

STA-3921

MASTERGRADSOPPGAVE I
INDUSTRIELL MATEMATIKK

Empirisk analyse og stokastisk modellering av
temporale fluktuasjoner i den norske
pengemarkedsrenta

Ola Løvsletten

Juni, 2010

FAKULTET FOR NATURVITENSKAP OG TEKNOLOGI
Institutt for matematikk og statistikk

Universitetet i Tromsø

Forord

Etter anbefaling fra Martin Rypdal deltok jeg på Birkeland-seminaret [27] i desember 2009. Temaet var stokastiske prosesser med skaleringssegenskaper, og jeg ble for første gang introdusert for selvsimilære og multifraktale prosesser. Det slo meg umiddelbart at dette var en vakker teori som jeg ønsket å forstå mer av, og jeg begynte å studere noen forelesningsnotater jeg hadde fått utdelt. Selv om dette var nytt stoff for meg, så gjorde min statistikkbakgrunn at jeg raskt klarte å forstå hovedideene bak disse modellene. I januar 2010 fortalte jeg M. Rypdal at jeg ønsket å se på muligheten for å modellere den norske pengemarkedsrenta ved selvsimilære eller multifraktale prosesser, og jeg spurte om han kunne tenke seg å veilede meg gjennom dette prosjektet. Dette var starten på fem måneders intensivt arbeid som har resultert i denne avhandlingen.

Når det kommer til arbeidet som ligger bak denne oppgaven har jeg vært privilegert som har hatt en veileder med den realkompetansen som M. Rypdal besitter. Jeg er takknemlig til alle som har vist interesse og entusiasme for arbeidet mitt. Dette gjelder spesielt Einar Mjølhus, Georg Elvebakk, Edvin Bredrup og Per Jakobsen. I tillegg vil jeg takke alle som har bidratt til Sophus Lie- og Birkeland-seminarene. Disse seminarene er med på å skape et trivelig og inkluderende arbeidsmiljø som inspirerer til hardt arbeid og kreativ forskning.

Sammendrag

I denne oppgaven analyserer vi den norske pengemarkedsrenta NIBOR (3 mnd). Vi fokuserer spesielt på modeller som beskriver den karakteristiske potenslovskaeringen vi ser i data. Eksempler på slike modeller er stabile Lévy-prosesser, trunkerte stabile Lévy-prosesser og multifraktale prosesser. Vi finner at modellen Markov Switching Multifractal gjenskaper de viktigste strukturelle egenskapene til rentefluktasjonene samtidig som den er egnet til volatilitetsvarsling. Vi utfører en statistisk test på hvordan denne modellen takler prediksjonsproblemet.

Innhold

1	Innledning	8
2	Grunnleggende definisjoner	10
3	Selvsimilære prosesser	13
3.1	Tester for selvsimilæritet	16
4	Uendelig delbare fordelinger	18
5	Klasser av selvsimilære prosesser	23
6	Multifraktale prosesser	27
6.1	Konstruksjon av multifraktal tid	28
6.2	MMAR	30
6.3	Andre klasser av tilfeldige multifraktale mål	32
6.3.1	Multiplikativ kaskade	32
6.3.2	Poisson-multifraktalen	33
6.3.3	Poisson-multifraktalen i diskretisert utgave	34
6.4	Markov Switching Multifractal	35
7	Analyse av NIBOR	38
7.1	Stasjonæritet	38
7.1.1	Selvsimilæritet	40
7.2	Modellvalg	41
7.2.1	Modellering ved en stabil Lévy-prosess	42
7.2.2	Modellering ved en trunkert stabil Lévy-prosess	44
7.2.3	Modellering ved en MMAR/Bernoulli-modell	46
7.3	Modellering ved MSM-modellen	48
8	Prediksjon basert på MSM-modellen	48
8.1	Evaluering	51
9	Konklusjon	55
A	Tilleggsfigurer	58
B	Kode	66

1 Innledning

Denne oppgaven inneholder en empirisk analyse av den norske pengemarkedsrenta med løpetid 3 måneder, en størrelse som også er kjent under navnet Norwegian InterBank Offered Rate (NIBOR). Målet med analysen er å finne en modell som klarer å gjenskape de strukturelle egenskapene vi ser i dataene. For en gjennomgang av hva som er gjort tidligere på markedrenter med kort løpetid anbefales oversiktsartikkelen til Kjersti Aas [1]. Som påpekt i denne artikkelen spiller NIBOR en sentral rolle for finansinstitusjoner, både som risikofaktor og i prising av visse typer derivater, eksempelvis sertifikater. Dermed er nøyaktig modellering av denne markedsvARIABLEN viktig for å kvantifisere risikoen ved å eie slike verdipapirer.

Modellene vi ser på tar utgangspunkt i stokastiske prosesser i kontinuerlig tid. Den kanskje mest kjente av disse er Brownsk bevegelse, hvis teori ble utviklet av Louis Bachelier [2] og Albert Einstein [8]. I finans er geometrisk Brownsk bevegelse en enkel modell for priser og andre positive størrelser. Dette er en modell på formen

$$P(t) = P(0) \exp\left(\mu t + \sigma B(t)\right),$$

der $B(t)$ er en Brownsk bevegelse, og ved hjelp av Itô's lemma [10, 21] er det lett å se at denne modellen er ekvivalent med Black-Scholes ligningen [3]:

$$dP(t) = (\mu + \sigma^2/2) P(t) dt + \sigma P(t) dB(t).$$

Denne stokastiske differensialligningen og den tilhørende Fokker-Planck formuleringen har inntil nylig vært et svært viktig verktøy for blant annet prising av opsjoner. På den annen side viser empiriske studier liten støtte for antagelsen om at logaritmiske priser $X(t) = \log P(t)$ er Brownske bevegelser. For det første har ikke inkrementene $X(t + \Delta t) - X(t)$ gaussiske fordelinger, og videre har finansielle tidsrekker sterkt avhengige inkremitter.

Som en første generalisering av geometrisk Brownsk bevegelse er det naturlig å se på modeller der $X(t)$ fortsatt har stasjonære og uavhengige inkremitter, men hvor vi tillater ikke-gaussiske fordelinger. Vi er da innenfor klassen av Lévy-prosesser. Teorien for disse prosessene ble utviklet på 1930-1940 tallet med arbeid av blant annet Kolmogorov [13], Khintchine [12], Lévy [14] og di Finetti [7]. I denne avhandlingen skal vi se spesielt på de α -stabile Lévy prosessene. Disse inkluderer de Brownske bevegelsene som et spesialtilfelle for $\alpha = 2$. For $\alpha < 2$ er prosessene karakterisert ved tunghalefordelinger der momenter av orden større enn α ikke eksisterer. Som en konsekvens vil prosessene være diskontinuerlige med en rekke store hopp, og slike prosesser kalles gjerne Lévy flights. Med utgangspunkt i stabile Lévy-prosesser ser vi også på trunkerte Lévy flights. Disse kan konstrueres ved å trunkere de éndimensjonale marginalene i stabile Lévy-prosesser [30]. Som en konsekvens av trunkeringen vil alle momenter eksistere, og dermed vil trunkerte Lévy-prosesser oppføre seg som Brownske bevegelser på lange tidsskalaer. På korte tidsskalaer vil de ha samme oppførsel som stabile Lévy-prosesser.

En stabil Lévy-prosess er selvsimilær. Det vil si at det finnes en $h > 0$ slik at

$$X(at) \stackrel{d}{=} a^h X(t) \tag{1}$$

for alle $a > 0$. Fordelingene til selvsimilære prosesser er invariante opp til en skaleringskonstant under skifte av tidsskala. I avsnitt 3.1 viser vi hvordan man kan teste for selvsimilæritet

i data ved å bruke estimerte momenter og tettheter. I analysen av NIBOR ser vi tilnærmet selvsimilæritet når vi ser på et begrenset spenn av tidsskalaer, men under grundigere analyse finner vi at inkrementfordelingene har tyngre haler på korte tidsskalaer sammenlignet med de lengre tidsskalaene. Dette er et avvik fra selvsimilæritet som kan beskrives gjennom trunkerte Lévy flights.

En svakhet ved Lévy-prosessene er at de har uavhengige inkremitter, noe som ikke er forenelig med den volatilitetspersistensen vi observerer i NIBOR. Vi kan inkludere avhengighet gjennom å integrere Lévy-prosesser over hukommelseskjerner. Det mest kjente eksempelet på en slik konstruksjon er de fraksjonelle Brownske bevegelsene. Disse kan defineres som

$$B_H(t) = \int_{-\infty}^t \left\{ (t-u)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-u)_+^{H-\frac{1}{2}} \right\} dB(u),$$

der $B(t)$ er en Brownsk bevegelse. Hvis vi erstatter den Brownske bevegelsen med en stabil Lévy-prosess får vi en fraksjonell Lévy flight. Problemet med de fraksjonelle modellene er at avhengigheten framtrer i form av korrelerte inkremitter, mens vi i NIBOR observerer ukorrelerte og avhengige inkremitter. For å fange opp denne volatilitetspersistensen ser vi på multifraktale modeller. Vi ser spesielt på en klasse av modeller som ble introdusert av Mandelbrot mfl. i 1997 [18].

Multifraktale *mål* ble opprinnelig utviklet for å beskrive hastighetsfluktuasjonene i turbulente væsker [17, 24]. Sammen med Calvet og Fisher utvidet Mandelbrot tilfeldige multifraktale mål μ til prosesser $\Theta(t)$ ved å definere $\Theta(t) = \mu([0, t])$. Prosessen $\Theta(t)$ kalles gjerne multifraktal tid. Denne ble satt sammen med en fraksjonell Brownsk bevegelse $B_H(t)$ og resulterende modell

$$X(t) = B_H(\Theta(t))$$

ble døpt Multifractal Model of Asset Return (MMAR). I samme artikkel ble det fokusert på en sammenligning av MMAR og GARCH-type modeller. Det ble påpekt at MMAR er skaleringskonsistent, mens GARCH-modellene ikke har denne egenskapen. En spesielt tiltalende egenskap ved MMAR er at vi for $H = 1/2$ har ukorrelerte inkremitter samtidig som vi har algebraisk avtagende korrelasjoner mellom amplitudene [16] :

$$\text{Cov}\left(|X(t+1) - X(t)|^q, |X(t+s+1) - X(t+s)|^q\right) \sim s^{-\beta q}.$$

I tillegg er multifraktale modeller karakterisert ved avvik fra selvsimilæritet tilsvarende det vi observerer i NIBOR.

Calvet og Fisher har videreutviklet MMAR modellene og konstruert en multifraktal modell som kalles Markov Switching Multifractal (MSM) [4, 5, 16]. MSM er en stokastisk volatilitetsmodell der volatiliteten følger en latent Markov-kjede. I tilfellene der vi har ukorrelerte innovasjoner er vi istand til å optimere likelihooden numerisk. En annen tiltalende egenskap ved denne modellen er at den har en effektiv parametrisering (få parametre) med et stort tilstandsrom for Markov-kjeden. Vi finner at denne modellen gir en god beskrivelse av NIBOR. I tillegg er denne modellen egnet for effektiv volatilitetsvarsling. Implementeringen av disse teknikkene presenteres i avsnittene 6, 7 og 8.

I tillegg til modelleringen av NIBOR inneholder denne avhandlingen en bred oversikt over analysemetoder som baserer seg på potenslovskalering. Dette dreier seg i hovedsak om to typer analyse:

Den første baserer seg på estimering og reskalering av tettheter. For multifraktale prosesser finnes det ingen reskalering som gjør at tetthetene faller på hverandre. Dette er i kontrast til selvsimilære prosesser, der vi har invarians under reskalering med hensyn til selvsimilitetsekspONENTEN. Tetthetene til trunkerte Lévy flights faller ikke på hverandre under reskalering, og for å skille disse fra multifraktale prosesser ser man da på andre egenskaper. Eksempelvis har multifraktale prosesser avhengige inkremitter.

Et alternativ til å se på tetthene på forskjellige tidsskalaer, er å estimere tilhørende momenter. Ved å definere en skaleringsfunksjon $\zeta(q)$ gjennom relasjonen $\mathbb{E}|X(\Delta t)|^q \sim \Delta t^{\zeta(q)}$ kan man skille multifraktale prosesser fra selvsimilære. Multifraktale prosesser karakteriseres av en konkav skaleringsfunksjon, mens for de selvsimilære er skaleringsfunksjonen lineær for alle eksisterende momenter. Stabile Lévy-prosesser (med $\alpha < 2$) har estimerte skaleringsfunksjoner som er bilinære. Dette ble vist av [6] og generalisert av Heyde og Sly [9] til å inkludere fraksjonelle Lévy flights.

Det må nevnes at finanstidsrekker bare er et eksempel på anvendelse av modellene vi ser på. Mange av modellene er også populære innen fysikk, og i en nylig artikkel av Rypdal og Rypdal [24] vises det at en multifraktal modell kan beskrive tidsfluktuasjonene i nordlys (Auroral Electrojet Index).

Oppgaven er organisert som følger: Vi starter med å repetere noen grunnleggende begreper knyttet til stokastiske prosesser (avsnitt 2). I avsnitt 3 defineres selvsimilære prosesser. Vi utleder noen egenskaper for de selvsimilære prosessene, og viser hvordan disse egenskapene kan brukes til å teste for selvsimilitet i data. I avsnitt 4 introduseres de uendelig delbare fordelingene. Motivasjonen for dette er at disse fordelingene står i én-én korrespondanse med Lévy-prosesser. Vi ser også på en viktig underklasse av disse, de stabile fordelingene. I avsnitt 5 ser vi på ulike selvsimilære prosesser, blant annet fraksjonelle Brownske bevegelser og fraksjonelle Lévy flights. Vi introduserer de multifraktale prosessene i avsnitt 6. I avsnitt 7 analyserer vi den norske pengemarkedsrenta med hensyn på struktur. Siden vi finner at MSM-modellen beskriver de strukturelle egenskapene i dataene, tester vi hvordan den takler prediksjonsproblemet (avsnitt 8). Vi setter opp en evalueringsprosedure, og kjører denne på NIBOR. Til slutt oppsummerer vi analysen (prediksjon og struktur), og peker på nye problemstillinger som springer ut av dette arbeidet (avsnitt 9).

I vedlegg A er figurer tilhørende analysen på NIBOR. Vi har benyttet programpakken R [22], og i vedlegg B er koden som er utviklet for denne avhandlingen.

2 Grunnleggende definisjoner

Vi vil her se på noen grunnleggende begreper. Vi starter med å minne om definisjonen av en stokastisk prosess.

Definisjon 1. *En stokastisk prosess er en familie av tilfeldige variable $\{X(t), t \geq 0\}$ definert*

på samme sannsynlighetsrom $(S, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

$$X(t) : S \mapsto \mathbb{R}.$$

Vi skriver ofte $X(t)$ for den stokastiske prosessen $\{X(t), t \geq 0\}$.

I vår analyse representerer variabelen t tiden. Slike prosesser kalles gjerne tidsrekker. Når vi definerer prosessen på \mathbb{R}_+ betyr dette at vi jobber med en stokastisk prosess i *kontinuerlig* tid. Dette er i kontrast til eksempelvis ARMA-modeller (Auto Regressive Moving Average) som er definert på heltallene. Hvis ikke annet er oppgitt er de prosessene vi ser på definert på de positive reelle tallene.

Definisjon 2. To stokastiske prosesser $X(t)$ og $Y(t)$ er like i fordeling hvis

$$(X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n)) \stackrel{d}{\sim} (Y(t_0), Y(t_1), \dots, Y(t_n))$$

for alle endelige følger $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$. Vi skriver $X(t) \stackrel{d}{=} Y(t)$.

Merknad 1. Vi minner om at en tilfeldig variabel (vektor) X er en målbar avbildning $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$, der $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ er det underliggende sannsynlighetsrommet og $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ er Borel- σ -algebraen på \mathbb{R}^n . Variabelen X inducerer et sannsynlighetsmål $\mathbb{P}_X = X_*\mathbb{P}$ på \mathbb{R}^n . Denne notasjonen betyr at $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$ for alle $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Målet \mathbb{P}_X kalles fordelingen til X , og to tilfeldige variable sies å være like i fordeling hvis de har samme fordeling. Dette betegnes ved notasjonen $X \stackrel{d}{\sim} Y$.

Når vi skal analysere tidsrekker trenger vi noen antagelser om regularitet. Det vil si noen antagelser om hvordan dataene forholder seg til hverandre. I klassisk statistikk forutsetter man ofte at variablene er uavhengige og identisk fordelte (u.i.f.), men for tidsrekker er dette som regel et urealistisk krav [28]. I stedet er det vanlig å forutsette en eller annen form for stasjonærhet. Den typiske situasjonen er at rådata viser tegn på ikke-stasjonærhet. Det vil si at det virker usannsynlig at rådata skal være en realisasjon av en stasjonær stokastisk prosess. Man må da prøve å gjøre en transformasjon av dataene som fører til at denne antagelsen virker mer plausibel.

Definisjon 3. La $X(t)$ være en stokastisk prosess.

1. $X(t)$ er stasjonær hvis $\forall t_0 : X(t + t_0) \stackrel{d}{=} X(t)$.
2. $X(t)$ har stasjonære inkremitter hvis $\forall \Delta t : X(t + \Delta t) - X(t) \stackrel{d}{=} X(\Delta t) - X(0)$.
3. $X(t)$ har uavhengige inkremitter hvis

$$\{X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})\}$$

er en familie av uavhengige stokastiske variable for alle endelig følger

$$0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty.$$

En annen form for stasjonæritet er kovariansstasjonæritet. Her antas det at prosessen $X(t)$ har endelige andremomenter $\mathbb{E}X(t)^2$, at forventningsverdiene $\mathbb{E}X(t)$ er tidsuavhengig og at kovariansene $\mathbb{E}X(t)X(s)$ kun avhenger av differansen $|t - s|$. I utgangspunktet er vår definisjon av stasjonæritet strengere, men en stokastisk prosess kan være stasjonær og ikke kovariansstasjonær. Et eksempel her er ARCH-modellen $x_t = \sigma_t \varepsilon_t$ av orden 1 med normalfordelte innovasjoner ε_t . Stasjonæritet for denne prosessen avhenger av parameteren b i volatilitetsprosessen

$$\sigma_t = \sqrt{a + bx_{t-1}^2}, \quad a > 0, b > 0.$$

Hvis $b < 2 \exp \gamma \approx 3.56$ er x_t stasjonær*, mens for kovariansstasjonæritet kreves $b < 1$. Kovariansstasjonæritet medfører ikke stasjonæritet, mens stasjonæritet med eksisterende andremoment medfører kovariansstasjonæritet.

En viktig funksjon i tidsrekkeanalyse er autokorrelasjonsfunksjonen (vi bruker den engelske forkortelsen ACF). Autokorrelasjonsfunksjonen er essensielt et mål på lineær avhengighet mellom stokastiske variable. For å estimere denne trenger vi antagelsen om kovariansstasjonæritet. Siden vi kommer til å jobbe med stasjonæritet definerer vi ACF for en stasjonær prosess med eksisterende andremoment.

Definisjon 4. La $X(t)$ være en stasjonær stokastisk prosess med $\mathbb{E}X(1)^2 < \infty$ og $\mathbb{E}X(1) = 0$. Vi definerer autokorrelasjonsfunksjonen (ACF) som:

$$\rho_{X(t)}(h) = \frac{\mathbb{E}X(0)X(h)}{(\mathbb{E}X(0)^2)^{1/2}}, \quad h > 0.$$

Merknad 2. I tilfellet $\mathbb{E}X(1) = \mu \neq 0$ er det bare å definere en ny prosess $Y(t)$ med justert forventning: $Y(t) = X(t) - \mu$.

Vi ønsker å modellere logaritmen til NIBOR som en stokastisk prosess $X(t)$ med stasjonære inkremer. En slik prosess er altså ikke selv stasjonær, så ACF vil kun anvendes på inkrementprosessene $X(t + \Delta t) - X(t)$ (med varierende Δt). Gitt data $X(1), \dots, X(n)$ ser vi på inkrementene:

$$\Delta \tilde{X}_{\Delta t}(t) = X(1 + t\Delta t) - X(1 + (t - 1)\Delta t) - m_{\Delta t},$$

der

$$m_{\Delta t} = \frac{1}{\lfloor \frac{n-1}{\Delta t} \rfloor} \sum_{t=1}^{\lfloor \frac{n-1}{\Delta t} \rfloor} \{X(1 + t\Delta t) - X(1 + (t - 1)\Delta t)\}.$$

For å estimere korrelasjonen mellom $X(t + \Delta t) - X(t)$ og $X(t + (h + 1)\Delta t) - X(t + h\Delta t)$ bruker vi estimatoren

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\sum_{t=1}^{\lfloor \frac{n-1}{\Delta t} - h \rfloor} \Delta \tilde{X}_{\Delta t}(t) \Delta \tilde{X}_{\Delta t}(t + h)}{\left(\sum_{t=1}^{\lfloor \frac{n-1}{\Delta t} \rfloor} \Delta \tilde{X}_{\Delta t}(t)^2 \right)^{1/2}}. \quad (2)$$

*Her betegner γ Euler-Mascheroni-tallet ≈ 0.57 .

Vår hypotese er at inkrementene for logaritmen til NIBOR er ukorrelerte, og for å avgjøre dette spørsmålet er det viktig å kunne si noe om hvor stor estimert AFC må være (for en gitt tidsdifferanse h) for at vi skal regne korrelasjonene som signifikante. Dette avhenger av fordelingen til estimatoren til ACF som igjen avhenger av fordelingen til inkrementene og antall observasjoner. En standard metode for å avgjøre dette er å benytte asymptotisk teori for oppførselen til estimatoren når antall observasjoner går mot uendelig.

Teorem 1. *La $X(t)$ være en stokastisk prosess med $\mathbb{E}X(1) = 0$. Anta $X(t)$ har stasjonære og uavhengige inkremitter med eksisterende 4. moment. Betrakt estimatoren i (2) og la $h \geq 1$ og Δt være gitt. For $n \rightarrow \infty$ gjelder:*

$$\sqrt{n}\hat{\rho}(h) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Notasjonen \xrightarrow{d} betyr konvergens i fordeling:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = P(x),$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ der P er kontinuert. Her er P og $\{P_n\}$ fordelingsfunksjoner.

For bevis se [28]. Vi bruker teorem 1 som en indikasjon på om vi har signifikant autokorrelasjon. Under betingelsene i dette teoremet er $\rho(h) = 0$ for $h \geq 1$ og for n tilstrekkelig stor:

$$\mathbb{P}\left(-\frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \leq \hat{\rho}(h) \leq \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Her er z_a a -kvantilen* (øvre) i standard normalfordelinga. Dermed er $(-2/\sqrt{n}, 2/\sqrt{n})$ et tilnærmet 95% prediksjonsintervall for $\hat{\rho}(h)$ gitt stasjonære og uavhengige inkremitter med eksisterende 4. moment. Vi bruker dette som en indikasjon på om vi har autokorrelasjon. Vi må her være oppmerksomme på at vi gjør mange tester slik at noen estimerte autokorrelasjoner faller utenfor intervallet $(-2/\sqrt{n}, 2/\sqrt{n})$ selv om vi skulle ha ukorrelerte inkremitter.

Vi avslutter dette kapitlet med å nevne at ACF kan brukes til å teste for avhengige inkremitter. Hvis vi har uavhengige inkremitter, så vil autokorrelasjonsfunksjonen til *absoluttverdien* av inkrementene $|X(t + \Delta t) - X(t)|$ oppføre seg tilsvarende det vi har for inkrementene $X(t + \Delta t) - X(t)$. I NIBOR observerer vi derimot at autokorrelasjonsfunksjonene for absoluttverdiene av inkrementene er signifikant større enn null, og avtar langsomt. Dette indikerer at vi bør velge en modell med ukorrelerte, men avhengige inkremitter.

3 Selvsimilære prosesser

Definisjon 5. *En stokastisk prosess $X(t)$ er selvsimilær hvis det finnes en $h > 0$ slik at*

$$\forall a > 0 : X(at) \stackrel{d}{=} a^h X(t).$$

Vi bruker gjerne forkortelsen h -ss (h -selvsimilær).

* $\int_{-\infty}^{z_a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = a$

Av definisjonen ser vi at fordelingene er invariante opp til en skalaparameter under skifte av tidsskala. Spesielt har vi at

$$X(t) \stackrel{d}{\sim} t^h X(1). \quad (3)$$

Anta videre at de éndimensjonale marginalene $X(t)$ har tettheter $p_{X(t)}(x)$. Da følger det at

$$p_{X(t)}(0) \sim t^{-\nu} \quad \text{med} \quad \nu = h.$$

Det finnes prosesser der $p_{X(t)}(0) \sim t^{-\nu}$ er en potenslov, men som ikke er selvsimilære. Dette gjelder blant annet for de multifraktale prosessene. Det er derfor naturlig å forsøke en reskalering av tetthetene med hensyn på eksponenten ν . For selvsimilære prosesser vil en passende reskalering medføre at tetthetene faller på hverandre:

$$\forall x \in \mathbb{R} : t^\nu p_{X(t)}(t^\nu x) = p_{X(1)}(x).$$

Videre har selvsimilære prosesser en potenslovskalering i momentene :

$$\mathbb{E}|X(t)|^q \sim t^{\zeta(q)} \quad \text{der} \quad \zeta(q) = hq.$$

Vi sier at en prosess har skaleringssegenskaper dersom $p_{X(t)}(0)$ og momentene (som eksisterer) $\mathbb{E}|X(t)|^q$ er potenslover i t . En prosess som har skaleringssegenskaper og stasjonære inkremitter kalles generelt for en multifraktal prosess. Med utgangspunkt i denne definisjonen er de selvsimilære prosessene spesialtilfeller av multifraktale prosesser. I denne avhandlingen kommer vi kun til å omtale en prosess som multifraktal dersom skaleringsfunksjonen $\zeta(q)$ er ikke-lineær. Disse prosessene behandles i avsnitt 6. I resten av dette avsnittet ser vi på egenskapene til selvsimilære prosesser.

Teorem 2. *La $X(t)$ være h -ss.*

1. *Anta de tilfeldig variablene $X(t)$ har tettheter $p_{X(t)}(x)$. Da gjelder:*

$$p_{X(t)}(x) = t^{-h} p_{X(1)}(t^{-h}x) \quad (4)$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ og alle $t > 0$.

2. *Anta $\mathbb{E}X(1)^q$ eksisterer. Da har vi*

$$S_q(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}|X(t)|^q = \mathbb{E}|X(1)|^q t^{hq} \quad (5)$$

for alle $t \geq 0$.

Bevis.

1. La $P_{X(t)}(x)$ være fordelingsfunksjonen til $X(t)$. Ved (3) har vi

$$P_{X(t)}(x) = \mathbb{P}(X(t) \leq x) = \mathbb{P}(t^h X(1) \leq x) = \mathbb{P}(X(1) \leq t^{-h}x) = P_{X(1)}(t^{-h}x).$$

Ved å bruke at $p_{X(t)}(x) = P'_{X(t)}(x)$ følger (4).

2. Siden $X(t)$ er h -ss har vi at

$$\mathbb{E}|X(1)|^q < \infty \iff \mathbb{E}|X(t)|^q < \infty.$$

Dermed er $S_q(\Delta t)$ er veldefinert. Ved selvsimilaritet følger

$$S_q(t) = \mathbb{E}|t^h X(1)|^q = t^{hq} \mathbb{E}|X(1)|^q.$$

□

Vi skal senere se hvordan dette teoremet danner grunnlaget for å teste for selvsimilaritet i data.

Teorem 3. (Kovarians) La $X(t)$ være h -ss med stasjonære inkremitter og $\mathbb{E}X(1)^2 < \infty$.

1. For alle $t, s > 0$ har vi

$$\mathbb{E}X(t)X(s) = \frac{1}{2}\mathbb{E}X(1)^2 \{t^{2h} + s^{2h} - |t - s|^{2h}\}. \quad (6)$$

2. For $t \rightarrow \infty$ gjelder:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{X(t + \Delta t) - X(t)\}\{X(\Delta t) - X(0)\} &\sim \frac{1}{2}\mathbb{E}X(1)^2 \Delta t^2 \frac{d^2}{dt^2} t^{2h} \\ &= \mathbb{E}X(1)^2 \Delta t^2 h(2h - 1)t^{2h-2}. \end{aligned}$$

Bevis.

