse og ferdigheter. Med andre ord kan større utvikling av begrepsforståelse indikere hvorfor elevene i den undersøkende gruppen også hadde en større utvikling av ferdigheter, sammenliknet med den direkte gruppen. Den

undersøkende gruppen utviklet dessuten sin begrepsforståelse mer enn de to andre aspektene ved likningskompetanse, og dette stemmer godt overens med den muligheten de fikk til å lære.

(4) «Hvorfor utviklet den undersøkende gruppen sine problemløsningsevner mer enn den direkte gruppen?» Den direkte gruppen skåret høyere enn den undersøkende gruppen på oppgave 3 på ettertesten, som hovedsakelig testet elevenes problemløsningsevner. Likevel var det elevene i den undersøkende gruppen som hadde størst *framgang* fra førtesten til ettertesten på denne oppgaven, hvor de i snitt gikk opp 0,29 poeng, der den direkte gruppen kun forbedret seg med 0,09 poeng. Ifølge Kilpatrick mfl. (2001) sørger utvikling av både begrepsforståelse og ferdigheter for at problemløsningsevnene utvikler seg (s. 127). Som tidligere nevnt, utviklet den undersøkende gruppen både sine ferdigheter og sin begrepsforståelse i større grad enn den direkte gruppen. Dette kan, i henhold til den sammenhengen Kilpatrick mfl. (2001) hevder finnes mellom begrepsforståelse og ferdigheter og problemløsning, indikere hvorfor den undersøkende gruppen utviklet sine problemløsningsevner mer enn den direkte gruppen.

Dessuten beskriver Hiebert og Grouws (2007) undervisning som gir mulighet for å utvikle begrepsforståelse ved to aspekter; (1) at de fokuserer på sammenhenger og relasjoner og (2) at elevene skal få anledning til å streve med matematikken (s. 383,387). Dette siste aspektet kan forstås som problemløsning, da problemløsning i henhold til min definisjon omhandler løsning av matematiske problemer. Med denne forståelse kan mulighet for å lære begrepsforståelse forstås som en sammensetning av å få mulighet til å lære både begrepsforståelse og problemløsning. Således kan forskjellen mellom de to gruppenes utvikling av problemløsningsevner ses i lys av den relasjonen jeg i kapittel 3.3.1 presiserer at finnes mellom oppgave 2 og 3. Det var ikke lett å skille begrepsforståelse og problemløsningsevner fra hverandre, noe også Schoenfeld (2007) presiserer (s. 72). Det fremstår dermed som lite overraskende at en gruppe som utviklet sin begrepsforståelse, også utviklet sine problemløsningsevner, og omvendt. Dette er argumentet for at den undersøkende gruppen i større grad enn den direkte gruppe fikk mulighet til å utvikle problemløsningsevner, og kan forklare hvorfor de faktisk utviklet disse evnene i større grad.

5.2 Sammenhengen mellom elevenes læring i emnet likninger og opplevelse av undervisningen

Figur 4.1 viser at forskjellene mellom de to gruppenes svar på *spørsmål a* var at den undersøkende gruppen i større grad enn den direkte gruppen svarte at de hadde positive opplevelser av undervisningen i studien (87% vs. 53%). De positive opplevelsene som skilte den undersøkende gruppen fra den direkte gruppen var blant annet «ikke lærerikt», «artig» og «vanskelig, positivt», hvor den direkte gruppen ikke hadde svart i disse kategoriene i det hele tatt. Den direkte gruppen svarte i større grad enn den undersøkende gruppen at de hadde en negativ opplevelse av undervisningen i studien (35% vs. 13%). Det som skilte gruppenes svar fra hverandre var at den direkte gruppen svarte i kategoriene «kjedelig», «lite utfordrende» og «vanskelig, negativt», der den undersøkende gruppen ikke svarte i disse kategoriene overhodet.

Det fremstår umiddelbart som overraskende at 13% av elevene i den undersøkende gruppen svarte at undervisningen i studien ikke var lærerik, fordi t-testen viser at elevene i den undersøkende gruppen utviklet sin likningskompetanse i signifikant grad sammenliknet med den direkte gruppen. Ifølge Wiliam (2010) utvikler elever som regel sin prestasjon mellom 0,3 og 0,4 standardavvik i løpet av et år, og læring er følgelig en langtekkelig prosess (s. 114). Det er derfor naturlig at elevene ikke følte at de lærte noe på to uker, og elevenes opplevelse må derfor tas på alvor. I lys av Wiliam (2010) sin påstand kan likevel 1,74 poeng (se **Tabell 4.2**) fremgang på to uker anses som en relativt stor framgang. Dette reflekteres av elevsvarene (omtrent 16%) som beskrev undervisningen som lærerik. Det er likevel usikkert om elevene ville fremvist like gode resultater dersom ettertesten ble gjennomført på et senere tidspunkt, eksempelvis 6 måneder etter undervisningsslutt.

Et annet interessant funn er at elevene i den undersøkende gruppen beskrev undervisningen som vanskelig i positiv forstand, der elevene i den direkte gruppen beskrev den som vanskelig i negativ forstand. Dette kan relateres til de ulike læringsmulighetene de to gruppene fikk, der den direkte gruppen fikk mulighet til å utvikle prosedyreflyt og den undersøkende gruppen fikk mulighet til å utvikle begrepsforståelse. Hiebert og Grouws (2007) beskriver undervisning som støtter utvikling av begrepsforståelse gjennom to trekk, hvor det ene trekket ved slik undervisning er at elevene skal streve *uten* å oppleve frustrasjon (s. 387). I henhold til læringsmuligheten fikk den undersøkende gruppen mulighet til å streve *uten* frustrasjon. Elevene i den direkte gruppens beskrivelse av undervisningen som vanskelig i negativ forstand kan indikere at elevene i den direkte gruppen ikke fikk mulighet til dette. Samtidig beskrev den undersøkende gruppen undervisningen som artig, noe som kan indikere at å oppleve undervisningen som vanskelig i positiv forstand kan henge sammen med opplevelsen av at undervisningen er artig. Sett i lys av resultatet på t-testen kan disse positive opplevelsene henge sammen med det å oppleve mestring. Den direkte gruppen beskrev undervisningen som kjedelig, noe som kan indikere at å oppleve undervisningen som vanskelig i negativ forstand kan henge sammen med opplevelsen av at undervisningen er kjedelig. Sett i lys av resultatet på t-testen kan disse negative opplevelsene henge sammen med det å ikke oppleve like mye mestring. Samtidig svarte omtrent 15% i den direkte gruppen at de ikke opplevde utfordringer, der ingen i den undersøkende gruppen svarte i den kategorien. Dette kan indikere at den direkte gruppen opplevde å bli mindre kognitivt utfordret enn den undersøkende gruppen, som igjen kan henge sammen med at den direkte gruppen hadde mindre endringsskår enn den undersøkende gruppen på testene.

Til sammen indikerer svarene på *spørsmål a* at positive opplevelser kan ha påvirket elevenes læring positivt, eksempelvis gjennom større engasjement, motivasjon og innsats. På samme måte indikerer funnene at negative opplevelser kan ha påvirket elevenes læring negativt, eksempelvis gjennom mindre engasjement, motivasjon og innsats. Totalt fremstod den undersøkende gruppens opplevelse som mer positiv enn den direkte gruppens, og den direkte gruppens opplevelse fremstod som mer negativ enn den undersøkende gruppens. Det fremstår dermed som at det finnes en forbindelse mellom forskjellen i gruppenes endringsskår undersøkt via t-testen og gruppenes opplevelse av undervisningen.

Figur 4.2 viser at begge gruppene i stor grad (direkte 70% og undersøkende 97%) på *spørsmål b* svarte at de opplevde undervisningen som forskjellig fra den de var vant med. Det var uventet at den direkte gruppen opplevde undervisningen i studien som annerledes enn den de er vant med fordi læreren i denne gruppen hadde rapportert at han foretrakk modellen for direkte instruksjon til vanlig (se **Tabell 3.1**). Ifølge Adams og Engelmann (1996) forekommer det ofte at lærere likestiller undervisning som er lærerstyrt med modellen for direkte instruksjon (s. 1). Med tanke på at elevene opplevde undervisningen i studien som forskjellig fra den de er vant med, så kan dette indikere at læreren i den direkte gruppen hadde en lærerstyrt undervisningsform til vanlig, men som skilte seg fra modellen for direkte instruksjon.

Et annet interessant funn er at elevene i de to gruppene i forskjellig grad (undersøkende 48% og direkte 15%) og med forskjellige kategorier begrunner *hvorfor* de opplevde undervisningen som forskjellig fra den de er vant med. Dette kommer frem gjennom at omtrent 48% i den undersøkende gruppen svarte i kategoriene «annerledes, diskusjoner», «annerledes, gruppearbeid», «annerledes, ingen bruk av bøker» og «annerledes, mindre individuell frihet». Disse beskrivelsen er i tråd med undersøkende undervisning, som i henhold til Blomhøj (2016) og Artigue og Blomhøj (2013) innebærer fokus på både gruppearbeid og diskusjoner og dermed mindre fokus på individuelt arbeid med bøker. Omtrent 15% av elevene i den direkte gruppen begrunnet hvorfor de opplevde undervisningen i studien som annerledes enn den de var vant med ved at de blant annet svarte i kategoriene «annerledes, nytt hefte» og «annerledes, mer detaljert». Disse beskrivelsene er i overenstemmelse med Stockard mfl. (2018) sin beskrivelse av modellen for direkte instruksjon, hvor strukturerte og detaljerte opplegg benyttes for å unngå misoppfatninger hos elevene. Stein mfl. (2007) hevder at dersom man skal kunne sammenlikne læringen til elever med bakgrunn i undervisningsform, så må man være sikker på at den undervisningsformen som *skulle* implementeres faktisk var den som *ble* implementert. Å benytte observasjon for å undersøke dette anses ikke om helt ideelt, da det innebærer selvrapportering (Stein mfl., 2007, s. 337). Samlet sett bidrar svarene på *spørsmål b* til å styrke påliteligheten til observasjonen som ble foretatt i forbindelse med implementeringen om at de to gruppene mottok de undervisningsformene som var intendert implementert i studien.

Figur 4.3 presenterer svarene på *spørsmål c*, og viser at 35% i den direkte gruppen opplevde undervisningen de er vant med som underlegen den i studien. Som forklart tidligere, indikerte svarene på *spørsmål a* at den direkte gruppen sammenliknet med den undersøkende gruppen i større grad opplevde undervisningen i studien negativt. I den undersøkende gruppen svarte 32% at de opplevde undervisningen de var vant med som overlegen den i studien. Som forklart tidligere, indikerte svarene på *spørsmål a* at den undersøkende gruppen sammenliknet med den direkte gruppen i større grad opplevde undervisningen i studien som positiv. Samlet indikerer dette at den direkte gruppen sammenliknet med den undersøkende gruppen både var mindre fornøyd med undervisningen de var vant med og samtidig mindre fornøyd med undervisningen i studien. Funnene indikerer videre at den undersøkende gruppen sammenliknet med den direkte gruppen både var mer fornøyd med undervisningen de var vant med og samtidig mer fornøyd med undervisningen i studien.

Samlet kan funnene på *spørsmål c og a* knyttes til det Kilpatrick mfl. (2001) kaller productive disposition (syn på matematikk). Ved å sammenlikne gruppene fremstår det som at den undersøkende gruppen i større grad enn den direkte gruppen hadde et positivt syn på matematikk, og at den direkte gruppen i større grad enn den undersøkende gruppen hadde et negativt syn på matematikk. Funnene indikerer også en sammenheng mellom mer positive opplevelser og mer positivt syn, og mellom mer negative opplevelser og mer negativt syn. Sett i lys av resultatet på t-testen indikerer funnene en forbindelse mellom disse (syn og opplevelse) og forskjellene mellom gruppenes endringsskår på t-testen. Utfra funnene er det vanskelig å si hvorvidt elevenes syn på matematikk har *utviklet* seg i løpet av studien, men det kan fremstå som at synet gruppene hadde på matematikk forut for studien kan ha blitt *forsterket.*

5.3 Alternative forklaringer på elevers læring i emnet likninger

Tabell 4.4 viser at elevene i den undersøkende gruppen hadde noe høyere sosioøkonomisk bakgrunn og høyere gjennomsnittlig terminkarakter i matematikk enn elevene i den direkte gruppen. I følge Bakken og Elstad (2012) har sosioøkonomisk bakgrunn betydning for elevers skoleprestasjoner (s. 89). Dette kan skyldes at det i hjem med høyere sosioøkonomisk bakgrunn i større grad drøftes fagrelaterte temaer og fordi elever fra hjem med høy sosioøkonomisk bakgrunn har foreldre som har mulighet til å hjelpe dem med leksene. Foreldre som kan hjelpe med lekser er ikke en egnet forklaring på den forskjellige utviklingen til de to gruppene, da elevene ikke hadde matematikklekser i studien. En mulig forklaring kan være eleven i den undersøkende gruppen i større grad snakket om det de arbeidet med i matematikkundervisningen hjemme. På denne måten hadde elevene i den undersøkende gruppen en potensielt større mulighet til å utvikle og bearbeide sin læring i emnet likninger sammenliknet med den direkte gruppen. Likevel var forskjellene mellom gruppenes sosioøkonomiske bakgrunn liten (0,17), noe som svekker sosioøkonomisk bakgrunn som en mulig alternativ forklaring på forskjellen i læring i emnet likninger mellom de to gruppene.

Elevene i den undersøkende gruppen hadde nesten en hel karakter høyere gjennomsnittlig terminkarakter i matematikk enn elevene i den direkte gruppen. Dette kan være en mulig indikasjon på at elevene i den undersøkende gruppen hadde et bedre generelt matematikkfaglig grunnlag enn elevene i den direkte gruppen forut for studiens oppstart. Dette kan ført med seg eksempelvis god aritmetisk kunnskap som kan ha støttet elevers læring i emnet likninger.

I den direkte gruppen var det et noe høyere antall jenter enn gutter, der det i den undersøkende gruppen var mer likt fordelt. Ifølge Bakken og Elstad (2012) og Grøgaard og Arnesen (2016) presterer ofte jenter bedre enn gutter på skolen (s. 25; s. 42). Med bakgrunn i dette var en nærliggende hypotese at elevene i den direkte gruppen ville utvikle sin likningskompetanse som gruppe i større grad enn den undersøkende gruppen. Det var ikke tilfellet i studien. Det var imidlertid ikke en betydelig større andel jenter enn gutter i den direkte gruppen, selv om det forelå en liten skjevfordeling. Kjønn fremstår således ikke som en sterk alternativ forklaring på forskjellene mellom de to gruppenes læring i emnet likninger.

På *spørsmål b* (spørreskjema B) svarte 6% i den direkte gruppen i kategorien «annerledes,ny lærer», som innebar en forklaring på annerledesheten gjennom at de hadde fått ny lærer etter jul. På den ene siden kan dette ha påvirket resultatet ved at elevene i den direkte gruppen i tillegg til en ny undervisningsform måtte tilpasse seg en ny lærer. Denne faktoren kan følgelig i seg selv være en konfunderende variabel som har påvirket elevenes læring i emnet likninger. På den andre siden svarte 6% at de synes undervisningen de var vant med var dårligere enn den i studien ved å svare i kategorien «dårligere,ny lærer» på *spørsmål c*. Dette kan tyde på at ny lærer kunne ha positiv innvirkning på den direkte gruppen. Det var likevel kun 6% i den direkte gruppen som svarte i hver av de nevnte kategoriene. Dette medfører at skifte av lærer står svakt som alternativ forklaring til undervisningsform på endringen til den direkte gruppen, og dermed svakt som forklaring på endringsforskjellene mellom gruppene.

5.4 Funnenes orientering til tidligere forskning

Funnene i denne studien kan relateres til studien til Cobb mfl. (1991), hvor det ble konkludert med at grupper som mottok problembasert undervisning hadde bedre begrepsforståelse og i større grad anså forståelse som viktig sammenliknet med grupper som ikke mottok problembasert undervisning. Min studie har sammenfallende resultater ved at den undersøkende gruppen viste større utvikling av begrepsforståelse enn den direkte gruppen. Jeg fant imidlertid ingen indikasjoner på at elevene i den undersøkende gruppen anså forståelse som mer viktig enn det elevene i den direkte gruppen gjorde.