1. Vi ser at

$$\mathbb{E}X(t)X(s) = \mathbb{E} \left[\frac{1}{2}X(t)^2 + \frac{1}{2}X(s)^2 - \frac{1}{2}\{X(t) - X(s)\}^2 \right].$$

Ved stasjonære inkremitter

$$X(t) - X(s) \stackrel{d}{\sim} X(|t - s|) \implies \{X(t) - X(s)\}^2 \stackrel{d}{\sim} \{X(|t - s|)\}^2.$$

Fra (5) følger

$$\mathbb{E}X(t)^2 = t^{2h} \mathbb{E}X(1)^2. \quad (7)$$

2. Vi har at

$$\mathbb{E}\{X(t + \Delta t) - X(t)\}\{X(\Delta t) - X(0)\} = \mathbb{E}[X(t + \Delta t)X(\Delta t) - X(t)X(\Delta t)],$$

siden $\mathbb{E}X(s)X(0) = 0$ fra (6). Ved igjen å benytte (6) får vi

$$\mathbb{E}[X(t + \Delta t)X(\Delta t) - X(t)X(\Delta t)] = \frac{1}{2}\mathbb{E}X(1)^2 \{(t + \Delta t)^{2h} - 2t^{2h} + (t - \Delta t)^{2h}\}.$$

Vi setter $f(t) = t^{2h}$. Ved bruk av Taylors teorem med restledd og middelverdisatsen kan det vises at

$$\Delta t^2 f''(t) = f(t + \Delta t) - 2f(t) + f(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^4}{12} f^{(4)}(c),$$

der $c \in (t - \Delta t, t + \Delta t)$. Dermed har vi at

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbb{E} X(1)^2 [(t + \Delta t)^{2h} - 2t^{2h} + (t - \Delta t)^{2h}] &\sim \frac{1}{2} \mathbb{E} X(1)^2 \Delta t^2 f''(t) \\ &= \mathbb{E} X(1)^2 \Delta t^2 h(2h - 1) t^{2h-2}. \end{aligned}$$

□

Legg merke til at vi har ukorrelerte inkremitter for $h = 1/2$. I tilfellet $h < 1/2$ har vi negativt korrelerte inkremitter og $h > 1/2$ positivt korrelerte inkremitter. Kovariansteoremet kan brukes som et supplement eller alternativ til ACF under en selvsimilærhetshypotese. Faktisk kreves ikke selvsimilærhet for at del 2 av teorem 3 skal holde. Dersom en prosess har stasjonære inkremitter og andre strukturfunksjon er en potenslov, så kan vi erstatte h med $\zeta(2)/2$ uten å kreve at $\zeta(q)$ er lineær.

3.1 Tester for selvsimilærhet

Vi tester for selvsimilærhet ved å estimere tettheter og momenter på forskjellige tidsskalaer. Dette medfører at vi trenger antagelsen om at modellprosessen $X(t)$ har stasjonære inkremitter. Videre antas at de éndimensjonale marginalene til $X(t)$ har tettheter. Vi antar også at $X(0) = 0$ nesten sikkert. Dette gjelder for alle selvsimilære prosesser.

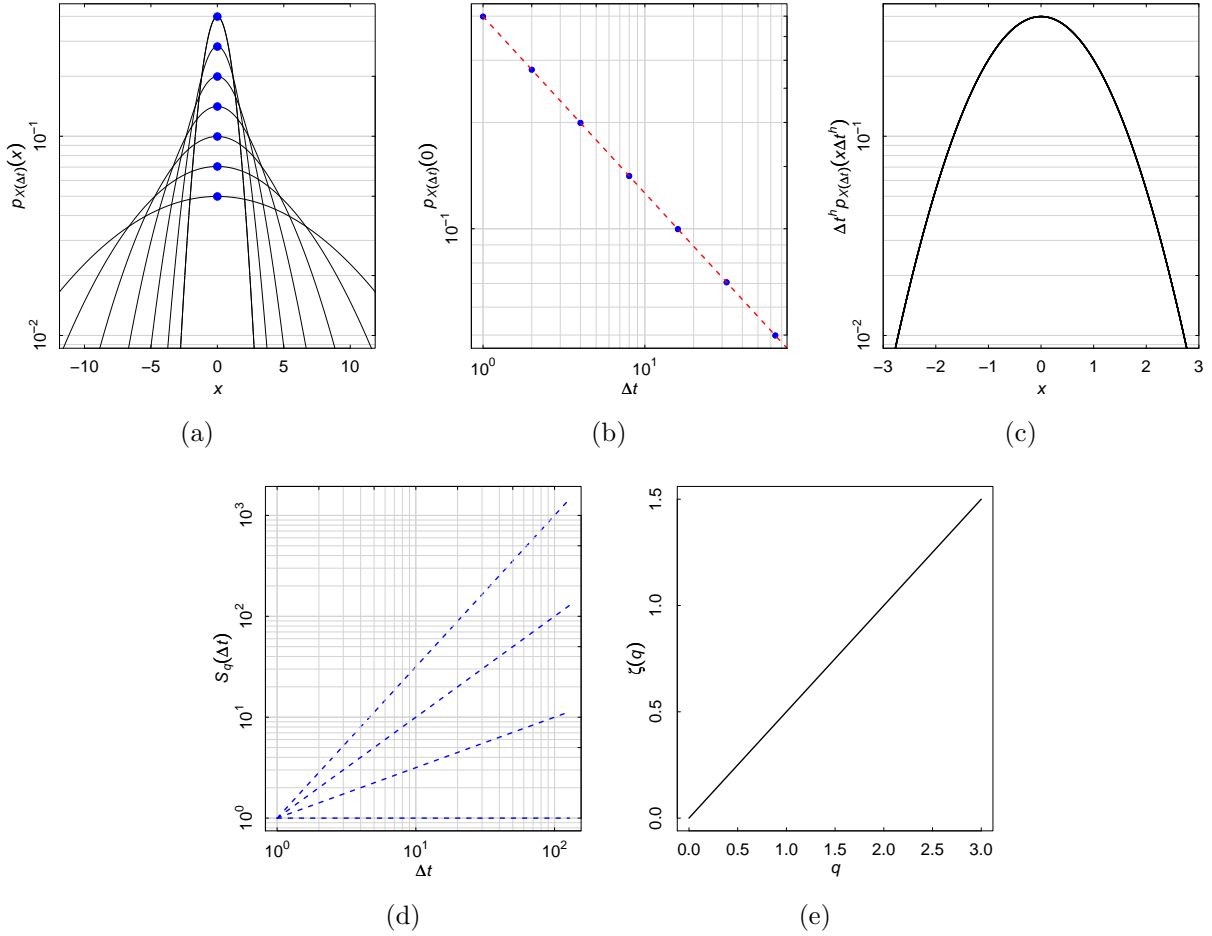
Anta at vi er gitt data $X(1), \dots, X(n)$. Første steg i vår analyse er å estimere tettheten $p_{X(\Delta t)}(x)$ til $X(\Delta t)$. Ved å observere at $X(\Delta t) \stackrel{d}{\sim} X(t + \Delta t) - X(t)$ kan vi bruke alle dataene ved å la t løpe gjennom samplet. Selv i tilfellet der vi har uavhengige inkremitter vil dette gi avhengighet siden vi benytter inkremitter som overlapper i tid. Alternativet ville være å benytte inkremitter som ikke overlapper, men da kaster vi bort mye av dataene. Vi har valgt å benytte alle tilgjengelige observasjoner, og dermed må vi ha i bakhodet at dette kan gi samplingeffekter på de større tidsskalaene. Dette fenomenet vil forsvinne hvis antall observasjoner er stort nok.

Vi velger å estimere tetthetene ved å bruke histogram. Vi velger en steglengde Δx , og betrakter partisjonen

$$\left(-\frac{1}{2}\Delta x, \frac{1}{2}\Delta x\right], \left(-\frac{3}{2}\Delta x, -\frac{1}{2}\Delta x\right], \left(\frac{1}{2}\Delta x, \frac{3}{2}\Delta x\right], \dots$$

La $H(x)$ være partisjonselementet som inneholder x . Da er vårt tetthetsestimert $\hat{p}_{X(\Delta t)}(x)$ gitt ved

$$\hat{p}_{X(\Delta t)}(x) = (n - \Delta t)^{-1} \sum_{t=1}^{n-\Delta t} I \{X(t + \Delta t) - X(t) \in H(x)\}, \quad (8)$$



Figur 1: Egenskaper for en h -selvsimilær prosess $X(t)$: a) Tettheter $p_{X(\Delta t)}$ for $X(\Delta t)$ på forskjellige tidsskalaer Δt . Tetthetene har en potenslovskalering i origo $p_{X(\Delta t)}(0) \sim \Delta t^{-h}$. Punktene $p_{X(\Delta t)}(0)$ er farget blå. b) Potenslovskaleringen $p_{X(\Delta t)}(0) \sim \Delta t^{-h}$ gir ei rett linje med stigningstall $-h$ i et dobbeltlogaritmisk plot. c) Reskalerte tettheter $\Delta t^h p_{X(\Delta t)}(x \Delta t^h)$ faller på hverandre. Dette er en karakteristisk egenskap for selvsimilære prosesser. d) Strukturfunksjonene $S_q(\Delta t) = \mathbb{E}|X(\Delta t)|^q$ er også potenslover $S_q(\Delta t) \sim \Delta t^{\zeta(q)}$. e) Skaleringsfunksjonen $\zeta(q)$ er lineær med stigningstall h (opp til største eksisterende moment) for en selvsimilær prosess. Figur (b) og (d) er dobbeltlogaritmiske. Figur (a) og (c) har logaritmisk 2.akse.

der I er indikatorfunksjonen. Ved å bruke teorem 2 har vi

$$\log p_{X(\Delta t)}(0) = -h \log \Delta t + c. \quad (9)$$

Dermed forventer vi at punktene $\{(\log \Delta t, \log \hat{p}_{\Delta t}(0))\}$ danner ei tilnærmet rett linje hvis hypotesen holder. Under denne antagelsen kan vi estimere stigningstallet h , for eksempel ved minste kvadraters metode. Vi betegner dette estimatet ved \hat{h} . Ved igjen å bruke (4) ser at vi at de reskalerte tetthetene $\Delta t^{\hat{h}} p_{X(\Delta t)}(\Delta t^{\hat{h}} x)$ er uavhengig av Δt dersom vi har selvsimilæritet. Neste steg blir dermed å prøve samme reskalering for de estimerte tetthetene, og se hvor godt disse faller på hverandre.

En alternativ og komplementær metode baserer seg på del 2 av teorem 2. Vi definerer

$$\alpha = \sup\{q : \mathbb{E}|X(\Delta t)|^q < \infty\}.$$

Her er $\alpha = \infty$ hvis alle momenter eksisterer. For $q \in [0, \alpha)$ ser vi på strukturfunksjonene $S_q(\Delta t) = \mathbb{E}|X(\Delta t)|^q$. Hvis $X(t)$ er h -ss så er

$$\log S_q(\Delta t) = hq \log \Delta t + c_q. \quad (10)$$

Dermed forventer vi at punktene $\{(\log \Delta t, \log \hat{S}_q(\Delta t))\}$ danner tilnærmet rette linjer for $q < \alpha$. Vi bruker følgende estimator for strukturfunksjonene:

$$\hat{S}_q(\Delta t) = (n - \Delta t)^{-1} \sum_{t=1}^{n-\Delta t} |X(t + \Delta t) - X(t)|^q. \quad (11)$$

Et alternativ til denne ville vært å bruke estimatoren

$$\tilde{S}_q(\Delta t) = \frac{1}{\lfloor \frac{n-1}{\Delta t} \rfloor} \sum_{t=1}^{\lfloor \frac{n-1}{\Delta t} \rfloor} |X(t\Delta t + 1) - X([t-1]\Delta t + 1)|^q.$$

Det er to grunner til at vi ikke bruker denne. Det ene er denne metoden ikke utnytter hele datamengden. Den andre grunnen er at vi i noen tilfeller der $\alpha < 2$ har teori for oppførselen til (11), også for momentene som ikke eksisterer.

Under antagelsen at $\{(\log \Delta t, \log \hat{S}_q(\Delta t))\}$ gir tilnærmet rette linjer, i det minste for små q , kan vi se på skaleringsfunksjonen $\zeta(q)$. Denne er definert via relasjonen

$$S_q(\Delta t) \sim \Delta t^{\zeta(q)}.$$

Ved å bruke (10) ser vi at $\zeta(q) = hq$ for selvsimilære prosesser. Vi kan estimere skaleringsfunksjonen ved å observere at $\zeta(q)$ er stigningstallet til linja $\{(\log \Delta t, \log \hat{S}_q(\Delta t))\}$. Dette vil da gi oss et estimat $\hat{\zeta}(q)$. Et estimat for selvsimilæritetsekspONENTEN h kan oppnås ved å tilpasse en lineær funksjon til $\hat{\zeta}(q)$. En konsistenstest vil nå være å sammenlikne dette estimatet med det som ble oppnådd ved hjelp av estimerte tettheter.

4 Uendelig delbare fordelinger

I dette avsnittet ser vi på Lévy-prosesser og uendelig delbare fordelinger.

Definisjon 6. $X(t)$ er en Lévy-prosess dersom følgende betingelser holder:

1. $X(0) = 0$ nesten sikkert.
2. $X(t)$ har stasjonære og uavhengige inkremitter.
3. $X(t)$ er stokastisk kontinuert. Det vil si at

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbb{P}(|X(t) - X(t_0)| < \epsilon) = 1.$$

4. $X(t)$ er CÀDLÀG*, som betyr at

$$\forall t_0 > 0, \omega \in S : \lim_{t \rightarrow t_0^+} X(t)(\omega) = X(t_0)(\omega),$$

og at venstre grense $\lim_{t \rightarrow t_0^-} X(t)(\omega)$ eksisterer for alle $t_0 > 0$ og nesten alle $\omega \in S$.

Fra definisjonen følger at en Lévy-prosess $X(t)$ er bestemt av fordelingen til $X(1)$. For at vi skal ha en veldefinert Lévy-prosess må denne fordelingen være uendelig delbar.

Definisjon 7. En tilfeldig variabel X har en uendelig delbar fordeling hvis det for alle positive heltall $n > 0$ finnes en tilfeldig variabel $X^{(1/n)}$ slik at $\varphi_X(s) = \varphi_{X^{(1/n)}}(s)^n$.

Vi vil nå vise at dersom $X(t)$ er en Lévy-prosess, så er $X(1)$ uendelig delbar:

La $n > 0$ være et heltall. Siden $X(0) \stackrel{d}{\sim} 0$ har vi

$$\begin{aligned} X(1) &= \sum_{k=1}^n \left[X\left(\frac{n+1-k}{n}\right) - X\left(\frac{n-k}{n}\right) \right] + X(0) \\ &\stackrel{d}{\sim} \sum_{k=1}^n \left[X\left(\frac{n+1-k}{n}\right) - X\left(\frac{n-k}{n}\right) \right]. \end{aligned}$$

Ved å bruke at en Lévy-prosess har stasjonære og uavhengige inkremitter får vi følgende relasjon for den karakteristiske funksjonen til $X(1)$:

$$\begin{aligned} \varphi_{X(1)}(s) &= \mathbb{E} \prod_{k=1}^n \exp \left[i X \left\{ \left(\frac{n+1-k}{n} \right) - X \left(\frac{n-k}{n} \right) \right\} s \right] \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{E} \exp \left[i \left\{ X \left(\frac{n+1-k}{n} \right) - X \left(\frac{n-k}{n} \right) \right\} s \right] \quad (\text{uavhengige inkremitter}) \\ &= \left(\mathbb{E} \exp \left[i X \left(\frac{1}{n} \right) s \right] \right)^n \quad (\text{stasjonære inkremitter}) \\ &= \varphi_{X^{(1/n)}}(s)^n. \end{aligned}$$

Dette viser at $X(1)$ er uendelig delbar.

Vi kan bestemme fordelingene til $X(t)$ (for $t \neq 1$) ved å bruke relasjonen

$$\varphi_{X(t)}(s) = \varphi_{X(1)}(s)^t. \quad (12)$$

For å vise (12) lar vi $m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ med $n \neq 0$. Siden

$$X\left(\frac{m}{n}\right) \stackrel{d}{\sim} \sum_{k=1}^m \left[X\left(\frac{m+1-k}{n}\right) - X\left(\frac{m-k}{n}\right) \right]$$

har vi at

$$\varphi_{X\left(\frac{m}{n}\right)}(s) = \varphi_{X\left(\frac{1}{n}\right)}(s)^m. \quad (13)$$

*CÀDLÀG er en fransk forkortelse som oversatt betyr høyrekontinuerlig med venstre grense.

Vi setter $\varphi_{X(1/n)}(s) = \varphi_{X(1)}(s)^{1/n}$ inn i (13) og får

$$\varphi_{X(\frac{m}{n})}(s) = \varphi_{X(1)}(s)^{\frac{m}{n}}.$$

Dermed holder (12) for $t \in \mathbb{Q}_+$. Ved å bruke at $X(t)$ er stokastisk kontinuerlig kan det vises at denne relasjonen holder for alle t .

Definisjon 8. *En tilfeldig variabel X har en strengt stabil fordeling hvis det finnes en $\alpha \in (0, 2]$ slik at den karakteristiske funksjonen tilfredsstiller følgende betingelse:*

$$\forall a > 0 : \varphi_X(s)^a = \varphi_X(a^{\frac{1}{\alpha}}s).$$

Legg merke til at vi for en strengt stabil variabel X har

$$\varphi_X(s) = \varphi_X(n^{\frac{1}{\alpha}}n^{-\frac{1}{\alpha}}s) = \varphi_X(n^{-\frac{1}{\alpha}}s)^n = \varphi_{n^{-1/\alpha}X}(s)^n.$$

Dermed er X uendelig delbar med $X^{(1/n)} = n^{-1/\alpha}X$. En sum av uavhengige kopier av en α -stabil variabel er igjen stabil. La X_1, \dots, X_n være u.i.f. med α -stabil fordeling, og $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. Vi har at

$$\varphi_Y(s)^a = (\varphi_{X_1}(s)^n)^a = \varphi_{X_1}(a^{\frac{1}{\alpha}}s)^n = \varphi_Y(a^{\frac{1}{\alpha}}s),$$

så Y er stabil med samme stabilitetsekspONENT som X .

Vi velger å bruke følgende parametrisering [20] :

Lemma 4. *Anta X har en strengt α -stabil fordeling med tilhørende karakteristisk funksjon $\varphi_X(s) = \exp \psi(s)$. Da kan kumulantfunksjonen $\psi(s)$ skrives på formen*

$$\begin{aligned} \psi(s) &= -|cs|^\alpha \{1 - i\beta \operatorname{sgn}(s)g_\alpha(s)\} \\ g_\alpha(s) &= \begin{cases} \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \log |s| & \alpha = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

der $\alpha \in (0, 2]$, $\beta \in [-1, 1]$, og $c > 0$.

Her er β en skjevhetsparameter og c er en skalaparameter. I tilfellet $\beta = 0$ har X en symmetrisk tetthetsfunksjon.

Merknad 3. *Det er vanlig å legge til en lokalisasjonsparameter $\mu \in \mathbb{R}$ slik at kumulantfunksjonen tar formen*

$$\psi(s) = i\mu s - |cs|^\alpha \{1 - i\beta \operatorname{sgn}(s)g_\alpha(s)\}. \quad (14)$$

Disse fordelingene kalles gjerne stabile, mens vi har strengt stabile fordelinger for $\mu = 0$. Vi lar $\mathcal{S}(\alpha, \beta, c, \mu)$ betegne fordelingen til X .

Merknad 4. *Det kan vises at $\alpha = \sup\{q : \mathbb{E}|X|^q < \infty\}$ for $\alpha < 2$. For $\alpha = 2$ eksisterer alle positive momenter.*

En Lévy-prosess $X(t)$ med $X(1) \stackrel{d}{\sim} \mathcal{S}(\alpha, \beta, c, \mu)$ kalles en stabil Lévy-prosess. Da gjelder

$$\varphi_{X(t)}(s) = \exp(\psi(s)t),$$

der $\psi(s)$ er gitt ved (14). En stabil fordeling har en tetthetsfunksjon, men generelt har ikke denne tettheten en enkel analytisk form.

Vi vil nå se på et par eksempler:

Eksempel 1. Anta $X \stackrel{d}{\sim} \mathcal{S}(2, 0, c, \mu)$. Vi benytter oss av at tettheten er Fourier-transformen av den karakteristiske funksjonen:

$$p_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int \varphi_X(s) \exp(-isx) ds = \frac{1}{2\pi} \int \exp\left(- (cs)^2 + is(-x + \mu)\right) ds.$$

Vi ser at integranden er en gaussisk kjerne, og gjør substitusjonen $v/\sqrt{2} = cs$. Det gir

$$p_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int \exp\left(-\frac{v^2}{2} + i\frac{v}{\sqrt{2}c}(-x + \mu)\right) \frac{dv}{\sqrt{2}c} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}c} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2^2c^2}\right).$$

Dermed er $X \stackrel{d}{\sim} \mathcal{N}(\mu, 2c^2)$ som betyr at $\mathcal{S}(2, 0, c, \mu)$ er en normalfordeling med forventning μ og varians $2c^2$.

Eksempel 2. La nå $X \stackrel{d}{\sim} \mathcal{S}(1, 0, c, \mu)$. Da er

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \frac{1}{2\pi} \int \exp(-c|s| + is(-x + \mu)) ds = \frac{1}{2\pi} \int \exp(-c|s|) \cos(s(x - \mu)) ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-cs) \cos(s(x - \mu)) ds = \frac{1}{\pi c} \frac{1}{1 + (x - \mu)^2/c^2}. \end{aligned}$$

Vi ser at $\mathcal{S}(1, 0, c, \mu)$ er en Cauchy-fordeling. For denne fordelingen eksisterer ikke forventningsverdien, noe som er konsistent med merknad 4.

Følgende teorem gir en fullstendig karakterisering av de uendelig delbare fordelingene. Siden det er en én-til-én korrespondanse mellom uendelig delbare fordelinger og Lévy-prosesser, så er dette teoremet også en karakterisering av klassen av Lévy-prosesser.

Teorem 5. (Lévy-Khintchine) La X være en tilfeldig variabel med $\varphi_X(s) = \exp \psi(s)$. Da er fordelingen til X uendelig delbar hvis og bare hvis

$$\psi(s) = i\mu_1 s - \frac{(s\sigma)^2}{2} + \int (\exp(isx) - 1 - isxI_{|x|<1}) d\nu(x), \quad (15)$$

der $\mu_1 \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ og ν er et Borel-mål på \mathbb{R} som oppfyller betingelsene $\nu(\{0\}) = 0$ og

$$\int_{-\infty}^{\infty} \min(1, x^2) d\nu(x) < \infty.$$

Vi kaller ν for Lévy-målet til prosessen.

Man kan definere en Lévy-prosess ved å bruke (15), og det er derfor naturlig å se på de stabile fordelingene i lys av Lévy-Khinchine teoremet:

La X være α -stabil med fordeling $\mathcal{S}(\alpha, \beta, c, \mu)$ og $\alpha \in (1, 2)$. Det kan vises at Lévy-målet ν_S til X er gitt ved

$$d\nu_S(x) = \frac{1 - \operatorname{sgn}(x)\beta}{2} \frac{c^\alpha}{\Gamma(-\alpha)(-\cos \frac{\pi\alpha}{2})} \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}}, \quad x \neq 0.$$

Med utgangspunkt i denne representasjonen definerer vi en trunkert stabil fordeling.

Definisjon 9. *Vi sier at en tilfeldig variabel X har en trunkert stabil fordeling dersom kumulantfunksjonen er på formen*

$$\psi(s) = i\mu_1 s + \int (\exp(isx) - 1 - isxI_{|x|<1}) d\nu(x) \quad (16)$$

med

$$d\nu(x) = \exp(-\lambda|x|)d\nu_S(x), \quad \lambda > 0.$$

Vi lar $S_T(\alpha, \beta, c, \mu, \lambda)$ betegne fordelingen til X . Her er $\alpha \in (1, 2)$ og $\mu = \mu_1 + \int_{|x| \geq 1} x d\nu_S(x)$.

Vi kaller λ for trunkeringsparameteren.

Merknad 5. *I denne avhandlingen ser vi kun på tilfellet $\alpha \in (1, 2)$, men generelt kan man definere en trunkert stabil fordeling for $\alpha \in (0, 2)$ [30]. Videre kan man se på andre trunckeringer enn den eksponensielle formen som er presentert her. Vi bemerker også at en trunkert stabil fordeling har endelige momenter.*

Ved å beregne integralet i 16 oppnår vi følgende resultat:

Lemma 6. *Anta $X \stackrel{d}{\sim} S_T(\alpha, \beta, c, \mu, \lambda)$ og la $\psi(s)$ være kumulantfunksjonen til X . Da er*

$$\psi(s) = i\mu s - \frac{(c\lambda)^\alpha}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \left\{ \frac{1 + \beta}{2} G_\alpha\left(\frac{s}{\lambda}\right) + \frac{1 - \beta}{2} G_\alpha\left(-\frac{s}{\lambda}\right) \right\}$$

der $G_\alpha(s) = (1 + is)^\alpha - 1 - is\alpha$.

En Lévy-prosess $X(t)$ med $X(1) \stackrel{d}{\sim} S_T(\alpha, \beta, c, \mu, \lambda)$ kalles en trunkert stabil Lévy-prosess, eller en trunkert Lévy flight. Når trunckeringen gjøres ved hjelp av en glatt funksjon (som for eksempel en eksponentialfunksjon) brukes ofte navnet *Smoothly Truncated Lévy Flight* (STLF). En slik prosess ligner en stabil Lévy-prosess på de korte tidsskalaene, men på grunn av sentralgrenseteoremet vil $X(t + \Delta t) - X(t)$ konvergere mot normalfordelinger når $\Delta t \rightarrow \infty$. Dermed vil prosessen oppføre seg som en Brownsk bevegelse på lange tidsskalaer.

5 Klasser av selvsimilære prosesser

Vi ser først på klassen av fraksjonelle Brownske bevegelser:

Definisjon 10. La $H \in (0, 1)$. En stokastisk prosess $X(t)$ er en fraksjonell Brownsk bevegelse hvis følgende betingelser er oppfylt:

1. Prosessen er gaussisk. Det vil si at for alle endelige følger $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$, så er de tilfeldige vektorene

$$\mathbf{X} = \left(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n) \right)$$

normalfordelte.

2. $\forall t : \mathbb{E}X(t) = 0$

3. $\forall(t, s) : \mathbb{E}X(t)X(s) = \frac{1}{2}\mathbb{E}X(1)^2\{t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}\}$

En slik prosess forkortes gjerne fBm (fractional Brownian motion), og parameteren H kalles Hurst-eksponenten.

Siden fraksjonelle Brownske bevegelser er gaussiske så vil alle endeligdimensjonal marginaler ha tettheter, og alle positive momenter eksisterer. En fBm med $H = 1/2$ kalles en Brownsk bevegelse. Hvis vi i tillegg har $\mathbb{E}X(1)^2 = 1$, så kalles denne prosessen for en standard Brownsk bevegelse.

En Brownsk bevegelse har uavhengige inkremitter, siden inkrementene er normalfordelte og ukorrelerte. At inkrementene er ukorrelert følger av teorem 3. Dette teoremet kan vi bruke siden en fraksjonell Brownsk bevegelse har stasjonære inkremitter og er selvsimilær. Sistnevnte påstand er inneholdt i teoremet under.

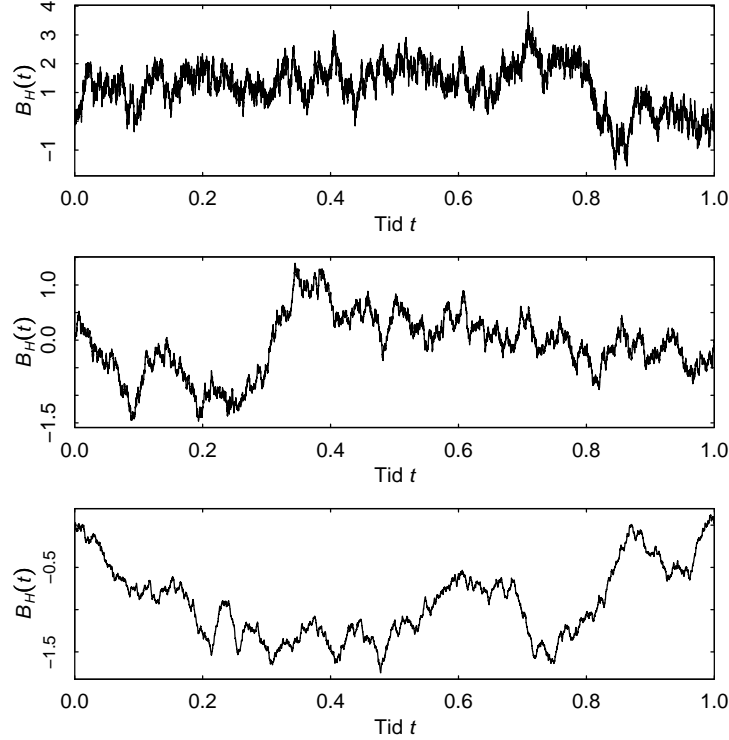
Teorem 7. La $X(t)$ være fraksjonell Brownsk bevegelse med Hurst-eksponent H .

1. $X(t)$ er h -selvsimilær med $h = H$.
2. $X(t)$ har stasjonære inkremitter.

Bewis.

1. La $a > 0$. Siden gaussiske variable (vektorer) er lukket under lineære transformasjoner følger det at prosessen $a^{-H}X(at)$ er gaussisk. Enkle beregninger viser at $a^{-H}X(at)$ tilfredsstiller betingelsene 1 og 2 i definisjon 10. Dermed har vi at $a^{-H}X(at) \stackrel{d}{=} X(t)$. Siden argumentet holder for alle $a > 0$ er $X(t)$ h -ss med $h = H$.
2. Bytt ut $a^{-H}X(at)$ med $X(t_0 + t) - X(t_0)$ og bruk samme argumenter som i punkt 1.

□



Figur 2: Realisjoner av fraksjonelle Brownske bevegelser. Antall punkter i hver simulering er $n = 10^4$. Øverst har vi Hurst-eksponent $H = 0.3$ (negativt korrelerte inkremitter). I midten har vi en Brownsk bevegelse ($H = 0.5$). Nederst har vi positivt korrelerte inkremitter ($H = 0.7$).

Merknad 6. Vi kan nå relatere egenskapene til fraksjonelle Brownske bevegelser til prosedyren beskrevet i avsnitt 3.1. For at en tidsrekke skal kunne modelleres som en fBm bør den estimerte skaleringsfunksjonen være tilnærmet lineær med stigningstall H og tetthetene bør falle sammen under reskalering med hensyn til H . I tillegg er variablene $X(t + \Delta t) - X(t)$ normalfordelte for alle Δt . For testing av normalitet kan man for eksempel bruke metodene som er beskrevet i [11].

I avsnitt 4 introduserte vi Lévy-prosesser. Vi så at en Lévy-prosess $X(t)$ er bestemt av fordelingen til $X(1)$, og vi utledet relasjonen

$$\varphi_{X(t)}(s) = \varphi_{X(1)}(s)^t. \quad (17)$$

Ved hjelp av denne relasjonen kan vi beskrive hvilke Lévy-prosesser som er selvsimilære.

Teorem 8. La $X(t)$ være en Lévy-prosess. Da er $X(t)$ selvsimilær hvis og bare hvis $X(1)$ er α -stabil. Videre er selvsimilæritetseksponenten gitt ved $h = 1/\alpha$.

Bevis. Anta $X(t)$ er h -ss. Det medfører $X(t) \stackrel{d}{\sim} t^h X(1)$ som er ekvivalent med $\varphi_{X(t)}(s) = \varphi_{t^h X(1)}(s)$. Kombinerer vi dette med (17) får vi

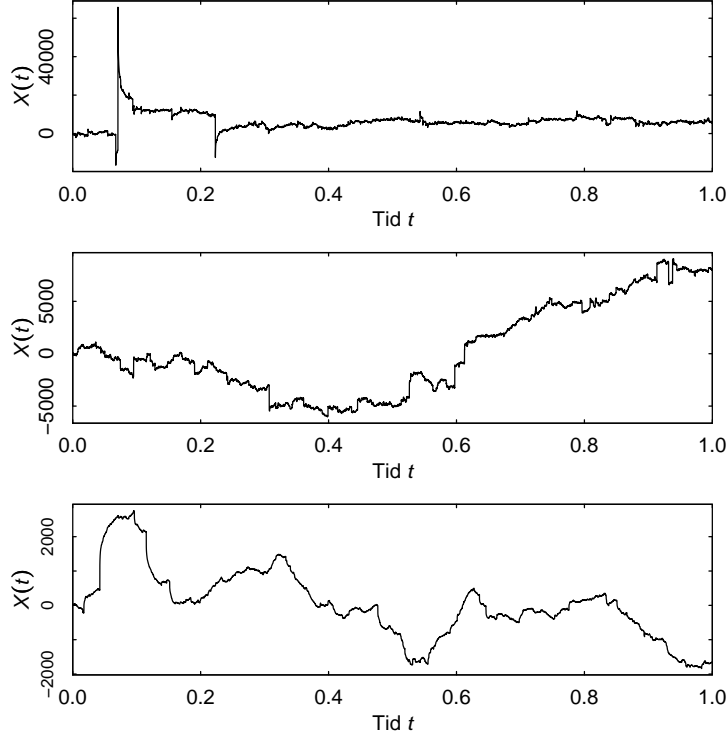
$$\varphi_{X(1)}(s)^a = \varphi_{X(a)}(s) = \varphi_{a^h X(1)}(s) = \varphi_{X(1)}(a^h s).$$

Dette viser at $X(1)$ er α -stabil med $\alpha = h^{-1}$.

Anta $X(1)$ α -stabil. Vi benytter oss igjen av (17):

$$\varphi_{X(t)}(s)^a = (\varphi_{X(1)}(s)^a)^t = \varphi_{X(1)}(a^{\frac{1}{\alpha}}s)^t = \varphi_{X(t)}(a^{\frac{1}{\alpha}}s).$$

Dette viser at $X(t)$ er h -ss med $h = \alpha^{-1}$. □



Figur 3: Realiseringer av en fraksjonell Lévy flight $X(t)$. Antall punkter i hver simulering er $n = 10^4$. Stabilitetseksponenten er $\alpha = 1.5$. Øverst har vi Hurst-eksponent $H = 0.3$. I midten har vi en stabil Lévy $H = 0.5$ uten skjevhet $\beta = 0$. Nederst har vi Hurst-eksponent $H = 0.7$.

Den siste klassen av selvsimilære prosesser vi skal se på i denne avhandlingen er fraksjonelle Lévy flights [29]. Denne klassen inneholder de stabile Lévy-prosessene, men fraksjonelle Lévy flights er generelt ikke Lévy-prosesser. For å motivere konstruksjonen av en fraksjonell Lévy flight presenterer vi følgende representasjon av en fraksjonell Brownsk bevegelse:

Teorem 9. La $\{B(t), t \in \mathbb{R}\}$ være en standard Brownsk bevegelse. For $H \in (0, 1)$ er

$$X(t) = \int_{-\infty}^t \left\{ (t-u)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-u)_+^{H-\frac{1}{2}} \right\} dB(u) \quad (18)$$

en fBm med Hurst-eksponent H . Her brukes notasjonen $a_+ = \max\{0, a\}$.

Definisjon 11. La $H \in (0, 1)$, $\alpha \in (0, 2)$ og anta at

$$0 < \frac{1}{\alpha} + H - \frac{1}{2} < 1.$$

La $\{Z_\alpha(t), t \in \mathbb{R}\}$ være en stabil Lévy-prosess med $Z_\alpha(t) \stackrel{d}{\sim} S(\alpha, 0, 1, 0)$. Da er

$$X(t) = c_H \int_{-\infty}^t \left\{ (t-u)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-u)_+^{H-\frac{1}{2}} \right\} dZ_\alpha(u)$$

en fraksjonell Lévy flight. Her er c_H en normaliseringskonstant.

I tilfellet $H = 1/2$ har vi en stabil Lévy-prosess. Vi vil nå vise at en fraksjonell Lévy-prosess er selvsimilær:

Teorem 10. En fraksjonell Lévy-prosess med stabilitetsekspONENT α og Hurst-eksponent H er h -selvsimilær med $h = \frac{1}{\alpha} + H - \frac{1}{2}$.

Bevis. Ved å bruke selvsimilæriteten til stabile Lévy-prosesser får vi:

$$\begin{aligned} X(at) &= c_H \int_{-\infty}^{at} \left((at-u)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-u)_+^{H-\frac{1}{2}} \right) dZ_\alpha(u) \\ &= c_H \int_{-\infty}^{at} \left((at-av)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-av)_+^{H-\frac{1}{2}} \right) dZ_\alpha(av) \\ &= c_H a^{H-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{at} \left((t-v)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-v)_+^{H-\frac{1}{2}} \right) dZ_\alpha(av) \\ &\stackrel{d}{=} \stackrel{d}{\sim} c_H a^{H-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^t \left((t-v)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-v)_+^{H-\frac{1}{2}} \right) a^{\frac{1}{\alpha}} dZ_\alpha(v) \\ &= a^{H+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}} X(t). \end{aligned}$$

□

Fra konstruksjonen følger det at fraksjonelle Lévy flights har stasjonære inkremitter og at $X(1) \stackrel{d}{\sim} S(\alpha, 0, 1, 0)$. Kombinerer vi dette med selvsimilæriteten får vi at skaleringsfunksjonen til en fraksjonell Lévy flight tar formen

$$\zeta(q) = \begin{cases} hq & q \in (0, \alpha) \\ \text{ikke definert} & q > \alpha \end{cases}.$$

Selv om ikke skaleringsfunksjonen er definert for $q > \alpha$, så finnes det en teori for den estimerte skaleringsfunksjonen:

Teorem 11. (Heyde og Sly[9]) La $X(t)$ være en fraksjonell Lévy flight med stabilitetsekspONENT $\alpha < 2$ og Hurst-eksponent H . Basert på estimatoren

$$\hat{S}_q(\Delta t) = (n - \Delta t)^{-1} \sum_{t=1}^{n-\Delta t} |X(t + \Delta t) - X(t)|^q$$

definer vi $\hat{\zeta}(q)$ ved $\hat{S}_q(\Delta t) \sim \Delta t^{\hat{\zeta}(q)}$ for $n \gg 1$. For $H < 1/2$ har vi

$$\hat{\zeta}(q) = \begin{cases} hq & q < \alpha \\ 1 + q(H - \frac{1}{2}) & \alpha < q < \frac{1}{1/2-H} \\ 0 & q > \frac{1}{1/2-H} \end{cases}$$

og for $H \geq 1/2$:

$$\hat{\zeta}(q) = \begin{cases} hq & q < \alpha \\ 1 + q(H - \frac{1}{2}) & q > \alpha \end{cases}$$

For bevis se [9, 6]. Resultatet er et nyttig verktøy for å identifisere prosesser som kan modelleres ved Lévy flights og fraksjonelle Lévy flights. Et eksempel på anvendelse er gitt i [25].

6 Multifraktale prosesser

Multifraktale prosesser ble introdusert[†] i finans i 1997 av Mandelbrot m.fl. [18]. Disse prosessene kjennetegnes ved at strukturfunksjonene er potenslover, og de har dermed veldefinerte skaleringsfunksjoner. Skaleringsfunksjonen for en prosess er som kjent definert via relasjonen $\mathbb{E}|X(t)|^q \sim t^{\zeta(q)}$. Ved å bruke Hölders ulikhet kan det vises at denne skaleringsfunksjonen alltid er konkav. Klassen av selvsimilære prosesser hører til under de multifraktale prosessene. En selvsimilær prosess har en lineær skaleringsfunksjon som er bestemt av selvsimilæritetseksponenten. Siden skaleringsfunksjonen til en selvsimilær prosess kan karakteriseres ved hjelp av én parameter, så kaller vi gjerne slike prosesser for monofraktale. Denne avhandlingen bruker betegnelsen multifraktal om prosesser med strengt konkave skaleringsfunksjoner.

Vår motivasjon for å innføre multifraktale modeller er at de er i stand til å gjenskape viktige fenomen som er observert i finanstidsrekker. Dette inkluderer volatilitetspersistens (lang hukommelse i absoluttverdien av inkrementene*) og potenslovskalering for tetthetene i origo. Videre er volatilitetsvarsling ved bruk av multifraktale modeller rapportert å gi gode resultater i empiriske forsøk [15, 16, 5].

Vi skal se på en fraksjonell Brownsk bevegelse $B_H(t)$ satt sammen med en indre prosess $\Theta(t)$:

$$X(t) = B_H(\Theta(t)). \quad (19)$$

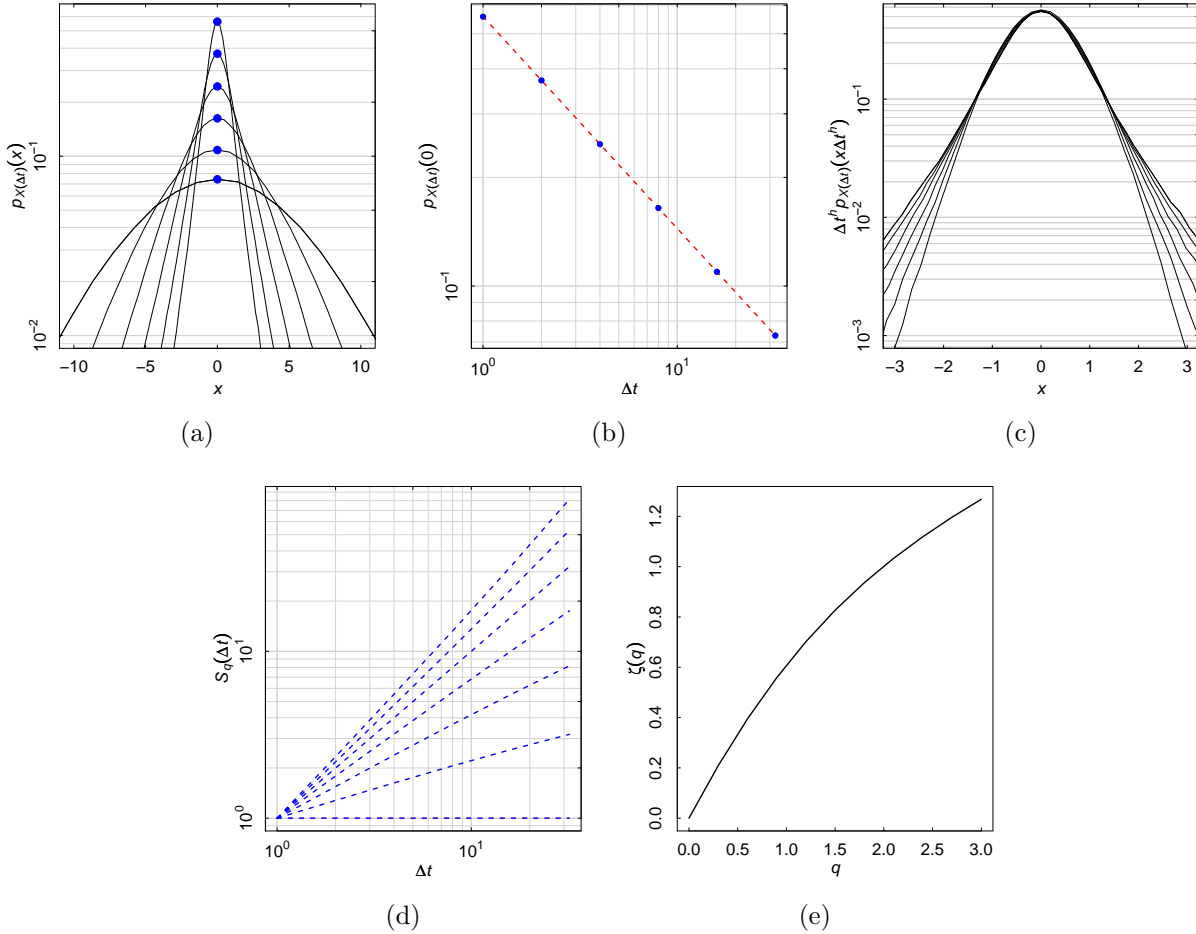
Den indre prosessen $\Theta(t)$ er fordelingsfunksjonen til et tilfeldig multifraktalt mål μ . Dette betyr at Θ er definert ved $\Theta(t) = \mu([0, t])$. Denne prosessen kalles gjerne multifraktal tid.

I dette avsnittet skal vi se på tre ulike konstruksjoner. Det som skiller de ulike modellene er hvordan det tilfeldige målet μ defineres. Vi ser først på det som kalles Multifractal Model of Asset Return (MMAR). Denne ble introdusert av Mandelbrot [18]. Her benyttes konstruksjoner av μ som opprinnelig var ment som modeller for hastighetsfluktuasjonene i turbulente væsker [17, 24]. En innvending mot denne typer modeller er at de ikke har

[†]Ghashghaie mfl. [26] studerte skaleringsfunksjonen til en multifral prosess ett år før Mandelbrot, men spesifiserte ingen modell. Så introduksjonen av multifraktale prosesser tilskrives gjerne Mandelbrot.

*ACF avtar som en potenslov

stasjonære inkremitter. Calvet og Fisher løste i 2001 dette problemet, og målet de konstruerte blir kalt Poisson-multifraktalen [4]. I samme artikkel introduserte de en tilhørende diskretisert modell som de kalte Markov Switching Multifractal (MSM). En fordel med MSM er at likelihooden kan beregnes analytisk, og at den tillater effektiv volatilitetsvarsling.



Figur 4: Egenskaper for en multifraktal prosess $X(t)$: a) Tettheter $p_{X(\Delta t)}$ for $X(\Delta t)$ på forskjellige tidsskalaer Δt . Tetthetene har en potenslovskalering i origo $p_{X(\Delta t)}(0) \sim \Delta t^{-\nu}$. Punktene $(0, p_{X(\Delta t)}(0))$ er farget blå. b) Potenslovskaleringen $p_{X(\Delta t)}(0) \sim \Delta t^{-\nu}$ gir en rett linje med stigninstall $-\nu$ i et dobbeltlogaritmisk plot. c) Reskalerte tettheter $\Delta t^\nu p_{X(\Delta t)}(x \Delta t^\nu)$ faller ikke på hverandre. d) Strukturfunksjonene $S_q(\Delta t) = \mathbb{E}|X(\Delta t)|^q$ er også potenslover $S_q(\Delta t) \sim \Delta t^{\zeta(q)}$. e) Skaleringsfunksjonen $\zeta(q)$ er ikke-lineær. At den er strengt konkav er en karakteristisk egenskap for multifraktale prosesser. Figur (b) og (d) er dobbeltlogaritmiske. Figur (a) og (c) har logaritmisk 2.akse.

6.1 Konstruksjon av multifraktal tid

Vi skal nå definere den indre prosessen $\Theta(t)$ i MMAR. Prosessen vil være definert for $t \in [0, T]$. Vi skriver $\Theta(t) = \mu([0, t])$ der μ er et tilfeldig (multifraktalt) mål som vi nå skal konstruere. Vi velger å presentere det som kalles en p -modell eller et tilfeldig Bernoulli-mål.

Vi definerer de dyadiske intervallene

$$\Delta_{i_1, \dots, i_n} = [T \cdot (0.i_1 \dots i_n)_2, T \cdot (0.i_1 \dots i_n)_2 + 2^{-n}T], \quad i_k \in \{0, 1\}$$

der indeksen $(0.i_1 i_2 \dots)_2$ betegner en ekspansjon i 2-tallsystemet:

$$(0.i_1 i_2 i_3 \dots)_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i_k}{2^k}.$$

La $p \in (0, 1)$, og f være en tilfeldig bijeksjon $\{0, 1\} \rightarrow \{p, 1-p\}$. Det finnes to bijeksjoner mellom mengdene $\{0, 1\}$ og $\{p, 1-p\}$. Den ene er definert ved $0 \mapsto p$ og $1 \mapsto 1-p$, mens den andre er gitt ved $0 \mapsto 1-p$ og $1 \mapsto p$. Den tilfeldige bijeksjonen f har da to mulige utfall, og vi definerer den slik at hvert av utfallene har sannsynlighet $1/2$. Vi lar så f_{i_1, \dots, i_n} være uavhengige kopier av f . Ved hjelp av f kan vi nå spesifisere massen i alle dyadiske intervaller:

$$\mu(\Delta_{i_1, \dots, i_n}) = f(i_1) f_{i_1}(i_2) f_{i_1, i_2}(i_3) \dots f_{i_1, \dots, i_{n-1}}(i_n).$$

Siden f er en tilfeldig bijeksjon, så er massen $\mu(\Delta_{i_1, \dots, i_n})$ en tilfeldig variabel. Legg også merke til at en realisasjon av det tilfeldige målet avhenger av uendelig mange realisasjoner av f .

Merknad 7. *Konstruksjonen har følgende fortolkning: Vi begynner med å dele intervallet $[0, T]$ i to like store delintervaller Δ_0 og Δ_1 . Vi kan så fordele massen mellom de to intervallene ved $\mu(\Delta_0) = p\mu([0, T])$ og $\mu(\Delta_1) = (1-p)\mu([0, T])$. Hvis vi gjentar dette rekursivt på delintervallene vil vi konstruere et mål definert ved*

$$\mu(\Delta_{i_1, \dots, i_n}) = p_1 p_2 \dots p_n.$$

Dette målet kalles et (deterministisk) Bernoulli-mål. Vi får et tilfeldig Bernoulli-mål ved at vi i hvert steg i konstruksjonen gjør et tilfeldig valg om hvorvidt p skal brukes som multiplikator for intervallet til venstre og $1-p$ skal brukes som multiplikator for intervallet til høyre, eller om disse skal byttes om.

Vi bemerker også at konstruksjonen lett kan generaliseres fra en dyadisk til en b -adisk trestruktur, der $b > 1$ er et vilkårlig heltall. De tilfeldige Bernoulli-målene er beslektet med (men må ikke forveksles med) de b -adiske multiplikative kaskadene. Disse behandles i avsnitt 6.3.1.

Fra konstruksjonen følger at det

$$\Theta(t + \Delta t) - \Theta(t) \stackrel{d}{\sim} \Theta(\Delta t). \quad (20)$$

hvis $\Delta t = T/2^n$ og $t = k\Delta t$ for positive heltall k og n . Ligning (20) holder derimot ikke for generelle t og Δt . Dermed har prosessen ikke stasjonære inkremerter. Denne "gittereffekten" gjelder også for multiplikative kaskader, og fra et matematisk synspunkt må dette ses på som en svakhet med ved MMAR modellene.

For $t = T/2^n$ er

$$\Theta(t) = \mu(\Delta_{i_1, \dots, i_n}),$$

med $i_1 = i_2 = \dots i_n = 0$. Massen i intervallet Δ_{i_1, \dots, i_n} er et produkt bestående av n faktorer, der hver faktor er p eller $1 - p$ med lik sannsynlighet. Dermed er det 2^n utfall for $\mu(\Delta_{i_1, \dots, i_n})$, og antall utfall som gir $p^k(1 - p)^{n-k}$ er gitt ved binomialkoeffisienten $\binom{n}{k}$. Dette enkle kombinatoriske argumentet gir at

$$p_{\Theta(t)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \delta(x - p^k(1 - p)^{n-k}), \text{ for } t = \frac{T}{2^n}, \quad (21)$$

der δ er Diracs deltafunksjon.

Fra tetthetene beregner vi strukturfunksjonene. Vi lar igjen $t = T/2^n$:

$$\begin{aligned} S_q(t) &= \int |x|^q p_{\Theta(t)}(x) dx = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (p^k(1 - p)^{n-k})^q \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (p^q)^k ((1 - p)^q)^{n-k} = \frac{1}{2^n} (p^q + (1 - p)^q)^n \\ &= \frac{t}{T} (p^q + (1 - p)^q)^{\frac{1}{\log 2}(\log T - \log t)}. \end{aligned}$$

Vi har at

$$\log S_q(t) = \left(1 - \frac{1}{\log 2} \log(p^q + (1 - p)^q) \right) \log t + c,$$

og dermed er skaleringsfunksjoene gitt ved

$$\zeta_{\Theta}(q) = 1 - \frac{1}{\log 2} \log(p^q + (1 - p)^q).$$

6.2 MMAR

Når vi nå har sett hvordan den indre prosessen konstrueres kan vi definere MMAR.

Definisjon 12 La $B_H(t)$ være en standardisert fraksjonell Brownsk bevegelse med Hurst-eksponent H og la $\{\Theta(t), t \in [0, T]\}$ være gitt ved konstruksjonen i forrige avsnitt. La disse to prosessene være uavhengige. Vi kaller prosessen

$$X(t) = T^H \sigma B_H(\Theta(t)), \quad t \in [0, T]$$

for en Multifractal Model of Asset Return (MMAR). Her er $\sigma > 0$.

Siden $\Theta(t)$ ikke har stasjonære inkremitter følger det at $X(t)$ heller ikke har stasjonære inkremitter. Vi har likevel at $X(t + \Delta t) - X(t) \stackrel{d}{\sim} X(\Delta t)$ for $\Delta t = T/2^n$ og $t = k\Delta t$. Dette vises lett ved å bruke at fraksjonelle Brownske bevegelser har stasjonære inkremitter:

$$\begin{aligned} X(t + \Delta t) - X(t) &= T^H \sigma (B_H[\Theta(t + \Delta t)] - B_H[\Theta(t)]) \\ &\stackrel{d}{\sim} T^H \sigma (B_H[\Theta(t) + \Theta(\Delta t)] - B_H[\Theta(t)]) \stackrel{d}{\sim} T^H \sigma B_H[\Theta(\Delta t)] = X(\Delta t). \end{aligned}$$

For å finne tettheten til $X(t)$ betinger vi på $\Theta(t)$ og benytter oss av at

$$p_X(x) = \int p_X(x|Y=y)p_Y(y)dy$$

for tilfeldige variable X og Y [23]. Ved å bruke (21) finner vi (for $t = T/2^n$) at

$$\begin{aligned} p_{X(t)}(x) &= \int p_{X(t)}(x|\Theta(t)=s)p_{\Theta(t)}(s) ds = \int \frac{1}{\sigma T^H} p_{B_H(s)}\left(\frac{x}{\sigma T^H}\right) p_{\Theta(t)}(s) ds \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 T^{2H} p^{2Hk} (1-p)^{2H(n-k)}}\right)}{\sigma T^H \sqrt{2\pi} p^{Hk} (1-p)^{H(n-k)}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Denne tettheten er en vektet sum av gaussiske tettheter. Den er i seg selv ikke gaussisk med mindre $p = 1/2$.

Når vi kjenner tettheten til $X(\Delta t)$ er det interessant å se hvordan denne oppfører seg under reskalering, jamfør avsnitt 3.1. Vi starter med å se hvordan tettheten i $x = 0$ skalerer med hensyn på tiden. For $t = T/2^n$ har vi

$$\begin{aligned} p_{X(t)}(0) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{\sigma T^H \sqrt{2\pi} p^{Hk} (1-p)^{H(n-k)}} \\ &= \frac{1}{2^n \sigma T^H \sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (p^{-H})^k [(1-p)^{-H}]^{n-k} \\ &= \frac{1}{2^n \sigma T^H \sqrt{2\pi}} (p^{-H} + (1-p)^{-H})^n, \quad \Delta t = \frac{T}{2^n} \\ &= \frac{t}{T^{H+1} \sigma \sqrt{2\pi}} (p^{-H} + (1-p)^{-H})^{\frac{1}{\log 2} (\log T - \log t)}. \end{aligned}$$

Vi tar logaritmen og får

$$\log p_{X(t)}(0) = -\nu \log t + c,$$

der

$$\nu = \frac{1}{\log 2} \log(p^{-H} + (1-p)^{-H}) - 1. \quad (23)$$

Vi ser at $p_{X(t)}(0)$ har en algebraisk skaling i t , men tetthetene (for varierende t) vil ikke falle på hverandre under reskalering med hensyn til eksponenten ν . Dette kan ses fra uttrykket for tetthetene (22). Vi har her et eksempel på en prosess med tettheter som har algebraisk skaling, men som ikke er selvsimilær. Dette må tas i betraktning når vi tester for selvsimilæritet. Vi vil fortsatt estimere eksponenten ν , men denne har nå en annen tolkning enn for en selvsimilær prosess. Å estimere ν er del av en metode for å estimere parametrene i en MMAR-modell. Vi ser av det analytiske uttrykket for ν at vi trenger en ligning til for å bestemme parametrene p og H . Dette kan oppnås ved å se på struktur- og skaleringsfunksjonen.

Siden $B_H(t)$ og $\Theta(t)$ er uavhengige har vi (for $t = T/2^n$):

$$\mathbb{E}|X(t)|^q = T^{Hq} \sigma \mathbb{E} \left| B_H(\Theta(t)) \right|^q \propto \mathbb{E} \Theta(t)^{Hq} \propto t^{\zeta_{\Theta}(Hq)},$$

der $\zeta_{\Theta}(q)$ er skaleringsfunksjonen til $\Theta(t)$. Dermed er skaleringsfunksjonen til MMAR-prosessen $X(t)$ gitt ved

$$\zeta_X(q) = \zeta_{\Theta}(Hq) = 1 - \frac{1}{\log 2}(p^{Hq} + (1-p)^{Hq}).$$

Sammen med (23) gir dette ligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_X(2)}{2} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \log 2}(p^{2H} + (1-p)^{2H}) \\ \nu &= \frac{1}{\log 2} \log(p^{-H} + (1-p)^{-H}) - 1. \end{aligned}$$

Her har valgt å bruke $\zeta_X(2)/2$ med tanke på at denne størrelsen gir nyttig informasjon også for konkurrerende modeller, eksempelvis en fraksjonell Lévy flight. Ved å estimere ν og $\zeta(2)$ kan vi bestemme parameterne p og H .

Merknad 8. Det er lett å se at $\zeta(2)/2 = H$ hvis og bare hvis $H = 1/2$. Dermed har vi ukorrelerte inkremitter kun for $H = 1/2$. Selv om inkrementene er ukorrelerte vil de ikke være uavhengige, med mindre $p = 1/2$.

6.3 Andre klasser av tilfeldige multifraktale mål

Et problem med MMAR er at den ikke har stasjonære inkremitter. Calvet og Fisher [4] løste dette problemet ved å konstruere en Poisson multifraktal via randomisering av den b -adiske gitterstrukturen. For å gjøre dette tok de utgangspunkt i multiplikative kaskader.

6.3.1 Multiplikativ kaskade

Vi lar målene være definert på intervallet $[0, T]$, og vi definerer igjen delintervallene som følger:

$$\Delta_{i_1, \dots, i_n} = [T \cdot (0.i_1 \dots i_n)_2, T \cdot (0.i_1 \dots i_n)_2 + 2^{-n}T], \quad i_k \in \{0, 1\}.$$

La M være en tilfeldig variabel med $\mathbb{E}M = 1/2$ og la M_{i_1, \dots, i_n} (der $i_k \in \{0, 1\}$) være uavhengige kopier av M . Vi definerer målet μ ved

$$\mu(\Delta_{i_1, \dots, i_n}) = M_{i_1} \cdots M_{i_1, \dots, i_n} \Omega_{i_1, \dots, i_n},$$

der

$$\Omega_{i_1, \dots, i_n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j_1, \dots, j_n} M_{i_1} \cdots M_{i_1, \dots, i_n} M_{i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_k}.$$

Her kan Ω_{i_1, \dots, i_n} tolkes som en normaliseringsfaktor*. Betingelsen $\mathbb{E}M = 1/2$ sørger for at massen er bevart i middel.