Wood og Sellers (1997) sin studie viste at elever som deltok i problembasert undervisning presterte bedre enn elever som deltok på tradisjonell, lærebokinspirert undervisning. Dette er sammenfallende med resultatene av min studie, hvor den undersøkende gruppen generelt utviklet seg mer enn den direkte gruppen på alle aspektene ved likningskompetanse. Wood og Sellers (1997) fant dessuten at tid var en faktor som avgjorde om disse forskjellene ville vedvare, og de fant at etter 1 år med problembasert undervisning ville forskjellene utjevnes når elevene gikk tilbake til tradisjonell, lærerbokinspirert undervisning, der forskjellene etter 2 år med problembasert undervisning ville vare ved returnering til tradisjonell, lærerbokinspirert undervisning. Hvorvidt dette stemmer overens med min studie er ikke mulig å si noe konkret om, da jeg ikke har gjort noen oppfølgingsstudie for å undersøke tidsaspektets innvirkning. Funnene i studien er dessuten sammenfallende med funnene til Boaler (1998) og Jonsson mfl. (2014), og plasserer seg på linje med Hmelo-Silver mfl. (2007) i debatten om cognitive load.

I en studie gjennomført av Schauble (1990) ble det konkludert med at feilaktige overbevisninger forut for problemløsningssituasjoner kan føre til lite effektiv læring. Funnene i min studie fremstår som motstridende med Schauble (1990) sitt funn. Jeg har ikke undersøkt direkte hva slags overbevisninger elevene i de to gruppene hadde forut for studien, men generelt presterte den undersøkende gruppen dårligst på førtesten, noe som kan indikere at den undersøkende gruppen i større grad hadde feilaktige overbevisninger om likninger forut for studien. Den undersøkende gruppen deltok på undersøkende undervisning, som jeg i kapittel 2.5.1 blant annet definerte med utgangspunkt i at elevene skal streve med matematiske problemstillinger. Dette aspektet kan knyttes til problemløsning. I og med at den undersøkende gruppen utviklet seg mer enn den direkte gruppen i sine problemløsningsevner kan det fremstå som at å arbeide med matematiske problemer er læringsfremmende, til tross for, og muligens på grunn av, feilaktige overbevisninger forut for problemløsningssituasjoner.

Tuovinen og Sweller (1999) konkluderte i sin studie med at dersom elever har relevante forkunnskaper har ikke undervisningsform signifikant innvirkning på læringsutbyttet. Dette er motstridende med mine funn, hvor undervisningsform indikerer en påvirkning på elevers læring i emnet likninger, til tross for at elevene i begge gruppene hadde relevante forkunnskaper fordi begge hadde lært om likninger fra før av. Cooper og Sweller (1987), som i sin studie undersøkte effekten av worked-examples, fant at elever som studerte worked-examples var bedre problemløsere enn de som lærte ved å løse konvensjonelle problemer. Min studie viser derimot at elever som ikke fikk mottok worked-examples utviklet sine problemløsningsevner mest.

5.5 Funnenes relasjon til den nye læreplanen

Funnene som har blitt drøftet er i overenstemmelse med Hiebert og Grouws (2007), som hevder det finnes en sammenheng mellom undervisningsform og elevenes muligheter til å lære (s. 379-380), og med Stein mfl. (2007) som hevder at en og samme læreplan kan gi ulike muligheter for å lære (s. 360). Neste år kommer det en ny læreplan og det vil derfor være spesielt interessant å vurdere funnenes betydning i sammenheng med denne.

I høringen til den nye læreplanen i matematikk er det lagt vekt på at elevenes skal bli gode problemløsere og at de skal oppdage sammenhenger. Det står sentralt at elevene skal utforske i matematikken og kommunisere om den, og at det de lærer på skolen skal knyttes til elevenes hverdag (Utdanningsdirektoratet, 2019). Denne beskrivelsen er sammenfallende med kjennetegnene ved undersøkende undervisning (kapittel 2.2.1) som jeg i kapittel 2.5.1 knytter til mulighet for å lære begrepsforståelse. Det fremstår følgelig som at mulighet til å utvikle begrepsforståelse er et eksplisitt formål med den nye læreplanen. Det er likevel trolig at lærere vil kombinere ulike undervisningsformer med kjennetegnene på undersøkende undervisning som fremkommer i den nye læreplanen. En kombinasjon av undersøkende undervisnings kjennetegn med eksempelvis direkte instruksjon kan medføre mulighet for å lære både begrepsforståelse og prosedyreflyt. Læringsmulighetene til elevene vil likevel avhenge av det som faktisk skjer i klasserommet, slik Stein mfl. (2007) sier, og konsekvensen medfører i praksis at man som lærer bør ha et bevisst forhold til valg av undervisningsform.

6 Avslutning

I denne studien har jeg undersøkt følgende problemstilling og forskningsspørsmål:

I hvilken grad og på hvilken måte kan undersøkende undervisning og direkte instruksjon påvirke elevers læring i emnet likninger?

1) *I hvilken grad skiller den undersøkende gruppens og den direkte gruppens endring av likningskompetanse seg fra hverandre?*

2) *Hvordan opplever den direkte og den undersøkende gruppen undervisningen sin?*

3) *Hvilke ikke-faglige aspekter kjennetegner den undersøkende og den direkte gruppen?*

Studien hadde et mixed methods design, hvor forskningsspørsmål 1 ble undersøkt kvantitativt gjennom tester, og forskningsspørsmål 2 og 3 ble undersøkt kvalitativt gjennom spørreskjemaer. Den kvantitative undersøkelsen viste at begge gruppene hadde en viss fremgang fra førtest til ettertest, men at det var *signifikante forskjeller* (p=0,045) med moderat effekt (0,51 d) mellom de to gruppenes endring av likningskompetanse, i favør til den undersøkende gruppen. Funnet indikerer at undersøkende undervisning kan påvirke elevers læring i emnet likninger *i større grad* enn direkte instruksjon. Generelt var det forventet at gruppene skulle gjøre en viss fremgang fra førtest til ettertest fordi undervisningen var rettet inn mot det elevene ble testet i og fordi testene var identiske. Det var likevel overraskende at det var signifikante forskjeller mellom gruppene, først og fremst fordi studien foregikk over såpass kort tid. Det er usikkert om elevene ville gjort like mye fremgang dersom ettertesten ble gjennomført lenger tid etter undervisningsslutt.

De kvalitative funnene indikerer at den undersøkende gruppen sammenliknet med den direkte gruppen hadde en *mer positiv opplevelse* av *undervisningen i studien* og et *mer positivt syn på matematikk*. Funnene indikerer likeledes at den direkte gruppen sammenliknet med den undersøkende gruppen hadde en *mer negativ opplevelse av undervisningen i studien* og et *mer negativt syn på matematikk*. Det er vanskelig å si om gruppenes syn på matematikk har *utviklet* seg, men det kan ha blitt *forsterket* gjennom studien. Funnene indikerer følgelig en sammenheng *innad i hver av gruppene* mellom opplevelse av undervisningen i studien og syn på matematikk. Sett i lys av resultatet på t-testen fremstår det som at det finnes en forbindelse mellom disse (syn og opplevelse) og forskjellene mellom gruppenes endringsskår målt via t-testen. På denne måten kan undervisningsformene påvirke elevers læring i emnet likninger, og dersom undervisningsformene vedvarer kan de potensielt påvirke fremtidig læring. De kvalitative funnene viste dessuten at begge gruppene opplevde undervisningen i studien som *annerledes* enn den de var vant med, og at kategoriene de svarte i var i overenstemmelse med de to undervisningsformene som var intendert implementert i hver av gruppene. Dette bidrar til å styrke troverdigheten til observasjonen som ble foretatt i forbindelse med implementeringen, og styrker dermed troverdigheten til at de overnevnte funnene kan si noe om forskjellene mellom nettopp undersøkende undervisning og direkte instruksjon. De ikke-faglige aspektene kjønn og sosioøkonomisk bakgrunn var relativt like for de to gruppene. Det som hovedsakelig skilte gruppene var at den undersøkende gruppen hadde høyere terminkarakter i matematikk enn den direkte gruppen. Generelt indikerer disse funnene at ikke-faglige aspekter utgjorde en svak alternativ forklaring på elevers læring i emnet likninger, men at terminkarakter i matematikk kan ha hatt en påvirkning. Funnene i min studie er både sammenfallende og motstridende med tidligere forskning. I enten/eller-debatten om undersøkende undervisning og direkte instruksjon plasserer studien seg på den siden som taler for undersøkende undervisning. De kvantitative og kvalitative funnene indikerer samlet at undervisningsform kan påvirke elevers læring i emnet likninger ved å gi ulike muligheter for å lære. I praksis medfører dette at man som lærer bør ha et bevisst forhold til undervisningsform.

6.1 Veien videre

Jeg tok utgangspunkt i elevenes opplevelse av undervisningen for å uttale meg om deres syn på matematikk. Beliefs er imidlertid et etablert, faglig begrep i litteraturen som gjerne knyttes til elevenes syn på matematikk og som gjennom dette fremstår som en enda sterke indikator på elevenes syn på matematikk. I fremtidige studier kan det derfor være ønskelig å undersøke elevenes beliefs. Et spørreskjema som skal undersøke det matematikkfaglige begrepet beliefs bør være mye mer omfattende enn et som undersøker det mer trivielle begrepet opplevelse. Det kunne vært interessant å undersøke beliefs både før og etter studien for å undersøke om synet på matematikk *endrer* seg som følge av undervisning. Jeg sammenliknet kun to undervisningsformer i studien og undervisning i kun ett emne. Fremtidige studier kan sammenlikne flere undervisningsformer og kombinasjoner av disse i flere matematiske emner. Studien ble dessuten gjennomført over relativt kort tid og det ville derfor vært interessant å gjennomføre studien over lengre tid, samt undersøke læringsutbyttet en lengere stund etter undervisningsslutt. Dette vil kunne gi et tydeligere svar på om undervisningsform generelt har innvirkning på læring i matematikk. Dette krever mer tid, flere informanter og flere forskere.

Referanser

Adams, G. L. & Engelmann, S. (1996). Teaching: The Roots of Direct Instruction. I G. L. Adams & S. Engelmann (Red.), *Research on Direct Instruction: 25 years Beyond DISTAR*. Seattle, WA: Educational Achievment Systems.

Alseth, B., Breiteig, T. & Brekke, G. (2003). *Evaluering av Reform 97. Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering - matematikkfaget som kasus*. Notodden: Telemarksforsking Notodden.

Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 45*(6), s.797-810. doi:10.1007/s11858-013-0506-6

Bakken, A. & Elstad, J. I. (2012). *For store forventninger? Kunnskapsløftet og ulikhetene i grunnskolekarakterer* (NOVA rapport): Norsk institutt for forskning om oppvekst, velferd og aldring.

Bergem, O. K. & Grønmo, L. S. (2009). Undervisning i matematikk. I L. S. Grønmo & T. Onstad (Red.), *Tegn til bedring: Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007* (s. 113-138). Blindern: Unipub.

Bjørndal, C. R. P. (2017). *Det vurderende øyet. Observasjon, vurdering og utvikling i pedagogisk praksis* (3. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.

Blomhøj, M. (2016). *Fagdidaktik i matematik*. Fredriksberg: Frydenlund.

Blomhøj, M. & Haavold, P. Ø. (Akseptert). *Coherence through inquiry-based mathematics education*. Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.(2019). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME, The Netherlands: Utrecht.

Boaler, J. (1998). Open and Closed Mathematics: Student Experiences and Understandings. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), s.41-62. doi:10.2307/749717

Booth, J. L., McGinn, K. M., Barbieri, C. & Young, L. K. (2017). Misconceptions and Learning Algebra. I S. Stewart (Red.), *And the Rest is Just Algebra* (s. 63-78). Cham: Springer International Publishing.

Borg, W. R. & Gall, M. D. (1979). *Educational Research: An Introduction* (3. utg.). London: Longman.

Bronfenbrenner, U. (1981). *The Ecology of Human Development: Experiments by Nature and Design*. Cambridge: Harvard University Press.

Brown, G. T. L., Irving, S. E. & Keegan, P. J. (2008). *An Introduction to Educational Assessment, Measurement, and Evaluation: Improving the quality of teacher- based assessment* (2. utg.). Auckland, New Zealand: Pearson Education NZ.

Bryman, A. (2006). Integrating quantitative and qualitative research: how is it done? *Qualitative Research, 6*(1), s.97-113. doi:10.1177/1468794106058877

Cai, J., Ni, Y. & Hwang, S. (2015). Measuring Change in Mathematics Learning with Longitudinal Studies: Conceptualization and Methodological Issues. I J. A. Middleton, J. Cai & S. Hwang (Red.), *Large-Scale Studies in Mathematics Education* (s. 293-309). Cham: Springer International Publishing.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Bass, H. & Ball, D. L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*. Portsmouth, N.H: Heinemann.

Caspersen, J., Aamodt, P. O., Vibe, N. & Carlsten, T. C. (2014). *Kompetanse og praksis blant norske lærere: Resultater fra TALIS-undersøkelsen i 2013* (41). Oslo.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B. & Perlwitz, M. (1991). Assessment of a Problem-Centered Second-Grade Mathematics Project. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(1), s.3-29. doi:10.2307/749551
Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education* (7. utg.). USA: Routledge.
Cooper, G. & Sweller, J. (1987). Effects of Schema Acquisition and Rule Automation on Mathematical Problem-Solving Transfer. *Journal of Educational Psychology, 79*(4), s.347-362.
Creswell, J. W. (2014). *Research Design: Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches* (4. utg.). USA: SAGE Publications.
Creswell, J. W. & Plano Clark, V. L. (2011). *Designing and Conducting Mixed Methods Research* (2. utg.). USA: SAGE Publications.
Dimitrov, D. M. & Rumrill, P. D. (2003). Pretest-posttest designs and measurement of change. *Work, 20*(2), s.159-165.
Engelmann, S., Becker, W. C., Carnine, D. & Gersten, R. (1988). The Direct Instrution Follow Through Model: Design and Outcomes. *Education and Treatment of Children, 11*(4), s.303-317.
Equation. (2019). I *Encyclopædia Britannica*. Hentet 25.02.19 fra https://academic.eb.com/levels/collegiate/article/equation/472278#
Field, A. (2018). *Discovering Statistics Using IBM SPSS Statistics* (5. utg.). USA: SAGE.
Floden, R. E. (2002). The Measurement of Opportunity to Learn. I A. C. Porter & A. Gamoran (Red.), *Methodological Advances in Cross-National Surveys of Educational Achievement* (s. 231-266). Washington, DC: National Academy Press.
Grøgaard, J. B. & Arnesen, C. Å. (2016). Kjønnsforskjeller i skoleprestasjoner: Ulik modning? *Tidsskrift for ungdomsforskning, 16*(2), s.42-68.
Grønmo, L. S., Hole, A. & Onstad, T. (2017). Hovedresultater i matematikk i TIMSS Advanced, TIMSS og PISA. I L. S. Grønmo & A. Hole (Red.), *Prioritering og progresjon i skolematematikken*: Cappelen Damm Akademisk.
Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram: norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo: Akademika.
Hiebert, J. & Grouws, D. (2007). The Effects of Classroom Mathematics Teaching on Students' Learning. I F. K. Lester (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Bd. 1, s. 371-404). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. I J. Hiebert (Red.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (s. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Hmelo-Silver, C. E., Duncan, R. G. & Chinn, C. A. (2007). Scaffolding and Achievement in Problem-Based and Inquiry Learning: A Response to Kirschner, Sweller, and Clark (2006). *Educational Psychologist, 42*(2), s.99-107. doi:10.1080/00461520701263368
Johannessen, A. (2009). *Introduksjon til SPSS* (4. utg.). Oslo: Abstrakt forlag.
Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y. & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 36*, s.20-32. doi:10.1016/j.jmathb.2014.08.003
Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), s.317-326. doi:10.1007/BF00311062
Kieran, C. (2013). The False Dichotomy in Mathematics Education Between Conceptual Understanding and Procedural Skills: An Example From Algebra. I K. R. Leatham