En mulige generalisering av dette å bruke b -adiske intervaller. Det gir betingelsen $\mathbb{E}M = 1/b$. Populære valg for variabelen M er lognormale fordelinger eller andre log-uendelig delbare fordelinger (log M har en uendelig delbar fordeling).

* $\Omega_{i_1, \dots, i_n} \stackrel{d}{\sim} \mu[0, T]$

6.3.2 Poisson-multifraktalen

Med utgangspunkt i en multiplikativ kaskade innførte Calvet og Fisher [4] Poisson multifraktalen. Innovasjonen bestod i å randomisere intervallene ved hjelp av en Poisson prosess, og den resulterende multifraktale modellen kalles en Poisson Multifraktal Model (PMM). Vi ser på hvordan målet μ konstrueres gjennom å definere en følge $\{\mu_k\}$.

Steg 1: La $\{T(k)\}_{k=1}^{\infty}$ være en følge av u.i.f. variable der $T(1) \stackrel{d}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$ (eksponentiell fordeling med rate λ). Her er $\lambda > 0$. Vi definerer

$$\begin{aligned} N &= \max \left\{ m : \sum_{k=1}^m T(k) < T \right\} \\ t_n &= \begin{cases} 0 & , \quad n = 0 \\ \sum_{k=1}^n T(k) & , \quad n \in [1, \dots, N] \\ T & , \quad n = N + 1 \end{cases} \\ I_n &= [t_n, t_{n+1}]. \end{aligned}$$

La $\{M_n\}$ være en følge av u.i.f. variable. Vi definerer målet μ_1 , slik at det har en tetthet som er konstant på intervallene I_n , ved

$$\mu_1(I_n) = \frac{l(I_n)}{T} M_n,$$

der $l(I_n)$ betegner lengden av intervallet I_n .

Vi har

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sum_{n=1}^N M_n(t_{n+1} - t_n) &= \mathbb{E} \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^N M_n(t_{n+1} - t_n) \mid \{T_n\}_{n=1}^{\infty} \right] \\ &= \mathbb{E} \sum_{n=1}^N (t_{n+1} - t_n) \mathbb{E} [M_n \mid \{T_n\}_{n=1}^{\infty}] = \mathbb{E} \sum_{n=1}^N (t_{n+1} - t_n) \mathbb{E} M_n \\ &= \mathbb{E} \sum_{n=1}^N (t_{n+1} - t_n) \mathbb{E} M_1 = T \mathbb{E} M_1, \end{aligned}$$

så betingelsen $\mathbb{E} \mu_1(I_n) = 1$ medfører nå at vi må velge $\mathbb{E} M_1 = 1$.

Steg 2: Vi ser på et intervall I_n . La $\{T_n(k)\}_{k=1}^{\infty}$ være en følge av u.i.f. variable der $T_n(1) \stackrel{d}{\sim} \text{Exp}(b\lambda)$. Her er $b > 1$ en parameter i modellen.

Vi definerer

$$\begin{aligned} N_n &= \max \left\{ m : \sum_{k=1}^m T_n(k) < l(I_n) \right\} \\ t_{n,j} &= \begin{cases} t_n & , \quad j = 0 \\ t_n + \sum_{k=1}^j T_n(k) & , \quad j \in \{1, \dots, N_n\} \\ t_{n+1} & , \quad j = N_n + 1 \end{cases} \\ I_{n,j} &= [t_{n,j}, t_{n,j+1}]. \end{aligned}$$

*I denne artikkelen var den ytre prosessen $B_H(t)$ en Brownsk bevegelse, dvs $H = 1/2$. Utvidelsen til en fraksjonell Brownsk bevegelse er under studie av Rypdal og Rypdal.

La $\{M_{n,j}\}_{j=0}^\infty$ være en følge av u.i.f variable med lik fordeling som faktorene fra forrige steg. Vi definerer målet μ_2 ved at tetthetene er konstante på intervallene $I_{n,j}$ og

$$\mu_2(I_{n,j}) = \frac{l(I_{n,j})}{T} M_{n,j} M_n,$$

der M_n er faktoren fra steg 1 tilhørende intervallet I_n .

Vi fortsetter rekursivt:

Steg n: Anta målet μ_{n-1} er definert. Vi ser på intervallet $I_{j_1, j_2, \dots, j_{n-1}}$ fra steg $n-1$. La $T_{j_1, j_2, \dots, j_{n-1}}(k)$ være en følge av u.i.f. variable med fordeling $\text{Exp}(b^{n-1}\lambda)$. Vi definerer

$$\begin{aligned} N_{j_1, \dots, j_{n-1}} &= \max \left\{ m : \sum_{k=1}^m T_{j_1, \dots, j_{n-1}}(k) < l(I_{j_1, \dots, j_{n-1}}) \right\} \\ t_{j_1, \dots, j_n} &= \begin{cases} t_{j_1, \dots, j_{n-1}} & , j_n = 0 \\ t_{j_1, \dots, j_{n-1}} + \sum_{k=1}^n T_{j_1, \dots, j_{n-1}}(k) & , j_n \in [1, \dots, N_{j_1, \dots, j_{n-1}}] \\ t_{j_1, \dots, j_{n-1}+1} & , j_n = N_{j_1, \dots, j_{n-1}} + 1 \end{cases} \\ I_{j_1, \dots, j_n} &= [t_{j_1, \dots, j_n}, t_{j_1, \dots, j_n+1}]. \end{aligned}$$

Vi bemerker at økningen i raten til eksponentialfordelinga er viktig for at vi skal få en oppdeling i intervallene. La $\{M_{j_1, j_2, \dots, j_n}\}_{j_n=0}^\infty$ være en følge av u.i.f. variable med lik fordeling som M_1 . Målet μ_n er nå gitt ved at tetthetene er konstante på intervallene I_{j_1, \dots, j_n} og at

$$\mu_n(I_{j_1, \dots, j_n}) = \frac{l(I_{j_1, \dots, j_n})}{T} M_{j_1} M_{j_1, j_2} \cdots M_{j_1, j_2, \dots, j_n},$$

der M_{j_1} er faktoren tilhørende I_{j_1} , M_{j_1, j_2} er faktoren som er trukket i steg 2 for I_{j_1, j_2} og så videre.

I steg n trekkes altså endepunktene til intervallene i fra en eksponetiell fordeling med rate $b^{n-1}\lambda$, mens faktorene har lik fordeling innad i et steg og mellom forskjellige steg. Videre er både endepunkter og faktorene uavhengige, både mellom forskjellig steg og innad i et steg. Under betingelsen $\mathbb{E}M^2 < 1$ konvergerer følgen (svakt) til et Borel-mål μ på $[0, T]$. Dette målet kalles Poisson-multifraktalen.

6.3.3 Poisson-multifraktalen i diskretisert utgave

Calvet og Fisher har også presentert en diskretisert versjon av det multifraktale Poisson-målet. Dette diskretiserte målet konstrueres ved å se på et endelig antall steg K . For at endepunktene til intervallene skal befinne seg på heltallene $0, \dots, \tilde{T} = m^K$ (der m er et positivt heltall) erstattes eksponentialfordelinga med en geometrisk fordeling. Denne fordelingen er gitt ved $P(\tilde{T}_{i_1, \dots, i_k} = \tau) = \gamma_k (1 - \gamma_k)^{\tau-1}$ der $1 - \gamma_k = \exp(-\lambda b^{k-1} \tilde{T} / T)$. Merk at parametrene γ_k og γ_1 er relatert ved:

$$\gamma_k = 1 - (1 - \gamma_1)^{b^{k-1}}.$$

Målet $\tilde{\mu}$ er gitt ved

$$\tilde{\mu}([t-1, t]) = m^{-K} M_{i_1} \cdots M_{i_1, \dots, i_K}$$

der t er et heltall og $[t-1, t] \subseteq I_{i_1, \dots, i_K}$. Den indre prosessen er nå gitt ved $\tilde{\Theta}(t) = \tilde{\mu}([0, t])$. Vi kan forenkle notasjonen ved å la $M_{1,t} \cdots M_{K,t} = M_{i_1} \cdots M_{i_1, \dots, i_K}$ for $t \in I_{i_1, \dots, i_K}$.

I denne avhandlingen har vi valgt følgende fordeling for multiplikatoren M :

$$\mathbb{P}(M = m_0) = p, \quad \mathbb{P}(M = m_1) = 1 - p,$$

der $p \in (0, 1)$, $m_0 \in (0, 1)$ og $m_1 > 1$. Vi har betingelsen $\mathbb{E}M = 1$ som medfører følgende relasjon:

$$p = \frac{m_1 - 1}{m_1 - m_0}.$$

Vi definerer nå vektoren $\mathbf{M}_t = (M_{1,t}, \dots, M_{K,t})$, og observerer at konstruksjonen medfører at for hvert tidspunkt t , så vil faktoren $M_{k,t}$ oppdateres med sannsynlighet γ_k og forbli uforandret med sannsynlighet $1 - \gamma_k$ (uavhengig av tidligere oppdateringer). Dette kan vi beskrive ved notasjonen:

$$M_{k,t} = \begin{cases} M & \text{sannsynlighet } \gamma_k \\ M_{k,t-1} & \text{sannsynlighet } 1 - \gamma_k \end{cases}.$$

Siden hver komponent til \mathbf{M}_t har to mulige utfall m_0 og m_1 , så kan \mathbf{M}_t ta 2^K verdier. Vi betegner disse ved $\{\mathbf{m}^1, \dots, \mathbf{m}^d\}$ der $d = 2^K$. Vi ser at fordelingsfunksjonen til \mathbf{M}_t , gitt informasjonsmengden $\{\mathbf{M}_t\}_{k=0}^{t-1}$, bare avhenger av informasjonen i forrige tidssteg:

$$\mathbb{P}(\mathbf{M}_t = \mathbf{m}^k | \mathbf{M}_{t-1} = \mathbf{m}^{i_1}, \mathbf{M}_{t-2} = \mathbf{m}^{i_2} \dots, \mathbf{M}_0 = \mathbf{m}^{i_t}) = \mathbb{P}(\mathbf{M}_t = \mathbf{m}^k | \mathbf{M}_{t-1} = \mathbf{m}^{i_1}).$$

Dette er kjent som Markov-egenskapen, og dermed er $\{\mathbf{M}_t\}$ en Markov-kjede. Vi betegner overgangsmatrisa til Markov-kjeden ved

$$A_{i,j} = P(\mathbf{M}_t = \mathbf{m}^j | \mathbf{m}^i).$$

6.4 Markov Switching Multifractal

Med utgangspunkt i den diskretiserte versjonen av Poisson-multifraktalen defineres prosessen Markov Switching Multifractal:

Definisjon 13. La $\{\mathbf{M}_t\}$ være den K -dimensjonale Markov-kjeden som ble beskrevet i forrige avsnitt, og la $B_H(t)$ være en standardisert fraksjonell Brownsk bevegelse med Hurst-eksponent H . Vi definerer prosessen $\{\varepsilon_t\}$ ved $\varepsilon_t = B_H(t) - B_H(t-1)$. Da er prosessen

$$x_t = c\sigma g(\mathbf{M}_t)^H \varepsilon_t. \tag{24}$$

en Markov Switching Multifractal (forkortet MSM). Her er $\sigma > 0$, $c = (m_0^{2H}p + m_1^{2H}(1-p))^{-\frac{K}{2}}$ og $g(\mathbf{m}) = m_1 \cdots m_K$. Vi kaller ε_t for innovasjonsprosessen.

I vår modellering representerer x_t inkrementprosessen på den korteste observerte tidsskalaen til en prosess $X(t)$, det vil si $x_t = X(t+1) - X(t)$.

Teorem 12. La x_t være en MSM-prosess. La startvektoren \mathbf{M}_0 ha fordeling gitt ved grensesannsynlighetene til Markov-kjeden \mathbf{M}_t . Da er x_t stasjonær.

Vi skal studere MSM modellen i tilfellet $H = 1/2$. Hovedgrunnen til dette er at likehooden er lett å beregne for dette tilfellet, og at antagelsen om ukorrelerte inkremitter virker rimelig for tidsrekka vi skal se på.

I dette tilfellet er innovasjonsprosessen ε_t en følge av uavhengige og identiske normalfordelte variable. Videre er normaliseringskonstanten gitt ved $c = 1$. Vi er interessert i å finne simultantettheten $p_{1,\dots,t}(\mathbf{x}_t)$ til $\mathbf{x}_t = (x_1, \dots, x_t)$. For å gjøre dette definerer vi vektorer

$$\begin{aligned}\omega(x)^T &= [n(x|\sigma^2g(\mathbf{m}^1)), \dots, n(x|\sigma^2g(\mathbf{m}^d))] \\ \mathbf{p}_t^T &= [P(\mathbf{M}_t = \mathbf{m}^1|\mathbf{x}_{t-1}), \dots, P(\mathbf{M}_t = \mathbf{m}^d|\mathbf{x}_{t-1})],\end{aligned}\tag{25}$$

der $n(x|\sigma^2)$ er tettheten til $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ og $\mathbf{x}_t = (x_1, \dots, x_t)$. Vi kan da skrive

$$p_{1,\dots,t}(\mathbf{x}_t) = \prod_{s=1}^t p_s(x_s|\mathbf{x}_{s-1}),$$

der $p_t(x_t|\mathbf{x}_{t-1})$ er tettheten til $x_t|\mathbf{x}_{t-1}$. For å beregne disse betingede tetthetene observerer vi at $x_t|M_t = \mathbf{m}^k \stackrel{d}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2g(\mathbf{m}^k))$. Vi starter med å beregne p_1 :

$$p_1(x_1) = \sum_k p_1(x_1|\mathbf{M}_1 = \mathbf{m}^k)P(\mathbf{M}_1 = \mathbf{m}^k) = \mathbf{p}_1^T \omega(x_1).$$

Siden vi har valgt \mathbf{M}_0 til ha fordeling gitt ved grensesannsynlighetene til Markov-kjeden følger det at $\mathbf{M}_1 \stackrel{d}{\sim} \mathbf{M}_0$. Disse sannsynlighetene er gitt ved

$$P(\mathbf{M}_1 = \mathbf{m}^k) = \prod_{j=1}^K P(M = \mathbf{m}_j^k),$$

der \mathbf{m}_j^k er komponent j til tilstand k . Vi ser så på tettheten til $x_2|x_1$:

$$p_2(x_2|x_1) = \sum_k p_2(x_2|x_1, \mathbf{M}_2 = \mathbf{m}^k)P(\mathbf{M}_2 = \mathbf{m}^k|x_1) = \mathbf{p}_2^T \omega(x_2).$$

Videre har vi

$$\begin{aligned}P(\mathbf{M}_2 = \mathbf{m}^k|x_1) &= \sum_j P(\mathbf{M}_2 = \mathbf{m}^k|x_1, \mathbf{M}_1 = \mathbf{m}^j)P(\mathbf{M}_1 = \mathbf{m}^j|x_1) \\ &= \sum_j A_{j,k}P(\mathbf{M}_1 = \mathbf{m}^j|x_1) \\ &= \sum_j A_{j,k} \frac{P(\mathbf{M}_1 = \mathbf{m}^j)p_1(x_1|M_1 = m_j)}{p_1(x_1)}.\end{aligned}$$

Dermed er

$$\mathbf{p}_2^T = \frac{1}{p_1(x_1)}(\mathbf{p}_1^T * \omega(x_1)^T)A,$$

der vi bruker notasjonen $\mathbf{a} * \mathbf{b} = (a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_db_d)$. Vi har at følgende relasjon holder:

$$\mathbf{p}_t^T = \frac{1}{p_{t-1}(x_{t-1}|\mathbf{x}_{t-2})}(\mathbf{p}_{t-1}^T * \omega(x_{t-1})^T)A, \quad t \geq 2.\tag{26}$$

Anta vi kjenner $p_{t-1}(x_{t-1}|\mathbf{x}_{t-2})$ og \mathbf{p}_{t-1} . Da kan $p_t(x_t|\mathbf{x}_{t-1})$ beregnes ved

$$p_t(x_t|\mathbf{x}_{t-1}) = \sum_k p_t(x_t|\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{M}_t = \mathbf{m}^k) P(\mathbf{M}_t = \mathbf{m}_k|\mathbf{x}_{t-1}) = \mathbf{p}_t^T \omega(x_t)$$

og

$$\begin{aligned} P(\mathbf{M}_t = \mathbf{m}^k|\mathbf{x}_{t-1}) &= \sum_j P(\mathbf{M}_t = \mathbf{m}^k|\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{M}_{t-1} = \mathbf{m}^j) P(\mathbf{M}_{t-1} = \mathbf{m}^j|\mathbf{x}_{t-1}) \\ &= \sum_j A_{j,k} P(\mathbf{M}_{t-1} = \mathbf{m}^j|\mathbf{x}_{t-1}) \\ &= \sum_j A_{j,k} \frac{P(\mathbf{M}_{t-1} = \mathbf{m}^j|\mathbf{x}_{t-2}) p_{t-1}(x_{t-1}|\mathbf{x}_{t-2}, \mathbf{M}_{t-1} = \mathbf{m}^j)}{p_{t-1}(x_{t-1}|\mathbf{x}_{t-2})}. \end{aligned}$$

Dette gir oss (26). Vi har dermed gitt et induksjonsbevis for følgende lemma:

Lemma 13. *La x_t være en MSM prosess. Simultantettheten $p_{1,\dots,n}(\mathbf{x}_t)$ til $\mathbf{x}_t = (x_1, \dots, x_t)$ er gitt ved*

$$\begin{aligned} p_{1,\dots,t}(\mathbf{x}_t) &= \prod_{t=1}^T \mathbf{p}_t^T \omega(x_t) \\ \mathbf{p}_t^T &= \frac{1}{\mathbf{p}_{t-1}^T \omega(x_{t-1})^T} (\mathbf{p}_{t-1} * \omega(x_{t-1})) A, \quad t \geq 2 \\ \mathbf{p}_1^T &= \left(\prod_{j=1}^K P(M = \mathbf{m}_j^1), \dots, \prod_{j=1}^K P(M = \mathbf{m}_j^d) \right). \end{aligned}$$

Dette er da likelihooden til data x_1, \dots, x_T fra en MSM-prosess.

Merknad 9. *I tilfellet der vi har avhengige innovasjoner kan vi fortsatt sette opp likelihooden. Problemet ligger i at vi ikke får brutt avhengighet når vi betinger på Markov-kjeden på tilhørende tidspunkt:*

$$H \neq \frac{1}{2} \Rightarrow p_t(x_t|\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{M}_t = \mathbf{m}^k) \neq p_t(x_t|\mathbf{M}_t = \mathbf{m}^k)$$

Som en konsekvens må vi summere over alle tilstander på alle tidligere tidspunkt for Markov-kjeden. Dette er beregningsmessig tungt, men en interessant problemstilling for videre forskning. Vi har prøvd å løse dette ved å se på eksempelvis Expectation Maximization (EM) algoritmen uten å finne at dette forenklet situasjonen nevneverdig.

I vår analyse estimerer vi momenter og tettheter på forskjellige tidsskalaer. Vi minner om at MSM-modellen x_t representerer inkrementene $x_t = X(t+1) - X(t)$ til en prosess $X(t)$. Det kan vises at tettheten til $X(t)$ for $t = n$ er gitt ved:

$$\begin{aligned} p_{X(t)}(y) &= \sum_{j_1 \dots j_n} \mathbb{P}(\mathbf{M}_0 = \mathbf{m}^{j_1}) A_{j_1, j_2} A_{j_2, j_3} \cdots A_{j_{n-1}, j_n} \times \\ &\quad n(y|\sigma^2 [g(\mathbf{m}^{j_1}) + g(\mathbf{m}^{j_2}) + \dots + g(\mathbf{m}^{j_n})]). \end{aligned} \quad (27)$$

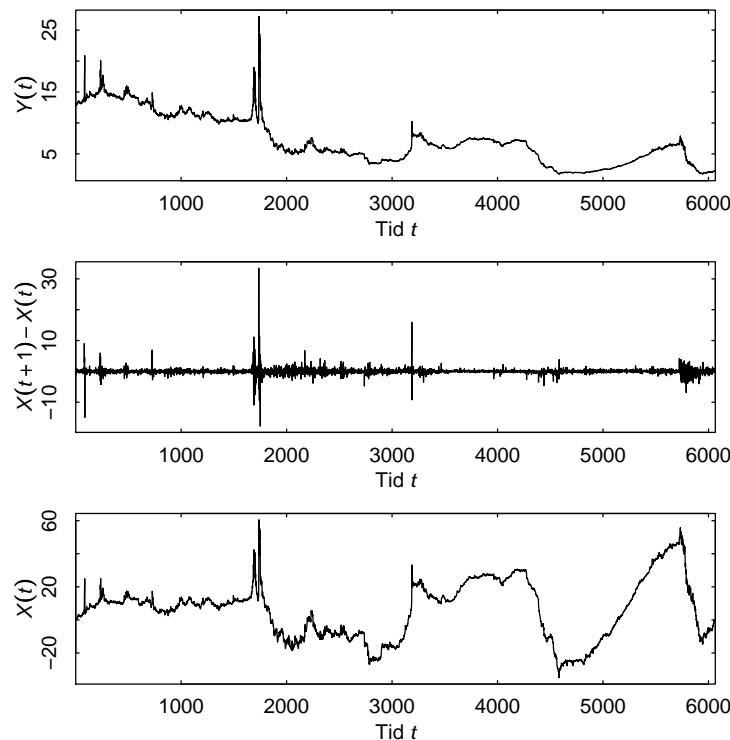
På samme måte som for MMAR ser vi at tetthetene er en miks av gaussiske tettheter. Vi ser i analysedelen at MSM er bedre tilpasset dataene (estimerte ubetingede marginaler) enn MMAR. Dette kan tolkes utifra at (27) er en miks av mange flere normaltettheter enn tilfellet er for MMAR og dermed gir en bedre tilpassing til dataene. Videre har MSM-modellen typiske multifraktale egenskaper, inkludert en ikke-lineær skaleringsfunksjon, og tettheter som ikke faller på hverandre under reskalering.

7 Analyse av NIBOR

I dette avsnittet presenterer vi en analyse av den norske pengemarkedsrenta med 3 måneders løpetid. Denne markedsvariabelen er kjent under navnet NIBOR (Norwegian Inter Bank Offered Rate), og er en viktig for norske finansinstitusjoner i forbindelse med risikovurderinger. Datasettet vi bruker kan lastes ned fra Norges Bank sine nettsider. Vi har brukt daglige observasjoner (handelsdager) i tidsperioden 02.01.1986 – 27.01.2010.

Vi baserer analysen på de modellene som er presenter tidligere i avhandlingen, og målet med analysen er å finne en modell som klarer å gjenskape egenskapene vi ser i dataene.

7.1 Stasjonærhet



Figur 5: Daglige observasjoner $Y(t)$ på den norske pengemarkedsrenta (NIBOR) med løpetid 3 måneder i tidsperioden 02.01.1986-27.01.2010. Nederste plottet viser logaritmen av NIBOR $X(t) = \log Y(t)$ (normalisert). Midterste plottet viser daglige logreturn $X(t+1) - X(t)$.

Vi har data $Y(1), \dots, Y(n)$ der antall observasjoner er $n = 6065$. Vi tenker oss at dataene er en realisering av en stokastisk prosess $Y(t)$.

Første steg i analysen å ta logaritmen av tidsrekka:

$$X(t) = \log Y(t), \quad (28)$$

og å normalisere $X(t)$ slik at inkrementene til tidsskalaen $X(t+1) - X(t)$ har middelverdi 0 og samplevarians lik 1. Grunnen til at man tar logaritmen av tidsrekka er at det er en sammenheng mellom inkrementamplituden $|Y(t+1) - Y(t)|$ og variabelen $Y(t)$. En slik sammenheng er ikke forenelig med en antagelse om stasjonære inkremitter. Derimot viser det seg at denne effekten kan elimineres ved å gjøre transformasjonen i (28). Vi antar at prosessen $X(t)$ har stasjonære inkremitter. Inkrementene til logaritmen av NIBOR på den korteste tidsskalaen er plottet i figur 5, og i figur 14 vedlegg A er også lengre tidsskalaer inkludert.

På de korteste tidsskalaene ser vi klare tegn på volatilitetspersistens. Dette fenomenet illustreres godt i plottene til figur 15 (vedlegg A). Fra estimerte autokorrelasjonsfunksjoner (figur 16) ser inkrementene ut til å være ukorrelerte på alle tidsskalaer, og avhengige opp til $\Delta t = 2^5$. Vi må her være litt forsiktig siden ACF bare er veldefinert for prosesser med eksisterende andremoment. På de lengste tidsskalaene har vi litt lite data som betyr større usikkerhet i estimerte ACF (antall datapunkter for estimert ACF er tilnærmet $n/\Delta t$). At inkrementene er avhengig på de korteste tidsskalaene er konsistent med vår observasjon av volatilitetspersistens.

Merknad 10. *Vi må her gi et par kommentarer angående hypotesen om ukorrelerte inkremitter. På de korteste tidsskalaene ser vi at estimert ACF bryter konfidenslinjene oftere enn man skulle forvente under denne antagelsen. Vi må her huske at disse konfidenslinjene er utledet under en antagelse om uavhengige inkremitter, og dermed ikke nødvendigvis er gyldige for vår situasjon. Det kan også hende at vi har en veldig svak autokorrelasjon. Vi mener uansett at en eventuell autokorrelasjon må betraktes som neglisjerbar i forhold til den modelleringen som presenteres i denne avhandlingen.*

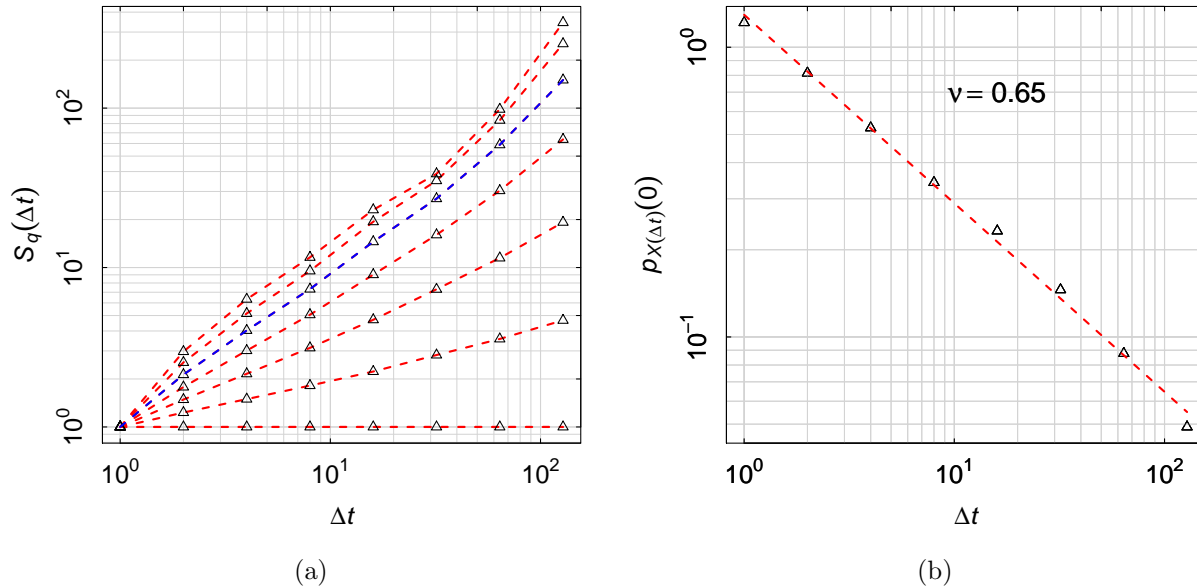
Vi oppsummerer våre første antagelser og observasjoner:

Antagelser:

1. Rådataene er en realisering av en stokastisk prosess $Y(t)$.
2. $X(t) = \log Y(t)$ (normalisert) har stasjonære inkremitter.

Observasjoner:

1. Inkrementene viser tegn på volatilitetspersistens på de korteste tidsskalaene.
2. Fra ACF-plottene ser inkrementene ut til å være ukorrelert, men avhengige på tidsskalaer opp til $\Delta t = 2^5$ dager.



Figur 6: Logaritmen av NIBOR $X(t)$: a) Loglogplot av tetthetene $p_{X(\Delta t)}(0)$ som en funksjon av tidsskalaen Δt . Tilpasser en linje (stiplet rød) til disse punktene. Stigningstallet til denne linja er $-\nu$. b) Loglogplot av strukturfunksjonene $S_q(\Delta t) = \mathbb{E}|X(\Delta t)|^q$ for $q = 0, 0.5, \dots, 3$. Strukturfunksjonen $S_2(\Delta t)$ er farget blå (andremomentene).

7.1.1 Selvsimilaritet

Det første spørsmålet vi stiller er hvorvidt $X(t)$ er en selvsimilar prosess. For å gjøre dette følger vi proseduren beskrevet i avsnitt 3.1. Første steg er å estimere tetthetene. Vi bruker histogrammet* (8) med valgte steglengder basert på følgende: Vi velger steglengde Δx ved å se på se på histogrammet til $X(t + \Delta t) - X(t)$. Vi gjør så en vurdering av vi tror er sample-effekter (Δx for liten) og for mye glatting (Δx for stor). Vi ser at de estimerte tetthetene viser skjevhet på de lengste tidsskalaene. Dette kan være en sample-effekt som kommer av at vi har introdusert en ekstra avhengighet ved å bruke overlappende inkremitter. At enkelte observasjoner faller langt ut relativt til de andre observasjonene tyder på en tunghaleeffekt.

Vi ser av figur 6a at punktene $\{(\log \Delta t, \log p_{X(\Delta t)}(0)), \Delta t = 2^0, \dots, 2^7\}$ danner en tilnærmet rett linje. Dette betyr at tetthetene har tilnærmet algebraisk skalering i origo. Vi tilpasser en rett linje til disse punktene. Dette gir estimatet $\nu = 0.65$. Under en selvsimilaritetshypotese er dette også estimat for selvsimilaritetsekspONENTEN h . Ved å se på plottet til de reskalerte tetthetene (figur 22 i vedlegg A) ser det ut som vi har tilnærmet skalainvarians. Dobbellogaritmiske plot av strukturfunksjonene, figur 6b, viser tilnærmet rette linjer (svak krumning) for $q < 2$. For $q > 2$ har vi definitivt ikke rette linjer. Som en konsekvens gir det bare mening å estimere skaleringsfunksjoner opp til $q < 2$. Hvis vi estimerer en skaleringsfunksjon basert på $\Delta t = 2^0, \dots, 2^7$ får vi en lineær funksjon opp til $q \approx 1.2$. Vi tilpasser en rett linje til

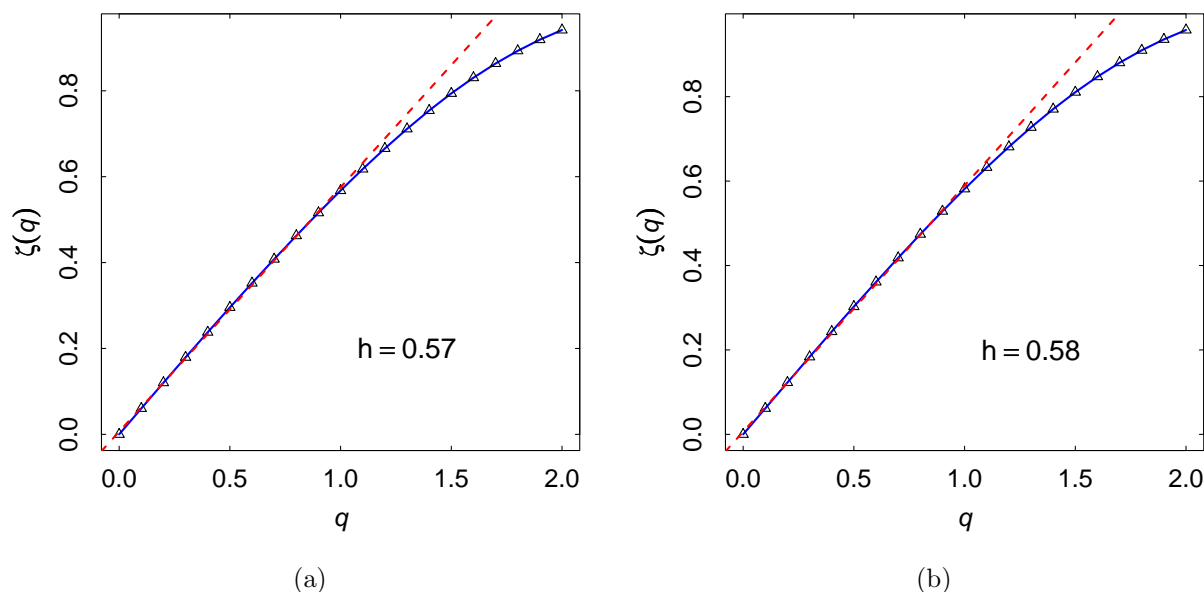
*Vi kommer til å estimere tetthetene ved å bruke parametriske modeller, men for å få en indikasjon på hvilke modeller vi skal bruke vi først histogrammet.

$\{(q, \zeta(q)), q = 0, .1, \dots, 1, \Delta t = 2^0, \dots, 2^7\}$. Dette gir en estimert selvsimilæritetsekspONENT $h = 0.60$. Dette er i rimelig overensstemmelse med estimatet vi fikk fra tetthetene ($h = 0.65$).

Oppsummert har vi ikke avgjort spørsmålet om selvsimilæritet, men vi har gjort følgende observasjoner:

1. Inkrementene har ikke gaussiske fordelinger. Noen inkremitter er svært store i forhold til estimert standardavvik. Dette kan tyde på tunghalestatistikk.
2. En potenslovantagelse for tetthetene i origo virker rimelig.
3. Strukturfunksjonen viser potenslovoppførsel opp til $q \approx 2$, samtidig som de kurver svakt.
4. Skaleringsfunksjonen er ikke-lineær hvis vi inkluderer verdier $q > 2$, men ellers kan vi si lite om den eksakte formen til $\zeta(q)$.

7.2 Modellvalg



Figur 7: Logaritmen av NIBOR: Skaleringsfunksjonene $\zeta(q)$ basert på $\Delta t = 2^0, \dots, 2^k$: a) $k = 5$. b) $k = 6$. Tilpasser en rett linje (stiplet rød) for $\zeta(q)$ opp til $q = 1$. Tilhørende stigningstall h er oppgitt.

Vi ser først på en modell som er selvsimilær. Vi utelukker en fraksjonell Brownsk bevegelse på bakgrunn av den ikke-lineære estimerte skaleringsfunksjonen, samt de ikke-gaussiske tetthetene. Vi har i tillegg observert ukorrelerte inkremitter. For en fBm svarer dette til $h = 1/2$ (det vil si en Brownsk bevegelse). Dette stemmer ikke med estimatene vi har fått for selvsimilæritetsekspONENTEN ($h = 0.58, 0.65$).

Neste kandidat er en fraksjonell Lévy-flight. Siden vi har observert ukorrelererte inkre-
menter må vi ha $H = 1/2$. Dette stemmer overens med estimatet vi har av H . Ved å bruke
relasjonen $\zeta(2) = 2H$ (teorem 11) er vårt estimat $H = 0.50$. Vi har da en stabil Lévy prosess
med $\alpha < 2$. Denne prosessen har uavhengige inkre-
menter, men ikke veldefinert ACF. Fra
teorem 11 kan vi derimot slutte at estimert AFC vil ha samme form som for en Brownsk
bevegelse. Estimert skaleringsfunksjonen (basert på $\Delta t = 2^0, \dots, 2^k$ for $k = 5$ og $k = 6$) kan
peke i retning av bilinæritet med et knekkpunkt for $q < 2$. Dette vil være konsistent med
teorem 11. Vi ser nærmere på modellering av NIBOR ved en stabil Lévy prosess i avsnittet
under.

7.2.1 Modellering ved en stabil Lévy-prosess

Anta $X(t)$ er en stabil Lévy-prosess. Denne prosessen er bestemt av $X(1)$ som igjen avhenger
av fire parametre: $X(1) \stackrel{d}{\sim} \mathcal{S}(\alpha, \beta, c, \mu)$. For å estimere lokasjonsparameteren μ har vi valgt å
bruke middelverdien. Siden vi har normalisert $X(t)$ til å ha middelværdi 0 på den korteste
tidsskalaen er vårt estimat $\mu = 0$.

For å bestemme α har vi brukt tre forskjellige estimeringsmetoder.

Metode 1: Under hypotesen er $\alpha = h^{-1}$ slik at vi kan benytte estimatet av selvsimilæritet-
seksponenten til å bestemme α . Vi bruker estimatet $h = 0.65$ (som er oppnådd ved å se
på skaleringsseksponenten til $p_{X(t)}(0)$). Det gir $\alpha = 1.54$. For å bestemme de to resterende
parametrene c og β benytter vi Maximum Likelihood (ML). Resultatene er presentert i tabell
1.

Metode 2: Igjen bruker vi $\alpha = h^{-1}$, men her benytter estimatet $h = 0.58$ (som er oppnådd
ved å se på skaleringsfunksjonen). Det gir $\alpha = 1.71$. For å bestemme de to resterende parametrene
 c og β benytter vi Maximum Likelihood (ML).

Metode 3: Et tredje estimat for α kan oppnås ved å bruke ML med alle tre parametrene
frie (μ fiksert). Denne metoden gir $\alpha = 1.36$.

Merknad 11. Siden vi under hypotesen har uavhengige inkre-
menter, så vil simultantettheten
være lik produktet av de endimensjonale tetthetene. Dermed er likelihoodfunksjonen gitt ved

$$L(\alpha, \beta, c|\mu) = \prod_{t=1}^{n-1} p_S(\Delta X(t)|\alpha, \beta, c, \mu), \quad (29)$$

der $\Delta X(t) = X(t+1) - X(t)$, og $p_S(\cdot|\alpha, \beta, c, \mu)$ er tettheten til $\mathcal{S}(\alpha, \beta, c, \mu)$. Fra et numerisk
synspunkt er det en fordel å jobbe med log-likelihoodfunksjonen. Denne er gitt ved:

$$\begin{aligned} l(\alpha, \beta, c|\mu) &= -\log L(\alpha, \beta, c|\mu) \\ &= -\sum_{t=1}^{n-1} \log p_S(\Delta X(t)|\alpha, \beta, c, \mu). \end{aligned} \quad (30)$$

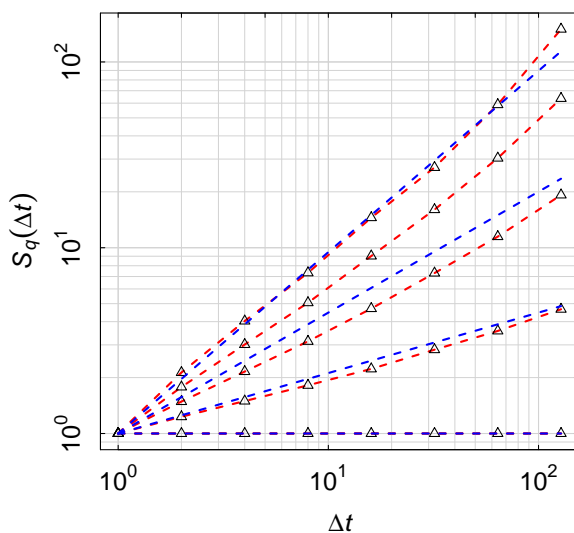
ML-estimatene fås ved å maksimere (29) med hensyn til de frie parametrene. Dette er ekvi-
valent med å minimere (30).

	Metode 1	Metode 2	Metode 3
α	1.36	1.54	1.71
β	-0.03	-0.05	-0.07
c	0.26	0.27	0.29
$l(\alpha, \beta, c \mu)$	4874	4912	5034

Tabell 1: ML-estimer for en Stabil Lévy-prosess.

Hvis vi ser tetthetene under ett er det $\alpha = 1.54$ som gir best tilpasning (figur 18 og 19a,b i vedlegg A). Ut i fra verdien av likelihooden utkonkurrerer denne α -estimatet fra metode 2. Estimatet $\alpha = 1.36$ gir ved konstruksjon best resultat på likelihooden, men tetthetene til den tilhørende prosessen har for tunge haler på de lengste tidsskalaene. Fordelen med å bruke metode 2 og metode 3 er at vi da benytter tilleggsinformasjonen på de større tidsskalaene.

Selv om vi bruker estimatene fra metode 2 vil ikke en stabil Lévy prosess være istand til å gi en nøyaktig beskrivelse av NIBOR. Vi ser blant annet fra figur 8 at modellen ikke reproducerer de estimerte strukturfunksjonene for $q \geq 1$.



Figur 8: Strukturfunksjoner for stabil Lévy-prosess (blå linjer) sammen med strukturfunksjoner til NIBOR (trekanter og røde linjer). Momentene som er beregnet er $q = 0, 0.5, \dots, 2$. Strukturfunksjonene til den stabile Lévy-prosessen er beregnet med å bruke teorem 11. Vi ser at den stabile Lévy-modellen ikke fanger skaleringen i momentene (for $q > 0.5$). Figuren er dobbellogaritmisk.

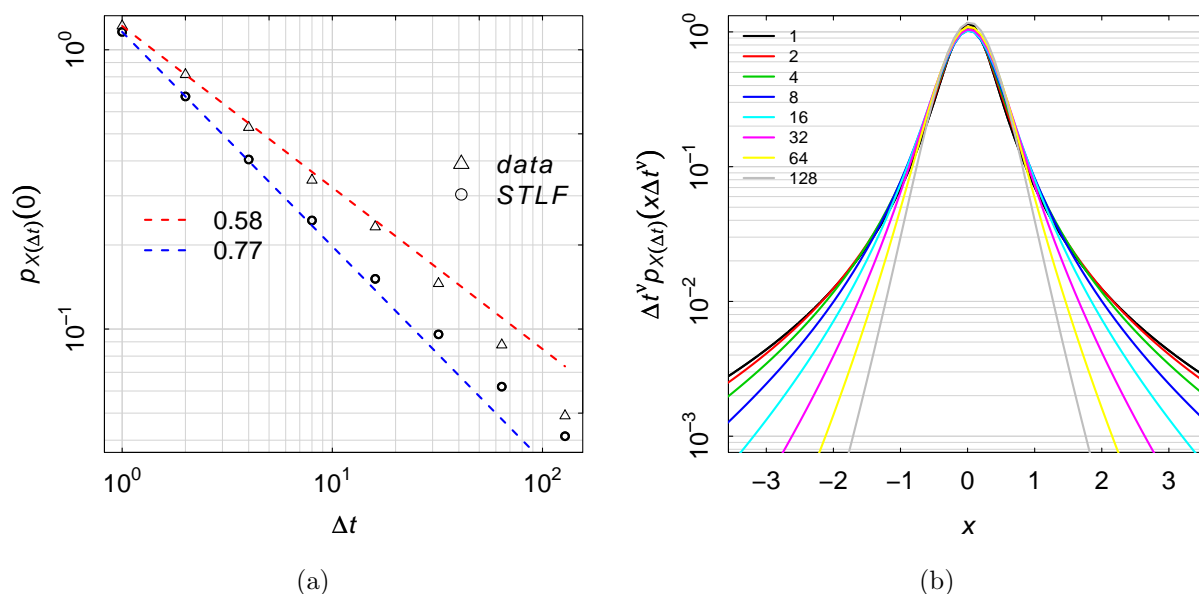
Ved å simulere en stabil Lévy-prosess (figur 18c i vedlegg A) kan vi gjøre ytterligere observasjoner:

1. Modellen ikke kan beskrive volatilitetspersistensen i NIBOR. Selv om ACF ikke er veldefinert vi estimert ACF fange opp at inkrementene er uavhengige. Den estimerte

AFC for $|\Delta X_{\text{sim}}(t)|$ vil oppføre seg på samme måte, noe som ikke er konsistent med det vi observerer i NIBOR.

2. Vi har for lite data til å bruke reskalering av tettheter til å avgjøre hvorvidt selvsimilæritetshypotesen holder for NIBOR. Dette illustrerer vi ved å simulere en realisasjon av en stabil Lévy prosess med like mange datapunkter ($n = 6065$) som vi har for NIBOR. Fra figur 18d ser vi at de estimerte tetthetene fra simuleringsdata har for stor usikkerhet i halene.

7.2.2 Modellering ved en trunkert stabil Lévy-prosess



Figur 9: a) Tettheter i $x = 0$ som en funksjon av tidsskalaen. Punktene (sirkler) til STL-modellen er funnet ved simulering med antall punkter lik 10^5 . STL har tilnærmet lik oppførsel som en stabil levy på korte tidsskalaer, så vi tilpasser ei rett linje til de første tidspunktene. Dette gir ganske forskjellige resultater for modell og data. (Minus) stigningstallet til linjene er oppgitt i plottet. Stigningstallene og punktene i seg selv, indikerer mot en STL-modell. b) Reskalerte tettheter (analytisk) for STL-modellen. Eksponenten ν er her basert på alle tidsskalaene (for å være konsistent med hva vi gjør for dataene og andre modeller. Figur (b) har logaritmisk 2.akse. Figur (a) er dobbellogaritmisk.

En trunkert stabil Lévy-prosess har uavhengige inkremitter. Alle momenter eksisterer, og dermed er autokorrelasjonsfunksjonen veldefinert. Følgelig har vi ukorrelerte inkremitter, og siden vi har uavhengige inkremitter er også absoluttverdien av inkrementprosessen $|X(t + \Delta t) - X(t)|$ ukorrelert. Når vi likevel ser på denne modellen, er det først og fremst med tanke på at den kan beskrive formen på strukturefunksjonene og tetthetene til de éndimensjonale marginalene.

	Metode 1	Metode 2
α	1.24	1.54
β	-0.02	-0.05
c	0.27	0.27
λ	0.1	10^{-4}
$l(\alpha, \beta, c, \lambda \mu)$	4858	4913

Tabell 2: ML-estimater for en trunkert stabil Lévy-prosess.

En trunkert stabil Lévy-prosess er ikke selvsimilær. Den oppfører seg som en stabil Lévy-prosess på korte tidsskalaer og som en Brownsk bevegelse på lange tidsskalaer. Dette medfører at prosessen har forskjellige skaleringssegenskaper på ulike tidsskalaer. En skaleringsfunksjon estimert på bakgrunn av strukturfunksjonenes form for på korte tidsskalaer vil være bilineære, mens vi vil få $\zeta(q) = q/2$ dersom vi baserer estimeringen på strukturfunksjonenes form på lange tidsskalaer. Dette er lett å verifisere numerisk, men kan også vises analytisk [30].

Dersom $X(t)$ er en trunkert stabil Lévy-prosess, så er prosessen entydig bestemt av fordelingen $X(1) \stackrel{d}{\sim} \mathcal{S}_T(\alpha, \beta, c, \mu, \lambda)$. Vi har fem parametre som må bestemmes. Vi estimerer $\mu = \mathbb{E}X(1)$ ved å bruke middelveidien som ved normalisering er lik 0. For resterende parametre bruker vi Maximum Likelihood (ML). Likelihooden l er gitt ved

$$l(\alpha, \beta, c, \lambda|\mu) = - \sum_{t=1}^{n-1} \log p_{\mathcal{S}_T}(\Delta X(t)|\alpha, \beta, c, \mu, \lambda), \quad (31)$$

der $p_{\mathcal{S}_T}(\cdot|\alpha, \beta, c, \mu, \lambda)$ er tettheten til $\mathcal{S}_T(\alpha, \beta, c, \mu, \lambda)$.

Vi benytter her to metoder:

Metode 1: Vi minimerer (31) med hensyn til parametrene α, β, c, μ og λ . Resultatene er presentert i tabell 2.

Metode 2: Svakheten med metode 1 er at den kun utnytter informasjon om fluktuasjonene på de korteste tidsskalaene. På de korte tidsskalaene vil trunkert stabil Lévy-prosess oppføre seg som en stabil Lévy-prosess, og dermed vil vi (for små t) ha en tilnærmet potenslovska-
lering

$$p_{X(t)}(0) \sim t^{-\nu} \quad \text{med} \quad \nu = \frac{1}{\alpha}.$$

Vi har tilpasser en rett linje for punktene $\{(\log \Delta t, \log p_{X,\Delta t}(0)), \Delta t = 2^0, 2^1, 2^2\}$. Dette gir estimatet $\alpha = 1.72$. Siden vi har en tilnærmet rett linje $(\log \Delta t, \log p_{X,\Delta t}(0))$ for alle Δt prøvde vi først med α basert på denne linja. Denne er gitt ved $\alpha = 1.54$. Vi fikserer denne verdier av α og anvender ML på de resterende parametrene. Dette resulterer i et estimat for λ som er veldig nær null, slik at vi i realiteten får en stabil Lévy-prosess. Tilsvarende resultat vil vi da få for $\alpha = 1.72$. Vi velger derfor å gå videre med estimatene oppnådd ved metode 1.

Av figur 20a,b i vedlegg A ser vi at tetthetsestimaterne er i bra overensstemmelse med data på de korte tidsskalaene, mens tilpasningen er dårligere for $\Delta t \geq 2^2$.

Fra figur 9b ser vi at tetthetene ikke kollapser under reskalering. På en annen side viser figur 20d at dette spørsmålet ikke kan avgjøres på bakgrunn av kun 6065 datapunkter. Videre viser figur 20e at strukturfunksjonene til den trunkerte Lévy-prosessen bedre beskriver NIBOR enn tilsvarende strukturfunksjoner fra en stabil Lévy-prosess. Vi konkluderer med at en trunkert stabil Lévy-prosess er en forbedring sammenlignet med en stabil Lévy-prosess.

7.2.3 Modellering ved en MMAR/Bernoulli-modell

Vi har så langt sett på modeller med uavhengige inkremitter. Disse kan følgelig ikke beskrive den observerte volatilitetspersistensen i NIBOR. Vi vil derfor se på multifraktale modeller (MMAR og MSM). Disse modellene er rapportert å gi gode resultater i empiriske prediksjonsforsøk [5, 15, 16].

Vi starter med å se på MMAR-modellen

$$X(t) = T^H \sigma B_H(\Theta(t)) , \quad t \in [0, T] .$$

Denne prosessen er beskrevet i avsnitt 6.2. Den indre prosessen $\Theta(t)$ avhenger av parameteren p , mens den ytre prosessen avhenger av parameteren H . Det gir fire parametre som må bestemmes: $\theta = (p, H, \sigma, T)$. Siden vi har observert ukorrelerte inkremitter må vi ha $H = 1/2$. Den ytre prosessen er altså en Brownsk bevegelse. Vi bruker estimert standardavvik som estimat for σ . Selv om $X(t)$ ikke er selvsimilær har den likevel potenslovs skalering for tetthetene i origo. Stigningstallet $-\nu$ for tetthetene i et loglogplot er gitt ved

$$\nu = \frac{1}{\log 2} \log(p^{-H} + (1-p)^{-H}) - 1 . \quad (32)$$

Vi bruker her vårt tidligere estimat $\nu = 0.65$. Ved å løse (32) med hensyn på p får vi estimatet $p = 0.25$. Til slutt trenger vi et estimat for endepunktet T . Dette kan oppnås ved å beregne kurtosis til $X(1)$. Vi setter $T = 2^m$ og får:

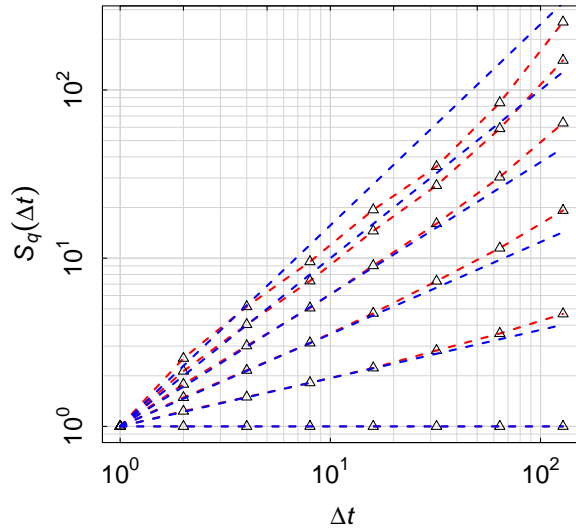
$$m = \left[\log \frac{\mathbb{E}X(1)^4}{(\mathbb{E}X(1)^2)^2} - \log 3 \right] \frac{1}{\log 2 + \log(p^2 + (1-p)^2)} .$$

Ved å sette inn estimert kurtosis i uttrykket over får vi $m = 21$, og dermed bestemt endepunktet T . Vi har dermed estimatene

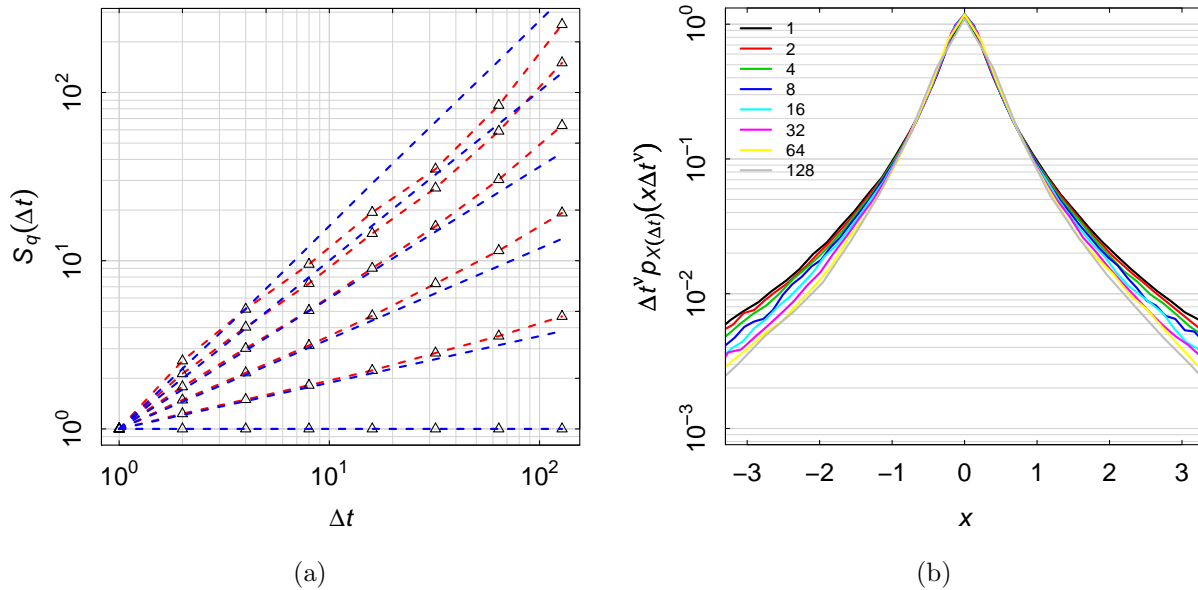
$$\theta = (p, H, \sigma, T) = (0.25, 0.5, 1, 2^{21}) .$$

Figur 21a,b viser tetthetene for den tilhørende MMAR-modellen. Vi har en rimelig god tilpasning på alle tidsskalaer. Figur 21c sammenlikner linja $\{(\log \Delta t, \log p_{X, \Delta t}(0)), \Delta t = 2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^7\}$ med tilsvarende eksakte linje for modellen. For modellen faller ikke tetthetene på hverandre under reskalering (figur 21d). I figur 21f ser vi dette i en simulering av modellen.

Strukturfunksjonene til modellen stemmer bra overens med estimerte strukturfunksjoner til NIBOR (figur 10). Simulering av modellen viser også at den kan reprodusere volatilitetspersistens (figur 21e). Dette gjenspeiles også i ACF til $|\Delta X(t)|$. Vi ser nærmere på dette i forbindelse med MSM-modellen.



Figur 10: Strukturfunksjoner for MMAR (blå linjer) sammen med strukturfunksjoner til NIBOR-dataene (trekanter og røde linjer). Momentene som er beregnet er $q = 0, 0.5, \dots, 2.5$. Figuren er dobbellogaritmisk.



Figur 11: a) Strukturfunksjoner for MSM (blå linjer) sammen med strukturfunksjoner til NIBOR (trekanter og røde linjer). Momentene som er beregnet er $q = 0, 0.5, \dots, 2.5$. b) Reskalerte tettheter for MSM-modellen. Figur (a) er dobbellogaritmisk. Figur (b) har logaritmisk 2.akse.

7.3 Modellering ved MSM-modellen

I dette avsnittet ser vi på modellen Markov Switching Multifractal (MSM). Denne er beskrevet i avsnitt 6.4. Vi bruker notasjonen $x_t = X(t+1) - X(t)$. Modellen er gitt ved

$$x_t = \sigma(M_{1,t}M_{2,t} \cdots M_{K,t})^{\frac{1}{2}}\varepsilon_t,$$

der innovasjonene ε_t er standard normalfordelt, $\sigma > 0$ er en skalaparameter og \mathbf{M}_t er en K -dimensjonal Markov-kjede. Vi har satt $H = 1/2$ siden vi har observert ukorrelererte inkre-
menter. Komponentene $M_{k,t}$ oppdateres i hvert tidssteg med sannsynlighet

$$\gamma_k = (1 - \gamma_1)^{b^{k-1}},$$

der $b > 1$ og $\gamma_1 \in (0, 1)$. Betinget på at en oppdatering finner sted er $M_{k,t} \stackrel{d}{\sim} M$. For den tilfeldige variabelen M har vi valgt fordelingen $\mathbb{P}(M = m_0) = p = 1 - \mathbb{P}(M = m_1)$ der $m_0 \in (0, 1)$ og $m_1 > 1$. Betingelsen $\mathbb{E}M = 1$ gir relasjonen

$$p = \frac{m_1 - 1}{m_1 - m_0}.$$

Dette gir seks frie parametre som vi må estimere. Vi setter $\sigma = 1$ siden vi har standardisert dataene. For en fiksert $K > 0$ bestemmer vi de resterende parametrene $\theta = (m_0, m_1, b, \gamma_K)$ ved Maximum Likelihood. Likelihooden er gitt ved uttrykkene:

$$\begin{aligned} l(\theta|\mathbf{x}_{n-1}) &= - \sum_{k=1}^{n-1} \log \mathbf{p}_k^T \omega(x_k) \\ \mathbf{p}_1^T &= (\mathbb{P}(\mathbf{M}_0 = \mathbf{m}^1), \dots, \mathbb{P}(\mathbf{M}_0 = \mathbf{m}^d))^T \omega(x_1) \\ \mathbf{p}_t^T &= \frac{1}{\mathbf{p}_{t-1}^T \omega(x_{t-1})} (\mathbf{p}_{t-1} * \omega(x_{t-1}))^T A, \quad t \geq 2 \end{aligned}$$

I tabell 3 presenteres ML-estimatene for $K = 5, \dots, 9$. I [5] har Calvet og Fisher rapportert resultater fra en modellvalgttest for MSM. Her er konklusjonen at modellen gir best beskrivelse av finansielle tidsrekker for store verdier av K . Vi følger denne linjen og velger å se på tilfellet $K = 9$. Vi bemerker at vi for $K > 9$ får vi betydelige beregningsutfordringer i forbindelse med ML-estimering.