(Red.), *Vital Directions for Mathematics Education Research* (s. 153-171). New York: Springer.
Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
Kirschner, P. A., Sweller, J. & Clark, R. E. (2006). Why Minimal Guidance during Instruction Does Not Work: An Analysis of the Failure of Constructivist, Discovery, Problem-Based, Experiential, and Inquiry-Based Teaching. *Educational Psychologist, 41*(2), s.75-86. doi:10.1207/s15326985ep4102_1
Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), s.297-312. doi:10.2307/30034852
Küchemann, D. (1981). Algebra. I K. Hart (Red.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16* (s. 102-119). London: John Murray.
Lazonder, A. W. & Harmsen, R. (2016). Meta-Analysis of Inquiry-Based Learning: Effects of Guidance. *Review of Educational Research, 86*(3), s.681-718. doi:10.3102/0034654315627366
LeCompte, M. D. & Goetz, J. P. (1982). Problems of Reliability and Validity in Ethnographic Research. *Review of Educational Research, 52*(1), s.31-60. doi:10.3102/00346543052001031
Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem Solving and Modeling. I F. K. Lester (Red.), *Second Hanbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Bd. 2, s. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
Lester, F. K. (2005). On the Theoretical, Conceptual, and Philosophical Foundations for Research in Mathematics Education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(6), s.457-467. doi:10.1007/BF02655854
Mathematics Assessment Resource Service. (2007-2015). Mathematics Assessment Project. Assessing 21st Century Math. Hentet 15.12.18 fra https://www.map.mathshell.org/index.php
Mayring, P. (2015). Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures. I A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Red.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of Methodology and Methods* (s. 365-380). Dordrecht: Springer Netherlands.
McDonnell, L. M. (1995). Opportunity to Learn as a Research Concept and a Policy Instrument. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 17*(3), s.305-322. doi:10.3102/01623737017003305
NESH. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi* (4. utg.). Hentet fra https://www.etikkom.no/forskningsetiske-retningslinjer/samfunnsvitenskap-jus-og-humaniora/
Niss, M. & Højgaard Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark.* (Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie 18). København: Undervisningsministeriet.
Pallant, J. (2010). *SPSS Survival Manual: A step by step guide to data analysis using SPSS* (4. utg.). USA: McGraw-Hill.
Philipp, R. A. (2007). Mathematics Teachers' Beliefs and Affect. I F. K. Lester (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Bd. 1, s. 257-315). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
Radu, M. (2002). Basic Skills Versus Conceptual Understanding in Mathematics Education: The case of Fraction Division. A Reply to Hung-Hsi Wu. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(3), s.93-95. doi:10.1007/BF02655712

Renkl, A. (2017). Learning from worked-examples in mathematics: students relate procedures to principles. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 49*(4), s.571-584. doi:10.1007/s11858-017-0859-3

Ringdal, K. (2018). *Enhet og mangfold: Samfunnsvitenskapelig forskning og kvantitativ metode* (4. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Rystedt, E., Helenius, O. & Kilhamn, C. (2016). Moving in and out of contexts in collaborative reasoning about equations. *Journal of Mathematical Behavior, 44*, s.50-64. doi:10.1016/j.jmathb.2016.10.002

Schauble, L. (1990). Belief Revision in Children: The Role of Prior Knowledge and Strategies for Generating Evidence. *Journal of Experimental Child Psychology, 49*(1), s.31-57. doi:10.1016/0022-0965(90)90048-D

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problemsolving, metacognition and sense making in mathematics. I D. Grouws (Red.), *Hanbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 334-370). New York: McMillan.

Schoenfeld, A. H. (2006). What Doesn't Work: The Challenge and Failure of the What Works Clearinghouse to Conduct Meaningful Reviews of Studies of Mathematics Curricula. *Educational Researcher, 35*(2), s.13-21. doi:10.3102/0013189X035002013

Schoenfeld, A. H. (2007). What is Mathematical Proficiency and How Can It Be Assessed? I A. H. Schoenfeld (Red.), *Assessing Mathematical Proficiency* (Mathematical Sciences Research Institute Publications. s. 59-74). Cambridge: Cambridge University Press.

Schoenfeld, A. H. (2013). Classroom observations in theory and practice. *The International Journal on Mathematics Education, 45*(4), s.607-621. doi:10.1007/s11858-012-0483-1

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The Gains and the Pitfalls of Reification -The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2), s.191-228. doi:10.1007/BF01273663

Shadish, W. R., Cook, T. D. & Campbell, D. T. (2002). *Experimental and Quasi-Experimental Designs for Generalized Causal Inference* (2. utg.). Boston: Houghton Mifflin.

Skemp, R. R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(2), s.88-95.

Stein, M. K., Remillard, J. & Smith, M. S. (2007). How Curriculum Influences Student Learning. I F. K. Lester (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Bd. 1, s. 319-369). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Stockard, J., Wood, T. W., Coughlin, C. & Khoury, C. R. (2018). The Effectiveness of Direct Instruction Curricula: A Meta-Analysis of a Half Century of Research. *Review of Educational Research, 88*(4), s.479-507. doi:10.3102/0034654317751919

Swafford, J. O. & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 Students' Preinstructional Use of Equations To Describe and Represent Problem Situations. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), s.89-112.

Sweller, J. & Cooper, G. (1985). The Use of Worked Examples as a Substitute for Problem Solving in Learning Algebra. *Cognition and Instruction, 2*(1), s.59-89.

TIMSS. (2011). Frigitte oppgaver fra TIMSS 2011. Matematikk 8.trinn. Hentet 15.12.2018 fra http://www.timss.no/timss05_frigitte.html

Tuovinen, J. E. & Sweller, J. (1999). A Comparision of Cognitive Load Associated With Discovery Learning and Worked Examples. *Journal of Educational Psychology, 91*(2), s.334-341.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag* (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-10.-arssteget

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Høring: Læreplan i matematikk fellesfag 1.-10.trinn* (2019/3842). Hentet fra https://hoering.udir.no/Hoering/v2/343?notatId=686

van Breukelen, G. J. P. (2006). ANCOVA versus Change From Baseline Had More Power in Randomized Studies and More Bias in Nonrandomized Studies. *Journal of Clinical Epidemiology, 59*(9), s.920-925. doi:10.1016/j.jclinepi.2006.02.007

van Breukelen, G. J. P. (2013). ANCOVA Versus CHANGE From Baseline in Nonrandomized Studies: The Difference. *Multivariate Behavioral Research, 48*(6), s.895-922. doi:10.1080/00273171.2013.831743

Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer Netherlands.

Wiliam, D. (2010). Standardized Testing and School Accountability. *Educational Psychologist, 45*(2), s.107-122. doi:10.1080/00461521003703060

Wood, T. & Sellers, P. (1997). Deepening the Analysis: Longitudinal Assessment of a Problem-Centered Mathematics Program. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(2), s.163-186. doi:10.2307/749760

Wu, H. (1999). Basic Skill versus Conceptual Understanding. A Bogus Dichotomy in Mathematics Education. *American Educator*, s.1-7.

Aarø, L. E. (2005). *Fra spørreskjemakonstruksjon til multivariat analyse av data. En innføring i survey-metoden* (HEMIL-rapport 2). Bergen: HEMIL-senteret, Universitetet i Bergen. Studiesenter Sandane, Høgskolen i Sogn og Fjordane.

Vedlegg 1: Kategorier og kategoridefinisjoner for analyse av spørreskjema B

Spørsmål a			
Seleksjonskriterier	*Overordnede kategorier*	*Detaljerte kategorier*	*Beskrivelse av kategoriene*
Kategoridefinisjon (tema): Elevenes opplevelse av undervisningen i studien *Abstraksjonsnivå:* Medium	Positive opplevelser	Bra	Elevsvar som kun bestod av ordet «bra».
		Helt greit	Elevsvar som kun bestod av uttrykket «helt greit» eller «ok».
		Lærerikt	Elevsvar som la vekt på at undervisningen medførte læring.
		Artig	Elevsvar som la vekt på at undervisningen var gøy.
		Nyttig med diskusjon	Elevsvar som la vekt på at diskusjoner var nyttig for å lære matematikk.
		Vanskelig, positivt	Elevsvar som beskrev undervisningen som vanskelig i positiv forstand.
	Negative opplevelser	Vanskelig, negativt	Elevsvar som beskrev undervisningen som vanskelig i negativ forstand.
		Kjedelig	Elevsvar som beskrev undervisningen som direkte kjedelig uten noen ytterligere begrunnelse.
		Lite utfordrende	Elevsvar som beskrev undervisningen som for enkel og uttrykte at de

			kunne mye av lærestoffet fra før av.
		Ikke lærerikt	Elevsvar som uttrykte at det hadde forekommet lav grad av læring.
	Øvrige	Annet	Elevsvar som ikke svarte på det det ble spurt om og som dermed ikke ga meg ytterligere innsikt.
		Ikke svart	Elevsvar som var helt blanke.

Spørsmål b			
Seleksjonskriterier	*Overordnede kategorier*	*Detaljerte kategorier*	*Beskrivelse av kategoriene*
Kategoridefinisjon (tema): Elevene opplevelse av undervisningen i studien som annerledes eller lik undervisningen de er vant med *Abstraksjonsnivå:* Medium	Forskjellig	Annerledes	Elevsvar som beskrev undervisningen i studin som «annerledes» uten å forklare på hvilken måte.
		Annerledes, mindre individuell frihet	Elevsvar som beskrev undervisningen som annerledes enn den de er vant med fordi de hadde mindre individuell frihet til å velge hvilke oppgaver de skulle jobbe med og hvordan, samt mindre grad av individuelt arbeid.
		Annerledes, ingen bruk av bøker	Elevsvar som beskrev undervisningen som annerledes enn den de er vant med fordi det ikke ble benyttet lærebøker.
		Annerledes, mer detaljert	Elevsvar som beskrev undervisningen som annerledes enn den de er vant med fordi undervisningen var grundigere med tanke på gjennomgang av lærestoff.
		Annerledes, ny lærer	Elevsvar som beskrev undervisningen som annerledes enn den de er

			vant med fordi de hadde fått ny lærer etter jul.
		Annerledes, nytt hefte	Elevsvar som beskrev undervisningen som annerledes enn den de er vant med fordi de fikk nytt hefte å jobbe med hver økt.
		Annerledes, diskusjoner	Elevsvar som beskrev undervisningen som annerledes enn den de er vant med fordi det var flere matematiske diskusjoner enn de var vant med i matematikkundervisningen.
		Annerledes, gruppearbeid	Elevsvar som beskrev undervisningen som annerledes enn den de er vant med fordi det var høy grad av samarbeid om å løse matematiske problemer sammenliknet med undervisningsformen de var vant med.
	Ingen forskjell	Likt	Elevsvar som beskrev undervisningen som lik som den de var vant med.
	Øvrige	Annet	Elevsvar som ikke svarte på det det ble spurt om og som dermed ikke ga meg ytterligere innsikt.
		Ikke svart	Elevsvar som var blanke.
		Vet ikke	Elevsvar som bestod av «vet ikke».

Spørsmål c			
Seleksjonskriterier	*Overordnede kategorier*	*Detaljerte kategorier*	*Beskrivelse av kategoriene*
Kategoridefinisjon (tema): Elevenes opplevelse av undervisningen i studien sammenliknet med den de er vant med *Abstraksjonsnivå:*	Overlegen	Bedre	Elevsvar som beskrev undervisningen de var vant med som bedre enn den de deltok på i forbindelse med studien uten å begrunne hvorfor.

Medium	Underlegen	Dårligere	Elevsvar som beskrev undervisningen de var vant med som dårligere enn den de deltok på i forbindelse med studien uten å begrunne hvorfor.
		Dårligere, ny lærer	Elevsvar som beskrev undervisningen de var vant med som dårligere enn den de deltok på i forbindelse med studien med begrunnelse i at de hadde fått ny lærer før studiens oppstart, som de foretrakk fremfor den læreren de hadde før jul.
	Ingen endring	Ingen forskjell	Elevsvar som beskrev undervisningen de var vant med som likestilt som undervisningen de deltok på i forbindelse med studien, enten i positiv eller negativ forstand.
	Forslag	Bra med kombinasjon	Elevsvar som beskrev at undervisningen de var vant med og undervisningen de deltok på i forbindelse med studien ville fungert best i kombinasjon med hverandre.
	Øvrige	Annet	Elevsvar som ikke svarte på det det ble spurt om og som dermed ikke ga meg ytterligere innsikt.
		Ikke svart	Elevsvar som var helt blanke.

Vedlegg 2: Observasjonsskjema

Beskrivelse av kategoriene

Aktivitet	**Beskrivelse**
Beskjeder	*En aktivitet hvor læreren ga elevene informasjon som var kjennetegnet ved at den ikke var direkte faglig relatert. Eksempelvis kunne dette være informasjon om flytting eller bytting av undervisningstimer, registrering av fravær, utdeling av ulike informasjonsskriv, inndeling i grupper o.l.*
Forelesning	*En aktivitet hvor læreren underviste elevene i et emne på tavla og viste eksempler og presenterte regneregler.*
Introduksjon av oppgave	*En aktivitet hvor læreren forklarte elevene hva de skulle gjøre og hvordan arbeidet skulle organiseres.*
Individuelt arbeid	*En aktivitet hvor elevene regnet for seg selv i heftene sine og sammenliknet svarene sine med løsningsforslaget.*
Par- og gruppearbeid	*En aktivitet hvor elevene samarbeidet om å løse oppgaver, som gjerne var kjennetegnet ved diskusjon.*
Oppsummering gjennom lærer	*En aktivitet hvor læreren gikk gjennom det elevene skulle ha lært i løpet av timen og hvor regneregler og sentrale prinsipper ble repetert.*
Klasseromsdiskusjoner	*En aktivitet hvor elevene presenterte løsningene sine for hverandre og som var kjennetegnet ved argumentasjon for eller imot ulike løsninger, samt ved spørsmålsstilling til aspekter som fremstod som uklare.*

Observasjonsskjemaet

Type aktivitet	**Tidsbruk**		
Beskjeder			
Forelesning			
Introduksjon av oppgave			
Individuelt arbeid			
Par- eller gruppearbeid			
Oppsummering gjennom lærer			
Oppsummering gjennom elever			

Aktivitet	Beskrivelse

Vedlegg 3: Spørreskjema A og førtest

Spørreskjema A

Nedenfor skal du krysse av de alternativene som passer best for deg. Velg kun én boks per spørsmål.

Er du gutt eller jente?

☐ Gutt ☐ Jente

Hvilken terminkarakter har du i matematikk?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

Hvor mange ganger var du på ferietur til utlandet i fjor?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ Flere enn 5

Har moren og/eller faren din studert ved universitetet?

☐ Mor ☐ Far ☐ Begge ☐ Ingen av dem

Hvor mange bøker har dere hjemme?

☐ Ingen ☐ Færre enn 50 ☐ Flere enn 50

Førtest

Oppgave 1

I oppgavene nedenfor skal du løse noen oppgaver. Du trenger ikke å vise utregning.

a) $2x + 13 = 47$

b) $3x - 3 = 7x + 5$

c) $2x \cdot \frac{1}{8} = 4$

Oppgave 2

Løs oppgavene nedenfor, vis utregning og forklar hvordan du har tenkt.

a) Et trestykke var 40 cm langt. Det ble delt i tre deler. Lengdene målt i cm er

$2\mathrm{x} - 5$

$\mathrm{x} + 7$

$\mathrm{x} + 6$

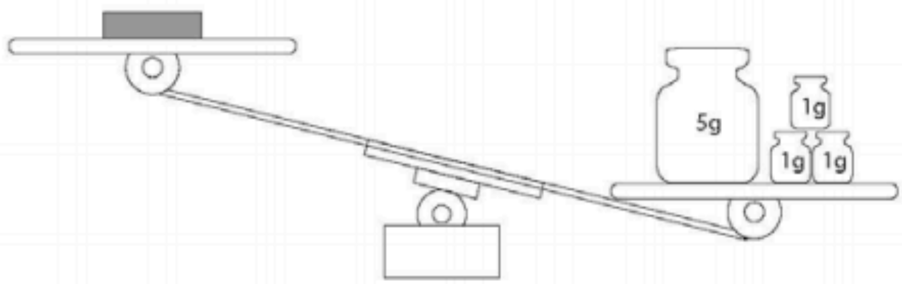
Hvor lang er den lengste delen?

b) Dersom $a + b = 25$

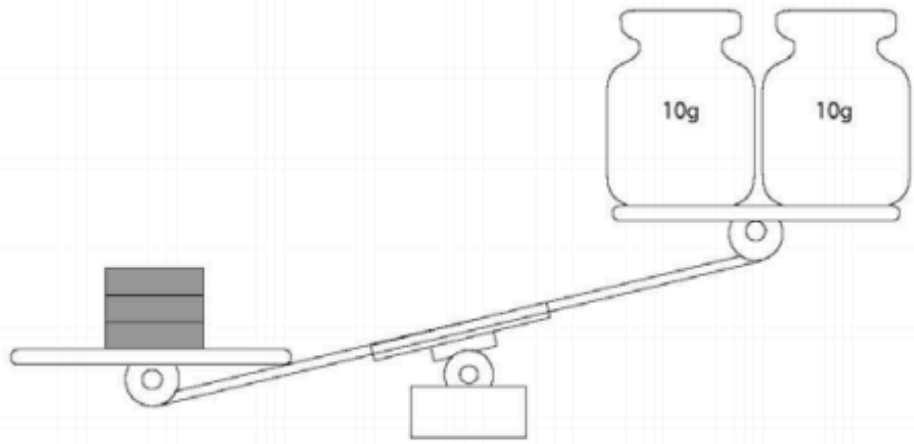
, hva er verdien av $2a + 2b + 4$?

c) Kryss av for riktig alternativ og forklar hvordan du har tenkt.

Julie har tre metallstykker. Alle stykkene veier det samme. Da hun balanserte ett stykke mot 8 gram, skjedde dette:



Da hun balanserte alle de tre stykkene mot 20 gram, skjedde dette:



Hvilket av alternativene nedenfor kan være vekten til ett metallstykke?

Ⓐ 5 g

Ⓑ 6 g

Ⓒ 7 g

Ⓓ 8 g

Slik tenkte jeg:

Oppgave 3

Nedenfor skal du løse noen oppgaver. Forklar hvordan du har tenkt og vis utregning.

Maria tjener 586 kr i uka og tillegg 72 kr for hver time overtid hun jobber.

a) Sett opp en likning for hvor mye Maria tjener på per uke.

b) Hvor mange timer overtid må Maria jobbe for å tjene 1558 kr på 1 uke?

Vedlegg 4: Spørreskjema B og ettertest

Spørreskjema B

Nedenfor skal du svare på noen spørsmål som omhandler din opplevelse av matematikkundervisningen. Vær helt ærlig, prøven blir anonymisert i etterkant, slik at ingen kan spore dine svar tilbake til akkurat deg.

a) Hvordan synes du det har vært å arbeide med matematikk slik dere har gjort de to siste ukene?

b) Har matematikkundervisningen i studien vært annerledes enn slik den pleier å være?

c) Synes du slik dere pleier å arbeide med matematikk er bedre, dårligere eller likt som slik dere har jobbet med matematikk de siste to ukene?

Ettertest

Oppgave 1:

I oppgavene nedenfor skal du løse noen oppgaver. Du trenger ikke å vise utregning.

a) $2x + 13 = 47$

b) $3x - 3 = 7x + 5$

c) $2x \cdot \frac{1}{8} = 4$

Oppgave 2:

Løs oppgavene nedenfor, vis utregning og forklar hvordan du har tenkt.

a) Et trestykke var 40 cm langt. Det ble delt i tre deler. Lengdene målt i cm er

$2\mathrm{x} - 5$

$\mathrm{x} + 7$

$\mathrm{x} + 6$

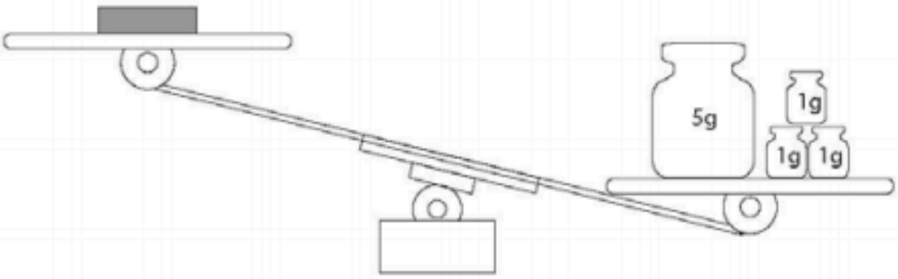
Hvor lang er den lengste delen?

b) Dersom $a + b = 25$

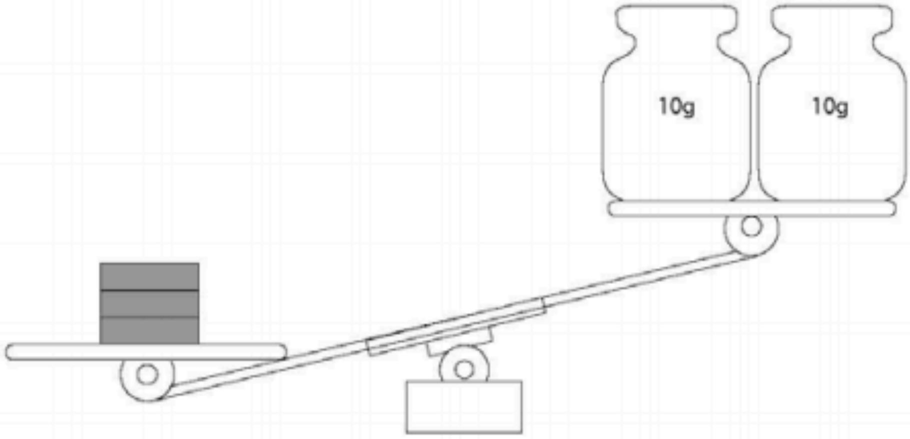
, hva er verdien av $2a + 2b + 4$?

c) Kryss av for riktig alternativ og forklar hvordan du har tenkt.

Julie har tre metallstykker. Alle stykkene veier det samme. Da hun balanserte ett stykke mot 8 gram, skjedde dette:



Da hun balanserte alle de tre stykkene mot 20 gram, skjedde dette:



Hvilket av alternativene nedenfor kan være vekten til ett metallstykke?

- (A) 5 g
- (B) 6 g
- (C) 7 g
- (D) 8 g

Slik tenkte jeg:

Oppgave 3:

Nedenfor skal du løse noen oppgaver. Forklar hvordan du har tenkt og vis utregning.

Maria tjener 586 kr i uka og tillegg 72 kr for hver time overtid hun jobber.

a) Sett opp en likning for hvor mye Maria tjener på per uke.

b) Hvor mange timer overtid må Maria jobbe for å tjene 1558 kr på 1 uke?

Vedlegg 5: Elevhefte økt 1, undersøkende gruppe

Økt 1: Å tolke lineære likninger med én ukjent

<u>Oppgave 1: Likninger og virkelighetsnære situasjoner</u>

a) Anta at det er noen stoler i et rom og at hver av dem har fire bein. La x= antall stoler og y= det totale antall bein til sammen for alle stolene.

Sett et kryss i den boksen eller boksene dere mener beskriver denne situasjonen.

(a) $x = 4y$ ☐ (b) $y = 4x$ ☐ (c) $x = \frac{y}{4}$ ☐ (d) $y = \frac{x}{4}$ ☐

Forklar hvordan dere har tenkt:

____

____

____

____

____

b) Martin kjøper noen blyanter og viskelær. En penn koster x kroner og et viskelær koster y kroner.

b= antall blyanter Martin kjøper

v= antall viskelær Martin kjøper

De to følgende likningene er sanne. Forklar hva hver av likningene sier ved å bruke deres egne ord. Referer til blyanter og viskelær i forklaringene deres, ikke bruk kun symbolene for dem.

$$b = 2v$$

$$x = 2y$$

<u>Oppgave 2: Likninger og påstander</u>

I denne oppgaven skal dere avgjøre hvilke likninger som hører til hvilke påstander. Dere skal sammen komme frem til en enighet, og dersom dere er uenig må dere argumentere overfor hverandre hvorfor du mener at du har rett. Bruk farger eller symboler (f.eks. en runding, firkant, trekant osv.) til å markere parene av påstander og likninger. Det er to blanke felt for påstandene, og disse skal dere selv fylle ut slik at de passer sammen med hver av de to gjenværende likningene.

$a = antall\ epler\ jeg\ kjøpte$ $b = antall\ bananer\ jeg\ kjøpte$

$y = 2x$	$b = 2a$
$a = \frac{b}{2}$	$x = 2y$
$ax = 5$	$ax + by = 5$
$y = \frac{x}{2}$	$b + a = 5$
$b = 2$	$x = \frac{y}{2}$

Jeg kjøpte dobbelt så mange bananer som epler.	Eplene jeg kjøpte kostet 5 kroner.
Til sammen kjøpte jeg 5 epler og bananer.	Jeg betalte 5 kroner for alle eplene og bananene jeg kjøpte.
Bananer koster dobbelt så mye som epler.	Bananer koster 2 kroner.
Epler og bananer koster det samme.	Eplene koster halvparten så mye som bananene.

Vedlegg 6: Elevhefte økt 2, undersøkende gruppe

Økt 2: Å løse lineære likninger med én ukjent

<u>Oppgave 1: La oss rettferdiggjøre svarene våre</u>

a) Jonas og Josefine prøver å finne ut når følgende likning er sann:

$$2 - 2X = 4$$

Har Jonas og Josefine rett? Hvis ikke, forklar hvorfor.

Jonas:

Josefine:

Når mener deres at likningen er sann?

b) Jonas og Josefine har sett på enda en likning og prøvd å finne når den er sann eller usann. Likningen de har sett på er:

$$12x - 8 = 4x$$

Kommenter resonnementene deres og identifiser eventuelle feil eller mangler.

Jonas:

Josefine:

Når mener deres at likningen er sann?

Oppgave 2: Sant eller usant

a)

$$4x + 1 = 3$$

Finn tre verdier for x som gjør likningen usann. Forklar hvordan dere kan vite at likningen er usann for de tre verdiene dere valgte.

b)

$$4x + 1 = 3$$

Finn en verdi som gjør likningen sann. Forklar hvordan dere kan vite at likningen er sann for den verdien dere valgte.

Oppgave 3: Alltid, noen ganger eller aldri sant

Dere skal svare på følgende spørsmål:

a) Hva betyr det at en likning «alltid» er sant?

b) Hva betyr det at en likning «aldri» er sant?

c) Hvor mange eksempler må dere minimalt gi for å «bevise» at en likning er sann «noen ganger»?

d) Dere skal nå kategorisere hver av likningene i tabellen nedenfor som enten «alltid», «noen ganger» eller «aldri» sann. Bruk en farge for hver av kategoriene, f.eks. grønn for «alltid» sann, gul for sann «noen ganger» og rød for «aldri» sann. Diskuter og forklar for hverandre hvordan dere har tenkt!

E1 $2-x=x-2$	E2 $3+x=x+3$
E3 $x+5=x-3$	E4 $3x-5=2x$
E5 $\frac{x}{2}=x$	E6 $2(x+1)=2x+1$
E7 $6x=x$	E8 $7x+14=7(x+2)$
E9 $\frac{10}{2x}=5$	E10 $\frac{2x+4}{2}=x+2$
E11 $5x-5=5(x+1)$	E12 $4x=4$

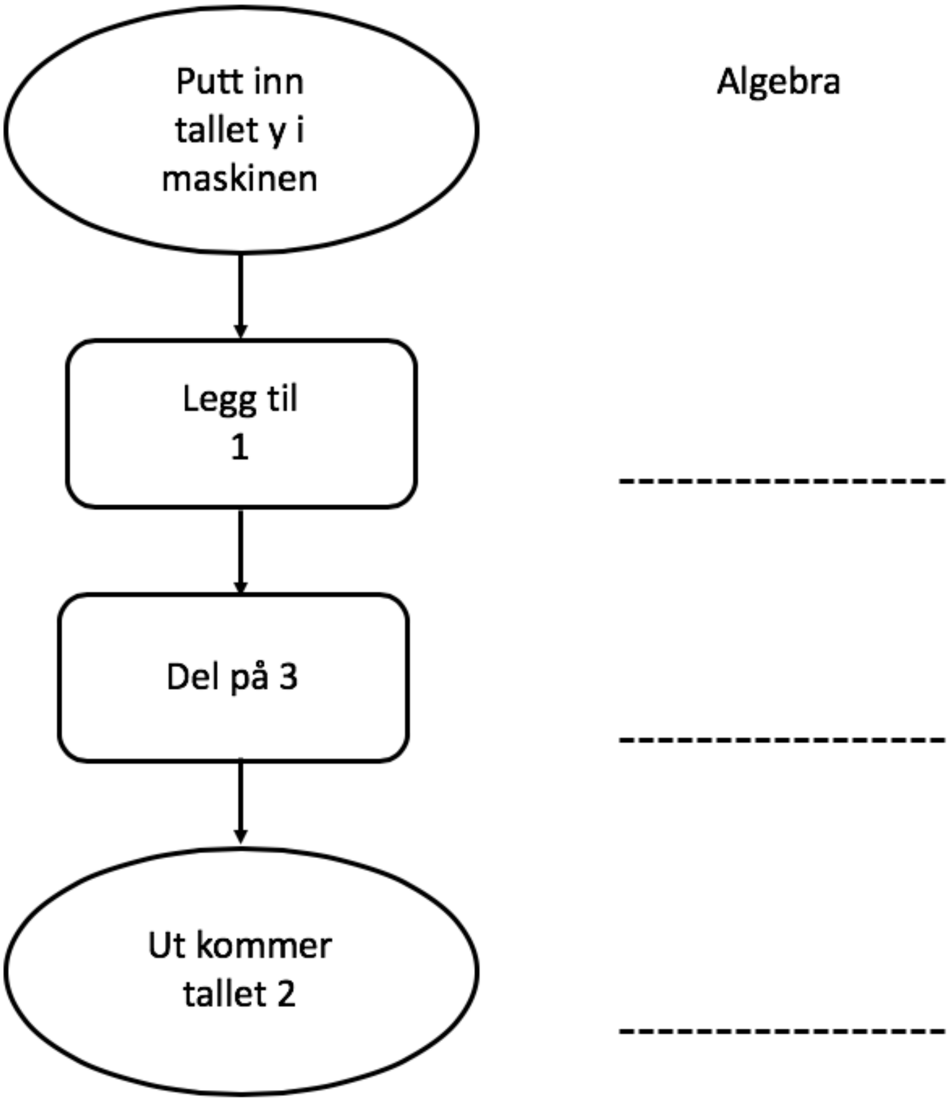
Slik tenkte vi:

Vedlegg 7: Elevhefte økt 3, undersøkende gruppe

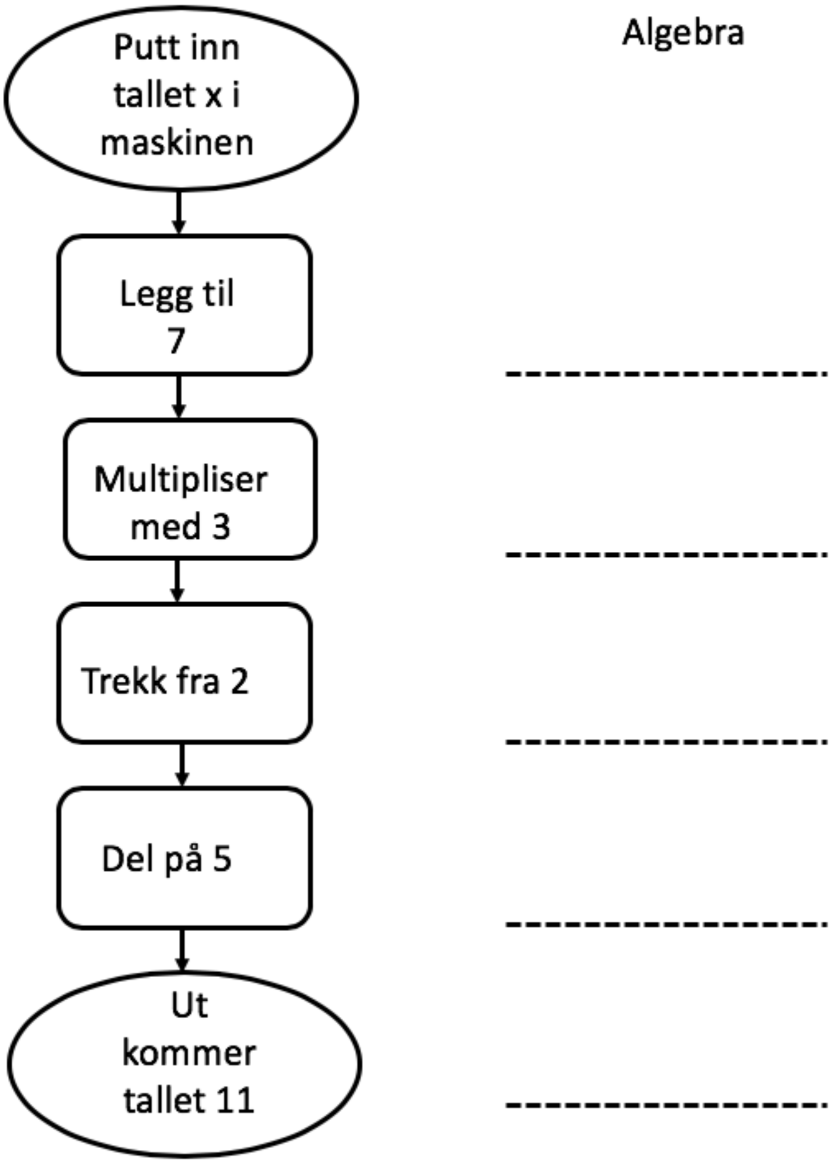
Økt 3: Å sette opp lineære likninger med én ukjent