Våre resultater viser at tetthetene til MSM-modellen er bedre tilpasset dataene enn tilfellet var for MMAR. For strukturfunksjonene har vi en veldig bra tilpasning for begge modellene.

8 Prediksjon basert på MSM-modellen

Vi minner om situasjonen: Vi har data x_1, \dots, x_T der x_t er inkrementprosessen til $\log Y(t)$ på den korteste observerte tidsskalaen (én dag). Med andre ord er x_t daglig log-return. Vi antar x_t er en MSM-prosess og at vi kjenner parametrene til prosessen. Vi ser først på ettstegsprediksjon. Vi ønsker altså å si noe om x_{T+1} . I avsnitt 7.3 utledet vi tettheten til

K	5	6	7	8	9
m_0	0.52 (7.4×10^{-3})	0.58 (6.7×10^{-3})	0.59 (1.36×10^{-2})	0.58 (6.5×10^{-3})	0.62 (6.2×10^{-3})
m_1	2.57 (0.099)	2.82 (0.110)	2.35 (0.108)	2.19 (7.1×10^{-2})	2.32 (7.3×10^{-2})
b	5.54 (0.74)	4.68 (0.57)	4.23 (0.49)	4.08 (0.40)	3.86 (0.39)
γ_K	0.60 (7.4×10^{-2})	0.66 (7.7×10^{-2})	0.75 (8.1×10^{-2})	0.76 (8.3×10^{-2})	0.79 (8.1×10^{-2})
$l(\theta \mathbf{x}_n)$	4112.38	4106.08	4098.67	4083.64	4076.87

Tabell 3: ML-estimer for MSM-modellen. Estimert standardavvik er oppgitt i parentes, og er beregnet ved å estimere Fishers observasjonsmatrise [19].

$x_{T+1}|\mathbf{x}_T$. Denne er gitt ved $p_{T+1}(x_{T+1}|\mathbf{x}_T) = \mathbf{p}_{T+1}^T \omega(x_{T+1})$. Her beregnes \mathbf{p}_{T+1}^T rekursivt ved å bruke relasjonen

$$\mathbf{p}_t^T = \frac{1}{\mathbf{p}_{t-1}^T \omega(x_{t-1})} (\mathbf{p}_{t-1} * \omega(x_{t-1}))^T A, \quad 2 \leq t \leq T+1 \quad (33)$$

med startbetingelsen $\mathbf{p}_1^T = (\mathbb{P}(\mathbf{M}_0 = \mathbf{m}^1), \dots, \mathbb{P}(\mathbf{M}_0 = \mathbf{m}^d))$.

Et alternativ til å jobbe med denne tettheten er å estimere volatiliteten σ_{T+1} . Volatiliteten på tidspunkt t er gitt ved

$$\sigma_t = \sigma g(\mathbf{M}_t)^{\frac{1}{2}}.$$

Vi kan bruke estimert volatilitet til å *estimere* tettheten til $x_{T+1}|\mathbf{x}_T$. Man kan spørre seg hvorfor man ønsker å estimere en tetthet som vi kjenner. Svaret er at tettheten til $x_{T+1}|\mathbf{x}_T$ er en miks av mange normaltettheter hvor kvantilene ikke er lett tilgjengelig. Et alternativ er selvfølgelig å simulere opp kvantilene. Vi har ikke sett på denne muligheten, men har heller valgt å bruke estimert volatilitet som sammen med innovasjonene gir en estimert normaltetthet.

Volatilitet er i seg selv en interessant størrelse siden denne er et mål på hvor kraftige fluktuasjoner vi kan forvente. For å estimere denne størrelsen velger vi å bruke den optimale prediktoren

$$\hat{\sigma}_{T+1} = \mathbb{E}[\sigma_{T+1}|\mathbf{x}_T].$$

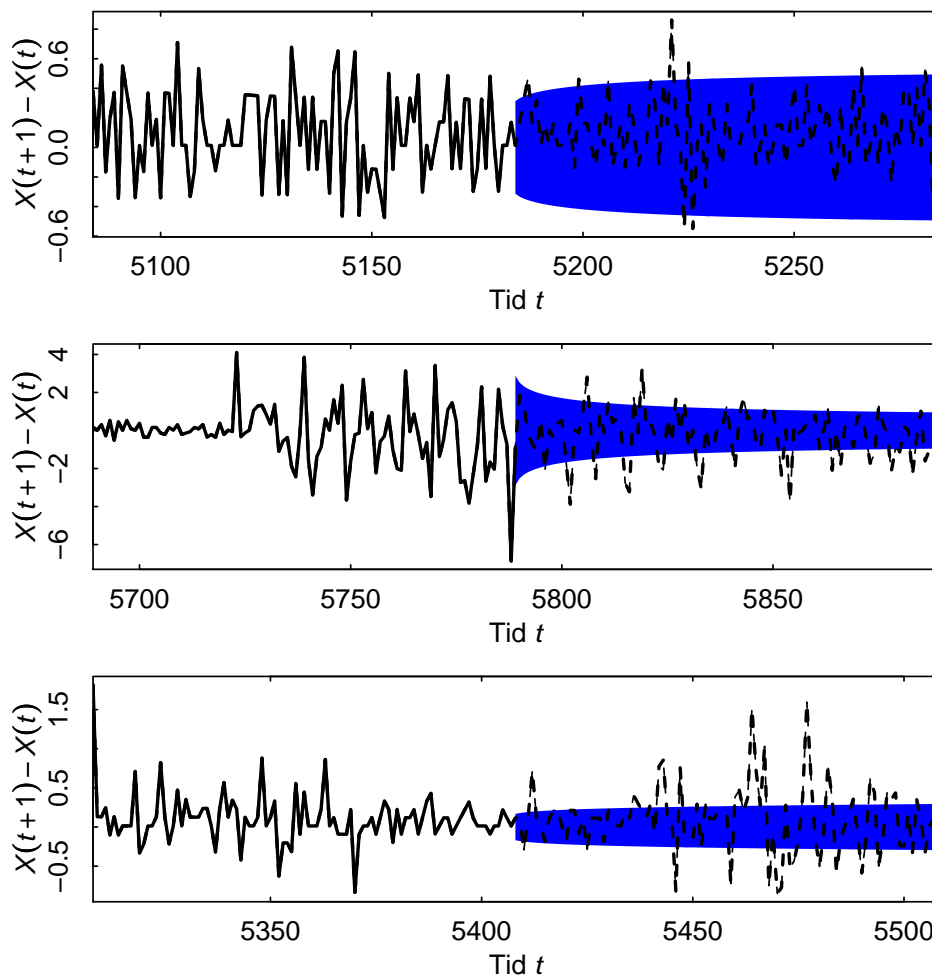
Denne er optimal med hensyn på MSE*-kriteriumet $\mathbb{E}(\sigma_{T+1} - h(\mathbf{x}_T))^2$, der h er en funksjon av dataene:

$$\mathbb{E}(\sigma_{T+1} - \mathbb{E}[\sigma_{T+1}|\mathbf{x}_T])^2 \leq \mathbb{E}(\sigma_{T+1} - h(\mathbf{x}_T))^2.$$

Vi finner et uttrykk for prediktoren:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{T+1} &= \mathbb{E}[\sigma_{T+1}|\mathbf{x}_T] = \mathbb{E}[\sigma g(\mathbf{M}_{T+1})^{\frac{1}{2}}|\mathbf{x}_T] = \sigma \sum_{k=1}^d g(\mathbf{m}^k)^{\frac{1}{2}} P(\mathbf{M}_{T+1} = \mathbf{m}^k|\mathbf{x}_T) \\ &= \sigma \mathbf{p}_{T+1}^T \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}^T = [g(\mathbf{m}^1)^{\frac{1}{2}}, \dots, g(\mathbf{m}^d)^{\frac{1}{2}}]. \end{aligned}$$

*MSE er en forkortelse for Mean Square Error.



Figur 12: Flerstegs volatilitetsprediksjon (farget blå) for daglig logreturn på NIBOR. I alle tre plottene står vi i et gitt punkt og predikerer volatiliteten 1, 2, 3, \dots , steg inn i framtida. Modellen vi her bruker er Markov Switching Multifractal med $K = 9$. Estimaten til modellen er her beregnet ved å se på tidsrekka frem til tid $t = 5064$. Den svarte kurven er her NIBOR (stiplet der vi har predikert volatiliteten). Vi har lagt på farge (blå) innenfor \pm predikert volatilitet.

For å estimere volatiliteten N steg inn i framtida ser vi på den optimale prediktoren

$$\hat{\sigma}_{T+N} = \mathbb{E}[\sigma_{T+N} | \mathbf{x}_T].$$

Optimalitet referer igjen til MSE-kriteriumet. For å utlede N -stegsprediktoren definerer vi følgende vektor:

$$\mathbf{p}_{T+N}^T = [P(\mathbf{M}_{T+N} = \mathbf{m}^1 | \mathbf{x}_T), \dots, P(\mathbf{M}_{T+N} = \mathbf{m}^d | \mathbf{x}_T)].$$

Vi utleder $\hat{\sigma}_{T+N}$ ved å først se på tilfellet $N = 2$:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{T+2} &= \mathbb{E}[\sigma_{T+2}|\mathbf{x}_T] = \mathbb{E}[\sigma g(\mathbf{M}_{T+2})^{\frac{1}{2}}|\mathbf{x}_T] = \sigma \sum_{k=1}^d g(\mathbf{m}^k)^{\frac{1}{2}} P(\mathbf{M}_{T+2} = \mathbf{m}^k|\mathbf{x}_T) \\ &= \sigma \mathbf{p}_{T+2}^T \mathbf{u}.\end{aligned}$$

Vi har at $\mathbf{p}_{T+2}^T = \mathbf{p}_{T+1}^T A$. Dette kan ses ved å betinge på Markov-kjeden ved tid $T + 1$. Ved induksjon kan vi vise at

$$\hat{\sigma}_{T+N} = \sigma \mathbf{p}_{T+N}^T \mathbf{u},$$

der $\mathbf{p}_{T+N}^T = \mathbf{p}_{T+1}^T A^{N-1}$. Vi oppsummerer resultatene for den optimale prediktoren for volatiliteten i en setning:

Lemma 14. *Den optimale prediktoren med hensyn på MSE for volatiliteten ved tid $T + N$ gitt ved*

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{T+N} &= \sigma \mathbf{p}_{T+N}^T \mathbf{u} \\ \mathbf{p}_{T+N}^T &= \mathbf{p}_{T+1}^T A^{N-1},\end{aligned}$$

der \mathbf{p}_{T+1}^T kan beregnes rekursivt ved (33).

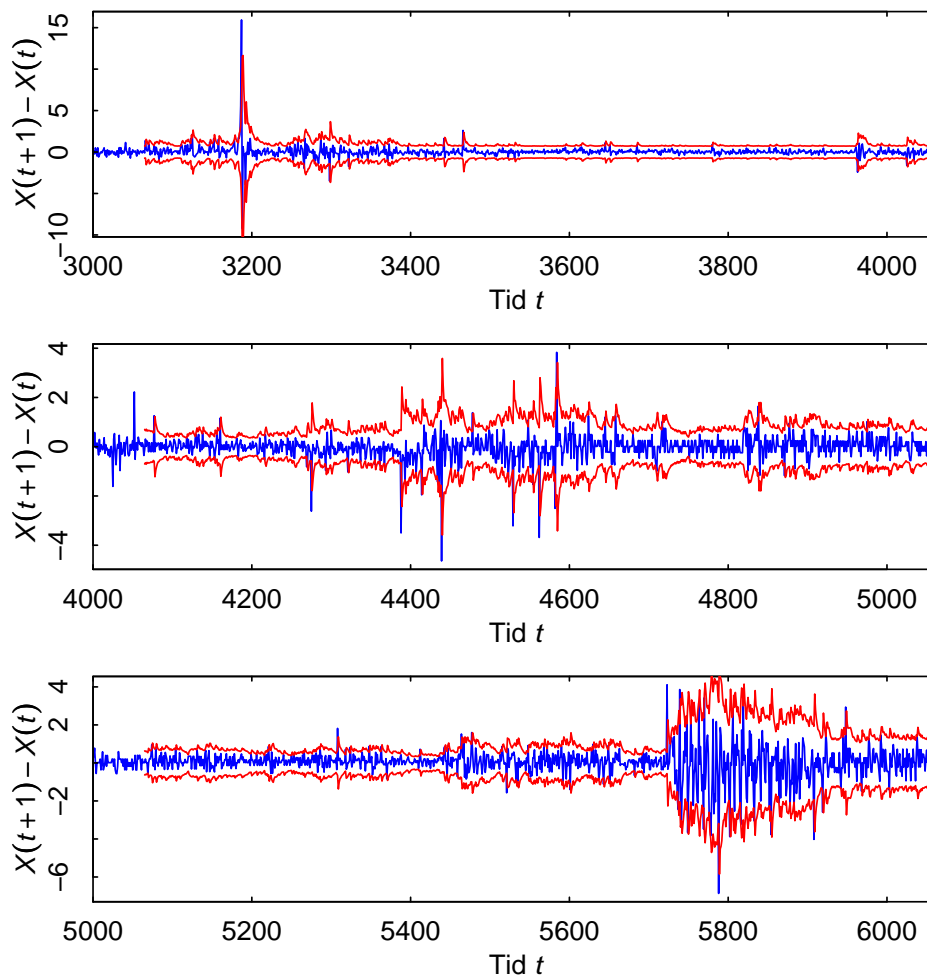
Vi kan bruke dette resultatet til å sette opp prediksjonsintervall. For ett-steps prediksjon er et tilnærmet $(1 - \alpha) \times 100\%$ to-sidig prediksjonsintervall gitt ved $\pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{T+1}$, der z_a er a -kvantilen i normalfordelingen. Dette betyr at

$$\mathbb{P}(\hat{\sigma}_{T+1} z_{\frac{\alpha}{2}} \leq x_{T+1} \leq \hat{\sigma}_{T+1} z_{1-\frac{\alpha}{2}} | \mathbf{x}_T) \approx 1 - \alpha. \quad (34)$$

Grunnen til at vi ikke har likhet er at vi estimerer kvantilene. Siden vi ikke kjenner parametrene må disse estimeres. Vi har ikke tatt hensyn til usikkerheten i estimatene når vi gjør prediksjon. En annen usikkerhetsfaktor, som sannsynligvis er større enn usikkerheten i estimatene, er hvor langt modellen er fra den “sanne” datagenerende prosessen.

8.1 Evaluering

Vi har evaluert modellen for ett-steps prediksjon. Mer spesifikt har vi satt opp $(1 - \alpha) \times 100\%$ tosidig prediksjonsintervall for $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.05$ og $\alpha = 0.1$. Vi starter med å utlede en testprosedure. For å ha pålitelige estimater trenger vi noen datapunkter som ikke inngår i prediksjonen (et presample). Vi har valgt første prediksjonsorigo i $T = 3064$. Dette betyr at første prediksjon gjøres for $T + 1$. Prediksjonen har to mulige utfall; bom (x_{T+1} faller utenfor prediksjonsintervallet) eller treff. Når vi har gjort første prediksjonen flytter vi vinduet til $T + 1$ og setter opp prediksjonsintervall for $T + 2$. Vi fortsetter på denne måten til siste observasjon $n = 6064$. Vi har muligheten til å oppdatere parametrene i hvert steg, men dette er tungt beregningsmessig. Vi har valgt å oppdatere parametrene hvert 1000. steg. Disse er gitt i tabell 4. Vi legger merke til at parameterestimatene holder seg ganske stabil.



Figur 13: Ett-steps 95 % prediksjonsintervall (røde kurver). Blå kurve er log-return av NI-BOR.

Etter å ha kjørt prediksjonen gjennom samplet, teller vi opp hvor antall bomskudd. Vi lar I_t være indikatorvariabelen definert som

$$I_t = \begin{cases} 0 & x_t \text{ faller innenfor prediksjonsintervallet ved tid } t \\ 1 & \text{ellers} \end{cases} .$$

Vi ser på testobservatoren som teller antall bomskudd: $U = \sum_{t=T+1}^n I_t$. Hvis modellen er god forventer vi at antall bomskudd delt på antall prediksjoner $U/(n - T)$ ligger i nærheten av konfidensnivået α . Vi kan faktisk si litt mer: Basert på Lemma 4.29 i [19] er I_t u.i.f Bernoulli-variable med suksesssannsynlighet α (gitt at MSM er den “sanne” datagenerende prosessen). De observerte indikatorvariablene bør dermed se ut som en realisjon av tilnærmet uavhengige variable. Dette har en også mer praktisk side. Hvis modellen skal brukes til å kvantifisere risiko er det viktig å vite hvis den fungerer dårlig under store fluktuasjoner. Siden I_t er u.i.f. Bernoulli-variable er U binomisk fordelt med suksess-sannsynlighet α under

MSM-hypotesen. Basert på dette rapporter vi p-verdiene gitt ved

$$\text{p-verdi} = \begin{cases} 2 \times P(U \geq u | \text{MSM-hypotese}) & \frac{u}{n-T} > \alpha \\ 2 \times P(U \leq u | \text{MSM-hypotese}) & \frac{u}{n-T} < \alpha \end{cases},$$

der u er observert antall bom. Vi må her være klar over at vi gjør multippel testing slik at noen p-verdier kan være signifikante selv om hypotesen holder. Resultatene er gitt i tabellene 5, 6 og 7. I tabellene svarer tidsperiode 1 til de 250 første prediksjonene, tidsperiode til neste 250 prediksjoner og så videre. Første prediksjon er ved tid $t = 3065$ og siste prediksjon er ved tid $t = 6064$. Basert på p-verdiene for hele samplet bommet modellen for sjelden på 90% konfidensnivået, for ofte på 99% nivået, mens den passerer på 95% konfidensnivået. Ved å se på hver tidsperiode på 95% konfidensnivået ser vi at 4 p-verdier er mindre enn 01 (taler mot modellen). Faktorer som kan påvirke resultatene er at vi ikke har hensyntatt usikkerheten i estimatene, og at estimatene oppdateres for sjelden. Fra et statistisk ståsted *kan* resultatene tale mot modellen, men vi tror modellen viser lovende tegn på at den egner seg for prediksjon på NIBOR. Dette baserer vi på at tidsrekken vi ser på har en ganske kompleks struktur, og at vi ikke har sett tilsvarende tester i litteraturen. En interessant problemstilling er å gjennomføre en tilsvarende test for konkurrerende modeller.

Tid t	3065	4065	5065
m_0	0.69 (8.4×10^{-3})	0.60 (6.3×10^{-3})	0.61 (6.0×10^{-3})
m_1	2.59 (0.15)	2.35 (0.11)	2.36 (0.09)
b	2.36 (0.28)	3.43 (0.37)	3.64 (0.37)
γ_9	0.53 (0.11)	0.73 (0.10)	0.77 (0.09)
$l(\theta \mathbf{x}_t)$	1974.49	2406.40	3151.50

Tabell 4: ML-estimer for MSM-modellen med $K=9$. Estimaten oppdateres hvert 1000. steg. Estimert standardavvik er oppgitt i parentes, og er beregnet ved å estimere Fishers observasjonsmatrise [19].

90% prediksjonsintervall								
Tidsperiode	1	2	3	4	5	6	Forventet	
#bom/#forsøk	0.104	0.048	0.016	0.020	0.068	0.096	0.1	
#bom (av 250)	26	12	4	5	17	24	25	
p-verdi	0.83	< .01	< .01	< .01	0.11	0.92		
Tidsperiode	7	8	9	10	11	12	Forventet	
#bom/#forsøk	0.052	0.056	0.068	0.096	0.160	0.092	0.1	
#bom (av 250)	13	14	17	24	40	23	25	
p-verdi	< .01	0.02	0.11	0.92	< .01	0.75		
Tidsperiode	1 – 12	Forventet						
#bom/#forsøk	0.073	0.1						
#bom (av 3000)	219	300						
p-verdi	< .01							

Tabell 5: Evalueringsresultater for ett-steps prediksjon.

95% prediksjonsintervall								
Tidsperiode	1	2	3	4	5	6	Forventet	
#bom(av 250)	18	8	4	3	11	19	12.5	
#bom/#forsøk	0.072	0.032	0.016	0.012	0.044	0.076	0.05	
p-verdi	0.11	0.24	< .01	< .01	0.77	0.08		
Tidsperiode	7	8	9	10	11	12	Forventet	
#bom	5	4	10	17	25	17	12.5	
#bom/#forsøk	0.020	0.016	0.040	0.068	0.100	0.068	0.05	
p-verdi	0.02	< 0.01	0.56	0.19	< 0.01	0.19		
Tidsperiode	1 – 12	Forventet						
#bom (av 3000)	141	150						
#bom/#forsøk	0.047	0.05						
p-verdi	0.48							

Tabell 6: Evalueringsresultater for ett-steps prediksjon.

99% prediksjonsintervall							
Tidsperiode	1	2	3	4	5	6	Forventet
#bom (av 250)	8	3	1	3	4	10	2.5
#bom/#forsøk	0.032	0.012	0.004	0.012	0.016	0.040	0.01
p-verdi	< .01	0.74	0.53	0.74	0.32	< 0.01	
Tidsperiode	7	8	9	10	11	12	Forventet
#bom (av 250)	4	3	3	13	9	6	2.5
#bom/#forsøk	0.016	0.012	0.012	0.052	0.036	0.024	0.01
p-verdi	0.32	0.74	0.74	< 0.01	< 0.01	0.04	
Tidsperiode	1 – 12	Forventet					
#bom (av 3000)	67	30					
#bom/#forsøk	0.022	0.01					
p-verdi	< 0.01						

Tabell 7: Evalueringsresultater for ett-steps prediksjon.

9 Konklusjon

I denne avhandlingen har vi presentert teori for ulike typer stokastiske prosesser i kontinuerlig tid. Vi har fokusert spesielt på prosesser med ulike former for potenslovskalering. Eksempler på slike prosesser er fraksjonelle Brownske bevegelser, stabile Lévy-prosesser og trunkerte stabile Lévy-prosesser, fraksjonelle Lévy flights og multifraktale prosesser. De ulike prosessene er karakterisert ved ulike skaleringssegenskaper, og vi har presentert metoder for å kunne teste for selvsimilæritet, multifraktalitet og andre typer skaleringssegenskaper i data.

Vi har anvendt disse metodene på markedsvariabelen Norwegian InterBank Offered Rate (NIBOR) og sett at modellen Markov Switching Multifractal beskriver de strukturelle egenskapene som er observert i data. For denne modellen har vi utledet likelihoodfunksjonen, og optimert denne for parameterestimering av NIBOR. Vi har vist at modellen kan brukes til volatilitetsvarsling, og utledet en statistisk test for hvordan den takler prediksjonsproblemet. Selv om flere av p -verdiene for denne testen kan tale mot modellen, mener vi at modellen er egnet for prediksjon på NIBOR. Dette er en hypotese som kan undersøkes ved å kjøre en tilsvarende test for konkurrerende modeller, og vi anser dette å være en interessant problemstilling for videre forskning.

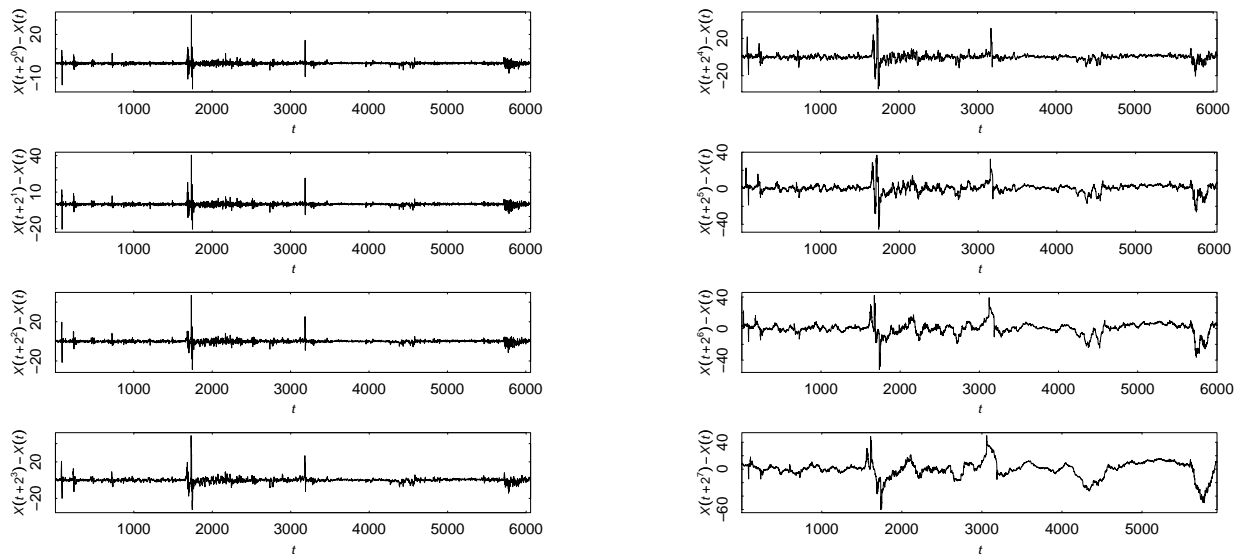
Vår konklusjon er at NIBOR karakteriseres ved multifraktal oppførsel, og at dette kan beskrives ved modellen Markov Switching Multifractal.

Referanser

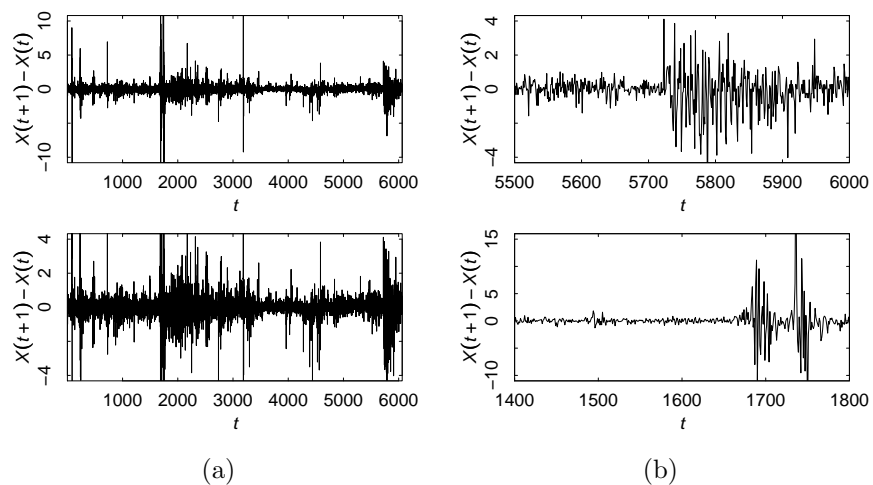
- [1] Kjersti Aas. Modelling the stochastic behaviour of short-term interest rates: A survey. *SAMBA/21/04*, 2004.
- [2] Louis Bachelier. Théorie de la Spéculation. *Annales Scientifiques de L'Ecole Normale Supérieure*, 17:21–88, 1900. Reprinted in P. H. Cootner (ed), 1964, *The Random Character of Stock Market Prices*, Cambridge, Mass. MIT Press.
- [3] F. Black and M. Scholes. The Pricing of Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81:637–654, 1973.
- [4] Laurent Calvet and Adlai Fisher. Forecasting multifractal volatility. *Journal of Econometrics*, 105(1):27 – 58, 2001.
- [5] Laurent Calvet and Adlai Fisher. Regime-Switching and the Estimation of Multifractal Processes. Working Paper 9839, National Bureau of Economic Research, July 2003.
- [6] A.V Chechkin and V.Yu Gonchar. Self and spurious multi-affinity of ordinary Levy motion, and pseudo-Gaussian relations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 11(14):2379 – 2390, 2000.
- [7] B. di Finetti. Sulla possibilità di valori eccezionali per una legge ad incrementi aleatori. *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, 10:325–329, 1929.
- [8] A. Einstein. Investigations on the theory of of the Brownian movement. *Ann. d. Physik*, 17:549–560, 1905.
- [9] C. C. Heyde and A. Sly. A Cautionary note on modeling with fractional Lévy flights. *Physica A*, 387:5024–5032, 2008.
- [10] K. Itô. On stochastic differential equations. *Memoirs, American Mathematical Society*, 4:1–51, 1951.
- [11] Richard A. Johnson and Dean W. Wichern. *Applied Multivariate Statistical Analysis (6th Edition)*. Prentice Hall, 2007.
- [12] A. Khintchine. Dédution nouvelle d’une formile de m. paul lévy. *Bull. Math. Univ. Moscou*, 1(6-17), 1937.
- [13] A. N. Kolmogorov. Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo. un problema di bruno de finetti. *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, 15:805–808, 866–869, 1932.
- [14] P. Lévy. Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes. *Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa*, 337-366, 1934.
- [15] T. Lux. Turbulence in financial markets: the suprising explanatory power of simple cascade models. *Quantitative Finance*, 1:632–640, 2001.