Oppgave 1: Algebramaskinen

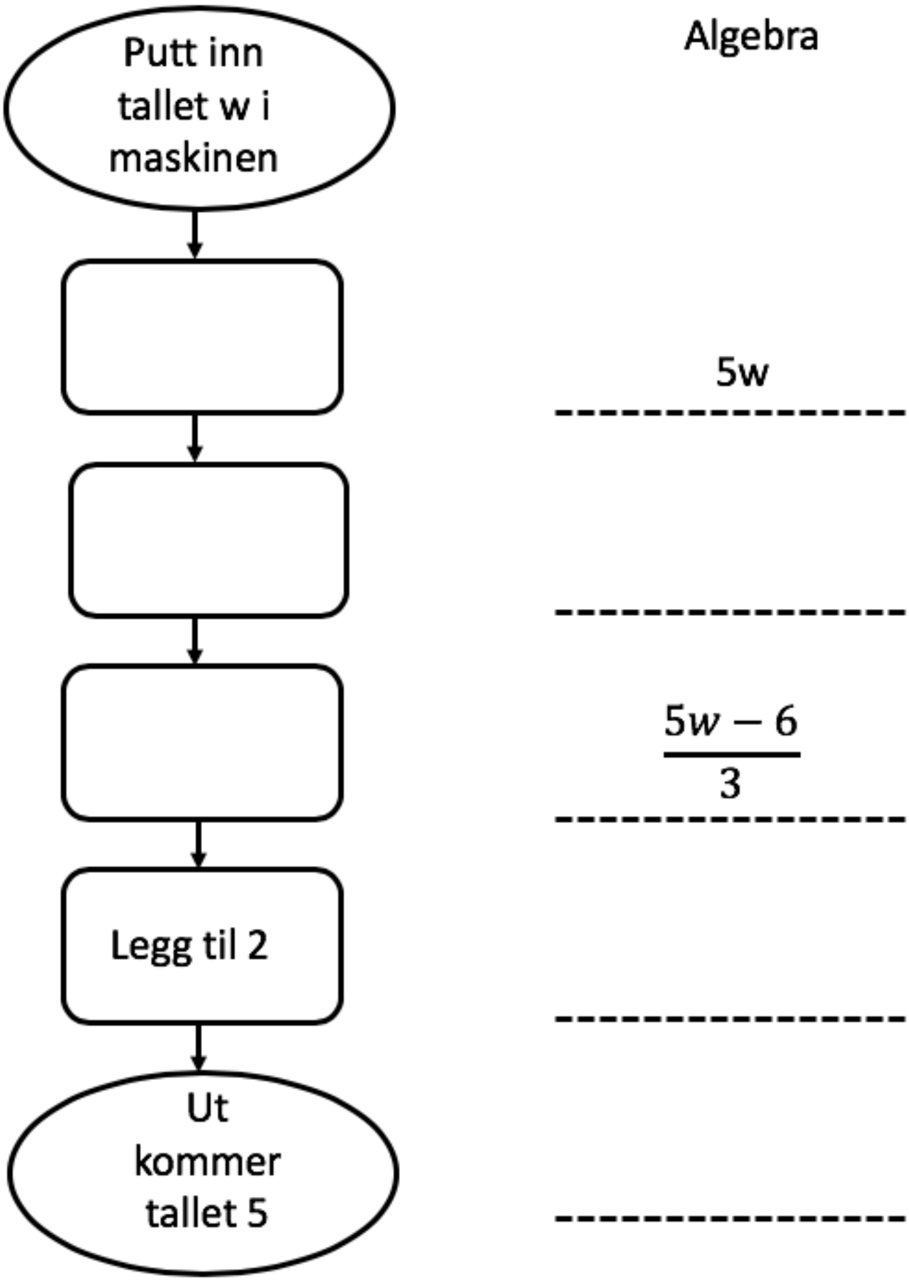
a) Nedenfor ser dere en algebramaskin. Den fungerer slik at dere putter tall inn i den og ut kommer til slutt en likning. For hver av linjene som står på siden av maskinen skal dere forklare hva som skjer inni maskinen ved å skrive uttrykk for det som skjer. På den siste linjen får dere ut en likning. Denne skal dere løse.



b) Nedenfor ser dere en algebramaskin. Løs oppgaven på samme måte som i oppgave a.



c) I denne oppgaven skal dere fullføre algebramaskinen. Løs likningen dere får ut til slutt.



Oppgave 2: Å bygge likninger

$x = 6$ er løsningen på følgende likning:

$$x + 3 = 9$$

a) Finn to andre likning som har samme løsning.

b) Hvordan kan dere finne ut om likningene dere lagde faktisk gir svaret $x = 6$?

c) Sjekk om likningene dere lagde i oppgave a) gir svaret $x = 6$ på to forskjellige måter.

Oppgave 3: Forbedre arbeidene

I boksen til venstre nedenfor ser dere Hanna sitt arbeid med å bygge likninger som har løsningen $x = 6$. I boksen til høyre nedenfor ser dere Jenny sitt arbeid med å bygge likninger som har løsningen $x = 6$. Se over de to elevenes arbeid og forklar hvordan dere tror elevene har tenkt. Forbedre deretter arbeidet deres. Tenk både på om likningene er korrekte og om arbeidet kunne vært presentert bedre.

$$x = 6$$

$$x + 2 = 8$$

$$\frac{x+2}{2} = 4$$

$$\frac{x+2}{2} - 1 = 3$$

$$3\left(\frac{x+2}{2} - 1\right) = 9$$

$$x = 6$$

- 2

$$x - 2 = 4$$

∕. 4

$$\frac{x-2}{4} = 1$$

+ 3

$$\frac{x+1}{4} = 4$$

x 5

$$\frac{5(x+1)}{4} = 20$$

Oppgave 4: Bygging og løsning av likninger

a) I denne oppgaven skal dere hver for dere lage en likninger i hver av boksene nedenfor. Dere må starte med å bestemme hva x skal være lik til å begynne med. På hver av linjene til venstre skal dere benytte en av de fire regningsartene, slik at hver av dem er brukt en gang hver i byggingen av likningen. På linjene til høyre skal dere skrive uttrykkene som blir til gjennom operasjonene som utføres. På den siste linjen vil den fullstendige likningen stå.

Regneoperasjoner	x = ____
____________________	__________
____________________	__________
____________________	__________
____________________	__________ Dette er likning 1.

Regneoperasjoner	x = ____
____________________	__________
____________________	__________
____________________	__________
____________________	__________ Dette er likning 2.

b) I denne oppgaven skal du løse partneren din sine likninger fra oppgave a. Før svarene dine i boksene under. Svaret på likningen føres på nederste linjen til høyre.

Regneoperasjoner

Likning 1:_________

Regneoperasjoner

Likning 2:_________

Vedlegg 8: Elevhefte økt 1, direkte gruppe

Økt 1: Å tolke lineære likninger med én ukjent

Oppgave 1: Skålvekten

Eksempel 1

Hvilket tall må x være for at uttrykkene på hver side av likhetstegnet skal være like?

$$x + 6 = 2 + 5$$

Løsningsforslag
Verdien av uttrykket på høyre side er 7. Da må x + 6 også være 7. Det betyr at 6 mer enn x er 7, så da må x være 6 mindre enn 7.

$$\underline{x = 1}$$

Hvilket tall må x være for at uttrykkene på hver side av likhetstegnet skal være like? Løs oppgavene nedenfor!

a) $x + 2 = 6 + 3$

b) $x + 4 = 5 + 2$

c) $5 - 2 = x + 1$

d) $4 - 1 = x - 2$

e) $x + 1 = 2x + 2$

f) $2x = x + 1$

Oppgave 2: Fra tekst til likning

Eksempel 2

Lag en likning til setningen: Det dobbelte av tallet x er 14.

Løsningsforslag
Det dobbelte av tallet x er 2x. Likningen blir da:

$$\underline{\underline{2x = 14}}$$

Lag likninger til setningene.

a) 3 mer enn et tall er 17

b) 5 mindre enn et tall er 10

c) En mindre enn det dobbelte av et tall er 5 mer enn tallet.

Oppgave 3: Fra likning til tekst

Eksempel 3

Forklar likningen $2x - 2 = 8$ med ord.

Løsningsforslag
Likningen kan uttrykkes med ord slik:

2 mindre enn det dobbelte av et tall er 8.

Forklar likningene med ord.

a) $4x = 24$

b) $x - 1 = 12$

c) $\frac{x}{4} = 16$

<u>Oppgave 4: Å knytte situasjon og likning sammen</u>

Eksempel 4

a= antall pærer jeg kjøpte
b= antall epler jeg kjøpte
x= kostnaden for en pære i kroner
y= kostnaden for et eple i kroner

Jeg kjøpte 3 flere epler enn pærer på butikken.

$$a + 3 = b$$

Finn den påstanden og den likningen som passer sammen. Marker med en dobbeltsidig pil boksene som hører sammen.

Heidi kjøpte dobbelt så mange pærer som epler.	$b + a = 5$
Eplene jeg kjøpte kostet 10 kroner.	$x = 2y$
Til sammen kjøpte jeg 5 epler og pærer.	$x = 4$

Pærene koster dobbelt så mye som eplene.	$\mathrm{a} = 2\mathrm{b}$
Eplene koster halvparten av pærene.	$x = y$
Pærer koster 4 kr per stk.	$a = 4$
Jeg kjøpte 4 pærer.	$\mathrm{by} = 10$
Epler og pærer koster det samme.	$y = \frac{1}{2}x$

Vedlegg 9: Elevhefte økt 2, direkte gruppe

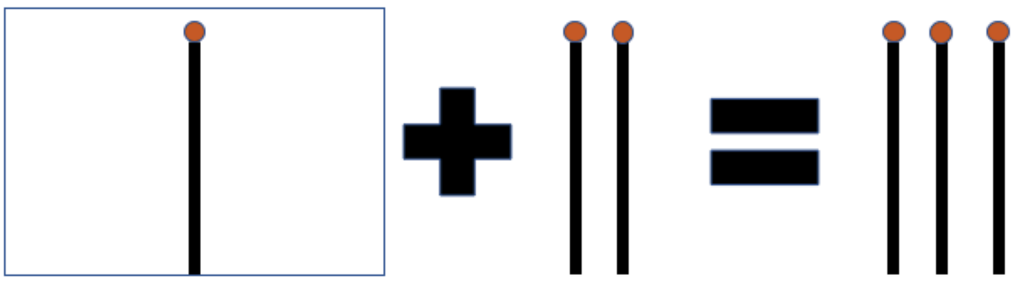
Økt 2: Å løse lineære likninger med én ukjent

<u>Oppgave 1: Fyrstikkeskespillet</u>

Jobb to og to sammen. Regelen for spillet er at dere må gjøre det samme på begge sider av likhetstegnet.

1) Dere starter med å velge hvem som skal begynne å legge fyrstikker i eskene. Antallet fyrstikker må være likt i alle eskene.
2) Når den som har lagt fyrstikker i eskene er ferdig, setter han på lokket. Antallet fyrstikker i hver eske er da ukjent for den andre eleven.
3) Eleven som vet antallet fyrstikker i hver eske skal bruke eskene og løse fyrstikker til å sette opp en likning til den andre eleven.
4) Eleven som ikke vet antall fyrstikker i eskene skal finne det ukjente antallet ved å flytte på fyrstikkeskene og de løse fyrstikkene. Eleven skal til slutt gjette hva antallet er og eleven som lagde likningen svarer om det er rett eller galt.
5) Deretter bytter dere roller og spiller en ny runde.

Eksempel 1



Fjerner 2 fyrstikker på hver side av likhetstegnet.

Eleven som skulle finne ut antall fyrstikker i hver eske ser nå at en eske er lik en fyrstikk.

Oppgave 2: Å løse lineære likninger

Eksempel 2

Løs likningen.

$$8 + x = 14$$

Løsningsforslag

$$8 + x = 14$$

$$8 + x - 8 = 14 - 8$$

Trekker fra 8 på begge sider av likhetstegnet

$$x = 6$$

Løs likningene.

a) $2x + 4 = 10$

b) $3x + 7 = 21$

c) $12x + 6 = 60$

d) $7x - 3 = 25$

e) $5x - 10 = 45$

f) $8x - 16 = 64$

g) $7\mathrm{x} = 63$

h) $4\mathrm{x} = 60 - \mathrm{x}$

i) $2\mathrm{x} = 15 - 3\mathrm{x}$

j) $\frac{1}{2}x + 2 = 6$

k) $\frac{3}{2}x + 2 = 14$

l) $\frac{1}{5}x - 3 = 20$

m) $\frac{2}{6}x + 3 = 5$

n) $\frac{3+x}{5} = 9$

o) $\frac{-x+5}{2} = 10$

Oppgave 3: Likninger og virkelighetsnære situasjoner

Eksempel 3

Frida, Tiril, Janne og Hanna tar 162 situps til sammen. Frida tar 5 ganger så mange situps som Tiril. Hanna tar 35 flere situps enn Tiril. Janne tar 12 færre situps enn Hanna. Hvor mange situps tar Tiril?

Løsningsforslag
Kall antall situps **Tiril** tar for x. Ut fra opplysningene i oppgaven kan du sette opp disse algebraiske uttrykkene for situps for hver av jentene:

Tiril tar $x\ situps$
Frida tar $5x\ situps$
Hanna tar $x + 35\ situps$
Janne tar $(x + 35) - 12 = x + 35 - 12 = x + 23\ situps$

Jentene tar 162 situps til sammen. Det gir likningen:

$$x + 5x + (x + 35) + (x + 23) = 162$$

$$x + 5x + x + 35 + x + 23 = 162$$

$$8x + 58 = 162$$

Trekker fra 58 på begge sider av likhetstegnet

$$8x + 58 - 58 = 162 - 58$$

$$8x = 104$$

Deler på 8 på begge sider av likhetstegnet

$$\frac{8x}{8} = \frac{104}{8}$$

$$x = 13$$

Svar: **Tiril tar 13 situps.**

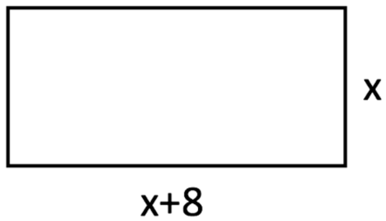
Bruk opplysningene i oppgavene til å sette opp likninger og løs dem.

a) Broren til Kristine er 5 år eldre enn henne. Hvor gammel er Kristine hvis hun og broren til sammen er 17 år? Hvor gammel er broren?

b) Gunn er 3 år eldre enn Bjarne. Bjarne er 3 år eldre enn Bjørn. Gunn, Bjarne og Bjørn er til sammen 99 år. Hvor gamle er hver av dem?

c) Eirik er 4 år yngre enn Øyvind. Kristian er dobbelt så gammel som Øyvind. De tre er til sammen 36 år. Hvor gamle er hver av de tre guttene?

d) Lengden på et rektangelformet jorde er 8 mer enn bredden. Hva er bredden når omkretsen av jordet er 260 m? Skriv opp som en likning og løs oppgaven.