- [16] T. Lux. The Markov-Switching Model of Asset Returns: GMM Estimation and Linear Forecasting of Volatility. *Journal of Business and Economic Statistics*, 26:194–210, 2008.
- [17] B. Mandelbrot. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. Fluid Mech.*, 62:331–358, 1974.
- [18] B. Mandelbrot, A. Fisher, and L. Calvet. A Multifractal Model of Asset Returns. *Cowles Foundation for Research in Economics*, 1997.
- [19] A. J. McNeill, R. Frey, and P. Embrechts. *Quantitative risk management : concepts, techniques and tools*. Princeton Series in Finance. Princeton University Press, 2005.
- [20] J. P. Nolan. *Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data*. Birkhäuser, Boston, 2010. In progress, Chapter 1 online at academic2.american.edu/~jpnolan.
- [21] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*. Springer, 2000.
- [22] R Development Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2008. ISBN 3-900051-07-0.
- [23] Sheldon M. Ross. *Introduction to Probability Models, Eighth Edition*. Academic Press, January 2003.
- [24] M. Rypdal and K. Rypdal. *Journal of Geophysical Research* . in press, 2010.
- [25] M. Rypdal and K. Rypdal. Testing Hypotheses about Sun-Climate Complexity Linking. *Phys. Rev. Lett.*, 104(12):128501, Mar 2010.
- [26] Ghashghaie S., Breymann W., Peinke J. and Talkner P., and Dodge Y. Turbulent cascades in foreign exchange markets. *Nature*, 381:767–770, 1996.
- [27] The Birkeland Seminar. http://www.complexityandplasmas.net/The_Birkeland_Seminar.html.
- [28] Robert H. Shumway and David S. Stoffer. *Time series analysis and its applications*. Springer, second edition, 2000.
- [29] M.S. Taqqu and R.L. Wolpert. Infinite variance self-similar processes subordinate to a poisson measure. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 62:5372.
- [30] G. Terdik, W. A. Woyczynski, and A. Piryatinska. Fractional- and integer-ordered moments, and multiscaling of smoothly truncated Lévy flights. *Phys. Lett. A*, 348:94–109, 2006.

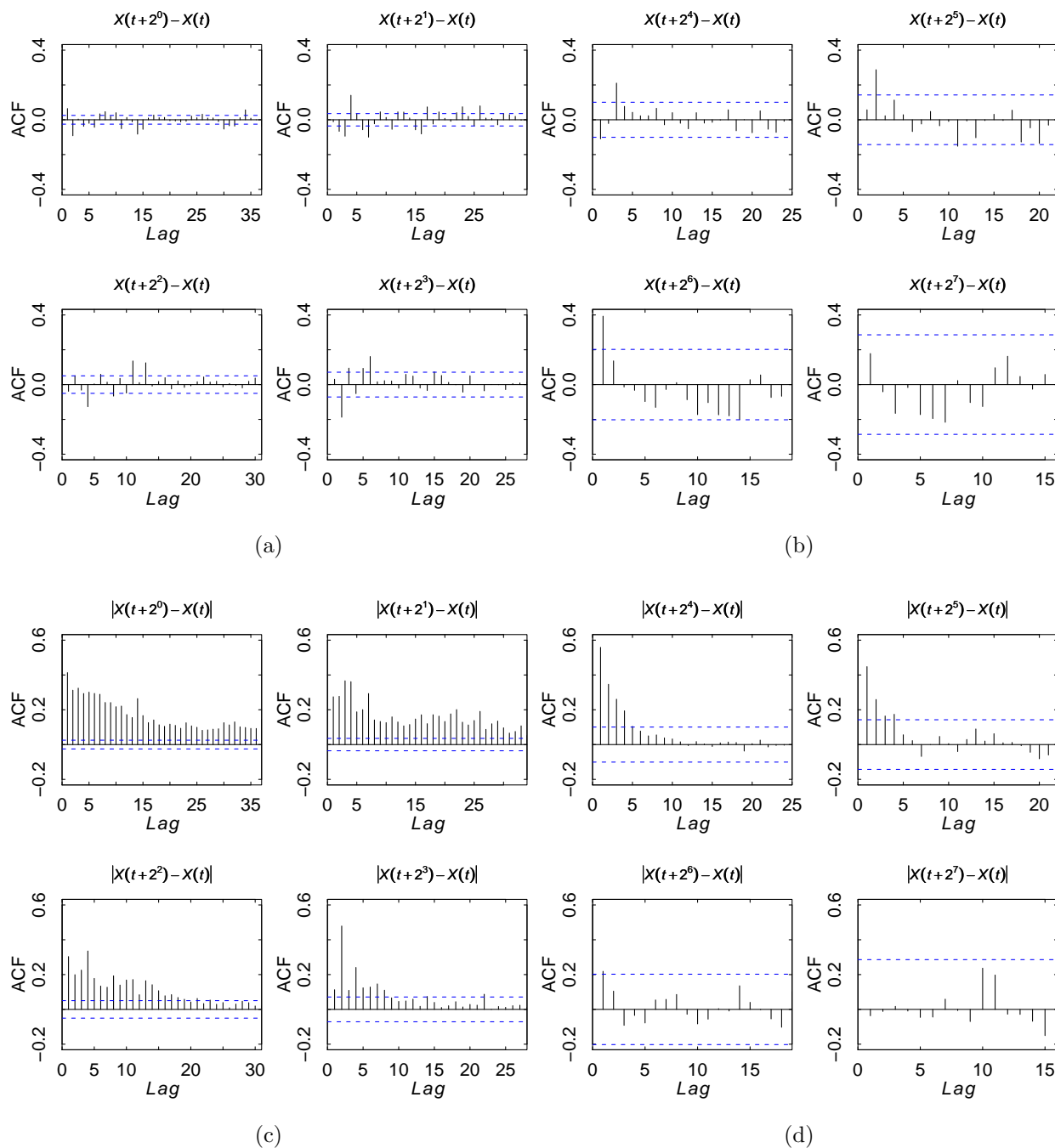
A Tilleggsfigurer



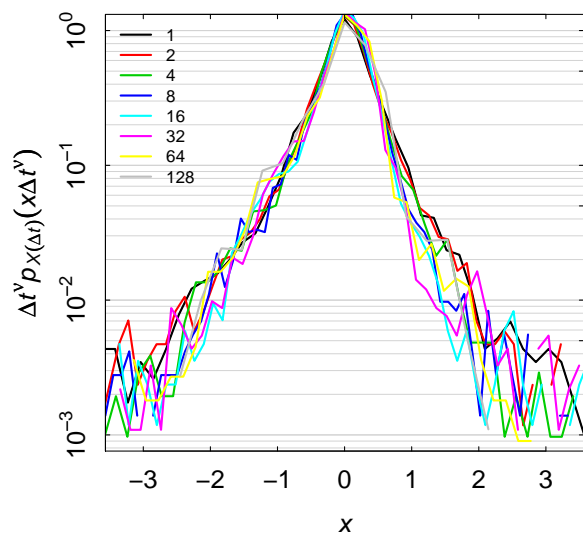
Figur 14: Inkrementene til logaritmen av NIBOR $X(t)$ på tidsskalaene $\Delta t = 2^0, \dots, 2^7$.



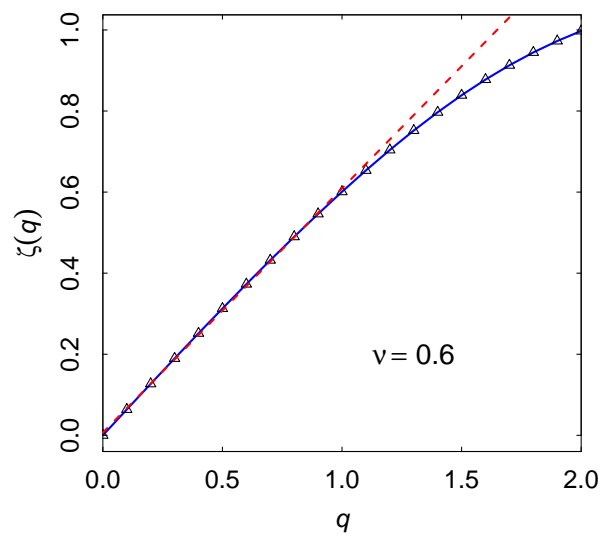
Figur 15: Volatilitetspersistens på logreturn av NIBOR-dataene : a) Hele tidsrekka zoomet inn på y-aksen. b) Deler av tidsrekka.



Figur 16: Estimerte autokorrelasjonsfunksjoner (ACF) for inkrementprossene til logaritmen av NIBOR : a) Korteste tidsskalaene $\Delta t = 2^0, \dots, 2^3$. b) Lengre tidsskalaer $\Delta t = 2^4, \dots, 2^7$. ACF på absoluttverdien av inkrementprosessene: c) Korteste tidsskalaene. d) Lengre tidsskalaer.

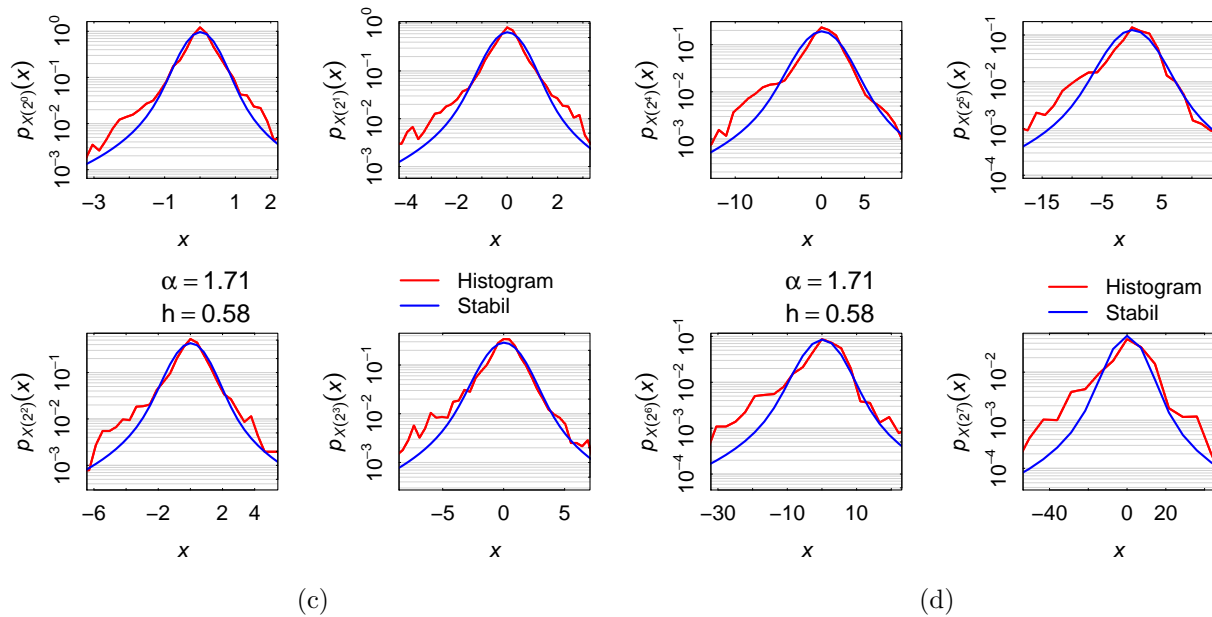
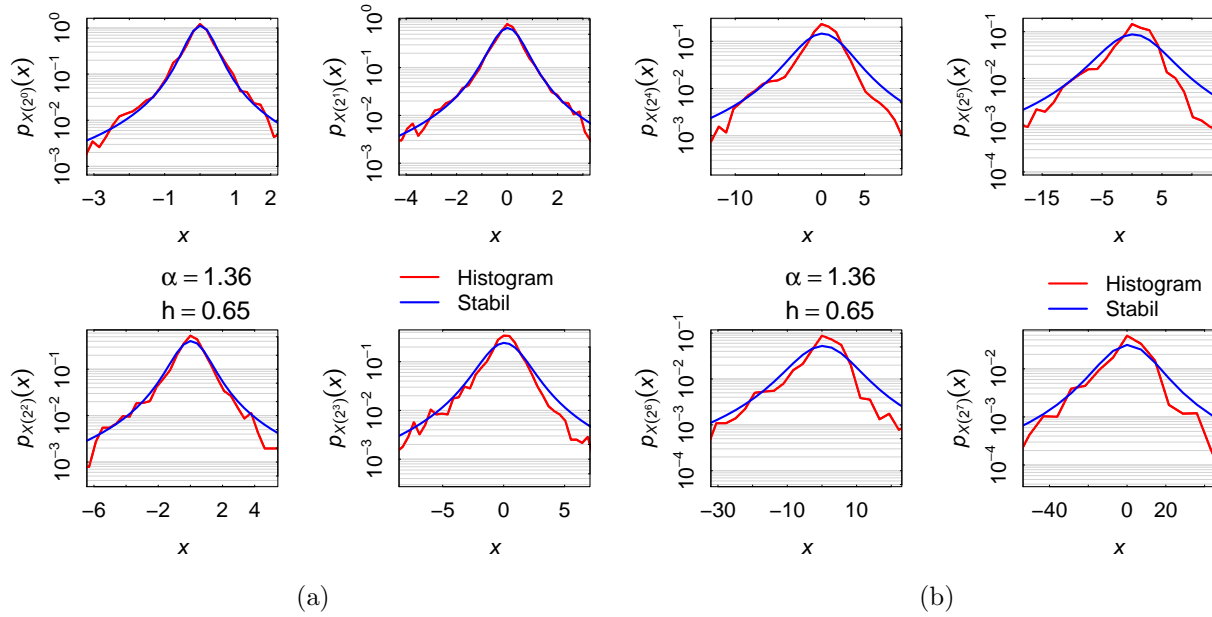


(a)

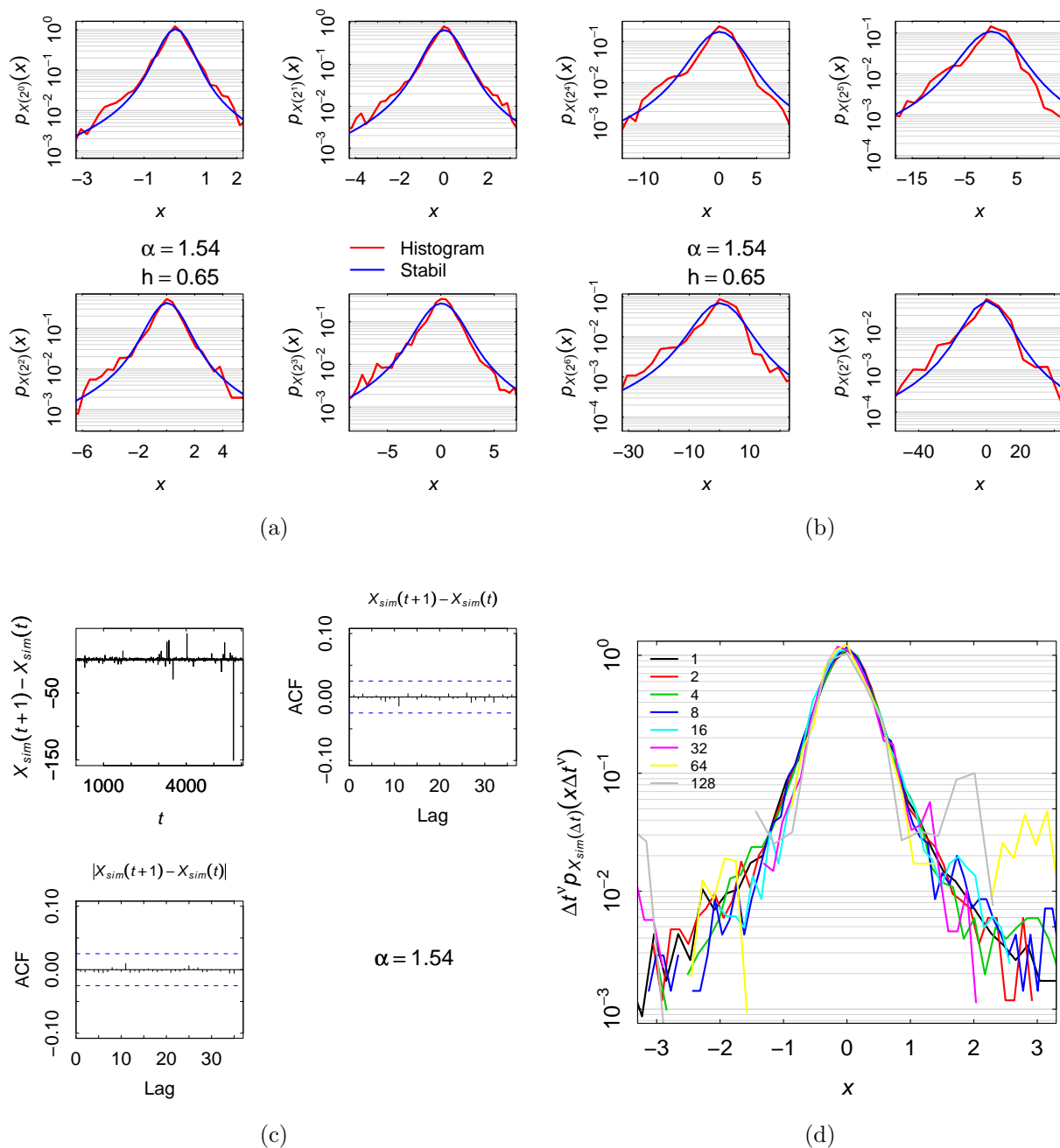


(b)

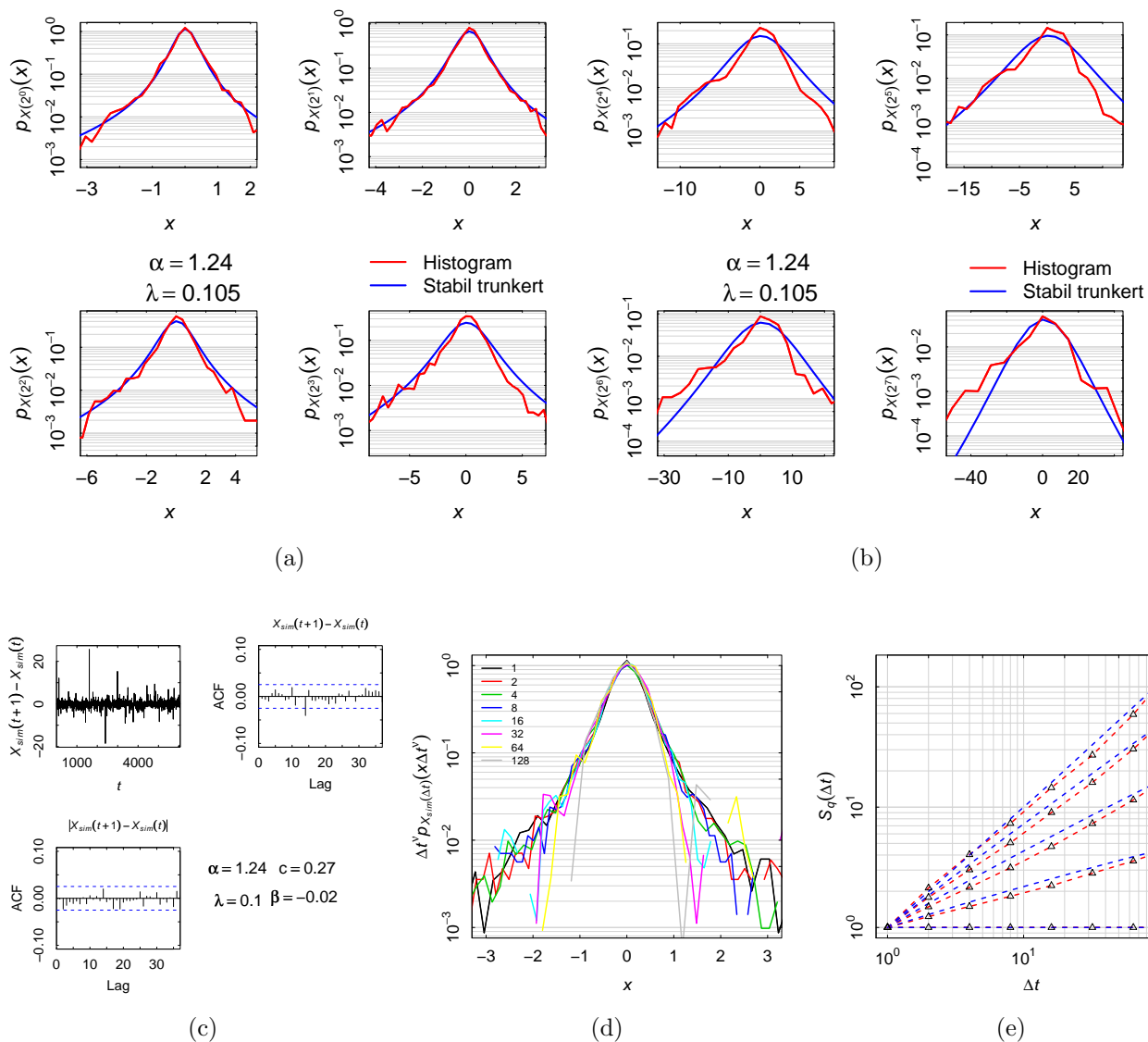
Figur 17: Logaritmen av NIBOR: a) Reskalerte tetthet b) Skaleringsfunksjonen basert på $\Delta t = 2^0, \dots, 2^7$. Figur (a) har logaritmisk 2.akse.



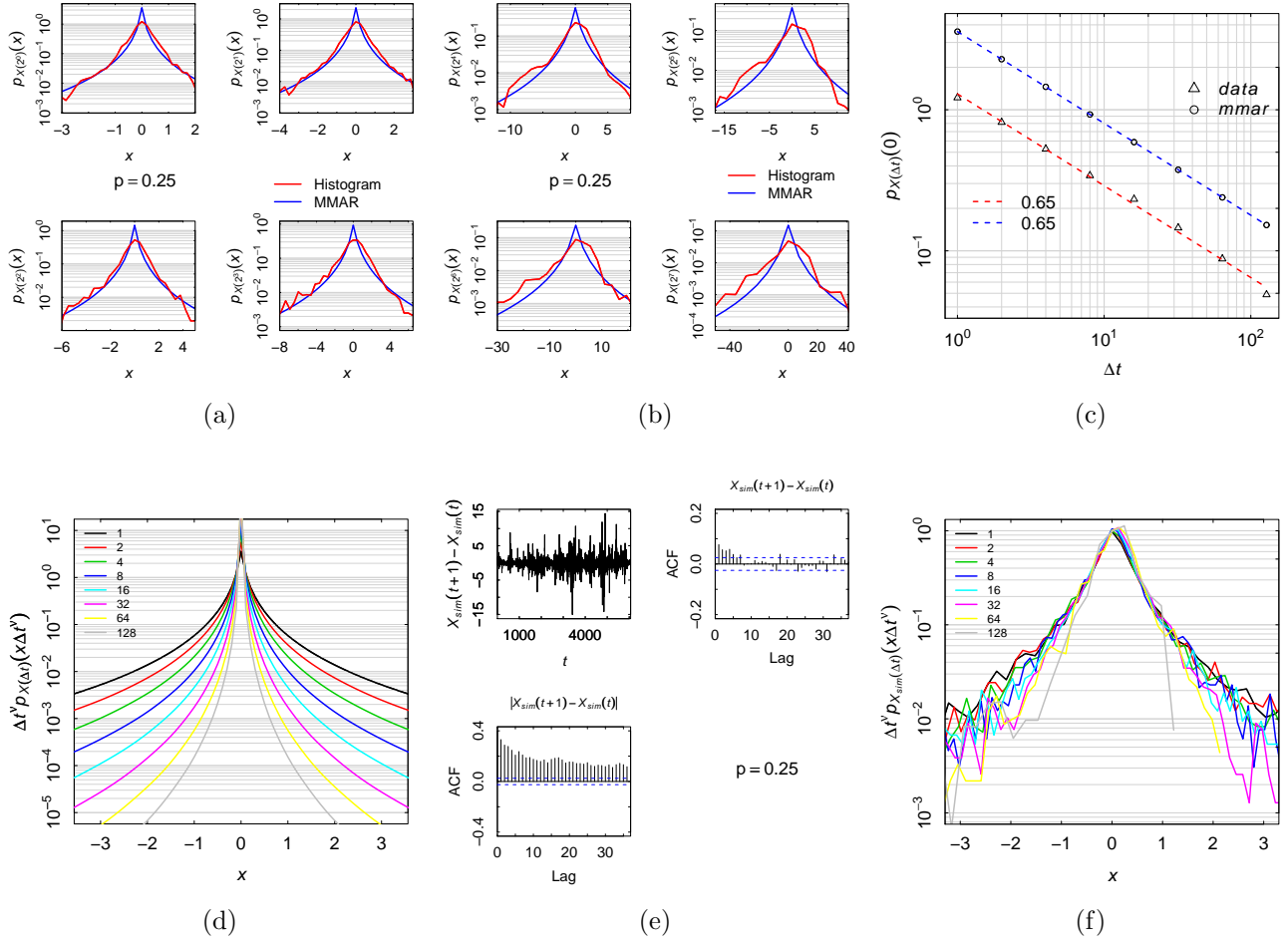
Figur 18: Parameterestimering for den stabile Lévy-modellen : a) og b) Maximum Likelihood-estimatet for α . c) og d) α estimert ut fra skaleringsfunksjonen. Alle figurene her har logaritmisk 2.akse.



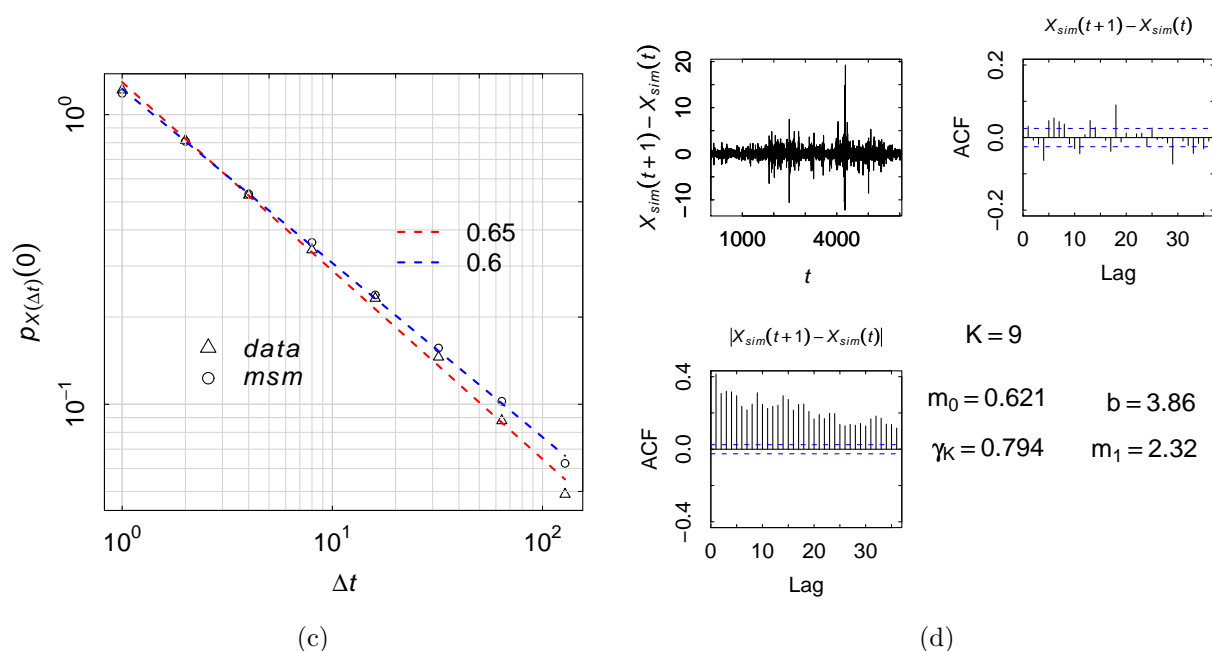
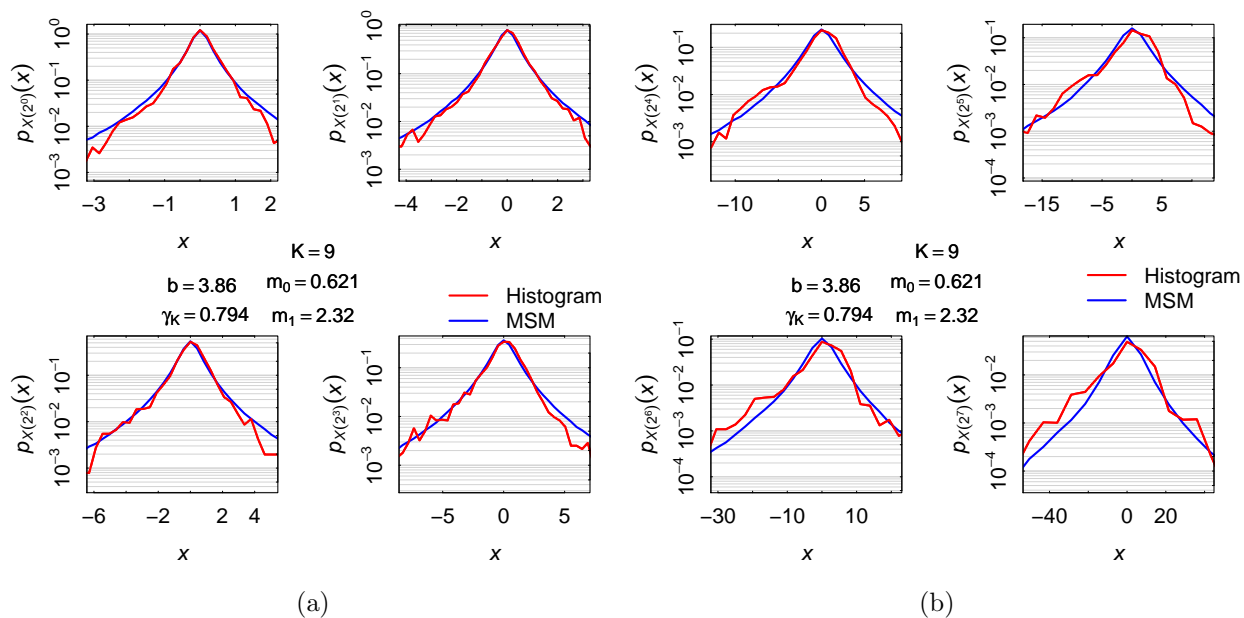
Figur 19: Den stabile Lévy-modellen: a) og b) Parameteren α basert på potenslovskaleringa ga best tilpasning tetthetene sett under et. c) En realisasjon fra denne modellen. d) Reskalerte tettheter basert på simuleringa. Figur (a), (b) og (c) har logaritmisk 2.akse.