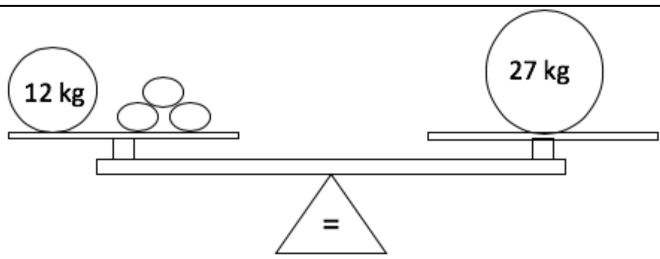


Vedlegg 10: Elevhefte økt 3, direkte gruppe

Økt 3: Å sette opp lineære likninger med én ukjent

Oppgave 1: Å bygge opp en likning fra en fortelling

Eksempel 1



Petter har en skålvekt og på den ene siden har han lagt tre like tunge kuler pluss en større kule som veier 12 kg. Til sammen veier de tre små og den store kulen like mye som en gigantisk kule Petter har lagt på den andre siden av vekten som veier 27 kg. Petter lurer på hvor mye hver av de tre kulene veier. Kan du hjelpe han?

Løsningsforslag
La oss kalle vekten til én kule for x. Da blir ligningen slik:

$$3x + 12 = 27$$

Trekker fra 10 på begge sider

$$3x = 15$$

Deler på 3 på begge sider

$$x = \frac{15}{3}$$

$$\underline{\underline{x = 5}}$$

Sett opp likninger til fortellingene og løs de.

a) Petter og Lasse har like mye penger. Petter kjøper to gensere, og har da igjen 110 kr. Lasse kjøper en genser av samme type som de Petter kjøpte, og han har igjen 405 kr. Hvor mye koster én genser?

b) Karina vil kjøpte seg en ny kjole og nye sko til juleballet. Kjolen er dobbelt så dyr som skoene. Hun betaler 1200 for begge deler. Hva koster kjolen og hva koster skoene?

c) Geir og Jørgen jobber som jordbærplukkere. De tjener 500 kr per uke og i tillegg tjener de 5 kr per kurv de plukker. En uke tjente Geir 1525 kr. Jørgen tjente 2050 kr den samme uken. Hvor mange kurver med jordbær plukket Geir og hvor mange plukket Jørgen denne uken? Hvor mange plukket hver av dem i snitt per dag dersom man regner en arbeidsuke som 5 dager?

d) Tina, Sara, Linn og Vera har hatt sommerjobb. Tina tjente 2000 kr mer enn Sara. Linn tjente halvparten av det Sara tjente. Vera tjente tre ganger så mye som Sara. Til sammen tjente jentene 29 500 kr. Hva tjente hver av dem?

e) Harald kjøpe 3 nye skrivebøker og 3 nye penner til skolestart. Skrivebøkene kostet 4 ganger så mye som pennene. Han betalte 225 kr til sammen. Hva kostet en skrivebok og hva kostet en penn?

Oppgave 2: Lag en fortelling til likningene

Eksempel 2

Lag en regnefortelling til likningen:

$$2x + 10 = 6x$$

Løsningsforslag
Hanne kjøper 2 viskelær til x kroner stykket og en blyant til 10 kroner. Til sammen koster de to viskelærene og blyanten like mye som 6 viskelær ville kostet. Hva koster et viskelær?

Eksempel 3

Lag en regnefortelling til likningen:

$$8x - 5 = 10x$$

Løsningsforslag
Hassan bor i Finnmark og der blir det veldig kaldt på vinteren. Han har funnet ut at i dag er det hele 8 ganger så kaldt ute som i fryseren hans, og at i morgen skal temperaturen synke med 5 grader. Da vil det være 10 ganger så kaldt ute som i fryseren til Hassan. Hvor kald er fryseren hans?

Lag regnefortellinger til likningene.

a) $6x - 4 = 8x$

b) $2x + 5 = 3x$

c) $5x + 100 = 200 + 3x$

Vedlegg 11: Løsningsforslag, undersøkende gruppe

Løsningsforslag økt 1: Å tolke lineære likninger med én ukjent

Oppgave 1:

a) Uttrykk b og c er korrekt. De beskriver begge at antallet bein er fire ganger antallet stoler.
b) Den første likningen, $b = 2v$, betyr at han kjøper dobbelt så mange blyanter som viskelær, eller halvparten så mange viskelær som penner. Den andre likningen, $x = 2y$, betyr at blyantene koster dobbelt så mye som viskelær eller at viskelærene koster halvparten så mye som blyanter.

Oppgave 2:

Påstanden og likningen som står på samme rad hører sammen. Der det er markert med tykk skrift så er det foreslått likninger eller påstander som manglet i alternativene elevene fikk og som de måtte lage selv.

Jeg kjøpte dobbelt så mange bananer som epler.	$b = 2a$ $a = \frac{b}{2}$
Til sammen jeg kjøpte 5 epler og bananer.	$b + a = 5$
Bananer koster dobbelt så mye som epler.	$x = \frac{y}{2}$
Epler og bananer koster det samme.	**x=y**
Eplene jeg kjøpte kostet 5 kroner.	$ax = 5$
Jeg betalte 5 kroner for alle eplene og bananene jeg kjøpte.	$ax + by = 5$

Bananer koster 2 kroner.	$\boldsymbol{y = 2}$
Eplene koster halvparten så mye som bananene.	$y = 2x$
Jeg kjøpte to bananer	$b = 2$
Bananer koster halvparten så mye som epler.	$y = \frac{1}{2}x$ $x = 2y$

Løsningsforslag økt 2: Å løse lineære likninger med én ukjent

Oppgave 1:

a) Likningen $2 - 2x = 4$ er kun sann når $x = -1$.

   Jonas har løst likningen $2 + 2x = 4$ i stedet for $2 - 2x = 4$. På den andre linjen skulle det stått $-2x = 4 - 2$.

   Josefine tar ikke med i beregningen hvilken effekt det vil ha å trekke fra et negativt tall. Hun har ikke prøvd å sette inn noen negative verdier for x eller gjort noen andre algebraiske manipulasjoner.

b) Jonas har et valid poeng i at uttrykkene ikke er like, men han har glemt å vurdere om det finnes en verdi for x som kan gjøre likningen sann.

   Josefine ser bort fra den ukjente og ser kun på tallene når hun regner. Hun viser ingen algebraisk tenkning fordi hun setter ikke inn en verdi for x eller forsøker å løse likningen.

Oppgave 2:

a) F.eks. 4,1 og 2.

b) $x = \frac{1}{2}$. Vet at dette er sant ved å sette inn verdien i likningen. Godta også andre mer intuitive forklaringer med ord.

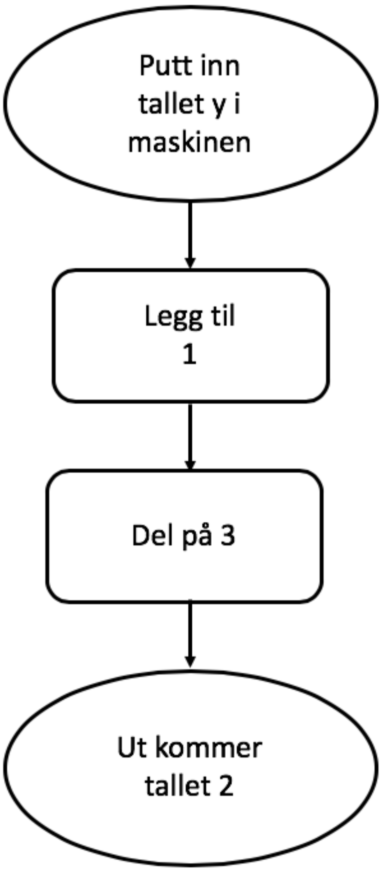
Oppgave 3:

a) Likningen er sann for enhver verdi for x.
b) Det er ingen verdier for x som gjør likningen sann.
c) To. En verdi for x som gjør likningen sann og en verdi for x som gjør likningen usann.
d) Alltid sann: E2,E8,E10
   Noen ganger sann: E1,E7,E12,E9,E5,E4
   Aldri sann: E3,E11,E6
   Her er det viktig at elevene kan forklare hvorfor de mener det er sånn.

Løsningsforslag økt 3: Å sette opp lineære likninger med én ukjent

Oppgave 1:

a)



Algebra

$$y+1$$

$$\frac{y+1}{3}$$

$$\frac{y+1}{3}=2$$

Det finnes flere måter å løse likningen på. Her er et forslag:

$$\frac{y+1}{3}=2$$

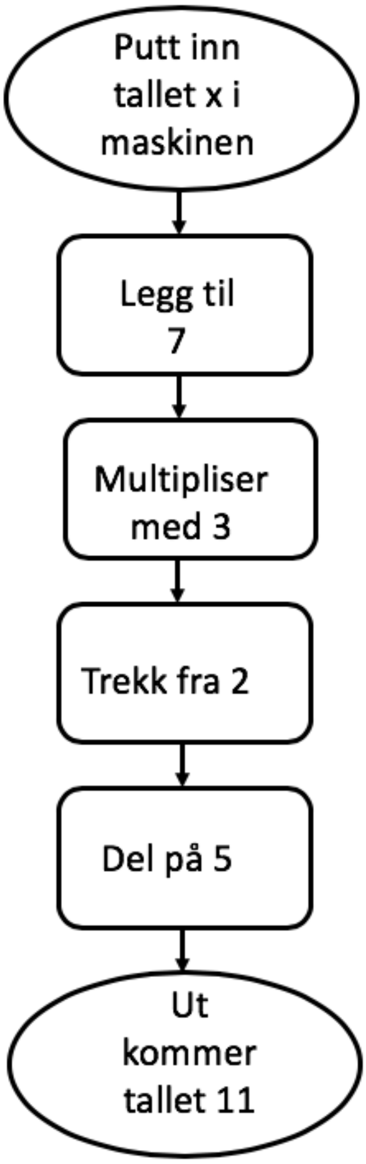
Multipliser med 3

$$y+1=6$$

Trekk fra 1

$$y=5$$

b)



Algebra

$x + 7$

$3(x + 7)$

$3(x + 7) - 2$

$\frac{3(x + 7) - 2}{5}$

$\frac{3(x + 7) - 2}{5} = 11$

Det finnes flere måter å løse likningen på. Her er et forslag:

$$\frac{3(x + 7) - 2}{5} = 11$$

Multipliser med 5

$$3(x + 7) - 2 = 55$$

Legg til 2

$$3(x + 7) = 57$$

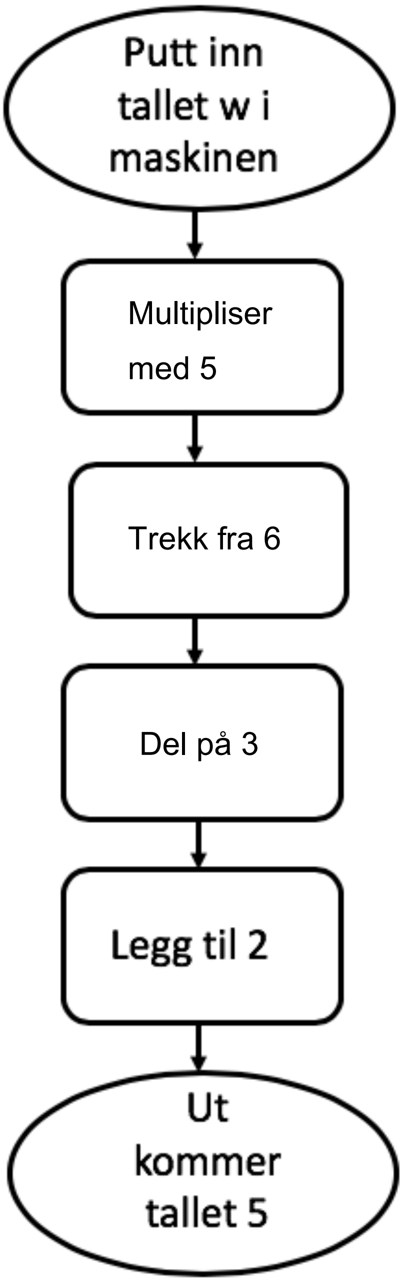
Del med 3

$x + 7 = 19$

Trekk fra 7

$x = 12$

c)



Algebra

5w

$5w - 6$

$$\frac{5w-6}{3}$$

$$\frac{5w-6}{3} + 2$$

$$\frac{5w-6}{3} + 2$$

Det finnes flere måter å løse likningen på. Her er et forslag:

$$\frac{5w-6}{3}+2=5$$

Trekk fra 2

$$\frac{5w-6}{3}=3$$

Multipliser med 3

$$5w-6=9$$

Legg til 6

$$5w=15$$

Del på 5

$$w=3$$

Oppgave 2:

a) F.eks. $x-2=4$ og $x+2=8$
b) Løse dem eller sett inn 6 for x.
c) F.eks. de to måtene nevnt i oppgave b).

Oppgave 3:

Hanna har bygget opp en korrekt likning og har ingen feil. Hun har ikke forklart hvert steg i likningen. Dette kunne hun forbedret, f.eks. ved å bruke piler slik som Jenny.

Jenny har brukt piler til å vise hva hun har gjort (eller ment å gjøre). Hun har gjort feil i oppbygningen av likningen. Når hun skulle legge til 3 på begge sider la hun til $\frac{3}{4}$ på venstre side.

Oppgave 4:

Et eksempel på oppbygning av en likning og løsningen av den er gitt i det følgende.

Regneoperasjoner	x = 4
Legg til 2	$x + 2 = 6$
Del på 2	$\frac{x+2}{2} = 3$
Trekk fra 1	$\frac{x+2}{2} - 1 = 2$
Multipliser med 3	$3\left(\frac{x+2}{2} - 1\right) = 6$ **Dette er likning 1.**

Regneoperasjoner	**Likning 1:** $3\left(\frac{x+2}{2} - 1\right) = 6$
Løs opp parentesen	$\frac{3x+6}{2} - 3 = 6$
Multipliser med 2	$3x + 6 - 6 = 12$
Trekk sammen	$3x = 12$
Del på 3	$x = 4$

Vedlegg 12: Løsningsforslag, direkte gruppe

Løsningsforslag økt 1: Å tolke lineære likninger med én ukjent

Oppgave 1:

a) $x = 7$
b) $x = 3$
c) $x = 2$
d) $x = 5$
e) $x = -1$
f) $x = 1$

Oppgave 2:

a) $x + 3 = 17$
b) $x - 5 = 10$
c) $2x - 1 = x + 5$

Oppgave 3:

a) Fire ganger så mye som et tall er 24.
b) En mindre enn et tall er 12
c) En fjerdedel av et tall er 16

Oppgave 4:

Heidi kjøpte dobbelt så mange pærer som epler.	$\mathrm{a} = 2\mathrm{b}$
Eplene jeg kjøpte kostet 10 kroner.	$\mathrm{by} = 10$
Til sammen kjøpte jeg 5 epler og pærer.	$b + a = 5$
Pærene koster dobbelt så mye som eplene.	$x = 2y$

Eplene koster halvparten av pærene.	$y = \frac{1}{2}x$
Pærer koster 4 kr per stk.	$x = 4$
Jeg kjøpte 4 pærer.	$a = 4$
Epler og pærer koster det samme.	$x = y$

Løsningsforslag økt 2: Å løse lineære likninger med én ukjent

Oppgave 2:

a) $x = 3$

b) $x = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$

c) $x = \frac{54}{12} = 4\frac{1}{2}$

d) $x = 4$

e) $x = 11$

f) $x = 10$

g) $x = 9$

h) $x = 12$

i) $x = 3$

j) $x = 8$

k) $x = 8$

l) $x = 115$

m) $x = 6$

n) $x = 42$

o) $x = -15$

Oppgave 3:

a) $Kristines\ alder: x$
$Brorens\ alder: x + 5$

$Alder\ til\ sammen: x + x + 5 = 17$

$x = 6$

Kristine er 6 år og broren er 11 år.

b) $Bjørns\ alder: x$
$Bjarnes\ alder: x + 3$

$Gunns\ alder: x + 3 + 3$

$Samlet\ alder: x + x + 3 + x + 3 + 3 = 99$

$x = 30$

Bjørn er 30, Bjarne er 33 og Gunn er 36 år gammel.

c) $Øyvinds\ alder: x$
$Eiriks\ alder: x - 4$

$Kristians\ alder: 2x$

$Samlet\ alder: x + x - 4 + 2x = 36$

$x = 10$

Øyvind er 10, Eirik er 6 og Kristian er 20 år gammel.

d) $Omkrets: x + 8 + x + 8 + x + x = 260$
$4x + 16 = 260$
$x = 61$

Løsningsforslag økt 3: Å sette opp lineære likninger med én ukjent

Oppgave 1:

a) $x = \ prisen\ på\ genseren$
$2x + 110 = x + 405$
$x = 295$
En genser koster 295 kr.

b) $x = \ prisen\ på\ skoene$
$x + 2x = 1200$
$x = 400$
Skoene koster 400 kr og kjolen koster 800 kr.

c) Geir:
$1525 - 5x = 500$
$x = 205$

Jørgen:
$2050 - 5x = 500$
$x = 310$

Geir plukket 205 kurver og Jørgen 310 kurver på en uke.

Gjennomsnittlig antall kurver per dag for Geir:

$$\frac{205}{5} = 41$$

Gjennomsnittlig antall kurver per dag for Jørgen:

$$\frac{310}{5} = 62$$

Geir plukket i snitt 41 kurver per dag. Jørgen plukket i snitt 62 kurver per dag.

d) Uttrykk for Sara sin lønn: x
Uttrykk for Tina sin lønn: $x + 2000$
Uttrykk for Linn sin lønn: $\frac{x}{2}$

Uttrykk for Vera sin lønn: $3x$

Uttrykk for samlet lønn:

$$x + x + 2000 + \frac{x}{2} + 3x = 29\,500$$

$$x = 5000$$

Sara tjente 5000 kr, Tina tjente 7000 kr, Linn tjente 2500 kr og Vera tjente 15 000 kr.

e) Uttrykk for prisen for en penn: x
Utrykk for prisen for en skrivebok: $4x$
Uttrykk for prisen for 3 penner og 3 skrivebøker og deres samlede pris:

$$3x + 3 \cdot 4x = 225$$
$$x = 15$$

En penn koster 15 kr og en skrivebok koster 60 kr.

Oppgave 2:

a) Eksempel: Andreas er en isbader. En dag han skal bade er det 6 ganger så kaldt i vannet som i lufta. Neste dag har temperaturen i vannet falt med 4 grader. Nå er det 8 ganger så kaldt i vannet som i lufta. Hvor kaldt er det i vannet?

b) Eksempel: En dag er det dobbelt så varmt i Oslo som i Tromsø. Neste dag har gradestokken krøpet ytterligere 5 grader opp. Nå er det 3 ganger så varmt i Oslo som i Tromsø. Hvor varmt er det i Tromsø denne dagen?

c) Eksempel: Simen jobber som vanngutt for TIL og tjener 5 kr for hver flaske han fyller og 100 kr fast for hver kamp. Fredrik tjener 200 kr fast per kamp og 3 kr per flaske han fyller. Hvor mange flasker må guttene fylle for at de skal tjene like mye på en kamp?

Vedlegg 13: Lærerveiledning økt 1, undersøkende gruppe

Lærerveiledning økt 1: Å tolke lineære likninger med én ukjent

Læreplanmål:

- løyse likningar og ulikskapar av første grad og likningssystem med to ukjende og bruke dette til å løyse praktiske og teoretiske problem

Mål for økta:

- Elevene skal vite hva en likning består av og hvorfor likninger kan være nyttige i virkelige situasjoner.

Materiale:

- Hver elev trenger en kopi av oppgavene

Tidsbruk:

- 55 minutter

Forberedelse:

- Lærer bør på forhånd tenke over hva elevene kan komme til å svare på oppgavene og lage noen generelle kategorier for elevsvar.
    - F.eks. kan en kategori være «benytter seg av huskeregler»
- Det kan være en fordel å lage et skjema med forutsette elevløsninger som man tar med seg til undervisning og etter hvert som man går rundt kan man skrive inn i dette skjemaet hvem og hvor mange grupper som kan plasseres i hver kategori.
    - Kanskje viser det seg at noen grupper ikke passer inn i dine antakelser og du må lage en ny kategori. En slik kategori er interessant å trekke inn i refleksjonsfasen!

Første fase (5 minutter):

- Lærer gjør elevene kjent med oppgaven og hvordan de skal jobbe.
    - I denne forbindelse skal elevene starte med å jobbe i par/grupper og deretter i plenum.
- Lærer etablerer retningslinjer for hvordan diskusjonene i fase 2 skal foregå, f.eks.:
    - Elevene forklarer hvordan de har tenkt i tur og orden. Alle på gruppen skal komme med et forslag.
    - Elevene skal lytte til hverandre og ikke avbryte når noen snakker.
    - Elevene skal etterspørre begrunnelse og tankegang fra hverandre

    - Elevene skal ikke fokusere på om det er rett eller galt, men komme med kritiske og konstruktive spørsmål
    - Sammen skal elevene komme frem til en løsning som er bedre enn de løsningene som de har utarbeidet hver for seg.
    - Alle på gruppen skal kunne forstå og forklare løsningen

Andre fase (35 minutter):

- Det er tiltenkt omtrent 15 minutter til oppgave 1 og 20 minutter til oppgave 2.
- Elevene jobber i par
- Lærer går rundt og merker seg ulike løsninger på de ulike oppgavene som hun mener bør trekkes frem for klassen.
    - Dette kan være en løsning som mange har kommet frem til som f.eks. inneholder et ugyldig argument; det kan være en løsning som er spesiell for én gruppe; det kan være en løsning som for deg som lærer var uventet og dermed mest sannsynlig vil være uventet for elevene, også videre.
- Læreren fungerer som veileder og bør starte med å gi elevene så lite hjelp som mulig og øke graden av hjelp ved behov, hvor den største graden av hjelp vil være å hjelpe elevene med én del av oppgaven.
- Foreslåtte spørsmål og oppfordringer underveis i elevenes arbeid:
    - Spesifikke spørsmål:
        - Hva er det største antallet; antallet stoler eller antallet bein? Gir likningen din mening?
        - Forsøk å si likningen din høyt med ord. Gir den mening?
        - Er det den eneste likningen som er korrekt?
        - Hva sier din likning om antallet stoler?
        - Hva er størst; x eller y? Hvorfor?
        - Hva vet du om kostandene for blyanter og viskelær?
        - Hva representerer 2b?
        - Kan du forklare meningen med det som står der med dine egne ord?
    - Generelle spørsmål:
        - Hva var oppgaven igjen?
        - Hva gjorde dere i forrige oppgave? Kan dere bruke det i denne oppgaven tror dere?
        - Hva har dere gjort til nå?

Tredje fase (15 minutter):

- Gå gjennom oppgave 1 og 2, med fokus på oppgave 2.
    - Kan stille spørsmål som: var det flere som løste oppgaven slik?
    - Var det noen som løste oppgaven annerledes?
- Lærer styrer refleksjonen ved å bestemme hvilke grupper som skal presentere sin løsning. Fokus skal ikke være på om det er rett eller galt. Elevene skal i plenum diskutere løsningene sammen og komme med kommentarer til løsningene som presenteres.

Vedlegg 14: Lærerveiledning økt 2,undersøkende gruppe

Lærerveiledning økt 2: Å løse lineære likninger med én ukjent

Læreplanmål:

- løyse likningar og ulikskapar av første grad og likningssystem med to ukjende og bruke dette til å løyse praktiske og teoretiske problem

Mål for økta:

- Elevene skal kunne løse lineære likninger med én ukjent.

Materiale:

- Hver elev trenger en kopi av oppgavene

Tidsbruk:

- 55 minutter

Forberedelse:

- Lærer bør på forhånd tenke over hva elevene kan komme til å svare på oppgaven og lage noen generelle kategorier for elevsvar.
    - F.eks. kan en kategori være «benytter seg av huskeregler»
- Det kan være en fordel å lage et skjema med forutsette elevløsninger som man tar med seg til undervisning og etter hvert som man går rundt kan man skrive inn i dette skjemaet hvem og hvor mange grupper som kan plasseres i hver kategori.
    - Kanskje viser det seg at noen grupper ikke passer inn i dine antakelser og du må lage en ny kategori. En slik kategori er interessant å trekke inn i refleksjonsfasen!

Første fase (5 minutter):

- Lærer gjør elevene kjent med oppgaven og hvordan de skal jobbe.
    - I denne forbindelse skal elevene starte med å jobbe i par og deretter i plenum.
- Lærer etablerer retningslinjer for hvordan diskusjonene i fase 2 skal foregå, f.eks.:
    - Elevene forklarer hvordan de har tenkt i tur og orden. Alle på gruppen skal komme med et forslag.
    - Elevene skal lytte til hverandre og ikke avbryte når noen snakker.
    - Elevene skal etterspørre begrunnelse og tankegang fra hverandre
    - Elevene skal ikke fokusere på om det er rett eller galt, men komme med kritiske og konstruktive spørsmål

    - Sammen skal elevene komme frem til en løsning som er bedre enn de løsningene som de har utarbeidet hver for seg.
    - Alle på gruppen skal kunne forstå og forklare løsningen

<u>Andre fase (35 minutter):</u>

- Det er tiltenkt omtrent 10 minutter til oppgave 1, 10 minutter til oppgave 2 og 15 minutter til oppgave 3.
- Elevene jobber i par
- Lærer går rundt og merker seg ulike løsninger på de ulike oppgavene som hun mener bør trekkes frem for klassen.
    - Dette kan være en løsning som mange har kommet frem til som f.eks. inneholder et ugyldig argument; det kan være en løsning som er spesiell for én gruppe; det kan være en løsning som for deg som lærer var uventet og dermed mest sannsynlig vil være uventet for elevene, også videre.
- Læreren fungerer som veileder og bør starte med å gi elevene så lite hjelp som mulig og øke graden av hjelp ved behov, hvor den største graden av hjelp vil være å hjelpe elevene med én del av oppgaven.
- Foreslåtte spørsmål og oppfordringer underveis i elevenes arbeid:
    - Spesifikke spørsmål:
        - Hvordan vil du overbevise noen andre om at Jonas/Josefine har gjort en feil?
        - Hvordan kan du vise at Jonas sin verdi for x ikke tilfredsstiller likningen?
        - Hvordan kan du sjekke at verdiene du har valgt for x ikke tilfredsstiller likningen?
        - Hvor mange løsninger har likningen? Hvordan kan du vite det?
        - Hvor mange løsninger må man likning ha for å kunne kalles sann?
        - Dersom eleven løser oppgaven raskt; kan du finne en annen måte å vise at likningen er sann?; Kan du lage en likning som er alltid/aldri sann? Hvordan kan du bevise dette?; kan du tenke deg en likning som har mer enn én løsning?
    - Generelle spørsmål:
        - Hva var oppgaven igjen?
        - Hva gjorde dere i forrige oppgave? Kan dere bruke det i denne oppgaven tror dere?
        - Hva har dere gjort til nå?

<u>Tredje fase (15 minutter):</u>

- Gå gjennom oppgave 1-3, med fokus på oppgave 3.
    - Kan stille spørsmål som: var det flere som løste oppgaven slik?
    - Var det noen som løste oppgaven annerledes?
- Lærer styrer refleksjonen ved å bestemme hvilke grupper som skal presentere sin løsning. Fokus skal ikke være på om det er rett eller galt. Elevene skal i plenum diskutere løsningene sammen og komme med kommentarer til løsningene som presenteres.

Vedlegg 15: Lærerveiledning økt 3, undersøkende gruppe

Lærerveiledning økt 3: Å sette opp lineære likninger med én ukjent

<u>Læreplanmål:</u>

- løyse likningar og ulikskapar av første grad og likningssystem med to ukjende og bruke dette til å løyse praktiske og teoretiske problem

<u>Mål for økta:</u>

- Elevene skal kunne sette opp lineære likninger med én ukjent.

<u>Materiale:</u>

- Hver elev trenger en kopi av oppgavene

<u>Tidsbruk:</u>

- 110 minutter

<u>Forberedelse:</u>

- Lærer bør på forhånd tenke over hva elevene kan komme til å svare på oppgaven og lage noen generelle kategorier for elevsvar.
    - F.eks. kan en kategori være «benytter seg av huskeregler»
- Det kan være en fordel å lage et skjema med forutsette elevløsninger som man tar med seg til undervisning og etter hvert som man går rundt kan man skrive inn i dette skjemaet hvem og hvor mange grupper som kan plasseres i hver kategori.
    - Kanskje viser det seg at noen grupper ikke passer inn i dine antakelser og du må lage en ny kategori. En slik kategori er interessant å trekke inn i refleksjonsfasen!

<u>Første fase (10 minutter):</u>

- Lærer gjør elevene kjent med oppgaven og hvordan de skal jobbe.
    - I denne forbindelse skal elevene starte med å jobbe i par og deretter i plenum.
- Lærer etablerer retningslinjer for hvordan diskusjonene i fase 2 skal foregå, f.eks.:
    - Elevene forklarer hvordan de har tenkt i tur og orden. Alle på gruppen skal komme med et forslag.
    - Elevene skal lytte til hverandre og ikke avbryte når noen snakker.
    - Elevene skal etterspørre begrunnelse og tankegang fra hverandre
    - Elevene skal ikke fokusere på om det er rett eller galt, men komme med kritiske og konstruktive spørsmål

    - Sammen skal elevene komme frem til en løsning som er bedre enn de løsningene som de har utarbeidet hver for seg.
    - Alle på gruppen skal kunne forstå og forklare løsningen

Andre fase (80 minutter):

- Det er tiltenkt omtrent 20 minutter til oppgave 1, 10 minutter til oppgave 2, 20 minutter til oppgave 3 og 30 minutter til oppgave 4.
- Elevene jobber i par
- Lærer går rundt og merker seg ulike løsninger på de ulike oppgavene som hun mener bør trekkes frem for klassen.
    - Dette kan være en løsning som mange har kommet frem til som f.eks. inneholder et ugyldig argument; det kan være en løsning som er spesiell for én gruppe; det kan være en løsning som for deg som lærer var uventet og dermed mest sannsynlig vil være uventet for elevene, også videre.
- Læreren fungerer som veileder og bør starte med å gi elevene så lite hjelp som mulig og øke graden av hjelp ved behov, hvor den største graden av hjelp vil være å hjelpe elevene med én del av oppgaven.
- Foreslåtte spørsmål og oppfordringer underveis i elevenes arbeid:
    - Spesifikke spørsmål:
        - Hvordan kan du sjekke om svaret ditt stemmer?
        - Er sidene i likningen lik hverandre? Hvordan vet du det?
        - Prøv å sett inn din løsning for x.
        - Dersom eleven løser oppgaven enkelt; forsøk å finne andre måter å løse likningene på.
    - Generelle spørsmål:
        - Hva var oppgaven igjen?
        - Hva gjorde dere i forrige oppgave? Kan dere bruke det i denne oppgaven tror dere?
        - Hva har dere gjort til nå?

Tredje fase (20 minutter):

- Gå gjennom oppgave 1-3, med fokus på oppgave 3.
    - Hvis du rekker kan du velge ut et par som får presentere en av sine likninger fra oppgave 4 for klassen og løsningen av den.
    - Kan stille spørsmål som: var det flere som løste oppgaven slik?
    - Var det noen som løste oppgaven annerledes?
- Lærer styrer refleksjonen ved å bestemme hvilke grupper som skal presentere sin løsning. Fokus skal ikke være på om det er rett eller galt. Elevene skal i plenum diskutere løsningene sammen og komme med kommentarer til løsningene som presenteres.

Vedlegg 16: Lærerveiledning økt 1, direkte gruppe

Læreplanmål:

- Løyse likningar og ulikskapar av første grad og likningssystem med to ukjende og bruke dette til å løyse praktiske og teoretiske problem

Mål for økta:

- Elevene skal vite hva en likning består av og hvorfor likninger kan være nyttige i virkelige situasjoner.

Materiale:

- Hver elev trenger en kopi av oppgavene
- Skålvekt

Tidsbruk:

- 60 minutter

Forberedelser:

- Kopiere opp oppgavehefte til elevene
- Forberede forelesning
    - Hva er en likning?
        - Skålvekt
    - Finne eksempler på sammenhengen mellom tekst og likning
        - Du kan gjerne bruke de som er gjengitt i heftet til elevene.