Figur 20: Den trunkerte stabile Lévy-modellen (STLF) for logaritmen av NIBOR: Estimerte tettheter på korte (a) og lengre (b) tidsskalaer. c) En realisasjon fra modellen. d) Reskalerte tettheter basert på simulerte data fra modellen. e) Strukturfunksjoner for NIBOR (røde linjer og trekkanter) versus modellen (blåe linjer). Strukturfunksjonene til STLF er funnet ved simulering med 10^5 punkter. Figur (a), (b) og (d) har logaritmisk 2.akse. Figut (e) er dobbellogaritmisk.



Figur 21: MMAR-modellen for logaritmen av NIBOR: Estimerte tettheter på korte (a) og lengre (b) tidsskalaer. c) Potenslovskalering for tetthetene tilhørende modellen. d) Reskalerte tettheter f) En realisasjon fra modellen. g) Reskalerte tettheter basert på simulerte data. Figur (a), (b), (d) og (f) har logaritmisk 2.akse. Figut (c) er dobbellogaritmisk.



Figur 22: Markov Switching Multifraktal-modellen anvendt på logaritmen av NIBOR: Estimerte tettheter på korte (a) og lengre tidsskalaer (b). c) Potenslovskaleringa for MSM. d) En realisasjon fra modellen. Histogrammene er for NIBOR-dataene og 'data' i (c) er også NIBOR-dataene. Figur (a) og (b) har logaritmisk 2.akse. Figut (c) er dobbellogaritmisk.

B Kode

```

#Funksjoner brukt i oppgaven. Vi starter med å se på funksjoner for å
#simulere fra modellene vi har sett på.
#Viktig: Parametriseringene til disse funksjonene er beskrevet i avhandlingen.
#Så kommer noen funksjoner til før vi har laget et script for analysen av NIBOR.
sim.fBm<-function(H,n){
  #Simulerer n punkter fra en fraksjonell Brownsk bevegelse
  #med Hursteksponent H.
  w<-runif(n)
  j<-seq(1,n)
  ans<-exp(complex(imaginary=2*pi*w))/(j^(H+.5))
  ans<-Re(fft(ans,inverse=T))
  ans<-ans-ans[1]
  rm(w,j)
  return(ans)
}

sim.Levy<-function(alpha,n){
  #Simulerer n punkter fra en h-ss Levy-prosess med h=1/alpha.
  #Pakke 'fBasics' må være lastet inn.
  ans<-rstable(n,alpha=alpha,beta=0,gamma=1,delta=0,pm=1)
  ans<-cumsum(ans)
  ans<-ans-ans[1]
  return(ans)
}

sim.fLf<-function(alpha,H,n){
  #Pakke 'fBasics' må være lastet inn.
  #Simulerer fraksjonelle Levy-prosesser med
  #selvsimilitetsekspont h=1/alpha+H-1/2
  b=H-.5
  m<-seq(1,n)
  a<-m^b-(m-1)^b
  a[1]<-1
  e<-rstable(n,alpha=alpha,beta=0,gamma=sqrt(2)/2,delta=0)
  dft.a<-fft(a)
  dft.e<-fft(e)
  ans<-dft.a*dft.e
  ans<-fft(ans,inverse=T)
  ans<-cumsum(ans)
  sigma<-(1/(alpha*b+1)+
  integrate(h.fLf,lower=0,upper=Inf,alpha=alpha,b=b)$value)^(1/alpha)
  print(sigma)
  ans<-ans/(sigma*n^(b+1/alpha))
  rm(m,a,e,dft.a,dft.e,sigma)
  return(Re(ans))
}
#Hjelpfunksjon til sim.fLf:
h.fLf<-function(u,alpha,b)(abs((u+1)^b-u^b))^alpha

rstlf<-function(n,alpha,beta=0,c=1,lambda){
  #Simulerer n punkter fra en smoothly truncated Levy flight.
  #Skalaparameteren c stemmer her ikke overens med parametriseringa vi har
  #gjort. Siden skalaparameteren i dstlf stemmer overens med 'vår'
  #parametrisering har vi løst dette problemet med å finne relasjonen mellom
  #disse to numerisk.
  a<- -c^alpha/cos(pi*alpha/2)
  N=300
  p<-(1+beta)/2
  ans<-seq(0,0,length=n)

```

```

for (k in 1:n){
  u<-runif(N)
  e<-rexp(N)
  gamma<-cumsum(rexp(N))
  v<-runif(N)
  v[v<=p]<- 1
  v[v!=1]<- -1
  L1<-(alpha*gamma/a)^(-1/alpha)
  L2<-e*(u^(1/alpha))/lambda
  L3<-pmin(L1,L2)*v
  L4<- (alpha*seq(1,N)/a)^(-1/alpha)*(-beta)
  L5<-L3+L4
  sum(L5)->ans[k]
}
ans<-ans-mean(ans)
rm(a,N,p,u,e,gamma,v,L1,L2,L3,L4,L5)
ans<-cumsum(ans)
return(ans)
}

Tre<-function(x,n,k=1,mu=.5,nu=.5){
  #Simulerer fra p-modellen med mu=p og nu=1-p.
  #Resterende argumenter: x=seq(1,1,length=2^m) og n=m der m er et positivt
  #heltall. Sett k=1 (eller dropp k). Grunnen til at parameteren k er med er
  #at dette er en rekursiv algoritme.
  #For en realisasjon fra den indre prosessen i Multifractal Model of Asset
  #Return ta cumsum av denne funksjonen. Ved å bruke sim.fBm i tillegg kan man
  #simulere fra MMAR.
  if((k-1)==n) return(x)
  else{
    if(rbinom(1,1,.5)==0){
      p<-nu
      q<-mu
    }
    else{
      p<- mu
      q<-nu
    }
    x[1:2^(n-k)]<-p*Tre(x[1:2^(n-k)],n,(k+1),mu,nu)
    x[(2^(n-k)+1):2^(n-k+1)]<-q*Tre(x[(2^(n-k)+1):2^(n-k+1)],n,(k+1),mu,nu)
  }
  return(x)
}

rmsm<-function(n,K,m0,m1,sigma=1,b,gamma.K){
  #simulerer n punkter fra Markov Switching Multifractal-modellen for H=1/2.
  p<-(m1-1)/(m1-m0)
  d=2^K
  #Lager tilstandsmatrisa til Markovkjeden:
  m<-matrix(nrow=d,ncol=K)
  for(k in 1:K){
    m[,k]<-rep(c(rep(m0,2^(K-k)),rep(m1,2^(K-k))),2^(k-1))
  }
  #Bygger overgangsmatrisa til Markovkjeden:
  A<-matrix(nrow=d,ncol=d)
  gamma<-seq(length=K)
  gamma[1]<-1-(1-gamma.K)^(b^(1-K))
  gamma<-1-(1-gamma[1])^(b^(0:(K-1)))
  gammaNeg<-1-gamma
  for(k in 1:d){

```

```

    m.k<-m[k,]
    for (j in 1:d){
      m.j<-m[j,]
      A[k,j]<- prod(as.numeric(m.j==m.k)*gammaNeg+as.numeric(m.j==m0)*p*gamma
        +as.numeric(m.j==m1)*(1-p)*gamma)
    }
  }
ans<-seq(length=n)
p0<-seq(length=d)
for(k in 1:d){
  p0[k]<-prod(as.numeric(m[k,]==m0)*p+as.numeric(m[k,]==m1)*(1-p))
}
rm(p, gamma, gammaNeg, j, m.j, m.k)
p0<-cumsum(p0)
#trekker starttilstand for Markovkjeden:
sum(p0<runif(1))+1->state
state->ans[1]
for (k in 1:d){
  cumsum(A[k,])->A[k,]
}
#Simulerer Markovkjeden:
for (k in 1:n){
  sum(A[state,]<runif(1))+1->state
  state->ans[k]
}
m2<-seq(length=d)
for(k in 1:d){
  m2[k]<-sqrt(prod(m[k,]))
}
rm(m)
m<-m2
rm(m2)
ans<-m[ans]
ans<-sigma*ans
#simulerer MSM:
ans<-rnorm(n, sd=ans)
rm(m, A, state, k, d, p0)
return(ans)
}
#####
#Noen funksjoner vi trenger til analysen.
dstlff<-function(x, alpha, beta, c, mu, lambda){
  #Beregner tettheten til en trunkert stabil fordeling i punktene x
  #der x er en vektor.
  n<-length(x)
  ans<-seq(0, 0, length=n)
  for(k in 1:n){
    ans[k]<-integrate(h.dstlff, lower=-Inf, upper=Inf, alpha=alpha, beta=beta,
      c=c, mu=mu, lambda=lambda, x=x[k], rel.tol=.Machine$double.eps^.8,
      abs.tol=.Machine$double.eps^.8, subdivisions=1000)$value
  }
  rm(k, n)
  ans<-abs(ans)
  return(ans)
}
#Hjelpfunksjon til dstlff:
h.dstlff<-function(u, alpha, beta, c, mu, lambda, x){
  a<-(c*lambda)^(alpha)/cos(pi*alpha/2)
  g.u<-(1+(u/lambda)^2)^(alpha/2)
  h.u<-alpha*atan(u/lambda)
  ans<-(1/(2*pi))*exp(a-g.u*a*cos(h.u))*cos(u*(-x+mu+alpha*beta*a)
    +beta*g.u*a*sin(h.u))
}

```

```

    rm(a,g,u,h,u)
    return(ans)
}

Histogram<-function(X,delta.x,delta.t){
  #X: estimerer tettheten til  $dX(t)=X(t+\text{delta.t})-X(t)-m$ 
  #i ekvidistante punkter bestemt av delta.x
  #tips: ved førstegangs estimering av X(t) kan det være lurt å lagre
  #grenseverdiene xlim for tetthetene.
  #X er en vektor, delta.x og delta.t er skalarer.
  length(X)->n
  dX<-X[(1+delta.t):n]-X[1:(n-delta.t)]
  dX<-dX-mean(dX)
  min(dX)->a
  max(dX)->b
  max(-a,b)->b
  b<-b+delta.x
  x<-seq(delta.x/2,b,by=delta.x)
  length(x)->n.x
  c(-x[n.x:1],x)->x
  tetthet<-hist(dX,breaks=x,plot=F)
  rm(n,dX,a,b,x,n.x)
  return(tetthet)
}

f.0<-function(X,delta.x,delta.t){
  #X: estimerer tetthetene i  $x=0$  til  $dX(t)=X(t+\text{delta.t})-X(t)-m$ 
  #i ekvidistante punkter bestemt av delta.x.
  #delta.x og delta.t vektorer med samme lengde
  n.d<-length(delta.t)
  ans<-seq(0,0,length=n.d)
  for(k in 1:n.d){
    tetthet<-Histogram(X,delta.x[k],delta.t[k])
    ans[k]<-tetthet$density[tetthet$mids==0]
  }
  rm(n.d,k,tetthet)
  return(ans)
}

Strukturfunksjon<-function(q,delta.t,x){
  #x=data samme som X i Histogram
  #q= q-te |moment|, delta.t=argumentet til strukturfunksjonen
  #q og delta.t skalarer
  length(x)->n
  length(delta.t)->n.t
  S.q<-delta.t
  for(k in 1:n.t)
  sum((abs(x[(delta.t[k]+1):n]-x[1:(n-delta.t[k])]))^q)/(n-delta.t[k])->S.q[k]
  rm(n,n.t)
  return(S.q)
}

Skaleringsfunksjon<-function(q=seq(0,6,by=.5),delta.t=2^seq(0,10),x){
  #x=data samme som X i Histogram
  #q: argumentet til zeta, en vektor
  #delta.t= i hvilket vindu av strukturfunksjonene skal zeta beregnes
  n.q<-length(q)
  zeta<-q
  log.delta.t<-log(delta.t)

```

```

for(k in 1:n.q){
  log(Strukturfunksjon(q[k],delta.t,x)->log.S.q
  tmp<-lm(log.S.q~log.delta.t)
  as.numeric(tmp$coefficients[2])>zeta[k]
}
plot(q, zeta, xlab=expression(italic(q)), ylab=expression(italic(paste(zeta,
(q))))))
lines(q, zeta)
rm(n.q, k, log.delta.t, log.S.q)
return(zeta)
}

#####
# Analyse av NIBOR:
#Lese inn data. Antar disse er lagret i mappa til workingdirectory (se getwd())
#under navnet Nibor3m.txt.
read.table("Nibor3m.txt",dec=",")>data
as.numeric(as.matrix(data))>data
length(data)->n
#Siste observasjon sist i vektoren:
data[n:1]>data
#Ser på rådataene:
plot(data, type="l", ylab=expression( italic(Y(t)) ), xlab=expression(italic(t)))
#Transformerer rådata til stasjonæritet:
log.data<-log(data)
log.return<-log.data[2:n]-log.data[1:(n-1)]
dX<-(log.return-mean(log.return))/sd(log.return)
X<-seq(0,0,length=n)
X[1]<-0
X[2:n]<-cumsum(dX)
#Plot av X(t)
plot(X, type="l", ylab=expression( italic(X(t)) ), xlab=expression(italic(t)))
#Antar stasjonære inkremitter på bakgrunn av følgende
par(mfrow=c(2,2))
#k=0:3,4:7
for (k in 0:3){
  dX<-X[(1+2^k):n]-X[1:(n-2^k)]
  plot(dX, type="l", ylab=substitute(italic(X(t + 2^ a )-X(t))),
  xlab=expression(italic(t)))
}
#Volatilitetsclustering på de korteste tidsskalaene. Eks delta.t=1:
par(mfrow=c(2,2))
k=0
dX<-X[(1+2^k):n]-X[1:(n-2^k)]
plot(dX, type="l", ylab=substitute(italic(X(t + 1 )-X(t))),
xlab=expression(italic(t)), ylim=c(-10,10))
plot(dX, type="l", ylab=substitute(italic(X(t + 1 )-X(t))),
xlab=expression(italic(t)), ylim=c(-4,4))
tt<-seq(1,n)
plot(tt[5500:6000], dX[5500:6000], type="l", ylim=c(-4,4),
ylab=substitute(italic(X(t + 1 )-X(t))), xlab=expression(italic(t)))
plot(tt[1400:1800], dX[1400:1800], type="l", ylim=c(-10,15),
ylab=substitute(italic(X(t + 1 )-X(t))), xlab=expression(italic(t)),)
#Ukorrelerte inkremitter eller veldig svak korrelasjon
#lite data på de største tidsskalaene => stor usikkerhet i ACF
par(mfrow=c(2,2))
for (k in 0:3){ #k=4:7 også
  dX<-X[(1+2^k):n]-X[1:(n-2^k)]
  acf(dX[seq(1, (n-2^k), by=2^k)], main=substitute(italic(X(t + 2^ a )-X(t))),
  list(a=k))
}

```

```

#Avhengige inkreanter på de korteste tidsskalaene:
par(mfrow=c(2,2))
for (k in 0:3){ #k=4:7
  dX<-abs(X[(1+2^k):n]-X[1:(n-2^k)])
  acf(dX[seq(1, (n-2^k), by=2^k)],
  main=substitute(abs(italic(X(t + 2^ a )-X(t))),list(a=k)))
}

#Tetthetsestimering ved å bruke histogrammet:
#Her er bins en 8*3 dataramme som man må lage selv.
#Denne datarammen har navnene lengde, øvre og nedre der lengde er valgte
#steglengder for histogrammet på de forskjellige tidsskalaene
#og nedre og øvre er xlim grenser for plotting.
#Logaritmisk plot.
par(mfrow=c(2,2))
for(k in 0:3){#k=4:7
  tetthet<-Histogram(X,delta.t=2^k,delta.x=bins$lengde[(k+1)])
  plot(tetthet$mids,tetthet$density,main="",col="blue",type="l",log="y",
  xlab=expression(italic(x)),ylab=substitute(italic(p[X(2^ a )](x)),list(a=k)),
  xlim=c(bins$nedre[(k+1)],bins$øvre[(k+1)]))
}

#Vi kjører h-ss test
#Potenslovskalering for tetthetene?:
par(mfrow=c(1,1))
delta.t<-2^(0:7)
f.0(X,delta.x=bins$lengde,delta.t)->f0
plot(delta.t,f0,log="xy",ylab=expression(italic(p[X(paste(Delta,t))](0))),
xlab=expression(italic(paste(Delta,t))),pch=2)
log.f.0<-log(f0)
log.delta.t<-log(delta.t)
lm(log.f.0~log.delta.t)->LM
-as.numeric(LM$coefficients[2])->nu.hat
x0<-0
x1<-7*log(2)
y1=LM$coefficients[1]+LM$coefficients[2]*x1
y0=LM$coefficients[1]+LM$coefficients[2]*x0
segments(exp(x0),exp(y0),exp(x1),exp(y1),col="red",lty=2,lwd=2)
text(2^4,.7,cex=1.5,substitute(nu == a,list(a=format(nu.hat,digits=2))))
rm(x0,x1,y0,y1)

#Reskalering:
Tetthet<-NULL
delta.x<-bins$lengde; length(delta.t)->n.d
for(k in 1:n.d){
  Tetthet<-c(Tetthet,Histogram(X,delta.x[k],delta.t[k]))
}
plot(Tetthet[5]$mids*(delta.t[1]^(-nu.hat)),main="",log="y",col=1,,type="l",
Tetthet[4]$density*(delta.t[1]^nu.hat),ylim=c(10^-3,1),xlim=c(-3.3,3.3),
ylab=expression(italic(paste(Delta,t)^nu*p[paste(Delta,
t)](x*paste(Delta,t)^nu))),xlab=expression(italic(x)))
leg.txt<-paste(delta.t[1])
for(k in 1:(n.d-1)){
  lines(lwd=2,Tetthet[(5+7*k)]$mids*(delta.t[(k+1)]^(-nu.hat)),
Tetthet[(4+7*k)]$density*(delta.t[k+1]^nu.hat),col=(k+1))
  leg.txt<-c(leg.txt,paste(delta.t[(k+1)]))
}
legend(x="topleft",box.lty=0,legend=leg.txt,col=c(seq(1,n.d)),
lwd=c(seq(2,2,length=n.d)),lty=c(seq(1,1,length=n.d)))
rm(Tetthet,n.d,leg.txt)

#Strukturfunksjoner: Her demonstreres hvordan bakgrunnslinjer legges på.

```



```

#I tillegg er dette plottet litt penere (subjektivt).
par() -> old.par
par("mai") -> mai
mai[2] <- -mai[1]
par(mai=mai)
q <- seq(0, 3, by=.5)
n.q <- length(q)
n.t <- length(delta.t)
St <- matrix(nrow=n.q, ncol=n.t)
St[1,] <- Strukturfunksjon(q[1], delta.t, X)
for(k in 1:n.q) {
  St[k,] <- Strukturfunksjon(q[k], delta.t, X)
}
log(St) -> St
St[2:n.q,] <- St[2:n.q,] - St[2:n.q,1] + St[1,1]
exp(St) -> St
min.St <- min(St)
max.St <- max(St)
plot(delta.t, St[1,], type="l", log="xy", axes=F, ylim=c(min.St, max.St), lty=2, lwd=2,
      col="red", cex.lab=1.5, ylab=expression(italic(S[q] (paste(Delta, t)))),
      xlab=expression(italic(paste(Delta, t))), main="")
panel.first=c(abline(h=10^(-5:3), col="lightgray", lty=1, lwd=1),
              abline(h=c(10^-5*1:9, 10^-4*1:9, 10^-3*1:9, 10^-2*1:9, 10^-1*1:9, 10^0*1:9, 10^1*1:9,
                          10^2*1:9, 10^3*1:9), col="lightgray", lty=1, lwd=0.5))
axis(2, at=10^(-5:3), labels=c(expression(10^-5), expression(10^-4),
                                expression(10^-3), expression(10^-2), expression(10^-1), expression(10^0),
                                expression(10^1), expression(10^2), expression(10^3)),
      tck=.01, cex.axis=1.5, cex.lab=1.5)
panel.first=c(abline(v=10^(0:4), col="lightgray", lty=1, lwd=1),
              abline(v=c(10^0*1:9, 10^1*1:9, 10^2*1:9, 10^3*1:9, 10^4*1:9), col="lightgray",
                      lty=1, lwd=0.5))
axis(1, at=10^(0:4), labels=c(expression(10^0), expression(10^1), expression(10^2),
                                expression(10^3), expression(10^4)), tck=.01, cex.axis=1.5, cex.lab=1.5)
axis(side=3, labels=F, tck=.01)
axis(side=4, labels=F, tck=.01)
for(k in 1:n.q) {
  lines(delta.t, St[k,], type="l", col="red", lty=2, lwd=2)
}
box()
par(old.par)
#Skaleringsfunksjon:
Skaleringsfunksjon(q=seq(0, 3, by=.1), delta.t=2^(0:7), X) -> zeta
q <- seq(0, 1, by=.1)
lm(zeta[1:11] ~ q) -> LM
abline(a=LM$coefficients[1], b=LM$coefficients[2], col="red", lty=2, lwd=2)
leg.txt <- paste(format(LM$coefficients[2], digits=2))
legend(x=2, y=.6, box.lty=0, legend=leg.txt, col="red", lty=2, lwd=2, cex=1.5)
#####
#Testene over danner mye av utgangspunktet når vi har sett på
#de forskjellige modellene. Vi ser derfor kun på hvordan vi har oppnådd
#estimerer for de forskjellige modellene.
#Hypotese: Stabil Levy
library(fBasics)
#h.hat er her enten basert på skaleringsfunksjonen
#eller tetthetene (altså to forskjellige estimerer).
#Hente ut h.hat fra en av disse. Så bestemme alpha:
alpha <- -1/h.hat
dX <- X[2:n] - X[1:(n-1)]
dX <- dX - mean(dX)
#Likelihood:
negLogL <- function(theta, dX, alpha) {
  print(c("beta", c"))
}

```

```

print(theta)
ans<- -sum(log(dstable(x=dX,alpha=alpha,beta=theta[1],
gamma=theta[2],delta=0,pm=1)))
print(ans)
return(ans)
}
#så optimere:
par<-nlminb(start=c(0,1),objective=negLogL,lower=c(-1,.1),
upper=c(1,3),dX=dX,alpha=alpha)
#En tredje mulighet er ML med alpha fri. da justeres bare likelihooden over.
#####
#Hypotese: Trunkert stabil Levy
negLogL<-function(theta,dX){
  #theta=(beta,c,lambda)
  print(c("beta,c,lambda"))
  print(theta)
  ans<- -sum(log(dstlf(x=dX,alpha=theta[1],beta=theta[2],c=theta[3],
lambda=theta[4],mu=0)))
  print(ans)
  return(ans)
}
#####
#Hypotese: MMAR
#nu.hat fra tetthetene estimat for p:
c.nu<-2^(2*(nu.hat+1))
p<-0.5*(1-sqrt(1-4*(1+sqrt(1+c.nu))^2/(c.nu^2)))
#estimat for endepunktet T=2^m. Trenger dette for å simulere fra modellen:
#trenger pakke timeDate
library(timeDate)
kurtosis(dX)[1]->kurtose
hs<-log(2)+log(p^2+(1-p)^2)
vs<-log(kurtose/3)
M<-vs/hs
m<-round(M)
#####
#Hypotese: MSM
dX<-X[2:n]-X[1:(n-1)]
dX<-dX-mean(dX)
setWindowTitle("Analyse Nibor3m Hypoteste : MSM",suffix=Rgui)
#Hjelpfunksjon til likelihooden
omega2<-function(x,sigma=1,m){
  length(m)[1]->d
  ans<-matrix(nrow=d)
  ans[1:d,1]<-dnorm(x,sd=sigma*m)
  return(ans)
}
#Likelihooden. Denne funksjonen danner også grunnlaget for prediksjonene som er
#gjort i oppgaven: Ved å bruke denne funksjonen fram til prediksjonsorigo.
negLogL<-function(theta,dx,K){
  print(theta)
  #theta=(m0,m1,b,gamma.K)
  #x=X[2:n]-X[1:n-1] X normalisert
  #K ordens-parameter (# multipliers)
  #Hente ut parametre:
  theta[1]->m0
  theta[2]->m1
  theta[3]->b
  theta[4]->gamma.K
  p<-(m1-1)/(m1-m0)
  length(dx)->N
  d=2^K
  #Lager tilstandsmatrisa til Markovkjeden.

```

```

m<-matrix(nrow=d,ncol=K)
for(k in 1:K){
  m[,k]<-rep(c(rep(m0,2^(K-k)),rep(m1,2^(K-k))),2^(k-1))
}
#Lager overgangsmatrisa til Markovkjeden.
A<-matrix(nrow=d,ncol=d)
gamma<-seq(length=K)
gamma[1]<-1-(1-gamma.K)^(b^(1-K))
gamma<-1-(1-gamma[1])^(b^(0:(K-1)))
gammaNeg<-1-gamma
for(k in 1:d){
  m.k<-m[k,]
  for(j in 1:d){
    m.j<-m[j,]
    A[k,j]<-prod(as.numeric(m.j==m.k)*gammaNeg+as.numeric(m.j==m0)*p*gamma
+as.numeric(m.j==m1)*(1-p)*gamma)
  }
}
p.1<-matrix(nrow=d)
for(k in 1:d){
  p.1[k,]<-prod(as.numeric(m[k,]==m0)*p+as.numeric(m[k,]==m1)*(1-p))
}
rm(gamma,gammaNeg,p,m0,m1,m.k,m.j)
#Beregne betinga tettheter f.x
m2<-seq(length=d)
for(k in 1:d){
  m2[k]<-sqrt(prod(m[k,]))
}
rm(m)
m<-m2
rm(m2)
f.x<-matrix(nrow=N)
omega.x<-omega2(x=dx[1],m=m)
f.x[1,]<-t(p.1)%*%omega.x
for(k in 2:N){
  p.2<-1/(f.x[(k-1),])
  p.2<-p.2*(t(p.1)*t(omega.x))%*%A
  t(p.2)->p.2
  omega.x<-omega2(x=dx[k],m=m)
  f.x[k,]<-t(p.2)%*%omega.x
  p.1<-p.2
}
ans<-sum(log(f.x))
print(ans)
rm(k,N,p.1,p.2,A,omega.x,m,d)
return(ans)
}
#Optimering av likelihood:
par<-NULL
for(k in 2:9){
  print(date())
  print(k)
  par<-c(par,optim(par=c(0.5,1.6,1.5,.5),fn=negLogL,lower=c(.01,1.01,1.01,.01),
method="L-BFGS-B",upper=c(.99,Inf,Inf,.99),dx=dX,K=k,hessian=T))
  print(date())
  print(k)
}
}
#Optimering av likelihooden for prediksjonene som er gjort:
#første prediksjonsorigo 3064, oppdatering av parametre for 4064 og 5064
par<-NULL
for(k in 1:3){

```

```
N<-n-4000+k*1000
dX<-X[2:N]-X[1:(N-1)]
dX<-dX/sd(dX)
dX<-dX-mean(dX)
par<-c(par,optim(par=c(0.5,1.6,1.5,.5),fn=negLogL,lower=c(.01,1.01,1.01,.01),
method="L-BFGS-B",upper=c(.99,Inf,Inf,.99),dx=dX,K=9,hessian=T))
print(date())
}
#####
```