Undervisning:

- Starter økten med en gjennomgang på tavla. Det er satt av ca. 15 minutter til dette.
    - Repetisjon; Hva er en likning?
        - Skålvekt som hjelpemiddel
    - Gi eksempler på sammenhengen mellom tekst og likning
        - Bruk gjerne eksemplene fra elevheftet
- Elevene arbeider selvstendig med oppgaver ved hjelp av eksempler i heftet og sjekker svarene sine med fasiten. Lærer hjelper til ved behov. Det er tiltenkt omtrent 15 minutter til oppgave 1-3 til sammen, og 20 minutter til oppgave 4.
    - Gå gjennom oppgaver på tavla dersom det er flere elever som sliter med samme oppgave.
- Avslutt økta med å repetere hva dere har gått gjennom. Beregnet ca. 10 minutter til dette.
    - Hva er en likning?
    - Sammenhengen mellom tekst og likning.

Vedlegg 17: Lærerveiledning økt 2, direkte gruppe

Læreplanmål:

- løyse likningar og ulikskapar av første grad og likningssystem med to ukjende og bruke dette til å løyse praktiske og teoretiske problem

Mål for økta:

- Elevene skal kunne løse lineære likninger med én ukjent.

Materiale:

- Hver elev trenger en kopi av oppgavene
- Fyrstikkesker med fyrstikker

Tidsbruk:

- 120 minutter

Forberedelser:

- Kopiere opp oppgavehefte til elevene
- Forberede forelesning med eksempler og algoritmer for løsning av likninger
  - Finne eksempler til å vise på tavla. Bruk gjerne de fra elevheftet

Undervisning:

- Starter økten med en gjennomgang på tavla. Det er satt av ca. 15 minutter til dette.
  - Repetere regler for likninger
    - «Vi kan løse en likning ved å legge til og trekke fra det samme tallet på begge sider av likhetstegnet. Vi kan også løse en likning ved å multiplisere eller dividere alle leddene med det samme tallet».
  - Gi noen eksempler på hvordan man kan løse likninger
    - Feks: $7 + x = 12$, $15 = a - 6$, $3x = 18$ og $\frac{z}{12} = 8$.
- Elevene arbeider selvstendig med oppgaver i heftet ved hjelp av eksempler og sjekker svarene sine med fasiten. Lærer hjelper til ved behov. Det er tiltenkt omtrent 25 minutter til oppgave 1, 25 minutter til oppgave 2 og 30 minutter til oppgave 3.
  - Gå gjennom oppgaver på tavla dersom det er flere elever som sliter med samme oppgave.
- Avslutt økta med å repetere hva dere har gått gjennom. Beregnet ca. 25 minutter til dette.
  - Hva slags regel bruker man når man løser likninger?
  - Hvordan fungerer fyrstikkeskespillet? Hva representerer fyrstikkene? Hva representerer esken?

Vedlegg 18: Lærerveiledning økt 3, direkte gruppe

Læreplanmål:

- Løyse likningar og ulikskapar av første grad og likningssystem med to ukjende og bruke dette til å løyse praktiske og teoretiske problem

Mål for økta:

- Elevene skal kunne sette opp lineære likninger med én ukjent.

Materiale:

- Hver elev trenger en kopi av oppgavene

Tidsbruk:

- 60 minutter

Forberedelser:

- Kopiere opp oppgavehefte til elevene
- Forberede forelesning om sammenhengen mellom regnefortellinger og likninger
    - Trekk frem misoppfatningen om den ukjente som objekt og presiser at det er en variabel
    - Finne eksempler til å vise på tavla
        - Du må gjerne bruke de som er vist i elevenes oppgavehefte

Undervisning:

- Starter økten med en gjennomgang på tavla. Det er satt av ca. 10 minutter til dette.
    - Gå gjennom et par eksempler på hvordan man kan lage en regnefortelling utfra en likning, og hvordan man kan sette opp en likning til en regnefortelling.
- Elevene arbeider selvstendig med oppgaver i heftene ved hjelp av eksempler og sjekker svarene sine med fasiten. Lærer hjelper til ved behov.
    - Det er tiltenkt omtrent 20 minutter til oppgave 1 og 20 minutter til oppgave 2.
    - Gå gjennom oppgaver på tavla dersom det er flere elever som sliter med samme oppgave.
- Avslutt økta med å repetere hva dere har gått gjennom
    - Beregnet ca. 10 minutter til dette.
    - Noen elever kan f.eks. komme opp å vise regnefortellingene sine også kan klassen prøve å løse de.

Vedlegg 19: NSD- godkjenning

NSD NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

NSD sin vurdering

Prosjekttittel

Effekten av undersøkende matematikkundervisning

Referansenummer

238754

Registrert

30.08.2018 av Eirin Stenberg - est068@post.uit.no

Behandlingsansvarlig institusjon

UiT Norges arktiske universitet / Fakultet for humaniora, samfunnsvitenskap og lærerutdanning / Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Per Øystein Haavold, per.oystein.haavold@uit.no, tlf: 77645587

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Eirin Utsigt Stenberg, eirinstenberg@hotmail.com, tlf: 90638408

Prosjektperiode

07.01.2019 - 30.05.2019

Status

16.10.2018 - Vurdert

Vurdering (1)

16.10.2018 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD, den 16.10.18. Behandlingen kan starte.

MELD ENDRINGER
Dersom behandlingen av personopplysninger endrer seg, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. På våre nettsider informerer vi om hvilke endringer som må meldes. Vent på svar før endringer gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 30.05.19.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD finner at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:
- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
De registrerte vil ha følgende rettigheter i prosjektet: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20). Rettighetene etter art. 15-20 gjelder så lenge den registrerte er mulig å identifisere i datamaterialet.

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.
Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).
For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp behandlingen ved planlagt avslutning for å avklare status for behandlingen av opplysningene.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Kjersti Haugstvedt
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

Vedlegg 20: Informasjonsskriv lærer, undersøkende gruppe

Vil du delta i forskningsprosjektet *«En komparativ studie av direkte instruksjon og undersøkende undervisning»* ?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Formålet med dette prosjektet er å undersøke hvordan undervisningsform kan påvirke på elevers læring, og hvordan ikke-faglige aspekter og elevenes opplevelse av undervisningen kan belyse dette. Dette undersøkes gjennom et forskningsspørsmål:

I hvilken grad og på hvilken måte kan undersøkende undervisning og direkte instruksjon påvirke elevers læring i emnet likninger?

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Jeg, Eirin Stenberg, gjennomfører dette prosjektet via Institutt for lærerutdanning og pedagogikk under veiledning av Per Øystein Haavold som et avsluttende ledd i en 5-årig integrert masterutdannelse.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Til dette prosjektet trenger jeg to utvalg, hvor et utvalg undervises med fokus på begrepsforståelse og et utvalg undervises med fokus på prosedyrer.

Jeg tar kontakt med nettopp deg på grunn av din deltakelse i SUM- prosjektet. Derfor ønsker jeg å spørre om du kunne tenke deg å stille med to klasser (40 elever) som kan undervises med fokus på begrepsforståelse. Jeg har per dags dato kun kontaktet deres skole som kandidat til dette utvalget.

Hva innebærer det for deg å delta?
For å kunne si noe om læringen til elevene ønsker jeg å gjennomføre både en test før og en test etter undervisningen. Testen vil inneholde matematikkoppgaver, og ved hver test er det dessuten lagt ved et spørreskjema, hvor det kort fortalt spørres etter elevenes bakgrunn og deres opplevelse av undervisningen

Dersom du velger å delta innebærer det at du underviser med fokus på begrepsforståelse i emnet likninger i en periode på 2 uker, samt avholder før- og ettertest, inkludert vedlagte spørreskjemaer.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil kun bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Ved Institutt for lærerutdanning og pedagogikk vil veileder Per Øystein Haavold og student Eirin Stenberg ha tilgang til opplysningene.
- Navnet og kontaktopplysningene dine vil jeg erstatte med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data.
- Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjon av masteroppgaven.
-

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes 30.mai 2019*.* Alle personopplysninger vil destrueres ved prosjektets slutt.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Institutt for lærerutdanning og pedagogikk har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Institutt for lærerutdanning og pedagogikk ved Per Øystein Haavold (per.oystein.haavold@uit.no).
  Du kan også kontakte masterstudent Eirin Stenberg (est068@post.uit.no).
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig *Student*

(Forsker/veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «*En komparativ studie om elevers læring i emnet likninger*», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å avholde matematikkundervisning med fokus på begrepsforståelse
- ☐ å avholde før- og ettertest, inkludert spørreskjemaer
- ☐ å samle inn og videreformidle testene
- ☐ å gi forskerne innblikk i elevenes terminkarakterer i matematikk

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 30.mai 2019.

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 21: Informasjonsskriv lærer, direkte gruppe

Vil du delta i forskningsprosjektet *«En komparativ studie av direkte instruksjon og undersøkende undervisning»* ?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Formålet med dette prosjektet er å undersøke hvordan undervisningsform kan påvirke på elevers læring, og hvordan ikke-faglige aspekter og elevenes opplevelse av undervisningen kan belyse dette. Dette undersøkes gjennom et forskningsspørsmål:

I hvilken grad og på hvilken måte kan undersøkende undervisning og direkte instruksjon påvirke elevers læring i emnet likninger?

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Jeg, Eirin Stenberg, gjennomfører dette prosjektet via Institutt for lærerutdanning og pedagogikk under veiledning av Per Øystein Haavold som et avsluttende ledd i en 5-årig integrert masterutdannelse.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Til dette prosjektet trenger jeg to utvalg, hvor et utvalg undervises med fokus på begrepsforståelse og et utvalg undervises med fokus på prosedyrer.

Jeg tar kontakt med nettopp deg fordi jeg ønsker å spørre deg om du vil stille med et utvalg (ca. 40 elever) som kan undervises med fokus på prosedyrer. Jeg har per dags dato kun kontaktet deres skole som kandidat til dette utvalget.

Hva innebærer det for deg å delta?
For å kunne si noe om læringen til elevene ønsker jeg å gjennomføre både en test før og en test etter undervisningen. Testen vil inneholde matematikkoppgaver, og ved hver test er det dessuten lagt ved et spørreskjema, hvor det kort fortalt spørres etter elevenes bakgrunn og deres opplevelse av undervisningen.

Dersom du velger å delta innebærer det at du underviser med fokus på prosedyrer i emnet likninger i en periode på 2 uker, samt avholder før- og ettertest, inkludert vedlagte spørreskjemaer.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil kun bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Ved Institutt for lærerutdanning og pedagogikk vil veileder Per Øystein Haavold og student Eirin Stenberg ha tilgang til opplysningene.
- Navnet og kontaktopplysningene dine vil jeg erstatte med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data.
- Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjon av masteroppgaven.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes 30.mai 2019. Alle personopplysninger vil destrueres ved prosjektets slutt.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Institutt for lærerutdanning og pedagogikk har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Institutt for lærerutdanning og pedagogikk ved Per Øystein Haavold (per.oystein.haavold@uit.no).
  Du kan også kontakte masterstudent Eirin Stenberg (est068@post.uit.no).
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig *Student*

(Forsker/veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «*En komparativ studie om elevers læring i emnet likninger*», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å avholde matematikkundervisning med fokus på prosedyrer
- ☐ å avholde før- og ettertest, inkludert spørreskjemaer
- ☐ å samle inn og videreformidle testene
- ☐ å gi forskerne innblikk i elevenes terminkarakterer i matematikk

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 30.mai 2019.

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 22: Informasjonsskriv elever, undersøkende gruppe

Vil du delta i forskningsprosjektet
***«En komparativ studie av direkte instruksjon og undersøkende undervisning»* ?**

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

<u>Formål</u>
Formålet med dette prosjektet er å undersøke hvordan undervisningsform kan påvirke på elevers læring, og hvordan ikke-faglige aspekter og elevenes opplevelse av undervisningen kan belyse dette. Dette undersøkes gjennom et forskningsspørsmål:

I hvilken grad og på hvilken måte kan undersøkende undervisning og direkte instruksjon påvirke elevers læring i emnet likninger?

<u>Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?</u>
Jeg, Eirin Stenberg, gjennomfører dette prosjektet via Institutt for lærerutdanning og pedagogikk under veiledning av Per Øystein Haavold som et avsluttende ledd i en 5-årig integrert masterutdannelse.

<u>Hvorfor får du spørsmål om å delta?</u>
Jeg spør deg om delta fordi jeg trenger elever som kan være med i undervisning, delta prøvene og svare på spørreskjemaer for å samle inn informasjon, slik at jeg kan svare på forskningsspørsmålet mitt.

<u>Hva innebærer det for deg å delta?</u>
For å kunne si noe om læringen til elevene ønsker jeg å gjennomføre både en test før og en test etter undervisningen. Testen vil inneholde matematikkoppgaver, og ved hver test er det dessuten lagt ved et spørreskjema, hvor det kort fortalt spørres etter elevenes bakgrunn og deres opplevelse av undervisningen.

Dersom du velger å delta innebærer det at du deltar i matematikkundervisning i emnet likninger, hvor fokuset vil være på undersøkelse av matematiske problemer og problemløsning. Det innebærer også deltakelse på før- og ettertest, samt å svare på to spørreskjemaer. Deltakelsen vil foregå over 2 uker.

<u>Det er frivillig å delta</u>
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

<u>Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger</u>
Vi vil kun bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Ved Institutt for lærerutdanning og pedagogikk vil veileder Per Øystein Haavold og student Eirin Stenberg ha tilgang til opplysningene.
- Navnet og kontaktopplysningene dine vil jeg erstatte med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data.
- Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjon av masteroppgaven.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes 30.mai 2019. Alle personopplysninger vil slettes ved prosjektets slutt.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger, og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Institutt for lærerutdanning og pedagogikk har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Institutt for lærerutdanning og pedagogikk ved Per Øystein Haavold (per.oystein.haavold@uit.no). Du kan også kontakte masterstudent Eirin Stenberg (est068@post.uit.no).
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig *Student*

(Forsker/veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «En komparativ studie om elevers læring i emnet likninger», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta på matematikkundervisning med fokus på undersøkelse av matematiske problemer og problemløsning
- ☐ å delta på før- og ettertest, samt vedlagte spørreskjemaer
- ☐ at lærer kan gi opplysninger om min terminkarakter i matematikk til prosjektet

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 30.mai 2019.

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 23: Informasjonsskriv elever, direkte gruppe

Vil du delta i forskningsprosjektet *«En komparativ studie av direkte instruksjon og undersøkende undervisning»* ?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Formålet med dette prosjektet er å undersøke hvordan undervisningsform kan påvirke på elevers læring, og hvordan ikke-faglige aspekter og elevenes opplevelse av undervisningen kan belyse dette. Dette undersøkes gjennom et forskningsspørsmål:

I hvilken grad og på hvilken måte kan undersøkende undervisning og direkte instruksjon påvirke elevers læring i emnet likninger?

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Jeg spør deg om delta fordi jeg trenger elever som kan være med i undervisning, delta prøvene og svare på spørreskjemaer for å samle inn informasjon, slik at jeg kan svare på forskningsspørsmålet mitt.

Hva innebærer det for deg å delta?
For å kunne si noe om læringen til elevene ønsker jeg å gjennomføre både en test før og en test etter undervisningen. Testen vil inneholde matematikkoppgaver, og ved hver test er det dessuten lagt ved et spørreskjema, hvor det kort fortalt spørres etter elevenes bakgrunn og deres opplevelse av undervisningen.

Dersom du velger å delta innebærer det at du deltar i matematikkundervisning i emnet likninger, hvor fokuset vil være på å lære regneregler. Det innebærer også deltakelse på før- og ettertest, samt å svare på to spørreskjemaer.. Deltakelsen vil foregå over 2 uker.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil kun bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Ved Institutt for lærerutdanning og pedagogikk vil veileder Per Øystein Haavold og student Eirin Stenberg ha tilgang til opplysningene.
- Navnet og kontaktopplysningene dine vil jeg erstatte med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data.
- Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjon av masteroppgaven.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes 30.mai 2019. Alle personopplysninger vil slettes ved prosjektets slutt.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger, og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Institutt for lærerutdanning og pedagogikk har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Institutt for lærerutdanning og pedagogikk ved Per Øystein Haavold (per.oystein.haavold@uit.no). Du kan også kontakte masterstudent Eirin Stenberg (est068@post.uit.no).
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig *Student*

(Forsker/veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «En komparativ studie om elevers læring i emnet likninger», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta på matematikkundervisning med fokus på regneregler
- ☐ å delta på før- og ettertest, samt vedlagte spørreskjemaer
- ☐ at lærer kan gi opplysninger om min terminkarakter i matematikk til prosjektet

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 30.mai 2019.

(Signert av prosjektdeltaker, dato)